МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УЧЕБНИК

ЮНИТИ
UNITY

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Под редакцией
доктора экономических наук, профессора *М.В. Грачевой*;
кандидата физико-математических наук, доцента *Л.Н. Фадеевой*;
доктора экономических наук, профессора *Ю.Н. Черемных*

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве ***учебника*** *для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000)*

Рекомендовано Учебно-методическим центром «Профессиональный учебник» в качестве ***учебника*** *для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000)*

ЮНИТИ
UNITY
Москва • 2005

УДК 330.43(075.8)
ББК 65в6я73-1
М71

Рецензенты:
д-р экон. наук, проф. *Ю.Н. Гаврилец*
(зав. лабораторией математической социологии ЦЭМИ РАН)
д-р экон. наук, проф. *К.В. Папенов*
(зав. кафедрой экономики природопользования
экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова).

Главный редактор издательства
кандидат юридических наук,
доктор экономических наук *Н.Д. Эриашвили*

М71 **Моделирование экономических процессов**: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — 351с.

Агентство CIP РГБ

ISBN 5-238-00856-2

Рассмотрены теория оценивания эконометрических зависимостей, модели оптимизации потребительского выбора, производственные функции, модели и задачи теории отраслевых рынков, модели долгосрочного экономического равновесия, инструмент краткосрочного анализа экономики — модель IS-LM, вопросы открытой экономики, количественные методы экономических исследований, анализ эффективности инвестиционного проекта, количественные подходы к риск-анализу, проблемы надежности измерений с позиций надежности цен.

Для студентов и аспирантов экономических факультетов и вузов, а также преподавателей и научных работников.

ББК 65в6я73-1

ISBN 5-238-00856-2

Предисловие

В учебнике приведены и проанализированы микроэкономические и макроэкономические модели, а также основной материал по эконометрике, которая представляет собой важный инструмент описания, анализа и прогнозирования микро- и макроэкономических процессов.

Микроэкономические модели описывают задачи оптимизации потребления и производства, а также задачи теории отраслевых рынков, которые выделились из микроэкономики и имеют до сих пор с ней не пустое пересечение.

В учебнике представлены базовые модели макроэкономического анализа для краткосрочных и долгосрочных промежутков. Рассмотрены неоклассическая модель общего экономического равновесия, модели экономического роста (Харрода—Домара и Солоу), модели IS-LM и модели IS-LM в открытой экономике. С помощью этих моделей проанализированы основные взаимосвязи микроэкономических и макроэкономических переменных. Особое внимание уделяется последствиям различных вариантов макроэкономической политики. Выводы иллюстрируются конкретными макроэкономическими примерами из хозяйственной практики России и других стран.

В главе, посвященной экономико-математическому инструментарию и анализу проектных рисков на основе изучения современных проблем инвестиционной деятельности и внешней для проекта среды, описывается роль анализа проектных рисков в ходе разработки бизнес-плана проекта и управления им.

И, наконец, в учебнике рассмотрена слабо разработанная в учебной литературе проблема экономических измерений в стоимостном выражении, которая включает теорию стоимости как попытку обоснования надежности экономических измерений с помощью рыночных цен, современную теорию стоимости и цен, оптимизацию по Парето и теорию стоимости. В учебнике приведены примеры, иллюстрирующие применение разобранных математических методов.

При подготовке учебника был учтен многолетний опыт преподавания разнообразных математических моделей экономики на экономическом факультете МГУ и опыт других экономических вузов и факультетов.

Труд авторов разделился следующим образом:

глава 1	— канд. экон. наук, доц. *Е.Н. Лукаш*;
глава 2	— канд. экон. наук, доц. *В.А. Чахоян*;
глава 3	— д-р экон. наук, проф. *Ю.Н. Черемных*,
§§ 3.4, 3.5	— канд. экон. наук, доц. *О.О. Замков*;
глава 4	— д-р экон. наук проф. *Ю.Н. Черемных*;
глава 5	— ст. препод. *А.Д. Вурос*;
главы 6—8	— канд. экон. наук, доц. *Е.А. Туманова*, канд. экон. наук, доц. *Н.Л. Шагас*;
глава 9	— д-р экон. наук, проф. *М.В. Грачева*;
глава 10	— д-р экон. наук, проф. *Б.Л. Воркуев*.

1 Эконометрика: метод наименьших квадратов в регрессионном анализе

В данной главе рассматривается общая теория оценивания эконометрических зависимостей, входящая в начальный курс эконометрики. Показывается, что при определенном наборе допущений о структуре модели метод наименьших квадратов (МНК) дает оптимальные оценки параметров модели и что невыполнение этих допущений может привести к ошибочным выводам; закладывается фундамент для решения различных проблем эконометрики, возникающих при невыполнении этих допущений.

1.1. Экономические и статистические модели

Экономическую модель можно определить как модель, основанную на экономической теории. Экономическая теория обычно описывает устойчивые «долгосрочные» связи между переменными. Например, в теории потребления рассматривается простейшая форма зависимости потребления в период t (y_t) от дохода (x_t). Предполагая, что потребление пропорционально доходу и реагирует на его изменение моментально (в тот же период), можно записать, что

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t, \tag{1.1}$$

где ε_t — случайная ошибка (отклонение).

Наличие случайной ошибки в уравнении **(1.1)** выражает тот факт, что хотя доход и является наиболее существенным фактором, формирующим потребление, но знания величины дохода не достаточно для однозначного определения величины потребления — имеются дополнительные факторы, не учитываемые в модели явно, действие которых приводит к отклонениям от основной (модельной) зависимости. Свойства, которыми могут обладать случайные ошибки ε_t, будут обсуждаться позже.

Иногда можно получить хорошую аппроксимацию поведения y, не обращаясь ни к какой экономической теории. Одной из простых моделей временного ряда, описывающего динамику потребления, могла бы быть, например, так называемая авторегрессионная модель первого порядка AR(1):

$$y_t = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{1.2}$$

Возможно, что в рассматриваемом случае имеется *некоторая* экономическая теория, объясняющая разумность использования уравнения **(1.2)**, но важно подчеркнуть, что разработчик модели временного ряда преследует несколько иную цель, чем разработчик экономической модели. Первый из них стремится к такому описанию, которое является хорошим приближением поведения временного ряда для зависимой переменной, и не интересуется причинным механизмом формирования значений этой переменной. В противоположность ему усилия разработчика экономической модели направлены на объяснение поведения интересующей его переменной как результата действия на нее ряда факторов. Следуя экономической теории, он описывает предполагаемую зависимость между экзогенными и эндогенной переменными и затем пытается проверить сформулированную экономическую гипотезу, представленную, как правило, в виде некоторых *ограничений* на коэффициенты модели временного ряда. Например, согласно теории жизненного цикла потребления при рациональных ожиданиях разумно предположить, что в однофакторной модели потребления **(1.2)** будет выполняться соотношение $\alpha_2 = 1$.

1.2. Временные ряды и случайные процессы

Случайный процесс X_t — это семейство случайных величин, зависящих от параметра $t \in T$, интерпретируемого как время. При каждом конкретном значении t величина X_t может в зависимости от случая принимать одно из своих возможных значений. Так, если мы решили ежедневно в одно и то же время суток в течение недели записывать объем потребления электроэнергии в некоторой семье, то результат наблюдений можно описать набором из семи случайных величин (по одной на каждый день недели), которые вместе составляют случайный процесс. Любая конкретная реализация случайного процесса есть *временной ряд*. Любой элемент временного ряда — это *число*, называемое *наблюдением*. Любой элемент стохастического процесса — *случайная переменная*. Случайность здесь связана с тем, что запись результатов для любой другой недели даст новый конкретный набор из семи чисел. При этом нельзя сказать заранее, каким будет точный расход электричества в каждый из дней недели, но можно указать вероятности попадания наблюдений в любые конкретные промежутки возможных значений. Вообще, *моделирование* временного ряда подразумевает задание такого *случайного процесса*, который мог бы сгенерировать наблюдённый временной ряд. Следуя общепринятой практике, мы будем использовать одни и те же обозначения как для элементов случайного процесса, так и для элементов временного ряда.

1.3. Свойства случайных процессов

В приведенном выше примере с потреблением электроэнергии, *выборочное* среднее значение определяется как среднее арифметическое значений элементов наблюдённого временного ряда. *Теоретическое среднее значение* (или *математическое ожидание*) — это «ожидаемое» значение каждого элемента случайного процесса, т.е. результат осреднения всех возможных значений интересующей нас величины. Если процесс *эргодический*, то его начальные и центральные теоретические *моменты* (в том числе среднее, дисперсия и т.д.) могут быть оценены «хорошо» (или, если быть точным, «*состоятельно*» — см. ниже) при помощи соответствующих моментов наблюдённого временного ряда, взятого за достаточно длительный период времени.

Пусть, например, переменная y подчиняется модели AR(1) следующего вида:

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t , \qquad \textbf{(1.3)}$$

где ε_t — случайная величина с нулевой средней и постоянной дисперсией σ^2, не коррелирующая с любой другой величиной из последовательности $\{\varepsilon_t,\ t \in Z = \{...,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ ...\}\}$, т.е.

$$E(\varepsilon_t) = 0;$$

$$D(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2; \qquad \textbf{(1.4)}$$

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0 \text{ для любого } j \neq 0.$$

Случайный процесс с подобными свойствами часто называют «*белым шумом*». Класс процессов, являющихся белым шумом, входит в более общий класс случайных процессов, а именно *стационарных* случайных процессов. Случайный процесс y_t, $t \in Z$, *слабостационарен*[1], если имеет постоянные математическое ожидание и дисперсию, а ковариация между любыми двумя его элементами зависит только от промежутка времени между этими элементами:

---

[1] Слабостационарный процесс часто называют также *стационарным в широком смысле*.

$$E(y_t) = \mu ;$$

$$D(y_t) = E(y_t - \mu)^2 = \gamma(0) < \infty ; \qquad \textbf{(1.5)}$$

$$\operatorname{cov}(y_t, y_{t-j}) = \gamma(j) \text{ для любого } j.$$

Случайный процесс y_t, $t \in Z$ *строго стационарен*[1], если при любом n ($n = 1, 2, \ldots$) совместное распределение n элементов случайного процесса $y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_n}$, взятых для произвольных моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, не зависит от сдвига во времени, т.е. для любого целого числа T и любых промежутков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$:

$$P\{y_{t_1} \in [a_i, b_i], \ldots, y_{t_n} \in [a_n, b_n]\} = P\{y_{t_1+T} \in [a, b], \ldots, y_{t_n+T} \in [a_n, b_n]\}.$$

В данной главе термин *стационарность* будет в основном употребляться применительно к *слабой стационарности*. Если процесс строго стационарен и имеет конечные начальные моменты второго порядка, то, очевидно, он будет слабостационарным. Обратное, вообще говоря, не верно. Однако важно обратить внимание, что если процесс слабостационарен и нормально распределен, то он также *строго стационарен*.

Уравнение **(1.3)** можно записать следующим образом:

$$(1 - \beta L) y_t = \varepsilon_t , \qquad \textbf{(1.6)}$$

где L — оператор сдвига, для которого $L^m y_t = y_{t-m}$, и $(1 - \beta L)$ является, таким образом, полиномом первого порядка от оператора сдвига.

Если уравнение **(1.3)** записать для периода $t - 1$, получим

$$y_{t-1} = \beta y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

Подстановка равенства **(1.7)** в уравнение **(1.3)** даст уравнение:

$$y_t = \beta^2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Если в уравнении **(1.3)** заменить t на $t - 2$, т.е. перейти на два периода назад, и подставить результат в **(1.8)**, то получим выражение для y_t через переменные y_{t-3}, ε_t, ε_{t-1} и ε_{t-2}. Выполняя аналогичные подстановки лаговых значений y, после $n - 1$ замен получим

---

[1] Строго стационарый случайный процесс называют также *стационарным в узком смысле.*

$$y_t = \beta^n y_{t-n} + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \beta^3\varepsilon_{t-3} + \ldots + \beta^{n-1}\varepsilon_{t-n+1}. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Если $|\beta| < 1$, то по мере увеличения n ($n \to \infty$) β^n неограниченно уменьшается ($\beta^n \to 0$). Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$y_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \beta^3\varepsilon_{t-3} + \ldots, \qquad \textbf{(1.10)}$$

или с использованием оператора сдвига:

$$y_t = [1 + \beta L + (\beta L)^2 + (\beta L)^3 + \ldots]\varepsilon_t.$$

Применив к обеим частям этого уравнения оператор сдвига, умноженный на β, и вычтя полученное выражение из **(1.10)**, получим

$$(1 - \beta L) y_t = \varepsilon_t \qquad \textbf{(1.11)}$$

или, переходя к обратному оператору,

$$y_t = (1 - \beta L)^{-1}\varepsilon_t.$$

Поскольку ε_t, является белым шумом, то из **(1.10)** получим

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t) + \beta E(\varepsilon_{t-1}) + \beta^2 E(\varepsilon_{t-2}) + \ldots = 0;$$

$$D(y_t) = E(y_t^2) = (1 + \beta^2 + \beta^4 + \beta^6 + \ldots)\sigma_\varepsilon^2 = (1 - \beta^2)^{-1}\sigma_\varepsilon^2;$$

$$\operatorname{cov}(y_t, y_{t-j}) = E[(\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \ldots)\cdot(\varepsilon_{t-j} + \beta\varepsilon_{t-j-1} +$$

$$+ \beta^2\varepsilon_{t-j-2} + \ldots)] = \beta^j E(y_t^2). \qquad \textbf{(1.12)}$$

Сравнивая выражения **(1.12)** с **(1.5)**, получим, что процесс AR(1), заданный уравнением **(1.3)**, является стационарным при $|\beta| < 1$.

Фактически вся стандартная эконометрическая теория базируется на предположении о стационарности рассматриваемых процессов. Однако большое число экономических временных рядов — особенно в макроэкономике и финансах — не обладают свойством стационарности. Технике исследования нестационарных процессов посвящена обширная литература (см., например, [1], [2], [4]).

1.4. Свойства оценок

Эконометрика занимается в основном оценкой параметров экономических зависимостей и проверкой гипотез, относящихся к этим параметрам. Например, вновь рассмотрим простейшую кейнсианскую функцию потребления, связывающую потребление с доходом:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t. \qquad \textbf{(1.13)}$$

В экономической теории предлагается линейная форма функции потребления и даже обосновывается наличие ограничений на параметры. Например, если β_1 интерпретировать как автономное потребление, а β_2 — как предельную склонность к потреблению, то разумно считать, что

$$\beta_1 \geq 0\,,\ \ 0 \leq \beta_2 \leq 1\,.$$

Однако экономическая теория обычно не отвечает на вопрос о точных значениях параметров модели. Даже если точное значение параметра теоретически обосновано, эконометрист все равно может интересоваться оценкой параметра с целью проверки соответствия эмпирических данных и теоретических результатов. Таким образом, ***назначение эконометрики состоит в том, чтобы получать оценки неизвестных параметров в эмпирических экономических моделях и проверять связанные с ними гипотезы.***

Например, используя ежегодные данные за период 1929—1940 гг. о совокупном потреблении и доходе в США и учитывая инфляцию и рост населения, можно получить следующую оценку уравнения **(1.13)**:

$$y_t = 11{,}45 + 0{,}78 x_t\,. \qquad \textbf{(1.14)}$$

Таким образом, оценки автономного потребления β_1 и предельной склонности к потреблению β_2 составили, соответственно 11,45 и 0,78. Эти числа получены по определенным эконометрическим формулам. По традиции, сложившейся в русскоязычной литературе, как сами эти формулы, так и результаты вычислений по ним, называются ***оценками***. В то же время в английской терминологии используются два разных понятия: *estimator* — оценка, «оценщик», т.е. формула для оценивания, и *estimate* — оценка, оцененное значение, т.е. результат оценивания.

Вообще говоря, для оценивания одних и тех же параметров эконометрической модели могут быть предложены различные формулы (методы), которые, очевидно, будут приводить к разным результатам. Одни из них могут быть явно хуже других, но в некоторых случаях предпочтительность одних оценок перед другими не так очевидна. Таким образом, необходимо иметь набор формальных критериев, по которым можно было бы «проверить качество» методов оценивания.

1.4.1. Распределение оценки

Рассмотрим модель:

$$y_t = \beta x_t + \varepsilon_t, \tag{1.15}$$

где ε_t — белый шум.

Уравнение **(1.15)** задает предполагаемый процесс генерации значений y_t. Выберем какой-нибудь метод оценивания параметра β и обозначим соответствующую формулу для оценки через $\hat{\beta}$. По конкретным наблюдённым значениям временных рядов y и x можно получить конкретное значение оценки. Однако данные временные ряды — это одна из возможных реализаций случайных процессов, поэтому, рассуждая теоретически, мы могли бы вместо данной реализации иметь несколько другую реализацию и (на основе той же самой формулы $\hat{\beta}$) получить другой числовой результат. Теоретически значение оценки будет меняться в зависимости от различных реализаций. Это служит основанием для того, чтобы считать, что оценка $\hat{\beta}$ является случайной величиной, имеющей неконтролируемый разброс, обусловленный случайностью механизма формирования наблюдаемого временного ряда. Так мы приходим к понятию *распределения* оценки, которое задается законом распределения вероятностей случайной величины $\hat{\beta}$ и позволяет вычислить вероятность попадания оценки в любой указанный интервал.

Для конкретности предположим, что x является по сути детерминированной (неслучайной) переменной с заранее заданными фиксированными значениями: например, x может быть временным параметром со значениями 1, 2, 3, ..., *n*. Тогда, воспользовавшись генератором случайных чисел, мы могли бы произвести серию, например, из 2500 экспериментов *Монте-Карло*, генерируя в каждом из них реализацию ряда случайных ошибок $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ длиной *n*. Имея фиксированный временной ряд для x и используя уравнение **(1.15)**, в котором значение β зафиксировано, например, на уровне $\beta = 3{,}5$, можно рассчитать 2500 временных рядов для y. Поскольку в ходе проведения эксперимента истинное значение β известно, то, построив 2500 реализаций оценки $\hat{\beta}$ по *повторным выборкам,* можно определить характер распределения значений оценки $\hat{\beta}$ по отношению к β. Для этого строится гистограмма значений оценки, которая является эмпирической аппроксимацией ее теоретического закона распределения. Метод Монте-Карло используется для построения *эмпирического распределения* оценки в том случае, когда модель или метод оценивания особенно сложны и поведение оценки не поддается теоретическому анализу. Однако часто свойства распределения оценки можно вывести, считая, что для модели выполняются те или иные предположения.

Качество оценки (метода оценивания) обычно проверяется путем анализа свойств ее распределения. В частности, метод оценивания будет очевидно предпочтительнее, если вероятность того, что он даст оценку, близкую к истинному (но неизвестному) значению оцениваемого параметра, будет достаточно велика.

1.4.2. Несмещенность

Первое из рассматриваемых свойств — несмещенность. Оценка параметра называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемого параметра. Это означает, что положительные и отрицательные отклонения значений оценки, полученные (по разным выборкам), «взаимно компенсируются», т.е. осреднение (по всевозможным выборкам) значений оценки дает истинное значение параметров.

Разумеется, не всякая оценка является несмещенной. Назовем *смещением оценки* разность между ее математическим ожиданием и истинным значением оцениваемого параметра:

$$B = E\hat{\beta} - \beta. \qquad \textbf{(1.16)}$$

При $B \neq 0$ оценка является *смещенной*. Ясно, что при наличии достаточно большого смещения и относительно малого разброса (дисперсии) оценки вокруг своего математического ожидания значения оценки не будут концентрироваться рядом с истинным значением параметра. Таким образом, использование несмещенных оценок часто оказывается более предпочтительным.

Рассмотрим теперь две оценки одного и того же параметра, распределения которых обладают следующими свойствами: $\hat{\beta}$ — несмещенная оценка с большой дисперсией; $\tilde{\beta}$ — оценка с небольшим смещением, но сравнительно малой дисперсией. В данном случае более предпочтительной будет оценка $\tilde{\beta}$, поскольку ее значения, вычисленные по различным выборкам (теоретически возможным при повторениях наблюдений), будут чаще оказываться в окрестности истинного значения параметра β. Данный пример подчеркивает важную роль дисперсии оценки как измерителя качества оценивания.

1.4.3. Наилучшая несмещенная оценка

Как было показано выше, решение о том, какой метод оценивания «лучше», должно основываться на рассмотрении не только математических ожиданий оценок, но и их дисперсий. Однако говорить об оценке с «минимально возможной» дисперсией следует с осторожностью.

Предположим, например, что для оценки параметра β в модели **(1.15)** используется оценка $\hat{\beta} = 123{,}4$, принимающая одно и то же значение вне зависимости от содержательного смысла задачи или имеющихся выборочных данных. Поскольку эта оценка не меняется, ее дисперсия равна нулю — наименьшему из возможных значений. По этой причине, очевидно, необходимо ограничить поиск минимальной дисперсии каким-либо классом оценок. Обычно это достигается за счет рассмотрения только несмещенных оценок.

Рассмотрим две несмещенные оценки, одна из которых ($\hat{\beta}$) имеет распределение с меньшей дисперсией, чем другая оценка ($\tilde{\beta}$). Ясно, что более приемлем метод оценивания по формуле $\hat{\beta}$, так как она чаще будет давать оценку, близкую к истинному значению оцениваемого параметра, чем $\tilde{\beta}$.

Оценка, которая имеет наименьшую дисперсию среди оценок некоторого класса, называется *наиболее эффективной* или *наилучшей* в этом классе.

Вообще говоря, существует общий подход к выбору оценок — *принцип максимального правдоподобия*, использование которого во многих ситуациях позволяет получать наилучшую несмещенную оценку, если она существует. Однако часто бывает удобно ограничиться рассмотрением оценок, являющихся линейными функциями ошибок. Оценка, которая является линейной, несмещенной и имеет наименьшую дисперсию среди всех линейных несмещенных оценок, называется *наилучшей линейной несмещенной оценкой.*

Если мы оцениваем более чем один параметр, то понятие эффективности необходимо уточнить. При наличии двух оценок $\hat{\beta}$ и $\tilde{\beta}$ k-мерного векторного параметра β обычно сравнивают ковариационные матрицы этих оценок, имеющие размерности $k \times k$. Если разность ковариационных матриц $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) - \mathrm{Var}(\hat{\beta})$ неотрицательно определена, то говорят, что векторная оценка $\hat{\beta}$ является более эффективной, чем $\tilde{\beta}$.

1.4.4. Асимптотические свойства оценок

Следует подчеркнуть, что рассмотренные выше теоретические свойства «хорошей» оценки (несмещенность, эффективность) должны выполняться при любом фиксированном объеме выборочных наблюдений, используемых при ее вычислении. Так, например, математическое ожидание несмещенной оценки должно совпадать с оцениваемым параметром вне зависимости от количества имеющихся наблюдений. Однако во многих случаях оценка с такими свойствами не существует. Тогда следует обратиться к *асимптотическим* свойствам оценки, т.е. посмотреть, как она ведет себя, когда используется очень большое (неограниченно растущее) количество выборочных наблюдений. Иногда, если известны только асимптотические свойства рассматриваемой оценки, ее поведение при малых объемах выборки исследуют путем имитации подходящего механизма получения данных с помощью метода Монте-Карло.

Интуитивное представление о том, чем занимается асимптотическая теория, можно получить с помощью все тех же экспериментов Монте-Карло. Пусть данные формируются в соответствии с уравнением **(1.15)** при заданном значении параметра β, причем объясняющая переменная x имеет неслучайный характер (например, является временем) и, таким образом, список ее значений заранее известен и фиксирован. При заданном объеме выборки T первый шаг процедуры Монте-Карло состоит в генерации последовательности значений случайных ошибок ε_t, $t = 1, 2, \ldots, T$ и соответствующих значений зависимой переменной y_t. На втором шаге по полученным данным и известной формуле оценочной функции $\hat{\beta}$ вычисляется значение оценки параметра β. Многократное повторение этой двухшаговой процедуры (при одном и том же объеме выборки T) позволит получить достаточно длинную серию реализаций оценки $\hat{\beta}$ и построить по ней гистограмму распределения этой оценки.

Изложенная процедура многократной генерации временных рядов ε и y определенной длины T с последующим вычислением гистограммы распределения оценки $\hat{\beta}_T$ может быть реализована для некоторого начального значения $T = T_0$, например, для 100 наблюдений. Далее такие же эксперименты Монте-Карло можно повторить для $T = T_0 + 1$, затем для $T = T_0 + 2$ и так далее, увеличивая T. При каждом значении T будет получено отдельное эмпирическое распределение, соответствующее оценке $\hat{\beta}_T$. Если свойства оценки не зависят от объема выборки T, то гистограммы распределений будут выглядеть практически одинаково. Если же объем выборки сказывается на поведении оценки, то вид распределений (их форма и/или положение) будет меняться при росте T.

Осуществление подобных компьютерных экспериментов необходимо далеко не всегда. Во многих случаях поведение оценок при больших T можно исследовать математически. Свойства оценок, полученные при $T \to \infty$, называются *асимптотическими свойствами.*

Как мы упоминали ранее, форма и положение эмпирического распределения для малых значений T может рассматриваться для того, чтобы проверить свойства оценки при малом объеме выборки, если они не могут быть получены математически. Заметим, что последовательность $\hat{\beta}_T$, $T = T_0$, $T_0 + 1$, $T_0 + 2$, ..., где $\hat{\beta}_T$ обозначает оценку (формулу для оценивания), вычисляемую по выборке объема T, сама является случайным процессом, так как каждый член этой последовательности — случайная величина, принимающая те или иные значения в зависимости от конкретной реализации наблюдаемых временных рядов.

Предел распределения оценки, если он существует, при стремлении T к бесконечности, называется *асимптотическим распределением* оценки. Если математическое ожидание оценки стремится к истинному значению оцениваемого параметра, то оценка называется *асимптотически несмещенной.* Однако чаще нас будет интересовать другое асимптотическое свойство — *состоятельность.* Образно говоря, оценка называется *состоятельной*, если по мере увеличения числа наблюдений T значения (распределение значений) оценки все сильнее концентрируются вокруг истинного значения параметра. Формально *состоятельность* означает, что вероятность того, что разность между значением оценки и истинным значением параметра превзойдет произвольно заданную (сколь угодно малую) величину, должна стремиться к нулю при стремлении объема выборки к бесконечности:

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\left|\hat{\beta}_T - \beta\right| > \delta\right\} = 0 . \qquad \textbf{(1.17)}$$

Если оценка состоятельна, т.е. для нее выполняется предельное соотношение **(1.17)**, то говорят, что ее ***предел по вероятности*** равен истинному значению оцениваемого параметра, и пишут

$$\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \beta . \qquad \textbf{(1.18)}$$

Таким образом, «состоятельность» и «сходимость по вероятности» — это синонимы.

Если оценивается вектор параметров, то оценка считается состоятельной, если каждая компонента вектора оценок сходится по вероятности к соответствующей компоненте вектора истинных значений параметров.

Пусть имеется две оценки, вычисляемые по выборке объема T, $\hat{\alpha}_T$ и $\hat{\beta}_T$, такие, что наряду с соотношением **(1.18)** выполняется также

$$\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\alpha}_T = \alpha . \qquad \textbf{(1.19)}$$

Тогда справедливы следующие свойства пределов по вероятности:

$$\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty}(\hat{\alpha}_T \pm \hat{\beta}_T) = \operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\alpha}_T \pm \operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\beta}_T = \alpha \pm \beta ; \qquad \textbf{(1.20, a)}$$

$$\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty}(\hat{\alpha}_T \hat{\beta}_T) = \{\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\alpha}_T\}\{\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\beta}_T\} = \alpha\beta . \qquad \textbf{(1.20, b)}$$

Если $\hat{\beta}_T \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то

$$\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty}(\hat{\alpha}_T / \hat{\beta}_T) = \{\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\alpha}_T\}/\{\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\beta}_T\} = \alpha / \beta. \qquad \textbf{(1.20, c)}$$

Если $\hat{\beta}_T \geq 0$ и $\beta \geq 0$, то

$$\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty}(\sqrt{\hat{\beta}_T}) = \sqrt{\operatorname*{p\lim}_{T\to\infty} \hat{\beta}_T} = \sqrt{\beta} . \qquad \textbf{(1.20, d)}$$

Если γ — константа, то

$$\underset{T \to \infty}{p \lim} \gamma = \gamma . \qquad \textbf{(1.20, } \textbf{\textit{e}}\textbf{)}$$

Если φ — непрерывная функция, то

$$\underset{T \to \infty}{p \lim} \varphi(\hat{\beta}_T) = \varphi(\beta) . \qquad \textbf{(1.20, } \textbf{\textit{f}}\textbf{)}$$

Утверждение **(1.20, *f*)** называется *теоремой Слуцкого*. Оно справедливо не только в случае одного числового параметра β, но и если β — вектор. Тогда φ — непрерывная функция соответствующего числа аргументов. Легко заметить, что свойства **(1.20, *a*)**, **(1.20, *b*)**, **(1.20, *c*)** и **(1.20, *d*)** являются следствиями теоремы Слуцкого.

Следует обратить внимание на различия между понятиями математического ожидания и дисперсии асимптотического распределения оценки при $T \to \infty$, пределами математического ожидания и дисперсии оценки при $T \to \infty$ и пределом по вероятности оценки при $T \to \infty$.

В некоторых случаях пределы математического ожидания и дисперсии оценки при $T \to \infty$ могут не существовать, в то время как математическое ожидание и дисперсия асимптотического распределения существуют, поэтому использование моментов асимптотического распределения считается более удобным.

Достаточное условие состоятельности оценки состоит в том, чтобы среднее асимптотического распределения было равно истинному значению параметра и дисперсия асимптотического распределения равнялась нулю. Приведем пример, показывающий, что это условие не является необходимым.

Предположим, что распределение оценки $\hat{\beta}_T$ при фиксированном объеме выборки T с вероятностью, практически равной единице, концентрируется в малой окрестности точки β, а с оставшейся (почти нулевой) вероятностью может принимать значения близкие к T. Точнее, пусть

$$P\left\{|\hat{\beta}_T - \beta| < \frac{1}{2T}\right\} = 1 - \frac{1}{T} \text{ и } P\left\{|\hat{\beta}_T - T| < \frac{1}{2T}\right\} = \frac{1}{T}.$$

Для простоты дальнейших выкладок будем дополнительно считать, что оценка $\hat{\beta}_T$ имеет функцию плотности, которая принимает значение $T - 1$ на отрезке длины $1/T$ с центром в точке β, значение 1 на отрезке длины $1/T$ с центром в точке T и значение 0 в остальных случаях. Ясно, что такая оценка является состоятельной, так как $P\left\{|\hat{\beta}_T-\beta|>\frac{1}{2T}\right\}=\frac{1}{T}\to 0$ при $T\to\infty$. В результате прямых вычислений нетрудно получить следующие результаты:

$$\lim_{T\to\infty} E(\hat{\beta}_T)=\beta+1 \text{ и } \lim_{T\to\infty} D(\hat{\beta}_T)=\infty.$$

Таким образом, предел математического ожидания оценки не совпадает с истинным значением оцениваемого параметра (асимптотической несмещенности нет) и, более того, асимптотически дисперсия оценки бесконечно велика, тем не менее оценка является состоятельной.

1.5. Линейная модель множественной регрессии

Рассматриваемая ниже линейная модель составляет основу эконометрики. Базируясь на определенном наборе допущений, изложим основополагающую процедуру эконометрического оценивания параметров этой модели — *метод наименьших квадратов* (МНК). Значительная часть стандартного курса эконометрики посвящена адаптации этого метода к ситуациям, в которых одна или несколько так называемых классических предпосылок не работают. Для того, чтобы предлагаемый обзор имел как можно более общий характер, далее в этой главе используется в основном матричная форма записи.

1.5.1. Классические допущения, МНК и теорема Гаусса—Маркова

Пусть процесс, порождающий значения наблюдаемой переменной y_t, есть сумма линейной комбинации k объясняющих переменных x_{jt}, $j=1, ..., k$ и случайного отклонения u_t:

$$y_t=\beta_1 x_{1t}+\beta_2 x_{2t}+\beta_3 x_{3t}+...+\beta_k x_{kt}+u_t,\ t=1,2,...,T, \quad \textbf{(1.21)}$$

где β_j не известны.

Главная задача эконометрики состоит в том, чтобы получить «оптимальные» оценки неизвестных параметров зависимости **(1.21)**. Имея исходный массив наблюдений $\{(y_t, x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{kt}),\ t=1, 2, ..., T\}$, можно от системы соотношений **(1.21)** перейти к записи в матричной форме:

$$Y=X\beta+u, \quad \textbf{(1.22)}$$

где

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_T \end{pmatrix};\ X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1T} & x_{2T} & x_{3T} & \cdots & x_{kT} \end{bmatrix};\ \beta=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix};\ u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_T \end{pmatrix}.$$

Таким образом, Y — вектор наблюдаемых значений зависимой (объясняемой) переменной размерности $T\times 1$; X — матрица наблюдений объясняющих переменных («регрессоров») размерности $T\times k$; β — вектор неизвестных коэффициентов размерности $k\times 1$; u — вектор ненаблюдаемых случайных отклонений (регрессионных ошибок) размерности $T\times 1$. Матрицу X иногда также называют «матрицей плана».

В классической линейной регрессионной модели вводится ряд допущений, позволяющих установить различные свойства эконометрических оценок коэффициентов.

1. Все случайные отклонения имеют нулевые математические ожидания, одинаковые дисперсии σ^2 и являются взаимно некоррелированными:

$$E(u)=0,\ \ \mathrm{Var}(u)=\sigma^2 I\ .$$

2. Объясняющие переменные неслучайны и, таким образом, не зависят от случайных отклонений:

$$E(X'u)=0\ .$$

3. Объясняющие переменные линейно независимы:

$$\mathrm{rank}(X'X)=\mathrm{rank}(X)\ =k$$

и, следовательно, существует обратная матрица $(X'X)^{-1}$.

Важно отметить, что до сих пор не было сделано никаких допущений относительно характера статистического распределения случайных отклонений. Также не говорилось, что отклонения распределены независимо (т.е. не требовалось, чтобы функция плотности их совместного распределения была равна произведению функций плотности отдельных отклонений), хотя при условии нормальности распределения это свойство следует из нулевой корреляции.

Оценка по методу наименьших квадратов (МНК-оценка) $\hat{\beta}$ для вектора β является результатом минимизации суммы квадратов остатков, получаемых при подстановке вместо неизвестных коэффицинтов β произвольного набора конкретных числовых значений b:

$$S(b) = \left(Y - Xb\right)'\left(Y - Xb\right) \to \min_{b \in R^k}. \tag{1.23}$$

Необходимые условия экстремума (условия первого порядка) для функции **(1.23)** примут вид:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2X'(Y - Xb) = 0,$$

это выражение можно переписать в форме «нормальных уравнений»:

$$X'Y = X'Xb \tag{1.24}$$

и, поскольку согласно допущению *3* матрица $\left(X'X\right)$ невырожденная, то, решая уравнение **(1.24)** относительно b, получим оценку по методу наименьших квадратов:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y. \tag{1.25}$$

Выражение **(1.25)** описывает решение задачи минимизации **(1.23)**, поскольку в точке $b = \hat{\beta}$ выполнены достаточные условия экстремума (условия второго порядка):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b\ \partial b'} = 2X'X,$$

где $X'X$ — положительно определенная матрица.

Поскольку элементы матрицы X фиксированы, выражение $\left(X'X\right)^{-1}X'Y$ можно интерпретировать как линейную функцию, которая отображает («проектирует») любой вектор Y из T-мерного пространства в вектор β из k-мерного пространства:

$$\left(X'X\right)^{-1}X' : R^T \to R^k.$$

Соответственно, матрицу $\left(X'X\right)^{-1}X'$ часто называют ***проекционной матрицей*** P_X. Полезно отметить, что $P_X X = I$. Очевидно, что оценка $\hat{\beta} = P_X Y$ — линейная функция от Y. Она также является несмещенной в том смысле, что математическое ожидание оценки $\hat{\beta}$ равно вектору истинных значений оцениваемых параметров β:

$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'Y] = E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + u)] =$$

$$= \beta + (X'X)^{-1}E(X'u) = \beta. \qquad \textbf{(1.26)}$$

В сделанных преобразованиях использовано выражение $P_X X = I$, а также допущение *2* (о неслучайности объясняющих переменных). Из уравнения **(1.26)** следует, что $\hat{\beta}$ является также линейной функцией ошибок u.

Ковариационная матрица вектора оценок $\hat{\beta}$ легко вычисляется с помощью выражения $\hat{\beta} = \beta + P_X u$:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}\right) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = E[P_X uu'P_X] =$$

$$= (X'X)^{-1}X'\left(\sigma^2 I\right)X(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}, \qquad \textbf{(1.27)}$$

в преобразованиях использованы допущения *1* и *3*.

Можно показать, что при выполнении допущений *1—3* для любой другой линейной несмещенной оценки $\tilde{\beta}$ вектора коэффициентов β «дисперсия» $\tilde{\beta}$ превосходит «дисперсию» $\hat{\beta}$ в том смысле, что $[\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) - \mathrm{Var}(\hat{\beta})]$ — неотрицательно определенная матрица (теорема Гаусса—Маркова). Действительно, поскольку $\tilde{\beta}$ — линейная оценка, ее можно записать в виде $\tilde{\beta} = AY$, где A — матрица констант размерности $k \times T$.

Пусть $C = A - (X'X)^{-1}X'$, тогда очевидно, что

$$\tilde{\beta} = [(X'X)^{-1}X' + C]Y = [(X'X)^{-1}X' + C](X\beta + u) =$$

$$= \beta + CX\beta + [(X'X)^{-1}X' + C]u.$$

Таким образом,

$$E(\tilde{\beta}) = \beta + CX\beta.$$

Следовательно, поскольку оценка $\tilde{\beta}$ должна быть несмещенной, то $CX = 0$. Тогда

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = E(\tilde{\beta}-\beta)(\tilde{\beta}-\beta)' = E[(X'X)^{-1}X'+C]uu'[(X'X)^{-1}X'+C]' =$$

$$= \sigma^2[(X'X)^{-1}+CC'].$$

Следовательно,

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) - \mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 CC'.$$

Итак, $\mathrm{Var}(\tilde{\beta})$ превышает $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ на неотрицательно определенную матрицу. В частности, диагональные элементы матрицы $\sigma^2 CC'$ неотрицательны, поэтому выполняются неравенства:

$$D(\tilde{\beta}_j) - D(\hat{\beta}_j) \geq 0; \quad j = 1, \ldots, k.$$

Таким образом, при выполнении допущений *1—3* каждая из МНК-оценок $\hat{\beta}_j$ является наилучшей (имеет наименьшую дисперсию) в классе несмещенных линейных оценок параметра β_j.

1.5.2. Качество модели: коэффициент детерминации и дисперсия отклонений

Получив МНК-оценку $\hat{\beta}$, мы можем представить вектор Y как сумму «объясненной» составляющей $\hat{Y}$ и «необъясненной» составляющей $\hat{u}$:

$$Y = X\hat{\beta} + \hat{u} = \hat{Y} + \hat{u}. \qquad \textbf{(1.28)}$$

Один из способов определить, насколько хорошо предложенная модель согласуется с наблюдёнными значениями, состоит в том, чтобы рассчитать долю вариации Y, объясняемую вариацией $\hat{Y}$, и необъясняемую долю, связанную с вариацией остатков $\hat{u}$. В качестве одной из мер разброса можно использовать $Y'Y$ — сумму квадратов значений y_t. Пользуясь уравнением **(1.28)**, получим

$$Y'Y = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} + \hat{u}'\hat{u} + 2\hat{\beta}'X'\hat{u}. \qquad \textbf{(1.29)}$$

С помощью МНК-оценки $\hat{\beta}$ строится вектор остатков $\hat{u} = Y - X\hat{\beta}$, который, как легко показать, ортогонален к объясняющим переменным:

$$X'\hat{u} = X'(Y - X\hat{\beta}) = X'[I - X(X'X)^{-1}X']Y = 0.$$

Отсюда следует, что последний элемент в уравнении **(1.29)** равен нулю. Таким образом, величина $Y'Y$ может быть разбита на две составляющие, одна из которых выражена через объясняющие переменные, а другая не объясняется моделью:

$$Y'Y = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} + \hat{u}'\hat{u} = \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{u}'\hat{u}. \qquad \mathbf{(1.30)}$$

Однако обычно принято измерять разброс значений переменной вокруг ее среднего. Введем соответствующий показатель для переменной y — общую сумму квадратов отклонений (TSS, *total sum of squares*):

$$\mathrm{TSS} = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2,$$

где $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t$, тогда

$$\mathrm{TSS} = Y'Y - T\,\bar{y}^2.$$

Вычитая $T\,\bar{y}^2$ из выражения **(1.30)**, получим

$$\mathrm{TSS} = (\hat{Y}'\hat{Y} - T\,\bar{y}^2) + \hat{u}'\hat{u}. \qquad \mathbf{(1.31)}$$

Если модель содержит свободный член, то $x_{1t} = 1$ для всех значений t, и первая строка системы нормальных уравнений **(1.24)** примет вид:

$$x_1'Y = x_1'X\hat{\beta} = T\,\bar{\hat{y}},$$

где $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1T})' = (1,\ 1,\ \ldots,\ 1)'$,

тогда $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t = T^{-1} x_1'X\hat{\beta} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{y}_t = \bar{\hat{y}}$.

Таким образом, первое слагаемое из правой части уравнения **(1.31)**, стоящее в скобках, измеряет разброс значений объясняемой части Y, т.е. $\hat{Y}$, вокруг своего среднего значения или объясненную сумму квадратов отклонений (ESS, *explained sum of squares*). Легко показать, что остатки, полученные с помощью МНК, имеют нулевое среднее значение, поэтому второй член, стоящий справа в уравнении **(1.31)**, отражает разброс значений необъясняемой моделью части Y, т.е. $\hat{u}$, вокруг своего нулевого среднего или необъясненную (остаточную) сумму квадратов (USS, *unexplained sum of squares*):

$$\text{TSS} = \text{ESS} + \text{USS}, \tag{1.32}$$

где $\text{ESS} = \sum_{t=1}^{T} (\hat{y}_t - \bar{y})^2$; $\text{USS} = \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2$.

Коэффициент детерминации, или R^2, измеряет долю объясненной дисперсии (ESS) в общей дисперсии (TSS) зависимой переменной:

$$R^2 = \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{\text{USS}}{\text{TSS}}. \tag{1.33}$$

Очевидно, что $0 \le R^2 \le 1$. Коэффициент R^2 показывает качество подгонки модельных значений $\hat{y}_t$ к фактически наблюдённым значениям y_t. Чем R^2 ближе к единице, тем лучше подгонка по модели регрессии.

С ростом числа регрессоров коэффициент детерминации R^2 не может убывать, в большинстве случаев он возрастает. В этом плане R^2 не совсем удобен при сравнении нескольких регрессионных уравнений. Последнее является основанием для рассмотрения подправленного (*adjusted*) коэффициента детерминации R^2_{adj}, в котором делается корректировка на число степеней свободы, «неучтенных» при конструировании R^2: k степеней свободы используют для коррекции величины ESS (по числу параметров, которые потребовалось оценить для его вычисления) и одну степень свободы — при расчете TSS (из-за наличия величины $\bar{y}$, оценивающей среднее значение y). Подправленный коэффициент детерминации задается формулой:

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{\text{USS}/(T-k)}{\text{TSS}/(T-1)} = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}/(T-k)}{(Y'Y - T\,\bar{y}^2)/(T-1)}, \tag{1.34}$$

или $$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{T-1}{T-k}.$$

1.5.3. Дисперсия отклонений

Несмещенная оценка дисперсии отклонений σ^2 обычно обозначается как s^2:

$$s^2 = \hat{u}'\hat{u}/(T-k).$$

Докажем, что s^2 — действительно является несмещенной оценкой σ^2. Пусть $M = I - X(X'X)^{-1}X'$, тогда

$$\hat{u} = Y - X\hat{\beta} = (X\beta + u) - (X\beta + XP_X u) = (I - XP_X)u .$$

Таким образом, $\hat{u} = Mu$, где $M = I - XP_X$.

Очевидно, что матрица M симметрична ($M = M'$) и идемпотентна $\left(M^2 = M\right)$. Следовательно, $\hat{u}'\hat{u} = u'M'Mu = u'Mu$, откуда

$$s^2 = u'Mu/(T-k). \tag{1.35}$$

Поскольку величина s^2 — скаляр, то она, очевидно, равна своему следу[1]. Пользуясь свойствами следа, получим:

$$E(s^2) = E[\mathrm{tr}[u'Mu]/(T-k)] =$$

$$= \mathrm{tr}[M \cdot Euu']/(T-k) = \mathrm{tr}[M\sigma^2 I]/(T-k) =$$

$$= \sigma^2(\mathrm{tr}M)/(T-k).$$

Поскольку $\mathrm{tr}M = \mathrm{tr}I_T - \mathrm{tr}X(X'X)^{-1}X' = T - \mathrm{tr}(X'X)^{-1}X'X = T - \mathrm{tr}I_k = T - k$, то

$$E(s^2) = \sigma^2. \tag{1.36}$$

Таким образом, s^2 является несмещенной оценкой σ^2.

Можно показать, что если из двух регрессионных моделей одна является истинной, то математическое ожидание s^2 для истинной модели не превышает математического ожидания s^2 для альтернативной модели. Действительно, пусть $Y = X\beta + u$ является истинной моделью, а $Y = Z\gamma + u$ — альтернативная модель, где X и Z — матрицы размерностей $T \times k_X$ и $T \times k_Z$ соответственно, а X содержит по меньшей мере одну переменную, не включенную в Z. Пользуясь тем, что для первой модели

$$\hat{u} = Y - X\hat{\beta} = Y - X(P_X Y) = (I - XP_X)Y = M_X Y,$$

где $M_X = I - X(X'X)^{-1}X'$, получим

$$s_X^2 = Y'M_X Y/(T - k_X).$$

Аналогично, для второй модели имеем

$$s_Z^2 = Y'M_Z Y/(T - k_Z),$$

где $M_Z = I - Z(Z'Z)^{-1}Z'$.

---

[1] Напомним, что следом квадратной матрицы A называется число $\mathrm{tr}(A)$, равное сумме элементов, стоящих на главной диагонали матрицы. Для матриц A и B размерностей $k \times n$ и $n \times k$, соответственно, выполняется свойство: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Отсюда следует, что

$$(T-k_Z)E(s_Z^2)=E(Y'M_ZY)=E[(X\beta+u)'M_Z(X\beta+u)]=$$
$$=\beta'X'M_ZX\beta+E(u'M_Zu)=\beta'X'M_ZX\beta+(T-k_Z)\sigma^2\geq(T-k_Z)\sigma^2.$$

Следовательно, $E(s_Z^2)\geq\sigma^2$, и, учитывая несмещенность оценки s_X^2 в «истинной модели», получим

$$E(s_Z^2)\geq E(s_X^2). \tag{1.37}$$

Соотношение **(1.37)** иногда используют для обоснования стратегии выбора спецификации, максимизирующей R^2, поскольку из уравнения **(1.33)** следует, что

$$R^2=1-\frac{(T-k)s^2}{(T-1)s_y^2}, \tag{1.38}$$

где s_y^2 — выборочная дисперсия y_t.

Последнее соотношение показывает, что отбор переменных, направленный на минимизацию s^2, одновременно ведет к максимизации R^2.

1.5.4. Линейные ограничения

Предположим, что в соответствии с некоторой экономической теорией, лежащей в основе рассматриваемой модели, параметры β этой модели должны удовлетворять одному или нескольким линейным ограничениям. Тогда желательно, чтобы и оценки параметров тоже удовлетворяли этим ограничениям.

Любой набор линейных ограничений можно записать в виде:

$$R\hat{\beta}=r, \tag{1.39}$$

где R — матрица размерности $q\times k$; q — число ограничений; r — вектор размерности $q\times 1$.

Нет смысла рассматривать систему несовместных ограничений. Также не следует включать в число ограничений те, которые можно представить в виде линейных комбинации других. Поэтому разумно считать, что $q\leq k$, $\operatorname{rank}(R)=q$.

Если, например, в модели с тремя параметрами, необходимо получить вектор оценок $\hat{\beta}=(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \hat{\beta}_3)'$, удовлетворяющий ограничениям

$$\hat{\beta}_1=2;\ \hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3=1, \tag{1.40}$$

то, как легко заметить, для записи ограничений **(1.40)** в форме **(1.39)** достаточно ввести матрицу $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и вектор $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.5.5. Оценивание с учетом линейных ограничений

МНК-оценка $\hat{\beta}_R$, учитывающая ограничения на коэффициенты (*restricted least squares estimator*), получается в результате решения задачи условной оптимизации — на этой оценке сумма квадратов остатков достигает минимума в множестве всех β, удовлетворяющих условию **(1.39)**. Общеизвестным способом решения такой задачи является нахождение безусловного минимума функции Лагранжа:

$$L = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) + 2\lambda'(R\beta - r) \to \min_{\beta,\lambda}, \qquad \textbf{(1.41)}$$

где λ — вектор множителей Лагранжа размерности $q \times 1$.

Условие первого порядка для **(1.41)** записывается в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -2X'Y + 2X'X\beta + 2R'\lambda = 0; \qquad \textbf{(1.42)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda'} = R\beta - r = 0. \qquad \textbf{(1.43)}$$

Умножая равенство **(1.42)** на $R(X'X)^{-1}$ и учитывая условие **(1.43)**, получим

$$[R(X'X)^{-1}R']\lambda = R(X'X)^{-1}X'Y - R\beta = R\hat{\beta} - r, \qquad \textbf{(1.44)}$$

где $\hat{\beta} = \hat{\beta}_{UR} = (X'X)^{-1}X'Y$ — безусловная (*unrestricted*) МНК-оценка.

Теперь легко получить, что вектор λ выражается в виде

$$\lambda = [R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r), \qquad \textbf{(1.45)}$$

Подстановка полученного выражения в уравнение **(1.42)** и умножение на $(X'X)^{-1}$ приводит к *МНК-оценке, учитывающей ограничение*:

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r). \qquad \textbf{(1.46)}$$

Если ограничение справедливо и все классические предпосылки регрессионной модели выполняются, то вектор $R\hat{\beta} - r$ будет мал, поскольку для оценок, полученных с помощью обычного МНК, ограничения будут почти верны (с ростом объема выборки компоненты вектора $R\hat{\beta} - r$ по вероятности стремятся к нулю). Далее, из соотношения **(1.46)** следует, что *МНК-оценки, учитывающие ограничения*, и *безусловные МНК-оценки* будут приблизительно совпадать. Таким образом, чем больше отличаются оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\beta}_R$, тем меньше оснований верить в справедливость рассматриваемых ограничений. Для формализации этих интуитивных соображений сделаем ряд дополнительных допущений.

1.5.6. Распределение МНК-оценки и проверка гипотезы о линейных ограничениях

Выше мы сформулировали три классических требования, которые использовались для вывода некоторых свойств МНК-оценок. Одно из них состояло в том, что вектор регрессионных отклонений имеет нулевое математическое ожидание ($E(u) = 0$) и стандартную (так называемую «скалярную») ковариационную матрицу ($\mathrm{Var}(u) = \sigma^2 I$). Для того, чтобы продвинуться дальше, например для вывода закона распределения МНК-оценок и тестирования гипотез, необходимо сделать дополнительные предположения о статистическом распределении отклонений.

Обычно предполагается, что вектор u имеет многомерное нормальное распределение с параметрами — нулевым вектором средних и скалярной ковариационной матрицей:

$$u \sim N(0, \sigma^2 I), \tag{1.47}$$

другими словами, предполагается, что процесс u_t является *гауссовским белым шумом.*

Согласно второй классической предпосылке о детерминированности элементов матрицы X, из **(1.47)** непосредственно следует, что вектор Y также имеет нормальное распределение:

$$Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I). \tag{1.48}$$

Поскольку МНК-оценка вектора β представляет собой линейную функцию от Y, она тоже должна быть нормально распределенной с параметрами, вычисленными в **(1.26)** и **(1.27)**:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta,\ \sigma^2 (X'X)^{-1}\right). \tag{1.49}$$

Итак, при выполнении классических предположений и (дополнительно) нормальности распределения регрессионных отклонений $u_1, u_2, \ldots, u_T$ МНК-оценка $\hat{\beta}$ распределена нормально с математическим ожиданием $E\hat{\beta} = \beta$ и ковариационной матрицей $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$. Для вычисления ковариационной матрицы нужно знать дисперсию σ^2

регрессионных отклонений, однако последняя обычно неизвестна. Поэтому σ^2 заменяют на величину s^2, задаваемую соотношением **(1.35)** и являющуюся, как было показано ранее, несмещенной оценкой для σ^2. Таким образом, получается несмещенная оценка ковариационной матрицы:

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = s^2 (X'X)^{-1}. \qquad \textbf{(1.50)}$$

Мы можем применить эту оценку при тестировании гипотезы о линейных ограничениях, рассмотренной выше. Предположим, что мы хотим оценить следующую нулевую гипотезу:

$$H_0: R\beta - r = 0, \qquad \textbf{(1.51)}$$

где R — матрица размерности $q \times k$; r — вектор $q \times 1$; 0 — нулевой вектор $q \times 1$.

Как уже говорилось, если ограничение **(1.51)** выполняется, то следует ожидать, что вектор $(R\hat{\beta} - r)$ будет близок к началу координат. Пользуясь нормальностью распределения МНК-оценки $\hat{\beta}$ легко найти распределение $R\hat{\beta} - r$:

$$(R\hat{\beta} - r) \underset{H_0}{\sim} N(0,\ \sigma^2 R(X'X)^{-1} R'). \qquad \textbf{(1.52)}$$

Эта запись означает, что величина, стоящая слева от знака « $\underset{H_0}{\sim}$ », имеет при выполнении нулевой гипотезы указанное распределение. Из близости вектора $(R\hat{\beta} - r)$ к нулю следует, что квадратичная форма

$$\frac{1}{\sigma^2}(R\hat{\beta} - r)'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}(R\hat{\beta} - r) \qquad \textbf{(1. 53)}$$

будет также близка к нулю.

Нам потребуется известный результат из курса математической статистики, представленный ниже без доказательства. Если вектор случайных величин $z \sim N(0, \Sigma)$ имеет многомерное нормальное распределение с невырожденной ковариационной матрицей порядка $q \times q$, то случайная величина $\chi^2 = z' \Sigma^{-1} z$ имеет распределение $\chi^2(q)$.

В соответствии с **(1.52)** вектор $R\hat{\beta} - r$ имеет q-мерное нормальное распределение, причем из условия $\operatorname{rank} R = q$ следует, что его ковариационная матрица не вырождена. Поэтому величина, определенная квадратичной формой **(1.53)**, имеет χ^2- распределение с q степенями свободы:

$$\frac{1}{\sigma^2}(R\widehat{\beta}-r)'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}(R\widehat{\beta}-r) \underset{H_0}{\sim} \chi^2(q). \qquad \textbf{(1. 54)}$$

Так как значение σ^2 обычно неизвестно, то выражение **(1.53)** не вычислимо. Поэтому взамен σ^2 разумно использовать несмещенную оценку s^2, определенную в **(1.35)**. Однако, поскольку s^2 сама является случайной величиной, то такая замена **в (1.54)** приведет к распределению, отличному от χ^2. Ниже мы получим это распределение.

Найдем вначале распределение величины s^2. Для этого воспользуемся еще одним известным результатом математической статистики: для произвольной идемпотентной матрицы M и стандартного гауссовского вектора $\varepsilon \sim N(0, I)$ величина $\chi^2 = \varepsilon' M\varepsilon$ имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы, равным рангу матрицы M.

Как было показано в параграфе 1.5.3, $\hat{u} = Mu$, где $M = I_T - X(X'X)^{-1}X'$ — симметричная идемпотентная матрица, а I_T — единичная матрица порядка T. Из **(1.47)** следует, что $\frac{u}{\sigma} \sim N(0, I)$ — стандартный T-мерный гауссовский вектор. Легко видеть, что

$$\frac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma^2} = \frac{u'M'Mu}{\sigma^2} = \frac{u'M^2u}{\sigma^2} = \frac{u'}{\sigma}M\frac{u}{\sigma} \sim \chi^2(\text{rank}\, M).$$

Кроме того, по свойству идемпотентных матриц[1]:

$$\text{rank}\, M = \text{tr}\, M = T - k.$$

Учитывая независимость оценки $s^2 = \hat{u}'\hat{u}/(T-k)$ и вектора МНК-оценок $\hat{\beta}$, имеем:

$$(T-K)\,s^2/\sigma^2 \sim X^2(T-K). \qquad \textbf{(1.55)}$$

Из выражений **(1.53)**, **(1.54)** и **(1.55)** получаем

$$\frac{(R\hat{\beta}-r)'[R(X'X)R'](R\hat{\beta}-r)/q}{s^2} \underset{H_0}{\sim} F(q, T-K). \qquad \textbf{(1.56)}$$

[1] См. также вывод соотношения **(1.36)**.

Конечно, выражение **(1.56)** может показаться довольно громоздким, однако оно не содержит неизвестных величин и может быть непосредственно вычислено по имеющимся выборочным наблюдениям. Кроме того, при условии нормальности случайных отклонений и справедливости ограничений на параметры, это выражение подчиняется известному, затабулированному распределению. Наконец, по величине **(1.56)** можно судить о степени соответствия между имеющимися наблюдениями и ограничениями на параметры — если ее значение слишком велико (превосходит некоторый порог), то с большой долей уверенности можно утверждать, что ограничения не выполняются. Таким образом, величину **(1.56)** можно использовать в качестве критической статистики при проверке гипотезы о линейных ограничениях.

Ниже приводится удобный способ вычисления данного выражения. Из соотношения **(1.46)** для МНК-оценок $\hat{\beta}_R$, учитывающих ограничения, следует, что

$$X'X(\hat{\beta}-\tilde{\beta}) = R'[R(X'X)^{-1}R^{-1}]^{-1}(R\hat{\beta}-r). \qquad \textbf{(1.57)}$$

Так как $\hat{\beta}_R$ должна удовлетворять ограничению $R\hat{\beta}_R = r$, то

$$(R\hat{\beta}-r)' = (R\hat{\beta}-R\hat{\beta}_R)' = (\hat{\beta}-\hat{\beta}_R)'R'.$$

Умножив **(1.57)** слева на $(\hat{\beta}-\hat{\beta}_R)'$, получим

$$(\hat{\beta}-\hat{\beta}_R)'X'X(\hat{\beta}-\hat{\beta}_R) = (R\hat{\beta}-r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r). \qquad \textbf{(1.58)}$$

Теперь рассмотрим сумму квадратов остатков в модели с ограничениями $(e_R'e_R)$ и сумму квадратов остатков в модели без ограничений $(e_{UR}'e_{UR})$:

$$e_R'e_R = (Y-X\hat{\beta}_R)'(Y-X\hat{\beta}_R); \qquad \textbf{(1.59)}$$

$$e_{UR}'e_{UR} = (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta}) = (T-k)s^2. \qquad \textbf{(1.60)}$$

Преобразуем выражение **(1.59)**:

$$\begin{aligned} e_r'e_r &= (Y-X\hat{\beta}+X\hat{\beta}-X\beta_R)'(Y-X\hat{\beta}+X\hat{\beta}+X\beta_R) = \\ &= (Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})+(\hat{\beta}-\beta_R)'X'X(\hat{\beta}-\beta_R). \end{aligned} \qquad \textbf{(1.61)}$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью величин X и $\hat{u}$, т.е. равенством $X'\hat{u} = X'(Y-X\hat{\beta}) = 0$. Из **(1.60)** и **(1.61)** получим

$$e_R'e_R - e_{UR}'e_{UR} = (\hat{\beta}-\hat{\beta}_R)'X'X(\hat{\beta}-\hat{\beta}_R),$$

или, используя **(1.58)**,

$$e_r'e_r - e_u'e_u = (R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r).$$

Следовательно, критическая статистика **(1.56)** может быть записана по-другому:

$$\frac{(e_r'e_r - e_u'e_u)/q}{e_r'e_r/(T-k)} \underset{H_0}{\sim} F(q, T-k). \qquad \textbf{(1.62)}$$

Формула **(1.62)** легко интерпретируется. Так как вектор МНК-оценок в модели без ограничений минимизирует сумму квадратов остатков, то наложение ограничений приводит к увеличению суммы квадратов. Таким образом, выражение в левой части **(1.62)** показывает относительную величину прироста суммы квадратов, приходящуюся на одно ограничение.

Мы будем отвергать гипотезу об ограничениях, в случае если критическая статистика свидетельствует «о слишком большом» увеличении суммы квадратов. Пороговое значение критической статистики, превышение которого свидетельствует о несправедливости гипотезы, определяется из таблиц F-распределения, соответствующих заданному уровню вероятности ошибочного решения.

1.5.7. Доверительные интервалы

Рассмотрим снова выражение **(1.56)**. В условиях справедливости нулевой гипотезы **(1.51)** для истинных значений параметров β выполняется равенство $r = R\beta$, тогда **(1.56)** можно представить в виде:

$$\frac{(\hat{\beta} - \beta)'R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R(\hat{\beta} - \beta)/q}{s^2} \underset{H_0}{\sim} F(q,\ T-k). \qquad \textbf{(1.63)}$$

Через $F_\alpha(q,\ T-k)$ обозначим 100α-процентную точку F-распределения (где α — уровень значимости критерия), т.е. такую величину, при которой $P\{F(q,\ T-k) > F_\alpha(q,\ T-k)\} = \alpha$. Геометрически это означает, что область между осью абсцисс и графиком функции плотности распределения случайной величины $F(q,\ T-k)$, расположенная справа от точки $F_\alpha(q,\ T-k)$, имеет площадь α. С помощью процентной точки можно построить $100(1-\alpha)$-процентный доверительный эллипсоид:

$$P\left\{\frac{(\hat{\beta} - \beta)'R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}R(\hat{\beta} - \beta)}{s^2} \le F_\alpha(q,\ T-k)\right\} = 1 - \alpha. \qquad \textbf{(1.64)}$$

Дадим интерпретацию выражения **(1.64)**. Предположим, у нас есть возможность многократной генерации выборки наблюдений (X, Y) в соответствии с моделью **(1.22)**, причем для получения реализаций вектора Y используется одна и та же матрица значений регрессоров X и одни и те же (истинные) значения коэффициентов β, но разные векторы случайных отклонений u. Тогда вектор Y от выборки к выборке будет, вообще говоря, меняться, и, следовательно, будут получаться разные значения оценки $\hat{\beta}$, что позволит получить эмпирическое распределение для $\hat{\beta}$. Вопрос о несмещенности и эффективности МНК-оценок, обсуждавшийся ранее, фактически сводится к вопросу о среднем значении и дисперсии этого выборочного распределения. Представим себе теперь, что по каждой из выборок на основе неравенства, стоящего в фигурных скобках в выражении **(1.64)**, построена область в k-мерном евклидовом пространстве. Соотношение **(1.64)** означает, что приблизительно в $100(1-\alpha)$ процентах случаев от числа сгенерированных выборок полученная область будет содержать истинное значение β.

Интересен специальный случай, когда R — единичная матрица. Тогда выражение **(1.64)** принимает вид:

$$P\left\{\frac{(\hat{\beta}-\beta)'(X'X)(\hat{\beta}-\beta)/k}{s^2} \le F_\alpha(q,\ T-k)\right\} = 1-\alpha. \qquad \textbf{(1.65)}$$

Это значит, что для $100(1-\alpha)$ процентов повторных выборок вектор истинных значений параметров β будет содержаться внутри эллипсоида, лежащего в k-мерном евклидовом пространстве и заданного неравенством в фигурных скобках соотношения **(1.65)**.

Другой интересный случай, когда R является k-мерной строкой с единицей на j-ом месте и нулями на остальных местах. Тогда выражение **(1.64)** будет иметь вид:

$$P\left\{\frac{(\hat{\beta}_j-\beta_j)^2}{s^2[(X'X)^{-1}]_{jj}} \le F_\alpha(q,\ T-k)\right\} = 1-\alpha, \qquad \textbf{(1.66)}$$

где $[\ ]_{jj}$ означает (j,j)-й (т.е. диагональный) элемент матрицы, заключенной в квадратные скобки.

Пользуясь тем, что квадрат случайной величины $t\,(T-k)$, имеющей распределение Стьюдента, описывается распределением Фишера $F\,(1,\ T-k)$, можно записать:

$$P\left\{-t_{\alpha/2}(T-K)\le\frac{(\hat\beta_i-\beta_i)}{s[(X'X)^{-1}]_{jj}^{1/2}}\le t_{\alpha/2}(T-K)\right\}=1-\alpha,$$

или

$$P\{\hat\beta_j-t_{\alpha/2}(T-K)se(\hat\beta_j)\le\beta_j\le\hat\beta_j+t_{\alpha/2}(T-K)se(\hat\beta_j)\}=1-\alpha\,. \quad \textbf{(1.67)}$$

Переходя от **(1.66)** к **(1.67)**, мы воспользовались обозначением стандартной ошибки $se(\hat\beta_j)$ для оценки $\hat\beta_j$, равной квадратному корню j-го диагонального элемента матрицы $s^2(X'X)^{-1}$, и получили двусторонний доверительный интервал. Пусть, например, $T-k=60$, тогда по таблице процентных точек t-распределения для 5-процентного уровня значимости найдем $t_{\alpha/2}(60)=2$ и интервал $[\beta_j\pm 2se(\hat\beta_j),\ \ \beta_j\pm 2se(\hat\beta_j)]$, указанный в соотношении **(1.67)**, в среднем для 95% повторных выборок, будет содержать истинное значение β_j.

Следует отметить различия между проверкой каждого ограничения по отдельности и проверкой совместного выполнения всех ограничений. Рассмотрим, например, отдельные нулевые гипотезы H_a: $\beta_i=0$ и H_b: $\beta_i=0$ и совместную нулевую гипотезу H_c: $(\beta_i,\beta_j)=(0,\ 0)$

Допустим, что в $100(1-\alpha)$ процентах случаев доверительные области как для β_i так и для β_j содержат ноль. Поэтому мы не сможем отклонить ни гипотезу H_a, ни гипотезу H_b на 100α-м уровне значимости. Однако может так оказаться, что двухмерный $100(1-\alpha)$- процентный доверительный эллипс для β_i и β_j не содержит начала координат, так что гипотезу H_c придется отвергнуть на уровне значимости α (т.е. несмотря на то, что мы не можем отвергнуть гипотезу о равенстве одного из коэффициентов нулю, мы сможем отвергнуть гипотезу о совместном равенстве нулю двух коэффициентов).

Построим теперь совместный доверительный эллипс для β_i и β_j. Пусть R — матрица размерности $2\times k$ с $(1,\ i)$- и $(2,\ j)$-элементами, равными единице, и нулями на остальных местах. Обозначив через $\mathrm{Cov}(\hat\beta_i,\hat\beta_j)$ оцененную ковариацию оценок $\hat\beta_i$ и $\hat\beta_j$, стоящую на $(i,\ j)$-м месте матрицы $s^2(X'X)^{-1}$, а арифметические квадратные корни i-го и j-го диагональных элементов этой матрицы как $se(\hat{\beta}_i)$ и $se(\hat{\beta}_j)$, распишем выражение **(1.64)**:

$$P\{(1/2)(\hat{\beta}_i-\beta_i)^2 se(\beta_i)^2+(1/2)(\hat{\beta}_j-\beta_j)se(\beta_j)^2+ \\ +(\hat{\beta}_i-\beta_i)(\hat{\beta}_j-\beta_j)\operatorname{Cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j)\le F_\alpha(2,\ T-k)\}=1-\alpha. \qquad \textbf{(1.68)}$$

Область, описанная неравенством, стоящим в фигурных скобках левой части **(1.68)**, — это эллипс с центром в точке $(\hat{\beta}_i,\ \hat{\beta}_j)$. Если допустить, что $\operatorname{Cov}(\hat{\beta}_i,\hat{\beta}_j)=0$, то область, задаваемая **(1.68)**, будет прямоугольником с центром $(\hat{\beta}_i,\ \hat{\beta}_j)$ и сторонами, равными длинам частных доверительных интервалов, построенных для $\hat{\beta}_i$ и $\hat{\beta}_j$ аналогично **(1.67)** с уровнями доверия $100(1-\alpha)$. Однако если известно, что $\hat{\beta}_i$ и $\hat{\beta}_j$ имеют положительную ковариацию, тогда переоцененность (недооцененность) β_i будет возникать одновременно с переоцененностью (недооцененностью) β_j. Это позволяет исключить окрестности угловых точек прямоугольника и получить эллипс, соответствующий совместной доверительной области с уровнем доверия $(1-\alpha)$.

Непосредственно также можно построить доверительную область для постоянной дисперсии случайных отклонений σ^2. Из выражения **(1.55)** известно, что $(T-k)s^2/\sigma^2$ имеет χ^2- распределение с $T-k$ степенями свободы. Пусть $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-k)$ и $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(T-k)$ определяют соответственно $(1-\frac{\alpha}{2})100$- и $\frac{\alpha}{2}100$- процентные точки χ^2-распределения с $T-k$ степенями свободы, тогда

$$P\left\{\frac{(T-k)s^2}{\chi^2(T-k,\ 1-\alpha/2)}\le\sigma^2\le\frac{(T-k)s^2}{\chi^2(T-k,\ \alpha/2)}\right\}. \qquad \textbf{(1.69)}$$

1.6. Отступление от классических предпосылок

В этом параграфе рассматриваются следствия и возможные действия при различных вариантах отступлений от классических предпосылок.

1.6.1. Ошибка спецификации: переменные, не включенные в модель

До сих пор мы проводили анализ, предполагая, что исходная модель правильно специфицирована и удовлетворяет классическим допущениям. Представим себе, однако, что в модели отсутствует некоторое количество важных объясняющих переменных, а на самом деле истинная модель должна иметь вид:

$$Y = X\beta + Z\gamma + u, \tag{1.70}$$

где Z — $(T \times r)$-матрица наблюдений; γ — r-мерный вектор.

Таким образом, вместо уравнения **(1.70)** мы имеем дело с ошибочно специфицированной моделью $Y = X\beta + v$, в которой пропущены r объясняющих переменных (*omitted variables*). Вектор остатков $\hat{v} = Y - X\hat{\beta}$ этой регрессии может быть записан в виде:

$$\hat{v} = M_X Y,$$

где $M_X = I - X(X'X)^{-1}X'$.

Подставляя истинное выражение для Y и пользуясь очевидным равенством $M_X X = 0$, получим $\hat{v} = M_X(X\beta + Z\gamma + u) = M_X Z\gamma + M_X u$ и, следовательно,

$$E(\hat{v}) = M_X Z\gamma. \tag{1.71}$$

Последнее означает, что вектор остатков $\hat{v}$ содержит пропущенные переменные Z и имеет математическое ожидание, равное вектору остатков регрессии $Z\gamma$ по X. Это позволяет использовать остатки $\hat{v}$ при тестировании на ошибки спефикации.

Выясним, являются ли МНК-оценки регрессии $Y = X\hat{\beta} + \hat{v}$ несмещенными. Подставляя выражение **(1.70)** в формулу для оценивания $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = P_X Y$ и используя равенство $P_X X = I$, получим

$$E(\hat{\beta}) = \beta + P_X Z\gamma \neq \beta.$$

Следовательно, наличие пропущенных переменных приводит, вообще говоря, к смещенным оценкам. Однако, если X и Z ортогональны, т.е. $X'Z = 0$, то смещения не будет.

1.6.2. Ковариационная матрица неклассического вида

В параграфе 1.5 перечислялись классические условия, накладываемые на случайные отклонения регрессионной модели – наличие нулевых средних, одинаковых дисперсий и отсутствие коррелированности между разными случайными отклонениями:

$$E(u) = 0, \ \mathrm{Var}(u) = \sigma^2 I.$$

Нарушение предпосылки о нулевых средних не влечет за собой больших проблем: оно легко преодолевается включением в уравнение регрессии свободного члена. Нарушение свойства гомоскедастичности случайных отклонений, т.е. условия диагональности ковариационной матрицы случайных отклонений и совпадения всех диагональных элементов, ведет к значительным последствиям.

Каждый диагональный элемент ковариационной матрицы представляет собой дисперсию очередного выборочного наблюдения. Если эти дисперсии разные, то речь идет о свойстве гетероскедастичности случайных отклонений (в противоположность свойству гомоскедастичности, при котором дисперсии одинаковы). Это означает, что компоненты вектора случайных отклонений могут иметь разные распределения.

Каждый недиагональный элемент ковариационной матрицы является ковариацией между двумя регрессионными отклонениями, соответствующими двум разным выборочным наблюдениям. (Например, элемент матрицы, стоящий в третьей строке и втором столбце — это ковариация отклонений, относящихся к третьему и второму наблюдениям.) Если все недиагональные элементы равны нулю, то говорят, что отклонения *некоррелированы*, в противном случае имеет место *сериальная коррелированность* регрессионных отклонений.

Если вектор отклонений обладает свойством гетероскедастичности и/или сериальной коррелированности, то ковариационная матрица не будет иметь классического «скалярного» вида:

$$E(uu') = \Omega \neq \sigma^2 I. \qquad \textbf{(1.72)}$$

Так как доказательство несмещенности оценок, полученных обычным МНК, строится только на свойствах моментов первого порядка, то и в этом случае (несмотря на нарушения классических условий) мы также получим несмещенные и состоятельные оценки параметров модели. Однако распределение вектора обычных МНК-оценок будет другим, в частности, ковариационная матрица оценок $\hat{\beta}$ будет иметь вид:

$$\mathrm{Var}(\beta) = E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'] = E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] =$$
$$= (X'X)^{-1}X' \ \Omega X(X'X)^{-1}, \qquad \textbf{(1.73)}$$

т.е. будет отличаться от аналогичной матрицы, полученной ранее в классическом случае, $s^2(X'X)^{-1}$.

Существуют два возможных способа разрешения этой проблемы. Первый способ — преобразовать модель таким образом, чтобы ковариационная матрица остатков стала «скалярной» и затем применять МНК. Это — так называемый *обобщенный МНК* (ОМНК). Заметим, что этот метод предполагает знание структуры ковариационной матрицы Ω. Второй способ – оценить β обычным МНК, так как полученные оценки будут несмещенными и состоятельными, но использовать состоятельную оценку матрицы Ω для получения (с помощью формулы **(1.73)**) состоятельной оценки ковариационной матрицы $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ обычных МНК-оценок. Так как информация о структуре Ω во втором подходе не используется, то будут получены менее эффективные оценки, чем при первом способе. В то же время второй способ представляется более удобным, поскольку состоятельное оценивание матрицы Ω достигается вне зависимости от знания формы гетероскедастичности или сериальной коррелированности.

1.6.3. Обобщенный метод наименьших квадратов

Рассмотрим вариант обобщенной модели линейной регрессии

$$Y = X\beta + u;\ \ E(u) = 0;\ \ E(uu') = \sigma^2\Omega, \qquad \textbf{(1.74)}$$

в котором предполагается, что β и σ^2 неизвестны, а Ω известна. В рамках модели **(1.74)** ковариационная матрица зависит только от одного неизвестного числового параметра σ^2, поэтому реализация ОМНК (оценка ковариационной матрицы отклонений) сведется к оцениванию σ^2.

Пусть Ω – положительно определенная матрица, тогда, как известно из курса линейной алгебры, существует невырожденная матрица P, такая что

$$P\Omega P' = I,$$

откуда следует, что

$$P'P = \Omega^{-1}.$$

Умножив **(1.74)** на P, получим:

$$PY = PX\beta + Pu,$$

или

$$Y^* = X^*\beta + u^*, \qquad \textbf{(1.75)}$$

где $Y^* = PY$, $X^* = PX$, $u^* = Pu$.

Вычислим коварационную матрицу остатков и заметим, что она имеет классический «скалярный вид»:

$$E(u^* u^{*\prime}) = E(Puu'P') = \sigma^2 P\Omega P' = \sigma^2 I.$$

Тогда, в соответствии с теоремой Гаусса—Маркова, применив к **(1.75)** обычный МНК, получим наилучшие линейные, несмещенные оценки β:

$$\hat{\beta}_{\text{ОМНК}} = (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} Y^* = (X'P'PX)^{-1} X'P'PY = \\ = (X' \ \Omega^{-1} X)^{-1} X' \ \Omega^{-1} Y. \qquad \textbf{(1.76)}$$

Интуитивно понятно, что обобщенный МНК дает более эффективные оценки, чем обычный МНК, потому что он в определенном смысле «взвешивает» данные. Например, в случае гетероскедастичных и сериально некоррелированных регрессионных отклонений, наблюдения, соответствующие большим значениям дисперсии отклонений, будут вносить меньший вклад в формирование оценок (получат меньший вес), чем наблюдения, соответствующие меньшим дисперсиям отклонений.

Заметим, что для реализации ОМНК требуется знание матрицы Ω. Вообще говоря, исследователь должен сначала оценить матрицу Ω, а потом использовать эту оценку в дальнейшем анализе, например при вычислении соотношений типа **(1.76)**. Таким образом, мы приходим к *практически реализованной* или *доступной ОМНК-оценке.* Способ оценивания матрицы Ω будет зависеть от того, предполагает ли исследователь наличие гетероскедастичности, автокоррелированности или их сочетания.

1.6.4. Гетероскедастичность

Рассмотрим снова кейнсианскую функцию потребления, в которой считается, что текущее потребление y_t зависит от текущего дохода x_t:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t. \qquad \textbf{(1.77)}$$

При этом разумно предположить, что дисперсия случайных отклонений растет по мере роста дохода. Действительно, в соответствии с общей теорией потребления, индивидуум, имеющий бóльший доход, имеет и бóльшие возможности разнообразить свое потребление. Предположим, к примеру, что дисперсия случайного отклонения пропорциональна квадрату дохода:

$$D\varepsilon_t = \sigma_t^2 = \alpha x_t^2. \qquad \textbf{(1.78)}$$

Разделим **(1.77)** на x_t:

$$y_t^* = \beta_1 z_t^* + \beta_2 + \varepsilon_t^*, \qquad \textbf{(1.79)}$$

где $y_t^* = y_t / x_t$; $z_t^* = 1/x_t$; $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t / x_t$.

Дисперсия случайного отклонения в новом уравнении будет равна

$$D(\varepsilon_t^*) = D(\varepsilon_t) / x_t^2 = \alpha x_t^2 / x_t^2 = \alpha,$$

т.е. выполняется свойство гомоскедастичности. Тогда мы можем применить МНК к уравнению **(1.79)** и получить оптимальные оценки.

Обобщая все вышесказанное, запишем уравнение в матричном виде:

$$Y^* = X^* \beta + \varepsilon^*; \qquad \textbf{(1.80)}$$

$$\Omega = \alpha \begin{bmatrix} x_1^2 & & & & 0 \\ & x_2^2 & & & \\ & & x_3^2 & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & x_T^2 \end{bmatrix}; \; P = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} & & & & 0 \\ & \frac{1}{x_2^2} & & & \\ & & \frac{1}{x_3^2} & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & \frac{1}{x_T^2} \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(1.81)}$$

Заметим, что $P\Omega P' = \alpha I$ — «скалярная» матрица, таким образом, ОМНК-оценки (т.е. МНК-оценки, полученные из **(1.79)**) будут иметь требуемые свойства.

Более общий метод, предложенный Уайтом (1980 г.), дает несмещенную оценку вектора β, основанную на обычном МНК, и оценку матрицы Ω в виде диагональной матрицы с квадратами регрессионных остатков на диагонали:

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1^2 & & & & 0 \\ & \hat{\varepsilon}_2^2 & & & \\ & & \hat{\varepsilon}_3^2 & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & \hat{\varepsilon}_T^2 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(1.81, \textit{a})}$$

Уайт доказал, что

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}(X'X)^{-1} X' \hat{\Omega} X(X'X) = (X'X)^{-1} X' \Omega X(X'X)^{-1},$$

значит, формула

$$\widehat{\mathrm{Var}}\,(\hat{\beta}_{\text{МНК}}) = (X'X)^{-1} X' \hat{\Omega} X(X'X)^{-1}$$

может быть использована для получения состоятельной оценки ковариационной матрицы МНК-оценок. В современных пакетах программ, таких как EViews, предусмотрено вычисление состоятельных стандартных ошибок для МНК-оценок коэффициентов на основе приведенной формулы.

1.6.5. Автокорреляция

Для примера рассмотрим временной ряд с автокорреляцией остатков первого порядка:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t; \tag{1.82}$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t, \tag{1.83}$$

где v_t — «белый шум», причем для того, чтобы гарантировать стационарность ряда отклонений ε_t, будем считать, что $|\rho| < 1$:

$$E(v_t) = 0; \tag{1.84, a}$$

$$E(v_t^2) = \sigma_v^2; \tag{1.84, b}$$

$$E(v_t v_{t-j}) = 0 \quad \text{для } j \neq 0. \tag{1.84, c}$$

Если записать уравнение **(1.82)** для момента времени $t - 1$, умножить его на ρ и затем полученное выражение вычесть из уравнения **(1.82)**, то получим

$$y_t^* = \beta_1(1-\rho) + \beta_2 x_t^* + v_t,$$

где $y_t^* = (y_t - \rho y_{t-1})$, $x_t^* = (x_t - \rho x_{t-1})$.

Поскольку v_t является белым шумом, применение МНК к преобразованному уравнению даст оптимальные оценки.

Для того чтобы показать эквивалентность данной процедуры оценивания и обсужденной ранее процедуры ОМНК, нам понадобится найти ковариационную матрицу вектора авторегрессионных случайных отклонений.

Мы уже обсуждали свойства AR(1) модели. В частности, уравнение **(1.83)** может быть переписано в виде:

$$\varepsilon_t = v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \rho^3 v_{t-3} + \rho^4 v_{t-4} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i v_{t-i}. \tag{1.85}$$

Подставляя **(1.85)** в **(1.82)**, мы видим, что y_t подвержено влиянию серии остаточных членов с геометрически убывающими весами. Таким образом, процесс генерации ряда y — динамический (факт, который не является очевидным в **(1.82)**).

Из **(1.85)** мы имеем:

$$E(\varepsilon_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i E(\nu_{t-i}) = 0, \qquad \textbf{(1.86)}$$

что следует из предположения, что ν — процесс белого шума **(1.84, *a*)**. Таким образом, предположение о том, что случайные отклонения ε_t имеют нулевую среднюю, оказывается справедливым.

Теперь построим ковариационную матрицу для вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_T)'$. Используя **(1.84, *b*)** вычислим:

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\nu_t^2 + \rho^2\nu_{t-1}^2 + \rho^4\nu_{t-2}^2 + \rho^6\nu_{t-3}^2 + \ \dots\ + \rho\nu_t\nu_{t-1} + \rho^2\nu_t\nu_{t-2} + \dots) =$$
$$= E(\nu_t^2) + \rho^2 E(\nu_t^2) + \rho^4 E(\nu_{t-2}^2) + \rho^6 E(\nu_{t-3}^2) + \ \dots\ =$$
$$= \sigma^2[1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \dots] = \sigma_\nu^2/(1-\rho^2). \qquad \textbf{(1.87)}$$

Отметим, что смешанные произведения $E\nu_{t-j}\nu_{t-k}$ в **(1.87)** исчезают, поскольку ν — некоррелированный процесс **(1.84, *c*)**.

С помощью аналогичной процедуры, выводим ковариацию между двумя отклонениями, отстоящими на j периодов:

$$E(\nu_t\nu_{t-j}) = E(\nu_t\nu_{t+j}) = \rho^j\sigma_\nu^2/(1-\rho^2).$$

Таким образом, искомая ковариационная матрица может быть записана в виде:

$$\Omega = E(\varepsilon\varepsilon') = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{T-3} \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & \dots & \rho^{T-4} \\ . & . & . & \dots & . \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(1.88)}$$

Теперь необходимо найти матрицу P, такую что $P^T P = \Omega^{-1}$. Можно показать, что эта матрица равна

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(1.89)}$$

Если **(1.82)** записать в матричной форме

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

и затем умножить на P слева, то получим уравнение:

$$Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*,$$

где

$$Y^* = \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)}.y_1 \\ y_2 - \rho y_1 \\ \vdots \\ y_T - \rho y_{T-1} \end{bmatrix}; \qquad \textbf{(1.90, } \textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

$$X^* = \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)} & \sqrt{(1-\rho^2)}x_1 \\ 1-\rho & x_2 - \rho x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1-\rho & x_T - \rho x_{T-1} \end{bmatrix}; \qquad \textbf{(1.90, } \textbf{\textit{b}}\textbf{)}$$

$$\varepsilon^* = \begin{bmatrix} \sqrt{(1-\rho^2)} \cdot \varepsilon_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_T \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(1.90, } \textbf{\textit{c}}\textbf{)}$$

Нетрудно показать, что $\sqrt{(1-\rho^2)} \cdot \varepsilon_1$ имеет дисперсию σ_ν^2 и не коррелирует с ν_t для $t \geq 2$. Так что

$$E(\varepsilon^* \varepsilon^{*\prime}) = \sigma_\nu^2 I.$$

Таким образом, применяя обычный МНК к преобразованным данным, т.е. ОМНК к исходным, мы реализуем оптимальный метод оценивания. Этот метод отличается от интуитивной процедуры корректировки AR(1)-отклонений только применительно к первому наблюдению.

На практике константа ρ, как правило, неизвестна. Следовательно неизвестна и матрица Ω , поэтому этот параметр должен быть оценен. Существует несколько процедур, позволяющих произвести такое оценивание. Во-первых, это так называемая процедура Хилдрета—Ли (*Hildreth—Liu*), в соответствии с которой производится поиск ρ по достаточно частой сетке значений из отрезка $[-1, 1]$. Для каждого значения ρ подсчитывается оценка ОМНК и сумма квадратов отклонений $(Y^* - X^*\beta)'(Y^* - X^*\beta)$. Выбирается такое значение ρ, для которого сумма квадратов отклонений минимальна.

Другой алгоритм предложили Кохрейн и Оркатт (1994 г.).

Итерационная процедура Кохрейна—Оркатта начинается с МНК-оценивания параметров модели **(1.82)**. Полученные несмещенные и состоятельные оценки позволяют получить вектор остатков. Результирующие оценки ε могут теперь быть использованы в качестве «наблюдений» в регрессионной модели **(1.83)** и применение к ней МНК даст оценку для ρ. Это позволит найти ОМНК-оценки β и затем получить более эффективные оценки для ε. Далее МНК применяется к новому набору остатков и находится более эффективная оценка ρ, которая снова используется для построения ОМНК-оценки, и т.д. Процедура прекращается, когда очередные оценки ρ оказываются практически неразличимыми.

1.6.6. Стохастические регрессоры

Второе классическое предположение, которое мы указали в параграфе 1.5, предполагало, что регрессоры нестохастичны и потому независимы от ошибок:

$$E(X'u) = 0.$$

Это предположение было необходимо для получения свойства несмещенности МНК-оценок. Однако предположение о неслучайности (детерминированности) регрессоров, т.е. постоянстве их значений в повторяющихся выборках, может оказаться слишком ограничительным. Например, в правой части модели в качестве регрессора может выступать лаговая зависимая переменная, отражая определенную степень инерционности в ее поведении. Вообще говоря, мало убедительны утверждения, что одни экономические показатели, такие, как потребление, ведут себя во времени стохастично, тогда как другие, такие, как доход, — нестохастичны. Более того, могут существовать случайные эффекты при измерении регрессоров, или рассматриваемое нами уравнение может как часть входить в какую-то систему одновременных уравнений, что влечет за собой наличие стохастической обратной связи между переменными.

Если регрессоры являются случайными (недетерминированными), но выполняется предположение об их независимости со случайными ошибками, то можно показать, что большинство привычных свойств для МНК-оценок сохраняется. Свойства МНК-оценок регрессоров, построенных по малым выборкам, в предположении стохастичности регрессоров не могут быть прежними, хотя в значительной мере остаются таковыми, если имеет место *одномоментная некоррелированность* (*contemporaneously uncorrelation*) регрессоров и регрессионных отклонений (т.е. нулевая корреляция между указанными величинами, рассматриваемыми в одни и те же моменты времени).

Рассмотрим общую линейную модель, в которой отсутствует предположение о нестохастичности матрицы плана X:

$$Y = X\beta + u. \qquad \textbf{(1.91)}$$

Пусть ковариационная матрица регрессионных отклонений имеет классический вид. Если выполняются следующие условия:

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\, T^{-1}X'X = \Sigma; \tag{1.92, a}$$

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\, T^{-1}X'u = 0, \tag{1.92, b}$$

где E — невырожденная матрица, то МНК-оценка будет состоятельной:

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\,\hat{\beta} = \underset{T\to\infty}{p\lim}(X'X)^{-1}X'Y = \underset{T\to\infty}{p\lim}(X'X)^{-1}X'(X\beta+u) =$$

$$= \beta + \underset{T\to\infty}{p\lim}(X'X)^{-1}X'u = \beta + \underset{T\to\infty}{p\lim}(T^{-1}X'X)^{-1}\,\underset{T\to\infty}{p\lim}(T^{-1}X'u) =$$

$$= \beta + \Sigma O = \beta.$$

Предположения (**1.92**) заменяют второе классическое условие. Предположение (**1.92**, *a*) будет выполняться, если матрица X состоит из реализаций стационарного многомерного стахастического процесса с невырожденной одномоментной ковариационной матрицей. Можно также показать, что стандартные формулы для оценки дисперсии регрессионных отклонений и ковариационной матрицы векторной МНК-оценки $\hat{\beta}$ также будут состоятельны.

1.6.7. Ошибки измерения переменных

Причиной стохастичности регрессоров могут оказаться ошибки в измерениях переменных. Однако в этом случае МНК-оценки оказываются несостоятельными.

Пусть, например, известно, что $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}$ связаны точной линейной связью:

$$\tilde{Y} = \tilde{X}\beta, \tag{1.93}$$

но вместо непосредственного наблюдения $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ мы наблюдаем переменные X и Y, которые могут быть «загрязнены» случайными ошибками измерения ζ и μ:

$$X = \tilde{X} + \zeta; \tag{1.94, a}$$

$$Y = \tilde{Y} + \mu. \tag{1.94, b}$$

Предположение об отсутствии автокорреляции в ошибках измерения не всегда разумно. Например, если X — предложение денег, то имеет смысл предположить, что ошибки измерения подчиняются модели скользящей средней первого порядка:

$$\zeta_t = \nu_t + \theta\nu_{t-1}, \tag{1.95}$$

где ν_t — белый шум.

Такая модель описывает механизм формирования ошибок измерения, в котором ошибка такущего периода имеет тенденцию компенсироваться на долю θ в следующем периоде.

Подставляя **(1.93)** в **(1.94)**, имеем:

$$Y = X\beta + \omega, \tag{1.96, a}$$

где

$$\omega = \mu - \beta\zeta. \tag{1.96, b}$$

Если допустить, что ошибки измерения некоррелированны, то ковариационная матрица для ω будет иметь вид:

$$E(\omega\omega') = \sigma_\mu^2 I + \beta^2\sigma_\zeta^2 I = \sigma_\omega^2 I, \tag{1.97}$$

где σ_μ^2 и σ_ζ^2 — дисперсии ζ и μ соответственно.

Из **(1.97)** ясно, что ω имеет классическую («скалярную») ковариационную матрицу.

Из уравнений **(1.96, *a*)** и **(1.96, *b*)** ясно, что остатки ω в **(1.96, *a*)** коррелированны с регрессорами X, что нарушает одно из классических предположений, обсужденных нами в разделе 1.5 и необходимых для получения свойства несмещенности МНК-оценок. Более того, МНК-оценки не являются более состоятельными (хотя условие **(1.92, *a*)** может выполняться, но условие **(1.92, *b*)** будет нарушено):

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\, T^{-1}X'X = \Sigma;$$

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\, T^{-1}\omega = \underset{T\to\infty}{p\lim}\, T^{-1}(\tilde{X} + \zeta)'(\mu - \beta\zeta) = \beta\sigma_\zeta^2 I \neq 0.$$

Таким образом,

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\,\hat{\beta} = \underset{T\to\infty}{p\lim}(XX')^{-1}X'Y = \underset{T\to\infty}{p\lim}(X'X)^{-1}X'(X\beta + \omega) =$$

$$= \beta + \underset{T\to\infty}{p\lim}\, T(X'X)^{-1}\, \underset{T\to\infty}{p\lim}\, T(X'X)^{-1}\, \underset{T\to\infty}{p\lim}\, T^{-1}X'\omega = -\beta\sigma_\zeta^2\Sigma^{-1} \neq \beta.$$

1.6.8. Одновременные уравнения и инструментальные переменные

Корреляция между объясняющими переменными и регрессионными отклонениями может возникать при наличии системы одновременных уравнений. В системе таких уравнений существует одномоментная обратная связь между эндогенными переменными системы. МНК по каждому отдельному уравнению, таким образом, дает смещенные и несостоятельные оценки параметров.

Можно реализовать одновременное оценивание всех уравнений модели, однако часто на практике нужно оценить лишь отдельное структурное уравнение. Тем не менее следует понимать, что рассматриваемое уравнение может являться частью более широкой одновременной системы и тогда МНК неприменим. Состоятельные оценки могут быть получены методом *инструментальных переменных* (ИП) по отдельным уравнениям, хотя не всегда ясно, как выбрать определенный набор инструментальных переменных и будут ли они независимы от остатков. ***Метод инструментальных переменных — это процедура оценки отдельного уравнения, которая не анализирует информацию, содержащуюся в остальных уравнениях системы.***

Метод инструментальных переменных (ИП) основан на следующем подходе: выбирается набор переменных (инструментов), которые удовлетворяют классическим предпосылкам, и эти переменные используются для построения «заменителей» для эндогенной переменной.

ИП-оценивание проводится следующим образом. Пусть имеется линейная регрессионная модель, в которой набор регрессоров состоит из двух частей: ***первая*** (X_1) состоит из k_1 переменных, асимптотически некоррелированных с ошибками u; ***вторая*** (X_2) состоит из k_2 переменных, коррелированных с ошибками u. Таким образом,

$$Y = X\beta + u = (X_1, X_2)\beta + u, \qquad \textbf{(1.98)}$$

где

$$\underset{T\to\infty}{p\lim} T^{-1}(X_1'u) = 0; \qquad \textbf{(1.99, a)}$$

$$\underset{T\to\infty}{p\lim} T^{-1}(X_2'u) \neq 0. \qquad \textbf{(1.99, b)}$$

Предположим, что существует набор W_1 из k_2 переменных, называемых инструментальными, которые обладают следующими свойствами:

$$\underset{T\to\infty}{p\lim} T^{-1}(W_1'u) = 0; \qquad \textbf{(1.100)}$$

$$\underset{T\to\infty}{p\lim} T^{-1}(W_1'X_2) \neq 0.$$

Отсюда W_1 некоррелированно в пределе с ошибками u и существует ненулевая корреляция между W_1 и X_2 (с матрицей асимптотически постоянных моментов W_1X_2).

Полная матрица инструментальных переменных состоит из двух подматриц

$$W = (W_1, X_1), \qquad \textbf{(1.101)}$$

где X_1 — собственные инструментальные переменные; W_1 замещают X_2.

Умножим **(1.98)** на W' и возьмем предел по вероятности:

$$\underset{T\to\infty}{p\lim} T^{-1}(W'Y) = \underset{T\to\infty}{p\lim} T^{-1}(W'X)\beta + \underset{T\to\infty}{p\lim} T^{-1}(W'u). \qquad \textbf{(1.102)}$$

Рассмотрим выборочные моменты в качестве оценок соответствующих теоретических величин (существование которых мы здесь предполагаем); используя уравнения **(1.100)**, легко убедиться, что $\hat{\beta}_{ИП}$ — оценка инструментальных переменных имеет вид

$$\hat{\beta}_{ИП} = (W'X)^{-1}(W'Y). \qquad \textbf{(1.103)}$$

Отметим, что, если все переменные X удовлетворяют классическим предпосылкам, тогда W совпадает с X и это уже обычная МНК-оценка. Асимптотическая ковариационная матрица ИП-оценки (которую мы обозначим $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{ИП})$) может быть представлена в следующем виде. Подставляя **(1.98)** в **(1.104)**, получим

$$\hat{\beta}_{ИП} - \beta = (W'X)^{-1}(W'u). \qquad \textbf{(1.104)}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{ИП}) &= \underset{T\to\infty}{p\lim}\, T(W'X)^{-1}\, \underset{T\to\infty}{p\lim}\, T^{-2}(W'uu'W)\times \\ &\times \underset{T\to\infty}{p\lim}\, T(X'W)^{-1} = \sigma^2 (W'X)^{-1}(W'W)(X'W)^{-1}.\end{aligned} \qquad \textbf{(1.105)}$$

Оценка $\hat{\beta}_{ИП}$ — состоятельна (см. **(1.105)**), используя **(1.99)**, **(1.100)** и **(1.101)**, остатки

$$\hat{u}_{ИП} = Y - X\hat{\beta}_{ИП} \qquad \textbf{(1.106)}$$

могут быть использованы для получения состоятельной оценки σ^2:

$$s^2_{ИП} = (\hat{u}'_{ИП}\hat{u}_{ИП})/T. \qquad \textbf{(1.107)}$$

Отметим, что X, а не W используется в **(1.106)**, и что **(1.105)** превратится в формулу для МНК, когда X и W совпадают.

Теперь в иллюстративных целях обратимся к простейшей системе одновременных уравнений с двумя уравнениями:

$$y_1 = \alpha y_2 + \beta x_1 + \varepsilon_1; \qquad \textbf{(1.108, a)}$$

$$y_2 = \gamma y_1 + \theta x_2 + \varepsilon_2, \qquad \textbf{(1.108, \textit{b})}$$

где

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2 I);$$

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}(x_i'\varepsilon_j)/T = 0 \quad (i, j = 1,\ 2);$$

$$E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) = E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t-j}) = 0.$$

Чтобы избежать проблем, возникающих в связи с одновременностью эндогенных переменных y_{1t}, y_{2t}, мы предполагаем, что случайные отклонения в обоих уравнениях являются процессами белого шума и что между отклонениями разных уравнений нет одномоментной связи.

Приведенная форма уравнений системы имеет вид:

$$y_{1t} = x_{1t}\pi_{11} + x_{2t}\pi_{12} + \nu_{1t}; \qquad \textbf{(1.109, a)}$$

$$y_{2t} = x_{1t}\pi_{21} + x_{2t}\pi_{22} + \nu_{2t}, \qquad \textbf{(1.109, b)}$$

где

$$\pi_{11} = (1-\alpha\gamma)^{-1}\beta;$$

$$\pi_{12} = (1-\alpha\gamma)^{-1}\alpha\theta;\ \pi_{21} = (1-\alpha\gamma)^{-1}\gamma\beta;\ \ \pi_{22} = (1-\alpha\gamma)^{-1}\theta;$$

$$\nu_{1t} = (1-\alpha\gamma)^{-1}(\varepsilon_{1t} + \alpha\varepsilon_{2t});\ \ \nu_{2t} = (1-\alpha\gamma)^{-1}(\varepsilon_{2t} + \gamma\varepsilon_{1t}).$$

Важно заметить, что в **(1.109, *a*)** и **(1.109, *b*)** переменные y_{1t}, y_{2t} зависят от линейной комбинации структурных отклонений ε_{it} ($I = 1, 2$). Это происходит благодаря одновременности системы и, таким образом, классические предпосылки из параграфа 1.5 не выполняются, так же как и условия **(1.92, *b*)**, откуда следует, что МНК-оценки будут смещенными и несостоятельными. Для построения состоятельных оценок коэффициентов системы одновременных уравнений используется метод инструментальных переменных.

В данной главе мы рассмотрели стандартные эконометрические результаты МНК-оценивания отдельного уравнения, показали, что при определенном наборе предпосылок МНК позволяет получить оптимальные оценки, а также, что использование данной техники в случае нарушения выдвинутых предпосылок не дает оптимальных результатов.

Вопросы и задания

1. У вас есть случайная выборка $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$ реализаций двух случайных величин — x и y. Каким образом вы можете рассчитать теоретический коэффициент корреляции между случайными величинами x и y?

A) $\hat{\beta}\cdot\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$;

B) $\dfrac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\ \bar{x}^2)\cdot(\overline{y^2}-\bar{y}^2)}}$,

где $\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, $\overline{xy} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i$;

C) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i\, y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}$;

D) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$;

E) нет правильного ответа.

2. Зависимость между случайными величинами x и y описывается следующим образом: $x = \delta - \gamma \cdot y$, где δ и γ — положительные константы. Тогда выборочный коэффициент корреляции между x и y равен:

A) δ;

B) γ;

C) $\pm\gamma$ в зависимости от знака $\overline{x}$;

D) -1;

E) 1.

3. В парной регрессии t-статистика для коэффициента β равна 2,4. Также известно, что критические значения соответствующего t-распределения равны 2,23 и 3,17 для 5-процентного и 1-процентного уровней значимости соответственно. Тогда гипотеза о равенстве β нулю:

A) принимается на 5-процентном, но отвергается на 1-процентном уровне значимости;

B) отвергается и на 5-процентном, и на 1-процентном уровнях значимости;

C) отвергается на 5-процентном, но принимается на 1-процентном уровне значимости;

D) принимается и на 5-процентном, и на 1-процентном уровнях значимости;

E) вероятно, в расчеты вкралась ошибка.

4. Выберите правильное утверждение для парной регрессии:

A) $R^2 = r_{y,\hat{y}}^2$, где r — выборочный коэффициент корреляции между y и $\hat{y}$; $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ – регрессионные значения y;

B) $R^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{\beta} = 0$;

C) $R^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0$, где $e_i = y_i - \hat{y}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — регрессионные остатки;

D) $R = r_{y,x}$;

E) $R = t$, где t — значение t-статистики для параметра β.

5. Выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ является смещенной оценкой теоретической дисперсии $\sigma^2 = E(x - Ex)^2$, потому что:

A) в выборке значений по определению меньше, чем в генеральной совокупности;

B) $\overline{x}$ автоматически находится в центре выборки, поэтому отклонения от него меньше, чем от Ex;

C) она в n раз меньше, поскольку содержит множитель $1/n$;

D) с ростом n выборочная дисперсия убывает, а теоретическая дисперсия остается постоянной;

E) все вышесказанное верно;

6. Какую гипотезу проверяет тест структурных сдвигов (*тест Чоу*)?

A) $H_0: \sigma_i^2 = \text{const}$ для всех i;

B) $H_0: \beta_i' = \beta_i''$ для всех i и $\sigma' = \sigma''$;

C) $H_0: \beta_i' = \beta_i''$ для всех i;

D) $H_0: \beta_i = 0$ для всех i;

E) $H_0: R^2 = 0$.

7. Была оценена следующая регрессия (в экономике труда она называется *уравнением Минцера*): $y_i = \alpha + \beta x_i + \delta d_i + \varepsilon_i$, где y — логарифм дохода; x — уровень образования; d — фиктивная переменная, равная 1 для мужчин и 0 для женщин. Как с помощью этой модели проверить гипотезу о наличии половой дискриминации по зарплате:

A) если оценка $\hat{\beta}$ незначима, то дискриминации нет;

B) значимо отличная от нуля оценка $\hat{\delta}$ говорит о наличии дискриминации;

C) значимо отличная от нуля оценка $\hat{\delta}$ говорит об отсутствии дискриминации;

D) если R^2 большой, то модель верна, а значит, дискриминация есть;

E) данная гипотеза в рамках нашей модели не формализуется.

8. Пусть y — потребление жевательной резинки (кг/год на одного человека); x — возраст человека (число полных лет); d — фиктивная переменная, равная 1, если человек курит, и 0 — в противном случае. По 250 наблюдениям, взятым из возрастного диапазона от 15 до 30 лет, была построена следующая регрессия:

$$y_i = 2{,}175 + (-0{,}066 + 0{,}012\, d_i)\, x_i + e_i,$$

причем все оценки оказались значимыми и регрессия в целом тоже значимой. Тогда можно утверждать, что:

A) в среднем с каждым годом человек потребляет на 0,054 кг жевательной резинки меньше;

B) курильщики потребляют в среднем меньше жевательной резинки, чем некурящие;

C) в среднем с каждым годом люди потребляют на 0,066 кг жевательной резинки меньше;

D) с каждым годом курильщики потребляют в среднем на 0,012 кг жевательной резинки больше;

E) с каждым годом курильщики потребляют в среднем на 0,054 кг жевательной резинки меньше.

9. В общем случае НЕЛЬЗЯ утверждать, что коэффициенты регрессии, при прочих равных условиях, являются тем более точными, чем:
A) меньше теоретическая дисперсия ошибки;
B) меньше связаны между собой объясняющие переменные;
C) больше число наблюдений в выборке;
D) больше выборочный разброс регрессоров;
E) больше переменных включено в модель.

10. Случайные величины x и y подчиняются следующей регрессионной зависимости: $y = \beta x + \varepsilon$, $E\varepsilon = 0$, $D\varepsilon = 1$. У вас есть случайная выборка из двух наблюдений $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Чему равна МНК-оценка параметра β?

A) -1; *B*) $-0{,}4$; *C*) 0; *D*) 0,4; *E*) 1.

11. Вы оценили модель множественной регрессии и получили следующие результаты (в скобках даны стандартные ошибки): $\underset{(2{,}41)}{y_i = 3{,}43} + \underset{(0{,}97)}{2{,}10}\, x_{2i} + \underset{(1{,}14)}{5{,}21}\, x_{3i} + e_i$; $R^2 = 0{,}57$; $n = 35$. Вам надо проверить гипотезу $H_0 : \beta_3 = 3$. Допустим, вы выбираете 5-процентный уровень значимости (соответствующее критическое значение равно 2,04). Сколько степеней свободы (v) имеет t-статистика, каково ее значение (t), и принимаете ли вы гипотезу?
A) $v = 32, t = 1{,}94$, гипотеза принимается;
B) $v = 33, t = 1{,}94$, гипотеза принимается;
C) $v = 33, t = 4{,}57$, гипотеза отвергается;
D) $v = 35, t = 4{,}57$, гипотеза принимается;
E) $v = 32, t = 0{,}97$, гипотеза отвергается.

12. Признаком точной мультиколлинеарности является:
A) H_0: $\beta_j > 0$ для всех j отвергается;
B) t-статистики незначимы, а F-статистика значима;
C) незначимость уравнения регрессии;
D) H_0: $R^2 = 0$ не отвергается;
E) компьютер отказывается считать МНК-оценки коэффициентов регрессии.

13. Переменные x и y связаны следующей зависимостью:
$$y_i = \begin{cases} 3 + 2x_i, & i = 1, \ldots, 10; \\ 7, & i = 11, \ldots, 20. \end{cases}$$
Какую модель должен построить исследователь, чтобы по выборке $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{20}$ оценить модель, используя фиктивную переменную d_i, равную 1 при $i = 1, \ldots, 10$, и равную 0 иначе?
A) $y_i = \alpha + \beta x_i + \delta d_i + \varepsilon_i$;
B) $y_i = \alpha + \beta d_i x_i + \delta d_i + \varepsilon_i$;

C) $y_i = \alpha + \beta d_i x_i + \varepsilon_i$;

D) $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$;

E) Оценить такую модель МНК невозможно.

14. Рассмотрите модель:

$$y_i = \theta x_i + \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — неслучайные величины; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — случайные отклонения с нулевыми средними, одинаковыми дисперсиями и нулевыми ковариациями.

Воспользуйтесь следующим способом оценивания θ:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

1. Является ли $\hat{\theta}$ линейной по $y_1, \ldots, y_n$ оценкой θ?
2. Является ли $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой θ?
3. Найдите дисперсию $\hat{\theta}$ и предложите способ ее оценивания.
4. Предложите эффективный способ оценивания θ (в классе линейных по $y_1, \ldots, y_n$ и несмещенных оценок). Ответ поясните.
5. Проверьте, выполняется ли для $\hat{\theta}$ теорема Гаусса—Маркова.
6. Какие дополнительные условия необходимо наложить на модель, чтобы оценка $\hat{\theta}$ была эффективной. Ответ поясните.
7. Предположим, что $D\varepsilon_i = \sigma_i^2$. При каких условиях на σ_i^2 оценка $\hat{\theta}$ будет эффективной.

15. Вы оцениваете с помощью МНК следующее регрессионное уравнение:

$$w_i = \alpha + \beta \cdot d_i + \varepsilon_i,$$

где w_i — зарплата в месяц выпускника экономического факультета (в у.е.), а d_i — количество лет обучения (принимает значения 4 или 6 лет, т.е. обучение в аспирантуре здесь не рассматривается).

Ошибки ε_i удовлетворяют условиям классической регрессионной модели:

$E\varepsilon_i = 0$, $D\varepsilon_i = \sigma^2$, $\operatorname{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$.

Вами собрана следующая статистика:

$$X'X = \begin{pmatrix} 300 & 1560 \\ 1560 & 8400 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 366\,000$$

$$\sum_{i=1}^n w_i d_i = 2\,004\,000, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1\,654\,000.$$

1. Сформулируйте оптимизационную задачу для получения МНК-оценок коэффициентов α и β.
2. Найдите оценки коэффициентов α и β. Дайте содержательную интерпретацию коэффициента β.
3. Проверьте гипотезу о значимом влиянии образования на зарплату на 5%-ном уровне значимости. Постройте 95%-ный доверительный интервал для параметра β.
4. Чему равен коэффициент детерминации.
5. Проверьте значимость модели в целом.
6. Предположим, что ваше решение «продолжать образование в магистратуре или нет», зависит от положения вашей зарплаты по отношению к средней на рынке. Пойдете ли вы в магистратуру, если после окончания бакалавриата вам предлагают 750 у.е. в месяц, а после окончания магистратуры — 1600 у.е.
7. Оценив модель с помощью пакета Eviews, вы решили провести тест Уайта на гетероскедастичность. Результаты теста оказались следующими:

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	4.506832	Probability	0.000000
Obs*R-squared	65.61422	Probability	0.000000

Есть ли в вашей модели гетероскедастичность? Почему?
8. Вы подозреваете, что в оплате труда может существовать дискриминация по половому признаку. Предложите два способа проверки данного предположения. Подробно опишите процедуру проверки гипотез.

16. С помощью МНК по квартальным данным с 1:1971 по 4:1976 гг. получено следующее уравнение объема продаж товара:

$$y_t = \underset{(1.94)}{1.43} - \underset{(0.0043)}{0.0127}\, x_{t1} - \underset{(2.13)}{5.62}\, x_{t2} + \underset{(0.011)}{0.053}\, x_{t3} + e_t, \quad \mathrm{RSS} = 101.32, \quad \mathrm{ESS} = 19.54$$

(в скобках указаны стандартные ошибки);

$\mathrm{ESS} = \sum e_t^2$, $\mathrm{RSS} = \sum(\hat{y}_t - \bar{y}_t)^2$.

1. Какие переменные оказывают значимое влияние на зависимую переменную?
2. Найдите коэффициент детерминации.
3. Протестируйте значимость регрессии в целом.

После добавления в уравнение линейной комбинации трех фиктивных переменных, соответствующих второму, третьему и четвертому кварталам года, величина ESS уменьшилась до 10.11. Как были заданы фиктивные переменные? Проверьте гипотезу о наличии сезонности, сформулировав необходимые модельные предположения о виде этой сезонности.

2 Оптимизация потребительского выбора

В данной главе на примере модели оптимизации потребительского выбора показано, каким образом математический аппарат позволяет глубже осмыслить экономические проблемы, получить известные выводы путем лаконичных рассуждений, увидеть зависимости и свойства, которые практически невозможно четко описать с помощью словесных рассуждений.

2.1. Основные предпосылки и понятия

Современная теория поведения потребителя базируется на трех основных предположениях:

1) предпочтения потребителя сформированы;
2) предпочтения транзитивны;
3) предположение «о ненасыщаемости».

Предположение 1 говорит о том, что потребитель умеет оценивать и сравнивать между собой различные наборы товаров. Если обозначить один набор товаров A, а другой набор — B, то в соответствии с предположением *1* потребитель может установить между ними либо отношение предпочтения ($A \succ B$ или $A \prec B$), либо отношение эквивалентности ($A \sim B$).

Предположение 2 подтверждает способность потребителя осуществлять выбор: если для потребителя набор A предпочтительнее набора B, а набор B предпочтительнее, чем набор C, то A, конечно, предпочтительнее, чем C. В противном случае выбор был бы непосильной задачей для потребителя.

И наконец, *предположение 3* соответствует интуитивному представлению о том, что потребитель всегда предпочитает большее количество товара меньшему.

Мы не будем останавливаться на описании возможных видов предпочтений и соответствующих им видах кривых безразличия. Эти вопросы достаточно детально отражены как в отечественной, так и в зарубежной литературе по микроэкономике (см., например, *Вэриан Х.В.* [1], глава 5).

Проведем анализ поведения потребителя, приняв предположение о том, что потребитель — это *homo oeconomicus*[1], ранжирующий

[1] *Homo oeconomicus* — идеальный рациональный потребитель, «экономический человек». (Экономическая школа. Вып. 2. — 1992. — С. 32).

потребительские наборы по определенному, именно ему присущему, правилу. Для описания этого правила введем понятие порядковой функции полезности.

Обозначим набор товаров (потребительский набор) через X, где X — n-мерный вектор, каждая компонента x_i которого обозначает количество i-го товара в наборе, т.е. $X = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$. Множество всевозможных неотрицательных векторов X образует n-мерное пространство товаров. *Для упрощения и наглядности изложения модели потребительского выбора ограничимся случаем двух товаров,* т.е. $X = (x_1, x_2)$. *При этом отметим, что все полученные выводы имеют место для случая любого конечного числа товаров.*

Функцией полезности $U(x_1, x_2)$ назовем правило, которое каждому набору товаров $X = (x_1, x_2)$ ставит в соответствие число U, которое представляет собой оценку полезности этого набора потребителем.

Если на пространстве товаров задана функция полезности потребителя $U = U(x_1, x_2)$, то потребитель всегда может сказать, какие из рассматриваемых наборов предпочтительнее, а какие из них эквивалентны.

Допустим, имеются три набора: $A = (X_1^A, X_2^A)$, $B = (X_1^B, X_2^B)$ и $C = (X_1^C, X_2^C)$. Если $U(A) > U(B)$, то набор A предпочтительнее набора B, т.е. $A \succ B$. Если $U(A) = U(B)$, то наборы A и B эквивалентны для потребителя с точки зрения доставляемой потребителю полезности, т.е. $A \sim B$.

Более того, если $U(A) > U(B)$, а $U(B) > U(C)$, то $U(A) > U(C)$, т.е. из того, что $A \succ B$, и $B \succ C$ следует, что $A \succ C$, т.е. выполняется свойство транзитивности для отношения предпочтения между наборами товаров.

Функция полезности должна удовлетворять следующим свойствам:

1) $\dfrac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1' > 0, \qquad \dfrac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_2' > 0,$

т.е., если $x_1^2 > x_1^1$, то $U(x_1^2, x_2) > U(x_1^1, x_2)$; если $x_2^2 > x_2^1$, то $U(x_1, x_2^2) > U(x_1, x_2^1)$.

2) $\partial^2 U / \partial x_1^2 = u_1'' < 0, \partial^2 U / \partial x_2^2 = u_1'' < 0;$

3) $\dfrac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{12}'' = \dfrac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = u_{21}'' > 0.$

Первое свойство говорит о том, что рост объема потребления одного из товаров при неизменном объеме потребления другого увеличивает потребительскую оценку набора товаров.

В соответствии со *вторым свойством* предельная полезность любого из товаров уменьшается, если объем его потребления растет (закон убывающей предельной полезности).

И наконец, *третье свойство* утверждает, что предельная полезность каждого из товаров увеличивается при возрастании количества другого товара. В этом случае товар, количество которого не меняется, становится относительно дефицитным и, следовательно, дополнительная единица этого товара имеет большую ценность, чем предыдущая.

Задавшись некоторым значением полезности U^*, можно, используя функцию полезности, найти множество всех наборов, полезность которых равняется U^*. Они лежат на линии уровня функции полезности, соответствующей значению U^* и удовлетворяющей следующему уравнению:

$$U(x_1, x_2) = U^*. \quad \textbf{(2.1)}$$

Линии уровня функции полезности называются кривыми безразличия.

Кривая безразличия представляет собой совокупность потребительских наборов, обеспечивающих одинаковый уровень удовлетворения потребностей потребителя (в частности, $U = U^*$).

Отметим, что уравнение **(2.1)** задает неявную функцию $x_2 = h(x_1)$, которая существует при *предположениях 1—3* относительно функции полезности.

Типичная кривая безразличия ($U(x_1, x_2) = U^*$) в пространстве товаров представлена на рис. 2.1.

Заметим, что через любую точку (x_1^0, x_2^0) пространства товаров проходит некоторая кривая безразличия, для которой $U = U(x_1^0, x_2^0)$.

При перемещении по кривой безразличия, например, из точки A в точку B, происходит замещение товара *2* товаром *1*, так как количество товара *1* в наборе B больше, чем в наборе A. Для оценки скорости замещения товара *2* товаром *1* вводится понятие нормы замещения — RS_{12} (*Rate Substitution*).

По определению, $RS_{12} = -\Delta x_2/\Delta x_1$, **(2.2)**

где $\Delta x_1 = X_1^B - X_1^A < 0$; $\Delta x_2 = X_2^B - X_2^A > 0$.

Если приращение Δx_1 очень незначительно ($\Delta x_1 \to 0$), то оценкой скорости замещения одного товара другим становится предельная норма замещения MRS_{12} (*Marginal Rate Substitution*).

$$MRS_{12} = \lim_{\Delta x_1 \to 0}(-\Delta x_2/\Delta x_1) = -(dx_2/dx_1). \quad \textbf{(2.3)}$$

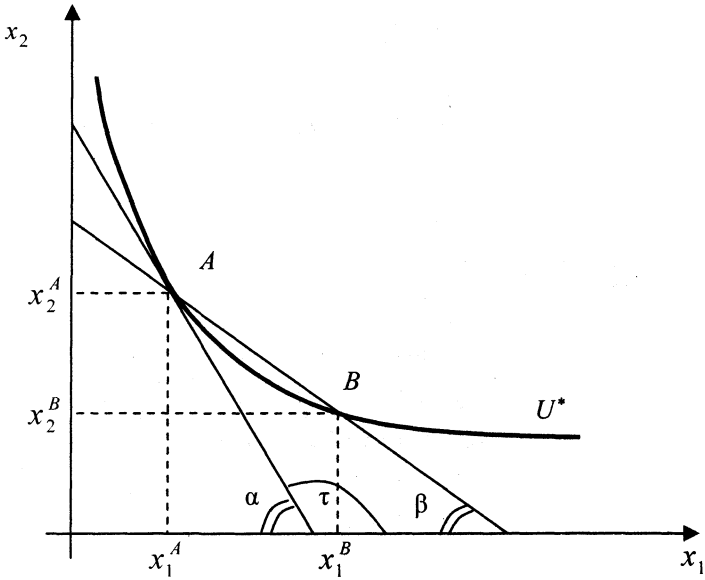


Рис 2.1

Норма замещения RS_{12} оценивает среднюю скорость замещения товара *2* товаром *1* в наборе *A* (см. рис. 2.1) и изображается графически как tg(β). Предельная норма замещения MRS_{12} оценивает скорость замещения в точке *A*, равняется «минус» производной x_2 ($x_2 = h(x_1)$) по x_1 и изображается графически как tg(α) = −tg(τ).

Легко показать, что предельная норма замещения в любой точке кривой безразличия может быть выражена через предельные полезности товаров. Действительно, для всех наборов товаров, принадлежащих некоторой кривой безразличия, изменение полезности при приращении одного либо другого товара в наборе тождественно равно нулю (по определению кривой безразличия). Это можно записать математически как равенство нулю полного дифференциала функции полезности при некотором значении *U*, а именно:

$$dU = dx_1 \cdot (\partial U/\partial x_1) + dx_2 \cdot (\partial U/\partial x_2) \equiv 0. \quad \textbf{(2.4)}$$

Из **(2.4)** следует, что $-dx_2/dx_1 = U_1'/U_2'$, **(2.5)**

т.е.

$$MRS_{12} = U_1'/U_2'. \quad \textbf{(2.6)}$$

Мы показали, что с помощью функции полезности можно описать предпочтения потребителя. Но этого недостаточно для математической формулировки задачи потребительского выбора. Требуется формализовать условия, ограничивающие выбор потребителя. Таковыми являются прежде всего доход (бюджет) потребителя и цены товаров. Если цену первого товара обозначить p_1, цену второго — p_2, а доход — M, то множество наборов, которые являются доступными для потребителя, удовлетворяет следующему неравенству:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq M, \tag{2.7}$$

где p_1x_1 — расход на x_1 единиц товара *1*; p_2x_2 — расход на x_2 единицы товара *2*.

Среди множества доступных наборов особое место принадлежит тем из них, которые стоят ровно M ден.ед. Для таких наборов **(2.7)** выполняется как строгое равенство, т.е.

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M. \tag{2.8}$$

Они образуют бюджетное ограничение.

Бюджетное ограничение представляет собой отрезок прямой в пространстве товаров. В этом легко убедиться, переписав **(2.8)** следующим образом:

$$X_2 = (-p_1X_1)/p_2 + M/p_2. \tag{2.9}$$

Наклон прямой, задаваемой уравнением **(2.9)**, определяется отношением цен, а сдвиг ее относительно оси X_2 — величиной M/p_2. Изобразим бюджетное ограничение (бюджетную линию) в пространстве товаров (рис. 2.2).

Если потребитель не приобретает ни одной единицы товара *1*, то очевидно, что весь свой доход он тратит на товар *2*, приобретая его в максимально возможном объеме, равном M/p_2 (рис. 2.2). В случае отказа от товара *2* потребитель может приобрести M/p_1 единиц товара *1*. Таким образом, точки (0; M/p_2) и (M/p_1;0) являются границами бюджетной линии.

При изменении цен, например цены товара *1*, линия бюджетного ограничения сдвигается либо ближе к началу координат (при повышении цены товара *1* до p_{11}), либо отодвигается от начала координат (при понижении цены товара *1* до p_{12}) (рис. 2.3).

Когда меняется доход потребителя, бюджетная линия либо опускается вниз (если M уменьшается до M_1), либо смещается вверх (если M возрастает до M_2) параллельно исходной бюджетной линии (рис. 2.4).

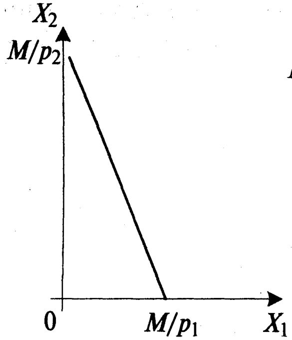


Рис. 2.2

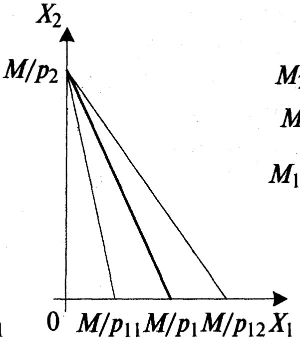


Рис. 2.3

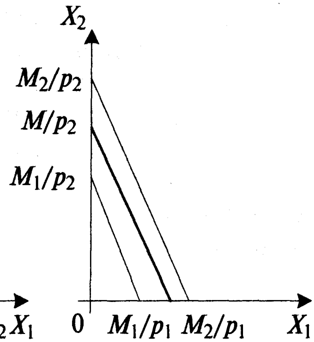


Рис. 2.4

2.2. Задача оптимизации потребительского выбора

После обсуждения основных предпосылок и введения основных понятий сформулируем математически задачу оптимизации потребительского выбора, основанную на перечисленных в параграфе 2.1 гипотезах теории поведения потребителя:

$$U = U(x_1, x_2) \to \max; \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le M. \qquad \textbf{(2.11)}$$

Решением задачи **(2.10)**, **(2.11)** является такой потребительский набор (x_1*, x_2*), который, во-первых, является допустимым для потребителя, т.е. стоимость этого набора не больше дохода M, а во-вторых, обеспечивает максимально возможный уровень полезности для потребителя.

Задача **(2.10)**, **(2.11)** является задачей математического программирования, где **(2.10)** — целевая функция, а **(2.11)** — допустимое множество. Однако, так как для оптимальных точек (максимизирующих целевую функцию) ограничение **(2.11)** выполняется как строгое равенство, решение задачи **(2.10)**, **(2.11)** может быть заменено решением задачи на нахождение условного экстремума (максимума):

$$U = U(x_1, x_2) \to \max; \qquad (2.10)$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M. \qquad (2.8)$$

Таким образом, можно свести задачу выбора потребителем набора с максимально возможной полезностью при заданных системе предпочтений, ценах и доходе к решению задачи оптимизации потребительского выбора **(2.10)**, **(2.8)**.

Для решения этой задачи воспользуемся методом Лагранжа. Построим функцию Лагранжа (лагранжиан):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2) \qquad \textbf{(2.12)}$$

и найдем для нее точку безусловного максимума. Допустим, что это точка $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$, тогда укороченная точка (x_1^*, x_2^*) будет решением задачи **(2.10), (2.8)**.

Согласно необходимому условию экстремума функции трех переменных точка $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\partial L/\partial x_1 = U_1' - \lambda p_1 = 0, \text{ или } U_1' = \lambda p_1; \qquad \mathbf{(2.13)}$$

$$\partial L/\partial x_2 = U_2' - \lambda p_2 = 0, \text{ или } U_2' = \lambda p_2; \qquad \mathbf{(2.14)}$$

$$\partial L/\partial \lambda = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \qquad \mathbf{(2.15)}$$

И, следовательно, она может быть найдена как решение системы из трех уравнений **(2.13)—(2.15)** с тремя неизвестными x_1, x_2, λ.

Если выразить из **(2.13)** и **(2.14)** отношение предельных полезностей товаров U_1'/U_2', то окажется, что отношение предельных полезностей для оптимального набора товаров равно отношению цен:

$$\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad \mathbf{(2.16)}$$

Геометрическая интерпретация решения задачи **(2.10), (2.8)** как задачи на нахождение условного максимума позволяет получить ту традиционную картинку, которую можно найти в любом учебнике по микроэкономике (рис. 2.5).

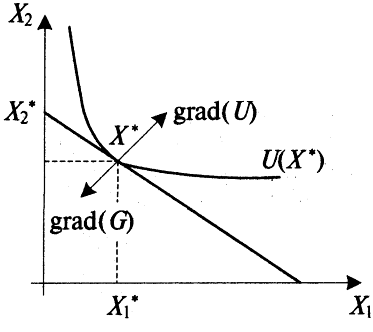


Рис. 2.5

Обоснуем приведенное на рис. 2.5 изображение равновесия потребителя. Согласно необходимому условию условного экстремума для оптимального набора потребителя X^* выполняются условия **(2.13)** и **(2.14)**. Перепишем их следующим образом:

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2.17)}$$

Левая часть равенства **(2.17)** представляет собой градиент[1] целевой функции $U(x_1, x_2)$. Вектор цен в правой части является градиентом функции-условия $G(x_1, x_2)$, действительно,

$$G(x_1, x_2) = M - p_1x_1 - p_2x_2, \text{ а } \partial G/\partial x_1 = -p_1, \ \partial G/\partial x_2 = -p_2.$$

Следовательно, согласно **(2.17)** градиенты целевой функции и функции-условия пропорциональны с коэффициентом пропорциональности $(-\lambda)$. Это означает, что линия уровня целевой функции (кривая безразличия $U(X^*)$) и нулевая линия уровня функции-условия $G(x_1, x_2)$ (бюджетное ограничение: $M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$) имеют общую касательную, которая перпендикулярна одновременно градиентам обеих функций в точке X^*. Последнее означает, что кривая безразличия и линия бюджетного ограничения касаются в точке потребительского оптимума (которая является решением задачи **(2.10)**, **(2.8)**).

Набор товаров X^*, который выбирает потребитель, характеризует спрос на рассматриваемые товары. Действительно, x_1^* — такое количество товара *1*, которое потребитель «хочет и может» приобрести, т.е. это величина индивидуального спроса на товар *1*; x_2^* — величина спроса на товар *2*. Таким образом, решение задачи **(2.10)**, **(2.8)** для конкретных значений цен и дохода потребителя позволяет найти количественную оценку величины спроса на товары *1* и *2*.

При изменении цен на товары бюджетная линия будет менять положение в пространстве товаров (см. рис. 2.2 и 2.3), вследствие чего будут меняться оптимальные наборы потребителя, т.е. величины спроса на товары. При изменении дохода потребителя (см. рис. 2.4) бюджетная линия будет перемещаться в пространстве товаров параллельно наклону исходной бюджетной линии. И при разной величине дохода потребитель будет выбирать отличающиеся один от другого наборы товаров, т.е. предъявлять различный спрос на товары. Изменение величины спроса на товары *1* и *2* при изменении цен и дохода говорит о том, что спрос на них зависит от изменения последних. Эта зависимость может быть описана с помощью функций. Обозначим их через D_1 и D_2:

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, M) \text{ и } x_2^* = D_2(p_1, p_2, M). \qquad \textbf{(2.18)}$$

Функции **(2.18)** описывают зависимость величины спроса на первый и второй товары от изменения их цен и дохода потребителя

---

[1] *Градиентом функции* $f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^*, x_2^*) называется вектор, координаты которого равняются значениям частных производных функции в данной точке. Если обозначить градиент как $\operatorname{grad} f(x_1^*, x_2^*)$, то $\operatorname{grad} f(x_1^*, x_2^*) = \dfrac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}(x^*)$.

и называются *функциями спроса Маршалла*. С математической точки зрения они описывают множество решений задачи **(2.10)**, **(2.8)** для различных значений параметров p_1, p_2 и M и могут быть найдены для любой конкретной функции полезности, описывающей предпочтения потребителя.

➤**Пример 2.1.** Пусть предпочтения потребителя заданы функцией полезности следующего вида: $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/3}$. Выведем функции спроса Маршалла. Для этого сформулируем задачу **(2.10)**, **(2.8)** для заданной функции полезности и найдем ее решение методом Лагранжа:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/3} \to \max; \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M. \qquad (2.8)$$

Согласно **(2.12)** решение задачи **(2.19)**, **(2.8)** сводится к поиску безусловного максимума следующей функции:

$$L\ (x_1, x_2, \lambda) = x_1^{1/2}x_2^{1/3} + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2) \to \max; \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$U_1' = \frac{x_2^{1/3}}{2x_1^{1/2}}; \qquad U_2' = \frac{x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}.$$

Согласно **(2.16)**:

$$\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{3x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Соотношение **(2.21)** позволяет выразить x_2 через x_1:

$$x_2 = (2x_1p_1)/3p_2. \qquad \textbf{(2.22)}$$

Подставив **(2.22)** в **(2.8)**, получим решение задачи **(2.19)**, **(2.8)**, т.е. функцию спроса Маршалла для товара *1*:

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, M) = (3M)/5p_1.$$

После замены в **(2.22)** x_1 на x_1^* имеем

$$x_2^* = D_2(p_1, p_2, M) = (2M)/5p_2.$$

Зная функции спроса **(2.18)**, можно исследовать влияние изменения цен и дохода на величину спроса потребителя. Изменение спроса, допустим на товар *1*, при изменении цены товара *1* можно оценить путем определения частной производной функции $D_1(p_1, p_2, M)$ по переменной p_1, при изменении цены товара *2* — определением частной производной по переменной p_2. Влияние изменения дохода на величину спроса можно оценить с помощью частной производной функции D_1 по доходу M. Выпишем эти частные производные для конкретных функций спроса из примера 2.1:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -\frac{3M}{5p_1^2}; \quad \frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 0; \quad \frac{\partial D_1}{\partial M} = \frac{3}{5p_1}. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Как видно из **(2.23)**, производная $\partial D_1/\partial p_1$ отрицательна. Это говорит о том, что величина спроса на товар *1* и цена товара изменяются в разных направлениях, что согласуется с законом спроса. Частная производная $\partial D_1/\partial p_2$ равна нулю. Следовательно, при изменении цены товара *2* величина спроса на товар *1* не меняется. И наконец, частная производная $\partial D_1/\partial M$ положительна. Величина спроса на товар *1* и доход изменяются в одном направлении: с ростом дохода величина спроса растет, с уменьшением дохода — падает.

Можно продолжить анализ спроса потребителя на основе функций спроса **(2.18)**.

Если в функции $x_1^* = D_1(p_1, p_2, M)$ зафиксировать значения переменных p_2 и M на некотором уровне, допустим $p_2 = p_2^0$ и $M = M^0$, то функция D_1 превратится по существу в функцию одной переменной, описывающей зависимость величины спроса на товар *1* от его цены. График этой функции называется *кривой спроса*. Таким образом, благодаря знанию функции спроса $D_1(p_1, p_2, M)$ мы смогли, применив правило «ceterus paribus» (при прочих равных условиях), перейти к кривой спроса, с анализа которой начинается изучение спроса в экономической теории.

Если в функции $x_1^* = D_1(p_1, p_2, M)$ зафиксировать значения переменных p_1 и p_2 на некотором уровне, допустим $p_1 = p_1^0$ и $p_2 = p_2^0$, то функция D_1 будет описывать зависимость величины спроса на товар *1* от дохода M. График этой зависимости (функции) называется *кривой Энгеля*.

Далее анализ спроса можно углубить в следующем направлении. Если целью потребительского выбора является достижение максимальной полезности, возможной при заданных ценах и доходе потребителя, то представляет интерес исследовать зависимость уровня достигаемой полезности от всевозможных значений цен и дохода. Знание функций спроса **(2.18)** позволяет провести такой анализ. Для этого заменим в функции полезности **(2.10)** x_1 и x_2 на $x_1^* = D_1(p_1, p_2, M)$ и $x_2^* = D_2(p_1, p_2, M)$, соответственно. Обозначим полученную функцию через $V(p_1, p_2, M)$ или $V(p, M)$ (где p — вектор цен, $p = (p_1, p_2)$) и назовем ее *функцией косвенной полезности*.

Построим функцию косвенной полезности для примера 2.1:

$$D_1(p_1, p_2, M) = (3M)/5p_1,\ D_2(p_1, p_2, M) = (2M)/5p_2.$$

Тогда

$$V(p_1, p_2, M) = ((3M)/5p_1)^{1/2} \times ((2M)/5p_2)^{1/3}.$$

После несложных преобразований можно привести функцию косвенной полезности к следующему виду:

$$V(p_1, p_2, M) = \left(\frac{M}{5}\right)^{5/6} \left(\frac{3}{p_1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{p_2}\right)^{1/3}. \quad \textbf{(2.24)}$$

Отметим следующие *свойства функции косвенной полезности* $V(p, M)$:

1) $V(p, M)$ является не возрастающей по p: если $p^1 \geq p$, то $V(p^1, M) \leq V(p, M)$;

2) $V(p, M)$ является не убывающей по M: если $M^1 > M$, то $V(p, M^1) \geq V(p, M)$;

3) $V(p, M)$ является однородной нулевой степени на множестве (p, M);

4) $V(p, M)$ является квазивыпуклой по p: множество $\{p: V(p, M) \leq k\}$ является выпуклым множеством для всех $k > 0$;

5) $V(p, M)$ непрерывная функция для всех $p > 0$, $M > 0$.

Доказательство перечисленных свойств функции косвенной полезности можно найти в [3, с. 102—103] или в [2, с. 56—58]. Они используются при анализе взаимосвязи этой функции с другими функциями, привлекаемыми для исследования индивидуального спроса. Рассмотрим эти функции, позволяющие получить дополнительные оценки спроса на рассматриваемые товары.

2.3. Выбор потребителя при заданной полезности

При анализе поведения потребителя наряду с задачей оптимизации потребительского выбора **(2.10)**, **(2.8)** часто возникает задача другого рода. Допустим, задана некоторая кривая безразличия и цены товаров. Потребитель желает выбрать из множества одинаково полезных наборов такой, который является самым дешевым, т.е. минимизирует его расходы при заданных ценах на товары. Будем называть эту задачу связанной с задачей **(2.10)**, **(2.8)**. Математически она может быть записана следующим образом:

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \min; \quad \textbf{(2.25)}$$

$$U(x_1, x_2) = u. \quad \textbf{(2.26)}$$

Задача **(2.25)**, **(2.26)**, так же, как и задача **(2.10)**, **(2.8)**, является задачей на нахождение условного экстремума и может быть решена методом Лагранжа. Согласно геометрической интерпретации данного метода оптимальный набор товаров для задачи **(2.25)**, **(2.26)** является точкой касания некоторой линии уровня целевой функции $m(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$ и нулевой линии уровня функции-ограничения $G(x_1, x_2) = u - U(x_1, x_2)$ (рис. 2.6).

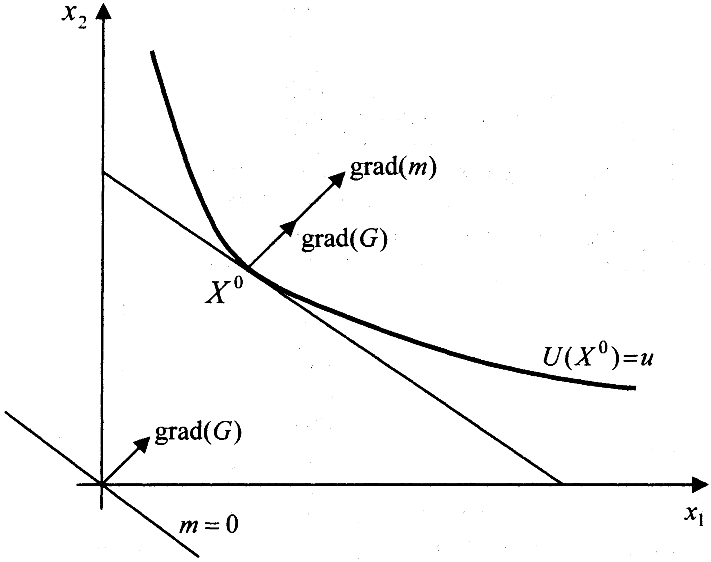


Рис. 2.6

Нетрудно заметить, что оптимальный набор $X^0 = (x_1^0, x_2^0)$ (решение) задачи **(2.25)**, **(2.26)** зависит от уровня полезности и соотношения цен на продукты, задающего наклон линий уровня линейной целевой функции. Это означает, что величина спроса x_1^0 на товар *1* и величина спроса x_2^0 на товар *2* при выборе потребителя в соответствии с условиями задачи **(2.25)**, **(2.26)** зависят от уровня полезности и цен товаров. Другими словами, спрос на товары *1* и *2* может быть описан как некоторые функции от цен и полезности. Обозначим их через $x_1^0 = H_1(p_1, p_2, u)$ и $x_2^0 = H_2(p_1, p_2, u)$ для товаров *1* и *2*, соответственно. Эти функции называются ***функциями спроса Хикса***. Они описывают множество решений задачи **(2.25)**, **(2.26)** и позволяют исследовать динамику спроса при изменении полезности и цен.

Кроме того, благодаря функциям спроса Хикса $x_1^0 = H_1(p_1, p_2, u)$ и $x_2^0 = H_2(p_1, p_2, u)$ минимальный расход на оптимальный потребительский набор $m^0 = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$ может быть исследован в зависимости от уровня полезности и цен. Для этого функции спроса H_1 и H_2 следует подставить в целевую функцию **(2.25)**:

$$m = p_1\, H_1(p_1, p_2, u) + p_2\, H_2(p_1, p_2, u).$$

Полученная функция называется *функцией расходов* и обозначается $m(p_1, p_2, u)$ или $m(p, u)$, где p — вектор цен, $p = (p_1, p_2)$.

Приведем *свойства функции расходов* $m(p, u)$:

1) $m(p, u)$ является не возрастающей по p;

2) $m(p, u)$ является однородной первой степени по p;

3) $m(p, u)$ является вогнутой по p;

4) $m(p, u)$ непрерывная в пространстве цен p, для $p > 0$;

5) $X^0 = (x_1^0, x_2^0)$ — решение задачи **(2.25)**, **(2.26)** при условии, что производная существует и что $p > 0$.

Доказательства свойств *1—5* можно найти в [3, с. 105 или в 2, с. 58—60].

Выведем функции спроса Хикса и функцию расходов для функции полезности из примера 2.1. Для этого сформулируем задачу потребительского выбора, связанную с задачей **(2.19)**, **(2.8)**, и решим ее методом Лагранжа. Итак, задача определения самого дешевого потребительского набора (минимизации расходов) заданной полезности имеет следующий вид:

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min; \qquad (2.25)$$

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/3} = u. \qquad \mathbf{(2.27)}$$

Построим функцию Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(u - x_1^{1/2}x_2^{1/3})$ и найдем для нее точку минимума $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(u - x_1^{1/2}x_2^{1/3}) \to \min. \qquad \mathbf{(2.28)}$$

Согласно необходимому условию экстремума функции трех переменных для точки $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ выполняются следующие соотношения:

$$\partial L/\partial x_1 = p_1 - \lambda x_2^{1/3}/2x_1^{1/2} = 0, \text{ или } p_1 = \lambda x_2^{1/3}/2x_1^{1/2}; \qquad \mathbf{(2.29)}$$

$$\partial L/\partial x_2 = p_2 - \lambda x_1^{1/2}/3x_2^{2/3} = 0, \text{ или } p_2 = \lambda x_1^{1/2}/3x_2^{2/3}; \qquad \mathbf{(2.30)}$$

$$\partial L/\partial \lambda = u - x_1^{1/2}x_2^{1/3} = 0. \qquad \mathbf{(2.31)}$$

Исключим из уравнений **(2.29)**, **(2.30)** переменную λ. Это позволит выразить переменную x_2 через $x_1 : x_2 = 2p_1x_1/3p_2$. Заменив в уранении **(2.31)** x_2 на его выражение через x_1, получим

$$u = x_1^{1/2}\left(\frac{2p_1}{3p_2}x_1\right)^{1/3} \Rightarrow (x_1)^{5/6} = u\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^0 = (u)^{6/5}\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{2/5} \text{ и } x_2^0 = (u)^{6/5}\left(\frac{2p_1}{3p_2}\right)^{3/5}. \qquad \mathbf{(2.32)}$$

Мы вывели функции спроса Хикса для заданной функции полезности $U = x_1^{1/2}x_2^{1/3}$. Они описывают множество решений задачи **(2.25)**, **(2.27)**, т.е. зависимость величины спроса на товары от уровня полезности и цен (см. формулы **(2.32)** для x_1^0 и x_2^0). Подставим в **(2.25)** найденные функции x_1^0 и x_2^0:

$$p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = p_1 \ (u)^{6/5}\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{2/5} + p_2(u)^{6/5}\left(\frac{2p_1}{3p_2}\right)^{3/5} =$$

$$= (u)^{6/5}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}(p_1)^{3/5}(p_2)^{2/5} + (u)^{6/5}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/5}(p_1)^{3/5}(p_2)^{2/5} =$$

$$= (u)^{6/5}\left[(p_1)^{3/5}(p_2)^{2/5}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/5}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/5} + (p_1)^{3/5}(p_2)^{2/5}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/5}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/5}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/5}\right] =$$

$$= 5(u)^{6/5}\left(\frac{p_1}{3}\right)^{3/5}\left(\frac{p_2}{2}\right)^{2/5} = m(p,u). \qquad \textbf{(2.33)}$$

Величина $p_1x_1^0 + p_2x_2^0$ является стоимостью самого дешевого набора на кривой безразличия, заданной уравнением **(2.27)**, и заданных ценах товаров. Как видно из **(2.33)** она зависит от уровня полезности и цен, т.е. является функцией расходов для потребителя, предпочтения которого описываются функцией полезности $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/3}$.

Можно показать, что функция косвенной полезности $V(p, M)$ и функция расходов $m(p, u)$ являются взаимно обратными функциями. Действительно, несложные преобразования позволяют вывести из функции косвенной полезности **(2.24)** функцию расходов **(2.33)**:

$$V = \left(\frac{M}{5}\right)^{5/6}\left(\frac{3}{p_1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{p_2}\right)^{1/3} \Rightarrow (M)^{5/6} = V(5)^{5/6}\left(\frac{p_1}{3}\right)^{1/2}\left(\frac{p_2}{2}\right)^{1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 5(V)^{6/5}\left(\frac{p_1}{3}\right)^{3/5}\left(\frac{p_2}{2}\right)^{2/5}.$$

И наоборот, из функции расходов **(2.33)** можно вывести функцию косвенной полезности:

$$m = 5(u)^{6/5}\left(\frac{p_1}{3}\right)^{3/5}\left(\frac{p_2}{2}\right)^{2/5} \Rightarrow (u)^{6/5} = \left(\frac{m}{5}\right)\left(\frac{3}{p_1}\right)^{3/5}\left(\frac{2}{p_2}\right)^{2/5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \left(\frac{m}{5}\right)^{5/6}\left(\frac{3}{p_1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{p_2}\right)^{1/3}.$$

2.4. Основные теоремы. Уравнение Слуцкого

Рассмотрим основные теоремы теории потребительского выбора, которые известны как *лемма Шепарда* (теорема 1), *тождество Роя* (теорема 2) и *уравнение Слуцкого* (теорема 3).

■ **Теорема 1.** (*Лемма Шепарда.*) Для функции расходов $m(p, u)$ и функций спроса Хикса $x_i^0 = H_i(p_1, p_2, u)$ справедливо следующее соотношение:

$$H_i(p_1, p_2, u) = \frac{\partial m(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} \qquad (i = 1,\ 2).$$

□ Доказательство. Приведем графическое доказательство. Пусть переменная u и одна из цен, допустим товара 2, равны соответственно: $u = u^*$, $p_2 = p_2^*$. Тогда функция расходов m (p_1, p_2^*, u^*) является функцией только переменной p_1. Предположим, что эта функция дифференцируема.

Что является производной функции $m(p_1, p_2^*, u^*)$ при $p_1 = p_1^*$? Так как полезность потребительского набора $[H_1(p_1^*, p_2^*, u^*),$ $H_2(p_1^*, p_2^*, u^*)]$ равна u^*, выполняется следующее соотношение:

$$m\ (p_1, p_2^*, u^*) \leq p_1\, H_1(p_1^*, p_2^*, u^*) + p_2^*\, H_2(p_1^*, p_2^*, u^*). \qquad \textbf{(2.34)}$$

Следовательно, все точки графика функции, стоящей в правой части неравенства **(2.34)**, расположены над (выше) точками графика функции $m(p_1, p_2^*, u^*)$, соответствующей левой части неравенства **(2.34)**, и при $p_1 = p_1^*$ графики функций касаются. Точнее, график линейной по p_1 функции $p_1 H_1(p_1^*, p_2^*, u^*) + p_2^* H_2(p_1^*, p_2^*, u^*)$ является касательной к графику функции $m(p_1, p_2^*, u^*)$ в точке $p_1 = p_1^*$ (рис. 2.7).

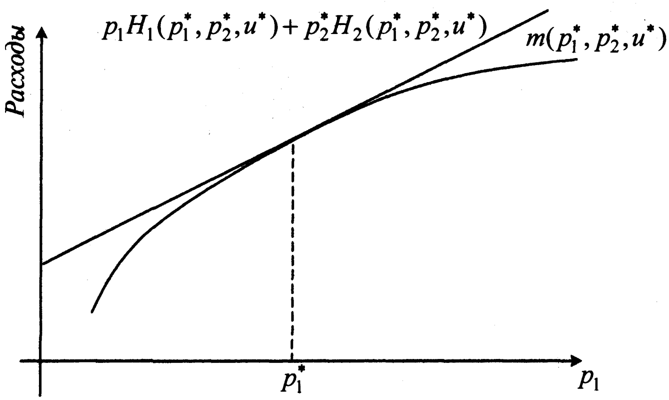


Рис. 2.7

Последнее означает, что производные функций, образующих левую и правую части неравенства **(2.34)**, в точке $p_1 = p_1^*$ равны и, следовательно,

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = H_1(p_1, p_2, u),$$

что и требовалось доказать.

Алгебраическое доказательство теоремы можно найти в работах [2] и [3].

■ **Теорема 2.** (*Тождество Роя.*) Для функций спроса Маршалла и функции косвенной полезности справедливо следующее соотношение:

$$D_i(p_1, p_2, M) = -\frac{\partial V}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial M} \qquad (i = 1, 2).$$

□ Доказательство. Допустим x_1^* и x_2^* — решение задачи потребительского выбора, т.е. $x_1^* = D_1(p_1, p_2, M)$ и $x_2^* = D_2(p_1, p_2, M)$. Пусть $u^* = U(x^*)$. Тогда можно утверждать, что $x_1^* = H_1(p_1, p_2, u^*)$, $x_2^* = H_2(p_1, p_2, u^*)$ и $M = m(p_1, p_2, u^*)$. И следовательно, $u^* \equiv V(p, m(p, u^*))$ для фиксированного значения u^* и любых p.

Продифференцируем последнее тождество по p_i ($i = 1, 2$). Получим

$$0 = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial M}\frac{\partial m}{\partial p_i} \quad (i = 1,\ 2). \tag{2.35}$$

Используя теорему 1, заменим $\partial m/\partial p_i$ на $H_i(p_1, p_2, u^*) = x_i^* = D_i(p_1, p_2, M)$ и перепишем **(2.35)** по-другому:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial M} H_i(p_1, p_2, u^*) = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial M} x_1^* = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial M} D_i(p_1, p_2, M).$$

Из последнего соотношения легко получить утверждение теоремы.

■ **Теорема 3.** (*Уравнение Слуцкого.*) Для функций спроса Маршалла и функций спроса Хикса справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} - \frac{\partial D_j}{\partial M} x_i^* \quad (i,\ j = 1,\ 2), \tag{2.36}$$

где величина спроса по Маршаллу оценивается при заданных ценах и доходе, а величина спроса по Хиксу — для уровня полезности, соответствующего найденной точке маршаллианского спроса.

□ Доказательство. Рассмотрим тождество $x_j^*(p, m(p, u)) \equiv H_j(p, u)$ ($j = 1, 2$) и продифференцируем обе части этого тождества по переменной p_i ($i = 1, 2$). Получим

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j}{\partial M}\frac{\partial m}{\partial p_i} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} \quad \text{или} \quad \frac{\partial D_j}{\partial p_i} + \frac{\partial D_j}{\partial M}\frac{\partial m}{\partial p_i} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}. \tag{2.37}$$

Согласно теореме 1 $\partial m/\partial p_i$ есть функция $H_i(p, u) = x_i^*(p, m(p, u))$. Поэтому **(2.37)** можно истолковать следующим образом:

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} + \frac{\partial D_j}{\partial M} x_i^*(p, m(p, u)) = \frac{\partial H_j}{\partial p_i}.$$

Сделав замену фиктивных переменных (постоянных величин, записанных в виде переменных), получим соотношение **(2.36)**, которое известно как уравнение Слуцкого.

Уравнение Слуцкого позволяет, во-первых, анализировать изменение спроса, описываемого функциями Хикса, не зная самих функций. Во-вторых, отнести рассматриваемые товары к той или иной категории в зависимости от направления и величины изменения спроса на них при изменении цен и дохода. В-третьих, если записать это уравнение в терминах коэффициентов эластичностей, то можно оценивать эластичность спроса по Хиксу, используя для этого функции спроса Маршалла.

Приведем формулировку уравнения Слуцкого в терминах коэффициентов эластичностей:

$$E_{ij} = E_{ij}^{H} - \alpha_j E_{iM}, \qquad (2.38)$$

где E_{ij} — эластичность маршаллианского спроса на i-й товар по цене j-го товара; E_{ij}^{H} — эластичность спроса по Хиксу (компенсированного спроса) на i-й товар по цене j-го товара; E_{iM} — эластичность маршаллианского спроса на i-й товар по доходу; α_j — доля расходов на j-й товар в доходе потребителя ($\alpha_j = p_j x_j^* / M$).

Далее с помощью несложных преобразований уравнений **(2.38)** можно получить уравнения агрегации, которые отражают зависимости между эластичностями спросов по Хиксу для различных товаров при изменении цены одного из них.

В частности, для $i = j = 2$ имеем следующие два уравнения:

$\alpha_1 E_{11}^{H} + \alpha_2 E_{21}^{H} = 0$ и $\alpha_1 E_{12}^{H} + \alpha_2 E_{22}^{H} = 0$,

где E_{11}^{H} — эластичность спроса по Хиксу на товар *1* при изменении цены товара *1*;

E_{21}^{H} — эластичность спроса по Хиксу на товар *2* при изменении цены товара *1*;

E_{12}^{H} — эластичность спроса по Хиксу на товар *1* при изменении цены товара *2*;

E_{22}^{H} — эластичность спроса по Хиксу на товар *2* при изменении цены товара *2*;

α_1 — доля расходов на товар *1* в доходе потребителя ($\alpha_1 = p_1 x_1^* / M$);

α_2 — доля расходов на товар *2* в доходе потребителя ($\alpha_2 = p_2 x_2^* / M$).

2.5. Оценка благосостояния потребителя

2.5.1. Оценка благосостояния потребителя в статике

Для оценки благосостояния потребителя в теории потребления используются различные меры. Рассмотрим такие из них, как компенсационное и эквивалентное изменения дохода.

Допустим, цена одного из товаров изменилась (например, цена товара *1*) и стала равной q_1. Если она возросла, то будет иметь место ситуация, изображенная на рис. 2.8, *а*, если цена понизилась, — ситуация, изображенная на рис. 2.8, *б*.

При исходной цене первого товара p_1, цене второго товара p_2 и доходе M потребитель выбрал набор A, полезность которого при заданной с помощью функции полезности $U(x_1, x_2)$ системе предпочтений равна $U(A)$.

При повышении цены товара *1* бюджетная линия перемещается ближе к началу координат. Потребитель выбирает новый набор. Обозначим его B. Полезность этого набора $U(B)$ меньше, чем $U(A)$, т.е. $U(B) < U(A)$ (см. рис. 2.8, *а*).

При понижении цены товара *1* бюджетная линия отодвигается дальше от начала координат, и потребитель выбирает новый набор товаров B. Полезность набора B больше, чем набора A, т.е. $U(B) > U(A)$ (см. рис. 2.8, *б*).

Если потребитель желает сохранить исходный уровень благосостояния, т.е. остаться на первоначальной кривой безразличия, то он выберет набор C, который является самым дешевым из всех, доступных потребителю наборов при новых ценах на кривой безразличия $U(A)$. Как видно на рис. 2.8, *а*, для приобретения набора C требуется больший доход, чем M, которым располагает потребитель. Обозначим через M_c стоимость набора C. Разность $M_c - M = \Delta M_к$ называется «компенсацией» или ***компенсированным изменением дохода*** потребителя. Она равна величине дохода, в которой нуждается потребитель для сохранения первоначального уровня благосостояния.

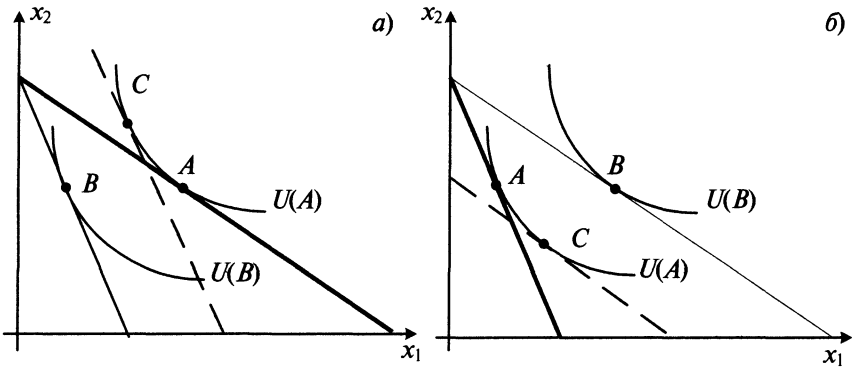


Рис. 2.8

Набор C находится как решение двойственной задачи потребительского выбора:

$$m = q_1x_1 + p_2x_2 \to \min; \qquad \textbf{(2.39)}$$

$$U(x_1, x_2) = U(A). \qquad \textbf{(2.40)}$$

При повышении цены (см. рис. 2.8, *а*) компенсационное изменение дохода положительно: потребитель нуждается в дополнительных денежных средствах для сохранения исходного «уровня жизни». Необходимая сумма денег $\Delta M_к = (M_c - M)$ является оценкой «проигрыша» потребителя.

Если потребитель желает сохранить первоначальный уровень благосостояния при понижении цены товара *1* (см. рис. 2.8, *б*), то величина «компенсации» будет отрицательной. Это говорит о том, что при новых, более низких, ценах потребитель имеет излишек дохода, если сохраняет первоначальный уровень благосостояния. Величина этого излишка оценивает «выигрыш» потребителя.

Рассмотрим другую ситуацию. Допустим, потребитель желает достичь уровня благосостояния, соответствующего новой кривой безразличия при старых ценах. Обозначим через D самый дешевый набор при исходных ценах на кривой безразличия $U(B)$. Для определения набора D потребитель решает задачу типа **(2.25)**, **(2.26)** при $U(x_1, x_2) = U(B)$. Она формулируется следующим образом:

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min; \quad \textbf{(2.41)}$$

$$U(x_1, x_2) = U(B). \quad \textbf{(2.42)}$$

Расход потребителя на набор D обозначим M_D. Разность $M_D - M = \Delta M_э$ называется ***эквивалентным изменением дохода*** потребителя. Эквивалентное изменение дохода оценивает возможность достижения потребителем нового уровня благосостояния при прежних ценах.

При повышении цен величина эквивалентного изменения дохода будет отрицательной (рис. 2.9, *а*), при понижении — положительной (рис. 2.9, *б*).

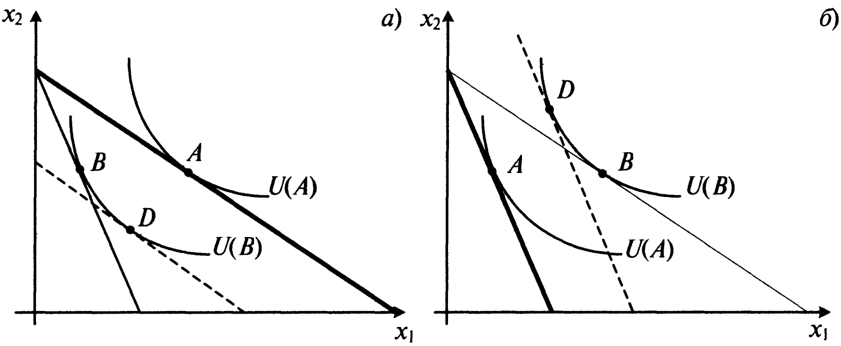


Рис. 2.9

Рассмотренные величины излишка потребителя являются дополнением к тому понятию излишка потребителя, которое обычно связывается только с функцией спроса от цены при прочих равных условиях. Компенсационное и эквивалентное изменения дохода позволяют оценить излишек потребителя с учетом изменения цен и дохода.

2.5.2. Оценка изменения благосостояния потребителя во времени

Для анализа и оценки изменения «уровня жизни» потребителя во времени рассмотрим два временных периода: $t = 0$ и $t = 1$. Первый из них будем называть базисным, второй — текущим.

Пусть в базисном периоде потребитель располагал доходом в M_0 ден. ед., цена первого товара была p_{10}, второго — p_{20} ($P^0 = (p_{10}, p_{20})$). При этих условиях потребитель выбирал набор товаров $X^0 = (x_{10}, x_{20})$.

В текущем периоде доход потребителя составил M_1 ден.ед., цены равны p_{11} и p_{21} соответственно для первого и второго товаров ($P^1 = (p_{11}, p_{21})$). Набор потребителя в текущем периоде $X^1 = (x_{11}, x_{21})$.

Индекс номинального дохода $M_{01} = M_1/M_0$ показывает, насколько (во сколько раз) изменился номинальный доход потребителя. Но его значение не отражает реального изменения положения потребителя, поскольку последнее характеризуется величиной реального, а не номинального дохода. Для оценки изменения реального дохода потребителя рассмотрим индексы реального дохода.

Индекс реального дохода характеризует динамику количества товаров в наборе потребителя. Понятно, что если при одних и тех же ценах потребитель в текущем периоде может купить бóльшие количества товаров, то его реальный доход больше, в противном случае — меньше. Следовательно, для построения индекса реального дохода необходимо элиминировать (устранить) влияние цен, т.е. оценить наборы товаров базисного (X^0) и текущего (X^1) периодов в одних ценах.

Оценим базисный и текущий наборы товаров в базисных ценах P^0. Базисный набор в этих ценах стоит $p_{10}x_{10} + p_{20}x_{20} = M_0$. Затраты на текущий набор в базисных ценах составляют $p_{10}x_{11} + p_{20}x_{21} = \overline{M}_0$. Тогда отношение

$$I_{01}(P^0) = \frac{\overline{M}_0}{M_0} = \frac{x_{11}p_{10} + x_{21}p_{20}}{x_{10}p_{10} + x_{20}p_{20}} \qquad \textbf{(2.43)}$$

показывает изменение реального дохода и называется индексом реального дохода базисно взвешенным или *индексом реального дохода Ласпейреса*.

Приведем графическую иллюстрацию оценки изменения реального дохода потребителя. На рис. 2.10 изображены: бюджетная линия базисного периода B_0, бюджетная линия текущего периода B_1 и бюджетная линия $\overline{B}_0$, соответствующая доходу $\overline{M}_0$.

Индексу номинального дохода M_{01} соответствует отношение доходов, образующих бюджетную линию базисного периода B_0 и бюджетную линию текущего периода B_1. На рис. 2.10 этому индексу соответствует стрелка между данными бюджетными линиями.

Индексу реального дохода Ласпейреса (базисно_взвешенному) соответствует стрелка между бюджетными линиями $\overline{B}_0$ и B_0. Наборы товаров, расположенные на этих бюджетных линиях, измерены в одних и тех же ценах, ценах базисного периода.

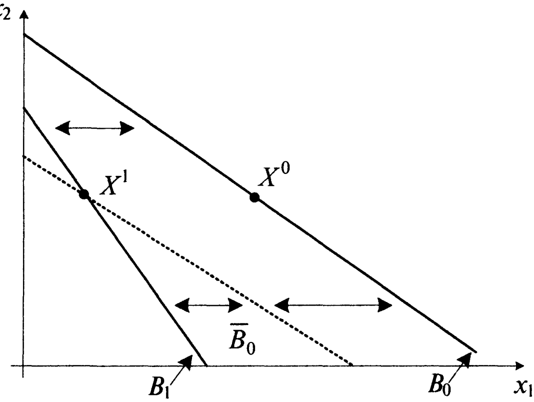


Рис. 2.10

Для того чтобы сделать наборы X^0 и X^1 сопоставимыми, мы повернули бюджетную линию B_1 вокруг точки X^1 так, чтобы она стала параллельной B_0. Этому повороту на рис. 2.10 соответствует стрелка между соответствующими бюджетными линиям B_1 и $\overline{B}_0$, которая изображает индекс цен Пааше. Действительно, отношение дохода $M_1(B_1)$ к доходу $\overline{M}_0(\overline{B}_0)$ представляет собой оценку изменения цен, которая является агрегатным индексом текущевзвешенным, т.е. *индексом цен Пааше*. Обозначим его $P_{01}(X^1)$ и запишем его математическую формулу:

$$P_{01}(X^1) = \frac{p_{11}x_{11} + p_{21}x_{21}}{p_{10}x_{11} + p_{20}x_{21}}. \quad \textbf{(2.44)}$$

Оценив базисный и текущий наборы товаров в базисных ценах, мы можем построить индекс реального дохода базисно взвешенный. Он называется *индексом реального дохода Ласпейреса*, обозначается $I_{01}(P^0)$ и рассчитывается по формуле:

$$I_{01}(P^0) = \frac{x_{11}p_{10} + x_{21}p_{20}}{x_{10}p_{10} + x_{20}p_{20}}. \quad \textbf{(2.45)}$$

Построим другой индекс реального дохода текущевзвешенный (индекс Пааше). Для этого оценим набор X^0 в текущих ценах. Обозначим его стоимость при ценах P^1 через $\overline{M}_1$. Тогда $p_{11}x_{10} + p_{21}x_{20} = \overline{M}_1$, а отношение $M_1/\overline{M}_1$ является оценкой динамики реального дохода потребителя и называется *индексом реального дохода Пааше.* Этот индекс обозначается как $I_{01}(P^1)$ и имеет следующее математическое выражение:

$$I_{01}(P^1) = \frac{x_{11}p_{11} + x_{21}p_{21}}{x_{10}p_{11} + x_{20}p_{21}}. \qquad \textbf{(2.46)}$$

Ему соответствует индекс цен Ласпейреса $P_{01}(X^0)$, который отражает изменение цен и рассчитывается по формуле **(2.44)**:

$$P_{01}(X^0) = \frac{p_{11}x_{10} + p_{21}x_{20}}{p_{10}x_{10} + p_{20}x_{20}}. \qquad \textbf{(2.47)}$$

На рис. 2.11 изображены индекс реального дохода Пааше и соответствующий ему индекс цен $P_{01}(X^0)$ Ласпейреса. Индекс цен Ласпейреса отражает поворот бюджетной линии B_0 вокруг точки X^0, в результате которого она становится параллельной линии B_1, т.е. занимает положение $\overline{B}_1$. Величина дохода, соответствующая бюджетной линии $\overline{B}_1$, равна стоимости набора X^0 в новых ценах $P^1 = (p_{11}, p_{21})$, т.е. $\overline{M}_1$.

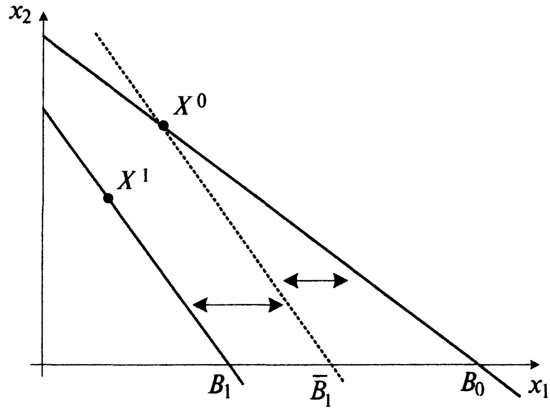


Рис. 2.11

Следовательно, стрелка между бюджетными линиями B_1 и $\overline{B}_1$ изображает индекс реального дохода текущевзвешенный $I_{01}(P^1)$, а стрелка между бюджетными линиями B_0 и $\overline{B}_1$ соответствует индексу цен Ласпейреса $P_{01}(X^0)$.

В продолжение анализа индексов реального дохода можно привести два разложения индекса номинального дохода на индекс цен и индекс реального дохода. Покажем, что

$$M_{01} = P_{01}(X^1)\cdot I_{01}(P^0); \tag{2.48}$$

$$M_{01} = P_{01}(X^0)\cdot I_{01}(P^1). \tag{2.49}$$

По определению,

$$M_{01} = \frac{M_1}{M_0} = \frac{p_{11}x_{11} + p_{21}x_{21}}{p_{10}x_{10} + p_{20}x_{20}}. \tag{2.50}$$

Умножив числитель и знаменатель отношения **(2.50)** на $p_{10}x_{11} + p_{20}x_{21}$, получим **(2.48)**:

$$M_{01} = \frac{p_{11}x_{11} + p_{21}x_{21}}{p_{10}x_{10} + p_{20}x_{20}} \cdot \frac{p_{10}x_{11} + p_{20}x_{21}}{p_{10}x_{11} + p_{20}x_{21}} =$$

$$= \frac{p_{11}x_{11} + p_{21}x_{21}}{p_{10}x_{11} + p_{20}x_{21}} \cdot \frac{p_{10}x_{11} + p_{20}x_{21}}{p_{10}x_{10} + p_{20}x_{20}} = P_{01}(X^1)\cdot I_{01}(P^0).$$

Аналогично выводится разложение индекса номинального дохода **(2.49)** умножением числителя и знаменателя отношения **(2.50)** на $p_{11}x_{10} + p_{21}x_{20}$.

Вопросы и задания

1. Приведите экономическую интерпретацию задачи оптимизации потребительского выбора и необходимого условия оптимальности потребительского набора.
2. Почему значения функций спроса Маршалла можно интерпретировать как величину спроса потребителя? Как связаны функции спроса Маршалла с функцией косвенной полезности?
3. Чем отличаются функции спроса Хикса от функций спроса Маршалла? С помощью какой функции можно найти стоимость самого дешевого набора заданной полезности, если известны (заданы) цены товаров?
4. Если известна функция расходов потребителя, то можно ли сказать, какой вид имеет функция косвенной полезности?
5. Как связаны функции спроса Хикса с функцией расходов потребителя (лемма Шепарда)? Обязательно ли знать функции спроса Хикса, чтобы определить функцию расходов?
6. Присутствует ли в тождестве Роя характеристика влияния изменения дохода на полезность оптимального набора потребителя?
7. Чем отличается анализ благосостояния потребителя в статике от анализа его благосостояния в динамике?

8. Приведите экономическую интерпретацию уравнения Слуцкого в терминах частных производных и в терминах эластичностей. Можно ли, используя названные уравнения, оценить влияние изменения цены одного из товаров, допустим первого, на величину компенсированного спроса или эластичность компенсированного спроса, если функции спроса Хикса (компенсированного спроса) неизвестны?

9. Что такое индекс цен? В чем измеряются индексы цен Ласпейреса и Пааше? Как эти индексы связаны с индексами реального дохода?

10. Чем отличается компенсационное изменение дохода от эквивалентного изменения дохода? Могут ли данные характеристики рассматриваться как меры изменения излишка потребителя в статике? Могут ли они совпадать по абсолютной величине?

3 Производственные функции

3.1. Однофакторные и многофакторные производственные функции

Понятие производственной функции (ПФ) является основным в экономической теории. Оно используется для описания принципа «затраты—выпуск» на микро- и макроэкономичеких уровнях. Затрачиваются ресурсы производства — факторы производства (один или несколько) — в определенных количествах, выпускается продукция в определенном объеме. Формально производственная функция выглядит так:

$$y = f(x, a_1, ..., a_m) \qquad \textbf{(3.1)}$$

или

$$y = f(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m), \qquad \textbf{(3.2)}$$

где y — объем (количество) выпускаемой продукции; в **(3.1)** x — количество затрачиваемого (используемого) ресурса (т.е. $x \geq 0$), в **(3.2)** $x_1, ..., x_n$ — количества затрачиваемых (используемых) ресурсов; вектор $(x_1, ..., x_n)$ называется конфигурацией ресурсов, $x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0$; $a_1, ..., a_m$ — параметры; символ f, называемый характеристикой ПФ, показывает, как количество ресурса формально преобразуется в объем выпускаемой продукции.

Производственная функция **(3.1)** называется *однофакторной* (одноресурсной — редко используемый термин); ПФ используются для решения разнообразных аналитических, плановых и прогнозных задач и в прикладных исследованиях.

Производственная функция может иметь разные области использования. Микроэкономическая производственная функция (МИПФ) имеет в качестве области использования (содержательной области) отдельную фирму, производственный комплекс, отрасль. Макроэкономическая производственная функция (МАПФ) имеет в качестве области использования национальную экономику, экономику региона. В МАПФ наряду с малыми f, $x_1, ..., x_n$, y используют большие символы $F, x_1, ..., x_n, Y : Y = F(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_m)$.

В МИПФ количества затрачиваемых (используемых) ресурсов и объем выпускаемой продукции часто выражаются в натуральной форме: капитал — в штуках оборудования; труд — в часах затрачиваемого времени (возможно по различным видам трудовой деятельности); энергия — в киловатт-часах; материалы, комплектующие — в соответствующих единицах и т.п.

В ПФ крупных отраслей, регионов и национальной экономики количества затрачиваемых ресурсов и объемы выпускаемой продукции выражаются в стоимостной форме (как правило, в постоянных ценах).

Выбор ресурсов и аналитической формы ПФ $y = f(x_1, ..., x_n)$ называется *спецификацией* ПФ.

Преобразование реальных и экспертных данных в модельную информацию, т.е. расчет численных значений параметров $a_1, ..., a_m$ ПФ $y = f(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$ на базе статистических данных с помощью регрессионного анализа называется *параметризацией* ПФ $y = f(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$.

Проверка адекватности ПФ описываемой ею реальности называется *верификацией* ПФ.

Выбор аналитической формы ПФ $y = f(x_1,...,x_n,a_1,...,a_m)$, (т.е. ее спецификация) диктуется прежде всего теоретическими соображениями, которые должны явно (или косвенно) учитывать особенности взаимосвязей между объемами конкретных ресурсов и выпускаемой продукции или экономических закономерностей, особенности реальных и экспертных данных, преобразуемых в параметры ПФ (т.е. особенности параметризации). На спецификацию и параметризацию в процессе совершенствования ПФ оказывают влияние результаты верификации. Оценки параметров ПФ обычно проводятся с помощью регрессионного анализа. Отметим, что выбор более продвинутой в аналитическом отношении ПФ обычно предъявляет повышенные требования к ее параметризации, которые могут быть по существу невыполнимыми. Это означает, что продвинутая в аналитическом отношении ПФ, параметры которой сформированы на базе не удовлетворяющих высоким требованиям реальных и экспертных данных, может давать менее точные результаты расчетов, чем более простая в аналитическом отношении ПФ. Таким образом, в случае ПФ (как и вообще в случае прикладных экономико-математических моделей) следует говорить о ее комплексной адекватности, принимая во внимание рациональное сочетание уровня аналитических построений и качества информационного обеспечения.

Производственная функция $y = f(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$ называется *статической*, если ее параметры $a_1, ..., a_m$ и сама ее характеристика f не зависят от времени, хотя объемы ресурсов и выпуска продукции могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде временны́х рядов $x_i(0), x_i(1), ..., x_i(T), y(0), y(1), ..., y(T)$, $i = 1, ..., n$. Здесь $t = 0, 1, ..., T$ — номер года; $t = 0$ — базовый год временно́го промежутка, охватывающего годы $1, 2, ..., T$.

Производственная функция называется *динамической*, если, во-первых, время t фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного ресурса — фактора производства, влияющего на объем выпускаемой продукции); во-вторых, параметры $a_1, ..., a_m$ и и ее характеристика f зависят от времени t.

В статических и динамических ПФ время может быть как дискретным, так и непрерывным. В прикладных ПФ время, как правило, дискретное, и «атомом» времени (т.е. производственным периодом) является один год (квартал, месяц и т.п.). В этом случае объемы ресурсов $x_1(t), ..., x_n(t)$ и выпускаемой продукции $y(t)$, а также параметры $a_1(t), ..., a_m(t)$ «привязаны» к периоду времени t. В теоретических ПФ время t может быть как дискретным, так и непрерывным. Производственные функции с дискретным временем более адекватны реальности, однако ПФ с непрерывным временем более удобны для проведения теоретических исследований.

Далее в основном будут рассматриваться двухфакторные ПФ $y = f(x_1, x_2;\ a_1, ..., a_m)$. Во-первых, при исследовании двухфакторных ПФ можно использовать наглядные геометрические соображения, ибо пространство ресурсов таких ПФ является двумерным. Во-вторых, основные положения теории двухфакторных ПФ по аналогии переносятся на многофакторные ПФ.

➢ **Пример 3.1.** Производственная функция вида $y = a_0 x^{a_1}$ является однофакторной. Здесь x — объем затрачиваемого (используемого) ресурса; $y = f(x)$ — объем выпускаемой продукции. В качестве ресурса может фигурировать рабочее время, в качестве выпускаемой продукции — партия валенок. Величины a_0 и a_1 — параметры рассматриваемой ПФ. Параметры $a_0 > 1$ и $a_1 > 0$ и обычно $a_1 \leq 1$. Таким образом, здесь $n = 1, m = 2$.

Объемы x и y, а также параметры a_0 и a_1 «привязаны» к некоторому фиксированному производственному периоду, который может равняться, например, одному году. Если производственный период меняется, то объемы x и y, а также значения параметров a_0 и a_1 могут измениться.

График $Г$ производственной функции $y = a_0 x^{a_1}$ изображен на рис. 3.1. Он показывает, что с ростом объема x затрачиваемого ресурса растет объем y выпускаемой продукции, однако каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема y выпускаемой продукции: $f(x_1+1) - f(x_1) < f(x_0+1) - f(x_0)$, $x_1 > x_0$. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом объема ресурса x) отражает важное положение экономической теории, хорошо подтверждаемое практикой, называемое ***законом убывающей эффективности***.

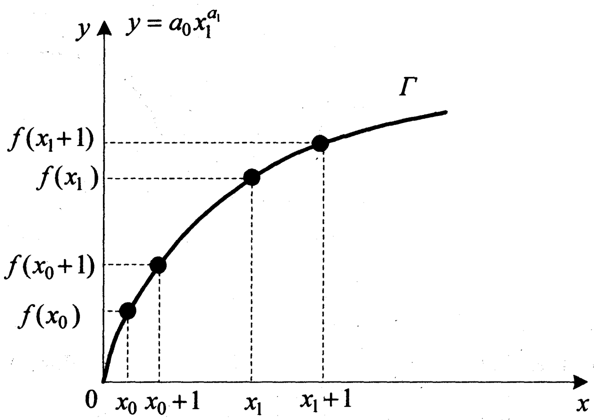


Рис. 3.1

➢**Пример 3.2.** Производственная функция вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ является двухфакторной. Она называется производственной функций Кобба—Дугласа (ПФКД) по имени двух американских исследователей, которые предложили ее использовать в работе, опубликованной в 1929 г. В приложениях и в теоретических исследованиях: $x_1 = K$ — объем используемого основного производственного капитала; $x_2 = L$ — затраты труда. С использованием символов K и L рассматриваемая ПФ перепишется так: $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$.

Параметры a_0, a_1, a_2 — положительные величины; часто $a_1 + a_2 \le 1$. Производственная функция Кобба—Дугласа принадлежит к классу так называемых мультипликативных ПФ. Благодаря своей структурной простоте ПФКД активно применялась и применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач.

Если $a_1 + a_2 < 1$, то график Γ ПФКД представляет собой поверхность, похожую на выпуклую вверх «горку», крутизна которой падает по мере того, как конфигурация (x_1, x_2) ресурсов перемещается на «северо-восток» по плоскости $0x_1x_2$ (рис. 3.2).

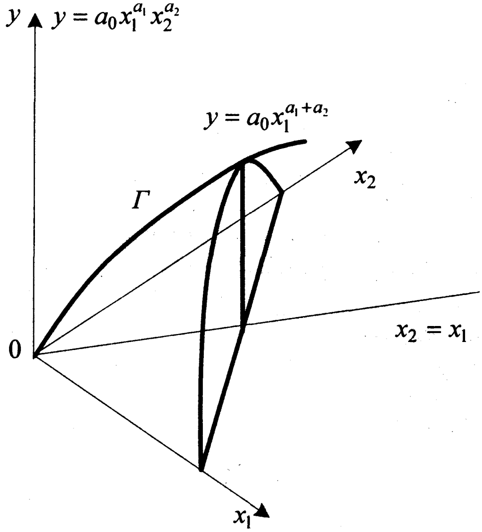


Рис. 3.2

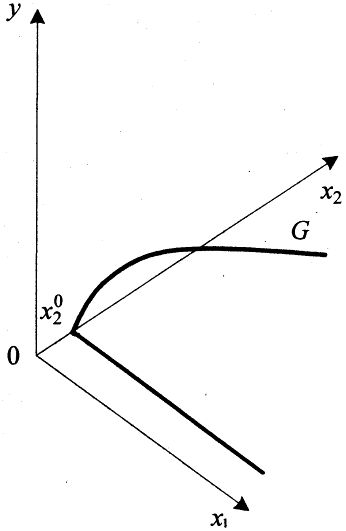


Рис. 3.3

При $x_2 = x_2^0$ имеем $y = a_0 (x_2^0)^{a_2} x_1^{a_1}$. В этом случае вертикальная плоскость $x_2 = x_2^0$ пересекает поверхность Γ по линии G, которая в плоскости $x_2 = x_2^0$ имеет уравнение $y = a_0 (x_2^0)^{a_2} x_1^{a_1} = b_0 x_1^{a_1}$ (рис. 3.3). Линия G аналогична линии Γ на рис. 3.1. Поведение линии G на рис. 3.3 отражает то обстоятельство, что при фиксированном объеме x_2^0 второго ресурса с ростом затрат первого ресурса объем y выпуска растет, но каждая дополнительная единица первого ресурса обеспечивает все меньший прирост выпуска.

Отмеченное обстоятельство адекватно реальности в случае, например, если число работников x_2^0 (второй ресурс) и их квалификация остаются неизменными, а число станков (первый ресурс), которые работники обслуживают, увеличивается, скажем, в два раза, то объем выпускаемой продукции в этом случае вырастет менее, чем в два раза.

➢ **Пример 3.3.** Линейная производственная функция (ЛПФ) имеет вид $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ (двухфакторная) и $y = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n$

(многофакторная). Она принадлежит классу так называемых аддитивных ПФ. Переход от мультипликативной ПФ к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования. Обратный переход осуществляется с помощью операции потенцирования.

Для двухфакторной мультипликативной ПФ $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ получаем аддитивную ПФ в следующей форме:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2.$$

Полагая $\ln y = w$, $\ln x_1 = v_1$, $\ln x_2 = v_2$, получим аддитивную ПФ такого вида:

$$w = \ln a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2.$$

➢ **Пример 3.4.** Производственная функция затраты—выпуск (ПФЗВ) (производственная функция Леонтьева (ПФЛ)) имеет вид:

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right).$$

➢ **Пример 3.5.** Производственная функция с постоянной эластичностью замены ресурсов (ПФ ПЭЗР) (производственная функция CES, если использовать западную аббревиатуру) имеет вид:

$$y = a_0 \cdot (a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}.$$

Линия уровня τ $l_\tau = \{(x_1, x_2) | \tau = f(x_1, x_2),\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$ производственной функции называется *изоквантой*, т.е. линией постоянного выпуска τ. Уравнение изокванты, содержащей конфигурацию ресурсов $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ строится так: сначала определяем объем выпуска $\tau^0 = f\left(x_1^0, x_2^0\right)$, а затем выписываем само уравнение изокванты $\tau^0 = f\left(x_1, x_2\right)$.

➢ **Пример 3.6.** Для ПФКД имеем уравнение изокванты:

$$\tau_0 = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

откуда следует равенство:

$$x_2 = \left(\frac{\tau_0}{a_0}\right)^{1/a_2} x_1^{a_1/a_2},$$

графиком которого является гипербола l_{τ_0} с вертикальной асимптотой $x_1 = 0$ и горизонтальной асимптотой $x_2 = 0$ (рис. 3.4).

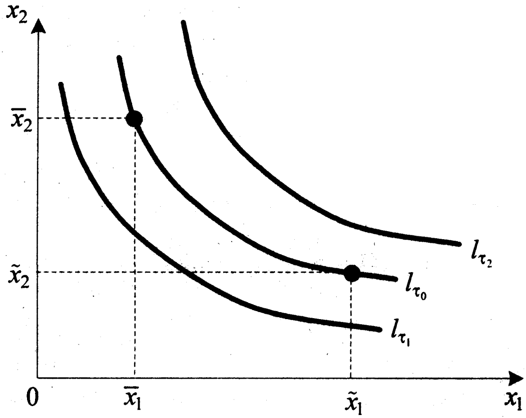


Рис. 3.4

При $\tau_1 < \tau_0$ гипербола l_{τ_1} расположена «юго-западнее» гиперболы l_{τ_0}, при $\tau_2 > \tau_0$ гипербола l_{τ_2} расположены «северо-восточнее» гиперболы l_{τ_0}. Изокванты, соответствующие различным объемам выпусков $\tau_1 \neq \tau_2$, не касаются друг друга и не пересекаются.

Все сказанное справедливо для изоквант других ПФ, которые отличны от ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$. Множество всех изоквант называется *картой изоквант*. На конкретном рисунке можно изобразить лишь фрагмент карты изоквант (на рис. 3.4 он похож на «совокупность кривых макарон»).

На изокванте l_{τ_0} (см. рис. 3.4) изображены две конфигурации ресурсов: $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, которые отличаются друг от друга, но обеспечивают одинаковый выпуск τ_0 продукции. Если рассматриваемая ПФ описывает копание ямы, то число τ_0 равно объему ямы, x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда. В этом случае конфигурация $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ресурсов показывает, что яму объемом τ_0 можно выкопать, затратив много труда и относительно мало капитала. Содержательно эта ситуация интерпретируется артелью с лопатами (отметим, что лопата — дешевый капитал). Конфигурация $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ ресурсов показывает, что яму объемом τ_0 можно выкопать, затратив много капитала и относительно мало труда. Содержательно эта ситуация интерпретируется экскаватором, на котором работает один экскаваторщик (отметим, что экскаватор — это дорогой капитал).

Движение конфигурации $\tilde{x}$ по изокванте l_{τ_0} неограниченно вправо — содержательно интерпретируется таким образом: объем τ_0 выпускаемой продукции может обеспечить один капитал фактически без затрат труда, что не вполне адекватно реальности. Аналогично интерпретируется ситуация с движением конфигурации $\bar{x}$ по изокванте l_{τ_0} неограниченно вверх. Таким образом, ПФКД адекватна реальности в конечной части пространства ресурсов Ox_1x_2.

➢ **Пример 3.7.** Для ЛПФ имеем уравнение изокванты l_{τ_0}:

$$\tau_0 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2.$$

Следовательно, изокванта l_{τ_0} есть прямая (нисходящая, если $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$), точнее отрезок этой прямой, расположенный в пространстве ресурсов, которое представляет собой неотрицательный ортант плоскости $0x_1x_2$. На рис. 3.5 показан фрагмент карты изоквант ЛПФ (отметим, что $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$).

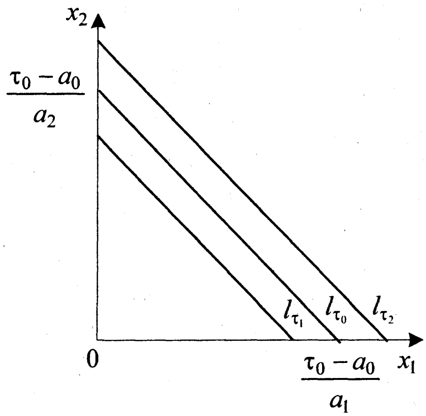


Рис. 3.5

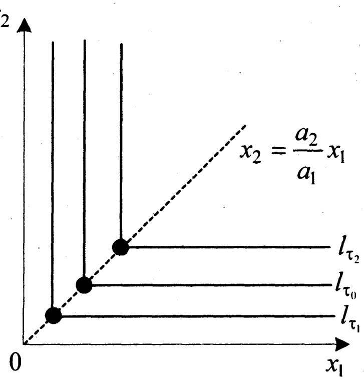


Рис. 3.6

Аналогичную карту изоквант имеет ПФ с линейными изоквантами (ПФЛИ), которая имеет вид:

$$y = (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2)^h,$$

где показатель степени $h > 0$.

➢ **Пример 3.8.** Для ПФЗВ (ПФЛ) имеем уравнение изокванты l_{τ_0}:

$$\tau_0 = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right).$$

Следовательно, сама изокванта l_{τ_0} есть две стороны прямого угла, на рис. 3.6 показан фрагмент карты изоквант ПФЗВ (отметим, что $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$).

➢ **Пример 3.9.** Для ПФ ПЭЗР имеем уравнение изокванты l_{τ_0}:

$$\tau_0 = a_0 \cdot (a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}.$$

При $\alpha > 0$ и $h > 0$ изокванта l_{τ_0} представлена на рис. 3.7. Непосредственно проверяется, что асимптотами изокванты l_{τ_0} являются прямые $x_1 = x_1(\tau_0)$ и $x_2 = x_2(\tau_0)$,

где

$$x_1(\tau_0) = a_1^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\tau_0}{a_0} \right)^{\frac{1}{h}}, \quad x_2(\tau_0) = a_2^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\tau_0}{a_0} \right)^{\frac{1}{h}}.$$

Если конфигурация ресурсов $\bar{x}$ перемещается по изокванте l_{τ_0} неограниченно вверх (см. рис. 3.7), то содержательно это означает, что для выпуска продукции в объеме τ_0 при любом объеме x_2 второго ресурса необходим первый ресурс в объеме не меньшем, чем $x_1(\tau_0) > 0$. Аналогично интерпретируется ситуация, когда конфигурация $\tilde{x}$ ресурсов перемещается по изокванте l_{τ_0} неограниченно вправо.

Из сказанного вытекает, что ПФ ПЭЗР более адекватна реальности по сравнению с ПФКД, ибо для обеспечения выпуска в объеме τ_0 всегда необходимы оба ресурса (капитал и труд), даже если потребности в одном из них возрастают многократно.

При $\alpha = -1$ изокванта l_{τ_0} есть прямая (точнее отрезок прямой в неотрицательном ортанте плоскости $0x_1x_2$. Эта прямая l_{τ_0} имеет уравнение:

$$\tau_0 = a_0(a_1 x_1 + a_2 x_2)^h,$$

т.е.

$$\left(\frac{\tau_0}{a_0} \right)^{1/h} = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Фрагмент карты изоквант представлен на рис. 3.8.

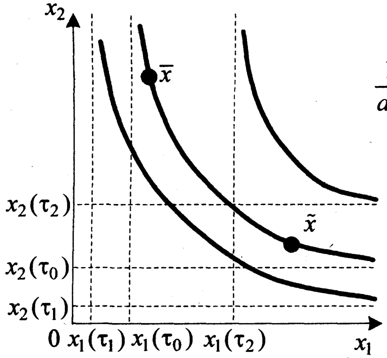


Рис. 3.7

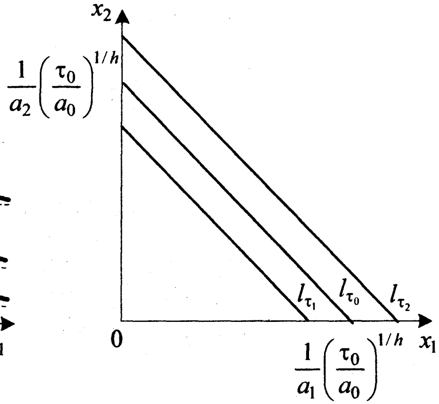


Рис. 3.8

При $-1 < \alpha < 0$ уравнение изокванты l_{τ_0} имеет вид:

$$\tau_0 = a_0(a_1 x_1^\beta + a_2 x_2^\beta)^{h/\beta} \quad (\beta = -\alpha).$$

Следовательно, сама изокванта l_{τ_0} есть линия, представленная на рис. 3.9, на котором также изображены изокванты l_{τ_1} и l_{τ_2} $(\tau_1 < \tau_0 < \tau_2)$.

При $\alpha < -1$ уравнение изокванты l_{τ_0} имеет вид:

$$\tau_0 = a_0(a_1 x_1^\beta + a_2 x_2^\beta)^{h/\beta} \quad (\beta = -\alpha).$$

Следовательно, сама изокванта l_{τ_0} есть линия, представленная на рис. 3.10, на котором также изображены изокванты l_{τ_1} и l_{τ_2} $(\tau_1 < \tau_0 < \tau_2)$.

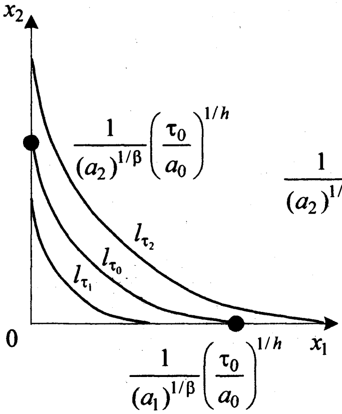


Рис. 3.9

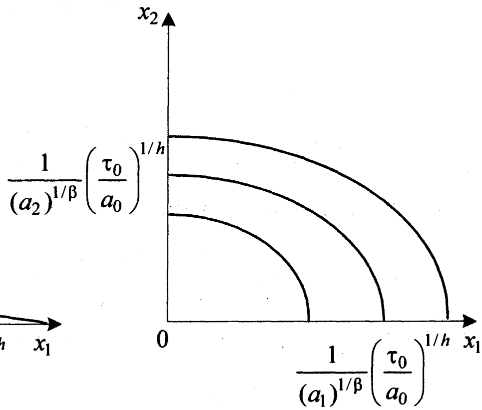


Рис. 3.10

Непосредственно проверяется, что

$$\lim_{\alpha\to 0} a_0\cdot(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha} = a_0\lim_{\alpha\to 0} x_1^h\left(a_1+a_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\alpha}\right)^{-h/\alpha} =$$

$$= \frac{a_0x_1^h}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(a_1+a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}\right)^{h/\alpha}} \overset{(*)}{=} \frac{a_0x_1^h}{e^{\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(a_1+a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}\right)^{h/\alpha}}} \overset{(\text{Л})}{=} \frac{a_0x_1^h}{e^{h\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}\ln\frac{x_1}{x_2}}{a_1+a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}}}} =$$

$$= \frac{a_0x_1^h}{e^{ha_2\ln\frac{x_1}{x_2}}} = \frac{a_0x_1^h}{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{ha_2}} = a_0x_1^{h(1-a_2)}x_2^{ha_2} = a_0x_1^{ha_1}x_2^{ha_2},$$

т.е. получили **ПФКД** такую, что $ha_1+ha_2=h$. Следовательно, **ПФКД есть асимптотически частный случай ПФ ПЭЗР** при $\alpha\to 0$.

Отметим, что переход (*) осуществляется лишь при $a_1+a_2=1$. Символ (Л) означает, что применяется правило Лопиталя.

Если $a_1+a_2>1$,

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(a_1+a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}\right)^{h/\alpha} = +\infty;$$

если $a_1+a_2<1$,

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(a_1+a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}\right)^{h/\alpha} = 0.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\lim_{\alpha\to +\infty} a_0\cdot(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha} \overset{(x_1\le x_2)}{=} \frac{a_0x_1^h}{\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\left(a_1+a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}\right)^{h/\alpha}} = a_0x_1^h;$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} a_0\cdot(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha} \overset{(x_1>x_2)}{=} \frac{a_0x_2^h}{\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(a_2+a_1\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\right)^{h/\alpha}} = a_0x_2^h.$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} a_0\cdot(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha} = \min(a_0x_1^h;\, a_0x_2^h).$$

При $h=1$ имеем ПФЗФ (ПФЛ).

Следовательно, ПФЗФ (ПФЛ) есть асимптотически частный случай ПФ ПЭЗР при $\alpha\to+\infty$.

Аналогично имеем

$$\lim_{\alpha\to-\infty} a_0\cdot(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha} = \lim_{\beta\to+\alpha} a_1\cdot(a_1x_1^{\beta}+a_2x_2^{\beta})^{h/\beta} = \max(a_0x_1^h;\; a_0x_2^h).$$

➢ **Пример 3.10.** На основании данных по экономике СССР (динамика национального дохода, численность занятых в материальном секторе производства и объем основного производственного капитала), опубликованных за 1960—1985 гг., были рассчитаны параметры a_0, a_1, a_2 МАПФ КД без учета научно-технологического прогресса (НТП):

$$Y = a_0K^{a_1}L^{a_2},$$

и с учетом НТП:

$$Y = a_0\mathrm{e}^{\lambda t}K^{a_1}L^{a_2}.$$

Без учета НТП параметры оказались равными $a_0=1{,}022$, $a_1=0{,}5382$, $a_2=0{,}4618$ (коэффициент детерминации $R^2=0{,}9969$; статистика Дарбина—Уотсона $\mathrm{DW}=0{,}81$; названные здесь термины математической статистики рассмотрены в главе первой). При подстановке фактических значений K и L за 1986 г. ошибка прогноза с помощью ПФКД без учета НТП составила 3%, что свидетельствует о том, что точность прогноза на основе рассмотренной ПФКД без учета НТП относительно невелика.

С учетом НТП параметры ПФКД оказались равными $a_0=1{,}038$, $\lambda=0{,}0294$, $a_1=0{,}9749$, $a_2=0{,}2399$ (коэффициент детерминации $R^2=0{,}9982$; статистика Дарбина—Уотсона $\mathrm{DW}=1{,}63$) [1].

---

[1] *Гранберг А.Г.* Моделирование социалистической экономики. — М.: Экономика, 1988.

➢ **Пример 3.11.** На основании данных по экономике США (динамика ВВП, объем загруженного основного производственного капитала, число отработанных часов) за 1950—1979 гг. были рассчитаны параметры МАПФ КД без учета НТП и с учетом НТП.

Без учета НТП параметры МАПФ КД

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$$

оказались равными $a_0 = 2{,}1005$, $a_1 = 0{,}7986$, $a_2 = 0{,}2014$ (коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}9907$; статистика Дарбина—Уотсона $\mathrm{DW} = 1{,}1109$).

С учетом НТП параметры МАПФ КД

$$Y = a_0 \mathrm{e}^{\lambda_0 t + \lambda_1 \sin(\omega_0 t + \omega_1)} K^{a_1} L^{a_2}$$

оказались равными $a_0 = 3{,}7846$, $\lambda_0 = 0{,}0208$, $\lambda_1 = -0{,}0129$, $\omega_0 = 0{,}289$, $\omega_1 = 0{,}7574$, $a_1 = 0{,}1374$, $a_2 = 0{,}8626$ (коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}9973$, статистика Дарбина—Уотсона $\mathrm{DW} = 1{,}4102$). Особо отметим[2], что в последней МАПФ КД в показателе степени экспоненты фигурирует слагаемое $\lambda_1 \sin(\omega_0 t + \omega_1)$.

Производственная функция может быть задана в неявном виде:

$$G(y; x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_m) = 0.$$

Такое выражение называется ***уравнением производственной поверхности***, оно обобщается на случай производства нескольких видов продукции

$$G_1(y_1, ..., y_r; x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_m) = 0, ..., G_r(y_1, ..., y_r; x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_m) = 0.$$

Неявная форма представления объема выпуска (объемов выпуска) используется лишь в теоретических исследованиях.

3.2. Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ как формальная конструкция определена в ***неотрицательном ортанте*** двумерной плоскости. т.е. определена при $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Производственная функция должна удовлетворять р я д у с в о й с т в (каждая конкретная ПФ своему):

1) $f(0, 0) = 0$ $(f(0, ..., 0) = 0)$;

2) $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$ $(f(0, x_2, ..., x_n) = \ldots = f(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = 0)$;

3) $x' \geq x$ $(x' \neq x) \Rightarrow f(x') > f(x)$ $(x' = (x_1', ..., x_n'), x = (x_1, ..., x_n))$;

---

[2] *Смирнова А.К.* Анализ агрегированных динамических моделей. — М.: МАКС-Пресс, 2001.

4) $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \geq 0,\ x = (x_1,\ x_2);\quad i = 1, 2\quad (x = (x_1, ..., x_n),\ i = 1, ..., n);$

5) $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \leq 0,\ x = (x_1,\ x_2);\quad i = 1, 2\quad (x = (x_1, ..., x_n),\ i = 1, ..., n);$

6) $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0,\ x = (x_1, x_2);\ i = 1, 2\ ,\ i \neq j\quad (x = (x_1, ..., x_n),$

$i, j = 1, ..., n,\ i \neq j);$

7) функция $f(x_1, x_2)\,(f(x_1, ..., x_n))$ выпукла вверх при $x > 0$, $x = (x_1, x_2)\,(x = x_1, ..., x_n);$

8) $f(\gamma x_1, \gamma x_2) = \gamma^p f(x_1, x_2)\quad (f(\gamma x_1, ..., \gamma x_n) = \gamma^p f(x_1, ..., x_n)).$

Свойство *1* означает, что без ресурсов нет выпуска.

Свойство *2* означает, что при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска.

Свойство *3* означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска (строго) растет.

Свойство *4* (первая частная производная ПФ $\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)$ неотрицательна) означает, что с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса (других ресурсов) объем выпуска не уменьшается. Упорядоченная пара $(x_1,\ x_2)$ чисел x_1 и x_2 для краткости здесь и далее обозначается символом x, т.е. $x = (x_1, x_2)$ $(x = (x_1, ..., x_n))$.

Свойство *5* (вторая частная производная ПФ $\left(\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}\right)$ неположительна) означает, что с ростом затрат одного (i-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса (других ресурсов) величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i-го ресурса не возрастает (*закон убывающей эффективности*).

Свойство *6* означает, что при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса не убывает (при неизменном количестве других ресурсов, если $n > 2$).

На основании свойства *7* геометрический образ ПФ при $n = 2$ должен прежде всего ассоциироваться с выпуклой вверх «горкой», крутизна которой убывает, если точка $(x_1,\ x_2)$ уходит в плоскости $0x_1x_2$ «на северо-восток».

Свойство *8* означает, что ПФ является *однородной функцией* (ОФ) *степени p* > 0. При $p > 1$ с ростом масштаба производства в γ раз (число $\gamma > 1$), т.е. с переходом от вектора x к вектору γx объем выпуска возрастает в γ^p раз, т.е. имеем *рост эффективности* производства с *ростом масштаба* производства. При $p < 1$ имеем *падение эффективности* производства с *ростом масштаба* производства. При $p = 1$ имеем *постоянную эффективность* производства с *ростом* его *масштаба* (или имеем независимость удельного выпуска от масштаба производства, в английской терминологии — *constant returns to scale*).

Для ПФЗВ (ПФЛ) свойства *1—7* выполняются. Свойство *8* выполняется при $p=1$.

Для ПФ ПЭЗР свойства *1—7* выполняются. Свойство *8* выполняется при $p=h$.

ПФ, для которой выполняются свойства *4*, *5*, *6*, *8*, называется *неоклассической.*

При $n = 2$ для любой ПФ, для которой справедливы все (или часть) свойств *1—8*, изокванта (если она не является прямой) есть линия (не обязательно гладкая), которая *выпукла* к точке 0. Если график $Г$ ПФ похож на выпуклую вверх «горку», то естественно, что ее изокванты есть линии, выпуклые к точке 0.

3.3. Предельные (маржинальные) и средние значения производственной функции

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ $(y = f(x) = f(x_1, ..., x_n))$ — производственная функция (ПФ). Дробь

$$\frac{f(x)}{x_i}, \quad i=1,2 \quad (i=1,...,n)$$

называется *средней производительностью* i-го ресурса (*фактора* производства) (СПФ) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства). Символика: $A_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$.

В случае двухфакторной ПФ, у которой $x_1 = K$, $x_2 = L$ для средних производительностей $\dfrac{Y}{K}$ и $\dfrac{Y}{L}$ основного капитала и труда используются соответственно термины «капиталоотдача» и «средняя производительность труда».

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ $(y = f(x) = f(x_1, ..., x_n))$ — производственная функция. Ее первая частная производная

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2 \quad (i=1,...,n)$$

называется *предельной (маржинальной) производительностью* i-го ресурса (*фактора* производства) (ППФ) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства). Символика: $M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Обозначим символами Δx_i и $\Delta_i(f(x))$ $(\Delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1+\Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2);\ \Delta_2 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2+\Delta x_2) - f(x_1, x_2))$ соответственно, приращение переменной x_i и соответствующее ей частное приращение ПФ $f(x)$. При малых Δx_i имеем приближенное равенство:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} \quad (i=1, 2).$$

Следовательно, ППФ (приближенно) показывает, *на сколько* единиц *увеличится* объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса *вырастает* на *одну* (достаточно малую) единицу при неизменных *объемах* другого затрачиваемого ресурса. Здесь *предельную* величину $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ (т.е. ППФ) целесообразно интерпретировать, используя близкое к ней отношение малых *конечных* величин, т.е. $\Delta_i f(x)$ и Δx_i. Отмеченное обстоятельство является ключевым для понимания экономического смысла ППФ $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. С другими предельными величинами следует поступать аналогичным образом.

➢ **Пример 3.12.** Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найдем в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.
Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}; \quad A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1};$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1 A_1; \quad M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \quad \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Для ПФ $y = f(x)$ (не только для ПФКД) неравенства

$$M_1 \le A_1 \ (i = 1, 2)$$

(т.е. *предельная производительность* i-го ресурса *не больше средней* производительности этого ресурса) обычно выполняются.

➢ **Пример 3.13.** Для ЛПФ $y = a_0+a_1x_1+a_2x_2$ ($a_0>0$, $a_1>0$, $a_2>0$) найдем в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + a_2\frac{x_2}{x_1};$$

$$A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + a_1\frac{x_1}{x_2} + a_2;$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1;\ M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1;\ \frac{M_2}{A_2} \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

➢ **Пример 3.14.** Для ПФ ПЭЗР $y = a_0 \cdot (a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$ имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1};\ A_2 = \frac{y}{x_2};$$

$$M_1 = \frac{ha_0a_1}{(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{(h/\alpha)+1}x_1^{\alpha+1}};\ M_2 = \frac{ha_0a_2}{(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{(h/\alpha)+1}x_2^{\alpha+1}};$$

$$\frac{M_1}{A_1} = \frac{ha_1x_1^{-\alpha}}{a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha}} \le h;\ \frac{M_2}{A_2} = \frac{ha_2x_2^{-\alpha}}{a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha}} \le h.$$

Пусть $y = f(x)$ — ПФ, $x = (x_1, x_2)$ $(x = (x_1,...,x_n))$. Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется (частной) *эластичностью выпуска* по i-му ресурсу (по *фактору* производства) (ЭВФ). Символика:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\quad (i = 1, 2).$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ $(E_1 + ... + E_n = E_x)$ называется *эластичностью производства.*

Поскольку при малом приращении Δx_i имеем приближенное равенство

$$E_i = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) \Big/ \left(\frac{f(x)}{x_i}\right) \approx \left(\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

(крайнее правое выражение есть отношение двух относительных величин $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ и $\frac{\Delta x_i}{x_i}$), постольку E_i (приближенно) показывает, *на сколько процентов* увеличится выпуск y, если затраты i-го ресурса увеличатся *на один* процент при неизменных объемах другого ресурса. Пояснение выражения E_i, содержащего предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, с помощью выражения, содержащего конечное приближение $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ этой предельной величины, является *ключевым* в понимании экономической сути частной эластичности выпуска по i-му ресурсу.

➢ **Пример 3.15.** Выпишем в явном виде для ПФКД выражения для E_1, E_2 и E_x.

Имеем:

$$E_1 = a_1;\ E_2 = a_2;$$

$$E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2.$$

➢ **Пример 3.16.** Для ЛПФ $y = a_1x_1 + a_2x_2$ $(a_0 = 0)$ выпишем в явном виде выражения для E_1, E_2 и E_x.

Имеем:

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2};\ E_2 = \frac{x_2}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2};$$

$$E_x = E_1 + E_2 = 1.$$

➢ **Пример 3.17.** Для ПФ ПЭЗР $y = a_0 \cdot (a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$ выпишем в явном виде выражения для E_1, E_2, $E_x = h$ (см. пример 3.14).

Пусть $y = f(x)$ – ПФ, $x = (x_1, x_2)$ $(x = (x_1, ..., x_n))$. *Предельной нормой замены* i-го ресурса (*фактора* производства) j-м (аббревиатура: ПНЗФ и символика: R_{ij}) называется выражение

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}\ (i, j = 1, 2,\ i \neq j),$$

$$R_{ij} = -\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\ (i, j = 1, ..., n;\ i \neq j;\ x_k = \text{const};\ k \neq i,\ k \neq j) \tag{3.3}$$

при постоянной y.

Обратим внимание на то, что i — номер *заменяемого* ресурса, j — номер *замещающего* ресурса. Используется также термин: *предельная технологическая норма* замены i-го ресурса (фактора производства) j-м ресурсом (фактором производства). Приведем более краткий (но менее точный) термин: (предельная) норма замены ресурсов.

Пусть выпуск y является постоянным, т.е. все наборы (конфигурации) затрачиваемых ресурсов расположены на одной изокванте, тогда первый полный дифференциал dy ПФ $y = f(x)$ тождественно равен нулю:

$$0 = dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2$$

(здесь dx_1, dx_2 — дифференциалы переменных x_1, x_2), откуда, выражая первый дифференциал dx_j, получим

$$dx_j = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \quad (i, j = 1, 2), \tag{3.4}$$

откуда, поделив на dx_i, получим

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} \quad (i, j = 1, 2). \tag{3.5}$$

На основании **(3.3)—(3.5)** имеем:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} > 0 \quad (i \neq j, i = 1, 2). \tag{3.6}$$

Отметим, что строгий вывод формулы **(3.6)** опирается в действительности на теорему о неявной функции.

Непосредственно проверяется, что для двухфакторной ПФ справедливо равенство:

$$R_{12} = \frac{E_1}{E_2} \frac{x_2}{x_1},$$

т.е. (предельная) норма замены первого ресурса вторым равна отношению эластичностей выпуска по первому и второму ресурсам, умноженному на отношение объема второго ресурса к объему первого ресурса.

Если $x_1 = K$, $x_2 = L$, то отношение $\frac{x_1}{x_2} = \frac{K}{L}$ называется *капиталовооруженностью труда.* В этом случае (предельная) норма замены основного капитала трудом равна отношению эластичностей выпуска по основному капиталу и труду, поделенному на капиталовооруженность труда.

Пусть ПФ — двухфакторная. При постоянном выпуске y и малых приращениях Δx_1 и Δx_2 имеем приближенное равенство:

$$R_{12} = \frac{dx_2}{-dx_1} \approx -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}. \qquad \textbf{(3.7)}$$

На основании **(3.7)** (предельная) норма замены ресурсов R_{12} (приближенно) показывает, ***на сколько единиц увеличатся*** затраты второго ресурса (при неизменном выпуске $y = a$), если затраты первого ресурса ***уменьшатся*** на ***одну*** (малую) ***единицу.***

Чем круче касательная к изокванте l_q в точке (x_1, x_2), тем больше выражение $-\frac{dx_2}{dx_1}$ и, следовательно, норма замены R_{12} первого ресурса вторым (рис. 3.11).

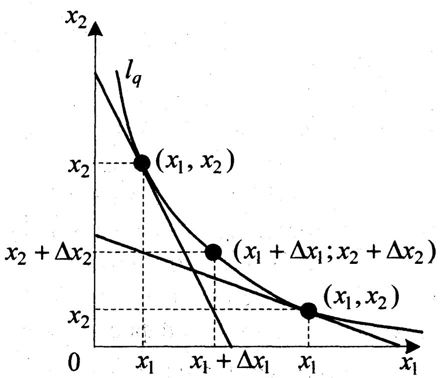


Рис. 3.11

➢ **Пример 3.18.** Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ выпишем в явном виде выражения R_{12} и R_{21}.

Имеем:

$$R_{12} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) \Big/ \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{a_1}{a_2}\frac{x_2}{x_2}; \quad R_{21} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) \Big/ \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = \frac{a_1}{a_2}\frac{x_2}{x_2}.$$

➢ **Пример 3.19.** Для ПФ $y = a_0+a_1x_1+a_2x_2$ выпишем в явном виде выражения R_{12} и R_{21}.

Имеем:

$$R_{12}=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\bigg/\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)=\frac{a_1}{a_2};\quad R_{21}=\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\bigg/\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)=\frac{a_2}{a_1}.$$

3.4. Производственные функции в темповой записи

Наряду со связями объемных показателей выпуска и затрат ресурсов могут быть рассмотрены связи между темпами прироста этих показателей. Будем здесь говорить о макроэкономических производственных функциях, связывающих величину совокупного продукта (дохода) Y с затратами капитала K и труда L, но все это легко обобщается на любые другие производственные функции. Обозначим темпы прироста величин Y, K и L малыми буквами y, k и l соответственно. Это могут быть дискретные темпы прироста $\left(y_t=\frac{Y_t-Y_{t-1}}{Y_{t-1}},\ k_t=\frac{K_t-K_{t-1}}{K_{t-1}},\ l_t=\frac{L_t-L_{t-1}}{L_{t-1}}\right)$ или непрерывные темпы прироста $\left(y_t=\frac{Y_t'}{Y_t},\ k_t=\frac{K_t'}{K_t},\ l_t=\frac{L_t'}{L_t}\right)$. Итак, ПФ в темповой записи имеет вид: $y = f(k, l)$.

Теперь рассмотрим связь ПФ Кобба—Дугласа в объемной и темповой записи. Пусть величины K и L являются непрерывными дифференцируемыми функциями времени (K_t и L_t). В таком случае они представляют не объемы использованных ресурсов за определенный период времени, а «интенсивности» их использования в каждый момент времени. От функции $Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{\beta}e^{\gamma t}$ можно после ее логарифмирования взять полный дифференциал:

$$d\ln Y_t = \alpha\cdot d\ln K_t + \beta\cdot d\ln L_t + \gamma\cdot dt,$$

или

$$\frac{dY_t}{Y_t}=\alpha\cdot\frac{dK_t}{K_t}+\beta\cdot\frac{dL_t}{L_t}+\gamma\cdot dt \Rightarrow$$

$$\frac{Y_t'dt}{Y_t}=\alpha\cdot\frac{K_t'dt}{K_t}+\beta\cdot\frac{L_t'dt}{L_t}+\gamma\cdot dt,$$

и после деления обеих частей на dt получаем

$$\frac{Y_t'}{Y_t} = \alpha \cdot \frac{K_t'}{K_t} + \beta \cdot \frac{L_t'}{L_t} + \gamma.$$

Здесь $y_t = \frac{Y_t'}{Y_t}$, $k_t = \frac{K_t'}{K_t}$, $l_t = \frac{L_t'}{L_t}$ — непрерывные темпы прироста выпуска, капитала и труда.

Таким образом, ПФКД в объемных показателях соответствует линейная зависимость темпов прироста:

$$y_t = \alpha \cdot k_t + \beta \cdot l_t + \gamma.$$

Эта зависимость называется производственной функцией *Кобба—Дугласа в темповой записи.*

Если заменить дифференциалы dY_t, dK_t, dL_t (главные линейные части приращений) на сами приращения ΔY_t, ΔK_t, ΔL_t, то получим приближенную формулу:

$$y_t = \alpha \cdot k_t + \beta \cdot l_t + \gamma,$$

где y_t, k_t, l_t — дискретные темпы прироста.

Таким образом, и в дискретном случае функции Кобба—Дугласа в объемных показателях соответствует линейная формула связи темпов прироста y_t, k_t и l_t. Однако при ее анализе и оценивании надо иметь в виду следующее. Формулы $Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{\beta}e^{\gamma t}$ и $y_t = \alpha k_t + \beta l_t + \gamma$ эквивалентны при непрерывном рассмотрении времени. В то же время статистические данные, по которым оцениваются ПФ, всегда дискретны; обычно это погодовые данные. В этих условиях приведенные формулы зависимостей для объемов и темпов прироста — это разные ПФ. Иногда оценки параметров α, β и γ, полученные для объемной ПФКД, переносят на темповую формулу, и наоборот. Так делать некорректно; каждая из этих формул должна быть оценена в отдельности. Даже если они оценены по одним и тем же статистическим данным (т.е. по объемам и темпам, соответствующим друг другу), результаты такой оценки могут быть совершенно различными. Одна из формул, например, может не дать статистически значимой оценки, в то время как по другой получается вполне приемлемый результат.

Из проделанных выкладок вытекает, что показатель γ (свободный член ПФКД в темповой записи) — темп нейтрального технологического прогресса. Это та часть темпа прироста выпуска, которая не связана с приростом затрат капитала и труда, а отражает интенсификацию производства на макроуровне.

Пусть, например, оценена следующая формула ПФ в темповой записи:

$$y_t = 0{,}3 \cdot k_t + 0{,}6 \cdot l_t + 1{,}5.$$

Пусть при этом средний темп прироста затрат труда l_t составил 1%, средний темп прироста используемого капитала $k_t = 6\%$, а средний темп прироста выпуска $y_t = 3{,}9\%$. Вклад в эти цифры экстенсивных факторов — прироста затрат капитала и труда — составил соответственно, %: $0{,}3 \cdot 6 = 1{,}8$ и $0{,}6 \cdot 1 = 0{,}6$. Вклад интенсивных факторов (технологического прогресса) составляет 1,5 процентных пункта, или $\frac{1{,}5}{3{,}9} \cdot 100\% \approx 38{,}5\%$.

3.5. Эластичность замены факторов. Производственная функция CES

Обобщение производственной функции Кобба—Дугласа (ПФКД) может осуществляться в различных направлениях. Наиболее известным обобщением является производственная функция CES, или ПЭЗ — функция с постоянной эластичностью замены (*constant elasticity of substitution*) одного ресурса другим. Эластичность замены σ — это мера «кривизны» изоквант (линий уровня) ПФ. Точнее, «кривизну» измеряет величина $\frac{1}{\sigma}$. Эластичность замены труда капиталом $\sigma_{LK} = d\ln\left(\frac{K}{L}\right) \Big/ d\ln\left(\frac{Y'_L}{Y'_K}\right)$ показывает, на сколько процентов изменится капиталовооруженность труда $\left(\frac{K}{L}\right)$ при изменении предельной нормы замены труда капиталом $\left(\mathrm{MRS}_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{Y'_L}{Y'_K}\right)$ на 1%. Если изобразить одну из изоквант (линий уровня, т.е. $Y = \mathrm{const}$) ПФ на плоскости KL (рис. 3.12), обозначив ее *1*, то предельная норма замены в точке A — это тангенс угла наклона этой изокванты (т.е. $\mathrm{tg}\alpha$).

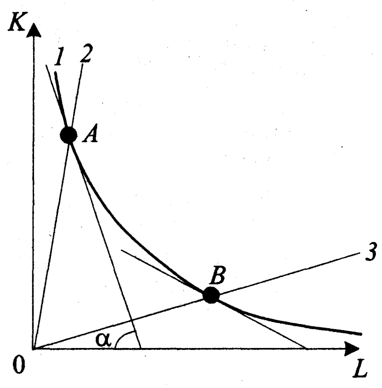


Рис. 3.12

При перемещении из точки A в точку B по изокванте наклон касательной меняется, меняется и соотношение $\left(\frac{K}{L}\right)$. Это соотношение постоянно вдоль каждой прямой, проходящей через начало координат (например, прямых *2* и *3*). Величина $\frac{1}{\sigma}$ показывает относительное изменение тангенса угла наклона линии уровня в расчете на единицу изменения отношения $\left(\frac{K}{L}\right)$. Очевидно, чем сильнее меняется наклон линии уровня при переходе, скажем из точки A в точку B (с прямой *2* на прямую *3*), тем больше «кривизна» линии уровня.

На рис. 3.13 изображены линии уровня функций: *а* — линейной ПФ $Y = aK + bL + c$; *б* — ПФКД; *в* — ПФ с бесконечной эластичностью замены $Y = \min(aK, bL)$ (функции Леонтьева); *г* — ПФ CES (функции с постоянной эластичностью замены).

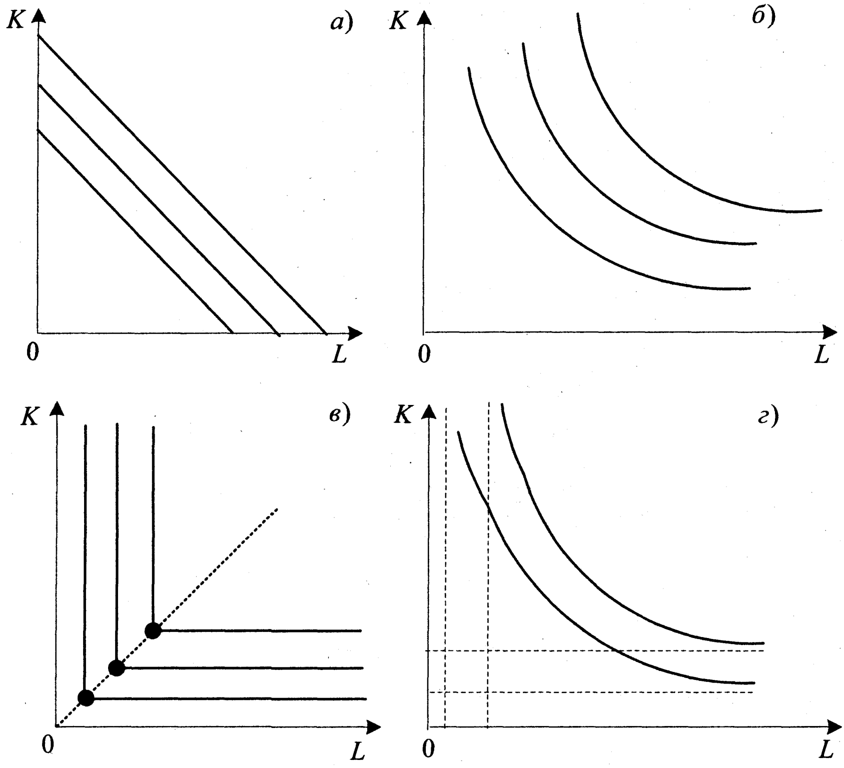


Рис. 3.13

Линейная ПФ имеет нулевую «кривизну» и, соответственно, бесконечную эластичность замены σ. Функция Кобба—Дугласа имеет эластичность замены, равную единице. Функция Леонтьева имеет нулевую эластичность замены: ресурсы в ней должны использоваться в заданной пропорции и не могут заменять друг друга. В реальной экономике степень взаимозаменяемости ресурсов может быть различной, соответственно различной (а не только нулевой, бесконечной или единичной) может быть и эластичность замены. Это ставит задачу оценки более общих формул ПФ; в частности ПФ с постоянной, но произвольной эластичностью замены. Такая функция (функция CES) описывается формулой:

$$Y = A \cdot (uK^{-\rho} + (1-u)\,L^{-\rho})^{-n/\rho}.$$

Здесь $\rho \geq -1$; $n > 0$ — степень однородности; $A > 0$; $0 < u < 1$.

Эластичность замены одного ресурса другим для такой функции равна $\frac{1}{1+\rho}$. Если $\rho = -1$, то получаем функцию с линейными изоквантами (в частности, линейную), при $\rho \to 0$ в пределе получаем ПФКД с $\sigma = 1$, при $\rho \to \infty$ — ПФ Леонтьева.

В качестве примера оценки ПФ CES приведем полученные разными авторами результаты для экономики СССР. Такие оценки делались за различные периоды времени в 1950—1985 гг. Э.Б. Ершовым, Ю.В. Яременко и А.С. Смышляевым, М. Вейтцманом, А.Г. Гранбергом, Н.Б. Баркаловым и др. Исходные спецификации различаются предпосылками о степени однородности n (в большинстве случаев изначально считалось, что $n = 1$, но были и оценки с произвольным n) и наличием множителя $e^{\gamma t}$, характеризующего нейтральный технологический прогресс (такой множитель может добавляться не только к ПФКД, но и CES или какой-либо другой функции). Например, А.Г. Гранберг приводит следующие оценки за 1960—1985 гг.:

$$Y = 1{,}002 \cdot (0{,}6412 \cdot K^{-0{,}81} + 0{,}3588 \cdot L^{-0{,}81})^{-1/0{,}81};$$

$$R^2 = 0{,}9984; \;\; DW = 1{,}58$$

(линейно-однородная функция CES без учета технологического прогресса);

$$Y = 0{,}966 \cdot (0{,}4074 \cdot K^{-3{,}03} + 0{,}5926 \cdot L^{-3{,}03})^{-1/3{,}03} e^{0{,}0252t},$$

$$R^2 = 0{,}9982, \; DW = 1{,}76$$

(линейно-однородная функция CES с учетом технологического прогресса).

С точки зрения статистик R^2 и DW, обе зависимости получились значимыми. В то же время оценки показателя эластичности замены $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$ в них различны: в первом случае — 0,55, во втором — 0,25. Другими авторами получены оценки эластичности замены σ для экономики СССР, эти значения также меньше единицы: 0,2 (Ю.В. Яременко и др.); 0,4 (М. Вейтцман); 0,37—0,43 в разные периоды (Н.Б. Баркалов). В целом можно сказать, что оценка эластичности замены сильно зависит от конкретной спецификации, но в большинстве случаев она составляла около 0,4. Во всяком случае, она заведомо была для экономики СССР меньше единицы, что говорит о невысокой степени взаимозаменяемости труда и капитала. Эта взаимозаменяемость была гораздо ниже, чем это предполагается в функции Кобба—Дугласа, в которой эластичность замены априори считается равной единице. Ошибочность исходной гипотезы о степени взаимозаменяемости факторов может служить причиной недостаточной статистической значимости оценок ПФКД.

Вопросы и задания

1. В чем суть закона убывающей эффективности?
2. Что в статической производственной функции не зависит от времени t, а что может зависеть от времени t?
3. Как определяется (средняя) производительность труда и капиталовооруженность (фондовооруженность) труда? Какие возможны варианты взаимосвязи между ними в случае производственной функции Кобба–Дугласа?
4. Назовите основные свойства, которыми должна обладать производственная функция. Приведите примеры производственных функций, которые отдельными свойствами не обладают. Приведите примеры производственных функций, которые обладают всеми основными свойствами.
5. Что такое изокванта? В чем ее экономический смысл?
6. Как определяется (средняя) производительность капитала (капиталоотдача)?
7. Как определяется (предельная) производительность капитала и (предельная) производительность труда?
8. Какая связь существует между средней и предельной производительностью капитала (труда) в общем случае и в случае производственной функции Кобба—Дугласа?
9. Сформулируйте определение (частной) эластичности выпуска по i-му ресурсу (i-му фактору производства) ($i = 1, 2$) и определение эластичности производства.
10. Дайте содержательную интерпретацию (частной) эластичности выпуска по i-му ресурсу.

11. Сформулируйте определение (предельной) нормы замены одного ресурса другим. Дайте содержательную интерпретацию этому понятию.

12. Как меняется (предельная) норма замены одного ресурса другим при движении по изокванте? Дайте содержательную интерпретацию характеру изменения предельной нормы замены.

13. Дайте определение и поясните смысл производственной функции в темповой записи.

14. Как связаны производственная функция Кобба—Дугласа в объемной и темповой записях?

15. Как описывается технический прогресс в производственной функции в объемной и темповой записи? Как оценить долю вклада интенсивных факторов в темпы экономического роста?

16. Дайте определение и графическую интерпретацию эластичности замены факторов.

17. Поясните смысл производственной функции CES. Каковы ее свойства и основные характеристики?

4 Задачи оптимизации производства

4.1. Основные понятия

Доходом (***выручкой***) R фирмы в определенном временно́м периоде (например, в определенном году) называется произведение p_0y общего объема y выпускаемой фирмой продукции на (рыночную) цену p_0 этой продукции. Часто используется двухфакторная производственная функция $y = f(x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 — объемы затрачиваемых (используемых) фирмой ресурсов (факторов производства); p_1 и p_2 — рыночные цены на эти ресурсы (факторы производства). Обычно $x_1 = K$ — количество используемого капитала; $x_2 = L$ — количество затрачиваемого фирмой труда.

Издержками C фирмы называют общие выплаты фирмы в определенном временно́м периоде за все виды затрат $C = p_1x_1 + p_2x_2$.

Прибылью PR фирмы в определенном временно́м периоде называется разность между полученным фирмой доходом R и ее издержками производства

$$\mathrm{PR} = R - C,$$

или

$$\mathrm{PR}(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2).$$

Последнее равенство есть выражение прибыли фирмы в терминах затрачиваемых (используемых) ресурсов. Производственная функция $y = f(x_1, x_2)$ фирмы, которая выражает общий объем y выпускаемой фирмой продукции через объемы x_1 и x_2 затрачиваемых (используемых) ресурсов, удовлетворяет определенным условиям (см. главу 3), в частности, функция $f(x_1, x_2)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные по переменным x_1 и x_2.

В теории фирмы принято считать, что, если фирма функционирует в условиях чистой (совершенной) конкуренции, на рыночные цены p_0, p_1 и p_2 она влиять не может. Фирма «соглашается» с ценами p_0, p_1 и p_2. В случае функционирования фирмы в условиях чистой монополии, монополистической конкуренции и олигополии это не так.

Основная *цель* фирмы заключается в *максимизации* прибыли путем рационального *распределения* затрачиваемых (используемых) *ресурсов.* Формально задача максимизации прибыли в определенном временном периоде имеет вид: PR $\to$ max. Такая постановка задачи максимизации зависит от того, какой конкретно временной промежуток (долговременный или краткосрочный) отделяет период, в котором фирма принимает решение о максимизации своей прибыли, от периода, в котором фирма максимизирует свою прибыль.

В случае долговременного промежутка фирма может свободно выбирать любой вектор $x = (x_1, x_2)$ затрат из пространства затрат (формально из неотрицательного ортанта $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ плоскости $0x_1x_2$), поэтому задача максимизации прибыли в случае *долговременного* промежутка (l_r) имеет вид задачи глобальной максимизации прибыли фирмы

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2) = \text{PR}\,(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(постановка задачи в терминах затрачиваемых (используемых) ресурсов).

В случае краткосрочного промежутка (s_r) фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы затрачиваемых (используемых) ею ресурсов, которые формально могут быть записаны в виде нелинейного, вообще говоря, неравенства

$$g\,(x_1, x_2) \leq b$$

(ограничений вида $g\,(x_1, x_2) \leq b$ может быть несколько). Следовательно, задача максимизации прибыли для *краткосрочного* промежутка имеет вид задачи глобальной максимизации

$$p_0 f\,(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2) = \text{PR}(x_1, x_2) \to \max$$

при условии, что

$$g\,(x_1, x_2) \leq b,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(постановка задачи в терминах затрачиваемых (используемых) ресурсов).

Линия уровня функции $C = p_1x_1 + p_2x_2$ издержек называется *изокостой* (рис. 4.1).

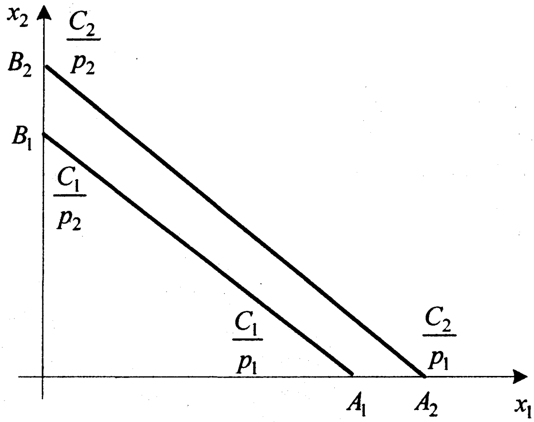


Рис. 4.1

В связи с тем, что по экономическому смыслу $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (ибо x_1 и x_2 — это объемы затрачиваемых (используемых) ресурсов), строго говоря, изокоста есть отрезок прямой, попадающий в неотрицательный ортант плоскости $0x_1x_2$. Таким образом, изокосты — это отрезки A_1B_1, A_2B_2, ... (см. рис. 4.1). Отрезки A_1B_1, A_2B_2 параллельны. Отрезок A_2B_2, расположенный «северо-восточнее» отрезка A_1B_1, соответствует бóльшим издержкам производства. Следовательно, если на отрезке A_2B_2 издержки производства C равны величине C_2, т.е. $C = C_2$, а на отрезке A_1B_1 издержки производства $C = C_1$, то $C_1 < C_2$. Верно и обратное, т.е. если $C_1 < C_2$, то отрезок A_2B_2, соответствующий издержкам производства C_2, расположен «северо-восточнее» параллельного ему отрезка A_1B_1, соответствующего издержкам производства C_1. Для отрезка A_1B_1 имеем следующее аналитическое представление:

$$C_1 = p_1x_1 + p_2x_2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$$

для отрезка A_2B_2

$$C_2 = p_1x_1 + p_2x_2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

В случае, когда число n факторов производства больше двух ($n > 2$), задача глобальной максимизации прибыли в случае долговременного промежутка (l_r) имеет вид

$$p_0 f(x_1, ..., x_n) - (p_1x_1 + ... + p_nx_n) = \mathrm{PR}(x_1, ..., x_n) \to \max$$

при условии, что $x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0$, а в случае краткосрочного промежутка (s_r) имеет вид

$$p_0 f(x_1, ..., x_n) - (p_1x_1 + ... + p_nx_n) = \mathrm{PR}(x_1, ..., x_n) \to \max$$

при условии, что

$$g_1(x_1,...,x_n) \le b_1,...,g_m(x_1,...,x_n) \le b_m,$$

$$x_1 \ge 0,...,x_n \ge 0.$$

4.2. Функции спроса на факторы (ресурсы) в случае долговременного промежутка

В связи с тем, что, как правило, $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ (т.е. если хотя бы один ресурс не затрачивается (не используется), то объем выпускаемой продукции равен нулю), экономически осмысленными являются векторы (x_1, x_2) затрат ресурсов, для которых $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Поэтому в случае *долговременного* промежутка задача максимизации прибыли представляет собой обычную задачу на *глобальный* абсолютный максимум при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Из математического анализа известно, что точки *локального* абсолютного максимума следует искать только среди критических точек (x_1, x_2) функции $\mathrm{PR}(x_1, x_2)$, т.е. среди точек, которые удовлетворяют условиям первого порядка, т.е. системе уравнений:

$$\frac{\partial \mathrm{PR}(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{PR}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

или в развернутом виде (ибо прибыль $\mathrm{PR}(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2)$)

$$p_0\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = p_1, \quad p_0\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = p_2. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Отметим, что экономистов интересует не локальный, а глобальный максимум прибыли. Если производственная функция $f(x_1,x_2)$ (и следовательно, функция прибыли $\mathrm{PR}(x_1,x_2)$) выпукла вверх при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то локальный максимум обязательно является глобальным. Отметим, что во многих случаях, которые интересны для экономистов, производственные функции являются выпуклыми вверх. В частности, производственная функция Кобба—Дугласа $y = a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ при $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1$, ПФ ПЭЗР $y = a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$ при $\alpha > 0$ являются выпуклыми вверх функциями при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

Выпуклость вверх функции $\mathrm{PR}(x_1,x_2)$ (или функции $f(x_1,x_2)$) при всех $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ эквивалентна выпуклости вниз функции $-\mathrm{PR}(x_1,x_2)$ (или функции $-f(x_1,x_2)$).

График выпуклой вверх производственной функции $f(x_1,x_2)$ есть поверхность, выпуклая вверх при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Сказанное справедливо и для графика прибыли $\mathrm{PR}(x_1, x_2)$ при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Для того чтобы функция $-\mathrm{PR}(x_1, x_2)$ (или функция $-f(x_1, x_2)$) была выпукла вниз, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & -\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

т.е. миноры

$$-\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}, \quad -\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2,$$

построенные на элементах, расположенных на пересечении строк и столбцов этой матрицы с одинаковыми номерами, были неотрицательными при всех $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

Если последовательно повышающие порядок угловые миноры вышеприведенной матрицы строго положительны, т.е. при всех $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ справедливы неравенства:

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \, \partial x_2}\right)^2 > 0,$$

то производственная функция $y = f(x_1, x_2)$ есть функция (строго) выпуклая вверх, график производственной функции $y = f(x_1, x_2)$ в трехмерном пространстве $0x_1x_2y$ есть поверхность (строго) выпуклая вверх. График прибыли $\mathrm{PR}(x_1, x_2)$, получаемый путем вычитания из графика функции $p_0 f(x_1, x_2)$ плоскости $y = p_1x_1 + p_2x_2$ (которая является графиком издержек), имеет вид «шапочки», у которой есть «макушка». Макушка соответствует *глобальному* максимуму прибыли:

$$\mathrm{PR}(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2).$$

Для строго выпуклой вверх производственной функции $y = f(x_1, x_2)$ система **(4.1)** имеет *единственное решение* (x_1^0, x_2^0), которое является *точкой* не только *локального,* но и *глобального* (искомого нами) максимума прибыли $\mathrm{PR}(x_1, x_2)$. Вектор (x_1^0, x_2^0) затрат ресурсов, который является *решением задачи* глобальной максимизации прибыли $\mathrm{PR}(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1x_1 + p_2x_2)$, называется *локальным* (частичным) *рыночным равновесием* фирмы (в случае долговременного промежутка). Термин «локальный применительно к рыночному равновесию» здесь используется в связи с тем, что рассматривается единственная фирма, функционирующая на рынках ресурсов и на рынке готовой продукции.

График прибыли $\mathrm{PR}(x_1, x_2)$ в трехмерном пространстве, вообще говоря, достаточно сложен. Поэтому график прибыли представим схематически на плоскости $0zy$, где координатная ось $0z$ изображает плоскость $0x_1x_2$. Графики производственной функции $f(z)$, дохода фирмы $p_0 f(z)$ и издержек pz представлены на рис. 4.2, *а*; на рис. 4.2, *б* изображен график прибыли $\mathrm{PR}(z) = p_0 f(z) - pz$, который получен вычитанием из графика дохода фирмы $p_0 f(z)$ графика издержек pz. Точка $(z_0, \mathrm{PR}(z_0))$ есть «макушка шапочки» графика функции $\mathrm{PR}(z) = p_0 f(z) - pz$.

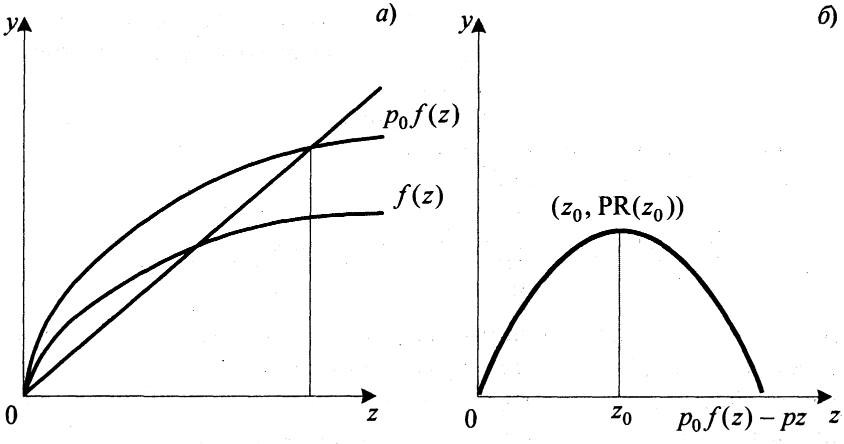


Рис. 4.2

Подставив вектор (x_1^0, x_2^0) в уравнения (4.1), получим тождества:

$$p_0 \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = p_1, \; p_0 \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = p_2, \tag{4.2}$$

которые можно переписать в векторной форме

$$p_0 \operatorname{grad} f(x_1^0, x_2^0) = p$$

($p = (p_1, p_2)$), откуда следует, что градиент производственной функции $y = f(x_1, x_2)$ в точке (x_1^0, x_2^0) и вектор цен p коллинеарны, т.е. расположены на одной прямой (рис. 4.3).

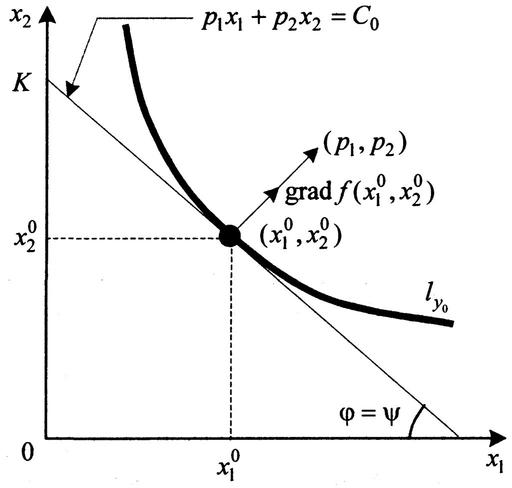


Рис. 4.3

Путем почленного деления первого тождества на второе получаем

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}, \qquad \textbf{(4.3)}$$

т.е. в точке (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы отношение предельной производительности первого ресурса к предельной производительности второго ресурса равно отношению рыночных цен этих ресурсов.

Проведем через точку (x_1^0, x_2^0) изокванту и изокосту, которые эту точку содержат. Уравнение изокванты имеет вид $f(x_1, x_2) = y_0$, где $y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$. Уравнение изокосты имеет вид $p_1x_1 + p_2x_2 = C_0$, где $C_0 = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$. Из равенства $p_0 \text{ grad } f(x_1^0, x_2^0) = (p_1, p_2)$ следует, что в точке (x_1^0, x_2^0) изокоста и изокванта касаются. Факт касания изокосты и изокванты в точке (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия — важная геометрическая характеристика локального рыночного равновесия.

Факт касания изокосты и изокванты можно обосновать с помощью элементарных рассуждений. Перепишем уравнение $f(x_1, x_2) = y_0$, выразив явно переменную x_2 через переменную x_1, т.е. в виде $x_2 = h(x_1)$ (обратим внимание, что уравнения $f(x_1, x_2) = y_0$ и $x_2 = h(x_1)$ формально разные, но они аналитически описывают одну и ту же изокванту l_{y_0}, см. рис. 4.3).

Из математического анализа известно, что

$$tg\varphi = -\frac{dh(x_1^0)}{dx_1} = \left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}\right) \Bigg/ \left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\right). \qquad \textbf{(4.4)}$$

Для изокосты $p_1x_1 + p_2x_2 = C_0$ имеем отношение $\frac{p_1}{p_2} = \mathrm{tg}\psi$. Из равенств **(4.3)** и **(4.4)** следует, что $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\psi$, что означает, что касательная K к изокванте l_{y_0} в точке (x_1^0, x_2^0) совпадает с изокостой, т.е. в точке (x_1^0, x_2^0) изокванта l_{y_0} обязательно касается изокосты K (см. рис. 4.3).

Отметим, что, приступая к решению задачи максимизации прибыли, мы не имели конкретных изокванты и изокосты, которые касаются друг друга в точке (x_1^0, x_2^0), ибо не имели самой этой точки. Касающиеся друг друга изокванта и изокоста появляются после того, как аналитически найдено локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) путем решения системы уравнений **(4.1)**.

Левая («четырехэтажная») дробь в **(4.3)** есть не что иное, как $R_{12}(x_1^0, x_2^0)$ — предельная норма замены первого ресурса вторым в точке (x_1^0, x_2^0).

Равенство **(4.3)** выражает следующий фундаментальный факт теории фирмы: в точке локального рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) предельная норма замены $R_{12}(x_1^0, x_2^0)$ первого ресурса вторым равна отношению $\frac{p_1}{p_2}$ рыночных цен этих ресурсов.

Поскольку x_1^0 и x_2^0 получаются в виде решения системы уравнений **(4.1)**, постольку x_1^0 и x_2^0 есть функции цен (p_0, p_1, p_2), т.е.

$$x_1^0 = d_1(p_0, p_1, p_2); \;\; x_2^0 = d_2(p_0, p_1, p_2). \qquad \textbf{(4.5)}$$

Выражения **(4.5)** называются ***функциями спроса на ресурсы*** (***затраты***) со стороны фирмы на рынках ресурсов. Их значения x_1^0 и x_2^0 выражают оптимальный выбор ресурсов как функции цены выпускаемой продукции и цен на ресурсы.

Подставив функции **(4.5)** в производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, получим выражение:

$$y^0 = f\left(d_1(p_0, p_1, p_2), d_2(p_0, p_1, p_2)\right) = s(p_0, p_1, p_2),$$

которое называется ***функцией предложения выпуска*** фирмы на рынке.

Функции спроса на ресурсы и функция предложения выпуска являются однородными нулевой степени по всем своим аргументам p_0, p_1 и p_2, т.е. $d_1(\gamma p_0, \gamma p_1, \gamma p_2) = d_1(p_0, p_1, p_2)$; $d_2(\gamma p_0, \gamma p_1, \gamma p_2) = d_2(p_0, p_1, p_2)$; $s(\gamma p_0, \gamma p_1, \gamma p_2) = s(p_0, p_1, p_2)$ для любого числа $\gamma > 0$. Свойство однородности означает, что одновременное изменение всех цен p_0, p_1, p_2 в одно и то же число раз γ (т.е. при изменении масштаба, но не структуры цен) не меняет x_1^0, x_2^0 и y^0, что важно с содержательной точки зрения. С математической точки зрения однородность нулевой степени функции спроса и функции предложения является простым фактом, ибо максимизация прибыли $PR(x_1, x_2) = \gamma p_0 f(x_1, x_2) - (\gamma p_1 x_1 + \gamma p_2 x_2)$ сводится к системе уравнений **(4.2)**, ибо на множитель $\gamma > 0$ можно сократить.

Вернемся к задаче глобальной максимизации прибыли фирмы:

$$p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2 = PR(x_1, x_2) \Rightarrow \max.$$

Вполне возможно, что фирма имеет определенный лимит V на приобретение ресурсов, т.е. фирма может приобретать ресурсы, количества которых x_1 и x_2 должны удовлетворять ограничению:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = V.$$

В этом случае задача глобальной максимизации прибыли приобретает вид:

$$p_0 f(x_1, x_2) - V = PR \to \max,$$

что эквивалентно глобальной максимизации выпуска $f(x_1, x_2)$ при наличии лимита на ресурсы $p_1 x_1 + p_2 x_2 = V$.

Таким образом, получаем задачу глобальной максимизации выпуска фирмы при наличии лимита на ресурсы:

$$f(x_1, x_2) \Rightarrow \max;$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = V.$$

Выписанная задача (она анализируется в параграфе 4.4) представляет собой частный случай известной задачи рационального распределения ограниченных ресурсов.

Рассмотрим еще одну корректировку задачи глобальной максимизации прибыли фирмы.

Если фирма получает фиксированный заказ на свою продукцию в объеме $\breve{y}$ ($\breve{y} = f(x_1, x_2)$), который фирма должна выполнить в течение временно́го периода, то задача глобальной максимизации прибыли фирмы приобретает вид:

$$p_0 \breve{y} - p_1 x_1 - p_2 x_2 = PR \Rightarrow \max,$$

что эквивалентно глобальной минимизации издержек фирмы $C(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ при наличии фиксированного заказа в объеме $\breve{y}$ единиц выпускаемой фирмой продукции.

Таким образом, получаем задачу глобальной минимизации издержек фирмы при фиксированном объеме выпускаемой ею продукции:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = C \to \min,$$

$$\breve{y} = f(x_1, x_2).$$

Выписанная задача анализируется в параграфе 4.5.

В случае, когда число факторов $n > 2$, условия первого порядка **(4.1)** имеют следующий вид:

$$p_0 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = p_1, ..., p_0 \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = p_n, \;\; x = (x_1, ..., x_n).$$

Как и в случае $n = 2$ выпуклость вверх функции $f(x_1, ..., x_n)$ эквивалента выпуклости вниз функции $-f(x_1, ..., x_n)$.

Для того, чтобы функция $-f(x_1,...,x_n)$ была выпукла вниз (а функция $f(x_1,...,x_n)$ выпукла вверх), необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы Гессе функции $-f(x_1,...,x_n)$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \quad x = (x_1,...,x_n),$$

т.е. миноры, построенные на элементах, расположенных на пересечении строк и столбцов этой матрицы с одинаковыми номерами, были неотрицательными при всех $x_1 > 0, ..., x_2 > 0$.

Если последовательно повышающие порядок угловые миноры вышеприведенной матрицы Гессе строго положительны, т.е. при всех $x_1 > 0, ..., x_2 > 0$

$$-\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0, ..., \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0,$$

производственная функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ строго выпукла вверх.

Для строго выпуклой вверх производственной функции $y = f(x_1, ..., x_n)$ условиям первого порядка удовлетворяет единственная точка $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ глобального (искомого) максимума прибыли $\mathrm{PR}(x_1, ..., x_n)$.

Как и при $n = 2$, точка (вектор) $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ называется *локальным рыночным равновесием* фирмы (в случае долговременного промежутка).

Подставив точку $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ в условия первого порядка, получим равенства:

$$p_0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = p_1, ..., p_0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = p_n,$$

откуда следует, что

$$p_0 \operatorname{grad} f(x^0) = p \quad \big(p = (p_1, ..., p_n)\big),$$

т.е. градиент производственной функции $y = f(x_1, ..., x_n)$ в точке локального рыночного равновесия $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ и вектор цен $p = (p_1, ..., p_n)$ коллинеарны, а это означает, что в пространстве ресурсов поверхность постоянного выпуска $y^0 = f(x^0)$ (т.е. изокванта) и $(n - 1)$-мерная плоскость постоянных издержек (т.е. изокоста), содержащие точку $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, касаются.

4.3. Функции спроса на факторы (ресурсы) в случае краткосрочного промежутка

В случае *краткосрочного* промежутка (s_r) рассмотрим конкретный пример, когда первый ресурс (капитал) фирма может использовать только в объеме, равном $\overline{x}_1 > 0$. Тогда задача максимизации прибыли превращается в задачу максимизации функции одной переменной

$$\mathrm{PR}(\overline{x}_1, x_2) = p_0 f(\overline{x}_1, x_2) - (p_1 \overline{x}_1 + p_2 x_2),$$

и вместо системы уравнений **(4.1)** появляется только одно уравнение

$$\frac{\partial \mathrm{PR}(\overline{x}_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \text{ или } p_0 \frac{\partial f(\overline{x}_1, x_2)}{\partial x_2} = p_2. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Как и в параграфе 4.2, считаем (исходя из содержательных экономических соображений), что уравнение **(4.6)** имеет единственное решение $x_2 = \bar{x}_2$ ($\bar{x}_2$ зависит от $\bar{x}_1$, т.е. $\bar{x}_2 = x_2(\bar{x}_1)$), следовательно, в случае краткосрочного промежутка локальное рыночное равновесие есть вектор ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$). С помощью рис. 4.4 дадим ему наглядную геометрическую интерпретацию.

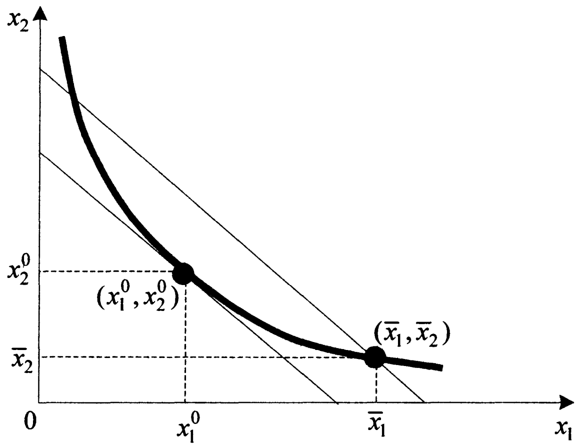


Рис. 4.4

Если бы объем $\bar{x}_1$ первого ресурса не был лимитирован, то, как видно из рис. 4.4, тот же объем выпускаемой продукции y^0 обеспечила бы конфигурация ресурсов (x_1^0, x_2^0) (для точек $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и (x_1^0, x_2^0) изокванта l_{y_0} одна и та же) при меньших издержках производства (изокоста, содержащая точку $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, расположена «северо-восточнее» изокосты, содержащей точку (x_1^0, x_2^0)). В точке $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ локального рыночного равновесия в случае (s_r) содержащие ее изокванта и изокоста пересекаются, но могут не касаться. Ситуацию, которая является естественной с экономической точки зрения, наглядно иллюстрирует рис. 4.4. В случае долговременного промежутка (l_r) фирма может свободно перемещать оба вида ресурсов (капитал и труд) и за счет этого снизить издержки до величины, равной $C^0 = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$. В случае краткосрочного промежутка (s_r) фирма не имеет возможности скорректировать объем $\bar{x}_1$ капитала и поэтому фирма не может снизить свои издержки, равные $\bar{C} = p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2$ $(C^0 < \bar{C})$. Поэтому $\mathrm{PR}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = p_0 f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \bar{C} = p_0 y^0 - \bar{C} > p_0 y^0 - C^0 = \mathrm{PR}(x_1^0, x_2^0)$. В рассматриваемом случае на самом деле $\bar{x}_2 = x_2(\bar{x}_1, p_0, p_1, p_2)$, это и есть *функция спроса* на второй ресурс при фиксированном объеме $\bar{x}_1$ первого ресурса. ***Функция предложения выпуска*** фирмы имеет вид:

$y = f(\bar{x}_1, x_2(\bar{x}_1, p_0, p_1, p_2))$. Может случиться так, что точки $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и (x_1^0, x_2^0) сольются в одну, и тогда получится та ситуация, которая уже была проанализирована в параграфе 4.2.

4.4. Комбинация ресурсов (факторов производства), максимизирующая объем выпуска при ограничении на затраты

Для случая *долговременного* промежутка (l_r) сначала рассмотрим задачу глобальной максимизации объема выпускаемой продукции при наличии лимита на ресурсы (при ограничении затрат на приобретение ресурсов (факторов)) в следующем виде:

$$f(x_1, x_2) \to \max \tag{4.7}$$

при условии, что

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le V, \tag{4.8}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{4.9}$$

Величина V не обязательно равна величине C_0 (см. параграф 4.2). Решение этой задачи математического программирования допускает наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 4.5).

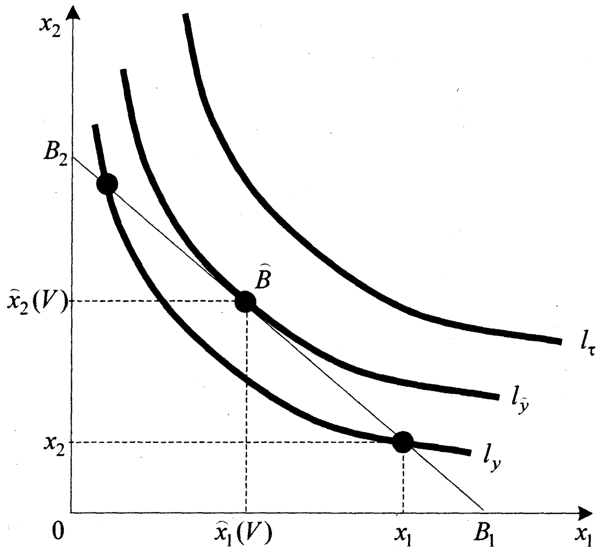


Рис. 4.5

Ограничениям **(4.8)** и **(4.9)** соответствует треугольник $0B_1B_2$ плоскости $0x_1x_2$. Максимизация функции **(4.7)** геометрически соответствует тому, что мы переходим на все более «северо-восточные» изокванты, пока они имеют еще общие точки с треугольником $0B_1B_2$ (прямая B_1B_2 имеет уравнение $p_1x_1 + p_2x_2 = V$). Изокванты — гладкие линии, выпуклые к точке 0 (а это так, ибо $f(x_1, x_2)$ — не произвольная функция двух переменных, а ***производственная функция,*** т.е. функция, удовлетворяющая определенным требованиям гладкости и выпуклости), поэтому решению задачи **(4.7)—(4.9)** соответствует изокванта $l_{\hat{y}}$, которая касается гипотенузы (изокосты) B_1B_2 в точке $\hat{B}$. Любая изокванта l_τ, расположенная «северо-восточнее» этой изокванты $(\tau > \hat{\tau})$, содержащей точку $\hat{B}$, не подходит, ибо не имеет общих точек с треугольником $0B_1B_2$. Координаты $\hat{x}_1(V)$ и $\hat{x}_2(V)$ точки $\hat{B}$ дают решение задачи **(4.7)—(4.9)**, ибо $y = f(x_1, x_2) < \hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ (линия $l_{\hat{y}}$, расположена «северо-восточнее» линии l_y $(y = f(x_1, x_2))$.

В связи с тем, что это решение $(\hat{x}_1(V), \hat{x}_2(V))$ обращает ограничение **(4.8)** в равенство $p_1\hat{x}_1 + p_2\hat{x}_2 = V$, вместо задачи **(4.7)—(4.9)** можно рассмотреть более простую задачу на условный экстремум

$$f(x_1, x_2) \to \max \tag{4.7}$$

при наличии ограничения

$$p_1x_1 + p_2x_2 = V$$
$$(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0), \tag{4.10}$$

заданного в виде равенства. (Эта задача была сформулирована выше в параграфе 4.2).

Задачи **(4.7)—(4.9)** и **(4.7)**, **(4.10)** разные, но решение $(\hat{x}_1(V), \hat{x}_2(V))$ у них одно и то же. Поскольку сумма $p_1x_1 + p_2x_2$ равна издержкам производства, постольку целесообразно заменить V на C и формально перейти к задаче максимизации объема выпускаемой продукции для случая *долговременного* промежутка (l_r) при *фиксированных издержках производства* C (величина C играет роль параметра и не обязательно равна величине C_0 (см. параграф 4.2):

$$f(x_1, x_2) \to \max \tag{4.7}$$

при условии, что

$$p_1x_1 + p_2x_2 = C$$
$$(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0). \tag{4.11}$$

Геометрическое решение задачи **(4.7)**, **(4.11)** также наглядно очевидно (рис. 4.6): следует переходить на все более «северо-восточные» изокванты $l_y(y = f(x_1, x_2))$ до тех пор, пока они продолжают иметь общие точки (x_1, x_2) с изокостой, соответствующей фиксированным издержкам производства C. Ясно, что решением задачи максимизации выпуска будет точка $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$ касания последней из допустимых изоквант $l_{\hat{y}}$ и фиксированной изокосты $p_1x_1 + p_2x_2 = C$. Эта точка касания зависит от величины издержек C (поэтому и написано $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$. Если издержки C изменятся, то изменится, вообще говоря, и точка $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$. Множество точек $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$, соответствующих различным значениям C, образуют линию L (см. рис. 4.6), которая называется линией *долговременного развития фирмы*. Точка (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы (см. параграф 4.2) обязательно принадлежит линии L.

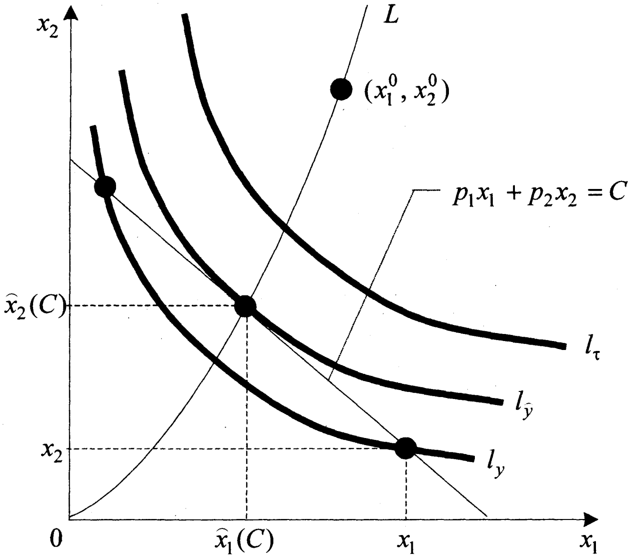


Рис. 4.6

Решим задачу **(4.7)**, **(4.11)** формально с помощью функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(C - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Для функции Лагранжа выписываем условия первого порядка, т.е. систему уравнений

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda p_2, \quad C - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Критическая точка $(\widehat{x}_1(C), \widehat{x}_2(C), \widehat{\lambda}(C))$ функции Лагранжа, удовлетворяющая системе **(4.12)** и взятая без последней координаты (множителя Лагранжа) $\widehat{\lambda}(C)$, т.е. точка $(\widehat{x}_1(C), \widehat{x}_2(C))$ есть точка возможного условного локального максимума функции $y = f(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = C$. Если $y = f(x_1, x_2)$ — производственная функция, т.е. функция, удовлетворяющая условиям гладкости и выпуклости, то выполняются достаточные условия второго порядка локального условного максимума функции **(4.7)** при наличии ограничения **(4.11)**. При этом точка $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$ условного локального максимума является точкой условного глобального максимума функции **(4.7)** при наличии ограничения **(4.11)**. Если $y = f(x_1, x_2)$, то $\hat{x}_1(C) > 0, \hat{x}_2(C) > 0, \hat{\lambda}(C) > 0$.

Подставив точку $\hat{x}_1(C) > 0, \hat{x}_2(C) > 0, \hat{\lambda}(C))$ в первые два равенства системы **(4.12)**, получим два тождества:

$$\frac{\partial f(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))}{\partial x_1} = \hat{\lambda}(C)p_1; \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$\frac{\partial f(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))}{\partial x_2} = \hat{\lambda}(C)p_2, \qquad \textbf{(4.14)}$$

откуда следует коллинеарность градиента $\operatorname{grad} f((\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$ и вектора цен $p = (p_1, p_2)$:

$$\operatorname{grad} f((\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C)) = \hat{\lambda}(C)(p_1, p_2)$$

(рис. 4.7). Отсюда следует, что изокоста **(4.11)** и изокванта $l_{\hat{y}}$ касаются в точке $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$. Отметим, что в решении $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C), \hat{\lambda}(C))$ множитель Лагранжа $\hat{\lambda}(C)$ является скорее относительно малой величиной («моськой») в связи с тем, что длина градиента $\operatorname{grad} f((\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$ скорее много меньше вектора цен $p = (p_1, p_2)$.

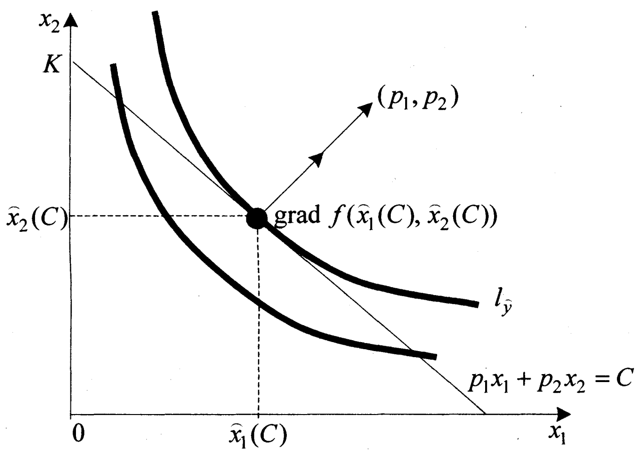


Рис. 4.7

Если положить $p_0 = \dfrac{1}{\widehat{\lambda}(C)}$, то для задачи глобальной максимизации прибыли

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = \text{PR} \to \max$$

условия первого порядка (4.1) приобретут вид:

$$p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = p_1, \quad p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = p_2,$$

откуда, принимая во внимание равенство $p_0 = \dfrac{1}{\widehat{\lambda}(C)}$, эти условия первого порядка следует переписать так:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda(C) p_1, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda(C) p_2.$$

Этой системе уравнений удовлетворяет $x_1 = \widehat{x}_1(C)$ и $x_2 = \widehat{x}_2(C)$ (**(4.13)** и **(4.14)**). Следовательно, решение $\widehat{x}_1(C) = x_1^0, \widehat{x}_2(C) = x_2^0$ представляет собой локальное рыночное равновесие фирмы при $p_0 = \dfrac{1}{\widehat{\lambda}(C)}$, т.е. решение $(\widehat{x}_1(C), \widehat{x}_2(C))$ задачи **(4.7)**, **(4.11)** условной глобальной максимизации совпадает с решением (x_1^0, x_2^0) задачи глобальной максимизации прибыли, если цена p_0 выпускаемой фирмой продукции равна $p_0 = \dfrac{1}{\widehat{\lambda}(C)}$.

Таким образом, предложена естественная экономическая интерпретация множителя Лагранжа $\widehat{\lambda}(C)$.

В параграфе 4.2 в точке локального рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) фирмы были определены издержки $C_0 = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$. Если в ограничении **(4.11)** положить $C = C_0$, то очевидно $\widehat{x}_1(C_0) = x_1^0$, $\widehat{x}_2(C_0) = x_2^0$, а также $\dfrac{1}{\widehat{\lambda}(C_0)} = p_0$, т.е. величина, обратная множителю Лагранжа $\widehat{\lambda}(C_0)$, равна рыночной цене p_0 единицы выпускаемой фирмой продукции.

Подставив $\widehat{x}_1(C), \widehat{x}_2(C)$ в выражение $y = f(x_1, x_2)$, получим, что

$$\widehat{y} = f(\widehat{x}_1(C), \widehat{x}_2(C)) = F(C), \qquad \textbf{(4.15)}$$

т.е. получим, что максимальный выпуск $y = F(C)$ фирмы по существу есть функция издержек C. Выражение **(4.15)** является *значением задачи* **(4.7)**, **(4.11)**.

Так построенная функция $\hat{y} = F(C)$ соответствует случаю *долговременного* промежутка.

Имея функцию $\hat{y} = F(C)$, можно выписать выражение для прибыли в терминах *издержек* $PR(C) = p_0F(C) - C$ (сравнить с выражением для прибыли фирмы в терминах *затрачиваемых* (*используемых*) *ресурсов*, см. параграф 4.2).

Таким образом, задача максимизации прибыли фирмы в случае долговременного промежутка может иметь три постановки:

- в терминах объемов x_1 и x_2 затрачиваемых (используемых) ресурсов:

$$p_0 f(x_1, x_2) - p_1x_1 - p_2x_2 = PR(x_1, x_2) \to \max;$$

- в терминах объема y выпускаемой фирмой продукции:

$$p_0 y - C(y) = PR(y) \to \max;$$

- в терминах издержек C фирмы:

$$p_0F(C) - C = PR(C) \to \max.$$

Строго говоря, координаты $\hat{x}_1(C)$ и $\hat{x}_2(C)$ являются функциями всех параметров p_1, p_2, C задачи **(4.7)**, **(4.11)**, т.е. $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, C)$, $\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, C)$. Эти функции называются *функциями условного спроса* (*по Маршаллу*) со стороны фирмы на ресурсы. Фирма предъявляет спрос на каждый ресурс на рынке этого ресурса. Спрос называется *условным*, потому что есть условие $p_1x_1 + p_2x_2 = C$, которое появляется в связи с лимитом на ресурсы. Отметим также, что $\hat{\lambda} = \varphi_3(p_1, p_2, C)$.

Максимальный выпуск $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ фирмы имеет вид:

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f(\varphi_1(p_1, p_2, C), \varphi_2(p_1, p_2, C) = h(p_1, p_2, C).$$

Выписанная функция представляет собой условное предложение фирмой своего выпуска на рынке выпускаемого ею продукта.

Функции условного спроса (по Маршаллу) $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, C)$, $\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, C)$ и функции условного предложения фирмы $\hat{y} = h(p_1, p_2, C)$ однородны нулевой степени, т.е. для любого числа $\gamma > 0$ справедливы равенства:

$$\varphi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C) = \varphi_1(p_1, p_2, C), \varphi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C) = \varphi_2(p_1, p_2, C),$$

$$h(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C) = h(p_1, p_2, C).$$

С одной стороны, задача глобальной максимизации **(4.7)**, **(4.11)** имеет решение $\varphi_1(p_1, p_2, C)$, $\varphi_2(p_1, p_2, C)$, задача глобальной максимизации **(4.7)** при наличии ограничения $\gamma p_1 x_1 + \gamma p_2 x_2 = \gamma C$ имеет решение $\varphi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C)$, $\varphi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C)$. С другой стороны, эти две задачи глобальной максимизации эквивалентны (сократив ограничение $\gamma p_1 x_1 + \gamma p_2 x_2 = \gamma C$ на γ, получим ограничение **(4.11)**), поэтому $\varphi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C) = \varphi_1(p_1, p_2, C)$, $\varphi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C) = \varphi_2(p_1, p_2, C)$.

Равенство $h(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C) = h(p_1, p_2, C)$ также очевидно, ибо

$$h(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C) = f(\varphi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C),\ \varphi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \gamma C)) =$$
$$= f(\varphi_1(p_1, p_2, C),\ \varphi_2(p_1, p_2, C)) = h(p_1, p_2, C).$$

Задача максимизации объема выпускаемой фирмой продукции при *фиксированных издержках C* для случая *краткосрочного* промежутка (s_r), когда лимитирован объем $\bar{x}_1$ первого ресурса, имеет вид:

$$f(\bar{x}_1,\ x_2) \to \max \tag{4.16}$$

при условии, что

$$p_1 \bar{x}_1 + p_2 x_2 = C \tag{4.17}$$
$$(x_2 \geq 0).$$

Ограничимся наглядным геометрическим решением (рис. 4.8) задачи **(4.16)**, **(4.17)**.

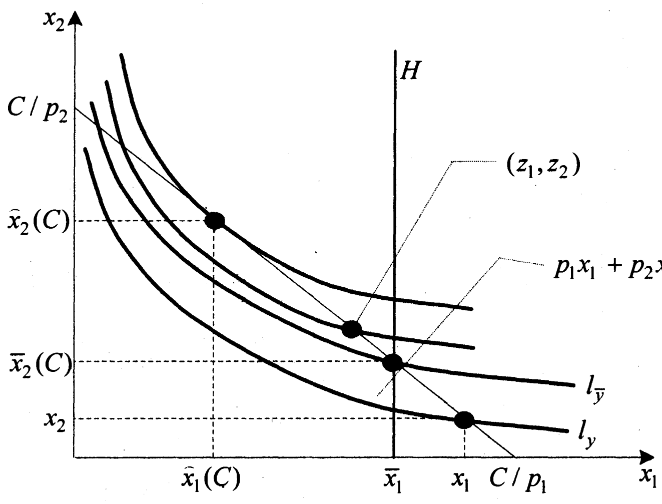


Рис. 4.8

Перемещаемся по изоквантам l_y $(y = f(x_1, x_2))$ на «северо-восток» до того момента, пока изокванта $l_{\bar{y}}$ $(\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ не пройдет через точку $(\bar{x}_1, \bar{x}_2(C))$, которая и есть решение задачи **(4.16)**, **(4.17)**. От этой изокванты $l_{\bar{y}}$ далее на «северо-восток» идти нельзя, ибо в точках $z = (z_1, z_2)$ пересечения новых изоквант и фиксированной изокосты $p_1x_1 + p_2x_2 = C$ имеет место неравенство $z_1 \neq \bar{x}_1$.

Если бы условия $x_1 = \bar{x}_1$ не было, то решением задачи максимизации объема выпускаемой продукции была бы точка $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$, которая соответствует случаю долговременного промежутка. Очевидно, $f(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C)) > f(\bar{x}_1, \bar{x}_2(C))$, ибо изокванта, проходящая через точку $(\hat{x}_1(C), \hat{x}_2(C))$, расположена «северо-восточнее» изокванты, проходящей через точку $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2(C)$.

Получен важный *результат теории фирмы*: при одних и тех же издержках C объем выпускаемой фирмой продукции в случае *долговременного* промежутка больше (точнее не меньше) объема выпускаемой фирмой продукции в случае *краткосрочного* промежутка.

Эти объемы сравняются, если издержки производства C будут такими, что $\hat{x}_1(C) = \bar{x}_1$. Вертикальная прямая $x_1 = \bar{x}_1$ называется *линией краткосрочного развития фирмы* (см. рис. 4.8).

Для долговременного промежутка кратко рассмотрим общий случай $n > 2$.

Задача **(4.7)**, **(4.11)** глобальной максимизации выпуска фирмы при лимите на ресурсы в общем случае имеет вид:

$$f(x_1, ..., x_n) \to \max \qquad \textbf{(4.18)}$$

при наличии ограничения

$$p_1x_1 + ... + p_nx_n = C \qquad \textbf{(4.19)}$$

$$(x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0).$$

Для функции Лагранжа

$$L(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda(C - p_1x_1 - ... - p_nx_n) \qquad \textbf{(4.20)}$$

задачи **(4.18)**, **(4.19)** на условный (локальный) экстремум условия первого порядка имеют вид:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0, ..., \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} = 0, \ \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$
$$\left(x = (x_1, ..., x_n)\right)$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = \lambda p_1, ..., \ \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} = \lambda p_2, \ C - p_1x_1 - ... - p_nx_n = 0 \qquad \textbf{(4.21)}$$
$$(x = (x_1, ..., x_n)).$$

Для производственной функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям гладкости и выпуклости, $(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n, \hat{\lambda})$ — критическая точка функции **(4.18)** при наличии ограничения **(4.19)**.

Критическая точка $(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n, \hat{\lambda})$ функции Лагранжа является решением системы уравнений **(4.21)**, поэтому при подстановке ее в эти уравнения она обращает их в тождества:

$$\frac{\partial L(x,\hat{\lambda})}{\partial x_1} = \hat{\lambda} p_1, ..., \frac{\partial L(x,\hat{\lambda})}{\partial x_n} = \hat{\lambda} p_n \quad (\hat{x} = (\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n),$$

которые в компактной векторной форме имеют вид:

$$\text{grad} f(\hat{x}) = \hat{\lambda} p \quad (p = (p_1, ..., p_n)),$$

откуда следует, что в точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n)$ изокванта максимального выпуска и изокоста ($(n-1)$-мерная плоскость постоянных издержек) касаются.

Функции $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, ..., p_n, C), ..., \hat{x}_n = \varphi_n(p_1, ..., p_n, C)$ являются функциями условного спроса (по Маршаллу) со стороны фирмы на рынках ресурсов. Функция $\hat{y} = h(p_1, ..., p_n, C) = f(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n) = f(\varphi_1(p_1, ..., p_n, C), ..., \varphi_n(p_1, ..., p_n, C))$ есть функция предложения фирмы на рынке выпускаемой фирмой продукции.

Как и в случае $n = 2$ все функции $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, ..., p_n, C), ..., \hat{x}_n = \varphi_n(p_1, ..., p_n, C)$, $\hat{y} = h(p_1, ..., p_n, C)$ являются однородными нулевой степени по всем переменным $p_1, ..., p_n, C$.

Как и в случае $n = 2$ множитель Лагранжа $\hat{\lambda} = \varphi_3(p_1, ..., p_n, C)$ является скорее относительно малой величиной («моськой»).

4.5. Комбинация ресурсов (факторов производства), минимизирующая издержки при фиксированном (общем) объеме выпуска

Для случая *долговременного* промежутка (l_r) рассмотрим задачу глобальной минимизации издержек при *фиксированном объеме* $\breve{y}$ выпускаемой продукции:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C\,(x_1, x_2) \to \min \qquad \textbf{(4.22)}$$

при условии, что

$$\breve{y} = f(x_1, x_2) \qquad \textbf{(4.23)}$$

$$(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0).$$

Геометрически решение задачи **(4.22)**, **(4.23)** (рис. 4.9) аналогично решению задачи **(4.7)**, **(4.10)**. В случае задачи **(4.22)**, **(4.23)** следует перемещаться по изокостам на «юго-запад» (ибо имеем задачу минимизации) до тех пор, пока они продолжают иметь общие точки с изоквантой, соответствующей фиксированному объему $\breve{y}$. Ясно, что решением задачи минимизации издержек будет общая точка $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}))$ изокосты и фиксированной изокванты $l_{\breve{y}}$. Эта точка *касания* зависит от объема $\breve{y}$ (поэтому и написано: $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}))$. Если объем $\breve{y}$ изменится, то изменится и точка $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}))$. Множество точек $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}))$, соответствующих различным объемам $\breve{y}$ выпускаемой продукции, образуют линию L (см. рис. 4.9), которая, очевидно, совпадает с линией L (см. рис. 4.6).

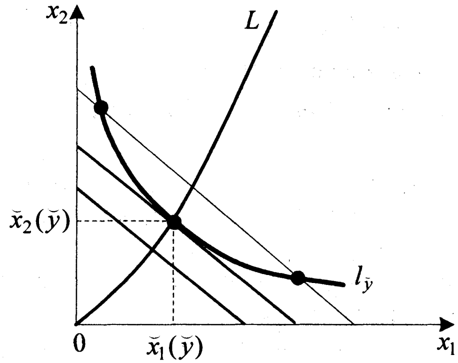


Рис. 4.9

Решим задачу **(4.22)**, **(4.23)** формально с помощью функции Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\breve{y} - f(x_1, x_2)).$$

Для функции Лагранжа выписываем условия первого порядка:

$$\frac{\partial L(x_1, x_1, \mu)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \mu)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \mu)}{\partial \mu} = 0$$

или в развернутом виде

$$p_1 = \mu\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, p_2 = \mu\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \ \breve{y} - f(x_1, x_2) = 0. \qquad \textbf{(4.24)}$$

Критическая точка $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}), \breve{\mu}(\breve{y}))$ функции Лагранжа — это точка, удовлетворяющая системе **(4.24)**. Если $y = f(x_1, x_2)$ производственная функция, удовлетворяющая условиям гладкости и выпуклости, то критическая точка $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}), \breve{\mu}(\breve{y}))$, взятая без последней координаты $\breve{\mu}(\breve{y})$, т.е. точка $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}))$, и есть *решение задачи* **(4.22)**, **(4.23)** глобальной минимизации издержек при данном фиксированном объеме выпуска $\breve{y}$. Подставив координаты точки $(\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y}), \breve{\mu}(\breve{y}))$ в первые два уравнения системы **(4.24)**, получим два тождества:

$$p_1 = \breve{\mu}\frac{\partial f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1}, \quad p_2 = \breve{\mu}\frac{\partial f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2}, \tag{4.25}$$

которые в компактной векторной форме можно переписать так:

$$(p_1, p_2) = \breve{\mu}\ \mathrm{grad}\ f(\breve{x}_1, \breve{x}_2). \tag{4.26}$$

Равенство **(4.26)** означает, что в точке $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ градиент $\mathrm{grad}\ f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ и вектор $p = (p_1, p_2)$ цен p_1 и p_2 на ресурсы коллинеарны, откуда следует, что в точке $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ изокванта $l_{\breve{y}}$ и изокоста $\breve{C} = p_1 x_1 + p_2 x_2$ $(\breve{C} = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2)$ касаются (рис. 4.10).

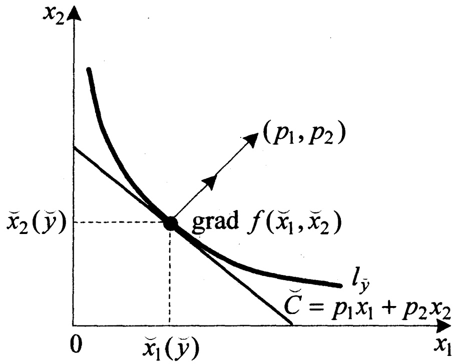


Рис. 4.10

Координаты $\breve{x}_1(\breve{y}), \breve{x}_2(\breve{y})$, а также $\breve{\mu}(\breve{y})$ и $\breve{C} = p_1\breve{x}_1(\breve{y}) + p_2\breve{x}_2(\breve{y}))$ являются функциями всех параметров $p_1, p_2, \breve{y}$ задачи **(4.22)**, **(4.23)**, т.е.

$$\breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y}), \quad \breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}), \quad \breve{\mu} = \psi_3(p_1, p_2, \breve{y}),$$
$$\breve{C} = g(p_1, p_2, \breve{y}) = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2 = p_1\psi_1(p_1, p_2, \breve{y}) + p_2\psi_2(p_1, p_2, \breve{y}).$$

Функции $\breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$, $\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$ называются *функциями условного спроса* (*по Хиксу*) со стороны фирмы на рынках ресурсов. Функции условного спроса (по Хиксу) называют также функциями компенсированного спроса со стороны фирмы на ресурсы. Функция $\breve{C} = g(p_1, p_2, \breve{y})$ называется *условными издержками фирмы*. Выражение $\breve{C} = g(p_1, p_2, \breve{y})$ является значением задачи **(4.22)**, **(4.23)**. Множитель Лагранжа $\breve{\mu} = \psi_3(p_1, p_2, \breve{y})$ является скорее относительно большой величиной («слоном») в связи с тем, что длина градиента $\mathrm{grad}\ f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ скорее много меньше длины вектора цен $p = (p_1, p_2)$.

Функции $\breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y}), \breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$ условного спроса (по Хиксу) однородны нулевой степени по переменным p_1 и p_2, а функция $\breve{C} = g(p_1, p_2, \breve{y})$ условных издержек однородна первой степени по переменным p_1 и p_2.

Действительно, задача глобальной минимизации **(4.22)**, **(4.23)** имеет решение $\psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$ и $\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$, задача глобальной минимизации $\gamma p_1 x_1 + \gamma p_2 x_2 = \gamma C(\min)$ при наличии ограничения **(4.23)** имеет решение $\psi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y})$ и $\psi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y})$. Однако эти две задачи глобальной минимизации эквивалентны, ибо вторая получается из первой умножением целевой функции $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$ на число $\gamma > 0$. Поэтому $\psi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y}) = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$ и $\psi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y}) = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$. Однородность первой степени функции $\breve{C} = g(p_1, p_2, \breve{y})$ условных издержек очевидна:

$$g(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y}) = \gamma p_1 \psi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y}) + \gamma p_2 \psi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y}) =$$
$$= \gamma(p_1 \psi_1(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y}) + p_2 \psi_2(\gamma p_1, \gamma p_2, \breve{y})) = \gamma g(p_1, p_2, \breve{y}).$$

Если положить $p_0 = \breve{\mu}$, то для задачи глобальной максимизации прибыли

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = \mathrm{PR} \to \max,$$

условия первого порядка **(4.1)** приобретают вид:

$$p_0 \frac{\partial f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} = p_1, \quad p_0 \frac{\partial f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} = p_2,$$

откуда, принимая во внимание равенства $p_0 = \breve{\mu}$, эти условия первого порядка следует переписать так:

$$\breve{\mu} \frac{\partial f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} = p_1, \breve{\mu} \frac{\partial f(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} = p_2.$$

Этой системе уравнений удовлетворяют $x_1 = \breve{x}_1$ и $x_2 = \breve{x}_2$ (см. равенства **(4.25)**). Следовательно, решение $\breve{x}_1 = x_1^0$, $\breve{x}_2 = x_2^0$ представляет собой локальное рыночное равновесие фирмы при $p_0 = \breve{\mu}$, т.е. решение $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ задачи **(4.22)**, **(4.23)** условной глобальной минимизации совпадает с решением (x_1^0, x_2^0) задачи глобальной максимизации прибыли, если цена p_0 выпускаемой фирмой продукции равна $p_0 = \breve{\mu}$.

Таким образом, предложена естественная экономическая интерпретация множителя Лагранжа $\breve{\mu} = \breve{\mu}(p_1, p_2, \breve{y})$.

В параграфе 4.2 в точке локального рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) был определен объем выпуска $y_0 = f(x_1^0, x_2^0)$. Если в ограничении **(4.23)** положить $\breve{y} = y_0$, то несложно показать, что $\breve{x}_1(y_0) = \breve{x}_1$, $\breve{x}_2(y_0) = \breve{x}_2$, а также $\breve{\mu}(y_0) = p_0$, т.е. множитель Лагранжа $\breve{\mu}(y_0)$ равен рыночной цене p_0 единицы выпускаемой продукции.

Имея выражение $\breve{C} = C(\breve{y})$, выпишем в явном виде представление прибыли $\mathrm{PR}(\breve{y})$ в случае долговременного промежутка как функции объемов $\breve{y}$ выпускаемой продукции:

$$\mathrm{PR}(\breve{y}) = p_0\breve{y} - C(\breve{y}).$$

Выражение $\mathrm{PR}(y) = p_0 y - C(y)$ играет важную роль в микроэкономике. Полезно сравнить это выражение с выражением для прибыли фирмы в терминах объемов x_1 и x_2 затрачиваемых (используемых) ресурсов в случае долговременного промежутка (см. параграф 4.1).

Пусть $\breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$, $\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$, $\breve{C} = g(p_1, p_2, \breve{y})$ — решение и значение задачи глобальной минимизации **(4.22)**, **(4.23)**.

Положим в задаче глобальной максимизации **(4.7)**, **(4.11)** $C = \breve{C}$, тогда, очевидно, $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, \breve{C}) = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y}) = \breve{x}_1$, $\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, \breve{C}) = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}) = \breve{x}_2$ и $\hat{y} = h(p_1, p_2, \breve{C}) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f(\breve{x}_1, \breve{x}_2) = \breve{y}$ (рис. 4.11).

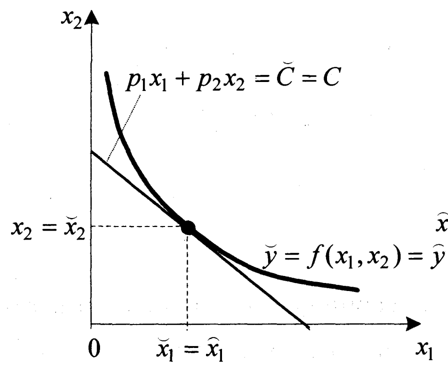


Рис. 4.11

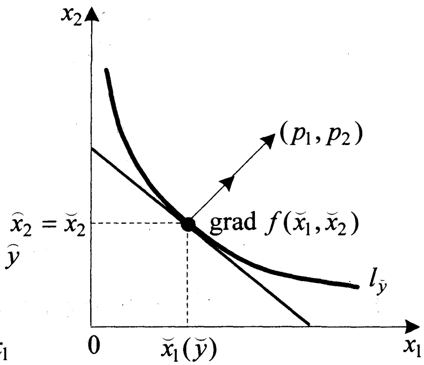


Рис. 4.12

Пусть $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, C)$, $\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, C)$, $\hat{y} = h(p_1, p_2, C) = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ — решение и значение задачи глобальной максимизации **(4.7)**, **(4.11)**.

Положим в задаче глобальной максимизации **(4.22)**, **(4.23)** $\breve{y} = \hat{y}$, тогда, очевидно, $\breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \hat{y}) = \varphi_1(p_1, p_2, C) = \hat{x}_1$, $\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \hat{y}) = \varphi_2(p_1, p_2, C) = \hat{x}_2$ и $\breve{C} = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2 = p_1\hat{x}_1 + p_2\hat{x}_2 = C$ (рис. 4.12).

Таким образом, наблюдается взаимозависимость задач **(4.7)**, **(4.11)** и **(4.22)**, **(4.23)**.

Задача глобальной минимизации издержек производства при фиксированном объеме $\check{y}$ выпускаемой продукции для случая краткосрочного промежутка, когда фиксирован объем $\bar{x}_1$ первого ресурса, имеет вид ($\check{y}$ играет роль параметра):

$$p_1\bar{x}_1 + p_2x_2 = C(x_1, x_2)\,(\min) \qquad \textbf{(4.27)}$$

при условии, что

$$\check{y} = f(\bar{x}_1, x_2) \qquad \textbf{(4.28)}$$

$$(x_1 \geq 0).$$

Ограничимся наглядным геометрическим решением задачи **(4.27)**, **(4.28)** (рис. 4.13).

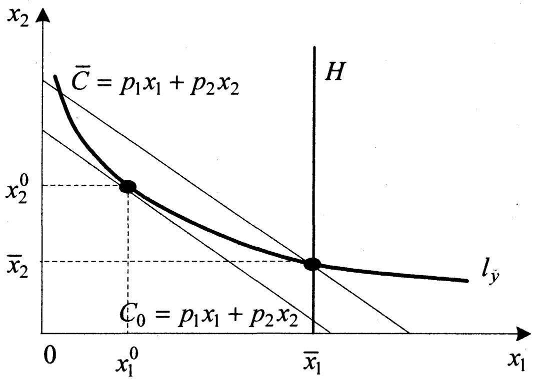


Рис. 4.13

Имеет место важный результат теории фирмы: при одном и том же объеме $\check{y}$ выпускаемой продукции издержки производства C_0 для случая долговременного промежутка меньше (точнее, не больше) издержек производства $\bar{C}$ для случая краткосрочного промежутка. Эти издержки производства равны друг другу, если объем $\check{y}$ производства будет таким, что $x_1^0(\check{y}) = \bar{x}_1$.

Для долговременного промежутка кратко рассмотрим общий случай $n > 2$.

Задача **(4.22)**, **(4.23)** глобальной минимизации издержек фирмы при фиксированном объеме ее выпуска в общем случае имеет вид:

$$p_1x_1+\ldots+p_nx_n=C(\min) \qquad \textbf{(4.29)}$$

при наличии ограничения

$$\breve{y}=f(x_1,\ldots,x_n)$$

$$(x_1>0,\ldots,x_n>0). \qquad \textbf{(4.30)}$$

Для функции Лагранжа

$$L(x_1,\ldots,x_n,\mu)=p_1x_1+\ldots+p_nx_n+\mu(\breve{y}-f(x_1,\ldots,x_n)) \qquad \textbf{(4.31)}$$

задачи **(4.29)**, **(4.30)** на условный (локальный) экстремум условия первого порядка имеют вид:

$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_1}=0,\ldots,\ \frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_n}=0,\ \frac{\partial L(x,\mu)}{\partial \mu}=0 \quad (x=(x_1,\ldots,x_n)),$$

или в развернутом виде

$$p_1=\mu\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\ldots,p_n=\mu\frac{\partial f(x)}{\partial x_n},\ \breve{y}-f(x)=0 \quad \left(x=(x_1,\ldots,x_n)\right). \qquad \textbf{(4.32)}$$

Для производственной функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условиям гладкости и выпуклости, критическая точка $(\breve{x}_1,\ldots,\breve{x}_n,\breve{\mu})$ функции Лагранжа, взятая без последней координаты, т.е. точка $(\breve{x}_1,\ldots,\breve{x}_n)$, есть точка глобального условного минимума функции **(4.29)** при наличии ограничения **(4.30)**.

Критическая точка $(\breve{x}_1,\ldots,\breve{x}_n,\breve{\mu})$ функции Лагранжа является решением системы уравнений **(4.32)**, поэтому при подстановке ее в эти уравнения она обращает их в тождества:

$$p_1=\breve{\mu}\frac{\partial f(\breve{x})}{\partial x_1},\ldots,p_n=\breve{\mu}\frac{\partial f(\breve{x})}{\partial x_n} \quad \left(x=(x_1,\ldots,x_n)\right),$$

которые в компактной векторной форме имеют вид:

$$p=\breve{\mu}\operatorname{grad} f(\breve{x}) \quad \left(p=(p_1,\ldots,p_n)\right),$$

откуда следует, что в точке $\breve{x}=(\breve{x}_1,\ldots,\breve{x}_n)$ изокванта выпуска $\breve{y}$ и изокоста ($(n-1)$-мерная плоскость условных минимальных издержек) касаются.

Функции $\breve{x}_1=\psi_1(p_1,\ldots,p_n,\breve{y}),\ldots,\breve{x}_n=\psi_n(p_1,\ldots,p_n,\breve{y})$ являются функциями условного спроса (по Хиксу) со стороны фирмы на рынках ресурсов. Функция $\breve{C}=g(p_1,\ldots,p_n,\breve{y})=p_1\breve{x}_1+\ldots+p_n\breve{x}_n=p_1\psi_1(p_1,\ldots,p_n,\breve{y})+\ldots+$

$+p_n\psi_n(p_1,...,p_n,\breve{y})$ представляет собой минимальные условные издержки фирмы.

Как и в случае $n=2$, все функции $\breve{x}_1=\psi_1(p_1,...,p_n,\breve{y}),...,\breve{x}_n=$ $=\psi_n(p_1,...,p_n,\breve{y})$ являются однородными нулевой степени по всем переменным $p_1,...,p_n$, а минимальные условные издержки фирмы $\breve{C}=g(p_1,...,p_n,\breve{y})$ являются однородной функцией первой степени по переменным $p_1,...,p_n$.

Как и в случае $n=2$, множитель Лагранжа $\breve{\mu}=\psi_3(p_1,...,p_n,\breve{y})$ является скорее относительно большой величиной («слоном»).

4.6. Предельные (маржинальные) свойства максимального выпуска и минимальных издержек

Справедливы следующие важные равенства:

$$\frac{\partial h(p_1,p_2,C)}{\partial C}=\hat{\lambda}\,; \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial h(p_1,p_2,C)}{\partial p_1}=-\hat{x}_1\hat{\lambda}\,,\quad \frac{\partial h(p_1,p_2,C)}{\partial p_2}=-\hat{x}_2\hat{\lambda}\,; \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial C(p_1,p_2,\breve{y})}{\partial \breve{y}}=\breve{\mu}\,; \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial C(p_1,p_2,\breve{y})}{\partial p_1}=\breve{x}_1\,,\quad \frac{\partial C(p_1,p_2,\breve{y})}{\partial p_2}=\breve{x}_2\,. \tag{4.36}$$

Здесь $h(p_1,\ p_2,\ C)\ =f(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ — максимальное значение целевой функции $f(x_1,\ x_2)$ задачи на условный экстремум **(4.7)**, **(4.11)** (см. параграф 4.1), $C(p_1,p_2,\breve{y})=p_1\breve{x}_1+p_2\breve{x}_2$ — минимальное значение целевой функции $C=p_1x_1+p_2x_2$ задачи на условный экстремум **(4.22)** и **(4.23)** (см. параграф 4.5).

Равенства **(4.34)** называются *тождествами Роя*, равенства **(4.36)** (которые также являются тождествами) представляют собой *лемму Шепарда*. Левая часть равенства **(4.33)** есть предельный выпуск фирмы по лимиту. Из равенства **(4.33)** следует, что он равен множителю $\hat{\lambda}$ Лагранжа.

Проанализируем и докажем равенство **(4.33)**.

Справедливо приближенное равенство:

$$\frac{\partial h(p_1,p_2,C)}{\partial C} \cong \frac{h(p_1,p_2,C+\Delta C)-h(p_1,p_2,C)}{\Delta C}, \tag{4.37}$$

если величина ΔC относительно мала.

Из **(4.33)** и **(4.37)** следует, что

$$\frac{h(p_1,p_2,C+\Delta C)-h(p_1,p_2,C)}{\Delta C} \cong \hat{\lambda},$$

откуда получаем

$$h(p_1, p_2, C+\Delta C) - h(p_1, p_2, C) \cong \hat{\lambda}\Delta C. \tag{4.38}$$

Приближенное равенство **(4.38)** означает, что если лимит на ресурсы ***увеличится*** на одну единицу ($\Delta C = 1$, которая относительно мала), то максимальный выпуск фирмы ***увеличится*** на величину, приближенно равную множителю Лагранжа $\hat{\lambda}$, что естественно, ибо с ростом величины C фирма увеличит объем приобретаемых на рынке ресурсов и, следовательно, увеличит свой максимальный выпуск.

Следовательно, множитель $\hat{\lambda}$ Лагранжа позволяет (приближенно) оценить новый условный максимальный выпуск $h(p_1, p_2, C+\Delta C)$ фирмы, если лимит C на ресурсы увеличился на относительно малую величину ΔC:

$$h(p_1, p_2, C + \Delta C) \cong h(p_1, p_2, C) + \hat{\lambda}\Delta C. \tag{4.39}$$

Оценка $h(p_1, p_2, C + \Delta C)$ тем точнее, чем меньше ΔC.

Особо отметим, что нет необходимости решать новую задачу глобальной максимизации выпуска фирмы при новом лимите $C+\Delta C$ на ресурсы, ибо новый максимальный выпуск дает приближенная формула **(4.39)**.

В связи с тем, что множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$ скорее мал, из приближенного равенства **(4.38)** следует, что для значительного увеличения максимального выпуска требуется значительно увеличить ΔC (прирост лимита на ресурсы).

Докажем равенство **(4.33)**.

Конфигурация ресурсов $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, C)$; $\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, C)$ при подстановке в ограничение $p_1x_1+p_2x_2 = C$ обращает его в тождество по p_1, p_2, C, т.е.

$$p_1\varphi_1(p_1, p_2, C) + p_2\varphi_2(p_1, p_2, C) \equiv C. \tag{4.40}$$

В тождествах (но не в равенствах!) можно переходить к производным (к частным производным):

$$1 = \frac{\partial C}{\partial C} \equiv p_1\frac{\partial \varphi_1(p_1,p_2,C)}{\partial C} + p_2\frac{\partial \varphi_2(p_1,p_2,C)}{\partial C}. \tag{4.41}$$

Имеем (используя теорему о частных производных сложной функции):

$$\frac{\partial h(p_1,p_2,C)}{\partial C}=\frac{\partial f(\varphi_1(p_1,p_2,C),\varphi_2(p_1,p_2,C))}{\partial C}=\frac{\partial f(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial C}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial C}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial C}\overset{*}{=}\hat{\lambda}p_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial C}+\hat{\lambda}p_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial C}=\hat{\lambda}(p_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial C}+p_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial C})=\hat{\lambda},$$

т.е. получили равенство **(4.33)**.

В равенстве, отмеченном символом «*» (звездочка) были использованы формулы:

$$\frac{\partial f(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial x_1}=\hat{\lambda}\hat{x}_1\left(=\hat{\lambda}\varphi_1(p_1,p_2,C)\right);\quad\frac{\partial f(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial x_2}=\hat{\lambda}\hat{x}_2\left(=\hat{\lambda}\varphi_2(p_1,p_2,C)\right)$$

(см. **(4.12)** при $x_1=\hat{x}_1,\ x_2=\hat{x}_2,\ \lambda=\hat{\lambda}$).

Проанализируем и докажем первое равенство **(4.34)**.

Справедливо приближенное равенство:

$$\frac{\partial h(p_1,p_2,C)}{\partial p_1}\cong\frac{h(p_1+\Delta p_1,p_2,C)-h(p_1,p_2,C)}{\Delta p_1},\tag{4.42}$$

если величина Δp_1 относительно мала.

Из **(4.34)** и **(4.42)** следует, что

$$\frac{h(p_1+\Delta p_1,p_2,C)-h(p_1,p_2,C)}{\Delta p_1}\cong-\hat{x}_1\hat{\lambda},$$

откуда получаем приближенное равенство:

$$h(p_1+\Delta p_1,p_2,C)-h(p_1,p_2,C)\cong-\hat{x}_1\hat{\lambda}\,\Delta p_1.\tag{4.43}$$

Приближенное равенство **(4.43)** означает, что если цена единицы первого ресурса ***увеличится*** на одну единицу ($\Delta p_1=1$ и эта единица относительно мала), то максимальный выпуск фирмы ***уменьшится*** на величину, приближенно равную $\hat{x}_1\hat{\lambda}$, что естественно, ибо при повышении цены на первый ресурс фирма его приобретет в меньшем объеме, что, в свою очередь, уменьшит ее максимальный выпуск.

Следовательно, произведение $\hat{x}_1\hat{\lambda}$ позволяет (приближенно) оценить новый максимальный выпуск фирмы $h(p_1+\Delta p_1,p_2,C)$, если цена единицы первого ресурса увеличится на относительно малую величину Δp_1:

$$h(p_1+\Delta p_1,p_2,C)\cong h(p_1,p_2,C)-\hat{x}_1\hat{\lambda}\,\Delta p_1.\tag{4.44}$$

Оценка $h(p_1+\Delta p_1,p_2,C)$ тем точнее, чем меньше Δp_1.

Аналогично предыдущему случаю нет необходимости решать новую задачу глобальной максимизации выпуска при новой цене $p_1 + \Delta p_1$ на единицу первого ресурса, ибо новый глобальный максимальный условный выпуск $h(p_1 + \Delta p_1, p_2, C)$ дает (приближенно) формула **(4.44)**.

Докажем первое равенство из **(4.34)**.

Найдем частные производные по p_1 всех слагаемых тождества **(4.40)**:

$$p_1 \frac{\partial \varphi_1(p_1, p_2, C)}{\partial p_1} + \varphi_1(p_1, p_2, C) + p_2 \frac{\partial \varphi_2(p_1, p_2, C)}{\partial p_1} = \frac{\partial C}{\partial p_1} = 0,$$

откуда получаем

$$p_1 \frac{\partial \varphi_1(p_1, p_2, C)}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi_2(p_1, p_2, C)}{\partial p_1} = -\varphi_1(p_1, p_2, C). \qquad \mathbf{(4.45)}$$

На основании теоремы о частных производных сложной функции имеем:

$$\frac{\partial h(p_1, p_2, C)}{\partial p_1} = \frac{\partial f(\varphi_1(p_1, p_2, C), \varphi_2(p_1, p_2, C))}{\partial p_1} = \frac{\partial f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial p_1} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} \overset{*}{=} \hat{\lambda} p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + \hat{\lambda} p_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} = \hat{\lambda}\left(p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1}\right) =$$

$$= -\hat{\lambda} \varphi_1(p_1, p_2, C) = -\hat{\lambda} \hat{x}_1,$$

ибо $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, C)$.

Таким образом, первое равенство **(4.34)** доказано. Второе равенство **(4.34)** доказывается аналогично.

Равенство (*) аналогично равенству (*) в доказательстве равенства **(4.33)**.

Равенства **(4.35)** и **(4.36)** анализируются и доказываются аналогично. Только в этом случае используются равенства **(4.24)** при

$x_1 = \breve{x}_1, \; x_2 = \breve{x}_2, \; \lambda = \check{\mu}$.

4.7. Максимизация выпуска фирмы и минимизация ее издержек в случае производственной функции с постоянной эластичностью замены ресурсов

Везде далее $a_0 > 0, \; a_1 > 0, \; a_2 > 0$.

Производственную функцию с постоянной эластичностью замены ресурсов (ПФ ПЭЗР) $f(x_1, x_2) = a_0(a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha})^{-q/\alpha}$ следует преобразовать так:

$$\left(\frac{f(x_1,x_2)}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} = a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha}.$$

Поэтому задача глобальной максимизации

$$f(x_1, x_2) \to \max,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = V$$

эквивалентна задаче глобальной минимизации (здесь $\alpha > 0, q > 0$)

$$a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha} \to \min,$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = V.$$

Для задачи минимизации выписываем функцию Лагранжа

$$L = a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha} + \lambda (V - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

и условия первого порядка для функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\alpha a_1 x_1^{-\alpha-1} - \lambda p_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\alpha a_2 x_2^{-\alpha-1} - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = V - p_1x_1 - p_2x_2 = 0.$$

Имеем:

$$\frac{-\alpha a_1 x_1^{-\alpha-1}}{-\alpha a_2 x_2^{-\alpha-1}} = \frac{-\lambda p_1}{-\lambda p_2} \Rightarrow \frac{x_2^{\alpha+1}}{x_1^{\alpha+1}} = \frac{p_1 a_2}{p_2 a_1} \Rightarrow x_2^{\alpha+1} = \frac{p_1 a_2}{p_2 a_1} x_1^{\alpha+1} \Rightarrow x_2 = \left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} x_1.$$

Подставив выражение для x_2 в ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 = V$, будем иметь:

$$0 = V - p_1x_1 - p_2\left(\frac{p_1a_2}{p_2a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} x_1 \Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{V\left(p_2a_1\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}{p_1\left(p_2a_1\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + p_2\left(p_1a_2\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{Vp_2^{\frac{1}{\alpha+1}} a_1^{\frac{1}{\alpha+1}}}{p_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{1}{\alpha+1}} \left((p_1^{\alpha}a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}} + (p_2^{\alpha}a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)} =$$

$$=V\left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\frac{1}{\left(p_1^{\alpha}a_1\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}+\left(p_2^{\alpha}a_2\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}=\varphi_1\left(p_1,p_2,V\right).$$

Для $\hat{x}_2$ имеем:

$$\hat{x}_2=\frac{\left(p_1a_2\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}{\left(p_2a_1\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}\hat{x}_1=\frac{V\left(p_1a_2\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}{p_1\left(p_2a_1\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}+p_2\left(p_1a_2\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}=$$

$$=V\left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\frac{1}{(p_1^{\alpha}a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}}+(p_2^{\alpha}a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}}}=\varphi_2(p_1,p_2,V).$$

Таким образом,

$$\hat{x}_1=\frac{V\left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}{a_1^{\frac{1}{\alpha+1}}p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}+a_2^{\frac{1}{\alpha+1}}p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}};$$

$$\hat{x}_2=\frac{V\left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}{a_1^{\frac{1}{\alpha+1}}p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}+a_2^{\frac{1}{\alpha+1}}p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}};$$

$$\hat{y}=h(p_1,p_2,V)=f(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=$$

$$=a_0\left[a_1\left(V\left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\frac{1}{(p_1^{\alpha}a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}}+(p_2^{\alpha}a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}}}\right)^{-\alpha}+\right.$$

$$\left.+a_2\left(V\left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\frac{1}{(p_1^{\alpha}a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}}+(p_2^{\alpha}a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}}}\right)^{-\alpha}\right]^{-\frac{q}{\alpha}}=$$

$$= a_0 \left[\frac{V^{-\alpha}}{\left((p_1^{\alpha} a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}} + (p_2^{\alpha} a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right)^{-\alpha}} a_1 \left(\frac{a_1}{p_1} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{V^{-\alpha}}{\left((p_1^{\alpha} a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}} + (p_2^{\alpha} a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right)^{-\alpha}} a_2 \left(\frac{a_2}{p_2} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{-\frac{q}{\alpha}} =$$

$$= a_0 \left[\frac{V^{-\alpha}}{((p_1^{\alpha} a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}} + (p_2^{\alpha} a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}})^{-\alpha}} \right]^{-\frac{q}{\alpha}} \left[a_1 \left(\frac{a_1}{p_1} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2 \left(\frac{a_2}{p_2} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right]^{-\frac{q}{\alpha}} =$$

$$= a_0 \frac{V^{q}}{\left((p_1^{\alpha} a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}} + (p_2^{\alpha} a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right)^{q}} (a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}})^{-\frac{q}{\alpha}} =$$

$$= a_0 V^{q} \left((p_1^{\alpha} a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}} + (p_2^{\alpha} a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right)^{-q} \left((p_1^{\alpha} a_1)^{\frac{1}{\alpha+1}} + (p_2^{\alpha} a_2)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right)^{-\frac{q}{\alpha}} =$$

$$= a_0 V^{q} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right)^{-q\frac{\alpha+1}{\alpha}} =$$

$$= a_0 V^{q} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\beta} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\beta} \right)^{-\frac{q}{\beta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(p_1, p_2, V) = a_0 V^{q} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\beta} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\beta} \right)^{-\frac{q}{\beta}},$$

где $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$.

При $\alpha \to 0$ ПФ ПЭЗР преобразуется в производственную функцию Кобба-Дугласа (ПФКД). При $-1 < \alpha < 0$ задача глобальной максимизации:

$$a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{q}{\alpha}} \to \max,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = V$$

эквивалентна задаче глобальной максимизации

$$a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha} \to \max,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = V.$$

Все выкладки, проведенные для случая $\alpha > 0$, сохраняют силу. Критическая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ функции Лагранжа, взятая без координаты $\hat{\lambda}$, т.е. точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, есть точка условного глобального максимума целевой функции $f(x_1, x_2) = a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-q/\alpha}$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$, что подтверждается с помощью наглядной геометрической интерпретации в случаях $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ и $-1 < \alpha < 0$ (рис. 4.14—4.16). При $\alpha \le -1$ полученные формулы для $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ использовать нельзя, как показывает наглядная геометрическая интерпретация в случаях $\alpha = -1$ и $\alpha < -1$ (рис. 4.17 и 4.18).

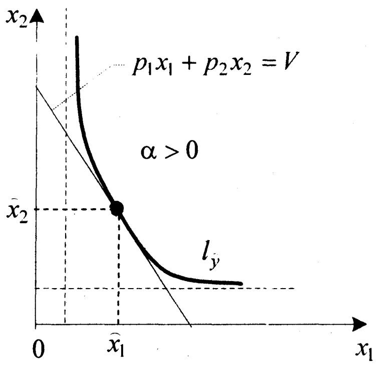


Рис. 4.14

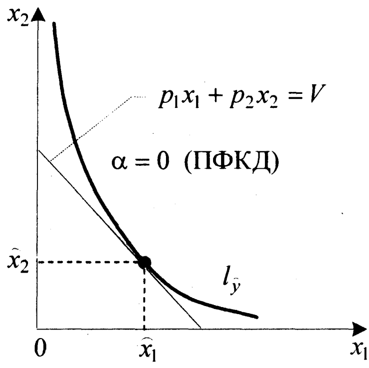


Рис. 4.15

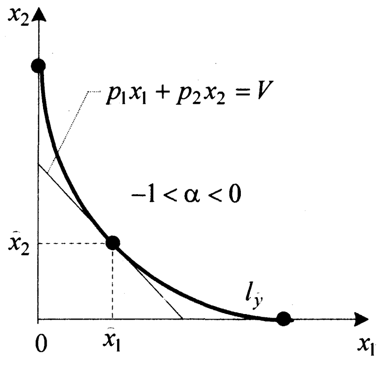
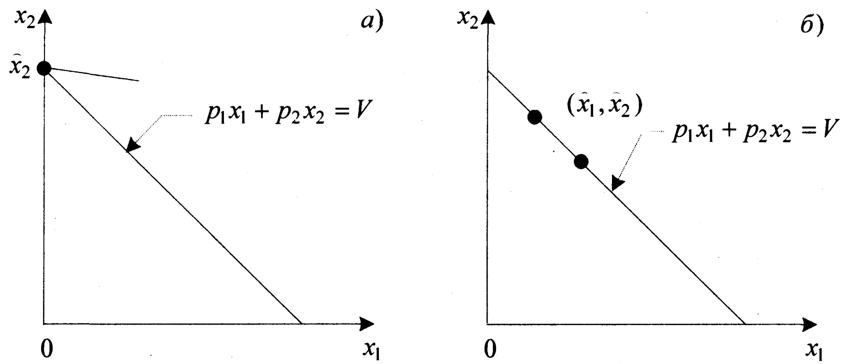


Рис. 4.16



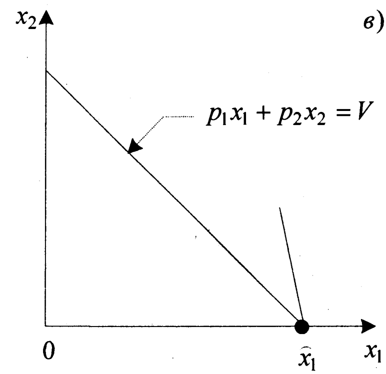


Рис. 4.17, *а—в*

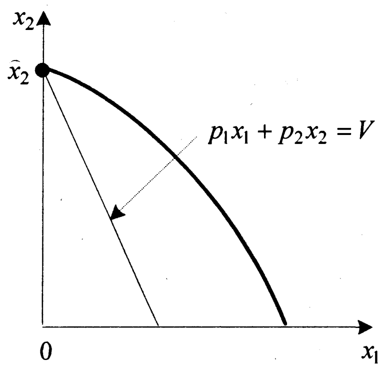


Рис. 4.18

Задача глобальной минимизации $(\alpha > -1,\ \alpha \neq 0, q > 0)$

$$p_1x_1 + p_2x_2 \to \min,$$

$$a_0\ (a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{q}{\alpha}} = \breve{y}.$$

эквивалентна задаче глобальной минимизации:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \to \min,$$

$$a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha} = \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}}.$$

Для задачи минимизации выписываем функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \mu) = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu\left(\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} - a_1x_1^{-\alpha} - a_2x_2^{-\alpha}\right),$$

и условия первого порядка для функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \mu a_1(-\alpha)x_1^{-\alpha-1} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \mu a_2(-\alpha)x_2^{-\alpha-1} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -a_1x_1^{-\alpha} - a_2x_2^{-\alpha} + \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} = 0.$$

Имеем:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mu a_1\alpha x_1^{-\alpha-1}}{\mu a_2\alpha x_2^{-\alpha-1}} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{x_2^{\alpha+1}}{x_1^{\alpha+1}} \Rightarrow \frac{x_2^{\alpha+1}}{x_1^{\alpha+1}} = \frac{p_1a_2}{p_2a_1} \Rightarrow x_2 = \left(\frac{p_1a_2}{p_2a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} x_1.$$

Подставив выражение для x_2 в ограничение, будем иметь:

$$0 = \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} - a_1x_1^{-\alpha} - a_2\left(\left(\frac{p_1a_2}{p_2a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} x_1\right)^{-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} - a_1x_1^{-\alpha} - a_2\left(\frac{p_1a_2}{p_2a_1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} x_1^{-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} = \left(a_1 + a_2\left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right) x_1^{-\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{-\alpha} = \frac{\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}}}{a_1 + a_2\left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}} = \frac{\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}}}{a_1 + a_2\left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} = \frac{\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} (p_1 a_2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{a_1 (p_1 a_2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2 (p_2 a_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{-\alpha} = \frac{\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} (p_1 a_2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{a_1 a_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2 a_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} = \frac{\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} (p_1 a_2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{a_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} a_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{-\frac{\alpha}{q}} \left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{1}{a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \Rightarrow$$

$$\breve{x}_1 = \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Для $\breve{x}_2$ имеем:

$$\breve{x}_2 = \left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \breve{x}_1 = \frac{p_1^{\frac{1}{\alpha+1}} a_2^{\frac{1}{\alpha+1}}}{p_2^{\frac{1}{\alpha+1}} a_1^{\frac{1}{\alpha+1}}} \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{p_1^{-\frac{1}{\alpha+1}}}{a_1^{-\frac{1}{\alpha+1}}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

т.е.

$$\breve{x}_2 = \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}};$$

$$\breve{C} = \breve{C}(p_1, p_2, \breve{y}) = p_1 \breve{x}_1 + p_2 \breve{x}_2 = p_1 \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \right.$$

$$+ a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Bigg)^{\frac{1}{\alpha}} + p_2 \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(p_1 \left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + p_2 \left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Таким образом,

$$\breve{C} = \breve{C}(p_1, p_2, \breve{y}) = \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{q}} \left(a_1^{\frac{1}{\alpha+1}} p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha+1}} p_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}.$$

При $\alpha \to 0$ ПФ ПЭЗР преобразуется в ПФКД.

Критическая точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\mu})$ функции Лагранжа, взятая без координаты $\breve{\mu}$, т.е. точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ есть точка условного глобального минимума целевой функции $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$ при наличии ограничения:

$$\breve{y} = a_0 (a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha})^{-\frac{q}{\alpha}},$$

что подтверждается с помощью наглядной геометрической интерпретации в случаях $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ и $-1 < \alpha < 0$ (рис. 4.19—4.21).

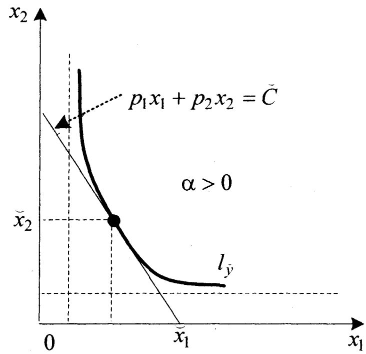


Рис. 4.19

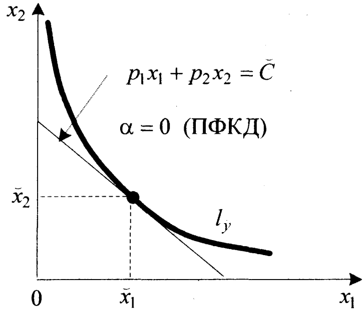


Рис. 4.20

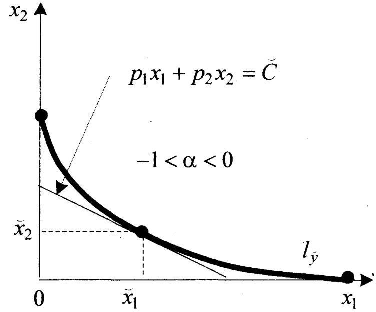


Рис. 4.21

При $\alpha = -1$ и $\alpha < -1$ полученные формулы для $\breve{x}_1$ и $\breve{x}_2$ использовать нельзя. Ситуация здесь аналогична ситуации, которая имела место для задачи глобальной максимизации функции $f(x_1, x_2) = a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = V$.

Вопросы и задания

1. Сформулируйте определения исходных понятий теории оптимизации производства.
2. Сформулируйте основную цель функционирования фирмы.
3. В чем состоит принципиальное отличие (в содержательных и в формальных терминах) в постановке задачи максимизации прибыли фирмы для случаев долговременного и краткосрочного временных промежутков?
4. Сформулируйте определение изокосты. Дайте экономическую интерпретацию следующему геометрическому факту: фиксированная точка (v_1, v_2) $(v_1 > 0, v_2 > 0)$ принадлежит прямой, имеющей уравнение $p_1x_1 + p_1x_2 = C_0$.
5. Пусть два набора (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых (используемых) ресурсов таковы, что для набора (v_1, v_2) издержки производства меньше, чем для набора (w_1, w_2). Как расположены относительно друг друга изокосты, соответствующие наборам (v_1, v_2), (w_1, w_2)? Является ли обязательным одновременное выполнение двух неравенств $w_1 > v_1$, $w_2 > v_2$?
6. Опишите взаимное расположение изокосты и изокванты, проходящих через точку (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы (случай долговременного промежутка). Дайте обоснование их взаимному расположению.
7. Опишите взаимное расположение изокосты и изокванты, проходящих через точку локального рыночного равновесия фирмы (случай краткосрочного промежутка).

8. Чему равна (предельная технологическая) норма замены одного ресурса (для определенности, первого) другим (для определенности, вторым) в точке локального рыночного равновесия в случае долговременного промежутка?
9. Что такое *функция спроса фирмы на ресурсы*?
10. Что такое *функция предложения выпуска со стороны фирмы*?
11. Что собой представляет первая версия задачи максимизации прибыли фирмы?
12. Что собой представляет вторая версия задачи максимизации прибыли фирмы?
13. Сформулируйте задачу максимизации объема выпускаемой продукции при лимите на приобретение ресурсов (факторов) на аналитическом языке и на геометрическом языке (в случаях долговременного и краткосрочного промежутков).
14. Опишите аналитическое (для случая долговременного промежутка) и геометрическое (для случаев долговременного и краткосрочного промежутков) решение задачи вопроса *13*.
15. Сформулируйте задачу минимизации издержек производства при фиксированном объеме выпускаемой фирмой продукции на аналитическом языке и на геометрическом языке (для случаев долговременного и краткосрочного промежутков).
16. Опишите аналитическое (для случая долговременного промежутка) и геометрическое (для случаев долговременного и краткосрочного промежутков) решение задачи вопроса *15*.
17. Опишите взаимосвязь между задачами вопросов *13* и *15* (в случае долговременного промежутка).
18. Как определяется долговременная линия развития фирмы?
19. Как определяется краткосрочная линия развития фирмы?

5 Модели и задачи теории отраслевых рынков

Экономическая теория отраслевых рынков — сравнительно молодая область экономической науки, которая сформировалась в 30-е и 40-е гг. XX века, опираясь на традиции Гарвардской, Чикагской и Австрийской научных школ. Она известна в зарубежной литературе под двумя близкими по смыслу названиями: «Industrial Economics» и «Industrial Organization». Как правило, термины «Industrial Economics» и «Industrial Organization» считаются синонимами, которые характеризуют рассматриваемую область экономической теории: первый — преимущественно в Европе, а второй — преимущественно в США.

Вопросы теории и экономики отраслевых рынков являются неотъемлемой частью подготовки студентов-экономистов в странах с рыночной экономикой. В России это направление начало разрабатываться лишь в середине 90-х годов XX века. В это же время были подготовлены первые программы для преподавания курсов по экономической теории отраслевых рынков.

Новая для России учебная дисциплина имеет дело прежде всего с проблемами рыночной экономики, хотя сравнительный анализ может затрагивать как централизованно планируемую, так и смешанную экономики. Объектом анализа являются отраслевые рынки, а в качестве предмета анализа большинство специалистов называют процессы их функционирования.

Современная теория отраслевых рынков (New Industrial Organization) строится на базе сочетания двух подходов к анализу отраслей и рынков: классического подхода на основе парадигмы «Структура — Поведение — Результат» и микроэкономического подхода. В данной главе рассматривается одна из ключевых тем, разрабатываемых в экономической теории отраслевых рынков в рамках микроэкономического подхода. Эта тема касается вопросов стратегического взаимодействия и поведения фирм в процессе принятия стратегических решений.

5.1. Методологические вопросы моделирования стратегического взаимодействия фирм на рынке

5.1.1. Вводные замечания

Стратегическое взаимодействие характерно не для всех типов рыночных структур и непосредственно связано с понятием несовершенной конкуренции на рынке. К случаям несовершенной конкуренции относятся рыночные структуры, которые нельзя считать полностью конкурентными и которые в то же время не контролируются продавцом-монополистом. Несовершенная конкуренция возникает тогда, когда на рынке конкурируют фирмы, две или более, каждая из которых имеет возможность влиять на цену.

Известны д в е ф о р м ы несовершенной конкуренции: монополистическая конкуренция и олигополия.

Монополистическая конкуренция предполагает, что значительное число фирм, каждая из которых удовлетворяет относительно небольшую долю рыночного спроса, конкурирует на рынке дифференцированного товара со свободным входом и выходом. Олигополия, напротив, отличается небольшим числом фирм, которые доминируют на рынке, где вход и выход могут быть затруднены.

Следует заметить, что монополистическую конкуренцию иногда рассматривают как особую форму олигополии[1], а олигополист может предлагать на рынке как однородный, так и дифференцированный продукт.

Олигополия — это тип строения рынка, на котором действует ограниченное число фирм, осознающих свою взаимозависимость. Олигополия является преобладающей формой рыночной структуры многих отраслей экономики, поэтому существует много примеров стратегического взаимодействия в условиях олигополии. Создано немало моделей олигополии, цель которых — исследовать процессы принятия стратегических решений и, по возможности, предсказать результаты взаимодействия фирм на рынке.

Модели олигополии последовательно развивают идеи классической теории олигопольного ценообразования, выдвинутые А. Курно в 1838 г. и Ж. Бертраном в 1883 г. Нет единой модели олигополии: модели олигополии могут иметь различную структуру, но существует несколько предпосылок, общих для всех моделей олигополии. Выделим д в е главные п р е д п о с ы л к и. Во-первых, возможность прямо или опосредованно воздействовать на цену предполагает убывающую кривую спроса на продукцию олигополии. Во-вторых, ценообразование на рынках олигополии предполагает взаимозависимость фирм-производителей (и одновременно продавцов) товара при принятии решений относительно их поведения на рынке.

Вторая предпосылка определяет наличие стратегического поведения или стратегического взаимодействия фирм на рынке. Это оз-

---

[1] См., например: *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика: промежуточный уровень, современный подход: Пер. с англ. — М.: ЮНИТИ, 1997.

начает, что поставщик товара имеет возможность предвидеть и учитывать в принятии решений поведение своих конкурентов.

Выбор каждого олигополиста зависит от поведения его соперников. Поэтому кривая спроса на продукцию отдельного олигополиста в момент принятия стратегических решений, как правило, неизвестна. Ключевое значение имеют предположения олигополиста относительно реакции конкурентов на действия друг друга.

Известны модели некооперированной и кооперированной олигополии. В условиях некооперированной олигополии конкурирующие на рынке фирмы принимают решения независимо друг от друга. В этом случае субъекты рынка не смогут принять решение, не оценив возможную реакцию соперников. В условиях кооперированной олигополии субъекты рынка вступают в сговор (тайный или открытый). В этом случае оценка возможной линии поведения соперников имеет принципиально другое значение.

Модели олигополии также отличаются в зависимости от структуры эндогенных и экзогенных переменных. Если олигополисты принимают решение об объеме выпуска продукции, то модель представляет *количественную олигополию.* Если олигополисты принимают решение о цене на продукцию, то модель рассматривает *ценовую олигополию.*

Модели олигополии, следуя предпосылке рационального поведения субъектов рынка, как правило, анализируют взаимодействие фирм, максимизирующих прибыль. Условия максимизации прибыли для количественной и ценовой олигополии различны.

Пусть на рынке олигополии конкурируют n фирм с объемами производства $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Отраслевой спрос известен и задан функцией $P = P(Q)$, где $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Прибыль каждого олигополиста на рынке количественной олигополии будет зависеть от структуры предложения всех участников рынка:

$$\Pi_i = \Pi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n). \qquad \textbf{(5.1)}$$

Условие максимизации прибыли предполагает выполнение равенства:

$$\frac{d\Pi_i}{dq_i} = \frac{d\Pi_i}{dq_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \right) = 0. \qquad \textbf{(5.2)}$$

Таким образом, при решении задачи на максимум прибыли каждый i-й олигополист должен учитывать значения коэффициентов $\frac{\partial q_j}{\partial q_i}$ (при $i \neq j$). Эти коэффициенты показывают, как изменяется выпуск каждого из конкурентов при изменении выпуска i-го олигополиста на единицу, и получили название *предполагаемых вариаций.*

В момент принятия решений олигополист, как правило, не знает, какова будет реакция соперников на его выбор уровня выпуска. Он должен спрогнозировать, какие решения примут другие фирмы, т.е. использовать ожидаемые (или предполагаемые) значения коэффициентов $\frac{\partial q_j}{\partial q_i}$ (при $i \neq j$). Только при наличии гипотетических оценок значений предполагаемых вариаций можно рассматривать вопрос об определенности равновесия на рынках олигополии.

Допустим, что олигополист владеет информацией о значении предполагаемых вариаций. В этом случае, решая задачу максимизации прибыли, он может выявить функциональную зависимость своего уровня выпуска от объемов выпуска конкурентов. Полученная функциональная зависимость определяет линии реакции для каждого олигополиста:

$$q_i = f(q_1, ..., q_{i-1}, q_{i+1}, ..., q_n). \quad \textbf{(5.3)}$$

Очевидно, что один и тот же уровень прибыли может достигаться при различных комбинациях объемов выпуска олигополистов. Множество таких комбинаций, соответствующих одному и тому же уровню прибыли, образуют ***изопрофиту***. Олигополист в процессе принятия решений рассматривает семейство изопрофит, каждая из которых отвечает одному из возможных уровней прибыли олигополиста. Линия реакции представляет наилучший для данного олигополиста ответ на действия конкурентов. Другими словами, ***линия реакции*** есть множество точек, соответствующих наиболее высокому уровню прибыли, которую может получить рассматриваемый олигополист при конкретной комбинации уровней выпуска конкурентов.

Теперь рассмотрим ситуацию ценовой олигополии. Прибыль олигополиста на рынке ценовой олигополии будет зависеть не только от цены, которую он установил на свою продукцию, но и от структуры цен, предложенных его конкурентами:

$$\Pi_i = \Pi_i (P_1, P_2, ..., P_n). \quad \textbf{(5.4)}$$

Условие максимизации прибыли для i-го олигополиста примет вид:

$$\frac{d\Pi_i}{dP_i} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial P_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial P_j} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial P_i} \right) = 0. \quad \textbf{(5.5)}$$

В процессе принятия решений олигополист должен иметь информацию о гипотетических значениях коэффициентов $\frac{\partial P_j}{\partial P_i}$ (при

$i \neq j$). Именно эти коэффициенты представляют предполагаемые вариации в случае ценовой олигополии и показывают, как изменяется цена, предлагаемая каждым из конкурентов при изменении цены i-го олигополиста на единицу.

Линии реакции и изопрофиты рассматриваются в n-мерном пространстве цен, а не выпусков. Линия реакции i-го олигополиста отражает функциональную зависимость уровня цены, которую он устанавливает на свою продукцию, от уровней цен, предлагаемых конкурентами:

$$P_i = \Psi(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n). \qquad \textbf{(5.6)}$$

Изопрофиты представляют множества комбинаций цен всех олигополистов, соответствующих одному и тому же уровню прибыли одного из них. ***Линия реакции*** — это наилучший для данного олигополиста ответ на действия конкурентов. Таким образом, в случае ценовой олигополии линия реакции есть множество точек, соответствующих наиболее высокому уровню прибыли, которую может получить рассматриваемый олигополист при данной комбинации уровней цен, предлагаемых конкурентами.

Равновесие на рынке олигополии, как количественной, так и ценовой, существует, если множество точек пересечения линий реакции всех олигополистов не является пустым.

5.1.2. Сравнительный анализ моделей и вопросы их практического применения

Модели, анализирующие условия равновесия на рынках олигополии, предлагают различные схемы стратегического взаимодействия олигополистов. При этом процессы принятия решений предполагают различные концепции формирования гипотез относительно поведения конкурентов. Прогноз реакции конкурентов оказывает влияние на равновесие на олигополистических рынках.

При написании данной главы сделан акцент на оценку возможности применения моделей в процессе принятия стратегических решений. В связи с этим возникла необходимость сравнительного анализа моделей.

Для того чтобы понять принципы формирования различных моделей олигополии и сравнить результаты моделирования процессов принятия решений, целесообразно для начала при одинаковых предпосылках рассмотреть модели дуополии, когда на рынке взаимодействуют только две фирмы. Этому посвящен параграф 5.2.

В параграфе 5.2 рассмотрены базовые модели дуополии. Это необходимо, главным образом, по двум причинам. Во-первых, любое продвижение в исследовании проблем олигополии, так или иначе, основано на этих моделях. Во-вторых, сравнительный анализ базовых моделей дуополии при одинаковых предпосылках имеет методологическое значение. Он выявляет их основные особенности, преимущества и недостатки, помогает осознать проблемы их использования в процессах принятия решений и оценить перспективы и направления их усовершенствования.

Количественная олигополия представлена моделями Курно, Стэкльберга, борьбы за лидерство. Ценовая олигополия рассмотрена на базе моделей Бертрана, Эджуорта и лидерства по цене. Все перечисленные выше модели относятся к классу моделей некооперированной олигополии.

Модели кооперированной олигополии представлены моделью Чемберлина и моделью картельного соглашения при условии максимизации прибыли отрасли. В параграфе 5.2 они анализируются в рамках количественной олигополии, хотя в этих моделях, как и в модели монополии, равновесные решения не зависят от выбора эндогенной переменной модели.

Анализ базовых моделей дуополии сделан при одних и тех же предпосылках, когда фирмы, зная линейную функцию рыночного спроса **(5.7)**, конкурируют между собой, поставляя на рынок однородную продукцию. При этом они преследуют одни и те же цели максимизации прибыли при одинаковых условиях по издержкам производства **(5.8)**, имея постоянные (равные предельным) средние издержки.

Анализ позволяет исследовать возможности и сравнить результаты различных вариантов стратегического взаимодействия фирм на рынке, а также оценить характеристики различных состояний рыночного равновесия. Кроме того, рассмотрение дуополии позволяет конструктивно использовать графические иллюстрации в процессе анализа.

При введенных предпосылках в любой из рассмотренных моделей дуополии[1] равновесие на рынке существует и определяется единственным образом. Однако характеристики рыночного равновесия зависят от выбора линии стратегического поведения, в том числе от того, какую стратегическую переменную выберет дуополист. Структура эндогенных и экзогенных переменных модели существенно влияет на результат стратегического взаимодействия фирм, что хорошо видно из табл. 5.1, в которую для сравнения включены параметры равновесия в условиях совершенной конкуренции и монополии.

Сравнительный анализ моделей, рассмотренных в параграфе 5.2, показывает, что равновесие в модели Бертрана обладает свойствами равновесия в условиях совершенной конкуренции (парадокс Бертрана). Цена опускается до уровня средних и предельных издержек,

---

[1] Заметим, что только в модели Эджуорта для достижения равновесия на рынке необходимы дополнительные условия.

а каждый дуополист обеспечивает половину конкурентного уровня выпуска продукции и не получает положительную прибыль.

С другой стороны, равновесие в условиях картельного соглашения соответствует равновесию в условиях чистой монополии. На рынке устанавливается монопольная цена, каждый дуополист обеспечивает половину монопольного уровня выпуска продукции и получает половину прибыли монополиста.

Те же характеристики имеет равновесие в модели Чемберлина. Так получается потому, что дуополисты Чемберлина принимают решения исходя из их общих интересов. При введенных предпосылках общие интересы легко идентифицировать. Фактически максимизируется совокупная прибыль отрасли и очевидно, что модель Чемберлина отражает ситуацию тайного (или неявного) сговора дуополистов.

При отказе от некоторых из введенных предпосылок (например, от равных условий по издержкам производства) следование общим интересам станет проблематичным даже в условиях явного сговора. В условиях тайного сговора возрастет вероятность неправильно оценить возможные действия конкурента.

Все остальные из рассмотренных моделей дуополии представляют результаты стратегического взаимодействия фирм, когда равновесная цена и равновесный объем выпуска продукции оказываются в пределах между их конкурентным и монопольным уровнями. Сравнительный анализ обращает внимание на следующие моменты.

В моделях Курно и Бертрана дуополисты принимают решения независимо друг от друга при нулевых предполагаемых вариациях, имеют равный доступ к информации о рынке, однако выбор стратегической переменной существенно меняет характер рыночного равновесия. Дуополисты Курно, в отличие от дуополистов Бертрана, получают положительную прибыль и обеспечивают рыночный спрос при цене выше средних и предельных издержек.

Один из главных вопросов экономико-математического моделирования — вопрос о существовании и единственности равновесного решения модели, — на первом этапе рассмотрен в рамках анализа методологических вопросов стратегического взаимодействия фирм на рынке несовершенной конкуренции при введении ограничений на производственные мощности. В качестве объекта анализа выбрана практически не изученная в отечественной литературе модель Эджуорта, который впервые показал важность введения ограничения на производственную мощность при принятии стратегический решений.

Для анализа можно было использовать модель любой степени сложности. Но чтобы выявить основные причинно-следственные связи между параметрами функционирования рынка и показать, как ограничения на производственные мощности конкурентов могут повлиять на результаты функционирования рынка, вполне достаточно рассмотреть одну из простейших.

Таблица 5.1.

Сравнительный анализ моделей дуополии

Тип рынка	*Равновесная цена*	*Равновесный выпуск отрасли*	*Равновесная прибыль отрасли*	*Равновесный выпуск фирмы*	*Равновесная прибыль фирмы*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Совершенная конкуренция	$P_c = c$	$Q_c = \frac{a-c}{b}$	0	$\frac{a-c}{2b}$	0
Монополия	$P_m = \frac{a+c}{2}$	$Q_m = \frac{a-c}{2b}$	$\Pi_m = \frac{(a-c)^2}{4b}$	$Q_m = \frac{a-c}{2b}$	$\Pi_m = \frac{(a-c)^2}{4b}$
Дуополия Курно	$p_c < \frac{a+2c}{3} < p_m$	$\frac{2(a-c)}{3b} = \frac{4}{3}Q_m$ $\left(= \frac{2}{3}Q_c\right)$	$\frac{2(a-c)^2}{9b} = \frac{8}{9}\Pi_m$	$\frac{a-c}{3b} = \frac{2}{3}Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{9b} = \frac{4}{9}\Pi_m$
Дуополия Чемберлина	$\frac{a+c}{2} = P_m$	$\frac{a-c}{2b} = Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{4b} = \Pi_m$	$\frac{a-c}{4b} = \frac{1}{2}Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{8b} = \frac{1}{2}\Pi_m$
Дуополия Стэкльберга	$p_c < \frac{a+3c}{4} < p_m$	$\frac{3(a-c)}{4b} = \frac{3}{2}Q_m$ $\left(= \frac{3}{4}Q_c\right)$	$\frac{3(a-c)^2}{16b} = \frac{3}{4}\Pi_m$	*Лидер*	
				$\frac{a-c}{2b} = Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{8b} = \frac{1}{2}\Pi_m$
				Последователь	
				$\frac{a-c}{4b} = \frac{1}{2}Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{16b} = \frac{1}{4}\Pi_m$

Окончание табл. 5.1

1	2	3	4	5	6
Борьба за лидерство	$p_c < \frac{a+4c}{5} < p_m$	$\frac{4(a-c)}{5b} = \frac{8}{5}Q_m$ $\left(= \frac{4}{5}Q_c\right)$	$\frac{4(a-c)^2}{25b} = \frac{16}{25}\Pi_m$	$\frac{2(a-c)}{5b} = \frac{4}{5}Q_m$	$\frac{2(a-c)^2}{25b} = \frac{8}{25}\Pi_m$
Дуополия Бертрана	$c = P_c$	$\frac{a-c}{b} = Q_c$ $(= 2Q_m)$	0	$\frac{a-c}{2b} = Q_m$	0
Дуополия Эджуорта при $q_k = \frac{a-c}{3b}$	$p_c < \frac{a+2c}{3} < p_m$	$\frac{2(a-c)}{3b} = \frac{4}{3}Q_m$ $\left(= \frac{2}{3}Q_c\right)$	$\frac{2(a-c)^2}{9b} = \frac{8}{9}\Pi_m$	$\frac{a-c}{3b} = \frac{2}{3}Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{9b} = \frac{4}{9}\Pi_m$
Картельное соглашение (сговор)	$\frac{a+c}{2} = P_m$	$\frac{a-c}{2b} = Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{4b} = \Pi_m$	$\frac{a-c}{4b} = \frac{1}{2}Q_m$	$\frac{(a-c)^2}{8b} = \frac{1}{2}\Pi_m$
Нарушение картельного соглашения	$p_c < \frac{3a+5c}{8} < p_m$	$\frac{5(a-c)}{8b} = \frac{5}{4}Q_m$	$\frac{15(a-c)^2}{64b} = \frac{15}{16}\Pi_m$	***Фирма-нарушитель***	
				$\frac{3(a-c)}{8b} = \frac{3}{4}Q_m$	$\frac{9(a-c)^2}{64b} = \frac{9}{16}\Pi_m$
				Другая фирма	
				$\frac{a-c}{4b} = \frac{1}{2}Q_m$	$\frac{3(a-c)^2}{32b} = \frac{3}{8}\Pi_m$

При анализе модели Эджуорта получены интересные результаты. Равновесие в модели Эджуорта[1] достигается именно при ограничении на производственные мощности фирм на уровне не выше равновесного объема выпуска дуополиста Курно ($q_i = \frac{a-c}{3b}$) при тех же предпосылках (5.7)—(5.9) модели. При этом, если ограничение устанавливается как раз на уровне равновесного объема выпуска дуополиста Курно $q_к = \frac{a-c}{3b}$, то все характеристики равновесия в модели Эджуорта полностью соответствуют характеристикам равновесия в модели Курно.

Заметим также, что при введенных в параграфе 5.2 предпосылках модель ценового лидерства будет работать только при введении ограничения на производственную мощность фирмы-последователя. При этом лидерство по цене будет логически оправдано, т.е. фирма-лидер будет получать прибыль больше, чем конкурент, только в том случае, если ограничение на производственную мощность фирмы-последователя не будет превышать равновесный объем выпуска дуополиста Курно.

Учитывая, что процессы принятия решений в модели Стэкльберга, при борьбе за лидерство (в случае количественной дуополии) и при нарушении картельного соглашения происходят на основе функций реакции Курно, можно сделать вывод, что модель Курно имеет важное методологическое значение для анализа стратегического взаимодействия фирм на рынках олигополии.

При введенных в параграфе 5.2 предпосылках нельзя считать реалистичными модели стратегического взаимодействия фирм по принципу «лидер — последователь». Ведь фирмы абсолютно идентичны, и трудно понять, почему одна из них может стать лидером, а другая — последователем. Модели интересны, прежде всего, для теоретического анализа.

Равновесие в модели Стэкльберга по сравнению с моделью Курно достигается при бóльшем объеме предложения в отрасли. Однако, несмотря на понижение рыночной цены, фирма-лидер обеспечивает себе в два раза бóльшую прибыль, чем фирма-последователь, поскольку реализует на рынке в два раза больше продукции.

Естественно предположить, что каждая фирма захочет быть лидером, но тогда проиграют обе. Во-первых, на это указывает анализ равновесия в ситуации борьбы за лидерство. Во-вторых, если обе фирмы примут решение установить объем выпуска продукции, ко-

---

[1] Имеется в виду не равновесие по Бертрану, а равновесие в случаях, когда ограничения на производственные мощности фирм действительно существуют.

торый равен объему выпуска фирмы-лидера, то цена упадет до уровня средних и предельных издержек, а прибыль каждого дуополиста снизится до нуля.

При предпосылках **(5.7)—(5.9)** борьба за лидерство, очевидно, невыгодна для обеих фирм. Конкуренты вынуждены будут отказаться от притязаний на лидерство и, по возможности, вступят в картельное соглашение. Даже при нарушении картельного соглашения цена установится на более высоком уровне, чем при борьбе за лидерство, а обе фирмы выиграют в прибыли.

Заметим, что при нарушении картельного соглашения уровень цены оказывается выше, чем в условиях равновесия по Стэкльбергу. При этом фирма-нарушитель получает прибыль, превышающую равновесный уровень прибыли фирмы-лидера, а другая фирма имеет прибыль больше, чем фирма-последователь. Очевидно, что тайный или явный сговор выгоден для дуополистов.

Рассмотренные в параграфе 5.2 модели дополняют друг друга при анализе рынков дуополии. Равновесие на рынке будет устойчивым, если конкуренты правильно оценили действия друг друга в процессе принятия решений.

Слабость многих моделей дуополии в том, что производственные мощности дуополистов могут изменяться произвольно без каких-либо дополнительных затрат. Даже предельные и средние издержки при этом не изменяются. Тем не менее такие модели важны с методологической точки зрения.

Кроме того, ситуация покажется более реалистичной, если принять, что определение уровня выпуска соответствует выбору производственной мощности. При такой предпосылке можно понять, почему одна фирма способна стать лидером, а другая вынуждена будет стать последователем. Вопрос в том, кто первым сделает инвестиции в производственные мощности. Выбор производственной мощности оказывается важной стратегической переменной. Именно поэтому ограничение на производственную мощность часто вводится в модели олигополии.

Все рассмотренные в параграфе 5.2 модели, как правило, классифицируются, как однопериодные статические модели, в которых фирмы принимают решения одновременно. В рамках анализа моделей дуополии процесс принятия решений иногда рассматривается в виде последовательности «шагов», а иногда включает принятие решений в последовательные моменты времени. Описанные процедуры принятия решений в принципе не согласуются с понятием однопериодной статической модели. Однако в большинстве случаев можно считать, что выделение «шагов», или моментов времени, условно и сделано, чтобы облегчить понимание структуры процессов принятия стратегических решений, которые происходят в сознании субъектов рынка.

Этапы принятия решений фактически имитируют ситуации, когда дуополист может изменить значение стратегической переменной в зависимости от возможного выбора конкурента. Например, пошаговый процесс принятия решений в модели Чемберлина показывает, что при введенных предпосылках никто не захочет быть последователем в модели Стэкльберга, а значит, равновесие по Стэкльбергу неустойчиво.

Пошаговый процесс принятия решений в модели Чемберлина, на первый взгляд, приводит к противоречию. Странно, что на третьем шаге первая фирма вдвое уменьшает свой выпуск. Ведь при этом уровень ее прибыли остается без изменения, тогда как конкурент может вдвое увеличить свою прибыль. Противоречие исчезает, если вспомнить, что выделение «шагов» условно и фирмы принимают решения одновременно. Тогда станет ясно, что фирмы могут поменяться ролями и что в их общих интересах получить одинаковую прибыль.

Необходимость выделения этапов принятия решений показывает трудности описания процессов стратегического взаимодействия фирм с помощью однопериодных статических моделей. Наиболее четко эта проблема видна при рассмотрении модели Эджуорта. Заметим, что именно анализ стратегического поведения в различные моменты времени позволяет объяснить часто наблюдаемый в реальной действительности разброс цен на однородную продукцию.

Принятие решений на различных этапах экономического анализа связано с оценкой предполагаемых вариаций. Большинство моделей, рассматриваемых в параграфе 5.2, прямо или опосредованно основано на исходной предпосылке о нулевых предполагаемых вариациях. (В частности, потому, что предпосылка о нулевых предполагаемых вариациях необходима при построении функций реакции Курно.)

Проблема в том, что такая предпосылка приводит к внутренней противоречивости моделей. Противоречие можно сформулировать следующим образом. Каждый дуополист осознанно делает допущение о нулевой предполагаемой вариации на различных этапах процесса принятия решений. Тем не менее при этом он анализирует ответную реакцию конкурента, а также на примере своего собственного стратегического поведения видит ошибочность такой предпосылки и понимает, что она неверна.

Считается, что только в состоянии равновесия фирмы не будут пытаться изменить значения стратегических переменных модели, поскольку именно в условиях равновесия фирмы получат максимально возможную прибыль, а, следовательно, равновесие желательно для обеих фирм.

Но как раз в точке равновесия можно проиллюстрировать противоречивость или, как иногда говорят, несовместимость нулевых предполагаемых вариаций. С одной стороны, пошаговый процесс принятия решений приводит в точку равновесия при предпосылке о нулевых предполагаемых вариациях. С другой стороны, если продифференцировать функции реакции Курно, то очевидно, что в любой точке линии реакции, в том числе в точке равновесия, предполагаемые вариации не равны нулю (см., например, **(5.44)**, **(5.57)**).

Проблема широко обсуждается в литературе. В некоторых случаях предполагаемые вариации включаются в модель в качестве эндогенных переменных. Идет поиск совместимых предполагаемых вариаций.

Для всех рассмотренных моделей также важна предпосылка об однородности выпускаемой продукции. Например, в случае дифференциации продукции ценовая война в модели Бертрана станет менее жесткой, и дуополисты Бертрана смогут установить равновесную цену выше средних и предельных издержек.

Дальнейший анализ стратегических взаимодействий фирм на рынке предполагает рассмотрение моделей олигополии и может идти по нескольким направлениям. В связи с этим в параграфе 5.3 вводится в рассмотрение большее число фирм и предусматривается отказ от жесткой предпосылки об идентичности фирм по издержкам производства.

Модели олигополии Курно, Бертрана и Стэкльберга обобщают соответствующие модели дуополии. Модель Форхаймера представляет одну из базовых моделей ценовой олигополии, построенных по принципу «лидер—последователь». Возможности организации картельного соглашения рассматриваются на примере формирования двух типов картелей: при условии максимизации совокупной прибыли отрасли и при условии раздела рынка между членами картеля. (Третий тип из наиболее известных картелей — при условии раздела монопольной прибыли между членами картеля — практически ничем не отличается от равновесного решения в модели Чемберлина и поэтому не рассматривается.)

Сравнительный анализ моделей олигополии во многом подтверждает выводы, сделанные при анализе моделей дуополии. Частные случаи решения моделей олигополии Курно и Бертрана охватывают возможные варианты рыночного равновесия от монополии (при $n = 1$) до совершенной конкуренции (при $n \to \infty$).

Обобщение моделей дуополии показывает, как изменяются параметры рыночного равновесия при переходе к олигополии. Конкуренция по принципу «лидер—последователь» в моделях Стэкльберга и Форхаймера на определенном этапе и при определенных условиях также может привести к рынку монополии или совершенной конкуренции. Однако, чтобы выявить подобные тенденции, следует анализировать указанные модели в динамике и с учетом возможного входа фирм на рынок или ухода конкурентов с рынка.

В обеих моделях ситуация существенно зависит от асимметрии фирм по издержкам. Так в модели Стэкльберга при существенном увеличении числа фирм-последователей (при $n \to \infty$) структура рынка оказывается близкой к структуре рынка совершенной конкуренции, если издержки всех фирм на рынке идентичны. Если же лидер имеет преимущество в издержках производства, то равновесная цена снижается, но приближается к среднему арифметическому средних издержек лидера и последователя $\left(p \to \dfrac{c_l + c_f}{2}\right)$. Такой уровень цены превышает средние издержки лидера, но ниже средних издержек последователя, поэтому конкурентоспособность последователей падает. Часть последователей неминуемо должна уйти с рынка. Позиция лидера при этом укрепится.

Анализ ситуаций в модели Форхаймера, сделанный в параграфе 5.3, показывает, что сила рыночной власти доминирующей фирмы и тип равновесия на рынке в долгосрочном периоде также существенно зависят от соотношения между издержками доминирующей фирмы и фирм конкурентного окружения. Кроме того, рыночная власть доминирующей фирмы в долгосрочном периоде зависит от числа фирм, способных войти на рынок, а также от скорости (интенсивности) входа на рынок новых фирм. Таким образом, стратегическое поведение доминирующей фирмы зависит от степени свободы входа на рынок фирм конкурентного окружения. При свободном входе на рынок доминирующая фирма может сохранять значительную долю рынка только при существенном преимуществе в издержках производства или при наличии других преимуществ перед фирмами конкурентного окружения.

В параграфе 5.3 модели подобраны так, чтобы стали ясны проблемы, связанные с усложнением структуры моделей. Становится ясно, что может появиться проблема существования и единственности равновесного решения в модели. Возникает необходимость введения в рассмотрение потенциальной конкуренции. Оказывается актуальным вопрос о переходе от однопериодных к многопериодным моделям олигополии.

Многопериодные модели позволяют учесть обучение фирм, которые наблюдают за поведением конкурентов на протяжении длительного периода времени. Так, для определения устойчивости картеля лучше использовать многопериодные модели. Ведь агрессивные действия фирмы в одном периоде чаще вызывают возмездие не сразу, а в последующих периодах. Кроме того, сама идея оценки реакции соперников приобретает смысл. Появляется возможность решить проблему совместимости предполагаемых вариаций в моделях олигополии.

Многопериодные модели олигополистической конкуренции позволяют рассматривать предполагаемые вариации в качестве эндогенных переменных модели, анализировать эффекты спроса, вводить разные стратегические переменные. Например, в первом периоде фирмы могут принимать решение об объемах производства, а во втором — об уровне цены. Исследование многопериодных моделей требует глубокой математической подготовки, в частности, в области теории игр, которая является эффективным инструментом анализа взаимодействия фирм на рынке.

Таким образом, краткий аналитический обзор и сравнительный анализ основных моделей стратегического взаимодействия фирм на рынке показывают, что существенную роль имеют три элемента ценообразования: условия по спросу, условия по издержкам производства и предположение о максимизации прибыли. Модели имеют различную структуру эндогенных и экзогенных переменных. Существенным является выбор стратегической переменной модели. Фирмы могут принимать решения независимо или по согласованию друг с другом в рамках как однопериодных, так и многопериодных моделей. Стратегическое поведение изменяется в зависимости от характеристики продукта (его однородности или дифференцированности) и от наличия потенциальной конкуренции.

Сравнительный анализ моделей выявляет их основные особенности, преимущества и недостатки, помогает осознать проблемы их использования в процессах принятия стратегических решений и оценить перспективы и направления их усовершенствования.

Развитие и усовершенствование моделей ставят проблему существования и единственности равновесного решения, а также изменяют роль предполагаемых вариаций, включая возможность их эндогенного задания в модели. Особое место занимает переход к моделированию стратегического взаимодействия фирм в условиях неопределенности.

Принятие решений в условиях неопределенности может существенно изменить представление исследователя об известных схемах ценообразования в условиях определенности. Введение неопределенности позволяет получить выводы, которые в соответствии с общепринятой теорией не должны выполняться в случае максимизации прибыли в условиях определенности. Например, можно получить зависимость цены от изменения не только переменных, но и постоянных издержек. Разброс цен может иметь место даже в случае однородных продуктов.

Неопределенность можно вводить в модель поэтапно. Например, сначала ввести неопределенность только в предположения относительно поведения конкурентов, т.е. в предполагаемые вариации модели. Затем можно вводить неопределенность в условия спроса и/или в условия по издержкам производства в отрасли. Во всех случаях выводы и решения, полученные на основе моделей стратегического взаимодействия в условиях определенности, в той или иной степени трансформируются.

Одна из главных проблем экономико-математического моделирования — каким образом существующие теоретические и модельные построения соотносятся со схемами практического ценообразования в отраслях экономики. Возникает вопрос, какие теоретические результаты получают подтверждение в процессе реального функционирования отраслей и рынков. Возможности применения экономико-математических моделей для анализа стратегического взаимодействия фирм в процессе реального функционирования отраслей и рынков определяются, в частности, возможностями поиска равновесных решений. Одновременно возникает проблема существования и единственности решения применяемой на практике модели.

В России рынки находятся на начальном этапе становления и развития. Однако есть богатый опыт исследования рыночных отношений в Западной Европе, Соединенных Штатах Америки и в других странах. Так, например, сравнительный анализ отраслевых рынков США показывает широкое многообразие моделей поведения фирм и функционирования рынков: от конкурентного ценообразования в зерновой отрасли до картелизации и завоевания монопольных позиций в нефтедобывающей промышленности или в фармацевтике, а также успешное взаимодействие фирм в условиях олигополии в сталелитейной и автомобильной промышленности.

Следует заметить, что идентификация рыночных структур в таких отраслях экономики США, как зерновое хозяйство, нефтедобывающая промышленность, нефтепереработка, сталелитейная промышленность, отрасль компьютерных технологий, автомобильная промышленность, фармацевтика, отрасль пивоварения, вызывала определенные трудности у исследователей на разных этапах развития отрасли. Отраслевая организация постоянно претерпевает изменения, иногда очень значительные.

Идентификация рыночной структуры, прежде всего, имеет важное значение для получения достоверных прогнозов отраслевого развития, для ответа на вопрос, как будет вести себя отрасль (рынок) в той или иной ситуации (например, в ситуациях кризиса, стабилизации или подъема). Кроме того, рыночная структура оказывает существенное влияние на процессы ценообразования в отрасли, на соотношение ценовых эластичностей спроса и предложения и монопольной власти фирм.

Рассмотрение процессов реального функционирования отраслей и рынков позволяет проследить поведение фирм на рынках однородного и дифференцированного продуктов. Одновременно можно выявить возможности рекламы и преимущества первого хода, а также оценить эффективность различных форм государственного регулирования, как в краткосрочном, так и в долгосрочном периодах.

Практика предлагает большое разнообразие систем ценообразования. Далеко не всегда ситуации в ценообразовании соответствуют модельным построениям и теоретическим разработкам. Предпосылка о рациональном поведении фирм, максимизирующих прибыль, является слабым местом экономико-математических моделей стратегического взаимодействия фирм на рынке.

В эмпирических исследованиях не существует общепринятого взгляда на то, как фирмы принимают решения о ценах. Зависимости, постулируемые в теории, могут быть не подтверждены при анализе практики реального функционирования. Например, эмпирически не удается идентифицировать связь между концентрацией и гибкостью цен во времени.

Практика ценообразования во многих отраслях мировой экономики свидетельствует, что одним из важных параметров при принятии стратегических решений является уровень используемой производственной мощности. В большинстве отраслей ввод производственных мощностей требует не только значительных капиталовложений, но также не может быть осуществлен за короткий промежуток времени. Создание резервных производственных мощностей позволяет установить барьеры для входа на рынок новых фирм, что снижает уровень потенциальной конкуренции для фирм, уже действующих на рынке. Становится ясно, почему исследователи отраслевых рынков с давних пор уделяют пристальное внимание анализу стратегического взаимодействия фирм в условиях ограничения на производственные мощности.

Особое место занимает проблема идентификации издержек. В экспертных оценках превалируют методы, основанные на средних издержках. При этом фирма не обязательно ориентируется на минимизацию издержек, а значит, не обязательно преследует цель максимизации прибыли. Однако большинство исследователей сходится во мнении, что цены реагируют на изменение издержек и спроса в целом именно так, как это предсказывает теория. Такие выводы подтверждаются значительным числом эконометрических исследований по отраслям и рынкам экономики США и позволяют надеяться на возможность получения достоверных прогнозов изменения цен во времени.

Теоретические и модельные построения только в определенной степени отражают процессы практического ценообразования в отраслях экономики. Однако они позволяют выявить наиболее существенные параметры функционирования отраслей и рынков, показать их влияние на эффективность отраслевого функционирования. Математические модели только предлагают варианты решения. Так, например, они не могут заменить согласование решений в процессе переговоров между членами картеля. Математическая задача может вообще не иметь решения, например: в условиях рыночного спроса **(5.7)** при линейных издержках производства **(5.9)**, когда предельные издержки фирм равны средним, но не равны между собой ($c_1 \neq c_2$). Но это совсем не означает, что фирмы не могут заключить картельное соглашение. Все зависит от ситуации на конкретном рынке.

Рынок с доминирующей фирмой считается одной из основных рыночных структур в теории отраслевых рынков и широко исследуется как в теории, так и на практике. Поэтому остановимся на анализе рынка с доминирующей фирмой подробнее.

На практике доминирование признается, если доминирующая фирма контролирует от 50 до 90% рынка. Существует альтернативная точка зрения, что доминирование следует определять в зависимости от возможности получения стратегических преимуществ за счет конкурентов, а высокая доля рынка — лишь одно из следствий стратегического поведения доминирующей фирмы[1]. Такое определение трудно использовать, поскольку стратегические преимущества сложно оценить как на перспективу, так и по факту. Кроме того, фирмы, отнюдь не являющиеся доминирующими, также стремятся получить стратегические преимущества за счет своих конкурентов. С другой стороны, высокая рыночная доля не является следствием только стратегического поведения. В итоге теория отраслевых рынков в основном придерживается определения доминирования в зависимости от контролируемой доли рынка.

История развития отраслевых рынков в США и Западной Европе показывает, что на практике рынок с доминирующей фирмой встречается, не столь часто, поскольку большую долю рынка трудно получить, а затем удерживать. Однако фирмы, которым это удалось, успешно функционируют в течение многих лет. Такие фирмы, как «Kodak», «Microsoft», «IBM», «DeBeers», — примеры ярко выраженного доминирования в отдельные периоды времени.

---

[1] См. *Geroski P.*, *Jacquemin A.* Dominant firms and their alleged decline // International Journal of Industrial Organization, 1984, 2.

В теории наиболее широко рассматриваются модели доминирующей фирмы с конкурентным окружением. Существуют попытки моделирования как ценового, так и неценового стратегического поведения доминирующей фирмы. При этом фирма называется *доминирующей*, если она одна устанавливает цену на рынке, где помимо нее функционируют фирмы меньшего размера, которые согласны работать при данной цене. Меньшие фирмы, работающие на рынке при цене, заданной доминирующей фирмой, называются *конкурентным окружением.* Каждая фирма конкурентного окружения в отличие от доминирующей фирмы имеет малую долю рынка, хотя в совокупности фирмы конкурентного окружения могут иметь значительную долю рынка.

Существуют, по крайней мере, три причины возникновения рынка доминирующей фирмы с конкурентным окружением.

Во-первых, доминирующая фирма может иметь более низкие издержки, чем фирмы из конкурентного окружения в силу следующих обстоятельств:

- за счет технологических преимуществ, которые могут быть закреплены патентом;
- за счет обучения опытом, если доминирующая фирма раньше появилась на рынке;
- за счет экономии на масштабе производства, если доминирующая фирма смогла закрепить за собой значительную долю рынка;
- за счет льгот, предоставляемых государственными службами, например, для фирм, представляющих на рынки новые товары или услуги.

Во-вторых, доминирующая фирма может предлагать на рынок торговую марку, которая предпочтительнее для потребителей, чем продукция фирм конкурентного окружения. Преимущество может быть достигнуто за счет репутации, полученной за долгое время работы на рынке или в результате рекламной кампании.

В-третьих, несколько фирм могут согласовать совместную деятельность и стать доминирующей фирмой на рынке, в частности, это может быть картель, доминирующий на рынке.

Известен также барометрический тип ценового лидерства, когда все фирмы отрасли признают, что доминирующая фирма наилучшим образом предвидит изменения ситуации на рынке (считают ее своеобразным барометром рыночной ситуации).

Таким образом, возможность появления и устойчивость функционирования доминирующей фирмы определяются главным образом двумя факторами: процессами слияния (поглощения) и инновационными процессами в отрасли. Монопольные доходы доминирующей фирмы привлекают конкурентов, один из которых может со временем вытеснить доминирующую фирму за счет внедрения новых технологий и новых продуктов. В практике функционирования отраслей и рынков можно наблюдать следующий цикличный процесс:

«Нововведения → Доминирование →
→ Монопольный доход → Стимулирование инноваций →
→ Доминирование → Монопольный доход → ...»,

который исследуется в динамических моделях рынков с доминирующей фирмой.

В данной главе рассмотрена одна из базовых моделей — модель доминирующей фирмы с конкурентным окружением, которую часто называют губительной для доминирующей фирмы, поскольку пассивность доминирующей фирмы может привести к ее вытеснению с рынка. В модели доминирующая фирма устанавливает цену, максимизируя свою прибыль на основе полной информации о рыночном спросе, о функции предложения конкурентного окружения и, естественно, о собственных издержках производства. Фирмы конкурентного окружения максимизируют прибыль в краткосрочном периоде при цене, предложенной доминирующей фирмой.

Доминирующая фирма может ограничить свой выпуск, чтобы повысить цену. Но при этом увеличится выпуск фирм конкурентного окружения, поскольку с ростом цены их функция предложения возрастает. В результате объем предложения товара на рынке будет выше, чем ожидала доминирующая фирма, а рыночная цена будет ниже монопольной. Таким образом, при разработке стратегии своего поведения доминирующая фирма должна учитывать реакцию фирм конкурентного окружения.

Если доминирующая фирма не может управлять поведением фирм конкурентного окружения, то она должна позволить им выпускать столько продукции, сколько им выгодно при данной цене. Так обосновывается одна из предпосылок базовой модели. Если цена не будет слишком высока, то фирмы конкурентного окружения не смогут покрыть весь рыночный спрос. Следовательно, доминирующая фирма сможет действовать как монополист на остаточном спросе.

Выводы, полученные с помощью экономико-математических моделей, подтверждаются практикой реального функционирования отраслей и рынков. Например, в 1993 г. корпорация «NEC», которая контролировала половину рынка персональных компьютеров в Японии, вынуждена была сильно снизить цены на свою продукцию в силу возрастающей потенциальной конкуренции со стороны фирм конкурентного окружения из США.

В статической базовой модели доминирующей фирмы с конкурентным окружением нет неопределенности. На рынке любое изменение рыночной цены ведет к изменению объема предложения конкурентного окружения. Доминирующая фирма фактически фиксирует цену, но работает только на остаточном спросе, позволяя фирмам конкурентного окружения предлагать на рынок столько продукции, сколько им выгодно и сколько возможно при данной цене. Именно поэтому, как видно из анализа, проведенного в параграфе 5.3, с увеличением числа фирм конкурентного окружения рыночная доля доминирующей фирмы падает и может наступить момент, когда на рынке не останется ниши для доминирующей фирмы. В силу этого на практике доминирующие фирмы стараются использовать другие, более активные, стратегии поведения. У доминирующей фирмы, как правило, есть явные или скрытые рычаги для того, чтобы заставить конкурентное окружение принять установленную цену. Кроме того, во многих случаях она может блокировать вход на рынок.

Иногда с целью регулирования или блокирования входа на рынок стратегическое поведение доминирующей фирмы может привести к установлению цены ниже ее средних переменных издержек с последующим увеличением цены для компенсации понесенных убытков. Такая стратегия связана с большим риском. Известно, что риск становится меньше в двух случаях. Во-первых, если рынок сегментирован: так, при территориальной сегментации рынка можно использовать существенное понижение цены на одном сегменте, не затрагивая цены на других сегментах рынка. Во-вторых, риск может стать значительно меньше в случае неопределенности или асимметричной информации, когда фирмы конкурентного окружения (работающие на рынке или желающие войти на рынок) меньше осведомлены относительно изменений рыночного спроса и/или других параметров рынка, чем доминирующая фирма.

Динамические модели ценообразования позволяют доминирующей фирме сделать выбор. Если она выбирает высокую цену и высокие доходы в краткосрочном периоде, то она столкнется с возрастающей конкуренцией и получит низкие доходы в долгосрочном периоде. Часто именно такая стратегия выгодна на практике, особенно при внедрении новых марок продукции. Поэтому практика функционирования рынков с доминирующими фирмами в США и в Западной Европе свидетельствует о существующих тенденциях снижения рыночной власти доминирующих фирм. Однако в среднем это происходит достаточно медленно. Упадок в основном был спровоцирован либо технологическим преимуществом вновь вошедшей на рынок фирмы, либо неправильным стратегическим поведением доминирующей фирмы.

Некоторые динамические модели исходя из условия максимизации совокупной приведенной к текущему моменту времени прибыли доминирующей фирмы формируют комбинированные стратегии ее поведения[1]. Полученные в результате расчетов, траектории изменения цен позволяют устанавливать оптимальную для доминирующей фирмы интенсивность входа—выхода на данном рынке в каждый момент времени. Оптимальная траектория изменения цен зависит, как минимум, от трех факторов. Во-первых, от соотношения между издержками доминирующей фирмы и фирм конкурентного окружения. Во-вторых, от ставки дисконта для расчета совокупной приведенной к текущему моменту времени прибыли доминирующей фирмы. В-третьих, от того, насколько быстро фирмы конкурентного окружения способны увеличить предложение, если цена обеспечивает им высокий доход.

В заключение скажем несколько слов о неценовых стратегиях доминирующей фирмы. Такие стратегии могут включать инвестиции в резервные производственные мощности, разработку и продвижение на рынок новых марок продукции, проведение широкой рекламной кампании, как можно более полное патентование продукции и технологии ее производства. Неценовые стратегии связаны с риском дополнительных издержек для доминирующей фирмы, причем компенсация дополнительных издержек часто происходит по прошествии длительного периода времени. К тому же успех стратегии создания резервных производственных мощностей существенно зависит от скорости изменения технологии производства продукта. Тем не менее практика функционирования рынков с доминирующими фирмами доказывает, что длительное доминирование, как правило, обусловлено одновременным использованием как ценовых, так и неценовых стратегий, т.е. стратегическими маневрами доминирующих фирм. Использование как ценовых, так и неценовых стратегий приносит конкурентные преимущества на всех рынках олигополии в процессе стратегического взаимодействия фирм.

5.2. Модели дуополии

Рассмотрим базовые модели дуополии при одинаковых предпосылках. Пусть фирмы предлагают однородный продукт, зная линейную функцию рыночного спроса вида:

$$P = a - bQ, \tag{5.7}$$

---

[1] См., например: *Gaskins D.W.* Dynamic limit pricing: optimal pricing under threat of entry // Journal of Economic Theory, 1971, 3.

где a, b — положительные константы; рыночный спрос Q складывается из объемов предложения первой и второй фирм ($Q = q_1 + q_2$) при цене P.

Пусть также обе фирмы имеют равные условия по издержкам производства:

$$TC_i = cq_i, \tag{5.8}$$

где c — положительная константа.

Таким образом, предельные издержки равны средним для каждого дуополиста:

$$MC_i = AC_i = c. \tag{5.9}$$

5.2.1. Модель Курно

Модель Курно — одна из классических моделей количественной олигополии. Аналитическая версия модели анализирует стратегическое взаимодействие фирм при нулевых предполагаемых вариациях:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = 0; \ \frac{dq_2}{dq_1} = 0. \tag{5.10}$$

Это означает, что при решении задачи на максимум прибыли каждый дуополист рассматривает уровень выпуска конкурента как постоянный, и при данной предпосылке принимает решение об уровне своего выпуска.

Прибыли дуополистов определяются как разности между выручкой и издержками каждого из них:

$$\Pi_1 = TR_1 - TC_1; \tag{5.11}$$

$$\Pi_2 = TR_2 - TC_2. \tag{5.12}$$

При предпосылке, что им известна функция рыночного спроса **(5.7)**, получим:

$$\Pi_1 = (a - bq_1 - bq_2)q_1 - cq_1; \tag{5.13}$$

$$\Pi_2 = (a - bq_1 - bq_2)q_2 - cq_2. \tag{5.14}$$

Необходимое условие максимизации прибылей дуополистов **(5.2)** примет вид:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0; \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0. \tag{5.16}$$

Уравнения **(5.15)** и **(5.16)** задают линии реакции дуополистов и могут быть переписаны в виде:

$$q_1 = -\frac{1}{2}q_2 + \frac{a-c}{2b}; \qquad \textbf{(5.17)}$$

$$q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{a-c}{2b}. \qquad \textbf{(5.18)}$$

Равновесие на рынке дуополии Курно определяется в результате решения[1] системы уравнений **(5.17)**, **(5.18)**:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}. \qquad \textbf{(5.19)}$$

Графическая иллюстрация равновесия в модели дуополии Курно представлена на рис. 5.1. Линии реакции Курно $R_1(q_2)$ и $R_2(q_1)$ соответствуют уравнениям **(5.17)** и **(5.18)**.

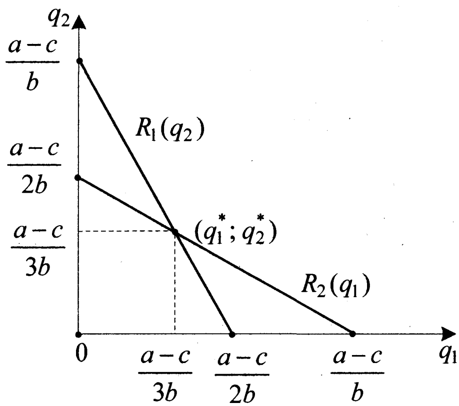


Рис. 5.1. ***Равновесие в модели дуополии Курно***

Достаточное условие максимизации прибылей дуополистов показывает, что частные производные второго порядка функций прибыли отрицательны:

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} = -2b < 0; \qquad \textbf{(5.20)}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} = -2b < 0. \qquad \textbf{(5.21)}$$

[1] Заметим, что решение имеет смысл лишь при $a > c$.

Значит, равновесные объемы выпуска q_1^* и q_2^* обеспечивают максимум прибыли для каждого дуополиста.

Можно доказать аналитически, что изопрофиты дуополистов Курно имеют вид, представленный на рис. 5.2.

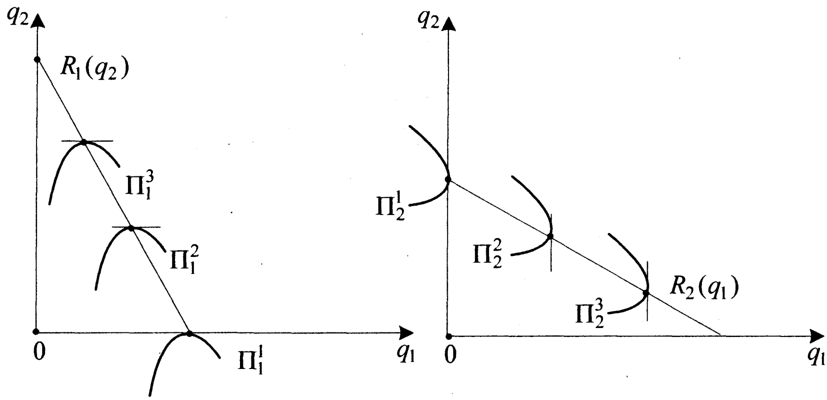


Рис. 5.2. *Изопрофиты и линии реакции дуополистов Курно*

Каждая изопрофита дуополиста Курно вогнута к оси, на которой отображается его выпуск. Для любого данного уровня выпуска конкурента существует единственный уровень выпуска дуополиста, обеспечивающий максимум его прибыли: соответствующие комбинации уровней выпуска дуополистов отображены на линиях реакции $R_1(q_2)$ и $R_2(q_1)$. Чем ближе расположена изопрофита к оси выпуска дуополиста, тем большему уровню прибыли она соответствует. Например, изопрофиты Π_1^1 и Π_2^1 соответствуют максимальному уровню прибыли, которую способен получить дуополист, если его конкурент уйдет с рынка. Такая ситуация соответствует случаю монополии с равновесным уровнем выпуска

$$q_m = \frac{a-c}{2b} \tag{5.22}$$

при равновесной цене

$$p_m = \frac{a+c}{2}, \tag{5.23}$$

что обеспечивает максимальную прибыль на уровне

$$\Pi_m = \frac{(a-c)^2}{4b}. \tag{5.24}$$

Равновесные уровни выпуска дуополистов Курно одинаковы в силу введенных предпосылок об однородности продукции и о равных условиях по издержкам производства. Они обеспечивают удовлетворение рыночного спроса в объеме

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2(a-c)}{3b} \qquad \textbf{(5.25)}$$

при равновесной цене

$$p^* = \frac{a+2c}{3}, \qquad \textbf{(5.26)}$$

что позволяет каждому дуополисту получить прибыль в размере

$$\Pi_i^* = \frac{(a-c)^2}{9b}. \qquad \textbf{(5.27)}$$

5.2.2. Модель Чемберлина

Аналитическая версия модели Э. Чемберлина основана на экономическом анализе рынка олигополии, сделанном в его монографии[1], опубликованной в 1956 г. В отличие от модели Курно в модели Чемберлина дуополист принимает во внимание тот факт, что уровень выпуска конкурента будет изменяться в ответ на его собственные действия. В результате дуополисты примут наиболее выгодные для себя решения, не вступая в открытый сговор.

Рассмотрим возможный а л г о р и т м стратегических взаимодействий в дуополии Чемберлина. Предположим, что *на первом шаге*, для примера, первая фирма ведет себя на рынке как монополист. Решая задачу на максимум прибыли, она выбирает монопольный уровень выпуска:

$$q_1 = Q_m = \frac{a-c}{2b}. \qquad \textbf{(5.28)}$$

При этом она получит монопольную прибыль

$$\Pi_1 = \Pi_m = \frac{(a-c)^2}{4b} \qquad \textbf{(5.29)}$$

при монопольной цене

$$p_m = \frac{a+c}{2}. \qquad \textbf{(5.30)}$$

---

[1] Перевод книги Э.Чемберлина «Теория монополистической конкуренции» вышел в издательстве «Экономика» в 1996 г. в серии «Экономическое наследие».

Решение задачи при принятых предпосылках **(5.7)—(5.9)** проиллюстрировано на рис. 5.3. Линия DD' отображает линейную функцию рыночного спроса **(5.7)**.

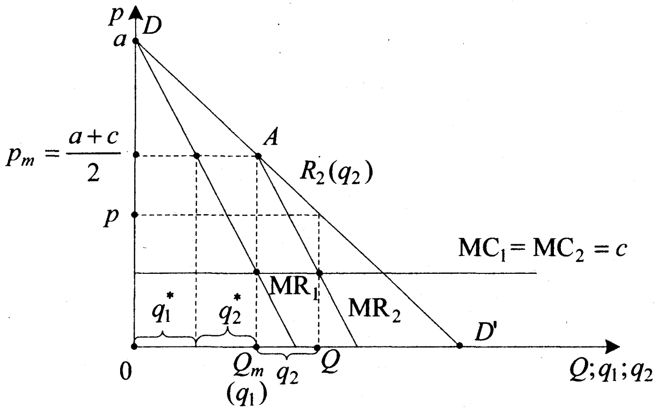


Рис. 5.3. ***Принятие решений в модели Чемберлина***

На втором шаге вторая фирма принимает решение исходя из функции остаточного спроса $R_2(q_2)$ на свою продукцию, предполагая, что выпуск первой фирмы не изменится. Функция $R_2(q_2)$ представлена в виде отрезка AD' (см. рис. 5.3). Таким образом, вторая фирма фактически принимает решение как фирма-монополист в новой системе координат AQ_mD', где уравнение функции остаточного спроса имеет вид:

$$p = \frac{a+c}{2} - bq_2. \tag{5.31}$$

Решая задачу на максимум прибыли, она выбирает уровень выпуска

$$q_2 = \frac{a-c}{4b}, \tag{5.32}$$

что составляет половину монопольного выпуска первой фирмы. В результате отраслевой выпуск составит

$$Q = \frac{3(a-c)}{4b} \tag{5.33}$$

при понижении цены до

$$p = \frac{a+3c}{4}. \tag{5.34}$$

Распределение прибыли будет не в пользу второй фирмы:

$$\Pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8b}; \tag{5.35}$$

$$\Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{16b}. \tag{5.36}$$

Первая фирма также окажется в проигрыше, поскольку вдвое уменьшит свою прибыль по сравнению с монопольной.

Уже *на третьем шаге* первая фирма осознает, что конкурент реагирует на ее действия, и уменьшает свой выпуск на величину выпуска соперника, т.е. вдвое, ориентируясь на цель достижения монопольного выпуска отрасли при монопольной цене.

На четвертом шаге вторая фирма принимает условия, предложенные конкурентом, поскольку выгоднее продавать тот же объем выпуска, что и раньше, но по более высокой монопольной цене. Значит, вторая фирма оставит свой уровень выпуска без изменения. При этом дуополисты поделят рынок поровну:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{4b} \tag{5.37}$$

и получат одинаковую прибыль

$$\Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{(a-c)^2}{8b}, \tag{5.38}$$

разделив монопольную прибыль между собой.

При введенных предпосылках об однородности продукции и о равных условиях по издержкам равновесие в модели Чемберлина соответствует решению задачи максимизации прибыли отдельного дуополиста при условии молчаливого раздела рынка между конкурентами.

Функция спроса примет вид:

$$p = a - 2bq, \tag{5.39}$$

где $q_1 = q_2 = q$.

Функции прибыли дуополистов идентичны (как и условия по издержкам):

$$\Pi = aq - 2bq^2 - cq. \tag{5.40}$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{d\Pi}{dq} = a - 4bq - c = 0 \tag{5.41}$$

определит равновесные уровни выпуска фирм **(5.37)**. Они будут соответствовать максимуму прибыли, что следует из достаточного условия экстремума:

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} = -4b < 0. \qquad \textbf{(5.42)}$$

Таким образом, не вступая в прямой сговор, дуополисты Чемберлина могут установить на рынке монопольную цену.

5.2.3. Модель Стэкльберга

Решение проблемы асимметричной конкуренции в условиях количественной олигополии было предложено Г. фон Стэкльбергом в 1934 г. Модель Стэкльберга анализирует стратегическое взаимодействие фирм по принципу «лидер—последователь».

Если фирма первой принимает решение об уровне выпуска, то она считается лидером по объему выпуска. Лидер в модели Стэкльберга информирован о поведении последователя. Последователь осознает лидерство конкурента, рассматривая уровень выпуска лидера как заданный, и, следовательно, принимает решение об уровне своего выпуска при предпосылках модели Курно.

Пусть для определенности в модели количественной дуополии первая фирма является лидером, а вторая — последователем. При введенных предпосылках **(5.7)—(5.9)** решения модели для лидера и последователя не изменятся, если фирмы поменяются ролями.

Задача максимизации прибыли фирмы-последователя аналогична ситуации принятия решений в модели Курно [см. **(5.12)**, **(5.14)**, **(5.16)**], что определяет вид линии реакции $R_2(q_1)$ второй фирмы, соответствующий условию **(5.18)**:

$$q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{a-c}{2b}. \qquad \textbf{(5.43)}$$

Последователь рассматривает уровень выпуска лидера в качестве экзогенного параметра, т.е. принимает решение при нулевой предполагаемой вариации: $\dfrac{dq_1}{dq_2} = 0$.

Итак, мы получили функцию, которая показывает, как фирма-последователь будет определять уровень своего выпуска в зависимости от выбора фирмы-лидера. Лидер осознает, что оказывает влияние на принятие решений конкурента, и поэтому учитывает реакцию последователя при решении задачи на максимум прибыли.

Аналитическая версия модели Стэкльберга предполагает, что последователь реагирует на изменение объема выпуска фирмы-лидера в соответствии с линией реакции Курно, которая определяет значение предполагаемой вариации в рассматриваемой нами модели:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{1}{2}. \qquad \textbf{(5.44)}$$

Необходимое условие максимизации прибыли первой фирмы-лидера [см. **(5.11), (5.13)**] при такой предпосылке примет вид:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = a - \frac{3}{2}bq_1 - bq_2 - c = 0. \qquad \textbf{(5.45)}$$

Уравнение **(5.45)** задает линию реакции лидера по Стэкльбергу и может быть переписано в виде:

$$q_1 = -\frac{2}{3}q_2 + \frac{2(a-c)}{3b}. \qquad \textbf{(5.46)}$$

Равновесие в модели дуополии Стэкльберга в сравнении с равновесием в модели дуополии Курно представлено на рис. 5.4. Линия реакции Курно $R_1(q_2)$ для первой фирмы при этом поворачивается вправо—вверх вокруг точки с координатами $(0; \frac{a-c}{b})$ и занимает положение $\overline{R}_1(q_2)$. Этот поворот обусловлен изменением структуры задачи максимизации прибыли для фирмы-лидера. Учитывая значение предполагаемой вариации **(5.44)**, лидер фактически решает задачу на условный экстремум, максимизируя прибыль **(5.13)** при условии **(5.18)**.

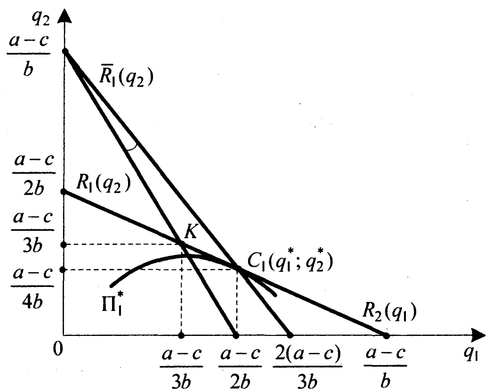


Рис 5.4. ***Равновесие в модели дуополии Стэкльберга в сравнении с равновесием в модели дуополии Курно***

Зная, что фирма-последователь будет выбирать уровень выпуска, соответствующий одной из точек на ее линии реакции $R_2(q_1)$, фирма-лидер отдает предпочтение такой точке (комбинации уровней выпуска конкурентов), которая обеспечит ей максимально возможную прибыль. Имеется в виду точка касания изопрофиты Π_1^* и линии реакции $R_2(q_1)$ (см. рис. 5.4). При введенных нами предпосылках **(5.7)—(5.9)** только одна изопрофита фирмы-лидера будет иметь точку касания с линией реакции фирмы-последователя, а значит, равновесие в модели дуополии Стэкльберга можно определить однозначно.

Равновесные уровни выпуска дуополистов Стэкльберга можно получить в результате решения системы уравнений **(5.43)**, **(5.46)**:

$$q_1^* = \frac{a-c}{2b}; \tag{5.47}$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{4b}. \tag{5.48}$$

Достаточное условие максимизации прибылей дуополистов Стэкльберга показывает, что частные производные второго порядка функций прибыли отрицательны:

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} = -\frac{3}{2}b < 0; \tag{5.49}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} = -2b < 0. \tag{5.50}$$

Значит, равновесные объемы выпуска q_1^* и q_2^*, представленные на рис. 5.4 точкой C_1, обеспечивают максимум прибыли как для лидера, так и для последователя при принятых условиях их стратегического взаимодействия. Заметим, что линия реакции $\overline{R}_1(q_2)$ представляет наилучший для фирмы-лидера ответ на действия последователя.

Решение модели Стэкльберга можно найти, используя другой алгоритм. Подставив функцию зависимости q_2 от q_1 из уравнения **(5.43)** в функцию прибыли фирмы-лидера **(5.13)**, получим

$$\Pi_1 = -\frac{1}{2}bq_1^2 + \frac{a-c}{2}q_1. \tag{5.51}$$

Таким образом, лидер решает задачу максимизации прибыли на безусловной экстремум, где в процессе принятия решений он осознает, что отраслевой выпуск составит $q_1 + q_2(q_1)$, т.е. учитывает реакцию последователя.

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = -bq_1 + \frac{a-c}{2} = 0 \qquad \textbf{(5.52)}$$

позволяет однозначно определить наилучшее решение фирмы-лидера[1]. Подставив найденный уровень выпуска первой фирмы в уравнение реакции **(5.43)** фирмы-последователя, получим равновесный уровень выпуска второй фирмы. Учитывая, что линия реакции представляет наилучший ответ на действия конкурента, равновесный уровень выпуска фирмы-последователя обеспечит ей максимум прибыли при заданных условиях взаимодействия.

Равновесные уровни выпуска дуополистов Стэкльберга обеспечивают удовлетворение рыночного спроса в объеме

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{3(a-c)}{4b} \qquad \textbf{(5.53)}$$

при равновесной цене

$$p^* = \frac{a+3c}{4}. \qquad \textbf{(5.54)}$$

При этом в соответствии с предпосылками рассматриваемой модели лидер получает прибыль в размере

$$\Pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8b}, \qquad \textbf{(5.55)}$$

что в два раза превышает уровень прибыли последователя

$$\Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{16b}. \qquad \textbf{(5.56)}$$

5.2.4. Борьба за лидерство

Модель, отражающая борьбу дуополистов за лидерство, является логическим развитием модели Стэкльберга. Разумно предположить,

---

[1] Достаточное условие экстремума $\left(\frac{d^2\Pi_1}{dq_1^2} = -b < 0\right)$ подтверждает принятие наилучшего решения.

что оба дуополиста могут вести себя как лидеры. Это означает, что в процессе принятия решений каждый из них считает себя лидером, а конкурента — последователем.

Аналитическая версия модели предполагает, что дуополисты максимизируют свою прибыль при условии, что конкуренты реагируют на действия друг друга в соответствии со своими линиями реакции Курно (см. **(5.17)**, **(5.18)**).

В рассматриваемой нами модели при предпосылках **(5.7)—(5.9)** значения предполагаемых вариаций будут одинаковыми:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{1}{2}, \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{1}{2}, \qquad \textbf{(5.57)}$$

а необходимое условие максимизации прибылей дуополистов (вида **(5.11)—(5.14)**) примет вид[1]:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = a - \frac{3}{2} bq_1 - bq_2 - c = 0; \qquad \textbf{(5.58)}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = a - bq_1 - \frac{3}{2} bq_2 - c = 0. \qquad \textbf{(5.59)}$$

Уравнения **(5.58)** и **(5.59)** задают линии реакции дуополистов $\overline{R}_1(q_2)$ и $\overline{R}_2(q_1)$ в случае их борьбы за лидерство и могут быть записаны в виде:

$$q_1 = -\frac{2}{3} q_2 + \frac{2(a-c)}{3b}; \qquad \textbf{(5.60)}$$

$$q_2 = -\frac{2}{3} q_1 + \frac{2(a-c)}{3b}. \qquad \textbf{(5.61)}$$

Равновесие на рынке определяется в результате решения системы уравнений **(5.60)**, **(5.61)**:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{2(a-c)}{5b}. \qquad \textbf{(5.62)}$$

Рассмотренные случаи равновесия в моделях количественной дуополии (кроме модели Чемберлина) представлены на рис. 5.5.

---

[1] Уравнение **(5.58)** в точности совпадает с уравнением **(5.45)** для фирмы-лидера в модели дуополии Стэкльберга. Уравнение **(5.59)** можно получить по аналогии в случае лидерства второй фирмы.

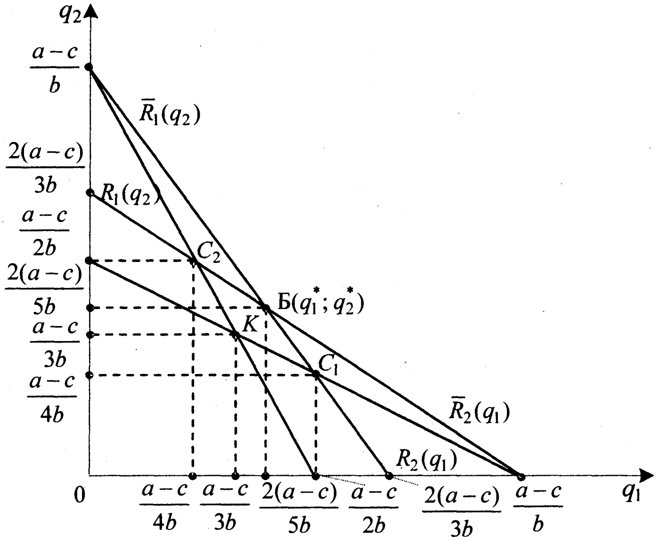


Рис. 5.5. ***Равновесие в моделях количественной дуополии***

Точка K соответствует равновесию в модели Курно, точки C_1 и C_2 представляют равновесие по Стэкльбергу в случаях, когда лидирует первая или вторая фирма соответственно, точка Б иллюстрирует равновесие в модели дуополии при условии борьбы за лидерство.

Равновесные уровни выпуска дуополистов в точке Б одинаковы, поскольку фирмы производят однородную продукцию, имеют равные условия по издержкам производства и придерживаются одинаковых стратегий поведения на рынке.

Достаточное условие максимизации прибылей дуополистов показывает, что частные производные второго порядка функций прибыли отрицательны:

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} = -\frac{3}{2} b < 0; \qquad \textbf{(5.63)}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} = -\frac{3}{2} b < 0. \qquad \textbf{(5.64)}$$

Следовательно, фирмы получат наибольшую прибыль при заданных условиях их стратегического взаимодействия.

Равновесные уровни выпуска в модели борьбы за лидерство обеспечивают удовлетворение рыночного спроса в объеме

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{4(a-c)}{5b} \qquad \mathbf{(5.65)}$$

при равновесной цене

$$p^* = \frac{a+4c}{5}, \qquad \mathbf{(5.66)}$$

что позволяет каждому дуополисту получить прибыль в размере

$$\Pi_i^* = \frac{2(a-c)^2}{25b}. \qquad \mathbf{(5.67)}$$

5.2.5. Модель Бертрана

Одна из классических моделей ценовой олигополии была предложена Ж. Бертраном как альтернатива стратегического поведения по отношению к модели Курно. В качестве эндогенных переменных модели были предложены цены, а не объемы выпуска продукции.

Дуополисты Бертрана вырабатывают решения независимо друг от друга, принимают уровень цены конкурента как данный, и при такой предпосылке выбирают решение об уровне своей цены.

Рассмотрим модель дуополии Бертрана при предпосылках **(5.7)—(5.9)**. В процессе решения модели определяется рыночная цена, а не выпуск, поэтому перепишем функцию рыночного спроса в виде

$$Q = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p. \qquad \mathbf{(5.68)}$$

Дуополисты по-прежнему решают задачу на максимум прибыли в виде **(5.11)**, **(5.12)**. Однако по сравнению со случаем количественной дуополии структура функции прибыли у каждого дуополиста изменится.

Проанализируем для начала стратегию поведения монополиста Бертрана. В условиях ценовой монополии фирма максимизирует прибыль вида

$$\Pi = (p-c)Q = (p-c)\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}p\right). \qquad \mathbf{(5.69)}$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{d\Pi}{dp} = -\frac{2}{b}p + \frac{a+c}{b} = 0 \qquad \mathbf{(5.70)}$$

определяет уровень монопольной цены

$$p_m = \frac{a+c}{2}, \qquad \mathbf{(5.71)}$$

а следовательно, монопольный уровень выпуска

$$Q_m = \frac{a-c}{2b}. \qquad \textbf{(5.72)}$$

Достаточное условие экстремума

$$\frac{d^2\Pi}{dp^2} = -\frac{2}{b} < 0 \qquad \textbf{(5.73)}$$

показывает, что монополист получит максимальную прибыль[1] в размере

$$\Pi_m = \frac{(a-c)^2}{4b}. \qquad \textbf{(5.74)}$$

Если на рынке дуополии установлена монопольная цена, то было бы разумно считать, что дуополисты поделят рынок между собой. Однако они принимают решения независимо друг от друга.

Пусть для определенности первый дуополист установил цену на уровне монопольной, т.е.

$$p_1 = p_m = \frac{a+c}{2}. \qquad \textbf{(5.75)}$$

В этом случае его конкурент предпочтет понизить цену. Таким образом, покупатели, привлеченные более низкой ценой, перейдут ко второму дуополисту, а значит, он должен обеспечить весь рыночный спрос

$$Q = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p_2. \qquad \textbf{(5.76)}$$

Возникает вопрос: На сколько нужно понизить цену по сравнению с монопольной, чтобы обеспечить себе максимальный уровень прибыли?

Пусть

$$p_2 = p_m - \xi = \frac{a+c}{2} - \xi, \qquad \textbf{(5.77)}$$

где $\xi > 0$.

Тогда второй дуополист Бертрана решает задачу максимизации прибыли

$$\Pi_2 = (p_2 - c)\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}p_2\right) \qquad \textbf{(5.78)}$$

---

[1] Заметим, что условия **(5.71)**, **(5.72)**, **(5.74)** в точности соответствуют условиям **(5.23)**, **(5.22)**, **(5.24)**, т.е. решение монополиста не изменяется при изменении эндогенной переменной модели.

при условии (5.77). Нужно выбрать такое значение $\xi > 0$, которое обеспечит максимум прибыли

$$\Pi_2 = -\frac{1}{b}\xi^2 + \frac{(a-c)^2}{4b}. \quad \textbf{(5.79)}$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{d\Pi_2}{d\xi} = -\frac{2}{b}\cdot\xi = 0 \quad \textbf{(5.80)}$$

показывает, что максимум прибыли достигается только при ξ, равном нулю, т.е. когда второй дуополист становится монополистом на рынке[1].

Анализ позволяет сделать вывод, что дуополист Бертрана должен стремиться к понижению цены на бесконечно малую величину ξ. Это обеспечит ему захват рынка и максимальную прибыль, приблизительно равную монопольной.

Очевидно, что конкурент не захочет мириться с такой ситуацией. Тем более что он тоже имеет возможность уменьшить цену, установленную на рынке, переманить покупателей к себе и обеспечить себе максимальную прибыль при данных условиях принятия решения.

Существует ли предел понижения цены? Для примера: второй дуополист будет понижать цену, пока у него есть возможность получать положительную прибыль, т.е. при

$$0 < \xi < \frac{a-c}{2}. \quad \textbf{(5.81)}$$

Наибольшее из возможных значений ξ, равное $\frac{a-c}{2}$, приведет к понижению цены до уровня предельных и средних издержек. Дальнейшее понижение цены теряет смысл, хотя в принципе возможно. Ситуация, когда фирмы снижают цены, получая при этом отрицательную прибыль, получила название «гиперконкуренция».

Серия последовательных уменьшений цены конкурирующими на рынке фирмами получила название *ценовой войны.* Ценовая война продолжается до тех пор, пока цена не снизится до уровня средних издержек.

---

[1] Достаточное условие экстремума $\left(\frac{d^2\Pi_2}{d\xi^2} = -\frac{2}{b} < 0\right)$ подтверждает, что полученная прибыль будет максимально возможной.

Равновесие на рынке дуополии Бертрана достигается, когда ни один из конкурентов больше не может получать выгоды от снижения цены, т.е. при цене, равной средним и предельным издержкам:

$$p^* = c. \tag{5.82}$$

Это значит, что дуополисты независимо друг от друга назначают одну и ту же цену, обеспечивая рыночный спрос на уровне:

$$Q^* = q_1 + q_2 = \frac{a-c}{b}, \tag{5.83}$$

что соответствует ситуации совершенной конкуренции. Конкуренты не получают положительную прибыль $(\Pi_1 = \Pi_2 = 0)$ при любом распределении рыночных долей. Принято считать, что в силу введенных предпосылок об однородности продукции и о равных условиях по издержкам производства дуополисты Бертрана в условиях равновесия разделят рынок между собой:

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{2b}. \tag{5.84}$$

Предпосылка о разделе рынка дуополии Бертрана при равенстве назначаемых конкурентами цен, как правило, принимается при построении кривой спроса отдельного дуополиста. Спрос на продукцию отдельной фирмы формируется следующим образом:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i), & \text{если} \quad p_i < p_j; \\ \frac{1}{2}D(p_i), & \text{если} \quad p_i = p_j; \\ 0, & \text{если} \quad p_i > p_j, \end{cases} \tag{5.85}$$

где $Q = D(p)$ — функция рыночного спроса.

Например, функция спроса на продукцию первого дуополиста в рассматриваемой нами модели имеет вид:

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p_1, & \text{если} \quad p_1 < p_2; \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}p_1\right), & \text{если} \quad p_1 = p_2; \\ 0, & \text{если} \quad p_1 > p_2. \end{cases} \tag{5.86}$$

Она представлена на рис. 5.6 в виде трех фрагментов. Если $p_1 > p_2$, то все покупатели уйдут к конкуренту, поэтому вертикальный отрезок на оси $0p_1$ соответствует нулевому уровню выпуска первого дуополиста.

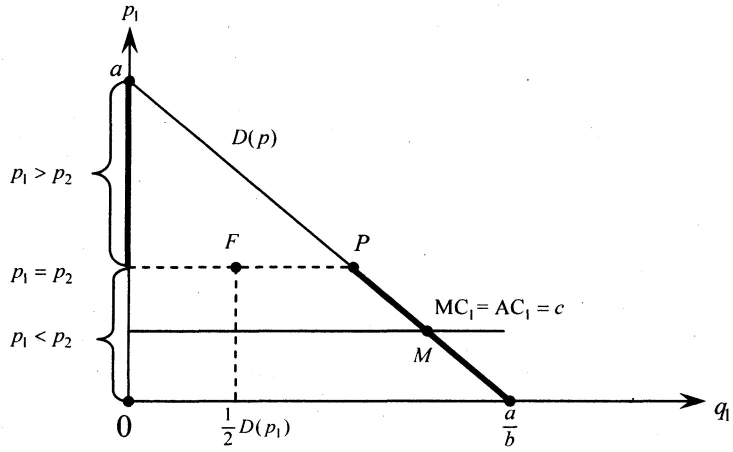


Рис. 5.6. ***Функция спроса одного из дуополистов Бертрана***

Если дуополисты назначат одинаковую цену, то они поделят рынок поровну, что соответствует точке F (см. рис. 5.6). Если же $p_1 < p_2$, то весь рыночный спрос будет обеспечивать первый дуополист. В этом случае имеет смысл рассматривать участок PM кривой рыночного спроса $D(p)$, поскольку безубыточность производства предполагает, что цена должна быть не ниже средних издержек.

Очевидно, что при фиксированной структуре функции спроса дуополиста Бертрана ее конфигурация в момент принятия решения зависит от уровня цены, установленной на предыдущем шаге. Предположим, что при цене $p_1 = p_2 > c$, когда равновесие неустойчиво, дуополист в поиске наилучшего для себя решения анализирует фрагмент PM функции спроса.

Можно считать, что на данном этапе принятия решения функция спроса первого дуополиста имеет вид:

$$q_1 = \alpha_1 - \beta_1 p_1 + \gamma_1 p_2, \qquad \textbf{(5.87)}$$

где α_1, β_1 и γ_1 — положительные константы.

Естественно, что при понижении цены p_1 первый дуополист увеличивает свой уровень выпуска, а понижение цены конкурента, наоборот, вызывает снижение уровня выпуска первого дуополиста. Следует заметить, что определение конкретных значений α_1, β_1 и γ_1 вызовет немалые трудности. К тому же, значения параметров могут изменяться на различных этапах движения к равновесию.

Если дуополист Бертрана может оценить функцию спроса на свою продукцию, то его функция прибыли **(5.4)** примет вид:

$$\Pi_1 = (p_1 - c)(\alpha_1 - \beta_1 p_1 + \gamma_1 p_2). \qquad \textbf{(5.88)}$$

В силу предпосылок модели дуополисты Бертрана принимают решения при нулевых предполагаемых вариациях:

$$\frac{dp_1}{dp_2} = 0; \frac{dp_2}{dp_1} = 0. \qquad \textbf{(5.89)}$$

Таким образом, необходимое условие максимизации прибыли

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = -2\beta_1 p_1 + \alpha_1 + c\beta_1 + \gamma_1 p_2 = 0 \qquad \textbf{(5.90)}$$

задает линию реакции первого дуополиста $R_1(p_2)$:

$$p_1 = \frac{\gamma_1}{2\beta_1} p_2 + \frac{\alpha_1 + c\beta_1}{2\beta_1}. \qquad \textbf{(5.91)}$$

По аналогии, оценив функцию спроса для второго дуополиста:

$$q_2 = \alpha_2 - \beta_2 p_2 + \gamma_2 p_1, \qquad \textbf{(5.92)}$$

можно получить его линию реакции $R_2(p_1)$:

$$p_2 = \frac{\gamma_2}{2\beta_2} p_1 + \frac{\alpha_2 + c\beta_2}{2\beta_2}. \qquad \textbf{(5.93)}$$

Предложенная аналитическая версия модели была выбрана, потому что она помогает понять, почему линии реакции дуополистов Бертрана возрастают в отличие от линий реакции Курно.

Графическая иллюстрация равновесия в модели дуополии Бертрана представлена на рис. 5.7.

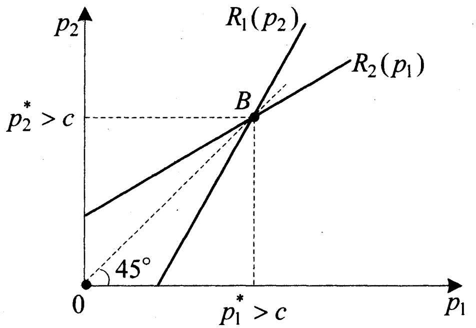


Рис. 5.7. ***Равновесие в модели дуополии Бертрана: случай дифференцированных продуктов***

Следует заметить, что функции спроса дуополистов Бертрана вида **(5.87)**, **(5.92)** характерны для случая дифференцированных продуктов. Поэтому равновесное решение $(p_1^*; p_2^*)$ достигается, когда цены превышают предельные издержки (см. рис. 5.7).

Рассмотрим случай, когда дуополисты Бертрана производят однородную продукцию. Установление цены ниже средних издержек приводит к убыточности производства, поэтому линии реакции дуополистов не определены, если уровни цен ниже АС = МС = *с*.

Равновесие в модели дуополии Бертрана для случая однородного продукта показано на рис. 5.8.

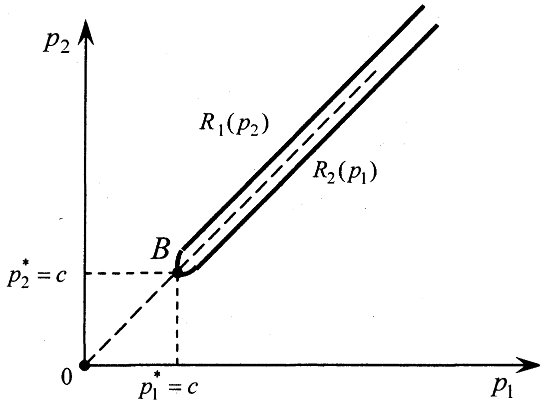


Рис. 5.8. ***Равновесие в модели дуополии Бертрана: случай однородного продукта***

Линия реакции $R_1(p_2)$ первого дуополиста проходит через точку (*с*; *с*), а при всех значениях $p_2 > c$ лежит чуть выше биссектрисы координатного угла, поскольку во всех этих случаях первый дуополист устанавливает цену $p_1 = p_2 - \xi$, которая чуть ниже цены конкурента. Аналогично построена линия реакции $R_2(p_1)$ второго дуополиста, которая также проходит через точку (*с*; *с*), а при всех $p_1 > c$ лежит чуть ниже биссектрисы координатного угла.

Линии реакции $R_1(p_2)$ и $R_2(p_1)$ проведены параллельно биссектрисе координатного угла, учитывая, что ξ является бесконечно малой величиной (см. рис. 5.8). В частности, в определенные моменты принятия решений линии реакции могут совпадать с биссектрисой координатного угла, а значит, возможны случаи установления одинакового уровня цен выше предельных и средних издержек ($p_1 = p_2 > c$).

Если принять, что значение ξ нужно выбирать тем выше, чем больше превышение цены конкурента над предельными и средними издержками, то линии реакции дуополистов Бертрана для случая однородного продукта будут идентичны линиям реакции для случая дифференцированных продуктов, когда последние расположены выше точки *B* (см. рис. 5.7).

Равновесие в модели дуополии Бертрана достигается в точке пересечения линий реакции конкурентов. При данных предпосылках такая точка существует и определяется однозначно. В точке равновесия дуополисты Бертрана получают максимально возможную прибыль[1], хотя в случае однородного продукта эта максимально возможная прибыль равна нулю.

Ситуацию равновесия в модели олигополии Бертрана называют *парадоксом Бертрана.* Трудно предположить, что при небольшом числе фирм на рынке (в том числе при дуополии) можно получить конкурентную цену, т.е. фирмы не в состоянии обеспечить себе положительную прибыль, производя однородную продукцию.

Модель дуополии Бертрана для случая дифференцированных продуктов можно также использовать, чтобы показать, что изопрофиты дуополистов Бертрана имеют вид, представленный на рис. 5.9. Каждая изопрофита дуополиста Бертрана выпукла к оси, на которой отображается уровень его цены.

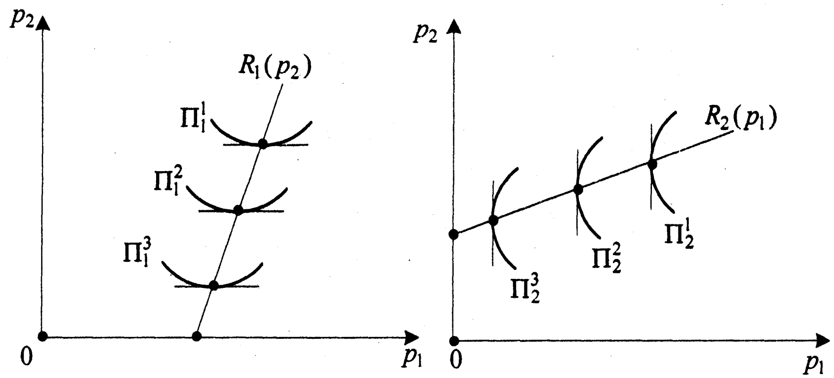


Рис. 5.9. ***Изопрофиты и линии реакции дуополистов Бертрана***

Для любого данного уровня цены конкурента существует единственный уровень цены дуополиста, обеспечивающий максимум его

[1] Для случая дифференцированных продуктов достаточное условие экстремума подтверждает, что принято наилучшее решение.

прибыли. Соответствующие комбинации цен образуют линии реакции $R_1(p_2)$ и $R_2(p_1)$.

Конфигурация изопрофит означает, что в случае, когда конкурент понижает уровень своей цены, дуополист также должен понизить свою цену, по возможности оставаясь на той же изопрофите, т.е. сохраняя прежний уровень прибыли. Чем ближе расположена изопрофита к оси цены дуополиста, тем меньшему уровню прибыли она соответствует.

Равновесие в модели дуополии Бертрана для случая однородного продукта (см. рис. 5.8) предполагает, что изопрофиты обоих дуополистов, проходящие через точку $B(c;\, c)$, соответствуют нулевому уровню прибыли.

5.2.6. Модель Эджуорта

Одно из решений парадокса Бертрана предложил Ф. Эджуорт, введя ограничения на величину производственной мощности дуополистов. В терминах нашей модели введение ограничений на производственные мощности фирм означает, что их затраты на производство дополнительной единицы продукции сверх существующего уровня мощности бесконечно велики.

Фрэнсис Эджуорт впервые обратил внимание специалистов на то, что введение ограничений на производственные мощности фирм может привести к тому, что единая равновесная цена не будет установлена, т.е. статическое равновесие по Бертрану может стать недостижимым. Однако, как показывает дальнейший анализ, результат функционирования рынка будет существенно зависеть от величины ограничений на производственные мощности фирм.

Проиллюстрируем ситуацию на следующем примере. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ рынок дуополии находится в состоянии равновесия по Бертрану **(5.82)—(5.84)**, т.е. дуополисты независимо друг от друга назначили одну и ту же цену $p_0 = c$ и разделили рынок пополам: $q_{10} = q_{20} = \dfrac{a-c}{2b}$, обеспечивая рыночный спрос на уровне $Q_0 = q_{10} + q_{20} = \dfrac{a-c}{b}$. При выбранных предпосылках это соответствует ситуации совершенной конкуренции: дуополисты не получают положительную прибыль ($\Pi_{10} = \Pi_{20} = 0$) при любом распределении рыночных долей. Пусть мощности дуополистов ограничены как раз на уровне половины рыночного спроса при цене, равной предельным издержкам:

$$q_k = \frac{a-c}{2b}. \qquad \textbf{(5.94)}$$

Это ограничение определяет вид кривой предельных издержек (рис. 5.10): она параллельна оси абсцисс при объемах выпуска, не превышающих q_k, и параллельна оси ординат при объеме выпуска на уровне q_k.

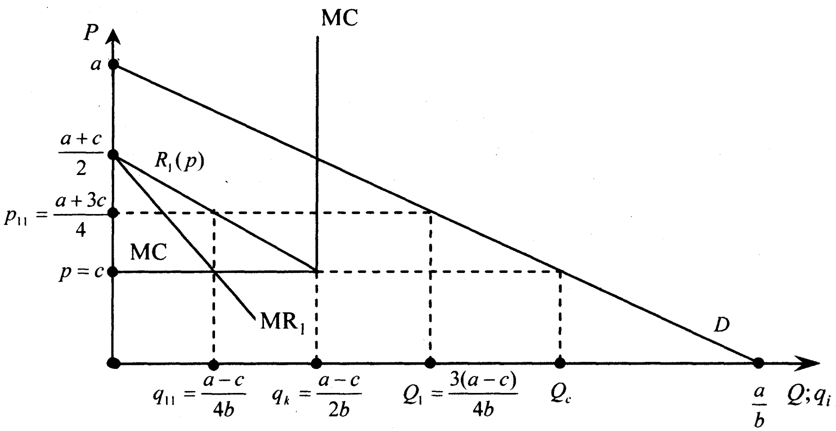


Рис. 5.10. ***Модель дуополии Эджуорта при*** $q_k = \frac{a-c}{2b}$

Развивая идею ценовой олигополии Бертрана, Эджуорт показал, что введение ограничений на величину производственной мощности приводит к изменению стратегического поведения фирм на рынке. В процессе анализа существенно использовались две предпосылки. Первая уже была введена в модели Бертрана: в модели дуополии предполагается, что при равенстве назначаемых конкурентами цен каждый дуополист будет обеспечивать половину рыночного спроса при данной цене. Вторая предпосылка касается структуры процесса принятия решений, если один из субъектов рынка не захочет придерживаться установленной на рынке цены.

Предположим, что один из дуополистов решает повысить цену на свою продукцию. В модели Эджуорта такое решение возможно, поскольку его конкурент не сможет увеличить свою производственную мощность. Значит, часть покупателей будет вынуждена покупать продукцию по более высокой цене, формируя остаточный спрос. Вторая предпосылка утверждает: если один из дуополистов работает на полную мощность по установившейся на рынке цене, но рыночный спрос полностью не удовлетворен, то второй дуополист будет максимизировать свою прибыль, действуя как монополист в отношении остаточного спроса.

Рассмотрим механизм стратегического взаимодействия дуополистов Эджуорта при предпосылках **(5.7)—(5.9)**. Пусть условно в момент времени $t = 1$ второй дуополист продолжает работать на полную мощность при цене, равной предельным издержкам:

$$p_{21} = c; \;\; q_{21} = \frac{a-c}{2b}. \tag{5.95}$$

Первый дуополист решает повысить цену на свою продукцию и выбирает уровень цены исходя из функции остаточного спроса:

$$R_1(p) = Q(p) - q_k = \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}p\right) - \frac{a-c}{2b}. \tag{5.96}$$

Таким образом, в момент времени $t = 1$ функция остаточного спроса на продукцию первого дуополиста примет вид:

$$q_{11} = \frac{a+c}{2b} - \frac{1}{b}p_{11}, \tag{5.97}$$

что позволяет определить функцию совокупного дохода

$$\mathrm{TR}_1 = \left(\frac{a+c}{2} - b \cdot q_{11}\right) \cdot q_{11}, \tag{5.98}$$

для которой из условия **(5.97)** получена обратная функция остаточного спроса:

$$p_{11} = \frac{a+c}{2} - b \cdot q_{11}. \tag{5.99}$$

Функция прибыли первого дуополиста

$$\Pi_{11} = \frac{a+c}{2}q_{11} - bq_{11}^2 - cq_{11} \tag{5.100}$$

и необходимое условие экстремума

$$\frac{d\Pi_{11}}{dq_{11}} = \frac{a-c}{2} - 2bq_{11} = 0 \tag{5.101}$$

позволяют установить оптимальный объем выпуска

$$q_{11} = \frac{a-c}{4b} < q_k \tag{5.102}$$

и уровень цены

$$p_{11} = \frac{a+3c}{4}, \tag{5.103}$$

обеспечивающие максимум прибыли первого дуополиста[1]. При $a > c$, когда решение модели имеет смысл, уровень цены, установленный первым дуополистом, превысит уровень предельных и средних издержек $(p_{11} > c)$. При этом фирма получит положительную прибыль в размере

$$\Pi_{11} = \frac{(a-c)^2}{16b}. \tag{5.104}$$

Первый дуополист, поставляя на рынок в два раза меньше продукции, чем его конкурент, выигрывает в конкурентной борьбе за счет того, что первым изменил стратегию своего поведения (см. рис. 5.10).

Отраслевой выпуск в условный момент времени $t = 1$ составит

$$Q_1 = q_{11} + q_{21} = \frac{3(a-c)}{4b}, \tag{5.105}$$

что соответствует уровню рыночного спроса при цене p_{11}. Это означает, что второй дуополист мог бы установить ту же цену и обеспечить себе прибыль, вдвое превышающую прибыль, полученную конкурентом. Однако, такая ситуация невозможна, ибо противоречит первой предпосылке модели. При выборе одного и того же уровня цены дуополисты должны обеспечивать рыночный спрос в равных долях и получать одинаковую прибыль. Покажем, что такое равновесие не будет устойчивым при цене p_{11}.

Дело в том, что у второго дуополиста есть гораздо более выгодный вариант стратегического решения. Пусть условно в момент времени $t = 2$ второй дуополист повышает цену до уровня

$$p_{22} = p_{11} - \xi = \frac{a+3c}{4} - \xi, \tag{5.106}$$

где ξ — бесконечно малая величина $(\xi > 0)$.

В таком случае он, по-прежнему работая на полную мощность и выпуская в два раза больше продукции, чем его конкурент, действительно сможет обеспечить себе положительную прибыль:

---

[1] Достаточное условие экстремума $\left(\frac{d^2\Pi_{11}}{dp_{11}^2} = -2b < 0\right)$ подтверждает, что принято наилучшее решение.

$$\Pi_{21} = \frac{(a-c)^2}{8b} - \xi\left(\frac{a-c}{2b}\right), \qquad \textbf{(5.107)}$$

которая фактически (при $\xi \to 0$) почти в два раза превысит уровень прибыли **(5.104)** первого дуополиста.

Очевидно, что стратегия поочередного уменьшения цены или ценовая война в поисках преимущества первого хода характерна для модели дуополии Эджуорта. Возникает вопрос: До какого уровня выгодно снижать цену?

Например, в условный момент времени $t = 3$ первый дуополист поставит перед собой цель выбрать такой уровень цены p_{13}, который при полной загрузке производственных мощностей фирмы должен обеспечить ей положительную прибыль не менее достигнутого уровня **(5.104)**. Неравенство

$$(p_{13} - c)\left(\frac{a-c}{2b}\right) \geq \frac{(a-c)^2}{16b} \qquad \textbf{(5.108)}$$

определяет предел понижения цены:

$$p_{13} \geq \frac{a+7c}{8}. \qquad \textbf{(5.109)}$$

Если ценовая война снизит цену первого дуополиста до предельного уровня, когда он обеспечит себе прибыль в размере **(5.104)**, то второй дуополист в условный момент времени $t = 4$ окажется перед выбором.

Во-первых, он может максимизировать свою прибыль по функции остаточного спроса. В этом случае он попадет в ситуацию, аналогичную той, в которой находился его конкурент в условный момент времени $t = 1$. Таким образом, дуополисты обеспечат себе равную прибыль, однако производственные мощности второго будут загружены только наполовину.

Во-вторых, он может продолжить ценовую войну, назначив цену

$$p_{24} = \frac{a+7c}{8} - \xi. \qquad \textbf{(5.110)}$$

В этом случае, работая на полную мощность, он сможет обеспечить себе прибыль в размере

$$\Pi_{24} = \frac{(a-c)^2}{16b} - \xi\left(\frac{a-c}{2b}\right), \qquad \textbf{(5.111)}$$

что ниже возможного уровня **(5.104)**. При этом первый дуополист не потеряет даже часть своей прибыли, если примет решение максимизировать прибыль по функции остаточного спроса.

В-третьих, второй дуополист может принять цену, установленную конкурентом. В этом случае каждый дуополист будет обеспечивать половину рыночного спроса:

$$q_{14} = q_{24} = \frac{7(a-c)}{8b}, \qquad \textbf{(5.112)}$$

получая равную прибыль в размере

$$\Pi_{14} = \Pi_{24} = \frac{7(a-c)^2}{128b}, \qquad \textbf{(5.113)}$$

что также соответствует понижению достигнутого уровня прибыли.

Очевидно, что первая стратегия принятия решений является наиболее выгодной для второго дуополиста. Однако она предполагает повышение цены до уровня **(5.103)** со всеми вытекающими отсюда последствиями. Ценовая война начинается вновь. Равновесие в модели Эджуорта при принятых предпосылках не достигается.

В силу введенных предпосылок об однородности выпускаемой продукции и о равных условиях по издержкам производства оптимальные ценовые стратегии фирм также будут одинаковыми:

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{a+3c}{4} & \text{при} \quad p_j \le \dfrac{a+7c}{8}; \\ p_j - \xi & \text{при} \quad p_j > \dfrac{a+7c}{8}, \end{cases} \qquad \textbf{(5.114)}$$

т.е. дуополист максимизирует прибыль по функции остаточного спроса, если цена конкурента не превышает предел понижения цены, и включается в ценовую войну, если цена конкурента установлена выше предельного значения.

Для случая, когда мощности дуополистов ограничены половиной рыночного спроса при цене, равной предельным издержкам, ценовая война будет оптимальной стратегией, если цены, выбираемые дуополистами, будут колебаться в пределах интервала:

$$\left[\frac{a+7c}{8}; \ \frac{a+3c}{4}\right]. \qquad \textbf{(5.115)}$$

Возникает вопрос: Каким образом ограничение производственной мощности дуополистов может повлиять на размах колебания рыночной цены в процессе ценовой войны в модели Эджуорта?

Предположим, что производственные мощности дуополистов в каждый момент времени ограничены на уровне x единиц продукции[1]. Пусть в условный момент времени $t = 1$ второй дуополист работает на

[1] При цене, равной предельным издержкам, или выше предельных издержек, когда $p = a - bx \ge c$, параметр x не может превышать $\dfrac{a-c}{b}$.

полную мощность при цене, равной предельным издержкам:

$$p_{21} = c; \quad q_{21} = x. \tag{5.116}$$

В соответствии с оптимальной ценовой стратегией первый дуополист максимизирует свою прибыль по функции остаточного спроса

$$R_1(p) = Q(p) - x. \tag{5.117}$$

Уже описанный алгоритм принятия решений позволяет определить оптимальный объем выпуска[1]

$$q_{11} = \frac{a-c}{2b} - \frac{x}{2} \tag{5.118}$$

и уровень цены

$$p_{11} = \frac{a+c}{2} - \frac{1}{2} \cdot bx, \tag{5.119}$$

обеспечивающие максимум прибыли первого дуополиста в размере

$$\Pi_{11} = \frac{(a-c-bx)^2}{4b}. \tag{5.120}$$

Обратим внимание на то, что мощности будут загружены не в полной мере только при $x > \frac{a-c}{3b}$. Но на данном этапе анализа нас интересует предел снижения цены, который можно определить из неравенства

$$(p_1 - c)x \geq \frac{(a-c-bx)^2}{4b}. \tag{5.121}$$

В результате решения получаем интервал колебания цен:

$$\left[\frac{(a-c-bx)^2}{4bx} + c; \ \frac{(a+c-bx)}{2}\right]. \tag{5.122}$$

Размах колебания рыночной цены в процессе ценовой войны дуополистов Эджуорта определяется разностью между верхней и нижней границами интервала колебания цен и может быть представлен в виде функции от параметра x:

$$\Delta = (a-c-bx) \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{a-c}{4bx}\right). \tag{5.123}$$

---

[1] Первый дуополист всегда будет производить $q_{11} > 0$ единиц продукции при цене $p_{11} > c$, если параметр x будет строго меньше величины $\frac{a-c}{b}$.

Размах колебания рыночной цены равен нулю только в двух случаях.

Во-первых, при $x = \frac{a-c}{b}$, когда, максимизируя прибыль по функции остаточного спроса, конкурент не сможет выбрать цену выше уровня предельных и средних издержек. Это фактически означает, что ограничение на производственные мощности в модели отсутствует и дуополисты Эджуорта превращаются в дуополистов Бертрана. Равновесие в модели наступает, когда каждый дуополист устанавливает цену на уровне предельных и средних издержек, не обеспечивая себе положительную прибыль.

Во-вторых, размах колебания рыночной цены равен нулю при $x = \frac{a-c}{3b}$. Это означает, что при повышении цены до уровня

$$p = \frac{a+2c}{3} \qquad \textbf{(5.124)}$$

каждый дуополист будет работать на полную мощность, обеспечивая половину рыночного спроса (при данной цене) и получая одинаковую с конкурентом положительную прибыль в размере:

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{9b}. \qquad \textbf{(5.125)}$$

Понижение или повышение цены неминуемо приведет к уменьшению прибыли, а следовательно, убыточно для дуополистов. Таким образом, парадокс Бертрана удалось решить, поскольку при $x = \frac{a-c}{3b}$ в модели Эджуорта достигается равновесие. При этом равновесная цена превышает предельные и средние издержки, а дуополисты обеспечивают себе положительную прибыль.

Функцию **(5.123)** можно записать в другом виде:

$$\Delta = (a-c) - \frac{1}{4}\left(3bx + \frac{(a-c)^2}{bx}\right). \qquad \textbf{(5.126)}$$

Это позволяет выявить зависимость размаха колебания рыночной цены от ограничения на производственную мощность на интервале изменения параметра x:

$$x \in \left(\frac{a-c}{3b};\ \frac{a-c}{b}\right), \qquad \textbf{(5.127)}$$

где размах колебания рыночной цены существует $(\Delta > 0)$.

Функция $f(x)=\frac{1}{4}\left(3bx+\frac{(a-c)^2}{bx}\right)$ принимает наименьшее значение при условии $3bx=\frac{(a-c)^2}{bx}$, когда $x=\frac{a-c}{b\sqrt{3}}$. Таким образом, при $x\in\left(\frac{a-c}{3b};\ \frac{a-c}{b\sqrt{3}}\right]$ размах колебания рыночной цены увеличивается и достигает своего максимума при $x=\frac{a-c}{b\sqrt{3}}$. При $\left[\frac{a-c}{b\sqrt{3}};\ \frac{a-c}{b}\right)$ размах колебания рыночной цены уменьшается, а его границы по мере сужения интервала принимают значения, близкие к уровню средних и предельных издержек дуополистов. Именно при $x\to\frac{a-c}{b}$ модель Эджуорта постепенно превращается в модель Бертрана.

Мы выяснили, что ценовая война имеет место в модели Эджуорта только при ограничении на производственные мощности дуополистов на уровне $q_к = x$, который изменяется в пределах $x\in\left(\frac{a-c}{3b};\ \frac{a-c}{b}\right)$.

При $x=\frac{a-c}{b}$ в модели достигается равновесие по Бертрану, когда цена устанавливается на уровне средних и предельных издержек, а прибыль конкурирующих на рынке фирм равна нулю. При $x=\frac{a-c}{3b}$ в модели Эджуорта также достигается равновесие, но при этом цена превышает средние и предельные издержки, а конкуренты получают положительную прибыль.

Проанализирована ситуация, когда в процессе решения экономико-математической модели размах колебания рыночной цены существует ($\Delta > 0$) или равен нулю ($\Delta = 0$). Возникает вопрос: Каким будет решение модели, если ограничение на производственные мощности фирм не будет отвечать условию **(5.127)**? Очевидно, что в таком случае нельзя полностью использовать предложенный ранее алгоритм решения. Нужно разобраться, что скрыто за отрицательным значением размаха колебания рыночной цены ($\Delta < 0$) при оставшихся пока без внимания уровнях ограничений на производственные мощности фирм.

Пожалуй, проще ответить на поставленный вопрос, когда ограничение на производственные мощности фирм превышает конкурентный уровень выпуска при цене, равной средним и предельным издержкам, т.е. при $x > \frac{a-c}{b}$. В этом случае ограничение на производственные мощности фирм фактически отсутствует. Если одна из фирм решит назначить цену выше уровня средних и предельных издержек, то для нее не останется ниши на рынке. Весь спрос будет удовлетворен фирмой-конкурентом. Угроза банкротства серьезнее, чем возможность кратковременного выигрыша, повлияет на принятие стратегических решений фирм. Ценовая война бессмысленна. Формальное решение задачи на остаточном спросе по предложенному выше алгоритму также не имеет смысла. Оно приведет к отрицательному значению для объема выпуска фирмы, решившей назначить более высокую цену. Фактически такая ситуация эквивалентна ситуации в модели Бертрана, когда ограничение на производственные мощности фирм отсутствует. Это означает, что при $x > \frac{a-c}{b}$ модель Эджуорта превращается в модель Бертрана и на рынке дуополии достигается статическое равновесие по Бертрану.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда ограничение на производственные мощности фирм колеблется в интервале

$$0 \le x < \frac{a-c}{3b}. \qquad \textbf{(5.128)}$$

Пусть в условный момент времени $t = 1$ второй дуополист работает на полную мощность при цене, равной предельным издержкам, т.е. выполняются условия **(5.116)**.

В соответствии с оптимальной ценовой стратегией первый дуополист выбирает уровень цены исходя из функции остаточного спроса **(5.117)**. Описанный ранее алгоритм принятия решений формально предлагает в качестве оптимального объем выпуска **(5.118)**, который превышает уровень располагаемых фирмой производственных мощностей:

$$q_{11} = \frac{a-c}{2b} - \frac{x}{2} > x \ \text{при}\ 0 \le x < \frac{a-c}{3b}.$$

Это означает, что точка локального экстремума не принадлежит отрезку — области изменения переменной модели:

$$q_{11} \notin [0; x]. \qquad \textbf{(5.129)}$$

Таким образом, максимум прибыли первого дуополиста в размере

$$\Pi_{11} = (a - c)\, x - 2bx^2 \qquad \textbf{(5.130)}$$

достигается на одном из концов отрезка, когда фирма работает на полную мощность при цене

$$p_{11} = a - 2bx. \tag{5.131}$$

Если возможна ценовая война, то предел снижения цены можно определить из неравенства

$$(p_2 - c)\, x \geq (a - c)\, x - 2bx^2. \tag{5.132}$$

При этом получается, что цену понижать невыгодно, поскольку

$$p_2 \geq a - 2bx = p_{11}. \tag{5.133}$$

Условия **(5.131)**, **(5.133)** показывают, что при оптимальных стратегиях поведения обе фирмы назначат одинаковую цену на уровне $p = a - 2bx$, будут работать на полную мощность и получать максимально возможную при данных условиях положительную прибыль $\Pi_1 = \Pi_2 = (a - c)\, x - 2bx^2$. Ценовая война не имеет смысла. В модели Эджуорта достигается равновесие.

Таким образом, предпосылки об однородности производимой продукции[1] и о неограниченности производственных мощностей дуополистов по существу оказались в основе парадокса Бертрана.

5.2.7. Лидерство по цене

Проблема асимметричной конкуренции в условиях ценовой олигополии может быть решена в рамках модели ценового лидерства. Стратегическое взаимодействие фирм по принципу «лидер—последователь» в случае, когда эндогенной переменной является цена, а не объем выпускаемой продукции, вполне можно проиллюстрировать на примере дуополии[2].

Если фирма принимает решение об уровне цены и именно эта цена устанавливается на рынке при молчаливом согласии конкурента, то фирма считается лидером по цене. Последователь принимает цену лидера как данную и при таком условии решает задачу максимизации своей прибыли.

Пусть для определенности в модели ценовой дуополии первая фирма является лидером по цене, а вторая — последователем. При введенных предпосылках **(5.7)—(5.9)** решение модели для лидера и последователя принципиально не изменится, если фирмы поменяются ролями.

---

[1] Напомним, что в случае дифференцированных продуктов равновесие в модели Бертрана достигается, когда цены превышают предельные и средние издержки.

[2] Модель ценового лидерства, которая больше известна, как модель доминирующей фирмы, предполагает наличие в отрасли значительного числа фирм небольшого размера, которые образуют конкурентное окружение и принимают цену доминирующей фирмы как данную. Однако в целях сравнительного анализа моделей на первом этапе исследования можно считать, что у доминирующей фирмы есть только один последователь.

Логика модели предполагает, что фирма-лидер знает функцию рыночного спроса $Q(p)$ **(5.68)**, а главное — может предсказать уровень выпуска последователя при каждом уровне цены. Проверим, как работает указанная предпосылка при условии, что функция издержек последователя линейна и имеет вид **(5.8)**.

Чтобы сделать прогноз поведения последователя, лидер должен определить уровень выпуска конкурента, максимизирующий его прибыль при каждом заданном значении цены. Пусть лидер решил установить цену на уровне p_L (L — индекс фирмы-лидера). Тогда последователь при наших предпосылках будет максимизировать функцию прибыли вида

$$\Pi_f = (p_L - c)q_f, \tag{5.134}$$

где f — индекс фирмы-последователя.

Необходимое условие экстремума

$$\frac{d\Pi_f}{dq_f} = p_L - c = 0 \tag{5.135}$$

определяет требование к уровню цены:

$$p_L = c, \tag{5.136}$$

которое соответствует условию равновесия на рынке совершенной конкуренции (p = MC). Ситуация вполне объяснима, поскольку фирма-последователь оказалась в положении конкурентной фирмы. Различие лишь в том, что для конкурентной фирмы рынок формирует уровень цены, а для фирмы-последователя цену устанавливает фирма-лидер.

Очевидно, что при предпосылках **(5.7)—(5.9)** в модели возникают следующие проблемы. Во-первых, фирма-лидер не может выбрать уровень цены $p_L = c$ на основе решения задачи максимизации прибыли конкурента. В большинстве случаев это просто нелогично. Кроме того, цена, установленная на уровне средних и предельных издержек, не может обеспечить положительную прибыль как для фирмы-последователя, так и для фирмы-лидера. Значит, такое стратегическое поведение неоптимально.

Во-вторых, фирма-лидер не может предсказать уровень выпуска последователя, поскольку в данной ситуации ему не известна функция предложения последователя. Таким образом, не выполняется одна из основных предпосылок модели ценового лидерства и без дополнительной информации модель работать не будет.

Введем дополнительные предпосылки. Пусть существует ограничение на производственную мощность фирмы-последователя, т.е.

$$0 < q_f \le x. \qquad \textbf{(5.137)}$$

Пусть также при любом заданном уровне цены фирма-последователь будет работать на полную мощность.

Таким образом, функция предложения фирмы-последователя имеет вид:

$$S_f(p) = x. \qquad \textbf{(5.138)}$$

Она параллельна оси ординат (рис. 5.11) и определяет $q_f = x$ при любом значении цены, выбранном лидером. Очевидно, что в модели ценового лидерства x должно быть меньше уровня выпуска конкурентной отрасли $Q_c = \frac{a-c}{b}$, поскольку лидер устанавливает цену выше средних и предельных издержек и для него должна существовать ниша на рынке.

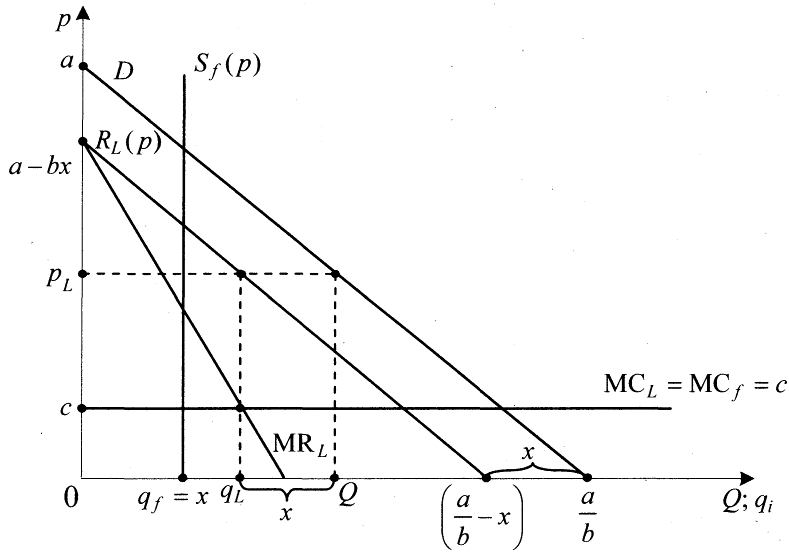


Рис. 5.11. ***Модель ценового лидерства***

Заметим, что работа на полную мощность будет обеспечивать фирме-последователю максимальную положительную прибыль при любом уровне цены, установленном выше предельных и средних издержек, поскольку при $p_L > c$

$$\frac{d\Pi_f}{dq_f} = p_L - c > 0 \qquad \textbf{(5.139)}$$

и функция прибыли **(5.134)** монотонно возрастает при увеличении объема выпуска q_f в пределах заданного ограничения на производственную мощность **(5.137)**.

Вновь введенные предпосылки позволяют выписать функцию остаточного спроса для фирмы-лидера:

$$R_L(p) = Q(p) - x = \left(\frac{a}{b} - x\right) - \frac{1}{b}p. \quad \textbf{(5.140)}$$

Фирма-лидер принимает решение как монополист, ориентируясь на свою функцию остаточного спроса (ситуацию принятия решений в модели[1] см. на рис. 5.11).

Исходя из обратной функции остаточного спроса

$$p_L = a - bx - bq_L \quad \textbf{(5.141)}$$

функция прибыли фирмы-лидера имеет вид:

$$\Pi_L = (a - bx - c)q_L - bq_L^2. \quad \textbf{(5.142)}$$

Необходимое условие экстремума

$$\frac{d\Pi_L}{dq_L} = a - bx - c - 2bq_L = 0 \quad \textbf{(5.143)}$$

определяет оптимальный уровень выпуска фирмы-лидера

$$q_L = \frac{a - bx - c}{2b} \quad \textbf{(5.144)}$$

и уровень его цены

$$p_L = \frac{a - bx + c}{2}. \quad \textbf{(5.145)}$$

Достаточное условие экстремума

$$\frac{d^2\Pi_L}{dq_L^2} = -2b < 0 \quad \textbf{(5.146)}$$

показывает, что фирма-лидер обеспечивает себе максимальную положительную прибыль в размере

$$\Pi_L = \frac{(a - bx - c)^2}{4b}, \quad \textbf{(5.147)}$$

---

[1] Функцию остаточного спроса $R_L(p)$ можно получить путем параллельного сдвига функции рыночного спроса D вдоль оси абсцисс на величину, равную объему производственной мощности x фирмы-последователя.

а также положительную прибыль для своего конкурента на уровне

$$\Pi_f = \frac{(a - bx - c)x}{2}. \qquad \textbf{(5.148)}$$

Ясно, что лидерство по цене логически оправдано только в том случае, когда фирма-лидер может получить прибыль больше, чем конкурент. При предпосылках **(5.7)—(5.9)** это возможно лишь при $x < \frac{a-c}{3b}$. При этом фирма-лидер обеспечивает большую долю рыночного спроса $(q_L > q_f = x)$, где рыночной спрос составляет

$$Q(p_L) = q_L + q_f = \frac{a + bx - c}{2b} \qquad \textbf{(5.149)}$$

и удовлетворяется полностью при установленной на рынке цене.

Заметим, что в отличие от стандартной модели доминирующей фирмы с конкурентным окружением при введенных нами предпосылках фирма-последователь принимает цену фирмы-лидера как данную, однако уровень этой цены будет всегда превышать средние и предельные издержки обоих дуополистов, тогда как любая фирма конкурентного окружения в стандартной модели Форхаймера будет получать положительную прибыль при цене, равной ее предельным издержкам $(p_L = \mathrm{MC}_f)$.

Если стратегическое поведение фирмы-лидера обеспечивает положительную прибыль для ее конкурентов, то говорят, что на рынке существует «ценовой зонтик».

5.2.8. Картельное соглашение

Один из примеров кооперированной олигополии — сговор между фирмами-конкурентами. *Картель* — это объединение олигополистов, вступающих в сговор с целью совместного принятия решения относительно уровня рыночной цены и объемов выпускаемой продукции. Образующие картель фирмы ведут себя на рынке как единый монополист, максимизируя совокупную прибыль отрасли.

Рассмотрим картель, максимизирующий прибыль при предпосылках **(5.7)—(5.9)**. Задача максимизации прибыли для двух фирм заключается в выборе таких уровней выпуска продукции q_1 и q_2, которые бы максимизировали совокупную прибыль отрасли Π, где

$$\Pi = (a - bq_1 - bq_2)(q_1 + q_2) - cq_1 - cq_2. \qquad \textbf{(5.150)}$$

Необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - 2bq_2 - c = 0; \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} = a - 2bq_1 - 2bq_2 - c = 0. \end{cases} \quad \textbf{(5.151)}$$

Оно определяет систему двух одинаковых уравнений с двумя неизвестными (q_1 и q_2), которая имеет бесконечно много решений. Любая комбинация объемов выпуска фирм (q_1, q_2), которая обеспечивает рыночный спрос в размере

$$Q_m = q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b}, \quad \textbf{(5.152)}$$

удовлетворяет системе уравнений **(5.151)**.

Множество решений системы изображено на рис. 5.12 в виде отрезка прямой *AB*.

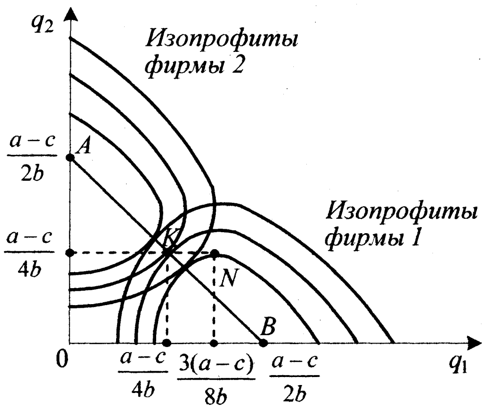


Рис. 5.12. ***Модель картельного соглашения***

Таким образом, необходимое условие экстремума задает лишь совокупный объем производства картеля. Достаточное условие экстремума с учетом вида функции **(5.150)** и знака вторых частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = -2b < 0; \\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} = -2b < 0 \end{cases} \quad \textbf{(5.153)}$$

указывает на то, что будет обеспечен максимально возможный уровень совокупной прибыли отрасли в размере

$$\Pi_m = \frac{(a-c)^2}{4b} \tag{5.154}$$

при монопольной цене

$$p_m = \frac{a+c}{2}. \tag{5.155}$$

Распределение рыночных долей с точки зрения максимизации совокупной прибыли отрасли значения не имеет. Однако существует проблема согласования решений между членами картеля. Поскольку в нашей модели фирмы идентичны по издержкам производства, логично предположить, что их рыночные доли будут одинаковыми, т.е.

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{4b}. \tag{5.156}$$

При этом члены картеля получат одинаковую прибыль в размере

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{(a-c)^2}{8b}. \tag{5.157}$$

В принципе переговоры относительно распределения рыночных долей могут быть проведены на множестве комбинаций объемов выпуска фирм, расположенных на линии *AB*. В случае максимизации совокупной прибыли отрасли предельная прибыль от производства дополнительной единицы продукции будет одинаковая (вне зависимости от того, кто из членов картеля произведет эту дополнительную единицу). Это означает, что контрактная линия *AB* представляет собой геометрическое место точек касания изопрофит картелированных фирм (см. рис. 5.12).

Основная проблема любого картельного соглашения — соблазн обмануть конкурента, т.е. нарушить соглашение и увеличить собственную прибыль.

Пусть в нашей модели вторая фирма честно соблюдает соглашение, в то время как первая фирма решила его нарушить[1]. Для аналитической версии модели это означает, что первая фирма будет максимизировать свою прибыль (5.13) при нулевой предполагаемой вариации $\left(\frac{dq_2}{dq_1} = 0\right)$ и фактически будет выбирать уровень своего выпуска в соответствии с линией реакции Курно (5.17).

[1] При предпосылках (5.7)—(5.9) ситуация будет аналогична, если фирмы поменяются ролями.

Ориентируясь на уровень выпуска конкурента **(5.156)**, соответствующий заключенному картельному соглашению, первая фирма выберет на линии реакции точку N, увеличив уровень своего выпуска до

$$q_1 = \frac{3(a-c)}{8b}. \qquad \textbf{(5.158)}$$

Нарушение картельного соглашения (передвижение из точки K в точку N) должно обеспечить первой фирме более высокий размер прибыли в связи с переходом на изопрофиту, расположенную ближе к оси $0q_1$ (см. рис. 5.12).

Действительно, даже при понижении рыночной цены до уровня

$$p = \frac{3a+5c}{8} \qquad \textbf{(5.159)}$$

увеличение объема выпуска первой фирмы обеспечивает ей прибыль в размере

$$\Pi_1 = \frac{9(a-c)^2}{64b}, \qquad \textbf{(5.160)}$$

что превышает равновесный уровень прибыли картелированной фирмы **(5.157)**. В то же время, вторая фирма, честно соблюдавшая соглашение, окажется в проигрыше, уменьшив размер своей прибыли до уровня

$$\Pi_2 = \frac{3(a-c)^2}{32b}. \qquad \textbf{(5.161)}$$

Таким образом, в нашей модели после нарушения картельного соглашения фирма-нарушитель получит прибыль в полтора раза большую, чем ее конкурент, и можно с уверенностью сказать, что картель неустойчив.

5.3. Модели олигополии

5.3.1. Модель олигополии Курно

Стратегическое взаимодействие фирм в условиях олигополии Курно можно проиллюстрировать, если обобщить аналитическую версию дуополии Курно для случая n фирм в отрасли.

Пусть n фирм предлагают на рынке однородную продукцию в объемах $q_1, q_2, ..., q_n$ при предпосылках **(5.7)—(5.9)**, где рыночный спрос Q складывается из объемов предложения всех фирм в отрасли, т.е.

$$Q=\sum_{j=1}^{n} q_j. \qquad \textbf{(5.162)}$$

Каждый олигополист решает задачу на максимум прибыли

$$\Pi_i = \mathrm{TR}_i - \mathrm{TC}_i = \left[a - b(\sum_{j=1}^{n} q_j)\right] q_i - c q_i \qquad \textbf{(5.163)}$$

при нулевых предполагаемых вариациях. Тогда необходимое условие экстремума примет вид:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = a - b(\sum_{j=1}^{n} q_j) - b q_i - c = 0. \qquad \textbf{(5.164)}$$

Оно задает функцию реакции i-го олигополиста. Совокупность функций реакции образует систему из n уравнений с n неизвестными, в результате решения которой можно найти равновесные уровни выпуска олигополистов по аналогии со случаем дуополии Курно.

Однако можно поступить проще. Ведь при введенных предпосылках фирмы работают в одинаковых условиях, а значит, в условиях равновесия предлагают на рынок равные объемы производства q. Условия равновесия определяются прежде всего необходимым условием экстремума, поэтому можно просто подставить переменную q в уравнение **(5.164)** вместо каждой переменной q_i (или q_j — в зависимости от формы записи объема выпуска олигополиста). Условие **(5.164)** примет вид:

$$b(nq) + bq = a - c, \qquad \textbf{(5.164')}$$

откуда легко определить равновесный уровень выпуска олигополиста Курно:

$$q = \frac{a-c}{b(n+1)}. \qquad \textbf{(5.165)}$$

При этом олигополисты Курно обеспечивают рыночный спрос в объеме

$$Q = \left(\frac{a-c}{b}\right)\frac{n}{n+1} \qquad \textbf{(5.166)}$$

при равновесной цене

$$p = \frac{a-c}{n+1} + c, \qquad \textbf{(5.167)}$$

что позволяет каждому из них получить максимальную прибыль в размере

$$\Pi = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}. \qquad \textbf{(5.168)}$$

Анализ параметров рыночного равновесия в модели олигополии Курно показывает, что решение задачи для n фирм в отрасли обобщает отдельные случаи рыночного равновесия. Так, при $n = 1$ одна фирма контролирует рынок, получая монопольную прибыль **(5.24)** при монопольной цене **(5.23)**.

При $n = 2$ параметры равновесия соответствуют случаю дуополии Курно [см. **(5.19)**, **(5.25)—(5.27)**]. Очевидно, что с увеличением числа фирм на рынке отраслевой спрос удовлетворяется все в большем объеме при более низкой цене. При этом снижается уровень производства каждого отдельного олигополиста. Вместе с понижением цены это приводит к уменьшению объема получаемой прибыли.

В результате при значительном увеличении числа фирм на рынке (при $n \to \infty$) цена фактически опускается до уровня средних и предельных издержек ($p \to c$), а уровень выпуска отдельной фирмы становится очень маленьким по сравнению с размерами рынка. Рынок олигополии Курно по всем параметрам превращается в рынок совершенной конкуренции, где фирмы не могут обеспечить себе положительную прибыль ($\Pi \to 0$).

Если не вводить предпосылки **(5.8)**, **(5.9)** относительно издержек производства, то решение модели Курно в общем виде может быть затруднено. Важно то, что алгоритм решения останется прежним. Будут изменяться характеристики рыночного равновесия, но основные свойства сохранятся. Объемы выпуска олигополистов Курно будут в большинстве случаев различны, но цена останется выше предельных и средних издержек, и фирмы смогут обеспечить себе положительную прибыль.

Частные случаи решения модели будут по-прежнему охватывать возможные варианты рыночного равновесия от монополии до совершенной конкуренции. Экономический анализ моделей олигополии Курно при отказе от жестких предпосылок относительно издержек производства лучше проводить на конкретных примерах, не углубляясь в тонкости математического анализа. Такие примеры включены в вопросы и задания в конце главы 5.

Однако следует сделать существенную оговорку. Алгоритм поиска рыночного равновесия в модели олигополии Курно включает поиск решения системы из n уравнений с n неизвестными, которая в большинстве случаев не будет линейной. Система уравнений далеко не всегда имеет решение. С другой стороны, она может иметь более одного решения.

Таким образом, возникает проблема существования и единственности равновесного состояния на рынке олигополии. Эта проблема в той или иной степени затрагивает все модели олигополии по мере их усложнения. Кроме того, с усложнением моделей возрастают трудности поиска равновесного решения. Все эти вопросы связаны с оценкой возможности применения математических методов в данной области экономических исследований.

5.3.2. Модель олигополии Бертрана

Обобщение модели дуополии Бертрана для случая n фирм в отрасли фактически не изменяет основные характеристики равновесия на рынке. Логика процесса принятия решений при предпосылках **(5.7)—(5.9)** остается прежней.

Таким образом, ценовая война будет продолжаться до тех пор, пока цена не снизится до уровня предельных и средних издержек. Олигополисты независимо друг от друга вынуждены будут установить одну и ту же цену ($p = c$), обеспечивая рыночный спрос на уровне предложения на рынке совершенной конкуренции. Олигополисты Бертрана по-прежнему не смогут получить положительную прибыль и, следуя предпосылкам модели, в условиях равновесия разделят рынок между собой. Доля предложения каждой фирмы на рынке составит n-ю часть рыночного спроса:

$$q = \frac{a - c}{bn}. \qquad \textbf{(5.169)}$$

Очевидно, что при одинаковом количестве фирм на рынке олигополист Бертрана в условиях равновесия предлагает на рынок больше продукции, чем олигополист Курно (достаточно сравнить **(5.165)** и **(5.169)**), а рыночный спрос удовлетворяется в большем объеме при более низкой цене.

С увеличением числа фирм на рынке изменяется только один параметр рыночного равновесия: уменьшается доля предложения каждой отдельной фирмы. В результате при значительном увеличении числа фирм на рынке (при $n \to \infty$) уровень выпуска отдельной фирмы становится слишком мал по сравнению с размерами рынка. В этом крайнем случае рынок олигополии Бертрана, как и рынок олигополии Курно, трансформируется в рынок совершенной конкуренции.

Возникает вопрос: Как изменится стратегическое взаимодействие фирм в условиях олигополии Бертрана, если отказаться от предпосылок **(5.8)**, **(5.9)** относительно симметричных издержек производства конкурентов? Чтобы ответить на этот вопрос, сначала вернемся к анализу модели дуополии Бертрана и лишь незначительно изменим предпосылки модели.

Пусть две фирмы на рынке предлагают однородную продукцию, зная функцию рыночного спроса (5.7), но имеют неравные условия по издержкам производства:

$$TC_1 = c_1 q_1; \quad TC_2 = c_2 q_2, \tag{5.170}$$

где c_1, c_2 — положительные константы.

Пусть для определенности c_1 меньше c_2. Таким образом, у обеих фирм предельные издержки по-прежнему равны средним, но у первой фирмы их уровень меньше ($c_1 < c_2$).

При данных предпосылках ценовая война неизбежна. Предположим, что ценовая война привела к понижению цены до уровня средних издержек второй фирмы (c_2). Что произойдет дальше? Равновесие на рынке при такой цене не может быть достигнуто, поскольку первая фирма еще способна получить выгоду от снижения цены.

Допустим, что первая фирма назначит цену на уровне

$$p = c_2 - \xi, \tag{5.171}$$

где $0 < \xi \le c_2 - c_1$.

Верхняя граница изменения ξ существует, поскольку фирме невыгодно устанавливать цену ниже уровня средних и предельных издержек. Если цена, назначенная первой фирмой, выше ее средних издержек (c_1), но ниже средних издержек фирмы-конкурента (c_2), то первая фирма сможет привлечь покупателей более низкой ценой и получить положительную прибыль.

Производственная деятельность второй фирмы окажется убыточной. Продолжение ценовой войны будет увеличивать убытки второй фирмы. Естественно, возникает вопрос, выдержит ли вторая фирма накал конкурентной борьбы или уйдет с рынка. Ответ на поставленный вопрос требует рассмотрения динамических моделей олигополии. Равновесие в модели дуополии Бертрана в данном случае существует, но не является единственным и зависит от значения ξ.

Обобщая модель для случая *n* фирм в отрасли, можно сделать следующие выводы. При заданных условиях стратегического взаимодействия в выигрышной ситуации окажутся те фирмы, чей уровень средних и предельных издержек будет ниже. Следовательно, число фирм на рынке может сократиться.

Равновесие на рынке олигополии Бертрана также не будет единственным и, в частности, может быть достигнуто, если одна или несколько фирм смогут наладить безубыточное производство при одном и том же уровне рыночной цены.

Анализ модели олигополии Бертрана указывает на необходимость расширения моделей олигополии за счет введения условий, отражающих влияние потенциальной конкуренции на процесс принятия стратегических решений. Условия равновесия и алгоритм принятия решений в моделях ценовой олигополии могут существенно измениться, если предусмотреть возможность входа фирм на рынок.

5.3.3. Модель олигополии Стэкльберга

Анализ, проведенный в параграфе 5.2, показывает, что при предпосылках **(5.7)—(5.9)** стратегическое взаимодействие по принципу «лидер — последователь» невыгодно для обеих фирм: характеристики равновесия во многом неудовлетворительны даже для лидера, и вряд ли кто-то из конкурентов захочет быть последователем. Обобщение модели дуополии Стэкльберга при таких предпосылках не поможет ответить на вопрос, почему из множества идентичных фирм только одна окажется лидером по объему выпуска. Поэтому рассмотрим более общий случай — увеличим число фирм на рынке и одновременно откажемся от равных условий по издержкам производства для всех фирм[1].

Пусть фирмы, как и ранее, производят однородную продукцию, зная линейную функцию рыночного спроса **(5.7)**. Пусть только одна фирма (условно — первая фирма) имеет преимущество в издержках над всеми конкурентами. Сохраним предпосылку, что у всех фирм на рынке предельные издержки постоянны и равны средним издержкам.

При таких предпосылках введем обозначения. Пусть c_L — предельные и средние издержки первой фирмы (лидера); c_f — предельные и средние издержки каждой фирмы-последователя, где c_L меньше c_f. Пусть на рынке олигополии взаимодействуют одна фирма-лидер и n фирм-последователей, т.е. рыночный спрос обеспечивают $(n + 1)$ фирм:

$$Q = \sum_{j=1}^{n+1} q_j = q_L + \sum_{j=2}^{n+1} q_j. \qquad \textbf{(5.172)}$$

Последователи вынуждены признать преимущество фирмы-лидера, ибо при значительном возрастании объема предложения рыночная цена может опуститься ниже уровня средних издержек фирмы-последователя, оставаясь при этом выше уровня средних

---

[1] У нас остается возможность оценить свойства равновесия олигополии Стэкльберга при предпосылках **(5.7)—(5.9)**. Мы всегда можем получить параметры такого равновесия как частный случай более общей модели.

издержек фирмы-лидера ($c_L < p < c_f$). Значит, увеличив масштабы производства, фирма-лидер при определенных условиях может получать положительную прибыль, в то время как ее конкуренты будут иметь убытки.

Таким образом, каждый последователь осознает лидерство первой фирмы, рассматривает уровень ее выпуска как заданный и решает задачу на максимум прибыли при нулевых предполагаемых вариациях. Учитывая условие **(5.172)**, функцию прибыли олигополиста **(5.163)** можно записать для фирмы-последователя в виде:

$$\Pi_i = \left[a - b(q_L + \sum_{j=2}^{n+1} q_j)\right] q_i - c_f q_i. \qquad \textbf{(5.173)}$$

Необходимое условие экстремума **(5.164)** примет вид:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = a - b(q_L + \sum_{j=2}^{n+1} q_j) - bq_i - c_f = 0. \qquad \textbf{(5.174)}$$

Обратим внимание на то, что в модели олигополии Стэкльберга последователь рассматривает уровень выпуска любого конкурента как постоянный, последователи ведут себя как олигополисты Курно.

Используем для фирм-последователей тот же алгоритм решения модели, который упростил решение задачи при анализе модели олигополии Курно. Все фирмы-последователи находятся в одинаковых условиях. Следовательно, при достижении равновесия будут предлагать на рынок равные объемы производства q_f. Условие **(5.174)** запишем в более удобном виде:

$$b(q_L + nq_f) + bq_f = a - c_f, \qquad \textbf{(5.175)}$$

откуда легко получить функцию реакции любой фирмы-последователя:

$$q_f = \left(-\frac{1}{n+1}\right) \cdot q_L + \frac{a - c_f}{b(n+1)}. \qquad \textbf{(5.176)}$$

Фирма-лидер информирована о поведении последователей. Она осознает, что каждый последователь реагирует на изменение объема выпуска фирмы-лидера в соответствии со своей функцией реакции (5.176). Функция реакции определяет значение предполагаемой вариации:

$$\frac{dq_f}{dq_L} = -\frac{1}{n+1}. \qquad \textbf{(5.177)}$$

Учитывая возможную реакцию последователей, первая фирма решает задачу на максимум прибыли:

$$\Pi_L = \left[a - b(q_L + \sum_{j=2}^{n+1} q_j) \right] q_L - c_L q_L. \qquad \textbf{(5.178)}$$

Необходимое условие экстремума примет вид:

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial q_L} = a - b(q_L + \sum_{j=2}^{n+1} q_j) - b q_L (1 + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{dq_j}{dq_L}) - c_L = 0, \qquad \textbf{(5.179)}$$

где в точке равновесия $\sum_{j=2}^{n+1} q_j = nq_f$, $\sum_{j=2}^{n+1} \frac{dq_j}{dq_L} = n\left(\frac{dq_f}{dq_L}\right) = -\frac{n}{n+1}$.

Сделав необходимые преобразования, получим функцию реакции фирмы-лидера:

$$q_L = \left(-\frac{n(n+1)}{n+2}\right) \cdot q_f + \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{a - c_L}{b}\right), \qquad \textbf{(5.180)}$$

которая показывает, каким должен быть наилучший ответ на действия последователя.

Если на рынке олигополии Стэкльберга более одного последователя, то $\left| -\frac{n(n+1)}{n+2} \right| > 1$. Предположим, что фирма-последователь уменьшит объем выпуска на единицу. Предполагаемая вариация $\frac{dq_L}{dq_f} = -\frac{n(n+1)}{n+2}$ указывает, что тогда фирма-лидер может поставлять на рынок объем товара, больший единицы. Тем самым увеличится доля рыночного спроса, удовлетворяемая с меньшими издержками производства.

Решая систему уравнений **(5.176)**, **(5.180)**, можно рассчитать равновесные уровни выпуска фирмы-лидера и фирмы-последователя:

$$q_L = \frac{a - c_L}{2b} + \frac{n(c_f - c_L)}{2b}; \qquad \textbf{(5.181)}$$

$$q_f = \frac{a - c_f}{2b(n+1)} - \frac{(c_f - c_L)}{2b}. \qquad \textbf{(5.182)}$$

В условиях равновесия олигополисты Стэкльберга удовлетворяют рыночный спрос в объеме

$$Q = q_L + nq_f = \frac{a - c_L}{2b} + \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{a - c_f}{2b}\right) \qquad \textbf{(5.183)}$$

при рыночной цене

$$p = \frac{a + c_L}{2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{a - c_f}{2}\right). \qquad \textbf{(5.184)}$$

Посмотрим, что произойдет на рынке олигополии Стэкльберга при изменении двух параметров: числа фирм-последователей (n) и размера преимущества фирмы-лидера в издержках ($c_f - c_L$). Очевидно, что рост обоих параметров оказывает одинаковое влияние на объем предложения фирм на рынке, см. **(5.181)**, **(5.182)**. Объем предложения лидера увеличивается, а объем предложения каждого последователя уменьшается.

Как следствие, должно произойти увеличение доли лидера на рынке. Однако, как показывает исследование[1], прослеживается достаточно сложная функциональная зависимость доли лидера от числа фирм-последователей и размера преимущества лидера в издержках. Только в конечном итоге большое число конкурентов увеличивает значение преимущества лидера и его доля на рынке начинает расти.

Интересно, что с ростом числа последователей, когда коэффициент $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ стремится к единице, равновесная цена постепенно снижается и приближается к среднему арифметическому средних издержек лидера и последователя $\left(p \to \frac{c_L + c_f}{2}\right)$. Такой уровень цены превышает средние издержки лидера, но ниже средних издержек последователя. Конкурентоспособность последователей падает, их число должно уменьшиться. Преимущество лидера в издержках подтверждает обоснованность его притязаний на лидерство.

Теперь рассмотрим частный случай модели, когда все фирмы на рынке имеют равные условия по издержкам производства ($c_L = c_f = c$). Основные параметры рыночного равновесия можно получить из формул **(5.181)—(5.184)**:

$$q_L = \frac{a - c}{2b}; \qquad \textbf{(5.185)}$$

$$q_f = \frac{a - c}{2b(n+1)}; \qquad \textbf{(5.186)}$$

[1] См.: *Шерер Ф.М.*, *Росс Д.* Структура отраслевых рынков: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 1997. — С. 213.

$$Q = \left(\frac{a-c}{2b}\right)\left(\frac{2n+1}{n+1}\right); \qquad \textbf{(5.187)}$$

$$p = \frac{a+c}{2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{a-c}{2}\right). \qquad \textbf{(5.188)}$$

Очевидно, что объем предложения фирмы-лидера не зависит от числа последователей. Объем предложения фирмы-последователя в $(n+1)$ раз меньше, чем у лидера, и постепенно сокращается с увеличением числа последователей.

При достаточно большом числе последователей (когда $n \to \infty$) объем предложения олигополистов Стэкльберга приближается к объему предложения в условиях совершенной конкуренции $\left(Q \to \frac{a-c}{b}\right)$, а цена фактически падает до уровня средних и предельных издержек[1].

При этом все существеннее становится различие в уровне выпуска лидера и последователя. Доля последователя в совокупном объеме предложения на рынке $\left(\frac{q_f}{Q} = \frac{1}{2n+1}\right)$ становится бесконечно мала по сравнению с размерами рынка. Доля лидера $\left(\frac{q_L}{Q} = \frac{n+1}{2n+1}\right)$ тоже постепенно снижается, но в конечном итоге не будет ниже, чем половина объема предложения на рынке. По-прежнему остается открытым вопрос — почему из множества идентичных фирм только одна смогла стать лидером по объему выпуска.

Теперь сравним модели олигополии Курно и Стэкльберга. Для этого пересчитаем параметры равновесия олигополии Курно **(5.165)— (5.167)** для случая $(n + 1)$ фирм в отрасли:

$$q^{(k)} = \frac{a-c}{b(n+2)}; \qquad \textbf{(5.189)}$$

$$Q^{(k)} = \left(\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right); \qquad \textbf{(5.190)}$$

$$P^{(k)} = \frac{a-c}{n+2} + c. \qquad \textbf{(5.191)}$$

Сравнение параметров равновесия **(5.189)—(5.191)** и **(5.185)—(5.188)** показывает, что уровень выпуска олигополиста Курно меньше уров-

[1] $Q \to \frac{a-c}{b}$, $p \to c$ при $n \to \infty$, когда $\frac{2n+1}{n+1} \to 2$, $\frac{n}{n+1} \to 1$.

ня выпуска лидера и больше уровня выпуска последователя при любом количестве фирм на рынке. Совокупное предложение в случае олигополии Стэкльберга выше, а равновесная цена ниже, чем в случае олигополии Курно.

Ситуация вполне объяснима. Решая задачу максимизации прибыли, лидер в модели олигополии Стэкльберга увеличивает уровень выпуска по сравнению с равновесным объемом выпуска олигополиста Курно. Если лидер увеличивает объем выпуска на единицу, то каждый последователь в соответствии со своей функцией реакции **(5.176)** уменьшает уровень выпуска на $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ единиц. Совокупное предложение последователей падает на $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ единиц, но общий объем предложения на рынке возрастает на $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ единиц $\left(1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\right)$, а следовательно, равновесная цена станет меньше.

Сравнительный анализ моделей олигополии Курно и Стэкльберга подтверждает основные выводы, сделанные для случая дуополии.

5.3.4. Модель доминирующей фирмы Форхаймера

Модель доминирующей фирмы Форхаймера представляет одну из моделей лидерства по цене, основные принципы формирования которой были изложены при анализе моделей дуополии. Модель предполагает, что одна из фирм является признанным ценовым лидером на рынке. Лидер регулирует уровень рыночной цены и берет на себя ответственность за приспособление цены к изменяющимся условиям рынка.

Кроме лидера товар на рынке предлагает значительное число фирм, которые образуют конкурентное окружение и принимают цену, установленную лидером. Их отказ от риска принятия ценовых решений означает, что они не имеют возможности устанавливать цену на основе решения задачи на максимум прибыли.

Напомним основные предпосылки модели. Фирма-лидер знает функцию рыночного спроса и может оценить функцию предложения конкурентного окружения. В процессе анализа дуополии мы выяснили, что фирма-лидер не может предсказать уровень выпуска конкурентного окружения, когда предельные издержки каждой фирмы конкурентного окружения постоянны. В этом случае (при отсутствии ограничения на производственную мощность фирм-последователей) назначение цены выше их предельных издержек может привести к существенному увеличению объема предложения на рынке. В результате не останется ниши для самой фирмы-лидера.

Возникает необходимость введения еще одной предпосылки. Функция предельных издержек любой фирмы конкурентного окружения должна изменяться в зависимости от ее объема выпуска. Будем считать, что она монотонно возрастает. Для фирмы-лидера такое ограничение необязательно.

Рассмотрение модели доминирующей фирмы в общем виде приведет к функциональным зависимостям от многих параметров. В этом нет необходимости. Проведем анализ, используя конкретные числовые примеры. Сконцентрируем внимание на различных соотношениях между издержками производства доминирующей фирмы и фирм конкурентного окружения. Поэтому во всех примерах будем рассматривать одинаковые условия спроса. Кроме того, логично зафиксировать издержки фирм конкурентного окружения, а варьировать издержки доминирующей фирмы.

Пусть лидеру известна функция рыночного спроса $D(p)$:

$$p = 500 - Q, \tag{5.192}$$

где объем предложения Q складывается из предложения фирмы-лидера и тридцати идентичных фирм конкурентного окружения.

Известны также функции совокупных издержек фирмы-лидера:

$$\mathrm{TC}_L = 320q_L + \frac{1}{6}q_L^2 \tag{5.193}$$

и каждой фирмы-последователя:

$$\mathrm{TC}_f = 320q_f + 30q_f^2, \tag{5.194}$$

где q_L, q_f — объемы выпуска фирмы-лидера и фирмы-последователя соответственно.

В данном случае доминирующая фирма имеет преимущество в издержках производства. Поэтому последователи будут опасаться ценовой войны и не захотят снижать цену, установленную лидером. Фирмы конкурентного окружения будут решать задачу максимизации прибыли при заданном уровне цены. Такую же задачу должна решить фирма-лидер, когда она поставит перед собой цель оценить функцию предложения последователей $S_f(p)$.

Приравнивая предельные издержки фирмы-последователя к цене ($p = 320 + 60q_f$), можно найти функцию зависимости объема выпуска каждой фирмы конкурентного окружения от цены $\left(q_f = \frac{1}{60}p - \frac{16}{3}\right)$. Объем предложения всех фирм конкурентного окружения складывается из объемов выпуска 30 идентичных фирм ($Q_f = 30q_f$) и определяет функцию предложения последователей:

$$S_f(p) = \frac{1}{2}p - 160. \tag{5.195}$$

Теперь доминирующая фирма может найти функцию остаточного спроса $R_L(p)$ на свою продукцию:

$$R_L(p) = D(p) - S_f(p) = 660 - \frac{3}{2}p. \qquad \textbf{(5.196)}$$

В процессе расчета функций $S_f(p)$ и $R_L(p)$ используется метод горизонтального суммирования и горизонтального вычитания.

Функция остаточного спроса будет менять свою конфигурацию в зависимости от уровня цены:

$$\begin{aligned} p &= 440 - \frac{2}{3}q_L \quad \text{при} \quad 320 \le p \le 440, \\ p &= 500 - q_L \quad \text{при} \quad 0 < p < 320. \end{aligned} \qquad \textbf{(5.197)}$$

Если установить цену на уровне p = 440, то весь объем рыночного спроса будет обеспечен фирмами конкурентного окружения и у лидера не будет ниши на рынке. Если же установить цену на уровне p = 320, то, наоборот, весь рыночный спрос будет удовлетворен только доминирующей фирмой. Если цена изменяется в пределах от 320 до 440, то фирма-лидер ориентируется на верхний участок *AB* кривой остаточного спроса (рис. 5.13). Но если цена будет ниже 320, последователи уйдут с рынка, оставляя весь спрос лидеру.

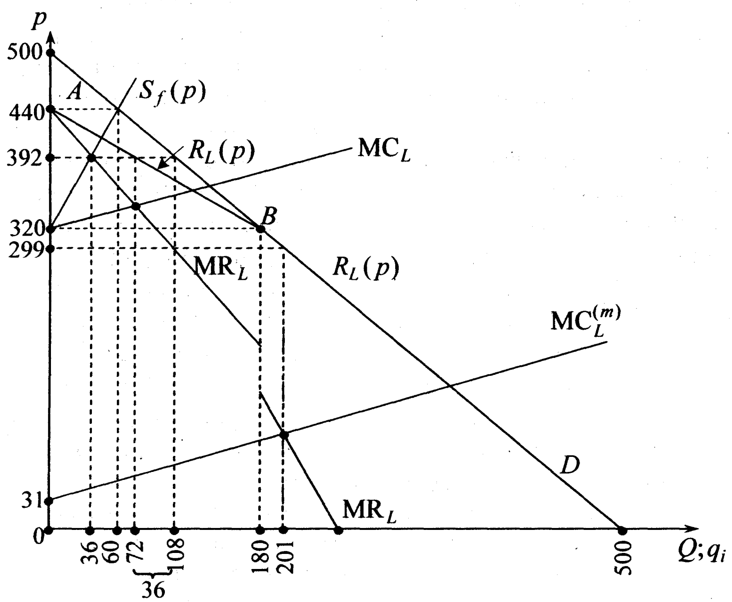


Рис. 5.13. ***Модель доминирующей фирмы***

Доминирующая фирма принимает решение как монополист, ориентируясь на свою функцию остаточного спроса (см. рис. 5.13). Поэтому модель доминирующей фирмы часто называют *частичной монополией* (промежуточный тип строения рынка между монополией и олигополией).

С одной стороны, доминирующая фирма не заинтересована в том, чтобы избавиться от своего конкурентного окружения посредством снижения рыночной цены. С другой стороны, наличие конкурентного окружения и опасность потенциальной конкуренции вынуждают доминирующую фирму удерживать цены на уровне более низком, чем при монополии.

Исходя из функции остаточного спроса можно выписать функцию совокупного дохода фирмы-лидера ($\mathrm{TR}_L = 440q_L - \frac{2}{3}q_L^2$) и воспользоваться необходимым условием равновесия на рынке. Приравнивая предельный доход MR_L и предельные издержки MC_L: $440 - \frac{4}{3}q_L = 320 + \frac{1}{3}q_L$, легко определить равновесный объем предложения фирмы-лидера ($q_L = 72$) и равновесную цену ($p = 392$).

Далее можно поступить двумя способами. Во-первых, можно сначала найти совокупный объем спроса при данной цене ($Q = 108$), а затем определить объем предложения всех фирм конкурентного окружения ($Q_f = 36$) как разность между объемом рыночного спроса и объемом предложения фирмы-лидера. Во-вторых, можно использовать функцию предложения конкурентного окружения $S_f(p)$, чтобы сначала вычислить равновесный объем предложения конкурентного окружения, а затем, прибавляя объем выпуска доминирующей фирмы, найти совокупный объем предложения на рынке. Рынок находится в равновесии, поскольку совокупное предложение обеспечивает рыночный спрос при данной цене.

В условиях равновесия доминирующая фирма получает достаточно высокий уровень прибыли ($\Pi_L = 4320$), который в 100 раз превышает уровень прибыли отдельной фирмы конкурентного окружения ($\Pi_f = 43{,}2$). Она реализует свое преимущество в издержках и обеспечивает положительную прибыль для своих конкурентов. На рынке существует «ценовой зонтик», который может поколебать устойчивость равновесия на рынке.

Если конкурентное окружение получает положительную прибыль, то предложение фирм-последователей будет расти (как за счет расширения производства действующих на рынке фирм, так и за счет входа новых). Произойдет сдвиг кривой остаточного спроса доминирующей фирмы так, что ее доля предложения на рынке понизится.

Предположим, что положительная прибыль конкурентных фирм спровоцировала вход на рынок новых фирм-последователей. Пусть в нашем примере их число возросло до 180. Решение модели в соответствии со стандартным алгоритмом показывает, что участок *AB* кривой остаточного спроса $R_L(p)$ сместится влево—вниз: $p = 365 - \frac{1}{4} q_L$ при $320 \le p \le 365$. Доминирующая фирма уменьшит уровень своего предложения на рынке (q_L = 54) при одновременном увеличении совокупного объема предложения (Q = 148,5). Равновесная цена также понизится.

В результате доля фирмы-лидера уменьшится с 66,67 до 36,37%. При этом каждая фирма конкурентного окружения по-прежнему получит положительную прибыль (Π_f = 8,1375), хотя и во много раз меньшую, чем доминирующая фирма (Π_L = 1217,16). Это означает, что доля предложения доминирующей фирмы будет еще снижаться. Очевидно, что одно из слабых мест модели — пассивность доминирующей фирмы перед лицом потенциальной конкуренции. Ведь цена, которую установила доминирующая фирма, достаточно высока, так что фирмы конкурентного окружения получают положительную прибыль, что привлекательно для входа на рынок новых фирм.

Однако анализ данной модели в динамике при тех же предпосылках показывает относительную устойчивость положения доминирующей фирмы на рынке. Соотношение между издержками производства таково, что на рынок может войти любое количество фирм, пополняя конкурентное окружение, при этом и доминирующая фирма, и все фирмы конкурентного окружения будут получать положительную прибыль. С одной стороны, доминирующая фирма не имеет достаточного преимущества в издержках, чтобы вытеснить фирмы конкурентного окружения с рынка. Они всегда будут получать положительную прибыль, поскольку цена, выгодная максимизирующей прибыль доминирующей фирме, при любом количестве фирм конкурентного окружения будет больше 320, т.е. больше минимума средних переменных издержек фирмы из конкурентного окружения. С другой стороны, по мере увеличения числа фирм конкурентного окружения рыночная доля доминирующей фирмы будет уменьшаться, равновесная цена также понизится, но доминирующая фирма имеет достаточное преимущество в издержках, чтобы на рынке всегда оставалась ниша для нее. Кроме того, объем предложения доминирующей фирмы всегда будет значительно выше объема предложения отдельной фирмы из конкурентного окружения.

В модели доминирующей фирмы возможны два типа равновесия. Мы рассмотрели равновесие для доминирующей фирмы с конкурентным окружением. Оно имеет место, когда преимущество доминирующей фирмы в издержках не слишком велико. Если же издержки доминирующей фирмы существенно ниже издержек других фирм на рынке, то она может вытеснить конкурентов и остаться монополистом на рынке.

Ломаная кривая остаточного спроса фирмы-лидера **(5.197)** порождает разрыв кривой ее предельного дохода. Верхний участок кривой MR_L соответствует первому типу равновесия, а нижний — второму[1]. Ситуация на рынке зависит от того, какой участок кривой предельного дохода пересечет кривая предельных издержек фирмы-лидера[2].

Предположим, что в нашем примере доминирующей фирме удалось снизить издержки производства до уровня $TC_L = 31q_L + \frac{1}{6}q_L^2$. В этом случае кривая предельных издержек $MR_L^{(m)} = 31 + \frac{1}{3}q_L$ пересечет нижний участок кривой предельного дохода (см. рис. 5.13). При этом решение модели имеет свои особенности.

Решая задачу на остаточном спросе в соответствии со стандартным алгоритмом, получим, что равновесная цена должна быть установлена на уровне 276,4; предложение доминирующей фирмы должно составить 245,4, что превышает рыночный спрос при данной цене. На рынке не остается ниши для конкурентного окружения.

Ситуация объясняется тем, что данный уровень равновесной цены ниже минимума средних переменных издержек любой фирмы из конкурентного окружения. Следовательно, преимущество доминирующей фирмы в издержках столь значительно, что мы имеем дело со вторым типом равновесия в модели и следует решать задачу монополиста на другом участке кривой остаточного спроса — там, где она совпадает с кривой рыночного спроса.

Таким образом, на рынке должна установиться монопольная цена, равная 299 (которая выше, чем 276,4, но по-прежнему ниже минимума средних переменных издержек любой фирмы из конкурентного окружения). Монополист может установить более высокую цену при меньшем объеме производства. При данной цене монополист удовлетворит рыночный спрос в полном объеме ($q_L = 201 = Q_m$) и получит очень высокий уровень прибыли ($\Pi_L = 47134{,}5 = \Pi_m$).

---

[1] Нижний участок MR_L — это часть кривой предельного дохода монополиста на данном рынке.

[2] Ситуация потребует дополнительного исследования, если кривая предельных издержек пройдет через разрыв кривой предельного дохода.

В данном случае доминирующая фирма устанавливает монопольную, но настолько низкую цену, что фирмы конкурентного окружения вынуждены свертывать производство и покидать рынок. Соотношение между издержками доминирующей фирмы и фирм конкурентного окружения таково, что доминирующая фирма устанавливает цену ниже цены закрытия для фирм конкурентного окружения. Вход на рынок, таким образом, фактически блокирован. Очевидно, что в динамике доминирующая фирма вполне может вытеснить с рынка фирмы конкурентного окружения и остаться монополистом на рынке.

Доминирующая фирма может иметь существенное преимущество в издержках производства перед фирмами конкурентного окружения, но это не обязательно. Рассмотрим случай, когда совокупные издержки доминирующей фирмы чуть выше, чем в примере, рассмотренном в начале п. 5.3.4. Пусть они составляют $TC_L = 380q_L + \frac{1}{6}(q_L)^2$, а предельные издержки соответственно равны $MC_L = 380 + \frac{1}{3} q_L$. Пусть на рынке по-прежнему предлагают продукцию 30 фирм конкурентного окружения.

В этом случае равновесная цена будет выше и составит 416, объем предложения доминирующей фирмы уменьшится до 36. Таким образом, рыночная доля доминирующей фирмы будет равна только 42,86%, т.е. меньше, чем у конкурентного окружения (даже при небольшом числе конкурентов в отрасли). В то же время прибыль доминирующей фирмы составит 864, что более чем в 10 раз, превышает прибыль отдельной фирмы из конкурентного окружения. Фирмы конкурентного окружения получают более высокую прибыль, чем в ситуации, рассмотренной ранее. Это создает дополнительные стимулы для входа на рынок новых фирм.

Анализ динамической модели показывает, что с ростом числа конкурентов доля доминирующей фирмы на рынке продолжает падать. Так, при увеличении количества фирм конкурентного окружения вдвое (до 60) рыночная доля доминирующей фирмы составит 22,2%, ее прибыль уменьшится до 337,5, хотя и будет в 6,5 раз больше, чем у отдельной фирмы из конкурентного окружения. При увеличении числа фирм конкурентного окружения до 102 не только резко снизится до 5,37% рыночная доля доминирующей фирмы, но ее прибыль уменьшится до 20,71 и окажется меньше, чем у любой фирмы из конкурентного окружения, прибыль которой будет равна 34,53.

В результате наступит момент, когда число фирм конкурентного окружения возрастет настолько, что в соответствии со структурой модели Форхаймера на рынке не останется ниши для доминирующей фирмы. При заданных условиях это случится, если в конкурентном окружении будет 120 фирм. При решении модели в соответствии со стандартным алгоритмом мы получим, что объем предложения доминирующей фирмы будет равен нулю, что очевидно уже при сравнении обратной функции остаточного спроса ($p = 380 - \frac{1}{3} q_L$) и функции средних переменных издержек доминирующей фирмы ($AC_L = 380 + \frac{1}{6} q_L$). Равновесная цена будет равна 380. Это и есть цена закрытия рынка для доминирующей фирмы. Весь рыночный спрос могут удовлетворить фирмы конкурентного окружения. При этом каждая из них получит положительную прибыль, равную 30.

В последней ситуации решение модели показывает, что соотношение между издержками производства доминирующей фирмы и фирм конкурентного окружения обусловливает неустойчивость положения доминирующей фирмы на рынке. Дело в том, что при достаточно высокой цене фирмы конкурентного окружения могут получать достаточно высокую прибыль, что является хорошим стимулом для увеличения их производственных мощностей. Кроме того, это по-прежнему привлекательно для входа на рынок новых фирм. В результате доля доминирующей фирмы на рынке постепенно уменьшается, что нивелирует ее доминирующую позицию. Заметим, что это происходит на фоне очень малой рыночной доли каждой фирмы конкурентного окружения в отдельности (1,9% при 30 фирмах конкурентного окружения, 1,3% — при 60 и менее 1%, когда количество фирм конкурентного окружения более 100).

Для полноты картины рассмотрим критическую ситуацию, когда при заданном соотношении между издержками производства доминирующей фирмы и фирм конкурентного окружения доминирующая фирма не имеет преимущества в издержках. Пусть совокупные издержки доминирующей фирмы возросли до $TC_L = 440\, q_L + \frac{1}{6} (q_L)^2$ и предельные издержки составили $MC_L = 440 + \frac{1}{3} q_L$. Пусть по-прежнему на рынке предлагают продукцию 30 фирм конкурентного окружения. В этом примере решение модели показывает, что равновесная цена установится на уровне 440, а весь спрос будет удовлетворен фирмами конкурентного окружения. При стандартном алгоритме решения модели на рынке не остается ниши для доминирующей фирмы даже без увеличения числа ее конкурентов. В соответствии с кривой остаточного спроса мы находимся в точке закрытия рынка для доминирующей фирмы.

В динамике доминирующая фирма может использовать комбинированные стратегии и неценовые рычаги для давления на конкурентов и сохранения доминирующей роли на рынке. В противном случае рынок может стать конкурентным, поскольку рыночные доли отдельных фирм из конкурентного окружения малы по сравнению с размерами рынка.

Модель доминирующей фирмы может быть расширена до варианта доминирующего картеля, когда *n* фирм в отрасли объединяются с целью максимизировать совместную прибыль в соответствии с остаточным спросом. При такой постановке задачи используется стандартный алгоритм решения модели[1].

В заключение заметим, что модель доминирующей фирмы иногда называют *моделью тайного сговора.* Дело в том что открытые соглашения о ценах, как правило, запрещены законодательством. Преимущество такого тайного сговора в том, что в отличие от картеля фирмы сохраняют свободу в принятии решений относительно их производственной деятельности.

5.3.5. Сговор и картели

Анализ моделей картеля становится многограннее, если отказаться от предпосылки о равенстве издержек производства у картелированных фирм. Основные проблемы, возникающие при этом в процессе образования и функционирования картеля, можно по-прежнему выявить, рассматривая только двух олигополистов, поскольку результаты исследования легко обобщаются для случая *n* фирм в отрасли.

Пусть две фирмы предлагают однородный продукт, зная линейную функцию рыночного спроса **(5.7)**. Пусть они решили вступить в картельное соглашение с условием максимизации совокупной прибыли отрасли:

$$\Pi = (a - bq_1 - bq_2)(q_1 + q_2) - TC_1(q_1) - TC_2(q_2), \qquad \textbf{(5.198)}$$

где $TC_1(q_1)$, $TC_2(q_2)$ — функции издержек в зависимости от объема выпуска каждой фирмы, причем $TC_1(q_1) \neq TC_2(q_2)$.

Необходимое условие экстремума примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} = (a - bq_1 - bq_2) + (-b)(q_1 + q_2) - MC_1(q_1) = 0; \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} = (a - bq_1 - bq_2) + (-b)(q_1 + q_2) - MC_2(q_2) = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(5.199)}$$

При решении системы уравнений **(5.199)** видно, что для любой комбинации равновесных значений объемов выпуска фирм $(q_1^*; q_2^*)$ их предельные издержки будут равны между собой: $MC_1(q_1^*) = MC_2(q_2^*)$. С одной стороны, по виду функций **(5.199)** ясно, что равенство пре-

[1] Читатель может проверить себя, выполняя задания, приведенные в конце главы 5.

дельных издержек выполняется в условиях равновесия при любом количестве фирм в отрасли. С другой стороны, оно будет выполняться вне зависимости от вида функции спроса на продукцию отрасли.

Для функции $p = p(Q)$, где $Q=\sum_{j=1}^{n} q_j$, частные производные по объемам выпуска конкурентов будут равны между собой: $\frac{\partial p}{\partial q_i}=\frac{dp}{dQ}\frac{\partial Q}{\partial q_i}=\frac{dp}{dQ}$, поскольку при нулевых предполагаемых вариациях $\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_i}=0 \text{ при } i \neq j\right)$ очевидно, что $\frac{\partial Q}{\partial q_i}=1$.

Таким образом, в условиях равновесия для любого i

$$\mathrm{MC}_i(q_i^*)=p(Q^*)+\frac{dp}{dQ}\cdot Q^*. \tag{5.200}$$

При организации картеля фирмы заинтересованы в максимизации совокупной прибыли отрасли, а не только своей прибыли. Поэтому они учитывают влияние снижения цены как на уровень своего собственного выпуска, так и на объем выпуска конкурентов[1]. В результате предельный доход от производства дополнительной единицы товара (в правой части равенства **(5.200)**) будет одинаковым для любой фирмы картеля, а предельные издержки фирм будут равны между собой.

В точке равновесия картеля из n фирм условие **(5.199)** примет вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=p(Q^*)+\frac{dp}{dQ}\cdot Q^*-\mathrm{MC}_i(q_i^*)=0. \tag{5.200'}$$

Оценим направление изменения прибыли, например, первого олигополиста. Частная производная прибыли первого олигополиста по переменной, характеризующей его объем выпуска, положительна:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}=p(Q^*)+\frac{dp}{dQ}\cdot q_1^*-\mathrm{MC}_1(q_1^*)=-\frac{dp}{dQ}\left(\sum_{j=2}^{n} q_j^*\right)>0, \tag{5.201}$$

---

[1] В равенстве (5.200) на это указывает умножение производной $\frac{dp}{dQ}$ на весь отраслевой объем выпуска Q^*, а не только на объем выпуска отдельной фирмы, как это происходит при максимизации ее прибыли.

поскольку функция рыночного спроса убывает $\left(\frac{dp}{dQ} < 0\right)$. Это означает, что он может увеличить объем получаемой прибыли, расширив масштабы производства. В аналогичной ситуации находятся другие олигополисты.

Стратегия одностороннего увеличения производства выгодна для любой фирмы картеля. Причем любая фирма захочет быть первой, пока ее не опередили конкуренты. Таким образом, искушение нарушить картельное соглашение велико при любой структуре функций спроса и издержек, а также при любом числе фирм в отрасли. Олигополисты должны иметь стимул, чтобы не нарушать соглашение.

Проанализируем ситуацию подробнее, используя конкретный числовой пример. Пусть на рынке дуополии функционируют две фирмы, имеющие разные условия по издержкам производства:

$$TC_1 = 500 + 160q_1 + 2(q_1)^2; \tag{5.202}$$

$$TC_2 = 2000 + 40q_2 + 2(q_2)^2. \tag{5.203}$$

Очевидно, что в большинстве случаев (при $q > 12{,}5$) вторая фирма будет иметь преимущество в издержках при одинаковых объемах выпуска. Кроме того, при разделе рынка ее предельные издержки всегда будут ниже: $MC_2 = 40 + 4q < 160 + 4q = MC_1$. Возможно, вторая фирма сделала бóльшие первоначальные затраты и получила более выгодное оборудование или более современную технологию.

Если фирмы имеют разные предельные издержки, то они, как правило, придерживаются разных предпочтений при принятии стратегических решений. Мы видели[1], что на рынке однородной продукции может выиграть та фирма, предельные издержки которой меньше. Но в любом случае опасность возникновения ценовой войны велика, а значит, заключение картельного соглашения имеет свои преимущества. При этом появляется проблема согласования решений между фирмами — членами картеля.

Предположим, что в нашем примере функция рыночного спроса на продукцию имеет вид:

$$p = 400 - 2Q, \tag{5.204}$$

где $Q = q_1 + q_2$.

---

[1] См. анализ модели олигополии Бертрана.

Предположим также, что конкуренты анализируют две возможности заключения картельного соглашения: первая — при условии максимизации совокупной прибыли отрасли[1]; вторая — при условии раздела рынка между членами картеля. Посмотрим, какие разногласия могут возникнуть между партнерами.

В первом случае решается задача на максимум совокупной прибыли отрасли. Для рассматриваемых нами двух участников картельного соглашения ищем максимум функции:

$$\Pi = (400 - 2q_1 - 2q_2)(q_1 + q_2) - 500 - 160q_1 - 2(q_1)^2 - 2000 - 40q_2 - 2(q_2)^2.$$

Необходимое условие экстремума задает систему линейных уравнений, которая имеет единственное решение: $q_1 = 10$, $q_2 = 40$. Совместный отраслевой выпуск составит 50 (Q = 50) при равновесной цене, равной 300 (p = 300), что обеспечит максимальный уровень прибыли отрасли, равный 5900 ($\Pi = 5900$). В соответствии с алгоритмом решения модели отраслевая прибыль распределится следующим образом: прибыль первой фирмы составит $\Pi_1 = 700$; прибыль второй фирмы $\Pi_2 = 5200$. Пока трудно ответить на вопрос, согласятся ли конкуренты с таким распределением прибыли.

Мы знаем, что существует соблазн нарушить картельное соглашение. Посмотрим, как в этом случае изменятся параметры равновесия.

Если первая фирма решила нарушить картельное соглашение, то она будет решать задачу на максимум своей прибыли при условии, что вторая фирма будет придерживаться равновесного объема выпуска:

$$\Pi_1 = (400 - 2q_1 - 2q_2)q_1 - 500 - 160q_1 - 2(q_1)^2 \qquad \textbf{(5.205)}$$

$$\text{при } q_2 = 40 \quad \left(\frac{dq_2}{dq_1} = 0\right).$$

В результате первая фирма может расширить масштабы своей деятельности в два раза ($q_1 = 20$), увеличив совокупное предложение в отрасли (Q = 60). Цена на рынке понизится до 280, соответственно понизится уровень совокупной прибыли отрасли ($\Pi = 5500$). Распределение отраслевой прибыли улучшит положение первой фирмы: она получит 1100 вместо 700, а второй фирме достанется 4400 вместо 5200.

Если вторая фирма захочет нарушить картельное соглашение, то она будет решать аналогичную задачу на максимум прибыли:

[1] Иногда в этом случае говорят об организации совместного производства.

$$\Pi_2 = (400 - 2q_1 - 2q_2)q_2 - 2000 - 40q_2 - 2(q_2)^2 \qquad \textbf{(5.206)}$$

$$\text{при } q_1 = 10 \quad \left(\frac{dq_1}{dq_2} = 0\right).$$

В результате она сможет лишь чуть-чуть расширить масштабы своей деятельности ($q_2 = 42{,}5$), совокупное предложение в отрасли возрастет также незначительно (Q = 52,5). Цена на рынке понизится до 295, а отраслевая прибыль уменьшится до 5875. Распределение прибыли показывает, что вторая фирма получит небольшую выгоду при нарушении картельного соглашения: $\Pi_1 = 650$; $\Pi_2 = 5225$, т.е. ей достанется 5225 вместо 5200, а первая фирма немного проиграет и получит 650 вместо 700.

Очевидно, что нарушение картельного соглашения — прежде всего, в интересах первой фирмы. Однако пока трудно сказать, как это в конечном итоге может повлиять на устойчивость картельного соглашения. Ведь математические модели только предлагают варианты решения, но не могут заменить согласование решений в процессе переговоров между членами картеля.

Математическая задача может вообще не иметь решения, например, в условиях рыночного спроса **(5.7)** при линейных издержках производства **(5.170)**, когда предельные издержки фирм равны средним, но не равны между собой ($c_1 \neq c_2$). Но это совсем не означает, что фирмы не могут заключить картельное соглашение. Все зависит от ситуации на конкретном рынке.

При условии раздела рынка между участниками картеля их объемы выпуска равны между собой и составляют половину отраслевого объема производства, где $q_1 = q_2 = q$, $Q = 2q$. При этом функция рыночного спроса фактически примет вид функции спроса на продукцию каждой отдельной фирмы: $p = 400 - 4q$. Значит, фирмы будут иметь одинаковый уровень предельного дохода ($\mathrm{MR}_1 = \mathrm{MR}_2$). Напомним, что вторая фирма имеет преимущество в предельных издержках. Соответственно, фирмы будут заинтересованы в разных уровнях выпуска (q) при разных рыночных ценах.

Легко рассчитать, какой вариант квот выгоден для первой, а какой — для второй фирмы. Для этого каждая фирма решает задачу на максимум своей прибыли [см. **(5.205)**, **(5.206)**] при условии $q_1 = q_2 = q$.

Вариант, выгодный для первой фирмы, будет представлен следующими параметрами:

$$q = 20\,;\ p = 320\,;\ Q = 40\,;\ \Pi = 4700\,;\ \Pi_1 = 1900;\ \Pi_2 = 2800. \qquad \textbf{(5.207)}$$

Вариант, выгодный для второй фирмы, окажется иным:

$$q = 30;\ p = 280;\ Q = 60;\ \Pi = 4700;\ \Pi_1 = 1300;\ \Pi_2 = 3400. \quad \textbf{(5.208)}$$

Естественно предположить, что переговоры будут происходить в рамках границ изменения параметров рыночного равновесия, заданных условиями **(5.207)**, **(5.208)**. Очевидно, что раздел рынка невыгоден второй фирме. Она много теряет в прибыли по сравнению с условием заключения картельного соглашения, максимизирующего совокупную прибыль отрасли. Вторая фирма сделает все возможное, чтобы не заключить договор о разделе рынка. Следовательно, остается только первая возможность заключения картельного соглашения.

Математическая модель помогла преодолеть первые этапы заключения соглашения об организации совместного производства, а именно: установить общий объем производства (Q = 50), выбрать соответствующую цену (p = 300) и тем самым обеспечить максимально возможную совокупную прибыль в отрасли ($\Pi = 5900$). Но участники картеля могут по своему усмотрению (не считаясь с результатами модели) распределить объемы производства и доли прибыли между собой.

Установление квот по объему выпуска и по распределению прибыли картеля может происходить бесконфликтно, пожалуй, только в случае равных условий по издержкам производства: можно все поделить поровну. При асимметрии в издержках производства одно из решений предлагает математическая модель.

Сравнение параметров равновесия в моделях, которые мы просчитали, показывает, что вторая фирма в большей степени заинтересована в образовании картельного соглашения, чем первая. В процессе переговоров ей выгодно стимулировать партнера для поддержания картельного соглашения. Это можно сделать при определении квот.

Предположим, что прибыли картелированных фирм объединяются в общий фонд[1], а затем перераспределяются. Возникает вопрос, к какому соглашению могут прийти фирмы при распределении совокупной прибыли отрасли в нашем примере.

Очевидно, что математическая модель картеля определяет верхнюю границу уровня прибыли для второй фирмы ($\Pi_2 = 5200$) и нижнюю — для первой ($\Pi_1 = 700$). При нарушении картельного соглашения (в случае обмана) первая фирма может увеличить свою прибыль до 1100, но она должна осознавать, что такой выигрыш

---

[1] В этом случае принято говорить о формировании общего пула (от английского словосочетания «*common pool*»).

будет одномоментным. Поэтому 1100 — это верхняя граница возможной прибыли первой фирмы при заключении картельного соглашения. В результате обмана вторая фирма может понизить свою прибыль до 4400, но потери второй фирмы в этом случае в два раза превышают выигрыш первой фирмы (5200 − 4400 = 800; 1100 − 700 = = 400), и она знает об этом. Поэтому нижняя граница уровня прибыли для второй фирмы в процессе переговоров, скорее всего, составит 4800. Ведь чтобы удовлетворить притязания партнера, второй фирме достаточно передать первой 400 единиц прибыли. Мы получаем следующие диапазоны изменения параметров прибыли в процессе переговоров:

$$700 \le \Pi_1 \le 1100; \quad 4800 \le \Pi_2 \le 5200. \qquad \textbf{(5.209)}$$

В рамках картельного соглашения возможна так называемая прямая передача части прибыли от одной фирмы к другой. Это происходит за счет перераспределения общего фонда прибыли картеля. Но возможен другой способ перераспределения прибыли: установление квот по объему выпуска для каждого члена картеля. Установление квот происходит в рамках общего монопольного уровня выпуска (в нашем примере — в рамках $Q = 50$).

Найдем возможные пределы изменения квот в процессе переговоров. Их можно рассчитать, используя диапазоны изменения параметров прибыли **(5.209)**. Получим две системы неравенств:

$$700 \le 300q_1 - (500 + 160q_1 + 2q_1^2) \le 1100; \qquad \textbf{(5.210)}$$

$$4800 \le 300q_2 - (2000 + 40q_2 + 2q_2^2) \le 5200, \qquad \textbf{(5.211)}$$

в результате решения которых установим диапазоны изменения уровней выпуска фирм картеля:

$$10 \le q_1 \le 14{,}385; \quad 36{,}275 \le q_2 \le 40. \qquad \textbf{(5.212)}$$

Предположим, что фирмы договорились об установлении квот по объему выпуска в размере: $q_1 = 13$, $q_2 = 37$. В этом случае первая фирма обеспечит себе прибыль на уровне 982 $(\Pi_1 = 928)$, а вторая — на уровне 4882 $(\Pi_2 = 4882)$. При этом по сравнению с параметрами равновесия в модели картельного соглашения выигрыш первой фирмы составит 282, а проигрыш второй фирмы составит 318. Это приведет к понижению уровня прибыли картеля до 5864 $(\Pi = 5864)$. Пример показывает, что прямое перераспределение совокупной прибыли картеля может быть выгоднее для его членов, чем установление квот по объему выпуска.

Существует еще один, иногда достаточно болезненный, способ организации производства в картеле. Он связан с прекращением деятельности одной из фирм, входящих в картель. В нашем примере вторая фирма имеет преимущество в издержках производства. Поставим вопрос: Какими будут параметры рыночного равновесия, если вторая фирма станет монополистом на рынке? Расчет по модели монополии показывает, что выпуск в отрасли немного понизится (с 50 до 45). Равновесная цена, естественно, возрастет (с 300 до 310) и вторая фирма сможет обеспечить себе прибыль на уровне 6100.

Таким образом, первая фирма может быть закрыта с компенсацией постоянных издержек. Вторая фирма уже на первом этапе получит прибыль больше, чем в рамках картельного соглашения (6100 — 500 = 5600 > 5200). Правда, прибыль отрасли уменьшится (5600 < 5900). Но в последующие периоды весь отраслевой спрос будет обеспечиваться фирмой с более низкими предельными издержками. Вторая фирма-монополист будет получать монопольную прибыль, уровень которой выше уровня прибыли картеля.

Закрытие любой фирмы порождает проблемы неэкономического характера, часто непреодолимые. Поэтому при создании картеля всегда должны быть предусмотрены меры борьбы с нарушителями. Потенциальный нарушитель должен чувствовать неотвратимость возмездия.

Безусловно, существует угроза ценовой войны. Однако принято считать, что при распаде картеля на рынке установится некооперативное равновесие по Курно. Для определения устойчивости картеля лучше использовать многопериодные модели. Ведь агрессивные действия фирмы в одном периоде чаще вызывают возмездие не сразу, а в последующих периодах.

Для полноты анализа рассмотрим бесконечно действующий рынок при предпосылках **(5.7)—(5.9)**. Напомним, что при этих условиях фирмы идентичны, а в условиях картельного соглашения получают прибыль в размере:

$$\Pi_c = \frac{(a-c)^2}{8b}. \qquad (5.157)$$

Нарушитель картельного соглашения в момент нарушения увеличит свою прибыль до уровня:

$$\Pi_h = \frac{9(a-c)^2}{64b}. \qquad (5.160)$$

В условиях равновесия по Курно дуополист получает меньшую прибыль:

$$\Pi_k = \frac{(a-c)^2}{9b}. \qquad (5.27)$$

Очевидно, что $\Pi_h > \Pi_c > \Pi_k$.

Наказание за обман заключается в том, что в следующие периоды времени обманутая фирма откажется от картельного соглашения, и некооперативное равновесие установится навсегда. Возникает вопрос: Выгодно обманывать при таких условиях или нет?

Пусть ставка дисконта равна *r*. В момент нарушения картельного соглашения обманщик получает прибыль Π_h вместо прибыли Π_c. Различие в размерах прибыли ($\Pi_h - \Pi_c$) показывает чистый выигрыш от обмана, причем этот выигрыш можно получить только в первом периоде. Если во всех последующих периодах на рынке установится равновесие по Курно, то чистые потери будут равны разности между уровнем прибыли в рамках картеля и уровнем прибыли в модели Курно ($\Pi_c - \Pi_k$). Приведенная к текущему моменту времени стоимость чистых потерь составит[1]

$$\frac{(\Pi_c - \Pi_k)}{(1+r)} + \frac{(\Pi_c - \Pi_k)}{(1+r)^2} + \ldots = \frac{(\Pi_c - \Pi_k)}{r}. \qquad \mathbf{(5.213)}$$

Обман будет выгоден, если чистый выигрыш от обмана превышает приведенную стоимость чистых потерь:

$$\Pi_h - \Pi_c > \frac{(\Pi_c - \Pi_k)}{r}. \qquad \mathbf{(5.214)}$$

Используя равенства **(5.160)**, **(5.157)**, **(5.27)**, получим

$$\frac{9(a-c)^2}{64b} - \frac{(a-c)^2}{8b} > \frac{1}{r}\left[\frac{(a-c)^2}{8b} - \frac{(a-c)^2}{9b}\right]. \qquad \mathbf{(5.215)}$$

Решив неравенство **(5.215)**, мы выясним, что обман выгоден только при очень высокой ставке дисконта — при $r > \frac{8}{9} = 0,(8)$. Ставка дисконта оказывает существенное влияние на процесс принятия решений в многопериодных моделях.

---

[1] При расчете используется формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 — первый член прогрессии $\left(b_1 = \frac{\Pi_c - \Pi_k}{1+r}\right)$, q — знаменатель прогрессии $\left(q = \frac{1}{1+r}\right)$.

Проверим, будет ли угроза наказания за обман действенной в нашем конкретном примере. Для этого найдем параметры равновесия по Курно. Результат расчетов по модели будет в точности совпадать с параметрами неустойчивого равновесия, которое установится на рынке, если первая фирма нарушит картельное соглашение. Это означает, что нарушитель не будет бояться возмездия.

Кроме того, в процессе переговоров диапазон изменения уровня прибыли первой фирмы практически сократится до одной точки. Первая фирма будет настаивать на получении объема прибыли, который ее вполне устраивает. Если на рынке установится равновесие по Курно, то вторая фирма окажется в значительном проигрыше, поэтому ей придется удовлетворить требования конкурента, чтобы не разрушать картельное соглашение[1].

Из анализа ясно: если фирмы в условиях олигополии имеют разные условия по издержкам производства, то могут возникнуть конфликты, влияющие на процесс максимизации прибыли отрасли, а принятие решения при выработке стратегического поведения требует рассмотрения значительного числа вариантов.

Вопросы и задания

1. Перечислите предпосылки и характеристики, общие для всех рассмотренных моделей олигополии. Каковы основные признаки и отличия моделей?
2. Проведите сравнительный анализ моделей дуополии. Оцените равновесные параметры моделей дуополии в сравнении с параметрами равновесия для конкуренции и монополии.
3. Всегда ли аналитическое решение модели позволяет оценить параметры рыночного равновесия? В чем заключается проблема оценки поведения конкурентов на рынке? Почему говорят о несовместимости нулевых предполагаемых вариаций?
4. В чем особенности стратегического взаимодействия фирм по принципу «лидер — последователь»? Всегда ли существует признанный лидер на рынке? При каких условиях может быть спровоцирована борьба за лидерство, и чем она может закончиться?
5. Что такое «ценовая война»? При каких условиях она может начаться? В каких случаях угроза ценовой войны может повлиять на стратегическое поведение олигополистов?
6. В чем заключается парадокс Бертрана? Что лежит в основе парадокса Бертрана, и существуют ли пути его решения? Дайте определение понятия «гиперконкуренция».

---

[1] Возможно, ей придется стимулировать конкурента в большем размере. Ведь ее потери значительны при переходе рынка к модели некооперативного равновесия Курно.

7. Каким образом ограничение на производственную мощность может повлиять на стратегическое поведение олигополистов? Изменятся ли при этом параметры рыночного равновесия?
8. Почему на рынках олигополии у фирм есть стимулы для сговора? В чем слабые и сильные стороны явного и тайного сговора? Оцените возможность нарушения достигнутого соглашения. При каких условиях появляются проблемы согласования действий олигополистов?
9. Что влияет на устойчивость картеля? Почему стратегия одностороннего увеличения производства выгодна для любой фирмы картеля? Можно ли стимулировать партнеров не нарушать картельное соглашение? Существуют ли угрозы наказания за обман?
10. Как изменяются параметры рыночного равновесия с увеличением числа фирм на рынке? Сравните ситуации в моделях Курно и Бертрана при одинаковых и разных издержках производства конкурирующих фирм.
11. Что происходит на рынке олигополии Стэкльберга при изменении следующих параметров: числа фирм-последователей и размера преимущества фирмы-лидера в издержках? Сравните параметры рыночного равновесия в моделях олигополии Курно и Стэкльберга.
12. В чем особенности модели доминирующей фирмы Форхаймера? Какие виды равновесия возможны? Что такое «ценовой зонтик»? Как он может повлиять на структуру рынка доминирующей фирмы?
13. Оцените возможности и поясните проблемы применения моделей стратегического взаимодействия фирм в практике реального функционирования отраслей и рынков.
14. Рассмотрим случай дуополии, производящей однородный продукт. Первая фирма производит одну единицу продукции, затрачивая 30 единиц труда и 30 единиц капитала. Вторая фирма производит одну единицу продукции, затрачивая 30 единиц труда и 60 единиц капитала. Цена единицы труда равна w, цена единицы капитала равна r. Функция спроса на продукцию дуополии имеет вид: $P = 90 - Q$, где p — цена единицы продукции; $Q = q_1 + q_2$ (q_i — объем выпуска i-й фирмы).
   1. Вычислите параметры равновесия Курно.
   2. Покажите, что прибыль первой фирмы не зависит от цены капитала. Объясните, как это влияет на конкурентоспособность фирм в отрасли.
15. Отрасль состоит из трех идентичных фирм. Функция спроса имеет вид: $p = 120 - Q$, где $Q = q_1 + q_2 + q_3$ (q_i — объем выпуска i-й фирмы). Предельные издержки каждой фирмы равны нулю. Средние издержки относительно малы.
   1. Вычислите параметры равновесия Курно.
   2. Покажите: если две из трех фирм сольются, превратив отрасль в дуополию, то прибыль вновь образовавшейся фирмы

станет меньше, чем совокупная прибыль двух фирм, решивших создать одну.

3. Что произойдет с параметрами равновесия, если сольются все три фирмы?

16. Рыночный спрос на продукцию описывается функцией: $p = 100 - 2Q$, где p — цена единицы продукции. Известно, что в год t фирма получила максимальную прибыль в размере 400. При этом ее предельные издержки были равны 20 при оптимальном объеме выпуска. В условиях какой рыночной структуры — монополии или олигополии — действовала фирма? Изменится ли вывод относительно структуры рынка, если в год t фирма получила максимальную прибыль в размере 1000?

17. Спрос на продукцию дуополии описывается функцией: $Q = 20 - 0{,}5p$, где p — цена единицы продукции. Рассчитайте равновесие по Курно и по Бертрану для случая, когда совокупные издержки фирм одинаковы в зависимости от уровня выпуска и равны $TC_i = 10q_i$. Как изменится ситуация в моделях Курно и Бертрана, если издержки одной из фирм возрастут, т.е. $TC_1 = 10q_1$, $TC_2 = 16q_2$? (Ответ обосновать аналитически.)

18. Рыночный спрос на продукцию описывается функцией: $Q = 100 - 0{,}5p$, где p — цена единицы продукции. Рассчитайте равновесие по Бертрану для случая n фирм в отрасли, когда все фирмы идентичны, а их средние и предельные издержки постоянны и равны 8. Как изменится ситуация на рынке, если только две фирмы смогут понизить уровень своих средних и предельных издержек до 6?

19. На рынке дуополии рыночный спрос задан функцией: $Q = 300 - p$, где p — цена единицы продукции. Фирмы производят однородный продукт с постоянными средними издержками, равными 60. Мощности фирм ограничены. Определите оптимальные ценовые стратегии фирм, если каждая фирма не может производить более x единиц товара, где: 1) $x = 100$; 2) $x = 140$; 3) $x = 230$; 4) $x = 80$; 5) $x = 50$. Покажите, как изменение параметра x влияет на размах колебания рыночной цены в условиях ценовой войны. При каких ограничениях на производственные мощности фирм модель Эджуорта является, по сути, моделью Бертрана?

20. Фирма доминирует на рынке, где кроме нее предлагают товар 20 аутсайдеров. Спрос на рынке описывается функцией: $Q = 960 - 5p$, где p — цена единицы товара. Предельные издержки доминирующей фирмы в долгосрочном периоде составляют: $MC_L = 0{,}12q_L$, где q_L — объем продаж фирмы-лидера. Предельные издержки каждой фирмы-аутсайдера в долгосрочном периоде составляют $MC_f = q_f + 2$, где q_f — выпуск f-й фирмы-аутсайдера. Определите равновесную цену на рынке, равновесные объемы продаж и прибыль доминирующей фирмы и каждой фирмы-аутсайдера. Работает ли на рынке «ценовой зонтик»? Имеет ли доминирующая фирма преимущество в издержках? Если да, то может ли она его реализовать?

21. Спрос на продукцию дуополии описывается функцией: $p = 100 - Q$, где p — цена единицы продукции. Функции издержек в зависимости от объема выпуска каждой фирмы имеют вид: $TC_1 = 12q_1 + 60$; $TC_2 = 0{,}25(q_2)^2 + 7$. Рассчитайте параметры равновесия в следующих случаях: 1) если первая фирма доминирует на рынке (является ценовым лидером); 2) если первая фирма является лидером по Стэкльбергу, а фирма-последователь реагирует на изменение объема выпуска фирмы-лидера в соответствии с линией реакции Курно; 3) оцените полученные результаты.

22. Спрос на продукцию дуополии описывается функцией: $p = 30 - Q$, где p — цена единицы продукции. Функции издержек в зависимости от объема выпуска каждой фирмы имеют вид: $TC_1 = 1{,}5(q_1)^2 + 1$, $TC_2 = 8q_2 + 9$. Рассчитайте параметры равновесия на рынке в трех случаях: 1) если вторая фирма является ценовым лидером на рынке; 2) если вторая фирма является лидером по Стэкльбергу, а первая фирма реагирует на изменение объема выпуска фирмы-лидера в соответствии с функцией реакции Курно; 3) если фирмы вступят в картельное соглашение при условии максимизации совокупной прибыли отрасли. Сравните полученные результаты, оцените устойчивость картеля.

23. Рыночный спрос описывается функцией $Q = 1420 - 2p$, где p — цена единицы продукции. В отрасли действуют 20 одинаковых фирм. Предельные издержки каждой фирмы в долгосрочном периоде описываются уравнением: $MC_i = 2q_i + 10$, где q_i — объем выпуска фирмы.

1. Четыре фирмы объединяются в картель и приобретают роль ценового лидера на рынке. Определите оптимальный объем выпуска картеля и некартелированных фирм, а также цену, которая складывается на рынке. Сравните прибыли фирм, входящей и не входящей в картель. Сделайте вывод об устойчивости картеля.
2. Докажите, что при любом количестве, меньшем 20, фирм в картеле, доминирующем на рынке, прибыль картелированной фирмы будет меньше, чем прибыль фирмы вне картеля.
3. Проанализируйте ситуацию, когда все 20 фирм образуют картель. При какой ставке процента фирме выгодно нарушить такое картельное соглашение на бесконечно действующем рынке.

24. Спрос на продукцию дуополии описывается функцией: $p = 600 - 2Q$, где p — цена единицы товара. Функции издержек в зависимости от объема выпуска каждой фирмы имеют вид: $TC_1 = 8000 + 60q_1 + (q_1)^2$; $TC_2 = 4000 + 120q_2 + (q_2)^2$.

1. Рассчитайте параметры равновесия, если фирмы вступят в картельное соглашение с условием максимизации прибыли отрасли.
2. Как изменятся параметры равновесия, если: 1) первая фирма нарушит картельное соглашение; 2) вторая фирма нарушит картельное соглашение?
3. Предположим, что фирмы заключили договор о разделе рынка пополам. Какой вариант квот выгоден для первой фирмы, а какой — для второй?
4. Сравните полученные результаты. Проведите анализ и сделайте вывод о том, к какому соглашению могут прийти фирмы.

25. Рыночный спрос на продукцию описывается функцией $D(p)$, где p — цена единицы продукции. Известны функции издержек в зависимости от объема выпуска каждой фирмы: $TC_1(q_1)$ и $TC_2(q_2)$. Проведите сравнительный анализ моделей рынка и заполните следующую таблицу в трех вариантах, если:

1) $D(p)$: $Q = 12{,}5 - 0{,}5p$; $TC_1 = 3q_1 + 10$; $TC_2 = 2q_2 + 15$;

2) $D(p)$: $Q = 120 - p$; $TC_1 = (q_1)^2 + 5$; $TC_2 = (q_2)^2 + 10$;

3) $D(p)$: $Q = 60 - p$; $TC_1 = 6q_1 + 5$; $TC_2 = 0{,}5(q_2)^2 + 1$.

Тип рынка	*Равновесная цена*	*Выпуск отрасли*	*Прибыль отрасли*	*Выпуск фирмы*	*Прибыль фирмы*
Первая фирма-монополист					
Вторая фирма-монополист					
Дуополия Курно					
Первая фирма-лидер по Стэкльбергу					
Вторая фирма-лидер по Стэкльбергу					
Борьба за лидерство					

Во всех трех случаях оцените возможности создания картеля, а также возможности доминирования первой или второй фирмы по цене. Продолжите заполнение таблицы, если можно использовать математические модели для расчета параметров равновесия для указанных типов рынка. Проведите сравнительный экономический анализ.

6 Модели долгосрочного экономического равновесия

В настоящей главе проанализированы модели общего экономического равновесия с точки зрения долгосрочного аспекта рассмотрения. Первая из них представляет собой модель сравнительной статики в предположении полной гибкости цен и неизменности ресурсов. Вторая и третья модели, посвященные проблемам экономического роста, исследуют экономическую динамику при гибких ценах и изменяющихся ресурсах.

6.1. Неоклассическая модель экономического равновесия

Настоящий параграф посвящен описанию классической модели общего равновесия. В классической модели предполагается, что цены являются *гибкими*, т.е. могут свободно изменяться, чтобы уравновесить спрос и предложение на всех рынках. В действительности, на одних рынках цены изменяются мгновенно, а на других они могут быть фиксированными в течение нескольких месяцев или даже лет (например, на рынке труда в случае заключения трудовых контрактов). Из предположения о свободном изменении цен следует, что классическая модель описывает процесс установления общего равновесия с точки зрения долгосрочного аспекта рассмотрения.

Далее даются ответы на четыре вопроса:

1. Что определяет уровень выпуска (ВВП) в экономике?
2. Каким образом распределяется доход от производства между работниками и собственниками капитала?
3. Что определяет объемы, в которых доход используется на потребление, инвестиции и государственные закупки?
4. Каким образом обеспечивается достижение равновесия на рынке товаров и услуг?

Рассмотрение поставленных вопросов следует начинать со схемы кругооборота денежных средств в закрытой экономике (где отсутствуют внешнеторговые связи), рис. 6.1.

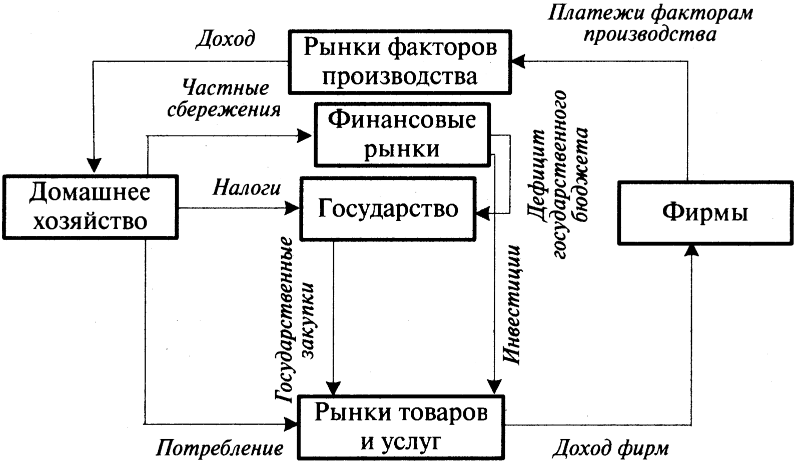


Рис. 6.1. ***Схема кругооборота доходов и расходов в закрытой экономике***

Схема показывает, что на рынке товаров и услуг $Y = C + I + G$, т.е. выпуск Y используется на потребление C, инвестиции I и государственные закупки G. Доход от производства расходуется на платежи за факторы производства; дефицит государственного бюджета равен разности государственных закупок и налогов; на рынках заемных средств частные сбережения расходуются на инвестиции и покрытие дефицита государственного бюджета.

6.1.1. Производство товаров и услуг

В модели рассматриваются только два фактора производства: труд и капитал. *Капитал* — это орудия производства, используемые работниками, *труд* — это время, которое они затрачивают на работу. Ресурсами производства являются запас капитала K и труда L. Предполагается, что количество каждого из факторов производства, которыми располагает экономика, фиксировано: $K = \overline{K}$; $L = \overline{L}$ и факторы производства используются полностью. Объем выпускаемой продукции определяется существующей технологией и имеющимися запасами факторов производства. Максимально возможный объем выпуска, который может быть получен при существующей технологии и имеющихся запасах факторов производства, описывается производственной функцией $Y = F(K, L)$.

Обычно предполагается, что производственная функция обладает следующими свойствами:

1. Выпуск равен нулю, если хотя бы один из факторов производства не используется:

$$F(K, 0) = F(0, L) = 0.$$

2. С ростом одного из факторов производства выпуск увеличивается:

$$F'_K(K,L) > 0; \; F'_L(K,L) > 0.$$

3. Увеличение использования одного фактора при неизменном объеме другого приводит к уменьшению отдачи первого (убывающая предельная производительность факторов):

$$F''_{KK}(K,L) < 0; \quad F''_{LL}(K,L) < 0.$$

4. С ростом использования одного из факторов отдача от увеличения использования в производстве второго фактора увеличивается:

$$F''_{KL}(K,L) = F''_{LK}(K,L) > 0.$$

5. При изменении объема каждого фактора в α раз ($\alpha > 0$), выпуск изменяется в α^n раз (однородность степени n):

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha^n F(K, L), \; \alpha > 0.$$

При $n = 1$ функция является однородной первой степени и называется производственной функцией экономики с постоянной отдачей от масштаба. При $n > 1$ производственная функция называется функцией с возрастающей отдачей от масштаба, а при $n < 1$ — функцией с убывающей отдачей от масштаба.

В рассматриваемой модели предполагается, что производственная функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, т.е. изменение всех факторов производства в α раз приводит к изменению объема выпуска в α раз:

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L).$$

В экономических расчетах наиболее употребительными являются следующие производственные функции:

1) *функция Кобба—Дугласа*: $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где A, α, β — положительные параметры;

2) *функция Леонтьева*: $Y = \min\left(\frac{K}{a}; \frac{L}{b}\right)$, где a, b — параметры (a, $b > 0$);

3) *функция* CES[1] (с постоянной эластичностью замены):

$$Y = A\left(uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho}\right)^{-\frac{n}{\rho}},$$

$\rho > -1$; $0 < u < 1$; $A > 0$; $n > 0$, где A, ρ, u, n — параметры.

[1]CES — *constant elasticity of substitution* (англ).

Зная вид производственной функции и используя предположение о фиксированном количестве ресурсов, можно получить объем продукции, выпускаемой в экономике:

$$Y = F(\bar{K}, \bar{L}) = \bar{Y}.$$

Величину $\bar{Y}$ называют естественным, потенциальным или долгосрочным уровнем выпуска. В каждый момент времени естественный уровень выпуска определяется объемами запасов ресурсов и технологией.

6.1.2. Распределение национального дохода по факторам производства

Рассмотрим, как происходит распределение национального дохода между работниками и собственниками капитала с точки зрения *неоклассической теории распределения*.

Поскольку в классической модели рынки всех факторов производства находятся в равновесии, цены факторов определяются спросом и предложением на этих рынках. В модели предполагается, что имеющиеся ресурсы используются полностью, т.е. предложение на рынках ресурсов фиксировано. Поэтому цены факторов производства в основном зависят от спроса.

Предположим, что в экономике функционируют только небольшие конкурирующие между собой фирмы, которые не оказывают влияния на цены продаваемой и используемой для производства продукции. Будем считать, что капиталом и трудом владеют домашние хозяйства, которые продают фирмам свой труд и сдают в аренду капитал. Пусть P — цена единицы продукции, выпускаемой фирмами (цена единицы ВВП); R — арендная цена капитала; W — номинальная ставка заработной платы, тогда прибыль фирмы П равна:

$$\Pi = PY - RK - WL = PF(K, L) - RK - WL.$$

Конкурентная фирма выбирает такие количества труда и капитала, которые максимизируют ее прибыль. Поэтому фирма выберет такой объем труда, при котором

$$F'_L(K, L) = \frac{W}{P},$$

где $F'_L(K, L)$ — предельная производительность труда (MPL); $\frac{W}{P}$ — реальная ставка заработной платы (плата за труд, выраженная в единицах произведенной продукции).

Таким образом, при данной величине реальной заработной платы фирма будет нанимать работников до тех пор, пока предельная производительность труда не сравняется с этой величиной. График MPL представляет собой кривую спроса фирмы на труд и носит понижающийся характер, так как предельная производительность фактора является убывающей функцией от объема его использования. Кривая предложения труда — вертикальная линия. Их пересечение определяет равновесную цену на рынке труда (рис. 6.2).

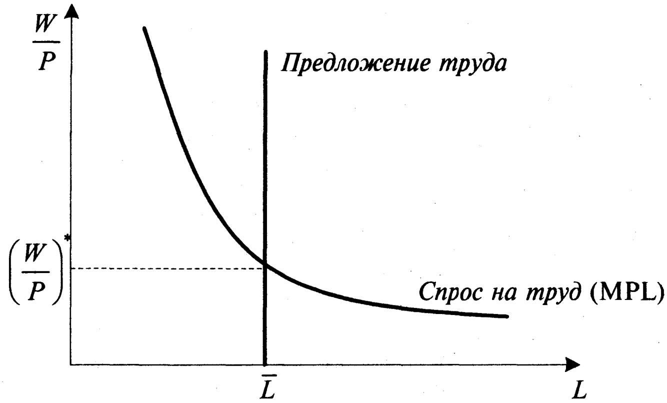


Рис. 6.2. ***Долгосрочное равновесие на рынке труда***

Аналогично фирмы арендуют капитал в таком объеме, при котором предельный продукт капитала (MPK) равен реальной арендной цене капитала $\frac{R}{P}$.

Поскольку равновесная реальная ставка заработной платы равна *MPL*, а равновесная реальная арендная цена капитала — MPK, то общие реальные расходы на заработную плату равны $\text{MPL} \cdot L$, а сумма реальных доходов собственников капитала равна $\text{MPK} \cdot K$.

Экономическая прибыль — это доход, остающийся у фирм после оплаты расходов на факторы производства. Реальная экономическая прибыль равна $Y - \text{MPL} \cdot L - \text{MPK} \cdot K$.

Так как производственная функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то по теореме Эйлера

$$Y = \text{MPL} \cdot L + \text{MPK} \cdot K.$$

Таким образом, экономическая прибыль фирм равна нулю, а значит, согласно неоклассической теории национальный доход распределяется на платежи за труд и платежи за капитал в соответствии с их предельными производительностями. Фирмы получают только бухгалтерскую прибыль, так как в реальности являются частично или полностью собственниками капитала.

6.1.3. Спрос на товары и услуги

Модель кругооборота иллюстрирует тот факт, что выпускаемая продукция используется на потребление, инвестиции и государственные расходы. Основная часть спроса на товары и услуги приходится на потребление.

Если обозначить чистые налоги (налоги, уплачиваемые государству, минус трансфертные платежи) через T, то располагаемый доход домашних хозяйств составит $(Y - T)$. Домашние хозяйства потребляют часть этого дохода, оставшееся — сберегают. В модели предполагается, что объем потребления C зависит от располагаемого дохода: $C = f(Y - T)$. Производная этой функции по располагаемому доходу показывает, как меняется потребление при малых изменениях дохода и называется предельной склонностью к потреблению (MPC). Предполагается, что $0 < MPC < 1$.

Часто функцию потребления записывают в линейной форме:

$$Y = a + b\,(Y - T),$$

где a, b — параметры (a, $b > 0$).

Тогда $MPC = b$, т.е. предельная склонность к потреблению постоянна.

Еще одно направление использования произведенной продукции — инвестиции. Инвестиционные товары приобретаются как фирмами для увеличения запаса капитала и замены изношенного оборудования, так и домашними хозяйствами, приобретающими новые дома для проживания и сдачи в аренду. Обычно предполагается, что объем инвестиций зависит от ставки процента. Различают номинальную и реальную ставки процента. Номинальную ставку процента инвесторы платят за заем денег. Реальная ставка процента r — это номинальная ставка процента i, скорректированная на темп инфляции π. При небольших темпах инфляции $r \approx i - \pi$. Точная формула:

$$r = \frac{i - \pi}{1 + \pi}.$$

Если темпы инфляции велики, то применение приближенной формулы некорректно.

Фирмы, решая вопрос об объеме инвестиций, сравнивают доход от инвестиционных проектов с издержками заимствования для их финансирования. Эти издержки связаны со ставкой процента обратной зависимостью, поэтому, чем выше ставка процента, тем меньше прибыльных инвестиционных проектов. Так как действительные издержки заимствования измеряются *реальной* ставкой процента, то инвестиции I описываются убывающей функцией от реальной ставки процента $I = I(r)$.

Следующим компонентом расходов являются государственные закупки *G*, в которые не включаются трансфертные платежи. Государство устанавливает объем закупок *G* и налогов *T*. В этом состоит его бюджетно-налоговая (фискальная) политика. Основной показатель результатов этой политики — бюджетный дефицит: DEF = *G* − *T*. Если правительство увеличивает объем закупок товаров и услуг или снижает налоги, то такая фискальная политика называется ***стимулирующей***; если, напротив, оно снижает объем закупок и увеличивает налоги, то эта политика называется ***сдерживающей***. В модели *G* и *T* являются экзогенными переменными:

$$G = \overline{G};\ T = \overline{T}.$$

Таким образом, равновесие на рынке товаров и услуг описывается следующей моделью:

$$Y = C + I + G; \qquad \textbf{(6.1)}$$

$$C = f(Y - T); \qquad \textbf{(6.2)}$$

$$I = I(r); \qquad \textbf{(6.3)}$$

$$G = \overline{G};\ T = \overline{T}; \qquad \textbf{(6.4)}$$

$$Y = F(\overline{K}, \overline{L}) = \overline{Y}. \qquad \textbf{(6.5)}$$

Подставив **(6.2)—(6.5)** в **(6.1)**, получим:

$$\overline{Y} = f(\overline{Y} - \overline{T}) + I(r) + \overline{G}\ . \qquad \textbf{(6.6)}$$

Из **(6.6)** видно, что уравновешивающей переменной в модели является реальная ставка процента. Именно ее изменение позволяет уравновесить предложение товаров и услуг в экономике $\overline{Y}$ со спросом на них $\overline{C} + I(r) + \overline{G}$.

Условие равновесия можно представить следующим образом:

$$\overline{Y} - f(\overline{Y} - \overline{T}) - \overline{G} = I(r),$$

отсюда

$$(\overline{Y} - f(\overline{Y} - \overline{T}) - \overline{T}) + (\overline{T} - \overline{G}) = I(r). \qquad \textbf{(6.7)}$$

Но $\overline{Y} - f(\overline{Y} - \overline{T}) - \overline{T}$ представляют собой частные сбережения $\overline{S}_P$, а $\overline{T} - \overline{G} = -\text{DEF}$. Следовательно, $\overline{S}_P - \text{DEF} = I(r)$.

$\overline{S}_G = -\text{DEF}$ — это общественные сбережения или сбережения государства. Национальные сбережения *S* представляют собой сумму частных и общественных сбережений. Из **(6.7)** $\overline{S}_P + \overline{S}_G = I(r)$. Отсюда $\overline{S} = I(r)$ — уравнение, описывающее равновесие на рынке заемных средств.

Если на рынке товаров и услуг предложение превышает спрос $Y > \overline{C} + I(r) + \overline{G}$, то это означает, что на рынках заемных средств сбережения превысят инвестиционный спрос $\bar{S} > I(r)$. Следовательно, ставка процента будет падать до тех пор, пока инвестиционный спрос не вырастет до такой степени, что спрос и предложение на рынке заемных средств сравняются. Аналогично, если спрос на товары и услуги превысит предложение, то спрос на рынке заемных средств превысит объем сбережений, что приведет к росту ставки процента до равновесного уровня.

Рассмотрим последствия бюджетно-налоговой политики в долгосрочном периоде.

Пусть государственные закупки увеличиваются на ΔG. Тогда частные сбережения не меняются, а государственные сбережения падают на ΔG. При прежней равновесной ставке процента инвестиционный спрос превысит сбережения, что приведет к росту ставки процента и падению инвестиций. Поскольку потенциальный выпуск, объем налогов, а следовательно, и потребление не меняются, то инвестиции упадут на ту же величину ΔG, на которую вырастут государственные расходы (рис. 6.3). Таким образом, в долгосрочном периоде последствием роста государственных закупок будет эквивалентное падение инвестиций, называемое ***вытеснением*** частных инвестиций.

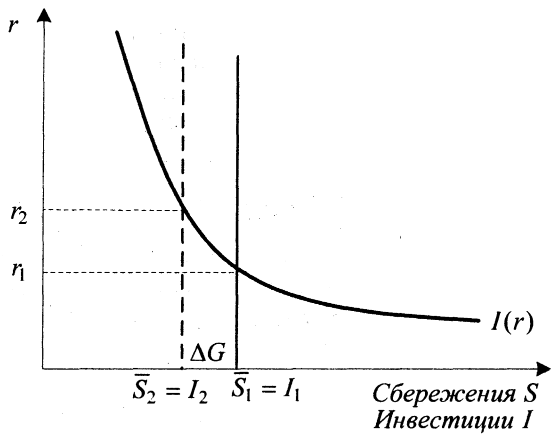


Рис. 6.3. ***Влияние увеличения государственных закупок на долгосрочное равновесие***

При снижении налогов на величину ΔT ($\Delta T > 0$), располагаемый доход увеличивается на ΔT, потребление увеличивается на $\Delta T \cdot \text{MPC}$, а государственные сбережения снижаются на ΔT. Частные сбережения увеличиваются на $(1 - \text{MPC}) \cdot \Delta T$, а национальные сбережения изменяются на $(1 - \text{MPC}) \cdot \Delta T - \Delta T = -\text{MPC} \cdot \Delta T$, т.е. снижаются на $MPC \cdot \Delta T$. Следовательно, и в этом случае происходит вытеснение инвестиций (рис. 6.4).

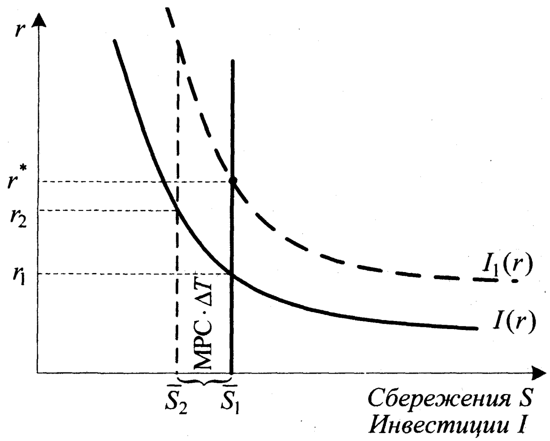


Рис. 6.4. ***Влияние увеличения налогов и сдвигов инвестиционного спроса на долгосрочное равновесие***

Если в силу каких-то причин растет инвестиционный спрос, т.е. происходит сдвиг функции инвестиционного спроса, то в рамках рассматриваемой модели равновесное значение инвестиций не изменится, только вырастет равновесная ставка процента. Это объясняется тем, что объем сбережений фиксирован и не зависит от ставки процента.

6.2. Экономический рост

С течением времени в долгосрочном периоде реальный доход страны, как правило, растет. Бывают периоды, когда он падает (периоды рецессий), но в целом тренд в долгосрочном аспекте указывает на постоянный рост. Колебания вокруг тренда называются *экономическим циклом.* Одна из задач макроэкономики — понять причины этих краткосрочных колебаний. Однако не менее важная задача — объяснить причины роста реального выпуска в долгосрочном периоде, проанализировать различные сценарии этого роста, определить показатели, влияющие на рост, и выявить причины межстрановых различий в уровне жизни.

В этом параграфе будут рассмотрены две модели экономического роста — модель Харрода—Домара и модель Солоу. Модель Харрода—Домара анализирует различные сценарии экономического роста в зависимости от характера динамики совокупного потребления. Модель Солоу исследует влияние на экономический рост сбережений, роста населения и технологического прогресса.

6.2.1. Модель Харрода—Домара

В модели делаются следующие предпосылки.

1. Рассматривается закрытая экономика (NX = 0).
2. В экономике отсутствует государственный сектор ($G = 0$).
3. Инвестиции вводятся мгновенно, т.е. отсутствует инвестиционный лаг ($\Delta K(t) = I(t)$).
4. Отсутствует технический прогресс.
5. Прирост выпуска пропорционален приросту запаса капитала с коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{B}$: $\Delta Y(t) = \frac{1}{B}\Delta K(t)$, где B — коэффициент приростной капиталоемкости $\left(B = \frac{\Delta K}{\Delta Y}\right)$, который показывает прирост запаса капитала, необходимый для приращения выпуска на единицу, $\frac{1}{B}$ является коэффициентом приростной капиталоотдачи: $\frac{1}{B} = \frac{\Delta Y}{\Delta K}$.
6. Коэффициент B и соответственно $\frac{1}{B}$ не меняются во времени.

Обозначим норму накопления в момент t через α_t $\left(\alpha_t = \frac{I(t)}{Y(t)}\right)$, а норму потребления через β_t $\left(\beta_t = \frac{C(t)}{Y(t)}\right)$.

Основное тождество национальных счетов в момент t имеет вид:

$$Y(t) = I(t) + C(t);$$

$$I(t) = \Delta K(t) = B\Delta Y(t).$$

В непрерывном случае:

$I(t) = B\dot{Y}(t)$, отсюда

$$Y(t) = B\dot{Y}(t) + C(t).$$

В модели Харрода—Домара рассматриваются три сценария экономического роста в зависимости от характера динамики потребления.

Случай 1. Потребление отсутствует, весь доход тратится на накопление

Эта гипотеза нереалистична, но позволяет дать оценку максимально возможного для данной экономики темпа роста доходов. При этом варианте $\alpha_t = 1$; $\beta_t = 0$:

$$Y(t) = B\dot{Y}(t). \qquad \textbf{(6.8)}$$

Решение **(6.8)** указывает на траекторию изменения доходов в этом случае:

$$Y(t) = Y(0)\ \mathrm{e}^{\frac{1}{B}t}. \qquad \mathbf{(6.9)}$$

Из **(6.9)** вытекает, что $\dfrac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \dfrac{1}{B}$, т.е. максимально возможный темп прироста дохода в случае, когда весь доход тратится на накопление, равен приростной капиталоотдаче. Поэтому $\dfrac{1}{B}$ часто называют непрерывным «технологическим» темпом прироста дохода.

С л у ч а й 2. Уровень потребления не зависит от времени

Предполагается, что потребление неизменно во времени:

$$C(t) = C(0) = C_0,\ C_0 = \mathrm{const}.$$

Тогда

$$Y(t) = B\dot{Y}(t) + C_0. \qquad \mathbf{(6.10)}$$

Из решения уравнения **(6.10)** следует, что

$$Y(t) = C_0 + (Y(0) - C_0)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{B}t}. \qquad \mathbf{(6.11)}$$

Условие **(6.11)** описывает траекторию роста дохода в случае, когда уровень потребления не изменяется во времени, тогда норма накопления

$$\alpha_t = \frac{I(t)}{Y(t)} = 1 - \frac{C_0}{C_0 + \left(Y(0) - C_0\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{B}t}}.$$

При $t \to \infty$ $Y(t) \to \infty$ и $\alpha_t \to 1$, а $\beta_t \to 0$.

Темп прироста национального дохода ρ_t в этом случае:

$$\rho_t = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{1}{B}\left(Y(0) - C_0\right)}{\frac{C_0}{\mathrm{e}^{\frac{1}{B}t}} + \left(Y(0) - C_0\right)}. \qquad \mathbf{(6.12)}$$

Из **(6.12)** следует, что при $t \to \infty$ $\rho_t \to \dfrac{1}{B}$. Иначе говоря, в предельном случае доля потребления уменьшается до нуля и темп прироста совпадает с непрерывным «технологическим» темпом.

С л у ч а й 3. Потребление растет с постоянным темпом *r*

Если

$$C(t) = C(0)e^{rt},$$

тогда

$$Y(t) = C(0)e^{rt} + B\dot{Y}(t).$$

Этот сценарий обычно рассматривается в трех вариантах.

■ ***Случай 3.1.*** *Потребление растет с темпом, равным технологическому темпу прироста дохода:* $r = \frac{1}{B}$,

тогда

$$Y(t) = C_0 e^{\frac{1}{B}t} + B\dot{Y}(t).$$

В этом случае траектория роста дохода имеет вид:

$$Y(t) = [Y(0) - \frac{C_0}{B}t]\, e^{\frac{1}{B}t}. \qquad \textbf{(6.13)}$$

Доход растет до тех пор, пока уровень накопления остается положительной величиной, так как если $I(t) < 0$, то $B\dot{Y}(t) < 0$ и, следовательно, $\dot{Y}(t) < 0$.

Для того чтобы определить интервал времени, в течение которого доход растет, необходимо решить уравнение:

$$I(t) = 0 \Rightarrow B\dot{Y}(t) = 0 \Rightarrow \dot{Y}(t) = 0.$$

Из **(6.13)** вытекает, что $\dot{Y}(t) = 0$ при $t_1 = B\left(\frac{1}{\beta_0} - 1\right)$, где $\frac{1}{\beta_0} = \frac{Y(0)}{C(0)}$.

Из **(6.13)** также можно получить, что $Y(t) = 0$ при $t_2 = B\frac{1}{\beta_0}$.

Таким образом, в случае, когда потребление растет с постоянным темпом, равным технологическому темпу прироста, доход растет в промежутке $]0;\ B\left(\frac{1}{\beta_0} - 1\right)[$, достигает своего максимального значения $y_{\max} = C(0)\, e^{\frac{1}{B}t_1}$ в момент $t_1 = B\left(\frac{1}{\beta_0} - 1\right)$, а затем начинает падать и становится равным 0 в момент $t_2 = B\frac{1}{\beta_0}$.

Траектории изменения дохода и накопления *в случае 3.1* представлены на рис. 6.5.

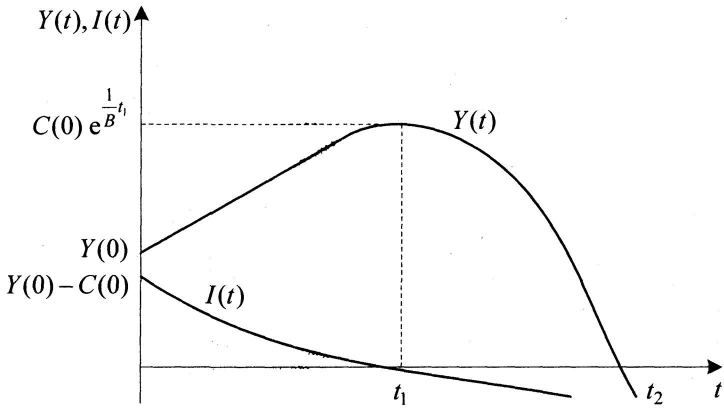


Рис. 6.5. ***Динамика дохода и накопления в случае 3.1***

■ ***Случай 3.2. Потребление растет с постоянным темпом, превышающим технологический темп прироста:***

$$C(t) = C(0)\,e^{rt}, \qquad r > \frac{1}{B},$$

тогда

$$Y(t) = C(0)\,e^{rt} + B\dot{Y}(t). \qquad \textbf{(6.14)}$$

Решение **(6.14)** показывает траекторию изменения дохода:

$$Y(t) = \left[Y(0) - \frac{C(0)}{1-Br}\right]e^{\frac{1}{B}t} + \frac{C(0)}{1-Br}\,e^{rt}. \qquad \textbf{(6.15)}$$

Из **(6.15)** вытекает, что темп прироста дохода в первоначальный момент времени $\frac{\dot{Y}(0)}{Y(0)}$ равен $\frac{\alpha_0}{B}$.

Таким образом, первоначальный темп прироста дохода положителен. Однако первое слагаемое в **(6.15)** положительно, а второе — отрицательно, поэтому этот случай аналогичен *случаю 3.1*: сначала доход будет расти, а начиная с некоторого момента начнет падать и в итоге упадет до 0.

■ ***Случай 3.3. Потребление растет с постоянным темпом, меньшим, чем технологический темп прироста:***

$$C(t) = C(0)\,e^{rt}, \qquad r < \frac{1}{B}.$$

Это означает, что в **(6.15)** первое слагаемое может быть больше 0, меньше 0 или равно 0.

Случай 3.3.1. *Темп прироста потребления меньше первоначального темпа прироста дохода.*

Пусть в (6.15) $Y(0)-\dfrac{C(0)}{1-Br}>0$, тогда $(1-Br)>\dfrac{C(0)}{Y(0)}$,

следовательно,

$$r<\frac{\alpha_0}{B}.$$

Таким образом, если темп роста потребления меньше темпа прироста дохода в первоначальный момент времени $r<\dfrac{\alpha_0}{B}=\rho_0$, то в **(6.15)** оба слагаемых положительны и доход неограниченно растет во времени.

При $t\to\infty$ $\alpha(t)\to 1$, $\beta(t)\to 0$, т.е. в предельном случае норма накопления равна 1, а потребления 0. Такой тип развития («накопление ради накопления») может быть целесообразным только на ограниченном отрезке времени.

Случай 3.3.2. *Потребление растет с постоянным темпом, меньшим технологического темпа прироста и равным* $\dfrac{\alpha_0}{B}$; $C(t)=C(0)\,e^{\frac{\alpha_0}{B}t}$,

тогда из **(6.15)**:

$$Y(t)=\frac{C(0)}{1-\alpha_0}e^{\frac{\alpha_0}{B}t};\qquad \frac{C_0}{Y_0}=\beta_0=1-\alpha_0.$$

Следовательно, $\dfrac{C_0}{1-\alpha_0}=Y(0)$ и $Y(t)=Y(0)\,e^{\frac{\alpha_0}{B}t}$,

$$\alpha(t)=\frac{I(t)}{Y(t)}=\frac{Y(0)e^{\frac{\alpha_0}{B}t}-C(0)\,e^{\frac{\alpha_0}{B}t}}{Y(0)\,e^{\frac{\alpha_0}{B}t}}=1-\beta_0=\alpha_0.$$

Другими словами, в этом случае норма накопления постоянна, а темп прироста национального дохода прямо пропорционален этой норме накопления и обратно пропорционален приростной капиталоемкости.

Случай 3.3.3. *Темп прироста потребления больше первоначального темпа прироста дохода*: $\dfrac{\alpha_0}{B}<r<\dfrac{1}{B}$.

Из **(6.15)** вытекает, что в этом случае доход в некоторый момент перестанет расти и затем уменьшится до нуля.

Таким образом, модель Харрода—Домара указывает на *случай 3.3.2* как на наиболее разумный вариант экономического развития. При этом варианте потребление и накопление растут с постоянным темпом, причем темп прироста национального дохода также постоянен и равен $\frac{\alpha_0}{B}$.

Из модели Харрода—Домара следует, что постоянного сбалансированного роста можно достичь двумя путями: либо в начальный момент выбирается норма накопления α_0, и тогда ищут оптимальный темп роста потребления r, который будет равен $\frac{\alpha_0}{B}$; либо выбирается желаемый темп роста потребления r и тогда норма накопления, при которой можно достичь такого темпа, равняется $\frac{\alpha_0}{B}$.

Интересно, что в этом случае потребление и доход в долгосрочном периоде растут с одинаковым темпом $\frac{\alpha_0}{B}$ и потребление составляет постоянную часть от дохода, т.е. функция потребления совпадает с функцией Кейнса в долгосрочном периоде, когда средняя склонность к потреблению не меняется.

С помощью модели Харрода—Домара среди возможных вариантов развития определяется наиболее предпочтительный, однако она не объясняет детерминант экономического роста. Эти детерминанты подробно анализируются в модели Солоу.

6.2.2. Модель Солоу

Модель экономического роста Солоу является необходимой отправной точкой практически всех исследований экономического роста. С ее помощью выявляются причины временного и постоянного устойчивого роста экономики и существование межстрановых различий в уровне жизни населения.

В модели рассматриваются четыре переменные: Y — выпуск; K — капитал; L — труд и E — эффективность труда одного работника, зависящая от состояния его здоровья, образования и квалификации. Переменная E отражает уровень «знаний», накопленных в обществе, или трудосберегающий тип научно-технического прогресса, под влиянием которого повышается эффективность труда одного работника.

Выпуск Y может изменяться во времени только при изменении во времени факторов производства: K, L, E. Изменение численности работников и эффективности труда E всегда рассматриваются совместно: в каждый момент времени в экономике насчитывается L работников с возросшей эффективностью труда или возросшее число работников с постоянной (начальной) эффективностью труда ($L \cdot E$). Таким образом, выпуск описывается производственной функцией $Y = F(K, LE)$.

Относительно производственной функции предполагается:

1) несущественность влияния других факторов производства, в частности, земли и природных ресурсов;

2) постоянная отдача от масштаба. Экономически такая предпосылка соответствует достаточно большой экономике, для которой выигрыш от специализации уже исчерпал себя, и поэтому новые факторы производства используются тем же технологическим способом, что и уже существующие.

Последнее предположение позволяет перейти к производственной функции в интенсивной форме — в расчете на единицу труда с постоянной эффективностью:

$$\frac{Y}{LE} = F\left(\frac{K}{LE},\ 1\right) = \frac{1}{LE} F(K, LE)\ .$$

Обозначим $k = \dfrac{K}{LE}$ — уровень капиталовооруженности одного работника с постоянной эффективностью труда; $y = \dfrac{Y}{LE}$ — производительность труда одного работника с постоянной эффективностью труда. Получим зависимость производительности труда от уровня капиталовооруженности $y = f(k)$.

Таким образом, выпуск в расчете на единицу труда с постоянной эффективностью зависит только от уровня капиталовооруженности и не зависит от масштаба экономики[1];

3) $f'(k) > 0;\ f''(k) < 0;\ f(0) = 0.$

Наиболее часто используется конкретный пример производственной функции, обладающей перечисленными свойствами, — производственная функция Кобба—Дугласа

$$F(K, LE) = K^{\alpha}(LE)^{1-\alpha}; \quad 0 < \alpha < 1.$$

Описание модели

Основными предпосылками модели Солоу являются следующие:

---

[1] Поэтому можно вместо анализа экономики в целом, исследовать единичную экономику, обладающую одной единицей труда с постоянной эффективностью и $\dfrac{K}{LE}$ единицами капитала.

1. Выпуск в экономике расходуется на потребление и инвестиции, государство отсутствует, экономика закрытая, так что основное тождество национальных счетов имеет вид: $y = c + i$, где c, i — соответственно потребление и инвестиции на единицу труда с неизменной эффективностью.

2. Все, что сберегается, инвестируется, т.е. инвестиции равны сбережениям. Одна единица инвестиций превращается без дополнительных издержек в одну единицу нового капитала. Лаг отсутствует. Сбережения пропорциональны доходу. Норма сбережения s задается экзогенно и постоянна во времени ($0 < s < 1$). Таким образом, $i = sy = sf(k)$.

3. Понятия «население» и «рабочая сила» совпадают.

4. Существующий капитал изнашивается с нормой δ в год. Тогда изменение запасов капитала ΔK определяется разностью общей величины инвестиций sY и износа капитала δK, т.е. $\Delta K \cong \dot{K}(t) = sY - \delta K$.

В расчете на единицу труда с постоянной эффективностью уровень капиталовооруженности изменится на

$$\Delta k(t) \cong \dot{k}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K(t)}{L(t)E(t)}\right) = \frac{\dot{K}(t)L(t)E(t) - K(t)\dot{L}(t)E(t) - K(t)L(t)\dot{L}(t)}{\left(L(t)E(t)\right)^2} =$$

$$= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{L(t)E(t)} - k(t)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - k(t)\frac{\dot{E}(t)}{E(t)} = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t),$$

где $n = \dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ — темп роста численности населения; $g = \dfrac{\dot{E}(t)}{E(t)}$ — темп роста технологического прогресса.

Таким образом,

$$\Delta k(t) \cong \dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t). \qquad \textbf{(6.16)}$$

Соотношение **(6.16)** является в модели ключевым. Оно утверждает, что величина изменения уровня капиталовооруженности одного работника с постоянной эффективностью труда определяется соотношением двух величин в расчете на одного работника — инвестиций $sf(k(t))$, фактически произведенных в экономике, и величины инвестиций, необходимых для того, чтобы сохранять достигнутый уровень k в условиях роста населения с темпом n, роста эффективности труда с темпом g и выбытием капитала с нормой δ (вычитаемое в правой части **(6.16)**).

Таким образом, в экономике уровень капиталовооруженности k падает, если фактические инвестиции меньше, чем необходимые для сохранения уровня k, и возрастает, если $s(f(k)) > (n + g + \delta)k$.

Вводится понятие устойчивого уровня k^*, при котором величины фактических и необходимых инвестиций совпадают (рис. 6.6), т.е. $\dot{k} = 0$, откуда

$$sf(k^*) = (n + g + \delta)k^*.$$

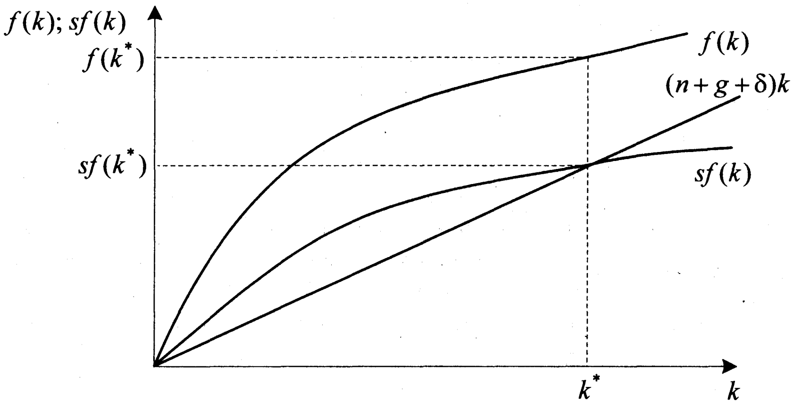


Рис. 6.6. ***Устойчивое состояние в модели Солоу***

В устойчивом состоянии k^* неизменно, производительность труда работника с постоянной эффективностью постоянна: $y = f(k^*)$. Общий объем производства $Y = y(LE)$ растет с темпом $(n + g)$, а производительность труда $\frac{Y}{L} = yE$ растет с темпом g, так же, как и уровень капиталовооружености труда $\frac{K}{L} = \frac{k^*(L \cdot E)}{L} = k^* \cdot E$.

Более подробная характеристика устойчивого состояния экономики приведена в табл. 6.1.

Рост производительности труда в устойчивом состоянии определяется исключительно темпом роста технологического прогресса (см. табл. 6.1).

В отсутствие технологического прогресса (т.е. при неизменной эффективности труда) для экономики с растущим населением в устойчивом состоянии уровень капиталовооруженности остается постоянным, производительность труда не меняется, общий выпуск и общий запас капитала растут с темпом, равным темпу роста населения n.

Если же отсутствуют и рост населения и технологический прогресс, то в устойчивом состоянии при постоянном уровне капиталовооруженности производительность труда, общий выпуск и общий запас капитала остаются неизменными.

Таким образом, причинами, определяющими рост общего выпуска и общего запаса капитала в устойчивом состоянии, являются увеличение численности населения и технологический прогресс, а устойчивый рост производительности труда и капиталовооруженности достигается только при наличии технологического прогресса.

Таблица 6.1

Темпы роста показателей в устойчивом состоянии экономики

Показатель	*При НТП и росте населения* $\left(\frac{\Delta E}{E} = g;\ \frac{\Delta L}{L} = n\right)$	*В отсутствие НТП и при росте населения* $\left(\frac{\Delta E}{E} = 0;\ \frac{\Delta L}{L} = n\right)$	*В отсутствие НТП и роста населения* $\left(\frac{\Delta E}{E} = 0;\ \frac{\Delta L}{L} = 0\right)$
1	*2*	*3*	*4*
Капиталовооруженность работника с постоянной эффективностью $k = \frac{K}{LE}$	0	—	—
Капиталовооруженность работника $\frac{K}{L} = kE$	g	0	0
Общий запас капитала $K = k(LE)$	$n + g$	n	0
Производительность труда одного работника с постоянной эффективностью $y = \frac{Y}{LE} = f(k)$	0	—	—
Производительность труда одного работника $\frac{Y}{L} = yE$	g	0	0
Общий выпуск $Y = y(LE)$	$n + g$	n	0

Изменение численности населения влияет на величину устойчивого уровня капиталовооруженности, но не влияет на темпы роста производительности труда и капиталовооруженности в устойчивом состоянии.

Влияние изменения нормы сбережения

Предположим, что экономика находится в устойчивом состоянии: с устойчивым уровнем капиталовооруженности k_1^* и соответствующей нормой сбережения s_1. Пусть под влиянием внешних изменений произошло возрастание нормы сбережения до s_2. Это приведет к увеличению устойчивого уровня капиталовооруженности до k_2^*, так как инвестиции при k_1^* превысят уровень необходимых для поддержания k на прежнем уровне и капиталовооруженность начнет расти, пока не достигнет k_2^*.

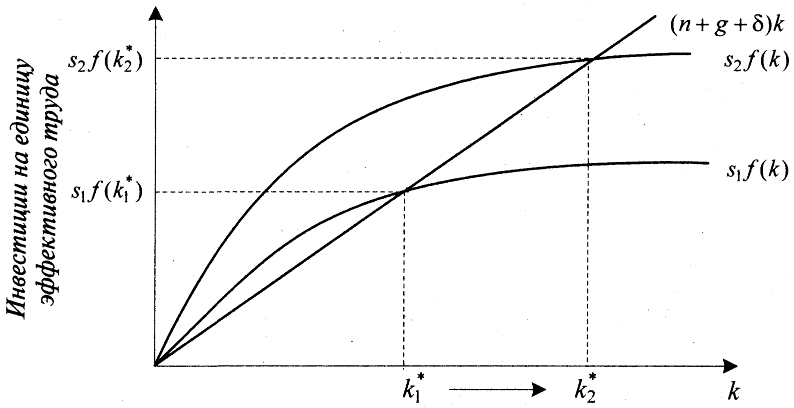


Рис. 6.7. ***Влияние увеличения нормы сбережения на устойчивое состояние***

Производительность труда $\frac{Y}{L} = Ef(k)$ будет расти в связи с ростом k и с ростом эффективности труда E, поэтому в переходный период темп роста производительности труда превысит g. Как только k достигнет k_2^* темп роста производительности труда упадет до g. Таким образом, увеличение нормы сбережения приведет к временному увеличению темпа роста производительности труда. Это изменение влияет на уровень капиталовооруженности и производительности, а не на темпы их роста в устойчивом состоянии.

Сравнение устойчивых состояний. Золотое правило

Благосостояние населения зависит не только от величины общего дохода, но и от его распределения на потребление и инвестиции. Увеличение s увеличивает k^* и выпуск, но его влияние на потребление может быть двояким. Поэтому возникает вопрос: при каком уровне k^* достигается максимум потребления?

Другими словами, найдем

$$\max_s c[k(s)]$$

при условии

$$c\,[k(s)] = (1-s)y = f[k(s)] - (n+g+\delta)k(s),$$

отсюда

$$\frac{\partial c}{\partial s} = [f'(k) - (n+g+\delta)]\frac{\partial k}{\partial s}.$$

Возрастание s увеличивает k. Влияние же на величину потребления зависит от того, превысит ли предельная производительность капитала $f'(k)$ величину $(n + g + \delta)$. Увеличение уровня капиталовооруженности на единицу увеличивает величину инвестиций, необходимых для того, чтобы капиталовооруженность сохранилась на новом, более высоком уровне, на $(n + g + \delta)$. Если предельная производительность капитала меньше величины $(n + g + \delta)$, то прирост общего выпуска недостаточен для поддержания k на новом устойчивом уровне и, следовательно, потребление должно упасть, хотя экономика достигнет нового устойчивого состояния. Если же предельная производительность капитала больше, чем $(n + g + \delta)$, то прирост общего выпуска превышает объем необходимых инвестиций, так что увеличиваются и инвестиции, и потребление. Если же $f'(k) = (n + g + \delta)$, то это означает, что достигается максимально возможное потребление из всех возможных устойчивых состояний и небольшое изменение в уровне капиталовооруженности k никак не повлияет на величину потребления. Устойчивый уровень капиталовооруженности, при котором достигается максимально возможное потребление, называется *уровнем*, соответствующим Золотому правилу накопления. *Золотое правило накопления* состоит в выборе нормы сбережений s, обеспечивающей достижение именно этого устойчивого состояния.

Геометрически это означает, что график $f(k)$ и линия $(n + g + \delta)k$ имеют одинаковые наклоны в точке k^{**} (рис. 6.8).

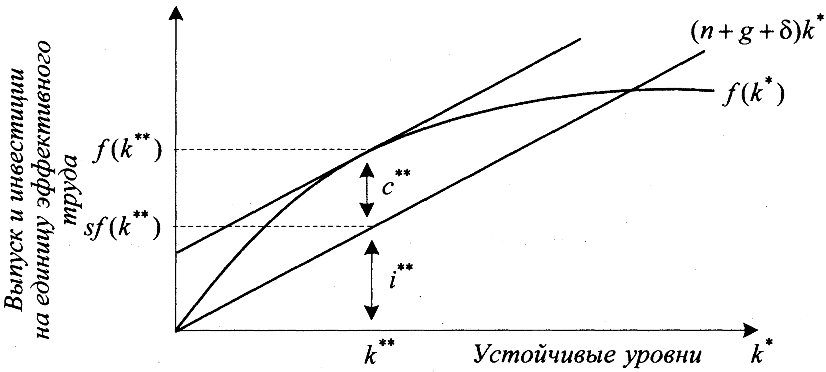


Рис. 6.8. ***Сравнение устойчивых уровней капиталовооруженности***

Если выпуск в экономике описывается производственной функцией Кобба—Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$, то оптимальная норма накопления, соответствующая Золотому правилу, $s = \alpha$.

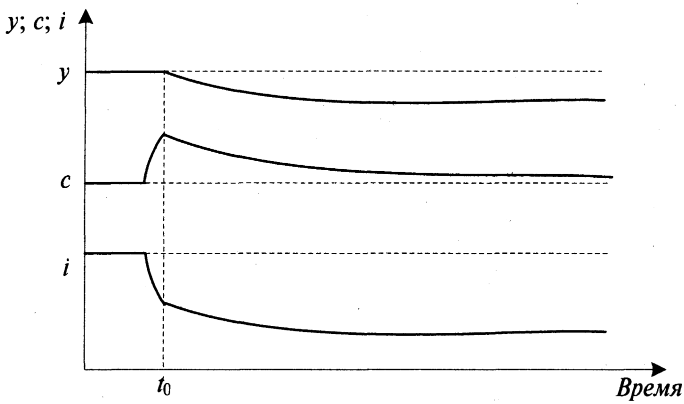
Переход к устойчивому состоянию, соответствующему Золотому правилу

Возникает вопрос о развитии экономики, которая осуществляет переход от первоначального устойчивого состояния, не соответствующего Золотому правилу, к устойчивому состоянию с максимально возможным потреблением.

Случай 1. Первоначальный устойчивый уровень капиталовооруженности превышает уровень, соответствующий Золотому правилу

В этом случае проводится политика, направленная на снижение нормы сбережения до уровня, соответствующего Золотому правилу. Пусть происходит одномоментное снижение нормы сбережения. В этот момент резко вырастет потребление c, а инвестиции i упадут.

Экономика выходит из устойчивого состояния, так как фактические инвестиции i становятся меньше, чем необходимые для поддержания k на постоянном уровне. Поэтому k, а за ним и выпуск, падают до тех пор, пока не достигнут нового устойчивого состояния. Однако, поскольку новое устойчивое состояние соответствует Золотому правилу, уровень потребления в новом устойчивом состоянии будет более высоким, чем первоначальный (рис. 6.9).

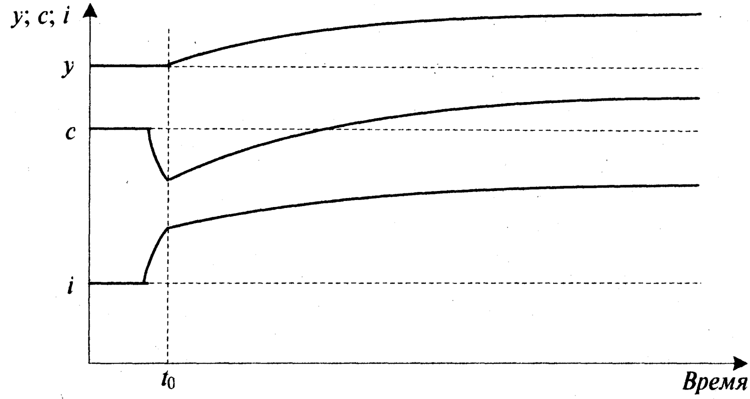


Норма сбережения уменьшилась

Рис. 6.9. ***Влияние уменьшения нормы сбережения на динамику y, c, i***

Случай 2. Первоначальный устойчивый уровень капиталовооруженности меньше значения, соответствующего Золотому правилу

В этом случае проводится политика, направленная на повышение нормы сбережения, что влечет за собой увеличение выпуска и объема потребления в будущем. Однако в настоящем увеличение нормы сбережения приводит к резкому падению потребления и соответствующему росту инвестиций. Фактические инвестиции начнут превышать величину, необходимую для поддержания k на новом уровне. Поэтому и потребление, и накопление станут постепенно возрастать, пока не достигнут нового устойчивого уровня (рис. 6.10).



Норма сбережения увеличилась

Рис. 6.10. ***Влияние увеличения нормы сбережения на динамику y, c, i***

Расчет источников экономического роста. Остаток Солоу

Для оценки вклада факторов производства в экономический рост в 1957 г. Р. Солоу было предложено использовать производственную функцию с постоянной отдачей от масштаба $Y = AF(K, L)$, где A отражает уровень развития технологии.

Изменения в уровне технологических знаний приводят к одинаковому увеличению предельных производительностей труда и капитала и поэтому часто интерпретируются как повышение совокупной производительности факторов производства.

Тогда изменения в выпуске ΔY определяются изменениями факторов производства K, L, A:

$$\Delta Y = \text{MPK} \cdot \Delta K + \text{MPL} \cdot \Delta L + F(K, L) \cdot \Delta A, \qquad \textbf{(6.17)}$$

где MPK, MPL — предельные производительности капитала и труда; ΔK, ΔL, ΔA — изменения в величинах факторов производства и уровня технологии.

Из **(6.17)** путем преобразования можно получить:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{MPK \cdot K}{Y} \cdot \frac{\Delta K}{K} + \frac{MPL \cdot L}{Y} \cdot \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A}. \qquad \textbf{(6.18)}$$

Соотношение **(6.18)** означает, что темп прироста продукции $\frac{\Delta Y}{Y}$ равен сумме трех слагаемых:

1) темпа прироста капитала $\frac{\Delta K}{K}$, умноженного на долю капитала в общем доходе;

2) темпа прироста труда $\frac{\Delta L}{L}$, умноженного на долю труда в общем доходе;

3) темпа прироста совокупной производительности факторов $\frac{\Delta A}{A}$.

Отношения $\frac{\text{MPL} \cdot L}{Y}$ и $\frac{\text{MPK} \cdot K}{Y}$ могут рассматриваться как доли дохода на труд и капитал в предположении, что в условиях совершенной конкуренции труд и капитал оплачиваются по своим предельным производительностям.

Если для оценки источников экономического роста в качестве производственной функции с постоянной отдачей от масштаба используют функцию Кобба—Дугласа $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то соотношение **(6.18)** можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A}, \qquad \textbf{(6.19)}$$

где α отражает эластичность выпуска по капиталу и является постоянной для данной производственной функции.

Используя статистические данные, можно подсчитать вклад труда и капитала в экономический рост. Оценка же вклада научно-технического прогресса в экономический рост не может быть проведена впрямую и обычно вычисляется как остаточный член уравнения **(6.19)** (так называемый *остаток Солоу*):

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \frac{\Delta K}{K} - (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L}. \qquad \textbf{(6.20)}$$

Поэтому, строго говоря, остаток Солоу **(6.20)** определяет не вклад научно-технического прогресса в экономический рост, а ту часть экономического роста, которая не поддается непосредственным измерениям (объясняется любыми причинами, за исключением изменений количества используемых труда и капитала).

Вопросы и задания

1. Выпуск в экономике описывается производственной функцией Кобба—Дугласа с постоянной отдачей от масштаба. Определите доли дохода на труд и капитал в общем доходе в состоянии долгосрочного макроэкономического равновесия.

2. Пусть потребление зависит как от располагаемого дохода, так и от реальной ставки процента. Как в долгосрочном периоде изменятся ставка процента, доход, потребление и инвестиции при увеличении государственных расходов на величину ΔG? Приведите аналитическое и графическое пояснения ответа. Сравните свой ответ со случаем, когда потребление зависит только от располагаемого дохода.

3. Пусть потребление зависит как от располагаемого дохода, так и от реальной ставки процента. Как в долгосрочном периоде изменятся доход, потребление, инвестиции и ставка процента при снижении налогов на величину ΔT. Приведите аналитическое и графическое пояснение ответа. Сравните свой ответ со случаем, когда потребление зависит только от располагаемого дохода.

4. Пусть потребление зависит только от располагаемого дохода. Как в долгосрочном периоде изменятся доход, потребление, инвестиции и ставка процента при увеличении государственных расходов (на величину ΔG) за счет налогов? Приведите аналитическое и графическое пояснения ответа.

5. Пусть в модели Харрода—Домара темп роста потребления выше технологического темпа прироста. Определите момент времени, когда доход максимален, и момент времени, когда он падает до нуля.

6. Пусть в модели Харрода—Домара темп роста потребления меньше технологического темпа прироста и равен темпу прироста дохода в начальный момент времени. Найдите эластичность темпа прироста дохода по норме накопления.

7. Пусть во время войны запас капитала не изменился, зато уменьшились трудовые ресурсы.

а) Как это непосредственно повлияет на общий объем производства и производительность труда?

б) Предположим, что норма сбережения не изменилась, и перед войной экономика находилась в устойчивом состоянии. Что произойдет с объемом производства на душу населения в послевоенной экономике?

Используйте для ответа модель Солоу.

8. Пусть в экономике все трудовые доходы потребляются, а все доходы от капитала сберегаются. Покажите, что если факторы производства оплачиваются в соответствии со своими предельными производительностями, то в устойчивом состоянии достигается уровень накопления капитала, соответствующий Золотому правилу.

9. Определите, с каким темпом, в соответствии с моделью Солоу, в устойчивом состоянии изменяются:

а) отношение капитал—выпуск;

б) доли капитала и труда в доходе;

в) общий доход на капитал в общий доход на труд;

г) реальная арендная цена капитала и реальная заработная плата.

10. Покажите, что рост производительности труда зависит от роста совокупной производительности факторов и роста капиталовооруженности труда.

7 Модель IS-LM

В главе анализируется функционирование экономики в краткосрочном периоде, исследуются факторы, вызывающие краткосрочные экономические колебания. С этой целью вводятся необходимые понятия — жесткость цен, совокупный спрос и совокупное предложение, а также шоки совокупного спроса и предложения как источник экономических колебаний.

Рассматривается основной инструмент краткосрочного анализа экономики — модель IS-LM, описывающая макроэкономическое равновесие как одновременное равновесие на товарном и денежном рынках.

Описываются различные сферы приложения модели: IS-LM и теория совокупного спроса, анализ влияния фискальной и денежной политики, их сравнительная эффективность в зависимости от экзогенных параметров модели, моделирование перехода от краткосрочного макроэкономического равновесия к долгосрочному.

7.1. Введение в теорию экономических колебаний

Основной чертой, отличающей рассмотрение экономики в краткосрочном и долгосрочном аспектах, является предположение о динамике цен. В долгосрочном периоде цены гибкие, т.е. способны мгновенно реагировать на изменение конъюнктуры и, таким образом, поддерживать равновесие в условиях полной занятости. Ключевым моментом краткосрочного аспекта рассмотрения экономики является *негибкость*, или *жесткость*, цен, которая приводит к тому, что объем выпуска не всегда совпадает с потенциальным и зависит от совокупного спроса. Поэтому фискальная и денежная политики, воздействующие на совокупный спрос, могут изменять равновесный объем выпуска.

Под *совокупным спросом* (AD) понимается зависимость между количеством продукции, на которую предъявляется спрос во всей экономике, и общим уровнем цен.

Уравнение количественной теории денег может быть рассмотрено как простая модель совокупного спроса, объясняющая характер этой зависимости.

Предполагая, что скорость обращения денег V и номинальное предложение денег M постоянны, получаем, что спрос на реальные денежные средства $\left(\frac{M}{P}\right)^d$, в состоянии равновесия совпадающий с предложением реальных денежных средств $\left(\frac{M}{P}\right)^s$, пропорционален реальному доходу Y:

$$\left(\frac{M}{P}\right)^d = \left(\frac{M}{P}\right)^s = kY, \text{ где } k = \frac{1}{V}.$$

Отсюда получаем отрицательную зависимость между изменением уровня цен P и реальным доходом Y, отражающим совокупный спрос на товары и услуги (AD), рис. 7.1.

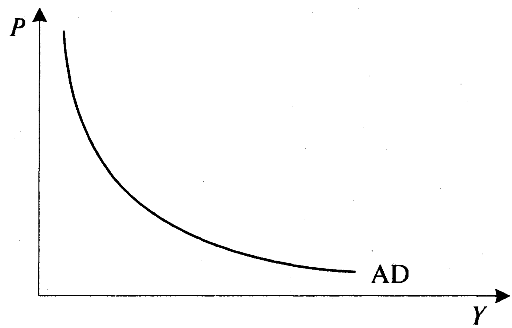


Рис. 7.1. ***График совокупного спроса***

Сдвиги кривой совокупного спроса вызываются изменением предложения денег или скорости их обращения.

Совокупное предложение (AS) отражает зависимость между количеством товаров и услуг, предлагаемых продавцами во всей экономике, и общим уровнем цен.

В долгосрочном периоде, т.е. в предположении о гибкости цен, совокупное предложение LRAS имеет вид вертикальной прямой на уровне потенциального выпуска $\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L})$, где $\bar{K}$, $\bar{L}$ — естественные уровни использования капитала и труда. LRAS определяется сложившейся технологией и наличными запасами капитала и труда в экономике, которые используются на уровне полной занятости (допускается только естественный уровень незанятости ресурсов, например, естественный уровень безработицы). Сдвиг LRAS может быть вызван изменениями либо в технологии, либо в количестве используемых ресурсов.

Изменение совокупного спроса не оказывает воздействия в долгосрочном периоде на уровень выпуска, а влияет только на уровень цен (рис. 7.2), т.е. выполняется принцип классической дихотомии.

В краткосрочном периоде, т.е. в предположении о жесткости цен, совокупное предложение SRAS имеет вид горизонтальной линии — при заданном общем уровне цен объем выпуска Y определяется в зависимости от совокупного спроса (рис. 7.3).

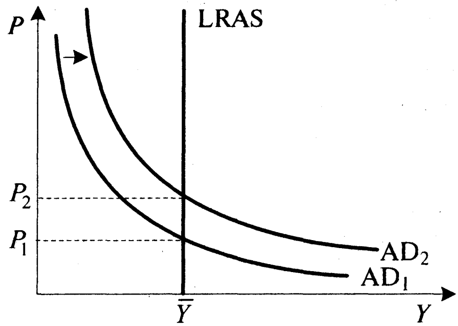


Рис. 7.2. ***Влияние изменения совокупного спроса на долгосрочное равновесие***

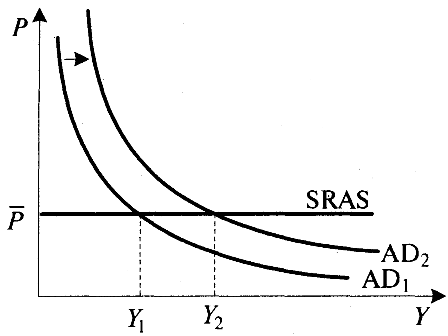


Рис. 7.3. ***Влияние изменения совокупного спроса на краткосрочное равновесие***

Резкие изменения совокупного спроса или предложения (сдвиги кривых AS и AD) в результате влияния внешних воздействий называются *шоками* спроса или предложения.

Шоки спроса (предложения) вызывают краткосрочные колебания в уровне выпуска. Для преодоления последствий шоков обычно проводится *политика стабилизации*, направленная на поддержание объема производства и занятости на естественном уровне. Предположим, что возросла скорость обращения денег (например, в связи с введением банковских автоматов), тогда спрос на деньги уменьшится, а совокупный спрос при каждом возможном уровне цен увеличится (кривая AD сдвинется вправо).

Если экономика первоначально находилась в состоянии краткосрочного равновесия, совпадающего с долгосрочным (т.е. на естественном уровне выпуска — точка *A* на рис. 7.4), то в краткосрочном периоде это вызовет бум и повышение уровня выпуска (новое краткосрочное равновесие в точке *B*), а в долгосрочном периоде — приведет только к увеличению цен (точка *C* — новое долгосрочное равновесие). Политика стабилизации, т.е. предотвращения краткосрочных колебаний выпуска, в данном случае должна состоять в ограничении совокупного спроса путем, например, уменьшения предложения денег.

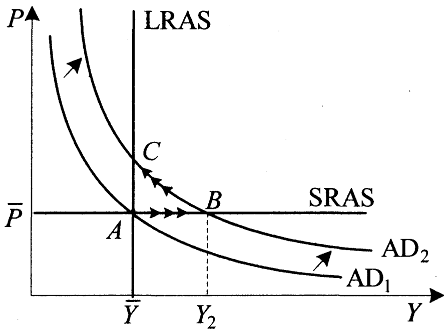


Рис. 7.4. ***Изменение краткосрочного и долгосрочного равновесия под влиянием роста скорости обращения денег***

Шоки совокупного предложения (ценовые шоки) связаны с резкими изменениями цен ресурсов, затрагивающими издержки производства во всей экономике.

Тогда в краткосрочном периоде равновесие установится в точке *B* на рис. 7.5 (т.е. по сравнению с исходным равновесием в точке *A* вырастут цены и упадет объем производства), в долгосрочном периоде экономика вернется к начальному состоянию в точке *A*. Это произойдет потому, что при новом равновесном уровне цен P_1 совокупный спрос будет меньше совокупного предложения, цены начнут падать, производство будет удешевляться. Поэтому объем производства будет расти до тех пор, пока не вернется к потенциальному уровню (SRAS будет сдвигаться вниз до первоначального положения).

Центральный банк в этой ситуации может осуществить стабилизационную политику — предпринять меры по стимулированию совокупного спроса, чтобы не допустить снижения общего выпуска. Тогда кривая совокупного спроса AD_1 переместится в положение AD_2 и новое долгосрочное равновесие установится при более высоком уровне цен (точка *C* на рис. 7.5).

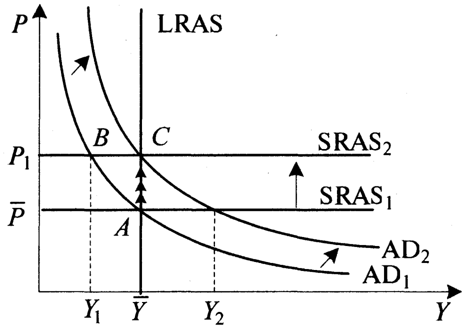


Рис. 7.5. ***Изменение равновесия при резком росте цен на ресурсы***

7.2. Модель IS-LM

Модель IS-LM описывает функционирование экономики в краткосрочном периоде. Она была разработана Дж. Хиксом в 30-х годах XX в. как интерпретация основополагающего труда Дж. М. Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег». IS-LM может рассматриваться как модель определения равновесного уровня выпуска при фиксированных ценах, а также как модель совокупного спроса и в этом случае является частью более общей модели AD-AS.

В модели IS-LM равновесный уровень дохода зависит не только от факторов, лежащих на стороне предложения, но и от факторов, влияющих на совокупный спрос. Поэтому равновесное значение совокупного дохода определяется как результат взаимодействия двух рынков: товарного и денежного.

7.2.1. Рынок товаров и услуг и кривая IS

Кривая IS (инвестиции—сбережения) представляет собой формализованное описание всех возможных состояний равновесия на рынке товаров и услуг, т.е. описывает зависимость равновесных уровней дохода (выпуска) от равновесной ставки процента. Она может быть получена несколькими альтернативными способами.

Равновесие на рынке товаров и услуг

В закрытой экономике рынок товаров и услуг может быть описан основным макроэкономическим тождеством **(7.1)**, функцией потребления, зависящей от располагаемого дохода ($Y - T$) или (Y_d) (с постоянной MPC) **(7.2)**, функцией инвестиций **(7.3)** и заданной фискальной политикой государства **(7.4)**, **(7.5)**:

$$Y = C + I + G; \quad \textbf{(7.1)}$$

$$C = C(Y - T),\ \text{MPC} = \text{const},\ 0 < \text{MPC} < 1; \quad \textbf{(7.2)}$$

$$I = I(r),\ I' < 0; \quad \textbf{(7.3)}$$

$$G = \overline{G}; \qquad (7.4)$$

$$T = \overline{T}. \qquad (7.5)$$

Это описание допускает изменение в совокупном доходе (выпуске) Y в связи с изменениями совокупного спроса. Поэтому решением системы уравнений **(7.1)—(7.5)** является *множество* комбинаций уровня выпуска Y и r, при которых достигается равновесие на рынке товаров и услуг. Другими словами, равновесие на рынке товаров и услуг описывается зависимостью $Y = Y(r)$ или $r = r(Y)$ равновесных уровней дохода и ставки процента, что и представляет собой кривую IS (рис. 7.6).

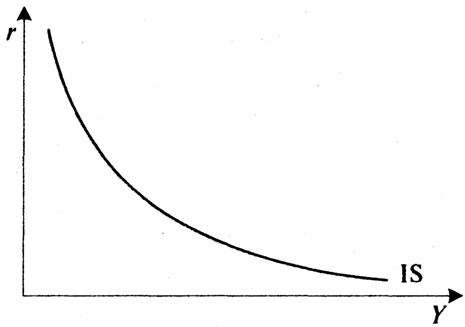


Рис. 7.6. *Кривая IS*

IS и рынок заемных средств

В терминах рынка заемных средств равновесие на рынке товаров и услуг достигается при совпадении национальных сбережений и валовых инвестиций:

$$S_{\text{нац}} = I(r). \qquad (7.6)$$

Как следует из **(7.1)** и **(7.2)**, в отличие от классической модели национальные сбережения определяются как функция от дохода:

$$S_{\text{нац}} = Y - C(Y - T) - G = S(Y).$$

Рост дохода на ΔY увеличивает сбережения на

$$\Delta S = (1 - \text{MPC})\Delta Y > 0.$$

Отсюда увеличение дохода приводит к падению ставки процента на рынке заемных средств. Значит, чтобы на рынке товаров и услуг сохранялось равновесие, более высокому уровню выпуска должна соответствовать более низкая ставка процента.

Но верно и обратное: если ставка процента возрастает, падает спрос на инвестиции, уменьшается уровень выпуска, падает доход. Таким образом, зависимости $Y = Y(r)$ и $r = r(Y)$ — отрицательные (см. рис. 7.6).

Модель кейнсианского креста и кривая IS

В модели кейнсианского креста предполагается, что ставка процента r — фиксирована, и, значит, инвестиции $I(\bar{r})$ — неизменны:

$$E = C(Y - \bar{T}) + I(\bar{r}) + \bar{G}.$$

Запланированные расходы E определяются при заданной фискальной политике $\left(T = \bar{T},\ \ G = \bar{G}\right)$.

Ключевой идеей этой модели является возможность несовпадения запланированных расходов (E) и фактических расходов (Y). В состоянии равновесия $E = Y$.

Достижение равновесия осуществляется за счет незапланированного изменения запасов: если выпуск превышает запланированные расходы E, то происходит незапланированное увеличение запасов у фирм, они снижают производство. Если выпуск меньше расходов, то происходит незапланированное уменьшение запасов, что стимулирует фирмы к увеличению производства.

Известно, что если в модели кейнсианского креста при прочих равных условиях увеличиваются государственные закупки G (или возрастают инвестиции I), то планируемые расходы увеличиваются для каждого уровня выпуска и в результате происходит мультипликативное увеличение равновесного дохода

$$\Delta Y = \frac{\Delta G}{1 - \text{MPC}}, \text{ или } \Delta Y = \frac{\Delta I}{1 - \text{MPC}}, \tag{7.7}$$

где $-\dfrac{1}{1 - \text{MPC}}$ — мультипликатор независимых расходов в модели кейнсианского креста.

При увеличении налогов на ΔT при прочих равных происходит уменьшение планируемых расходов, что приведет к мультипликативному уменьшению равновесного уровня дохода

$$\Delta Y = -\frac{\text{MPC}}{1 - \text{MPC}} \Delta T, \tag{7.8}$$

где $-\dfrac{\text{MPC}}{1 - \text{MPC}}$ — налоговый мультипликатор в модели кейнсианского креста.

Если же происходит одновременно одинаковое изменение и налогов, и государственных расходов, тогда равновесный доход изменяется на ту же величину $\Delta Y = \Delta G = \Delta T$.

Кривая IS выводится из модели кейнсианского креста в предположении о возможности изменения ставки процента r. Изменение r приводит к изменению планируемых инвестиций на ΔI, следовательно, изменяется равновесный уровень дохода на ΔY. Таким образом, рост r приводит к падению инвестиций на ΔI и к мультипликативному уменьшению Y на $\Delta Y = \frac{\Delta I}{1 - MPC}$. Отсюда, более высокий уровень процента соответствует более низкому уровню дохода (рис. 7.7).

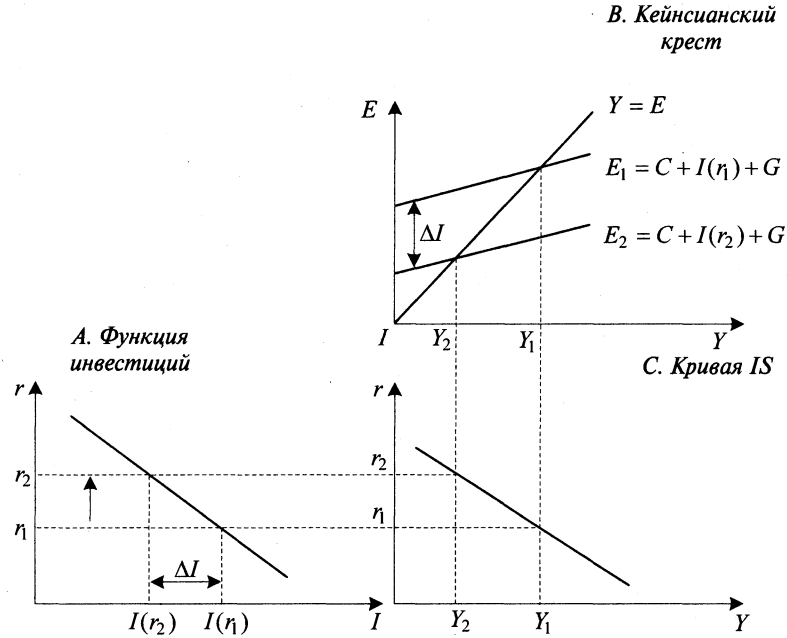


Рис. 7.7. ***Графический вывод кривой*** **IS**

Фискальная политика и кривая IS

Кривая IS строится в предположении о неизменности переменных фискальной политики. Если, например, растут государственные закупки на ΔG, то при любой ставке процента r равновесный доход увеличивается на $\frac{\Delta G}{1 - MPC}$. Следовательно, происходит горизонтальный сдвиг кривой IS на эту величину.

Если налоги уменьшаются на ΔT, то происходит горизонтальный сдвиг кривой IS вправо на величину $\frac{MPC}{1 - MPC}\Delta T$ (рис. 7.8).

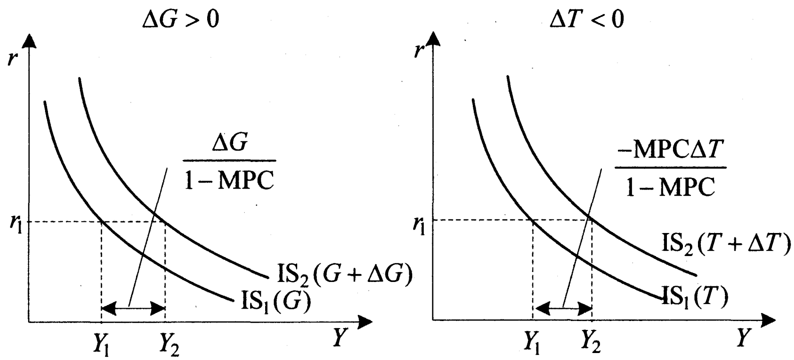


Рис. 7.8. ***Сдвиги* IS *под влиянием бюджетно-налоговой политики***

В исследовательских целях часто используют линейный вариант модели IS-LM. В этом случае предполагается, что функции потребления и инвестиций линейны, т.е. условия **(7.2)** и **(7.3)** имеют вид:

$$C = a + b(Y - T) \tag{7.2'}$$

где b = MPC = const; $0 < b < 1$; a — автономное потребление($a > 0$)

$$I = c - dr, \tag{7.3'}$$

где $c > 0$; $d > 0$.

Тогда, подставляя в **(7.1)** уравнения **(7.2')**, **(7.3')**, **(7.4)**, **(7.5)**, получаем формальный вывод IS как отрицательной зависимости Y от r **(7.10)**:

$$Y = a + b(Y - \overline{T}) + c - dr + \overline{G}; \qquad \mathbf{(7.9)}$$

$$Y = \frac{a+c}{1-b} + \frac{1}{1-b}\overline{G} - \frac{b}{1-b}\overline{T} - \frac{d}{1-b}r \qquad \mathbf{(7.10)}$$

или как отрицательной линейной зависимости r от Y:

$$r = \frac{a+c}{d} - \frac{b}{d}\overline{T} + \frac{1}{d}\overline{G} - \frac{1-b}{d}Y. \qquad \mathbf{(7.11)}$$

Часто рассматривается случай, когда объем собираемых налогов пропорционален доходу: $T = tY$, где t — предельная ставка налога. Тогда функция потребления C имеет вид:

$$C = a + b(1 - t)Y, \tag{7.2''}$$

а IS записывается как:

$$Y = \frac{a+c}{1-b(1-t)} + \frac{1}{1-b(1-t)}\overline{G} - \frac{d}{1-b(1-t)}r \tag{7.10'}$$

или

$$r = \frac{a+c}{d} + \frac{1}{d}\overline{G} - \frac{1-b(1-t)}{d}Y. \tag{7.11'}$$

Параметры модели (b, d, t) определяют наклон IS, а ее положение в координатах (Y, r) зависит от изменения G и T. Заметим, что коэффициент при G в уравнениях **(7.10)** и **(7.10')** показывает, на какую величину произойдет горизонтальный сдвиг IS при изменении государственных расходов при постоянном r.

7.2.2. Денежный рынок и кривая LM

Спрос на деньги $\left(\frac{M}{P}\right)^d$ зависит от дохода (Y) и номинальной ставки процента (i):

$$\left(\frac{M}{P}\right)^d = L\left(\underset{-}{i}, \underset{+}{Y}\right). \qquad \textbf{(7.12)}$$

Чтобы на денежном рынке установилось равновесие, необходимо равенство спроса и предложения денег $\left(\frac{M}{P}\right)^s$. Номинальное предложение денег M контролируется Центральным банком, уровень цен согласно основной предпосылке фиксирован. Поэтому в условиях отсутствия инфляции $i = r$.

Следовательно, равновесие на денежном рынке описывается условием:

$$\frac{\bar{M}}{P} = L(Y, r),\ L'_Y > 0,\ L'_r < 0. \qquad \textbf{(7.13)}$$

При заданном предложении денег M и не изменяющихся ценах условие **(7.13)** может выполняться при различных комбинациях Y и r. Эту зависимость и описывает кривая LM, во всех точках которой спрос на реальные денежные средства равен их предложению. Зависимость является положительной (рис. 7.9): возрастание дохода приводит к возрастанию (сдвигу) спроса на деньги, это ведет к росту r (при заданном предложении денег).

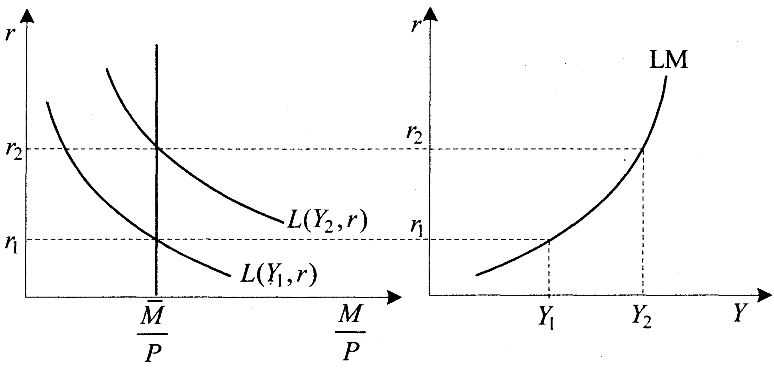


Рис. 7.9. ***Графический вывод кривой*** **LM**

Проведение кредитно-денежной политики вызовет сдвиг кривой LM. Если Центральный банк уменьшит предложение денег с M_1 до M_2 при фиксированном доходе, то ставка процента возрастет для каждого уровня Y, следовательно, кривая LM сдвинется вверх (рис. 7.10).

Увеличение уровня цен P при постоянном предложении денег будет эквивалентно уменьшению предложения реальных денежных средств, что приведет к увеличению r для каждого уровня дохода Y и, следовательно, к сдвигу кривой LM вверх (см. рис. 7.10).

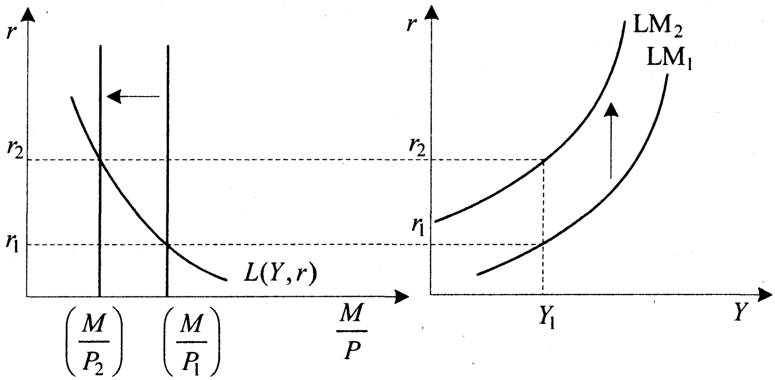


Рис. 7.10. ***Сдвиги* LM *под влиянием кредитно-денежной политики или роста цен***

В линейном варианте модели IS-LM предполагается, что спрос на деньги имеет вид:

$$L(Y, r) = eY - fr,$$

где e, f — коэффициенты чувствительности спроса на деньги по доходу и ставке процента соответственно ($e > 0, f > 0$):

$$\frac{M}{P} = eY - fr.$$

Отсюда LM является прямой линией и как зависимость $Y(r)$ имеет вид:

$$Y = \frac{f}{e}r + \frac{M/P}{e} \quad \textbf{(7.14)}$$

а как зависимость $r(Y)$:

$$r = \frac{e}{f}Y - \frac{M/P}{f}. \quad \textbf{(7.15)}$$

Изменение параметров модели e, f приводит к изменению формы и наклона LM, а изменение M и P сдвигает LM на величину $-\frac{\Delta(M/P)}{f}$ по вертикали и $\frac{\Delta(M/P)}{e}$ по горизонтали.

7.2.3. Краткосрочное равновесие

Краткосрочное равновесие достигается в точке пересечения кривых IS и LM (рис. 7.11), т.е. для такой комбинации r и Y, при которой одновременно находятся в равновесии рынок товаров и денежный рынок:

$$\text{IS: } Y = C(Y - \overline{T}) + I(r) + \overline{G}; \tag{7.16}$$

$$\text{LM: } \frac{M}{P} = L(Y, r). \tag{7.17}$$

В линейном случае, когда IS и LM являются прямыми, краткосрочное равновесие находится из решения уравнений **(7.10)** и **(7.14)** или **(7.11)** и **(7.15)**.

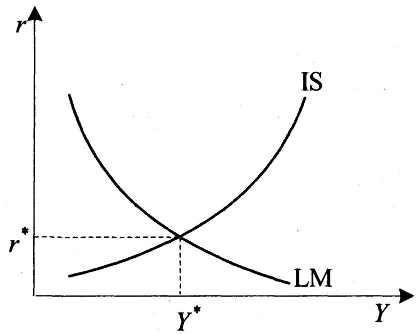


Рис. 7.11. ***Краткосрочное равновесие в модели*** IS-LM

7.3. Приложения модели IS-LM

7.3.1. Влияние изменений фискальной политики на краткосрочное равновесие

Пусть экономика находилась в состоянии краткосрочного равновесия (в точке A, рис. 7.12) и произошли резкие изменения в фискальной политике государства. Например, государственные закупки возросли на ΔG. Тогда при прочих равных условиях IS сдвигается вправо на величину $\left(\dfrac{\Delta G}{1-b}\right)$ или $\left(\dfrac{\Delta G}{1-b(1-t)}\right)$, т.е. в зависимости от принятого допущения о характере налогов ($\bar{T}$ или $T = tY$) для каждого r на эту же величину возрастает Y. В связи с ростом дохода растет спрос на деньги, и при постоянном предложении денег возрастает r, следовательно, снижаются инвестиции. Происходит эффект вытеснения инвестиций: увеличение Y меньше, чем в модели кейнсианского креста.

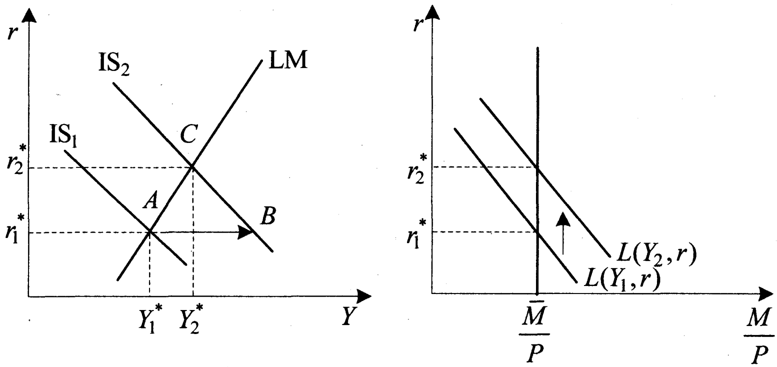


Рис. 7.12. ***Влияние роста государственных закупок товаров и услуг на равновесие***

Если же уменьшаются налоги на ΔT, то доход Y возрастает на величину $\left(\dfrac{b}{1-b}\Delta T\right)$ для каждого r, т.е. кривая IS сдвигается на эту же величину по горизонтали. Все остальные последствия аналогичны.

7.3.2. Влияние изменений денежной политики на краткосрочное равновесие

Пусть резко увеличилось предложение денег. Тогда при фиксированных ценах увеличится и реальное предложение денег. Это приведет к падению ставки процента, уравновешивающей денежный рынок, для всех уровней Y, а следовательно, к сдвигу кривой LM вниз на величину $\left(\dfrac{\Delta M}{f}\right)$ по вертикали.

Падение r вызовет увеличение инвестиций, а затем и возрастание равновесного дохода. Новое краткосрочное равновесие установится в точке C, для которой равновесный доход возрос, а равновесная ставка процента упала (рис. 7.13).

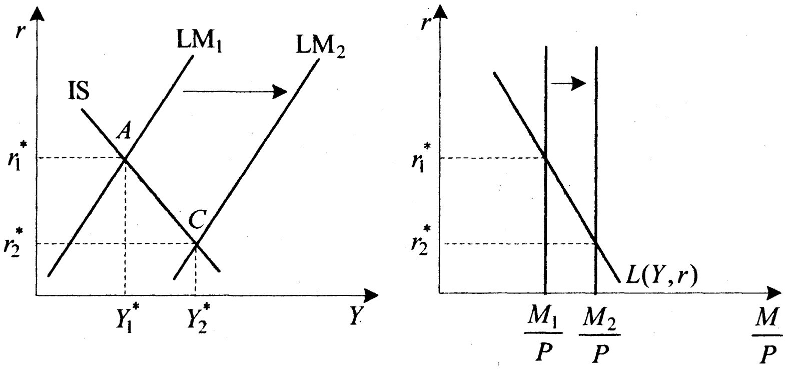


Рис. 7.13. ***Влияние стимулирующей денежной политики на равновесие***

7.3.3. Взаимодействие фискальной и денежной политики

В действительности фискальная и денежная политики не проводятся изолированно. Поэтому эффект фискальной политики зависит от того, как на нее реагирует Центральный банк, какой политики он придерживается.

Пусть, например, происходит увеличение налогов на ΔT. Тогда, при постоянном предложении денег это приведет к падению выпуска и ставки процента в краткосрочном периоде (рис. 7.14, *а*). Если Центральный банк поддерживает r на постоянном уровне, то он должен уменьшить предложение денег, результатом будет более сильное снижение выпуска (см. рис. 7.14, *б*).

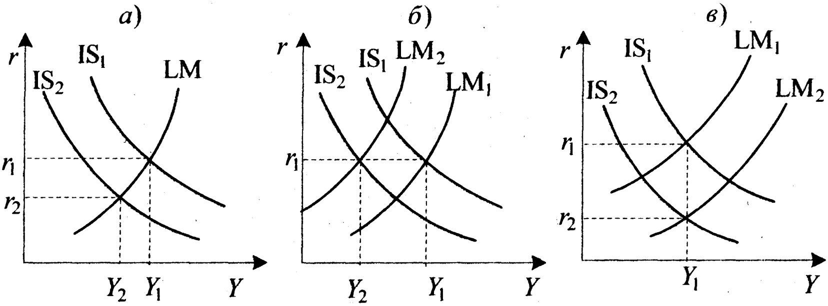


Рис. 7.14. ***Результаты взаимодействия фискальной и денежной политики***

Если же Центральный банк поддерживает доход на постоянном уровне, то он увеличит предложение денег, что вызовет более сильное падение ставки процента (см. рис. 7.14, *в*).

7.4. IS-LM как модель совокупного спроса

Равновесный уровень выпуска (дохода) в краткосрочном периоде определяется в модели IS-LM при фиксированных ценах. Если же общий уровень цен изменяется, то при прочих равных условиях это приводит к уменьшению реального предложения денежных средств (M/P), что, в свою очередь, вызывает сдвиг кривой LM влево. Следовательно, изменяется и равновесный уровень Y, т.е. имеет место зависимость равновесного дохода (выпуска) от уровня цен P, которая и обобщается кривой совокупного спроса AD (рис. 7.15).

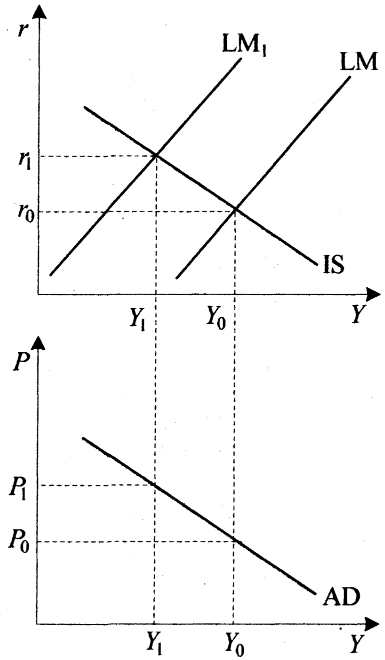


Рис. 7.15. ***Графический вывод кривой совокупного спроса***

Чем выше уровень цен P, тем меньше реальное предложение денег M/P, тем выше равновесная ставка процента r и, следовательно, ниже инвестиции I и доход Y. Таким образом, зависимость между равновесным уровнем дохода Y и общим уровнем цен P отрицательная. Формальный вывод AD из модели IS-LM включает в себя совместное решение уравнений **(7.16)** и **(7.17)** относительно P и Y при заданном $\bar{M}, \bar{G}, \bar{T}$ и параметрах модели. В линейном варианте модели это выглядит следующим образом:

$$\text{IS: } Y = \frac{a+c+G}{1-b} - \frac{b}{1-b}T - \frac{d}{1-b}r; \qquad \mathbf{(7.18)}$$

$$\text{LM: } r = \frac{e}{f}Y - \frac{(M/P)}{f}. \qquad \mathbf{(7.19)}$$

Подставив **(7.19)** в **(7.18)**, получим

$$Y = \frac{a+c+G}{1-b} - \frac{b}{1-b}T - \frac{d}{1-b}\left(\frac{e}{f}Y - \frac{M/P}{f}\right);$$

$$\text{AD: } Y = \frac{a+c+G}{(1-b)+\frac{de}{f}} - \frac{b}{(1-b)+\frac{de}{f}}T + \frac{1}{\frac{f}{d}(1-b)+e}\left(\frac{M}{P}\right). \qquad \mathbf{(7.20)}$$

Или для случая, когда $T = tY$:

$$\text{AD: } Y = \frac{a+c+G}{(1-b(1-t))+\frac{de}{f}} + \frac{1}{\frac{f}{d}(1-b(1-t))+e}\left(\frac{M}{P}\right). \qquad \mathbf{(7.21)}$$

Другими словами, совокупный спрос есть функция вида $Y = \alpha + \beta(M/P)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, т.е. доход Y отрицательно зависит от уровня цен P.

Уравнение совокупного спроса показывает, что стимулирующие денежная и бюджетно-налоговая политики сдвигают кривую AD вправо: увеличение предложения денег сдвигает вправо LM, т.е. увеличивает Y при каждом фиксированном уровне цен; аналогично увеличение государственных расходов сдвигает вправо IS, т.е. увеличивает Y при каждом фиксированном уровне цен (рис. 7.16 и 7.17).

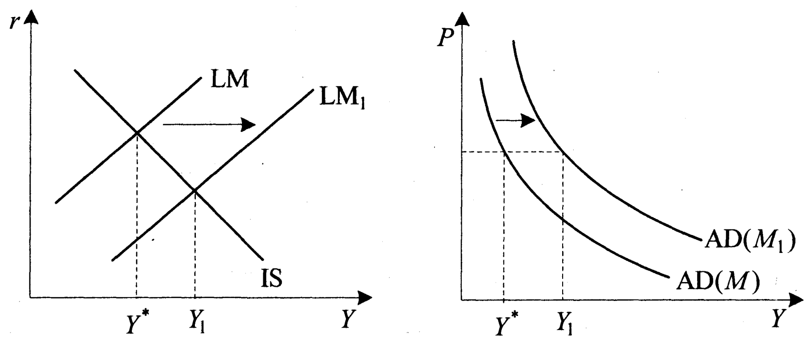


Рис. 7.16. ***Влияние стимулирующей денежной политики на совокупный спрос***

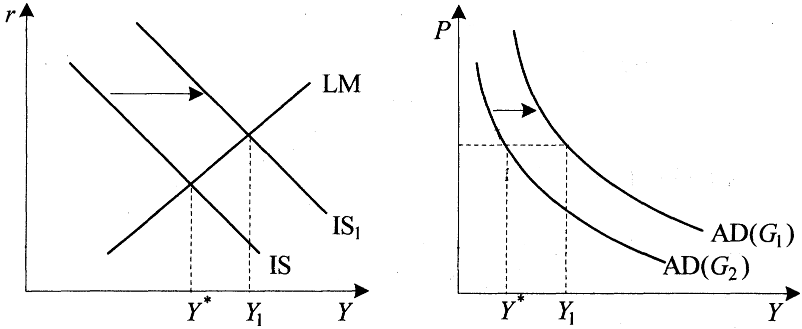


Рис. 7.17. ***Влияние на совокупный спрос стимулирующей бюджетно-налоговой политики***

Из уравнения совокупного спроса можно увидеть и эффект вытеснения инвестиций; для этого достаточно сравнить мультипликаторы государственных расходов в модели кейнсианского креста и данной:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G}=\frac{1}{1-b} \text{ и } \frac{\Delta Y}{\Delta G}=\frac{1}{1-b+\dfrac{de}{f}}, \qquad \textbf{(7.22)}$$

или

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G}=\frac{1}{1-b(1-t)} \text{ и } \frac{\Delta Y}{\Delta G}=\frac{1}{1-b(1-t)+\dfrac{de}{f}}. \qquad \textbf{(7.23)}$$

Очевидно, что в обоих случаях второй мультипликатор меньше, так как возрастание дохода увеличивает спрос на деньги и, следовательно, поднимает ставку процента, что снижает инвестиции. Чем больше эффект вытеснения, тем меньше сдвиг кривой совокупного спроса при данном изменении государственных расходов.

Из **(7.20)** можно получить выражение совокупного спроса, какое использовалось в начале этой главы, через уравнение количественной теории денег. Для этого достаточно вспомнить, что спрос на деньги зависит только от дохода. Следовательно, коэффициент f в выражении **(7.14)** равен нулю. Поэтому из **(7.20)** получаем зависимость $Y=\frac{1}{e}\left(\frac{M}{P}\right)$. Этот случай соответствует вертикальной LM, и при увеличении государственных расходов на ΔG происходит полное вытеснение инвестиций на величину $\Delta I = \Delta G$ и поэтому сдвига кривой AD не происходит.

7.5. Эффективность фискальной и денежной политики в зависимости от параметров модели IS-LM

С помощью модели IS-LM можно попытаться предсказать результаты проведения фискальной или денежной политики, которые будут существенно зависеть от особенностей описываемой экономики. В модели IS-LM это будет выражаться через экзогенно задаваемые параметры в условиях **(7.16)**, **(7.17)**. Эффективность любой политики оценивается по степени влияния управляющего воздействия (изменения в государственных закупках или предложении денег) на изменение общего выпуска (дохода). Таким образом, меры эффективности фискальной политики — $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta G}\right)$ или $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta T}\right)$ и денежной политики $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta (M/P)}\right)$ — могут быть определены из уравнения совокупного спроса **(7.20)**.

Например, для линейного варианта модели следующим образом:

$$\Delta Y = \frac{\Delta G}{(1-b)+\frac{de}{f}} - \frac{b \cdot \Delta T}{(1-b)+\frac{de}{f}} + \frac{\Delta\left(M/P\right)}{\frac{f}{d}(1-b)+e}, \qquad \textbf{(7.24)}$$

или

$$\Delta Y = \frac{\Delta G}{(1-b(1-t))+\frac{de}{f}} + \frac{\Delta\left(M/P\right)}{\frac{f}{d}(1-b(1-t))+e}. \qquad \textbf{(7.25)}$$

Отсюда эффективность фискальной и денежной политики определяется по величине соответствующего мультипликатора в модели (см. **(7.24)** или **(7.25)**):

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1-b(1-t)+\frac{de}{f}};$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta (M/P)} = \frac{1}{\frac{f}{d}(1-b(1-t))+e}.$$

Заметим, что в краткосрочном периоде изменение номинального предложения денег приводит к изменению реального предложения денег. Можно считать, что уровень цен P равен 1, поэтому $\Delta M = \Delta\left(\frac{M}{P}\right)$ при фиксированных ценах.

Очевидно, что результаты обеих политик зависят от мультипликатора модели кейнсианского креста $\frac{1}{1-b(1-t)}$, чувствительности инвестиций к ставке процента d, чувствительности спроса на деньги к ставке процента f, чувствительности спроса на деньги к доходу e. Чтобы определить характер этой зависимости, т.е. ответить на вопрос, возрастает или убывает эффективность фискальной политики, например, при увеличении мультипликатора государственных расходов, достаточно определить знак функции $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta G}\right)$ или $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta M}\right)$ по соответствующему параметру.

Обозначим за $\mathrm{MUL} = \frac{1}{1-b(1-t)}$. Из того, что $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta G}\right)}{\partial \mathrm{MUL}} > 0$ и $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta M}\right)}{\partial \mathrm{MUL}} > 0$, следует наличие положительной зависимости между эффективностью фискальной и денежной политик и величиной простого мультипликатора MUL: чем выше MUL, тем более эффективна и та, и другая политика.

Связь же эффективности политик с величиной чувствительности спроса на деньги к доходу e отрицательная: $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta G}\right)}{\partial e} < 0$ и $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta M}\right)}{\partial e} < 0$. Следовательно, увеличение e вызовет снижение эффекта управляющих воздействий.

Увеличение чувствительности инвестиций к ставке процента d приведет к уменьшению эффективности фискальной политики, так как $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta G}\right)}{\partial d} < 0$ и к увеличению эффективности денежной политики, так как $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta M}\right)}{\partial d} > 0$.

При росте чувствительности спроса на деньги к ставке процента f эффективность фискальной политики будет увеличиваться, так как $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta G}\right)}{\partial f} > 0$, а эффективность денежной политики будет уменьшаться, так как $\frac{\partial\left(\frac{\Delta Y}{\Delta M}\right)}{\partial f} < 0$.

Полученные результаты обобщены в табл. 7.1, где знак «+» обозначает положительный характер связи между соответствующими параметрами и эффективностью политики, а знак «–» — отрицательный характер.

Таблица 7.1

***Зависимость эффективности политики от параметров модели* IS-LM**

Параметры модели	*Эффективность политики*	
	$\frac{\Delta Y}{\Delta G}$	$\frac{\Delta Y}{\Delta M}$
MUL	+	+
e	–	–
d	–	+
f	+	–

Следует отметить, что монетаристский взгляд на экономику предполагает слабую зависимость между спросом на деньги и ставкой процента (f — мало) и сильную чувствительность инвестиций к ставке процента (d — велико). В таком случае фискальная политика менее действенна в связи с большим эффектом вытеснения, и более эффективной является денежная политика. Из уравнения совокупного спроса AD **(7.20)—(7.21)** видно, что в таких условиях мультипликатор государственных расходов модели IS-LM уменьшается, а денежный мультипликатор увеличивается.

Кейнсианский взгляд на экономику и приверженность к мерам фискальной политики объясняется предположениями о нечувствительности инвестиций к ставке процента и большой чувствительности спроса на деньги к проценту. В такой ситуации эффект вытеснения мал, а действие денежной политики неэффективно.

Анализ табл. 7.1 позволяет выделить три наиболее известных частных случая модели IS-LM, которые оказали большое влияние на дискуссии по поводу основных концепций макроэкономики. Первый, уже разобранный выше, соответствует монетаристским воззрениям и основывается на предпосылке о полной независимости спроса на деньги от ставки процента (т.е. на постоянстве скорости обращения денег). Основной вывод — полная неэффективность фискальной политики и эффективность денежной.

Второй частный случай, рассмотренный Кейнсом, получил название «ликвидной ловушки» и соответствует ситуации бесконечной эластичности спроса на деньги по ставке процента, когда равновесие на денежном рынке достигается при единственном значении ставки процента. В таком случае денежная политика не оказывает никакого воздействия на выпуск, так как ставка процента фиксирована и не может уменьшиться в результате увеличения предложения денег. Фискальная же политика в этой ситуации эффективна и не сопровождается эффектом вытеснения инвестиций.

Третий частный случай имеет место, когда инвестиции совсем не зависят от ставки процента. Тогда очевидно, что фискальная политика не сопровождается вытеснением инвестиций и оказывает сильное воздействие на выпуск, а денежная политика никак не влияет на него.

7.6. IS-LM в краткосрочном и долгосрочном периодах

Модель IS-LM предназначена для описания краткосрочного периода (уровень цен $P = \overline{P}$ предопределен). Если же описывается долгосрочный период, где уровень цен подвижен, то фиксируется другая переменная — доход Y на потенциальном уровне.

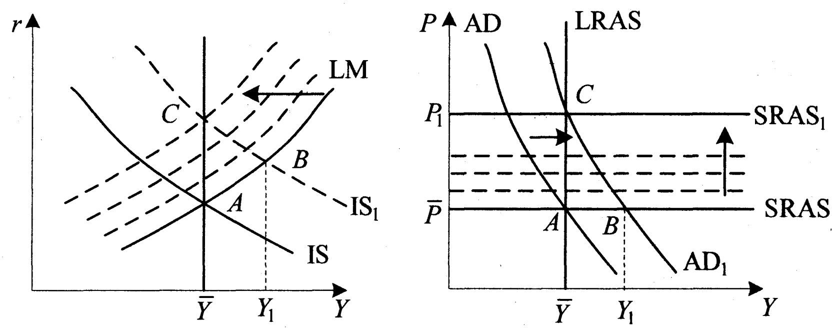


Рис. 7.18. ***Влияние изменения государственных расходов***

Пусть экономика находилась в состоянии краткосрочного равновесия, совпадающего с долгосрочным (в точке A рис. 7.18). Если правительство увеличивает государственные расходы, тогда в краткосрочном периоде экономика переходит в новое состояние равновесия, характеризуемое более высоким уровнем выпуска $Y_1 > \overline{Y}$. Однако как только цены станут подвижными, то их общий уровень будет расти (так как спрос превышает предложение при прежнем равновесном уровне цен), что приведет при прочих равных условиях к уменьшению реального предложения денег и сдвигу LM вверх. Это будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнут потенциальный объем производства $\overline{Y}$ (точка C на рис. 7.18).

В терминах модели AD-AS стимулирующая фискальная политика вызывает увеличение совокупного спроса, увеличение выпуска в краткосрочном периоде до уровня $Y_1 > \overline{Y}$ при фиксированных ценах. В долгосрочном периоде реальный выпуск не изменится, повышается уровень цен и ставка процента, инвестиции сокращаются на величину увеличения государственных расходов (полное вытеснение инвестиций).

Результаты проведения стимулирующей денежной политики представлены на рис. 7.19.

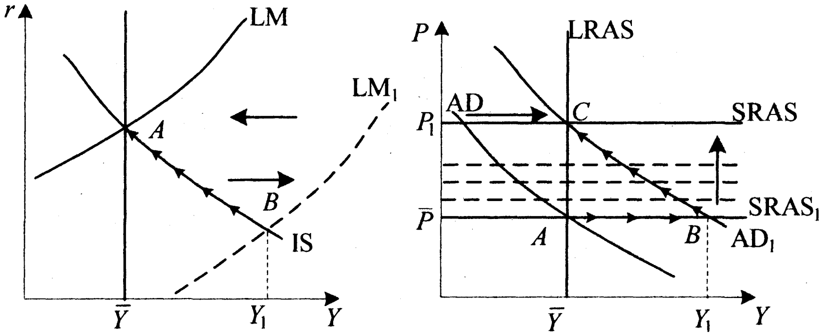


Рис. 7.19. ***Влияние стимулирующей кредитно-денежной политики***

При увеличении номинального предложения денег M в краткосрочном периоде LM сдвигается вправо, и экономика переходит в новое состояние равновесия (точка B), характеризующееся объемом выпуска, бóльшим потенциального $\bar{Y}$.

В терминах модели AS-AD это означает сдвиг вправо (увеличение) совокупного спроса и установление нового краткосрочного равновесия в точке B.

При переходе к долгосрочному аспекту рассмотрения, когда цены получают возможность изменяться, происходит рост общего уровня цен, так как при старом равновесном уровне цен $\bar{P}$ спрос больше предложения. Это приводит к уменьшению реального предложения денег и, соответственно, к сдвигу кривой LM вверх, который будет продолжаться, пока LM не вернется в первоначальное положение. При росте цен будет сокращаться совокупное предложение, и линия SRAS будет сдвигаться вверх, пока не установится уровень цен P_1, соответствующий потенциальному выпуску при возросшем совокупном спросе.

Следовательно, итогом стимулирующей денежной политики в краткосрочном периоде является увеличение выпуска, снижение ставки процента при фиксированном уровне цен, а в долгосрочном периоде — только рост уровня цен и неизменность реальных переменных (принцип нейтральности денег).

Вопросы и задания

1. Что понимают под эффективностью экономической политики в закрытой экономике?
2. Выведите функцию, характеризующую совокупный спрос в закрытой экономике, с использованием модели IS-LM.
3. Проанализируйте, какие меры примут центральные банки стран A и B с закрытой экономикой по нейтрализации потрясений в

зависимости от поставленных ими задач. Центральный банк страны *A* ставит целью только поддержание цен на стабильном уровне. Центральный банк страны *B* ставит целью только поддержание объема производства и безработицы на естественном уровне. Какие меры принимает каждая из стран в ответ на:

а) вызванное внешними факторами замедление скорости обращения денег;

б) вызванное внешними факторами увеличение цен на нефть.

4. Проанализируйте воздействие роста бережливости населения страны с закрытой экономикой, выражающееся в сокращении автономного потребления, на краткосрочные равновесные уровни дохода и сбережений в предположении о 'неизменности инвестиций. Почему этот результат называется «парадоксом бережливости»? Возникает ли этот парадокс при рассмотрении долгосрочного макроэкономического равновесия? Обоснуйте свой ответ.
5. В каком случае в модели IS-LM не будет наблюдаться эффект вытеснения инвестиций при проведении стимулирующей бюджетно-налоговой политики. Обоснуйте свой ответ.
6. В каком случае в модели IS-LM будет наблюдаться эффект полного вытеснения инвестиций при проведении стимулирующей бюджетно-налоговой политики. Объясните свой ответ.
7. Пусть экономики стран *X* и *Y* являются закрытыми и различаются только тем, что при одинаковом изменении ставки процента жители страны *Y* сильнее изменяют спрос на реальные запасы денежных средств, чем жители страны *X*. Сопоставьте эффективность бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики этих двух странах. Обоснуйте свой ответ алгебраически (с подробным выводом) и проиллюстрируйте графически.
8. Пусть экономика страны *M* является закрытой и инвестиции в ней бесконечно эластичны по ставке процента. Определите мультипликаторы бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики.
9. Пусть совокупное потребление в закрытой экономике зависит как от располагаемого дохода, так и от реальной ставки процента. Известно, что выпуск в стране достиг уровня полной занятости. В этих условиях правительство принимает закон об увеличении налогов на ΔT. Опишите, как изменятся в новом состоянии краткосрочного общего экономического равновесия реальный доход, потребление, реальная ставка процента, инвестиции.
10. В закрытой экономике функции потребления, инвестиций и спроса на деньги являются линейными. Совокупное потребление зависит как от располагаемого дохода, так и от реальной ставки процента. Выведите мультипликаторы бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики для этой экономики.

8 Открытая экономика

8.1. Национальный доход в открытой экономике

Основное тождество национальных счетов для открытой экономики (экономики, торгующей с остальным миром) принимает вид:

$$Y = C + I + G + \mathrm{NX}, \qquad \textbf{(8.1)}$$

где NX — чистый экспорт, NX = EX (объем экспорта) — IM (объем импорта).

Из **(8.1)** следует, что $\mathrm{NX} = Y - (C + I + G)$. Если величина выпуска превышает внутренние расходы, то разница экспортируется ($\mathrm{NX} > 0$), если величина выпуска не покрывает внутренних расходов, то разница импортируется ($\mathrm{NX} < 0$).

8.2. Счет движения капитала и счет текущих операций

Платежный баланс представляет собой запись всех сделок резидентов данной страны с остальным миром. Он состоит из двух разделов: счета движения капитала и счета текущих операций (иногда называемого просто «текущий счет»). ***В счете текущих операций*** отражается торговля товарами и услугами, а также трансфертные платежи. Услуги включают в себя фрахт, выплаты лицензий, процентные платежи и чистый доход по инвестициям (проценты и прибыли на зарубежные активы резидентов данной страны за вычетом доходов иностранцев на активы, которыми они владеют в данной стране). Трансфертные платежи включают денежные переводы населения, дары и гранты — субсидии и безвозвратные ссуды. ***В торговом балансе*** отражается торговля товарами. Таким образом, счет текущих операций представляет собой сумму торгового баланса, баланса услуг и счета трансфертных платежей. Счет текущих операций имеет положительное сальдо, если экспорт товаров и услуг превышает их импорт и сальдо переводов за границу, и отрицательное — в противном случае.

Счет движения капиталов отражает покупку и продажу активов (акций, облигаций, земли и т.п.). Счет движения капиталов имеет положительное сальдо, когда поступления в страну от продажи активов иностранцам превосходят ее платежи за приобретение зарубежных активов, и отрицательное — в противном случае.

Перепишем **(8.1)** следующим образом:

$$Y - C - G = I + \mathrm{NX}. \qquad \textbf{(8.2)}$$

В левой части **(8.2)** представлены национальные сбережения ($S = Y - C - G$). Следовательно, основное тождество национальных счетов можно представить в виде:

$$(I - S) + \mathrm{NX} = 0. \qquad \textbf{(8.3)}$$

В **(8.3)** $(I - S)$ представляет собой счет движения капитала, а NX — счет текущих операций. Из **(8.3)** следует, что в состоянии равновесия сальдо платежного баланса равно 0, а счет движения капитала и счет текущих операций взаимно уравновешивают друг друга.

8.3. Обменные курсы

Валютный курс двух стран — это цена, по которой между ними происходит обмен национальными валютами. В зависимости от его выражения различают девизный и обменный курсы.

Девизный курс показывает, сколько единиц иностранной валюты можно получить за единицу отечественной. *Обменный курс* является величиной, обратной девизному, и показывает, сколько единиц отечественной валюты можно получить в обмен на единицу иностранной. Далее будем использовать понятие *валютный курс*, определяя его как девизный.

Следует различать также номинальный и реальный валютные курсы. *Номинальный валютный курс* — это относительная цена валют двух стран. *Реальный валютный курс* — это относительная цена единицы товаров и услуг, произведенных в двух странах.

Пусть ε_r — реальный валютный курс; ε — номинальный валютный курс; P — уровень цен в стране; P^* — уровень цен за границей, тогда

$$\varepsilon_r = \varepsilon \cdot \frac{P}{P^*}. \qquad \textbf{(8.4)}$$

Если реальный валютный курс падает, то отечественные товары становятся относительно более дешевыми по сравнению с иностранными; экспорт растет, импорт падает, и, следовательно, чистый экспорт растет. Соответственно, при росте реального валютного курса чистый экспорт падает. Таким образом, чистый экспорт является убывающей функцией от реального валютного курса:

$$\mathrm{NX} = \mathrm{NX}(\varepsilon_r).$$

Далее будем рассматривать *малую открытую экономику*, т.е. представляющую собой лишь малую долю мирового рынка и поэтому не оказывающую влияния на мировую ставку процента. При этом также предполагается, что ничто не препятствует свободному переливу капитала из страны в страну, т.е. реальная ставка процента в стране устанавливается на уровне мировой. Мировая реальная ставка процента определяется равенством мировых сбережений и инвестиций, так как мировую экономику можно рассматривать так же, как и закрытую.

В долгосрочном периоде выпуск находится на уровне потенциального ($Y = \overline{Y}$); потребление зависит от располагаемого дохода ($C = f(\overline{Y} - T)$), объем государственных закупок и налогов зависит от государственной политики ($G = \overline{G}$, $T = \overline{T}$); объем инвестиций задан мировой ставкой процента ($I = I(r^*)$). Поэтому сбережения $S = Y - C - G$ постоянны и сальдо движения капитала ($S - I$) есть величина постоянная, не зависящая от реального валютного курса. Из **(8.3)** следует, что реальный валютный курс уравновешивает чистый экспорт и сальдо счета движения капитала (рис. 8.1). Здесь ε^*_r — равновесное значение реального валютного курса.

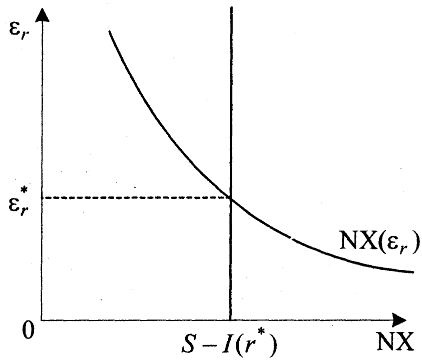


Рис. 8.1. ***Долгосрочное равновесие в малой открытой экономике***

В данном случае чистый экспорт представляет собой спрос на валюту данной страны со стороны иностранцев. Сальдо счета движения капитала — это предложение валюты данной страны. Равновесный реальный валютный курс, таким образом, уравновешивает спрос и предложение на валютном рынке.

Рассмотрим причины перелива капитала из страны в страну. Пусть i — ставка процента в стране; i^* — ставка процента за рубежом; ε_t — валютный курс в момент времени t; ε_{t+1} — валютный курс в следующий момент времени, тогда условие равновыгодности единицы вложений в стране и за рубежом в момент времени t будет выглядеть следующим образом:

$$(1 + i_t) = \frac{(1+i_t^*)\cdot\varepsilon_t}{\varepsilon_{t+1}}. \tag{8.5}$$

В левой части **(8.5)** стоит доход инвестора от вложения единицы капитала в национальную экономику, в правой — доход от вложения этой же единицы за рубежом. Доход от вложения одной денежной единицы за рубежом рассчитывается следующим образом: $1 \cdot \varepsilon_t$ — это перевод этой единицы в зарубежную валюту; $(1 + i_t^*) \cdot \varepsilon_t$ — количество зарубежной валюты, которое будет получено инвестором в конце периода; $\frac{(1+i_t^*)\cdot\varepsilon_t}{\varepsilon_{t+1}}$ — количество национальной валюты, полученной инвестором в конце периода по валютному курсу, установившемуся на этот момент.

Если инвестор заключает контракт на покупку в конце периода валюты по заранее обговоренному курсу, т.е. в **(8.5)** значение ε_{t+1} известно, то условие **(8.5)** называется *скорректированным процентным паритетом*. Если же ε_{t+1} — это ожидаемый валютный курс, то **(8.5)** называется *нескорректированным процентным паритетом*.

Перепишем **(8.5)** следующим образом:

$$\frac{1+i_t^*}{1+i_t} = \frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t}. \tag{8.6}$$

Вычтем единицу из обеих частей **(8.6)**, тогда

$$\frac{i_t^* - i_t}{1+i_t} = \frac{\Delta\varepsilon_t}{\varepsilon_t}. \tag{8.7}$$

Если ставка процента внутри страны невелика, то

$$i_t^* - i_t \approx \frac{\Delta\varepsilon_t}{\varepsilon_t}. \tag{8.8}$$

Выражение **(8.8)** означает, что инвестору безразлично, вкладывать ли свои сбережения в отечественные или заграничные финансовые активы, если разница между заграничной и отечественной ставками процента приблизительно равна темпу роста валютного курса.

Если $i_t > i_t^* - \frac{\Delta\varepsilon_t}{\varepsilon_t}$, то капитал будет притекать в страну; если $i_t < i_t^* - \frac{\Delta\varepsilon_t}{\varepsilon_t}$, то будет наблюдаться отток капитала из страны. При принятии решений инвесторы будут ориентироваться на ожидаемое изменение валютного курса.

Из **(8.4)** следует, что

$$\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}(\text{в }\%) \approx \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}(\text{в }\%) + \frac{\Delta P}{P}(\text{в }\%) - \frac{\Delta P^*}{P^*}(\text{в }\%), \qquad \textbf{(8.9)}$$

или

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}(\text{в }\%) \approx \frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}(\text{в }\%) + (\pi^* - \pi), \qquad \textbf{(8.10)}$$

где π^* — темп инфляции за рубежом; π — темп инфляции внутри страны.

Из **(8.10)** следует, что изменение номинального валютного курса равно сумме изменения реального валютного курса и разницы темпов инфляции за рубежом и внутри страны.

Гипотеза *паритета покупательной способности* означает, что одна и та же денежная единица должна обладать одинаковой покупательной способностью во всех странах. Это выравнивание происходит благодаря действиям перекупщиков. Если эта гипотеза верна, то реальный валютный курс может колебаться только в течение очень коротких промежутков времени, а в среднем благодаря действиям перекупщиков остается постоянным, т.е. в **(8.10)** $\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r} = 0.$

Тогда $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}(\text{в }\%) \approx (\pi^* - \pi)$, т.е. все изменения номинального валютного курса происходят из-за изменения цен в стране или за рубежом.

Таким образом, инвесторы ожидают изменения валютного курса в зависимости от темпов инфляции в стране и за границей.

Валютный курс, складывающийся в результате взаимодействия спроса и предложения на валютном рынке, называется *плавающим*. В отличие от плавающего, *фиксированный* валютный курс — это результат соглашения заинтересованных стран о поддержании пропорций обмена своих валют на определенном уровне или в определенных пределах. Центральные банки этих стран в случае отклонения курса национальной валюты от установленного обязаны продавать или покупать валюту с целью поддержания объявленного курса.

Для рассмотрения влияния экономической политики на равновесное состояние в открытой экономике в краткосрочном и долгосрочном периодах применим модель Манделла—Флеминга.

8.4. Модель Манделла—Флеминга

В модели Манделла–Флеминга, рассматривающей малую открытую экономику, предполагается совершенная мобильность капитала, следствием которой является выравнивание ставки процента в стране и за рубежом ($r = r^*$, где r^* — мировая ставка процента). Как и в модели IS-LM, здесь равновесие трактуется как одновременное достижение равновесного состояния на рынке товаров и услуг и на денежном рынке. Общий вид модели следующий:

$$\begin{gathered} Y = C + I + G + \mathrm{NX}; \\ C = f(Y - T);\ 0 < f' < 1; \\ I = I(r);\ I' < 0; \\ G = \overline{G};\ T = \overline{T}; \\ \mathrm{NX} = \mathrm{NX}(\varepsilon_r);\ \ \mathrm{NX}' < 0; \\ \frac{M}{P} = L(r, Y);\ L'_r < 0, L'_y > 0; \\ r = r^*. \end{gathered} \tag{8.11}$$

В линейном варианте **(8.11)** принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} Y = C + I + G + \mathrm{NX}; \\ C = a + b\,(Y - T);\ a > 0,\ 0 < b < 1; \\ I = c - dr,\ c,\ d > 0; \\ G = \overline{G};\ T = \overline{T}; \\ \mathrm{NX} = g - k\varepsilon_r, \text{ где } g,\ k > 0; \\ \frac{M}{P} = eY - fr;\ e, f > 0; \\ r = r^*. \end{gathered} \tag{8.12}$$

Если объем собираемых налогов пропорционален доходу, причем t — ставка налога, то **(8.12)** можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} \text{IS: } Y = a + b\,(1 - t)Y + c - dr + \overline{G} + g - k\varepsilon_r; \\ \text{LM: } \frac{M}{P} = eY - fr; \\ r = r^*. \end{gathered} \tag{8.13}$$

Из **(8.13)** видно, что эндогенными переменными модели являются доход и реальный валютный курс.

В краткосрочном периоде цены не меняются, т.е. инфляция в стране и за рубежом отсутствует, и, следовательно, реальный валютный курс совпадает с номинальным. В координатах $Y - r$ модель **(8.11)** представлена на рис. 8.2.

Положение IS в этих координатах определяется обменным курсом. Если ε_r растет, то чистый экспорт падает, на рынке товаров и услуг при каждой ставке процента равновесное значение дохода уменьшается, и, следовательно, кривая IS сдвигается влево—вниз. При падении валютного курса IS, наоборот, сдвигается вправо—вверх.

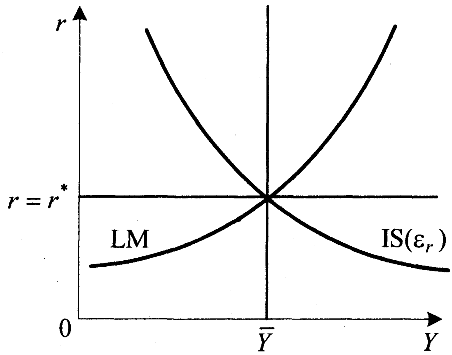


Рис. 8.2. ***Общее экономическое равновесие***

На рис. 8.2 общее равновесие в экономике достигается при ставке процента, установившейся на уровне мировой. Действительно, если ставка процента в стране установится ниже мирового уровня, то инвесторы будут стремиться вкладывать капитал за рубежом, спрос на зарубежную валюту увеличится, валютный курс понизится, чистый экспорт вырастет, доход вырастет, и кривая IS сдвинется вправо—вверх до положения, при котором внутренняя ставка процента окажется равной мировой (рис. 8.3).

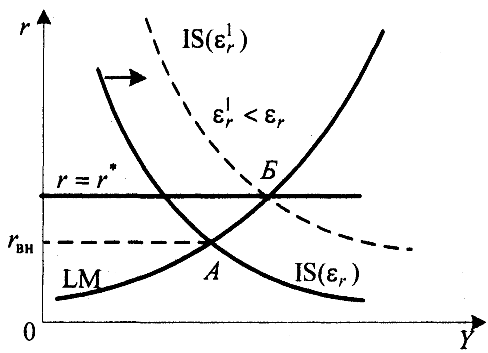


Рис. 8.3. ***Движение к равновесию в случае, когда внутренняя ставка процента $r_{вн}$ ниже мировой***

Аналогично если внутренняя ставка процента окажется выше мирового уровня, то иностранные инвесторы будут стремиться вкладывать капитал в эту страну, валютный курс ее валюты повысится. Чистый экспорт упадет, доход упадет, и кривая IS сдвинется влево—вниз до положения, при котором равновесная ставка процента в стране окажется на уровне мировой (рис. 8.4).

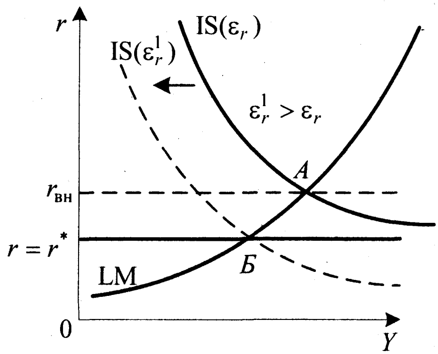


Рис. 8.4. ***Движение к равновесию в случае, когда внутренняя ставка процента $r_{вн}$ выше мировой***

В первом случае на денежном рынке рост дохода при неизменном предложении денег (реальном запасе денежных средств) ведет к превышению спроса на деньги над предложением и, следовательно, к росту равновесной ставки процента до мирового уровня. Во втором случае, напротив, предложение превысит спрос и равновесная ставка процента упадет. В обоих случаях общее равновесие установится при равенстве внутренней ставки процента мировой (точка *Б*).

Поскольку эндогенными переменными в модели Манделла—Флеминга являются реальный валютный курс и доход, удобнее представлять ее графически в координатах Y—ε_r. В этих координатах кривая IS будет иллюстрировать все возможные комбинации «валютный курс — доход» (Y, ε_r), при которых достигается равновесие на рынке товаров и услуг (ставка процента, как мы уже отмечали, равна мировой). Так как в кейнсианской функции потребления доля прироста потребления, а следовательно, и сбережений в приросте располагаемого дохода постоянна, то с ростом дохода, при прочих равных, будет расти и объем сбережений. Объем инвестиционного спроса внутри страны не меняется, поэтому инвесторы будут стремиться увеличить капиталовложения за рубежом, спрос на иностранную валюту вырастет, и, следовательно, реальный валютный курс упадет. Напротив, при падении дохода реальный валютный курс будет расти. Поэтому кривая IS в координатах Y—ε_r носит убывающий (понижающийся) характер.

Равновесие на денежном рынке не зависит от валютного курса. При ставке процента, равной мировой, уравновешивающей переменной на денежном рынке является доход. Поэтому в координатах Y—ε_r

LM представляет собой вертикальную линию, проходящую через равновесное значение дохода, установившееся на денежном рынке.

Модель Манделла—Флеминга в координатах Y—ε_r представлена на рис. 8.5.

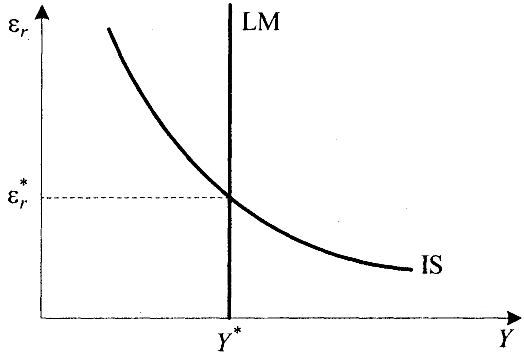


Рис. 8.5. ***Общее экономическое равновесие в модели Манделла—Флеминга***

Рассмотрим последствия государственной политики в модели Манделла—Флеминга при плавающем и фиксированном валютных курсах.

8.5. Плавающий валютный курс

Бюджетно-налоговая политика. Увеличение государственных расходов или снижение налогов приводит к увеличению дохода при каждом значении обменного курса, а значит к сдвигу IS вправо—вверх (рис. 8.6).

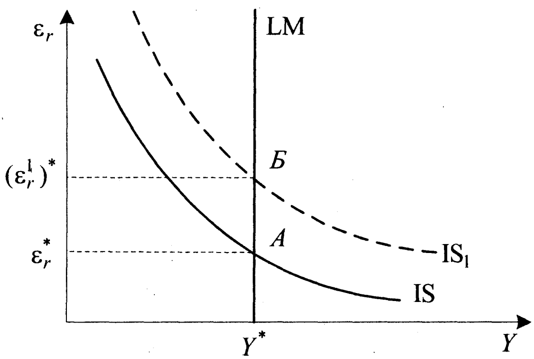


Рис. 8.6. ***Влияние стимулирующей бюджетно-налоговой политики на общее экономическое равновесие***

В краткосрочном периоде равновесие перейдет из точки *А* в точку *Б* (доход останется на прежнем уровне, реальный валютный курс повысится). Это происходит из-за того, что стимулирующая бюджетно-налоговая политика приводит к «повышательному» давлению на внутреннюю ставку процента. Капитал устремляется из-за рубежа в страну, обменный курс растет, чистый экспорт падает. Таким образом, стимулирующая бюджетно-налоговая политика приводит к росту реального валютного курса и вытеснению чистого экспорта.

Поскольку при применении этой политики равновесное значение дохода не меняется, ее краткосрочные и долгосрочные последствия одинаковы.

Кредитно-денежная политика. Увеличение предложения денег ведет к росту реальных запасов денежных средств, что вызывает на денежном рынке (при неизменной ставке процента) рост равновесного значения дохода. Линия LM сдвигается вправо (рис. 8.7).

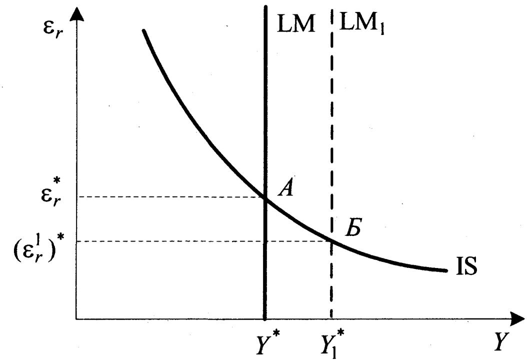


Рис. 8.7. ***Влияние стимулирующей кредитно-денежной политики на общее экономическое равновесие***

В краткосрочном периоде равновесие перейдет из точки *А* в точку *Б*, равновесное значение реального валютного курса понизится, а доход увеличится. Это происходит потому, что увеличение предложения денег оказывает «понижательное» давление на ставку процента, что приводит к оттоку капитала за границу, падению реального обменного курса, а следовательно, к росту чистого экспорта и дохода. Таким образом, в краткосрочном периоде стимулирующая кредитно-денежная политика приводит к увеличению дохода.

Если первоначально экономика находилась в состоянии долгосрочного равновесия, то в долгосрочном периоде цены начнут расти, реальный запас денежных средств упадет, LM начнет сдвигаться влево, пока не вернется в первоначальное положение (т.е. доход вновь вернется к потенциальному уровню). В долгосрочном периоде равновесие вновь вернется в точку *А*. Поскольку уровень цен вырос, а реальный валютный курс не изменился, то номинальный валютный курс упадет во столько же раз, во сколько раз вырос уровень цен. Таким образом, с точки зрения долгосрочного аспекта, денежная политика влияет не на реальные показатели, а только на номинальные.

Внешнеторговая политика. Пусть эта политика направлена на ограничение импорта. Тогда при каждом значении валютного курса чистый экспорт, а следовательно, и доход растут. Кривая IS сдвигается вправо—вверх (рис. 8.8).

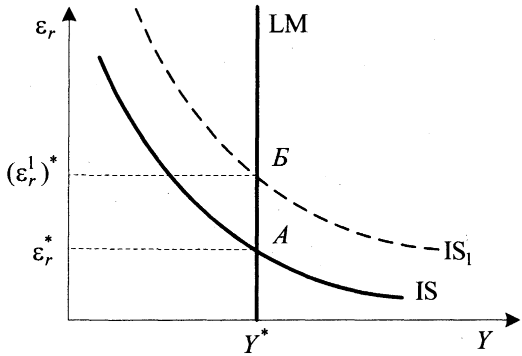


Рис. 8.8. ***Влияние введения квот на импорт на общее экономическое равновесие***

Валютный курс растет, равновесное значение дохода не меняется. Так как равновесное значение дохода не меняется, то долгосрочное равновесие совпадает с краткосрочным (т.е. устанавливается в точке *Б*). Таким образом, при плавающем валютном курсе внешнеторговая политика не оказывает влияния на доход как в долгосрочном, так и краткосрочном периодах.

8.6. Фиксированный валютный курс

При установлении фиксированного валютного курса кредитно-денежная политика Центрального банка сводится к поддержанию этого курса. Если валютный курс растет, то Центральный банк должен скупать валюту для его снижения. При падении валютного курса Центральный банк, наоборот, будет продавать иностранную валюту для его повышения. Под фиксированным валютным курсом понимается номинальный курс. Напомним, что в краткосрочном периоде номинальный и реальный валютный курсы совпадают.

Рассмотрим последствия экономической политики при фиксированном валютном курсе.

Бюджетно-налоговая политика. В *краткосрочном периоде* стимулирующая бюджетно-налоговая политика приводит к сдвигу кривой IS вправо—вверх, что оказывает «повышательное» давление на реальный валютный курс. Для поддержания фиксированного курса Центральный банк скупает иностранную валюту, увеличивая тем самым предложение денег. В результате равновесное значение дохода растет (рис. 8.9).

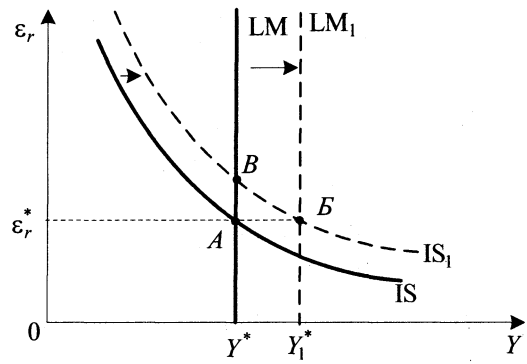


Рис. 8.9. ***Влияние стимулирующей бюджетно-налоговой политики на общее экономическое равновесие***

В краткосрочном периоде стимулирующая бюджетно-налоговая политика приводит к росту дохода (равновесие переходит из точки *A* в точку *Б*).

В долгосрочном периоде, если первоначально выпуск был на естественном уровне, цены начнут расти, реальный запас денежных средств будет падать до тех пор, пока LM не вернется в первоначальное положение, т.е. выпуск вновь установится на потенциальном уровне. Так как номинальный курс фиксирован, то реальный валютный курс возрастет, а чистый экспорт понизится (точка *B* на рисунке). Таким образом, в долгосрочном периоде стимулирующая бюджетно-налоговая политика приводит к вытеснению чистого экспорта.

Кредитно-денежная политика. При фиксированном курсе кредитно-денежная политика сводится только к поддержанию этого курса, т.е. предложение денег становится эндогенной переменной. Поэтому эта политика не может быть использована для изменения дохода как в краткосрочном, так и в долгосрочном периодах.

Однако Центральный банк может проводить *девальвацию* — снижение фиксированного валютного курса или *ревальвацию* — его повышение.

При девальвации для поддержания нового валютного курса Центральный банк увеличивает предложение денег, LM смещается вправо (рис. 8.10).

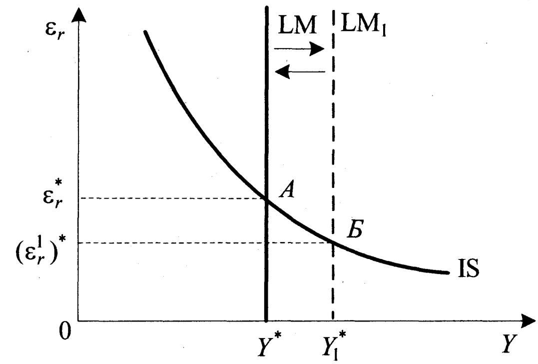


Рис. 8.10. ***Последствия девальвации национальной валюты***

Равновесное значение дохода в краткосрочном периоде увеличивается (равновесие в точке *Б*). В долгосрочном периоде цены начнут расти, реальный запас денежных средств упадет, LM вернется в первоначальное положение. Выпуск установится на естественном уровне. Поскольку номинальный валютный курс фиксирован, а цены выросли, то реальный валютный курс повысится до первоначального уровня. Равновесие установится в точке *А*. Таким образом, девальвация в долгосрочном периоде вызовет увеличение общего уровня цен, а на реальные показатели влияния не окажет. (Краткосрочные и долгосрочные последствия ревальвации читатель может рассмотреть самостоятельно.)

Внешнеторговая политика. Ограничения на импорт, как уже отмечалось, сдвигают IS вправо—вверх, что оказывает «повышательное» давление на валютный курс. Для поддержания фиксированного курса Центральный банк увеличивает предложение денег, LM сдвигается вправо. Равновесное значение дохода увеличивается (рис. 8.11).

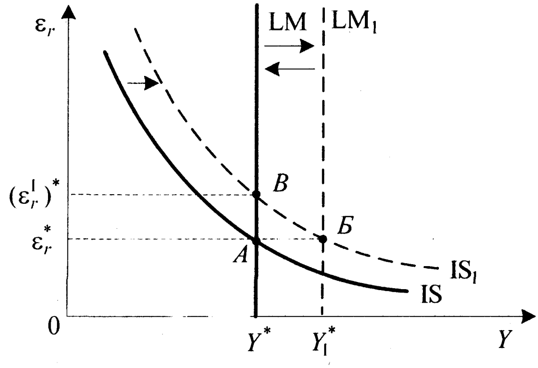


Рис. 8.11. ***Влияние введения квот на импорт на общее экономическое равновесие***

В краткосрочном периоде при фиксированном валютном курсе внешнеторговые ограничения приводят к росту дохода.

В долгосрочном периоде цены начинают расти, LM сдвигается влево, в первоначальное положение, реальный валютный курс растет (так как номинальный фиксирован, а уровень цен растет), чистый экспорт падает. В долгосрочном периоде рост чистого экспорта в результате внешнеторговых ограничений сводится на нет его падением в результате роста реального валютного курса.

Из вышеприведенного анализа видно, что последствия стимулирующей экономической политики в краткосрочном периоде в малой открытой экономике зависят от того, является ли установленный в ней валютный курс фиксированным или плавающим. С точки зрения долгосрочного аспекта рассмотрения результаты экономической политики для реальных показателей не зависят от принятого в стране валютного режима.

При рассмотрении вопроса, какой валютный курс предпочтительнее, следует учитывать недостатки каждого из них. Недостатком фиксированного валютного курса является то обстоятельство, что Центральный банк теряет возможность проводить кредитно-денежную политику, направленную на стабилизацию занятости и цен. Недостаток плавающего валютного курса состоит в том, что связанная с его изменением неопределенность затрудняет международную торговлю.

На практике фиксированный и плавающий курсы в чистом виде встречаются редко. При фиксированном курсе правительство проводит девальвации и ревальвации, изменяя его величину. При плавающем валютном курсе Центральный банк зачастую проводит экономическую политику, направленную на стабилизацию курса.

Вопросы и задания

1. Выведите зависимость темпа роста номинального валютного курса от темпов инфляции в стране и за рубежом и темпа роста реального валютного курса.
2. Выведите функцию совокупного спроса для экономики с режимом плавающего валютного курса.
3. Выведите функцию совокупного спроса для экономики с режимом фиксированного валютного курса.
4. Определите мультипликаторы бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики в экономике с режимом плавающего валютного курса.
5. Определите мультипликаторы бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики в экономике с режимом фиксированного валютного курса.
6. Сопоставьте краткосрочные и долгосрочные результаты стимулирующей бюджетно-налоговой политики:
   а) в закрытой экономике;
   б) в открытой экономике с плавающим валютным курсом;
   в) в открытой экономике с фиксированным валютным курсом.
7. Произошло изменение предпочтений населения: потребители стали предпочитать иностранные автомобили автомобилям отечественного производства. Как это повлияет на доход, чистый экспорт и валютный курс в малой открытой экономике при плавающих и фиксированных валютных курсах:
   а) в краткосрочном периоде;
   б) в долгосрочном периоде?
8. Проанализируйте влияние роста спроса на деньги на краткосрочные равновесные значения дохода, ставки процента, реального валютного курса, чистого экспорта в стране с режимом плавающего валютного курса.
9. Проанализируйте влияние роста спроса на деньги на краткосрочные равновесные значения дохода, ставки процента, реального валютного курса, чистого экспорта в стране с режимом фиксированного валютного курса.
10. Проанализируйте влияние отмены квот на импорт на долгосрочные равновесные значения дохода, ставки процента, реального валютного курса, чистого экспорта.

9 Экономико-математический инструментарий анализа проектных рисков

Количественные методы экономических исследований служат реальным инструментом, применяемым для решения прикладных задач. В современных российских условиях особое внимание уделяется вложению денежных средств в реальное производство, что отражается разработкой инвестиционного проекта. Именно поэтому одним из возможных практических направлений использования количественных методов является инвестиционное проектирование. Анализ эффективности инвестиционного проекта представляет собой многоаспектное исследование, важнейшая часть которого заключена в анализе проектных рисков. В этой главе предложены некоторые количественные подходы к риск-анализу.

9.1. Инструментарий анализа проектных рисков

Наличие рисков предполагает необходимость выбора одного из возможных вариантов решений, в связи с чем в процессе их принятия анализируются все возможные альтернативы, выбираются наиболее рентабельные и наименее рисковые. Конкретное содержание ситуации риска и связанная с этим альтернативность обладают разной степенью сложности и разрешаются разными способами с помощью различных инструментов. В простейших ситуациях возможна ориентация на своеобразную экспертную оценку, опирающуюся на интуицию и прошлый опыт. Но необходимость оптимального решения той или иной сложной производственной задачи, какой является, например, принятие решения о вложении инвестиций, требует использования специальных инструментов и методов анализа рисков, например сложного вероятностного анализа в моделях исследования операций. Следует еще раз подчеркнуть, что, несмотря на потенциальную негативность последствий и потерь, вызванных реализацией того или иного проектного риска, последний является своеобразным «двигателем прогресса», являясь в итоге источником возможной прибыли. Таким образом, основная задача исследователя — не отказ от рисков вообще, а выбор на основе объективных критериев специального инструмента риск-анализа и принятие решений в условиях рисков и неопределенности.

Методы, применяемые для оценки рисков проекта и управления ими, можно условно разделить на *качественный* и *количественный подходы.*

Под *оценкой рисков* понимается совокупность регулярных процедур их анализа, идентификации источников возникновения, определения (в стоимостных показателях) возможных масштабов последствий проявления рисковых факторов и процедур минимизации или компенсации выявленных рисков. Оценка рисков проекта строится на всестороннем многоаспектном исследовании — анализе проекта, включающем технико-технологические, коммерческие, социальные, экологические, институциональные, финансовые, экономические аспекты, на изучении взаимосвязей проекта и его внешней среды. Оценка проектных рисков производится с целью:

- выявления источников рисков;
- анализа внешних и внутренних его факторов;
- построения и анализа гипотетических цепочек развития событий при действии тех или иных факторов риска;
- определения показателей оценки уровня риска;
- установления механизмов формирования моделей взаимосвязи показателей и факторов риска.

Процесс проведения *качественного анализа* проектных рисков должен начинаться с выявления конкретных видов рисков данного проекта и исследования возможных причин их возникновения. Однако особенность качественного подхода к исследованию рисков состоит в стоимостной оценке как последствий ущерба от реализации выявленных рисков, так и всех предложенных «антирисковых» мероприятий. В процессе анализа риска необходимо, таким образом, получить ответы на следующие вопросы:

- где сосредоточены основные источники риска;
- каковы вероятности нанесения тех или иных убытков, связанных с отдельными источниками риска;
- насколько велики убытки, если реализуется худший сценарий;
- насколько эти убытки сравнимы с затратами на реализацию проекта предпринимательской деятельности;
- какие действия позволят снизить риск или совсем избежать его;
- могут ли эти действия генерировать новые риски.

Для ответов на эти вопросы проводится анализ главных предпосылок и альтернатив действий по достижению намеченных целей предпринимательского проекта и анализ возможных угроз недостижения сформулированных стратегических или тактических целей.

Проведение *количественного анализа* проектных рисков опирается на базисный вариант расчета проекта. Задача количественного анализа состоит в численном измерении влияния изменений рискованных факторов проекта, проверяемых на рискованность, на поведение критериев эффективности проекта.

На этапе идентификации риска большая важность риска означает большую вероятность его наступления и, соответственно, более серьезные последствия для успеха всего проекта. Процесс управления рисками базируется на их изучении, исследовании. В общем случае такое исследование называется *анализом риска*. Его основное назначение — дать потенциальным партнерам необходимые данные для принятия решений о целесообразности участия в проекте и выработке антирисковых мероприятий для защиты от возможных финансовых потерь.

Конечная цель анализа рисков состоит именно в выработке мер, позволяющих снизить риск проекта. Соответственно, принятию любого «антирискового» решения (страхование, распределение рисков, резервирование средств, приобретение дополнительной информации) предшествует анализ. Таким образом, речь идет о создании системы организационно-экономических стабилизационных механизмов, требующих от участников дополнительных затрат, размер которых зависит от условий реализации проекта, ожиданий и интересов участников, их оценок степени возможного риска. Такие затраты подлежат обязательному учету при определении эффективности проекта.

Эта система должна работать на протяжении всего жизненного цикла проекта, используя для снижения риска и связанных с ним неблагоприятных последствий специальный набор инструментов (механизмов).

Таким образом, качественная разработка организационно-экономических механизмов управления проектом и его рисками должна сопровождаться мониторингом информации, необходимой для оценки риска на каждой фазе жизненного цикла проекта. Учет такой информации позволяет отследить ситуацию неопределенности, рассчитать вероятность возникновения рисков и приоритетную важность их снижения в ходе проекта.

В исследованиях, посвященных проблеме риска, встречается несколько подходов к определению критерия количественной оценки риска, основные из которых:

- статистический метод оценки;
- метод экспертных оценок;
- использование аналогов;
- комбинированный метод.

Ряд инструментов количественной оценки рисков инвестиционного проекта *основан на методах математической статистики* — дисперсии, стандартном отклонении, коэффициенте вариации. Статистический метод оценки позволяет оценить риск не только конкретного проекта, но и предприятия в целом (проанализировав динамику его доходов) за некоторый промежуток времени. К преимуществам данного метода оценки рисков следует отнести несложность математических расчетов, а к недостаткам — необходимость сбора большого числа наблюдений (длины выборки: чем больше массив, тем достовернее оценка рисков). Таким образом, к настоящему времени сложился достаточно широкий спектр практических приемов и подходов, используемых при анализе проектных рисков. Кратко опишем некоторые из них.

➤ Основное преимущество *метода экспертных оценок* заключается в возможности использования опыта экспертов в процессе анализа проекта и учета влияния разнообразных качественных факторов. Алгоритм метода экспертной оценки рисков проекта может включать:

1) разработку полного перечня возможных рисков по фазам жизненного цикла проекта;

2) ранжирование этих рисков по степени важности. С этой целью необходимо определить (экспертным путем):

- вероятность данного риска (в долях единицы);
- опасность данного риска, т.е. насколько существенными окажутся последствия наступления неблагоприятного события (измеряется в баллах);
- важность риска как произведение вероятности на опасность его наступления;

3) ранжирование рисков по степени важности для проекта.

Методика экспертной оценки включает комплекс логических и математико-статистических методов и процедур, связанных с деятельностью эксперта по переработке необходимой для анализа и принятия решений информации. Центральной «фигурой» экспертной процедуры является сам эксперт — специалист, использующий свои способности (знания, умение, опыт, интуицию и т.п.) для нахождения нужного, наиболее эффективного решения.

Экспертный анализ рисков обладает рядом очевидных достоинств: отсутствие необходимости в точных исходных данных; наличие хорошо разработанных методик проведения и их компьютерной поддержки; определенная возможность проводить оценку до расчета эффективности проекта. К существенным недостаткам следует отнести: трудность в привлечении независимых экспертов и субъективность оценок.

➤ Сущность *метода аналогий* состоит в анализе всех имеющихся данных, касающихся осуществления фирмой аналогичных проектов в прошлом с целью расчета вероятностей возникновения потерь.

➢ *Комбинированный метод* заключается в объединении нескольких отдельных методов или их отдельных элементов.

Мера объективной возможности случайного события называется его вероятностью, которая позволяет прогнозировать случайные события, давая им количественную и качественную характеристику. При этом уровень неопределенности и степень риска уменьшаются. Для исчисления величины риска, необходимо знать как возможные последствия отдельного действия, так и их вероятность.

В экономических задачах методы теории вероятностей сводятся к определению значений вероятности наступления событий и к выбору из возможных событий самого предпочтительного исходя из наибольшего значения математического ожидания.

Субъективная вероятность, применяемая для исследования проектных рисков, как уже указывалось, использует предположение относительно некоторого результата, которое основывается на суждении оценивающего эксперта, на его личном опыте. Можно условно считать данный подход частным случаем метода экспертных оценок. Преимуществом метода субъективных вероятностей является возможность их применения для неповторяющихся событий и в условиях отсутствия достаточного количества статистических данных в отличие от объективных вероятностей, что и определяет их сферу применения в анализе проектных рисков.

➢ Метод экспертной оценки рисков, описанный ранее, следует дополнить его разновидностью, так называемым *методом Дельфи*. Он характеризуется анонимностью и управляемой обратной связью.

➢ *Метод ставки процента* (*дисконта*) *с поправкой на риск* позволяет, увеличивая безрисковую ставку процента на величину надбавки за риск (рисковая премия), учесть факторы риска при расчете эффективности проекта. Например, в случае инновационных проектов надбавка за риск может достигать 10—20%. Как уже ясно из вышеизложенного, для количественной оценки риска нескольких проектов (или нескольких вариантов одного проекта) можно воспользоваться числовыми значениями показателей дисперсии и среднего квадратического (стандартного) отклонения. В тех случаях, когда проекты имеют несколько возможных исходов, дисперсия характеризует степень рассеянности случайной величины (например, чистого дисконтированного дохода) вокруг своего среднего значения (математического ожидания).

➢ *Метод критических значений* базируется на нахождении тех значений переменных (факторов) или параметров проекта, проверяемых на риск, которые приводят расчетную величину соответствующего критерия эффективности проекта к критическому пределу.

➢ К важным методам исследования риска относится *моделирование задачи выбора* с помощью построения сложных распределений вероятностей («дерева решений»), в основе которого лежит графическое (сетевое) построение вариантов возможных решений. По ветвям «дерева» соотносят субъективные и объективные оценки возможных событий. Следуя вдоль построенных ветвей и используя специальные методики расчета вероятностей, оценивают каждый путь и выбирают менее рискованный.

Кроме перечисленных подходов практически используются следующие методы:

- анализ чувствительности (включая методы математического программирования, анализ точки безубыточности и др.);
- анализ сценариев.

➢ *Анализ чувствительности.* В ходе анализа чувствительности (уязвимости) происходит последовательно-единичное изменение каждой переменной: только одна из переменных меняет свое значение на прогнозное число процентов и на этой основе пересчитывается новое значение используемого критерия. Простейшим способом, позволяющим проводить грубую оценку рисков проекта по методу чувствительности, является анализ точки безубыточности (*breakeven point analysis*), широко используемый в международной практике.

Вообще говоря, классический анализ чувствительности представляет собой направленный процесс варьирования ключевых предположений при прогнозировании денежных потоков с целью определить влияние, которое они могут оказывать на прогнозируемую выгоду. Важным при проведении анализа чувствительности является грамотный отбор варьируемых факторов риска. Состав таких риск-переменных должен идентифицироваться в ходе проведения качественного анализа рисков.

Для анализа воздействий конкретных отобранных риск-переменных на эффективность проекта можно использовать подход «*What if*? (Что, если?)». В результате такого анализа выявляется абсолютная величина изменения эффективности проекта в зависимости от заданного изменения одной из риск-переменных.

При проведении полного (или относительного) анализа чувствительности следует рассчитать относительные величины — эластичности, отражающие, насколько сильно изменяется критериальный проектный показатель при единичном изменении риск-переменной. Завершает анализ чувствительности ранжирование риск-переменных в зависимости от значений эластичностей: чем больше значение эластичности, тем сильнее эта зависимость и тем более рискованным для проекта является данный фактор. Иначе говоря, даже незначительное его отклонение от первоначального замысла окажет серьезное влияние на успех всего проекта.

Анализ чувствительности проекта применяется в двух случаях:

1. Для определения факторов, в наибольшей степени оказывающих влияние на результаты проекта. В ходе этого процесса:

- определяются наиболее значимые факторы;
- определяется их наиболее вероятное (базовое) значение;
- рассчитывается значение показателя NPV (или другого критерия) при базовых значениях;
- один из факторов изменяется в определенных пределах и рассчитывается значение NPV при каждом новом значении этого фактора;
- предыдущий шаг повторяется для каждого фактора;
- все необходимые расчеты сводятся в таблицу;
- сравнивается чувствительность проекта к каждому фактору и определяются важнейшие из них.

Среди факторов, подлежащих рассмотрению, могут быть: продолжительность инвестиционной фазы, цена единицы продукции, объем продаж, плата за заемные средства, стоимость сырья, налоги и другие.

В результате проведения расчетов определяются факторы, имеющие наибольшее влияние на NPV проекта. Знание таких факторов позволит вовремя принять дополнительные меры, уменьшающие вероятность наступления нежелательных событий.

2. Для сравнительного анализа проектов, здесь рассматривается вопрос: «Как повлияет изменение труднопрогнозируемых факторов на эффективность проекта?»

9.2. Сценарный подход

Следующим методом анализа, применяемым при количественной оценке риска проекта, является *анализ сценариев*, который представляет собой развитие методики анализа чувствительности проекта в том смысле, что одновременному непротиворечивому (реалистическому) изменению подвергается вся группа проверяемых на риск переменных проекта. Таким образом, может быть проанализировано воздействие одновременного изменения всех основных переменных проекта, определяющих его денежные потоки. Важным преимуществом метода является тот факт, что отклонения параметров рассчитываются с учетом их взаимозависимостей (корреляции).

Чаще всего рассчитываются пессимистический вариант (сценарий) возможного изменения переменных, оптимистический и наиболее вероятный варианты. В соответствии с этими расчетами определяются новые значения критериев NPV и IRR.

На практике при проведении анализа рисков инвестиционного проекта эксперт сталкивается с неограниченным количеством различных вариантов развития событий. Это проявляется в необходимости описания всего множества возможных условий реализации проекта в форме соответствующих *сценариев* или *моделей*, учитывающих взаимосвязи между основными техническими, экономическими и другими параметрами проекта; учете разнообразных затрат, включая затраты на противорисковые мероприятия. Такой *модельный анализ* связан с необходимостью преобразования исходной информации о факторах неопределенности в информацию о вероятностях отдельных условий реализации и соответствующих показателях эффективности.

Это прежде всего относится к описанию бизнес-операций — конкретных действий, осуществляемых предприятием в экономической деятельности, следствием которых являются изменения в величине и направлениях движения финансовых потоков. Конструируемые на этой основе модели отражают реальную производственно-хозяйственную деятельность предприятия посредством описания поступлений денежных средств и их выплат как взаимосвязанных событий, относящихся к различным временным периодам.

Описанная процедура *формализованного описания неопределенности* может завершаться расчетом величины *ожидаемой эффективности* проекта, равной сумме произведений эффекта каждого сценария на вероятность его реализации. Например, если проектный аналитик смоделировал n сценариев, а в качестве критерия принятия решений выбран критерий NPV, то

$$\mathrm{NPV}_{\text{ож}} = \mathrm{NPV}_1\, p_1 + \mathrm{NPV}_2\, p_2 + \ldots + \mathrm{NPV}_n\, p_n,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — вероятность реализации соответствующего сценария, при этом сумма вероятностей всех предложенных сценариев равна 1.

Одним из наглядных примеров, основанных на вероятностной оценке конкретного сценария, является так называемое *дерево решений*. Этот метод интересен как аналитику инвестиционного проекта, так и его менеджеру, использующему «дерево решений» проекта на стадии управления.

По каждому сценарию исследуется, как будет действовать в соответствующих организационно-экономических условиях механизм реализации проекта, каковы при этом будут доходы, потери и показатели эффективности у отдельных участников. Проект считается устойчивым и эффективным, если во всех рассмотренных ситуациях интересы участников соблюдаются, а возможные неблагоприятные последствия устраняются за счет созданных запасов и резервов или возмещаются страховыми выплатами.

9.3. Имитационное моделирование[1]

Многовариантность проектных расчетов базируется на широком использовании модельного подхода и средств вычислительной техники. При этом на каждой фазе проектного цикла могут применяться свои математические методы и модели. Так, в фазе капитального строительства в основном используются методы сетевого планирования и управления; в производственной фазе — математические модели массового обслуживания, управления запасами, модели оперативного управления производством, стратегического планирования и т.д.

В ходе разработки проекта требуется анализировать различные зависимости, для чего строятся соответствующие уравнения. К их числу следует отнести, например, зависимость объема продаж продукции от объема производства и цены, зависимость переменных производственных затрат от удельных затрат и объема производства, зависимость чистого потока платежей от прибыли, амортизационных отчислений, капитальных вложений и других переменных, зависимости, формирующие проектные доходы, расходы, потребность в оборотном капитале и т.д. Все эти зависимости моделируются во времени и отражаются в результирующем показателе качества функционирующей системы, в роли которых для моделей реализации инвестиционных проектов выступают дисконтированные критерии проектной эффективности.

Моделирование проекта является важнейшим инструментом как проектного анализа, так и управления проектом (*model management*). Выделим наиболее общие признаки для всех моделей, применяемых в ходе инвестиционного проектирования:

- комплексность;
- наличие большого числа учитываемых переменных и параметров;
- значительные объем и степень неопределенности исходной информации;
- возможность недостоверности исходных данных;
- большая длительность проекта и связанного с этим периода моделирования;
- возможность существенных изменений общеэкономических факторов за период моделирования.

Модели, обладающие перечисленными свойствами, реализованные на компьютерах, называются *имитационными*. Они служат важным инструментом решения проблемы многовариантности. Практическая реализация этого подхода чаще всего базируется на использовании *метода Монте-Карло*.

---

[1] Параграф написан при участии *А.В. Малугина*.

Имитационной моделью реальной системы называется совокупность:

- уравнений функционирования;
- показателей качества функционирования системы;
- детерминированных составляющих входных параметров;
- функций распределения вероятностей случайных величин или характеристик случайных функций, входящих в уравнения функционирования системы.

Процесс имитации состоит из серии численных экспериментов с использованием модели при заданных значениях детерминированных составляющих входных переменных и случайных реализациях случайных величин или функций, входящих в состав модели. Результатом проведения вычислений являются эмпирические распределения выходных переменных и показателей качества функционирования системы.

В общих чертах вероятностный метод оценки рисков в инвестиционном проекте состоит в том, что различные компоненты и параметры проекта, особенно те, которые могут изменяться существенно, рассматриваются как случайные переменные. В большинстве случаев такая вероятностная модель проекта создается для оценки таких параметров, как NPV — чистый дисконтированный доход, срок окупаемости, стоимость и сроки осуществления проекта и его этапов. Поскольку эти параметры зависят от различных случайных переменных (которые могут сильно изменяться и вносить вклад в неопределенность проекта), они сами являются случайными величинами. Если распределение случайных переменных, от которых зависят искомые параметры, можно оценить, то теоретически можно вычислить вероятность того, что конкретные сроки выполнения этапов проекта будут соблюдены или что не будет превышен заданный уровень расходов. Проблема состоит в том, что в подавляющем большинстве случаев невозможно найти итоговое распределение вероятности аналитически. Поэтому для получения кумулятивной функции распределения полной стоимости и соблюдения графика реализации проекта, проводится имитационный анализ по методу Монте-Карло.

На практике ряд исследователей избегает использования данного метода ввиду сложности получения необходимой информации, трудности построения вероятностной модели и трудоемкости вычислений. Однако корректное построение модели и компьютерная поддержка производимых расчетов дают надежные результаты, позволяющие судить как о доходности проекта, так и о его устойчивости. Поэтому на практике данный метод может быть осуществлен только с применением компьютерных программ, позволяющих описывать прогнозные модели и рассчитывать большое число случайных сценариев. При использовании метода необходимо учитывать, что точность результатов во многом определяется тем, насколько хороша созданная прогнозная модель.

Для имитационного моделирования характерно представление возможных значений ненадежных входных величин в форме распределения вероятностей. Для возможных значений входных и целевых величин определяется распределение вероятностей. При этом учитывается зависимость как между отдельными входными величинами, так и между входными и целевыми величинами. Распределение вероятностей можно рассматривать как основу поиска решения с учетом ненадежности ожиданий. Метод Монте-Карло является методом формализованного описания неопределенности и используется в сложных для прогнозирования проектах. Он связан с применением имитационных моделей, позволяющих создавать множество сценариев, которые согласуются с заданными ограничениями на исходные переменные. Метод Монте-Карло наиболее полно отражает всю гамму неопределенностей, с которой может столкнуться реальный проект, но в то же время, через начально заданные ограничения учитывает всю информацию, имеющуюся в распоряжении аналитика проекта.

Последовательность шагов при реализации этого метода должна быть следующей.

1. *Создание прогнозной модели.* В качестве прогнозной модели выступают математические зависимости, полученные при расчете показателей эффективности, чаще всего — чистый дисконтированный доход (NPV).

2. *Выявление ключевых факторов*, т.е. переменных, которые в значительной степени влияют на результаты проекта (на этом этапе используются результаты анализа чувствительности) и имеют значительную вероятность наступления.

3. *Определение распределения вероятностей ключевых факторов.* При этом:

- устанавливаются минимальное и максимальное значения, которые, по мнению аналитика, могут принять ключевые факторы;
- прогнозируются вид и параметры распределения вероятности внутри заданных границ.

4. *Выявление корреляционных зависимостей между переменными.* Должны быть выявлены все зависимые переменные и по возможности точно (с помощью коэффициентов корреляции) описана степень этих зависимостей, иначе созданная модель может привести к заведомо неверным выводам.

5. *Генерирование множества случайных сценариев, основанных на заданных ограничениях.* Для реализации этого этапа требуется опи-

сание прогнозной модели на компьютере. Количество «прогонов» модели, выполняемой на компьютере, должно быть достаточным, чтобы полученная выборка была репрезентативна.

6. *Проведение статистического анализа результатов имитационного моделирования.* При этом следует выбирать проект с таким распределением вероятности NPV, которое наилучшим образом соответствует отношению к риску конкретного инвестора. В качестве меры риска в инвестиционном проектировании, вычисляемой на основе метода Монте-Карло, целесообразно использовать вероятность получения отрицательного значения NPV. Эта вероятность оценивается на основе статистических результатов имитационного моделирования как произведение количества результатов с отрицательным значением вероятности единичного прогона. Например, если из 5000 прогонов отрицательные значения NPV окажутся в 3454 случаях, то мера риска составит 69,1%.

Помимо вероятностных характеристик NPV (математического ожидания, среднего квадратического отклонения и коэффициента вариации) при реализации данного метода могут быть определены следующие показатели:

- *ожидаемые потери инвестора* «П» — сумма всех отрицательных результатов, помноженных на вероятность их наступления;
- *ожидаемые доходы от проекта* «Д» — сумма всех положительных результатов, помноженных на вероятность их наступления;
- для инвестора может быть определена *стоимость неопределенности*, равная «П», если проект будет принят, и «Д», если проект будет отвергнут. Это понятие можно использовать для определения целесообразности поиска дальнейшей уточняющей информации о проекте;
- *коэффициент ожидаемых потерь* $K = П/(П+Д)$. Этот показатель можно использовать, для оценки уровня риска проекта, имеющего вероятность получения как положительных, так и отрицательных результатов.

Говоря о распределении вероятностных отдельных входных величин, следует иметь в виду такие виды дискретного или непрерывного распределения, как нормальное, бета-распределение, треугольное, трапециевидное. Параметрами распределения являются, например, математическое ожидание и стандартное отклонение при нормальном распределении, а также наиболее часто встречающееся значение, нижнее и верхнее предельные значения при треугольном распределении. Определение распределения вероятностей является проблематичным, в первую очередь по причине одноразовости инвестиций и может быть осуществлено, как правило, только с помощью субъективных оценок.

Стохастические зависимости между ненадежными величинами могут быть учтены, прежде всего с помощью корреляционных коэффициентов развития двух входных величин. Кроме того, возможно определение нескольких распределений вероятностей входных величин, значения которых зависят от значения другой входной величины. Для определенных значений (пределов значений) независимой входной величины действует в таком случае так называемое условное распределение зависимости входной величины.

Кроме того, четвертая стадия имитационного моделирования может быть проведена аналитически или же симулятивно (имитационно). Аналитически распределение значения целевой функции определяют путем вычислений из распределений входных величин. Этот способ связан с действенностью ограничивающих условий, так как он требует, как минимум, заданного распределения значений целевой функции. Так как при этом способе возможен учет только небольшого числа входных величин, мы не рассматриваем его в дальнейшем.

В случае симулятивного способа выполняется множество расчетов. В каждом расчете с помощью использования случайных чисел производится выбор проб из распределения вероятностей входных величин. При этом выбор должен производиться в соответствии с вероятностью их выпадания. С учетом стохастической зависимости определенные значения ненадежных входных величин и значения надежных величин служат дальнейшему расчету значения целевой функции. После множества таких расчетов получают распределение значений целевой функции. Количество кругов имитации должно быть таким, чтобы совокупность случайных пробных значений могла считаться репрезентативной.

Основой оценки служит распределение вычисленных в отдельных кругах по разным классам частоты выпадания значений целевой функции. Абсолютные значения частоты отдельных классов могут быть переведены в относительные значения. Последние составляют основу для определения распределения вероятностей, функции распределения и (или) профиля риска целевой величины.

Из сравнительного анализа критериев оценки инвестиционных проектов ясно, что предпочтение (если лицом, принимающим решение, является «держатель» проекта) отдается проекту с максимальной доходностью. Однако этот критерий в изначальной форме применим только в условиях полной определенности. Наличие риска предполагает набор значений доходности с различной степенью вероятности. При этом нет априорных причин для выбора единственной возможной доходности, которую предполагает сравнение на основе критерия максимальной доходности. Следовательно, для таких ситуаций нужен иной критерий. Возможно, например, для сравнения альтернатив в условиях риска использовать критерий ожидаемой доходности инвестиций, определяемой как среднее возможных доходностей, взвешенных по их вероятностям. Вместе с тем критерий максимальной ожидаемой доходности, применяемый для оценки рисковых инвестиций, нечетко учитывает риск, что является его недостатком, и в условиях неопределенности этот критерий пригоден в качестве меры вероятности, но не может служить для принятия решений.

Рассмотрим критерий максимальной ожидаемой полезности, принимающий во внимание и вероятность, и риск. Вполне понятно, что для большинства индивидуумов дополнительная полезность от потребления убывает с ростом самого потребления, поэтому на основании критерия ожидаемой полезности можно учитывать риск. Критерий ожидаемой полезности представляет собой теоретически безупречный инструмент решения проблемы выбора проектов в условиях неопределенности, если при этом известен точный вид функции полезности, необходимый для вычисления ожидаемых полезностей. Однако возникают определенные трудности с применением этого критерия при принятии инвестиционного решения. В случае наличия неопределенности (т.е. когда существует возможность отклонения будущего дохода от его ожидаемого значения, но невозможно даже приблизительно указать вероятности наступления каждого возможного результата) выбор альтернативы инвестирования может быть произведен с помощью одного из следующих критериев:

1) *критерий* maximax (*критерий оптимизма*) — определяет альтернативу, которая максимизирует максимальный результат для каждой альтернативы;

2) *критерий* maximin (*критерий пессимизма*) — определяет альтернативу, которая максимизирует минимальный результат для каждой альтернативы;

3) *критерий безразличия* — выявляет альтернативу с максимальным средним результатом (при этом действует негласное предположение, что каждое из возможных состояний среды может наступить с равной вероятностью; в результате выбирается альтернатива, дающая максимальное значение математического ожидания).

Инвесторы, в соответствии с критериями подразделяемые на пессимистов, оптимистов и нейтральных к неопределенности, принимают решение о выборе инвестиционного проекта в соответствии с временными предпочтениями, ожидаемой доходностью инвестиционного проекта, степенью неприятия риска, вероятностными оценками. Например, решение о капиталовложениях вряд ли будет принято в условиях полной неопределенности, так как инвестор приложит максимум усилий для сбора необходимой информации. По мере осуществления проекта к инвестору поступает дополнительная информация об условиях реализации проекта и, таким образом, ранее существовавшая неопределенность «снимается». При этом информация, касающаяся проекта, может быть выражена и в вероятностных законах распределения, тогда в контексте анализа инвестиционных проектов следует рассматривать ситуацию принятия решения в условиях риска. Проектный риск описывается с помощью трех составляющих:

1) событие, связанное с риском;
2) вероятность риска;
3) величина денежной суммы, подвергаемой риску.

Количественная оценка риска, как уже указывалось, связана не только с представлением всех возможных последствий принимаемого решения, но и оценкой вероятности этих последствий.

Вероятностный подход к измерению риска используется, например, в книге: *Клейнер Г.Б., Тамбовцев В.Л., Качалов Р.М.* Предприятие в нестабильной экономической среде: риски, стратегии, безопасность. — М., Экономика, 1997, в которой предлагается измерять уровень риска в принятии хозяйственных решений на основе особого инструментария, включающего специальные шкалы, показатели и алгоритмы и позволяющего проводить количественную оценку. В основе этого инструментария лежит концепция теории измерений, включающая системный анализ, построение специальной модели, выбор шкалы измерения риска и способа определения значений показателя измерения риска. В указанной работе предлагается формировать обобщенную количественную оценку риска проекта с учетом всех его участников, для каждого из которых вначале оцениваются риски отдельных исходов и альтернатив.

Идея формирования комплексного показателя оценки риска всего проекта в целом включает учет всей совокупности исходных данных об инвестиционной ситуации: состав субъектов риска, а также набор и вероятности возможных для каждого из них событий, связанных с возможным ущербом; масштаб ущерба для субъекта при их наступлении. Вместе с тем, существует возможность формирования общей оценки риска проекта другим способом — через интегральную составляющую уже произведенных количественных оценок рисков отдельных субъектов. В названной выше книге (с. 216, 217) предложена процедура построения общей оценки.

Обозначим r_i — комплексные оценки риска каждого из участников проекта и через G — общую оценку «пакета рисков» $r = (r_1, ..., r_n)$, тогда

$$G = f(r_1, ..., r_n),$$

где $r_1, ..., r_n$ — риски отдельных участников; n — число участников.

Варианты выбора функции f:

1. $f = \max(r_1, ..., r_n)$.

Эта функция соответствует оценке риска проекта по риску максимально рискующего участника, скажем, инвестора.

2. $f = \min(r_1, ..., r_n)$.

Функция соответствует оценке риска проекта по риску минимально рискующего участника, скажем, арендодателя помещений под реализацию проекта.

3. $f = \dfrac{r_1 + ... + r_n}{n}$.

Функция выражает средний риск всех субъектов проекта. Важно понимать, что в случаях *1* и *2* эластичность взаимозаменяемости рисков отдельных участников равна нулю, т.е. риски отдельных участников невзаимозаменяемы, в то время как в случае *3* эта эластичность равна бесконечности: общая величина оценки риска может быть сохранена при изменении рисков любого участника за счет соответствующего изменения риска произвольно выбранного другого участника проекта.

Более общее выражение для оценки риска, объединяющее три предыдущие формулы, имеет вид:

4. $f = (a_1 r_1^b + ... + a_n r_n^b)^{\frac{1}{b}}$.

Существенное значение для общей характеристики инвестиционного проекта с точки зрения связанного с ним пакета рисков имеет так называемый «коэффициент равномерности риска», определяемый как

$$k = 1 - \min(r_1, ..., r_n) / \max(r_1, ..., r_n).$$

Коэффициент равномерности, принимающий значения от 0 до 1, показывает, насколько равномерно распределяется риск по субъектам проекта. Если величина k близка к нулю, то риск распределяется равномерно; чем ближе к единице, тем больше различие между рисками отдельных участников проекта и (в принципе) выше риск проекта в целом. Этот коэффициент может использоваться как поправочный при формировании полной оценки пакета рисков данного проекта.

Вследствие важности использования вероятностного подхода как инструмента количественной оценки проектных рисков рассмотрим основные понятия. Вероятность — это возможность получения определенного результата. Для определения вероятности используют следующие методы.

➢ *Объективный метод* связан с вычислением частоты (на основе фактических данных), с которой происходят некоторые события.

Например, частота возникновения некоторого уровня потерь в процессе реализации инвестиционного проекта может быть рассчитана по формуле:

$$f(A) = n\ (A)/n;$$

где f — частота возникновения некоторого уровня потерь; $n\ (A)$ — число случаев наступления этого уровня потерь; n — общее число случаев в статистической выборке, включающее как успешно осуществленные, так и неудавшиеся инвестиционные проекты.

➢ *Метод субъективных вероятностей* основан на предположении относительно определенного результата, основывающемся на суждении или личном опыте оценивающего (эксперта), а не на частоте, с которой подобный результат был получен в аналогичных условиях. Отсюда широкое варьирование субъективных вероятностей объясняется широким спектром различной информации или различных возможностей оперирования с одной и той же информацией. Равенство нулю вероятности некоторого события свидетельствует о невозможности его наступления; наоборот, вероятность, равная единице, означает непременное наступление события. Сумма вероятностей всех возможных вариантов равна единице.

Важными понятиями, применяющимися в вероятностном анализе риска, являются понятия альтернативы, состояния среды, исхода.

Альтернатива означает последовательность действий, направленных на решение некоторой проблемы. Примеры альтернатив: какой вид инвестиций предпочесть (реальные или финансовые); строить или не строить новый завод; решение о том, какую из двух технологических линий, различающихся по характеристикам, следует приобрести; внедрять ли в производство новый продукт и т.д.

Под *состоянием среды* понимается ситуация, на которую лицо, принимающее решение (например, инвестор), не может оказывать влияние (например, благоприятный или неблагоприятный рынок, климатические условия и т.д.).

Исходы — это возможные события, возникающие в случае, когда альтернатива реализуется в определенном состоянии среды. Это некая количественная оценка, показывающая последствия определенной альтернативы при определенном состоянии среды (например, величина прибыли, урожая и т.д.).

Одно из наиболее известных правил принятия решений по оценке инвестиций разработал Х. Марковиц, лауреат Нобелевской премии в области экономики (1990 г.). Это правило базируется на ожидаемой доходности инвестиций. *Правило гласит*: проект A предпочтительнее проекта B при соблюдении одного из следующих условий:

1) ожидаемая доходность проекта A больше или равна ожидаемой доходности проекта B, и вариация A меньше вариации B;

2) ожидаемая доходность *A* больше, чем у *B*, и вариация *A* меньше или равна вариации *B*.

Таким образом, ожидаемая доходность может служить индикатором вероятности осуществления проекта, а вариация — показателем его риска.

➤ В качестве метода, облегчающего процесс принятия инвестиционных решений в условиях неопределенности, используется *подход построения дерева* или *деревьев решений*.

Аппарат, связанный с применением метода деревьев решений в инвестиционном проектировании, в определенном смысле аналогичен аппарату, используемому в анализе чувствительности и сценарном подходе. Однако, оба эти метода рассматривают влияние на результирующий интегральный эффект изменений в сконструированной модели инвестиционного проекта, поэтому являются инструментом анализа влияния неопределенности на результаты сформированного проекта, тогда как деревья решений — это своеобразная методология принятия решений в условиях неопределенности, позволяющая модифицировать проект во времени с учетом возникающего риска. Итак, анализ чувствительности и сценарный подход относятся к моделям исследования риска на основе изменений проектных переменных, а метод «деревьев решений» позволяет исследовать и, возможно, минимизировать влияние возникающего с течением времени риска в процессе виртуальной реализации проекта.

Дерево решений представляет собой один из методов теории принятия статистических решений, позволяющих выбрать один из альтернативных вариантов, а также установить, какая стратегия будет в наибольшей мере способствовать достижению целей (например, максимизации NPV). Построенное по определенным законам дерево решений обеспечивает возможность учета различных направлений действий, соотнесения с ними финансовых результатов и их корректировки, что позволяет сравнивать альтернативы в соответствии с установленным критерием.

Как всякий инструмент, данный метод не безупречен и имеет некоторые ограничивающие предпосылки на свое применение: число альтернатив или вариантов выбора между ними ограничено; ход событий недетерминирован, а значит, отсутствует полная определенность в будущем; результаты принятого решения зависят от того, какая именно выбрана альтернатива и какие события имеют место в реальности.

Лицо, разрабатывающее дерево решений, в состоянии оценить вероятности соответствующих событий (процедура приписывания вероятности тому или иному событию может опираться на учет тенденций, существовавших в прошлом, или на субъективные оценки экспертов, компетентных в данной области). Существует зависимость будущих решений от сегодняшних, так как результаты каждого решения влияют на последующие решения (с помощью дерева решений организуется их последовательность в пространстве и времени). А с другой стороны, и текущие решения могут зависеть от намеченных перспектив.

Как уже неоднократно подчеркивалось, прогнозный денежный поток подвержен изменениям в ходе реализации проекта вследствие корректирующих воздействий внешней среды — проектного окружения. Следовательно, принятие инвестиционного решения не означает, что при реализации проекта не будут производиться его корректировки. При проводимой оценке существуют альтернативные возможности как расширения проекта, так и отказа от него. Инструментом, помогающим проанализировать этот выбор и осуществить его, является метод построения дерева решений. На начальном этапе такого анализа разрабатывается основная структура дерева решений, прогнозируются и выделяются основные узловые события и разрабатываются основные контрмеры, которые можно будет предпринять (например, меры компенсационного или минимизирующего характера — аналоги качественному подходу в риск-анализе — и их стоимостные эквиваленты). Затем по дереву решений организуется «движение вспять», т.е. от будущего — к настоящему, и на основании производимых расчетов, позволяющих оценить, насколько сильно изменится величина NPV проекта, реагируя на изменяющиеся обстоятельства, выбирается конкретное действие, которое нужно осуществить в каждом случае.

Максиминный критерий Вальда. Данный критерий может классифицироваться, как «пессимистический», потому что рассматривает игру со случаем как игру с разумным противником, делающим все для того, чтобы помешать фирме достигнуть успеха. Согласно этому критерию оптимальной считается стратегия, при которой гарантируется выигрыш (математическое ожидание NPV) в любом случае не меньший, чем нижняя цена игры со случаем:

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} a_{ij}.$$

Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Этот критерий тоже может рассматриваться как пессимистический, но при выборе оптимальной стратегии ориентируются не на выигрыш, а на риск. Риск в данном случае определяется как «плата за отсутствие информации», т.е. разность между выигрышем при известной стратегии случая и выигрышем в ситуации, когда эта стратегия неизвестна.

Рассчитывается платежная матрица $R = \{r_{ij}\}$, где i — номер стратегии игрока; j — номер стратегии случая, такая что

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где β_j определяется по формуле:

$$\beta_j = \max_i (a_{ij}).$$

Выбирается та стратегия, при которой величина риска в наихудших условиях минимальна; таким образом, данный критерий при принятии решений позволяет избегать чрезмерного риска:

$$S = \min_i \max r_{ij}.$$

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Согласно этому критерию выбирается стратегия, исходя из условия:

$$H = \max_j \left\{ \chi \cdot \min_i a_{ij} + (1-\chi) \cdot \max_i a_{ij} \right\},$$

где χ — «коэффициент пессимизма», выбираемый между 0 и 1 исходя из субъективных соображений аналитика, т.е. чем опаснее ситуация и меньше склонность к риску, тем ближе к 1 выбирается χ.

Таким образом, при $\chi = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда. Аналогичный критерий может быть выбран и для анализа платежной матрицы риска.

На основе построения деревьев решений возможно прогнозировать (иногда в неявной форме) будущие инвестиции фирмы и ее оперативную стратегию, базируясь на сформированном денежном потоке. Отметим, что деревья решений, используемые в реальной жизни, имеют достаточно сложную иерархическую структуру, но их использование способствует выявлению будущих возможностей: определить стратегию достижения наиболее высокого значения чистого дисконтированного дохода с помощью отражения связей между текущими и будущими решениями.

Наряду с перечисленными преимуществами методу присущи и некоторые недостатки. Прежде всего основные проблемы заключаются в том, что этот метод достаточно сложен и количественно неопределен: так, например, приходится использовать градацию — *низкий* или *высокий* спрос; если же более четко детализировать границы спроса, то дерево сильно разветвляется и становится сложным для восприятия и понимания. Кроме того, принятие решения о расширении проекта по ходу его реализации связано с разной рискованностью капиталовложений, поэтому возникает проблема, вызванная необходимостью использования разных ставок дисконтирования для учета степени рискованности вводимых изменений. Расчеты конкретных значений этих ставок выполняются вне метода деревьев решений и их величины являются экзогенно поступающими показателями.

Рассмотрим основные п р и е м ы, используемые в методе деревьев решений для анализа проектных рисков, на условном примере.

➢ **Пример.** Предположим, что фирма «Гигант» разрабатывает инвестиционный проект производства банковских сейфов нового поколения. Инвестиции в данный проект намечено производить в три этапа. В начальный момент времени $t = 0$ необходимо затратить 500 тыс. долл. на проведение маркетингового исследования рынка. Если проведенное исследование обнаружит, что потенциал рынка достаточно высок, то в следующий момент времени $t = 1$ фирма «Гигант» инвестирует дополнительно 1000 тыс. долл. на разработку и создание опытных образцов сейфов, подлежащих экспертизе в Специальном центре по безопасности банков, специалисты которого решают вопрос о размещении заказа в данной фирме.

Если заключение экспертной комиссии о представленных сейфах положительное, то в момент времени $t = 2$ фирма начинает строительство нового предприятия и организацию серийного производства сейфов, для чего ей потребуется инвестировать еще 10 000 тыс. долл. Реализация данной стадии, по оценкам аналитиков и менеджеров проекта, обеспечит возможность генерирования проектом притоков наличности в течение четырех лет. Величина этих притоков наличности зависит от того, насколько хорошо сейф будет принят на рынке.

9.4. Использование метода «деревьев решения» в анализе проектных рисков[1]

Для анализа и оценки риска многостадийных решений целесообразно использовать *метод дерева решений*, графическая схема которого представлена ниже.

Графическая схема риск-анализа методом построения дерева решений:

Время

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	Совместная вероятность	NPV	Итого: Prob*NPV
			$10 000	($10 000)	$10 000	$10 000	0,144	$15 250	$2 196
		($10 000)	$4 000	$4 000	$4 000	$4 000	0,192	$436	$84
	($1 000)		$2 000	$2 000	$2 000	$2 000	0,144	($14 379)	($2 071)
($500)		Стоп					0,320	($1 397)	($447)
	Стоп						0,200	($500)	($100)
								NPV=	($338)

[1] Параграф написан при участии *Л.Н. Фадеевой.*

Дадим краткие пояснения к данному примеру. Прежде всего было предположено, что очередное решение об инвестировании принимается фирмой в конце данного года. Каждое «разветвление» означает либо точку принятия решения, либо очередной этап. Число в круглых скобках, записанное слева от точки принятия решения, означает величину чистых инвестиций. В интервале с третьего по шестой годы показаны притоки наличности, которые генерируются проектом. Так, если фирма «Гигант» (см. пример на с. 320) решает реализовывать проект в момент времени $t = 0$, то она должна потратить 500 тыс. долл. на проведение маркетингового исследования. Менеджеры компании оценивают вероятность получения благоприятного результата, равной 0,8 (т.е. 80%), а вероятность получения неблагоприятного результата как 0,2 (т.е. 20%). Таким образом, в случае приостановления проекта на этой стадии, затраты фирмы составят 500 тыс. долл.

Если по результатам маркетингового исследования руководство фирмы приходит к оптимистическому заключению о потенциале рынка, то в момент времени $t = 1$ придется потратить еще 1000 тыс. долл. на изготовление экспериментального образца сейфа. Менеджеры фирмы оценивают вероятность положительного исхода в 60%, а вероятность отрицательного исхода в 40%. В случае, если экспертный совет находит данную модель сейфа привлекательной, фирма в момент времени $t = 2$ должна израсходовать еще 10 000 тыс. долл. для строительства нового предприятия и организации серийного производства сейфов. Менеджеры фирмы оценивают вероятность того, что эксперты центра безопасности воспримут предложенную модель сейфа благожелательно в 60% и вероятность противоположного исхода в 40% (что приведет к прекращению реализации проекта).

Если фирма «Гигант» приступает к производству сейфов, то операционные потоки наличности в течение четырехлетнего срока жизни проекта будут зависеть от того, насколько хорошо продукт будет «принят» рынком. По оценкам маркетологов, вероятность того, что рынок положительно «воспримет» продукт, составляет 30%, и в этом случае чистые притоки наличности должны составлять около 10 000 тыс. долл. ежегодно. Вероятности того, что притоки наличности будут составлять около 4000 и 2000 тыс. долл. в год, равняется 40 и 30% соответственно.

Эти ожидаемые потоки наличности показаны на рисунке с третьего года по шестой. Совместная вероятность, подсчитанная на выходе данной схемы, характеризует ожидаемую вероятность получения каждого результата.

В предположении, что средняя учетная банковская ставка составляет 11,5%, рассчитаем величину чистого дисконтированного дохода по каждому из вариантов, представленных деревом принятия решений. Затем, умножая полученные значения чистого дисконтированного дохода на соответствующие значения совместной вероятности, мы получим величину ожидаемого чистого дисконтированного дохода инвестиционного проекта. Поскольку величина ожидаемого чистого дисконтированного дохода проекта производства сейфов получилась отрицательной (NPV = −338 тыс. долл.), то фирма «Гигант» должна отвергнуть этот инвестиционный проект. Однако на самом деле данный вывод не столь однозначен. Необходимо также рассмотреть возможность отказа фирмы от реализации данного проекта производства сейфов на определенном этапе или стадии, что не может не отразиться на величине чистого дисконтированного дохода и риске проекта и приведет к существенному изменению одной из ветвей дерева решений. Издержки отказа от реализации проекта значительно сокращаются, если данная фирма имеет альтернативу для использования активов проекта. Если бы в нашем примере фирма «Гигант» могла использовать оборудование для производства другой, принципиально новой, модели сейфов, тогда бы рассмотренный проект мог быть ликвидирован с большей легкостью, следовательно, риск реализации проекта был бы меньше.

Наконец, отметим, что финансирование инвестиционных проектов — это динамичный процесс, поэтому в каждой узловой точке дерева решений условия реализации проекта могут измениться, что приведет к автоматическому изменению величины чистого дисконтированного дохода. Как уже подчеркивалось при анализе метода деревьев решений, существует возможность досрочной ликвидации проекта, которая должна рассматриваться в процессе планирования инвестиций и анализа проектных рисков, так как в некоторых случаях признание ликвидации может превратить неприемлемый проект в приемлемый. Именно поэтому, хотя чаще всего проект анализируется исходя из предположения его полного осуществления в намеченные сроки, необходимо принимать в расчет, что такое решение не всегда является оптимальным: иногда лучше прекратить осуществление проекта раньше срока его потенциальной продолжительности, ибо такая возможность может достаточно ощутимо повлиять на прибыльность проекта.

Существует два способа прекращения проекта:

1) продажа собственником проекта своих активов, которые еще не потеряли стоимости, тому покупателю, который сможет получить больший поток наличности от этого проекта;

2) прекращение проекта, приносящего денежные убытки, что приведет к их прекращению и снижению рисковости проекта.

Многие принимаемые решения часто могут быть сложно структурированы: каждое решение может содержать в себе еще несколько. В этом случае, если лицо, принимающее решение может допустить и обосновать признание того факта, что проект не работает так, как первоначально планировалось, это может сократить риск и увеличить потоки наличности.

Построение дерева решений обычно используется для анализа рисков тех проектов, которые имеют обозримое количество вариантов развития. При этом аналитик проекта, осуществляющий построение дерева решений для формулирования различных сценариев развития проекта, должен обладать необходимой и достоверной информацией с учетом вероятности и времени их наступления.

В ряде работ по управлению проектом предлагаются следующие этапы последовательности сбора данных для построения дерева решений:

- определение состава и продолжительности фаз жизненного цикла проекта;
- определение ключевых событий, которые могут повлиять на дальнейшее развитие проекта;
- определение времени наступления ключевых событий; формулировка всех возможных решений, которые могут быть приняты в результате наступления каждого ключевого события;
- определение вероятности принятия каждого решения;
- определение стоимости каждого этапа осуществления проекта (стоимости работ между ключевыми событиями) в текущих ценах.

На основании полученных данных строится дерево решений, структура которого содержит узлы, представляющие собой ключевые события (точки принятия решений), и ветви, соединяющие узлы, — проводимые работы по реализации проекта. В результате построения дерева решений рассчитываются вероятность каждого сценария развития проекта, NPV по каждому сценарию и ряд других принципиально важных показателей для анализа рисков проекта и принятия управленческих решений.

Все инструменты анализа рисков проекта, как уже отмечалось, могут быть условно поделены на два класса в зависимости от использования аппарата теории вероятностей. Методы без учета распределений вероятностей исторически являются относительно «старыми» инструментами учета риска и включают уже исследованные в работе метод одного значения, метод корректировки, метод нескольких значений и анализ чувствительности. Причина возникновения и степень развития этих методов тесно увязана с практическим опытом экспертизы инвестиционных проектов. Основу методов составляет учет риска с помощью отдельных показателей, как например, верхняя и нижняя границы параметра или его среднее значение, и применение к ним традиционных методов расчета показателей эффективности. Метод одного значения (фактора), называемый в специальной литературе однофакторным анализом, базируется на использовании единственного значения для каждой экзогенной переменной в ходе анализа проектных рисков. Все возможные значения каждой из экзогенных переменных сводятся к одному, в качестве которого выступают, как правило, такие параметры, как среднее или мода, для которых затем проводятся расчеты по традиционной методике анализа инвестиционных проектов.

Главная практическая привлекательность данного метода состоит в относительной простоте получения данных и проведения инвестиционных расчетов, однако существует ряд серьезных проблем, усложняющих его применение. Прежде всего это касается проблем получения достаточно достоверных данных, необходимых для проведения анализа. Если симметричное распределение вероятностей экзогенных переменных позволяет просто определить среднее как половину интервала разброса значений, то в случае произвольного распределения (что наиболее реально) для нахождения среднего необходимо знать распределение вероятностей. Это приводит к необходимости при получении значения результирующего показателя не только производить действия сложения и вычитания стохастических величин, но и осуществлять умножение и деление зависимых случайных величин, более того, кроме средних значений необходимо знать дисперсии и коэффициенты корреляции. Однако на практике действия второй ступени (умножение и деление) часто являются невозможными в силу того, что средние значения являются единственными легкодоступными или надежными данными (например, рассматривая ставку дисконтирования как случайную величину, оказывается невозможным вычислить математическое ожидание величины чистого дисконтированного дохода только на основе имеющихся данных о средних).

Определение дисперсий возможно в случае наличия данных об отдельных значениях параметра и их вероятности или же о типе функции распределения. Однако если известна плотность распределения или она может быть оценена, то использование метода одного значения уже не является целесообразным, так как применение методов, учитывающих распределение вероятностей, становится более предпочтительным.

Итак, мера объективной возможности случайного события называется его *вероятностью*, которая позволяет прогнозировать случайные события, давая им количественную и качественную характеристику. При этом уровень неопределенности и степень риска уменьшаются. Неопределенность хозяйственной ситуации связана с фактором противодействия. Для исчисления величины риска, необходимо знать как возможные последствия отдельного действия, так и их вероятность. Детерминированный случай связан с наличием точной информации о последствиях реализации проекта и не требует дополнительного рассмотрения. Недетерминированная ситуация характеризуется неполной или неточной информацией о проекте и представляет наибольшую сложность в экономическом, математическом и вычислительном аспектах.

Предположим, что требуется сравнить два экономических решения (*А* и *В*) в условиях неопределенности, дисконтированные суммарные результаты (прибыли) которых соответственно равны $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$ в *n* возможных событиях. В литературе множества $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ иногда называют ***неопределенными перспективами*** *А* и *В*. Применим к этим неопределенным перспективам понятие абсолютного предпочтения, в соответствии с которым *А* считается абсолютно предпочтительнее *В*, если $a_i \geq b_i$ для всех i, $a_i \geq b_i$ по крайней мере для одного *i*. Определенное таким образом, абсолютное предпочтение имеет то преимущество, что оно не зависит от оценки вероятностей событий 1, 2, ..., *n*. Но оно допускает частичную упорядоченность (когда ни одно из двух решений не является абсолютно предпочтительнее другого. Для получения полной упорядоченности по аналогии с методом дисконтирования, позволяющим «измерять» будущую прибыль в сегодняшних ценностях с помощью специального множителя — коэффициента дисконтирования, возможная прибыль может быть переведена в достоверную прибыль на основе коэффициента приведения определенности. Таким коэффициентом и является вероятность. Если $p_1, p_2, ..., p_n$ представляют собой вероятности (на данный момент неизвестные), соответствующие событиям 1, 2, ..., *n*, неопределенная перспектива $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ будет выражена единственным числом, представляющим собой соответствующее такой перспективе математическое ожидание:

$$a = p_1 a_1 + p_2 a_2 + ... + p_n a_n.$$

В работах С.А. Смоляка [7] доказывается единственная возможность отображения разброса эффекта в критерии ожидаемого эффекта с помощью первого абсолютного момента и обосновывается неприменимость для этого других функций от математического ожидания, дисперсии и конечного числа иных центральных моментов *X*. Основные требования к «хорошим» критериям ожидаемого эффекта, учитывающим разброс, состоят в выполнении условий непрерывности, монотонности, инвариантности к смешиванию, и вместе с тем обеспечении принципиальной возможности децентрализованного сравнения проектов в сложных экономических системах. Указанными свойствами обладает только двухпараметрическое семейство критериев, предложенное П. Массе, основанное на преобразованиях Лапласа вероятностных распределений результатов альтернативы (в предельном случае — критерий взвешенного математического ожидания результатов).

Итак, исследование неопределенности, свойственной анализу конкретного проекта, может использовать два подхода, объективный и субъективный. *Объективный подход* базируется на интерпретации понятия вероятности как предельного значения частоты при бесконечно большом числе экспериментов, и оценка вероятности производится посредством вычисления частоты, с которой происходит данное событие. При таком подходе использование математических ожиданий обосновывается законом больших чисел, благодаря которому в многочисленных длительных процессах из неопределенности возникает практическая достоверность. *Субъективный подход* основан на мнении индивида, отражающем состояние его информационного фонда. Если предприятие производит большое число операций, в которых риск характеризуется независимыми или слабопоследовательно связанными вероятностями, а последовательные убытки и прибыли, приведенные к начальному моменту времени, являются величинами одного порядка, то математическое ожидание суммарной дисконтированной прибыли очень близко к ее истинной величине. Идеальным в ходе исследования рисков является дополнение объективного подхода субъективным, основанным на психологических постулатах, принимающих на себя долю неопределенности.

Субъективный метод определения вероятности базируется на использовании субъективных критериев, которые основаны на различных предположениях (суждение оценивающего, его личный опыт, оценка эксперта, мнение финансового консультанта и т.п.). В случае субъективного подхода к определению вероятности возможно разное ее значение для одного и того же события, основанное на выборе разных людей. Справиться с этим и помогает прием экспертной оценки.

Объективный метод определения имеет место прежде всего в том случае, когда комбинаторный анализ позволяет подсчитать число благоприятных и возможных исходов. Кроме того, соображения симметрии позволяют предполагать, что все исходы являются равновозможными. Объективная вероятность имеет место, если мы располагаем рядом предыдущих наблюдений за повторяющимся явлением. Таким образом, логика в одном случае, и статистика — в другом, позволяют определить вероятность.

Для объективных вероятностей справедливы теоремы полной вероятности и сложной вероятности. *Теорема полной вероятности* гласит, что, если событие произойдет в результате осуществления одного из несовместимых различных событий, вероятность рассматриваемого события будет равна сумме вероятностей событий, в результате осуществления которых это событие может произойти. *Теорема сложной вероятности* утверждает, что вероятность сложного события, состоящая в совместном осуществлении двух независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий.

В экономических задачах методы теории вероятностей сводятся к определению значений вероятности наступления событий и к выбору из возможных событий самого предпочтительного исхода из наибольшего значения математического ожидания. Объективные вероятности используются лишь в незначительной части области экономических решений, так как объективная вероятность новых возможностей, обусловленных проектной деятельностью, не может быть определена на основании каких либо статистических рядов. Следовательно, на первый план выдвигается концепция субъективной вероятности, согласно которой вероятность является выражением присущего индивидууму представления о правдоподобии. Выражаясь более точно, вероятность, приписываемая событию *C* индивидуумом *X*, располагающим информацией *I*, представляет собой коэффициент для количественного выражения качественного представления *X* о правдоподобии *C* при данном *I*. Индивидуум считает событие *C* более или менее правдоподобным и действует, придавая ему больший или меньший вес, в зависимости от степени его правдоподобия при сопоставлениях, необходимых для обоснования его выбора.

Субъективная вероятность, применяемая в качестве инструмента исследования проектных рисков, как уже указывалось, использует предположение относительно некоторого результата, которое основывается на суждении оценивающего — эксперта, на его личном опыте. Можно условно считать данный подход частным случаем метода экспертных оценок. Преимуществом метода субъективных вероятностей является возможность их применения для неповторяющихся событий в условиях отсутствия достаточного количества статистических данных (в отличие от объективных вероятностей), что и определяет их сферу применения в риск-анализе.

Таким образом, в ходе процесса инвестиционного планирования необходимо провести предварительное комплексное исследование, подтверждающее, что проект сто́ящий. Кроме того, аналитики и менеджеры хотят знать о потенциальных проблемах, которые могут возникнуть в ходе реализации проекта, чтобы быть готовыми скорректировать свои действия и тем самым уменьшить проектные риски.

В литературе, описывающей методы, не учитывающие распределение вероятностей, указано, что использование моды вместо среднего для несимметричных распределений применимо только в случае абсолютной независимости параметров, так как только в этом случае полученное из мод экзогенных переменных значение результирующего показателя также является модой. К недостаткам относится также ограниченная возможность интерпретации получаемых результатов (например, при использовании метода одного значения невозможны выводы относительно склонности или несклонности к риску, существенна вероятность несовпадения практического результата реализации проекта и расчетного).

Для преодоления одного из указанных недостатков метода одного значения на практике при учете несклонности к риску лица, принимающего решение на основе данного метода, используются рисковые поправки к экзогенным переменным — метод корректировки. Идея этого метода состоит в определении значений целевых результирующих показателей, обязательных для достижения и исключения негативных неожиданностей при реализации проекта, а также усиления позитивных возможностей. Данный подход уже упоминался в нашем исследовании при рассмотрении рисковой корректировки ставки процента (нормы дисконтирования), так называемой рисковой премии, и реализовывался через увеличение базового уровня процентной ставки на величину «рисковой премии», учитывающей риски, связанные с реализацией проекта.

Основной недостаток метода корректировки связан с учетом риска путем его сведения к определенному, детерминированному значению. Например, анализ риска сводят к его учету через единственный параметр, скажем, через учет рисковой премии в величине ставки дисконтирования, выбор которой связан с известной степенью неопределенности, и при этом абстрагируются от рассмотрения взаимосвязей ряда факторов. Кроме того, прямая корректировка каждой связанной с риском переменной может привести к неконтролируемому кумулятивному эффекту вводимых пессимистических корректировок отдельных параметров, а следовательно, к невозможности толкования и контроля результатов, что заставляет в конечном итоге принимать решение в условиях неопределенности.

Метод нескольких значений является расширением двух ранее описанных методов с целью преодоления имеющихся у них недостатков и связан с рассмотрением интервала, либо ограниченного двумя точками (*метод двух значений*), либо с учетом особого значения из этого интервала (*метод трех точек*). Границами интервала являются оптимистическое и пессимистическое значения объясняющей переменной, а в качестве третьей точки берется среднее или мода. Критика этого метода в основном связана с ограниченностью охвата зависимых стохастических переменных — для нахождения значения результирующего показателя необходимо разделение переменных на полностью зависимые и абсолютно независимые, что не соответствует реальности.

Проблема учета риска при установлении нормы дисконта является важной, она нашла свое отражение в ряде трудов известных исследователей. Опираясь на работы профессора В. Н. Лившица, коснемся таких проблем, как определение влияния структуры используемого инвестором капитала на степень риска. Одной из наиболее важных в этом направлении является теория выбора оптимального портфеля Г. Марковитца. Кроме того, следует назвать таких ученых как В. Шарп, Дж. Линтнер и Дж. Моссин, которые создали основы модели ценообразования на рынке капитальных вложений (*Capital Asset Pricing Model* — CAPM). В соответствии с этой моделью на равновесном рынке повидовое распределение ценных равновесных бумаг будет иметь свойства, близкие к свойствам оптимального портфеля. В литературе уже доказано, что модель CAPM можно использовать для расчета нормы дисконта при традиционной оценке инвестиционных проектов методом NPV.

Основное утверждение модели CAPM состоит в том, что

$$E(R) = R_f + \beta(E(R_m) - R_f),$$

где $E(R)$ — ожидаемая норма отдачи на акцию; $E(R_m)$ — ожидаемая норма отдачи на рыночный портфель; R_f — безрисковая процентная ставка; β — бета-коэффициент акции, $\beta = \mathrm{cov}(R, R_m) / \sigma_m$ (σ_m — дисперсия нормы отдачи на рыночный портфель).

Практическое применение модели CAPM связано с необходимостью иметь заслуживающие доверия оценки для безрисковой процентной ставки, рыночной рисковой премии и бета-коэффициента отдельного проекта. Обычно в качестве безрисковой процентной ставки берут процентную ставку по краткосрочным государственным облигациям (ГКО, ОФЗ и т.д.). Рыночная рисковая премия оценивается на основе прошлой и прогнозируемой информации с помощью статистических пакетов. Оценка β является наиболее сложной, так как именно этот коэффициент должен отражать все характеристики проекта. Наиболее распространенным методом получения бета-коэффициента является измерение связи между изменениями цены обыкновенных акций компании и динамикой уровня цен рынка.

Традиционно оценка дисконта для проекта при использовании CAPM проводилась с помощью так называемого метода аналогий. Его применение в этом случае является теоретически корректным, хотя и базируется на произвольном выборе сходных компаний. Последнее существенно ограничивает применение данного метода с достаточным уровнем точности, так как число сходных компаний может оказаться очень небольшим.

В литературе описаны методы предсказания бета-коэффициента на основе использования операционных, технических и финансовых данных проекта. Исследователи считают этот подход более объективным по сравнению с методом аналогий, так как он свободен от искажений, связанных с ограниченностью выбора сходных компаний. Источником необходимой для этого метода информации служат отчетные (прошлые) или прогнозируемые данные бухгалтерского учета. В работах С.А. Смоляка [7] рассмотрены три типа случайных факторов, влияющих на доходность объекта: случайные сбои в производстве; резкие изменения экономической среды («катастрофы»); случайные колебания цен, налогов и объемов спроса. В целях адекватного отражения влияния этих факторов в дисконте С.А. Смоляк предлагает выполнить два расчета доходности. В первом случае расчет базируется на детерминированной норме дисконта, тогда интегральный дисконтированный доход NPV определяется по следующей формуле:

$$\mathrm{NPV} = \int x(t)\, e^{-Et} dt,$$

где $x(t)$ — интенсивность (скорость) получения дохода; E — норма дисконта; t — интервал времени и $t \in [0, T]$.

Если предположить, что доход уменьшается в зависимости от возраста основных средств линейно, т.е. $x(t) = X - bt$, то

$$\mathrm{NPV} = \frac{X}{E} - \frac{b\,(1 - e^{-Et})}{E^2}.$$

Предполагается, что объект целесообразно эксплуатировать до тех пор, пока доход от него неотрицателен, поэтому в конце срока службы объекта (в году T) должно быть $x(T) = 0$, откуда $b = X/T$. Перепишем представленную выше формулу в несколько ином виде, выразив срок службы через начальный доход X и скорость его падения b:

$$\mathrm{NPV} = \frac{X}{E} - b\frac{1 - e^{-\frac{EX}{b}}}{E^2} = \varphi(X).$$

Полученная функция $\varphi(X)$ выпукла вниз и потому $M[\varphi(X)] > \varphi(M[X])$, где M — математическое ожидание случайной функции. Это означает, что если в некоторый момент времени к величине дохода сделана случайная добавка, в среднем равная нулю, но в дальнейшем процесс будет протекать детерминированно, то математическое ожидание интегрального дохода возрастает. Более того, если случайная добавка к доходу имеет нормальное распределение с нулевым средним, то при увеличении ее дисперсии превышение $M[\varphi(X)]$ над $\varphi(M[X])$ увеличится, а следовательно, будет расти и математическое ожидание интегрального дохода.

Второй случай опирается на «безрисковую» норму ρ, что включается непосредственно в соответствующую модель случайного процесса изменения интенсивности дохода. Предпосылки при этом следующие. Пусть в момент t объект характеризуется некоторой интенсивностью получения дохода $x(t)$. Тогда в течение следующего малого интервала времени dt либо произойдет «сбой» в производстве с вероятностью $\omega\,dt$, либо объект будет функционировать «нормально» (с дополнительной вероятностью $1-\omega\,dt$). Если произошел «сбой», на его устранение потребуется некоторое время τ и дополнительные материальные затраты ζ, вообще говоря, случайные. Предполагается, что τ имеет экспоненциальное распределение со средним значением ϑ. Принимается, что после этого производство возвращается к своему прежнему состоянию, т.е. «сбой» не уменьшает оставшегося срока службы объекта. Кроме этого, предполагается, что вероятность «экономической катастрофы» в интервале $(t,\ t+dt)$ равна $k\,dt$; k не зависит от t. Наконец, последнее предположение заключается в том, что на протяжении периода функционирования объекта цены на производимую продукцию и используемые для ее изготовления ресурсы, а также объемы спроса и налоговые ставки могут изменяться. Под влиянием указанных факторов интенсивность получения дохода также будет колебаться. Допустим, что при оценке эффективности приобретения объекта предприниматель правильно оценил средний размер дохода. Тогда колебания интенсивности $x(t)$, вызываемые рассматриваемой группой факторов, имеют нулевое математическое ожидание, но характеризуются некоторым разбросом. Представляется естественным, что на малом интервале времени колебание $x(t)$ имеет малую дисперсию и не зависит от размера таких колебаний в предыдущие отрезки времени. Поэтому принимается, что указанные колебания могут быть описаны моделью винеровского случайного процесса. С учетом вышеперечисленных предположений интегральный дисконтированный доход имеет следующий вид:

$$\mathrm{NPV} = \frac{x}{\delta} - \left(\frac{c\omega}{\delta} + \frac{b}{\delta^2}\right)[1 - \mathrm{e}^{\lambda x}],$$

где $\delta = \rho + k + (1-q)\,\omega$; $q = \dfrac{1}{1+\rho\vartheta}$; $\lambda = -\dfrac{\sqrt{b^2 + 2\sigma^2\delta} - b}{\sigma^2}$; σ — среднее квадратическое отклонение случайного колебания интенсивности дохода за единицу времени; $c = \text{const}$.

Оба способа сводимы друг к другу путем специальных предпосылок (например, если принять $\omega = k = \sigma = 0$ и $\rho = E$). Эти преобразования не входят в рассмотрение; нас интересует полученный с их помощью вывод о том, что норма дисконта с учетом риска E отличается от δ корректирующим коэффициентом. При этом норму, исчисленную таким способом, нельзя разложить ни в сумму «безрисковой составляющей» ρ и какой-либо добавки, учитывающей риск («премию за риск») и не зависящей от ρ, ни в произведение этой составляющей и какого-либо повышающего коэффициента, учитывающего риск и не зависящего от ρ. Иными словами, влияние факторов риска и неопределенности на норму дисконта неаддитивно и немультипликативно.

Как уже обосновывалось, в качестве инструмента практической количественной оценки риска нескольких проектов (или нескольких вариантов одного проекта) можно воспользоваться числовыми значениями *показателей дисперсии* и *среднего квадратического* (*стандартного*) *отклонения*. В тех случаях, когда проекты имеют несколько возможных исходов, дисперсия характеризует степень рассеянности случайной величины (например, чистого дисконтированного дохода) вокруг своего среднего значения (математического ожидания).

Дальнейшее совершенствование и практическое использование инструментов риск-анализа, не учитывающих распределение вероятностей, связано с применением уже исследованного ранее анализа чувствительности, понятие которого имеет достаточно широкое содержание. В анализ чувствительности включены все методы, позволяющие исследовать взаимосвязи, существующие между объясняющими и результирующими переменными, путем изменения значений первых.

В качестве инструмента для учета проектных рисков анализ чувствительности не свободен от всех уже указанных недостатков, поэтому развитие получил вариант анализа чувствительности с использованием распределения вероятностей для критических значений. В основе этой модификации лежит определение критического значения объясняющей переменной, дополненное распределением вероятностей ее значений, что дает возможность определить вероятность реализации значения, меньшего или большего критического. Таким образом, будет определена вероятность превышения или недостижения соответствующего значения результирующего показателя. Теоретически данная форма анализа чувствительности применима и для нескольких экзогенных переменных, но при этом необходимо учитывать статистические зависимости между ними, что предполагает знание условных распределений вероятностей и усложняет расчеты.

Другая форма анализа чувствительности называется *параметрическим анализом чувствительности*, техника его проведения связана с изменением значения одной или нескольких объясняющих переменных на заранее заданную величину, с последующим вычислением для каждой новой комбинации значений показателя эффективности. Наиболее широкое применение анализ чувствительности находит в структурном анализе и исследовании значимости отдельных переменных, поэтому он является хорошим вспомогательным инструментом при проведении анализа проектных рисков, дополняющем другие подходы.

Вопросы и задания

1. Что понимают под *оценкой проектных рисков*?
2. Определите сущность качественного подхода
3. В чем состоит количественный анализ проектных рисков?
4. Что такое *экспертный подход* и как он применим для риск-анализа?
5. Опишите процедуру абсолютного анализа чувствительности.
6. Сформулируйте последовательность действий при проведении полного анализа чувствительности.
7. Как вы понимаете сценарный подход?
8. В чем заключаются преимущества и недостатки имитационного подхода?
9. Приведите пример принятия инвестиционного решения в условиях неопределенности, используя подход построения дерева или деревьев решений.
10. Прокомментируйте с точки зрения рискованности упомянутые в данной главе способы прекращения проекта.

10 Экономические измерения

Проблема надежности и точности экономических измерений чрезвычайно важна, но ей на удивление уделяют мало внимания. В этой главе проблема рассматривается исключительно с точки зрения надежности цен, которые должны нас информировать о потребностях и издержках производства.

10.1. «Классики» о точности экономических измерений

Современная экономическая теория интенсивно использует в своих исследованиях экономико-математическое моделирование. Количественные методы анализа экономических процессов предъявляют определенные требования к исходным данным в зависимости от характера или, скажем, утонченности выдвигаемых теорий и гипотез. Кроме этого, одна из основных тем, вокруг которой постоянно ведется дискуссия в экономической теории, связана с вопросом о надежности рыночных цен как механического регулятора хозяйственной деятельности. Таким образом, как в прикладных исследованиях, так и в области чистой экономической теории вопрос о надежности и точности экономической информации и методов экономических измерений возникает постоянно. При этом проблема состоит не в том, что экономические измерения оказываются точными или неточными, а в том, имеются ли надежные способы проверки экономических измерений с точки зрения их точности. Если экономические измерения грубы, но, тем не менее, имеется способ оценки ошибки измерения, то какой-то особой проблемы экономических измерений, отличающей их, к примеру, от измерений в естественных науках, по-видимому, не существует. Проблема возникает, если мы не можем оценить точность экономических измерений.

Сердцевиной экономической теории является теория цен, которая, по словам А. Маршалла, объясняет, каким образом в рыночной экономике «цены, измеряющие потребности, уравновешиваются ценами, измеряющими усилия» (т. 1, с. 107), т.е. объясняет природу равновесных рыночных цен в конкурентной экономике. Поскольку цены лежат в основе построения всевозможных экономических показателей, постольку проблема надежности и точности экономических измерений сводится (хотя и не целиком) к проблеме цен как измерителей полезности товаров и услуг, а также издержек, связанных с их производством.

К сожалению, вопрос о надежности и точности экономических измерений не стал предметом самого тщательного исследования, и вопреки здравому смыслу и логике развития любой точной науки в экономической науке весьма часто точность экономических измерений постулируется без всякого предварительного анализа.

Обращаясь к интересующему нас вопросу, А. Смит [2] писал: «Обычно при обмене продуктов различных видов труда принимается во внимание степень трудности и ловкости. Однако при этом не имеется никакого точного мерила, и дело решает рыночная конкуренция в соответствии с той грубой справедливостью, которая, не будучи вполне точной, достаточна все же для обычных житейских дел». Д. Рикардо [3] повторяет эти слова А. Смита, ничего к ним не прибавляя, как только в его работе возникает вопрос о точности меры.

Рассмотрим, что говорит о точности экономических измерений А. Маршалл [1].

«Предметом исследования экономической науки, — пишет А. Маршалл, — являются главным образом те побудительные мотивы, которые наиболее сильно и наиболее устойчиво воздействуют на поведение человека в хозяйственной сфере жизни. ...Самым устойчивым стимулом к ведению хозяйственной деятельности является желание получить за нее плату, которая представляет собой материальное вознаграждение за работу. Она затем может быть израсходована на эгоистические или альтруистические, благородные или низменные цели, и здесь находит свое проявление многосторонность человеческой натуры. Однако побудительным мотивом выступает определенное количество денег. Именно это определенное и точное денежное измерение самых устойчивых стимулов в хозяйственной жизни позволило экономической науке далеко опередить все другие науки, исследующие человека. Так же, как точные весы химика сделали химию более точной, чем большинство других естественных наук, так и эти весы экономиста, сколь бы грубы и несовершенны они ни были, сделали экономическую науку более точной, чем любая другая из общественных наук» (т. 1, с. 69). Экономическая теория «занимается, главным образом, теми желаниями, устремлениями и иными склонностями человеческой натуры, внешние проявления которых принимают форму стимулов к действию, причем сила или конкретные параметры этих стимулов могут быть оценены и измерены с известным приближением к точности, а поэтому в некоторой степени поддаются исследованию с помощью научного аппарата. Применение научных методов и анализа в экономической науке возникает лишь тогда, когда силу побудительных мотивов человека, а не самих мотивов, становится возможным приблизительно измерить той суммой денег, которую он готов отдать, чтобы получить желаемое удовлетворение, или, наоборот, той суммой, которая необходима, чтобы побудить его затратить определенное количество утомительного труда» (т. 1, с. 70).

Вопрос о точности экономических измерений является чрезвычайно важным. С выяснения вопроса о точности «весов экономиста» должна собственно начинаться экономическая наука, чтобы стать более точной. Но для этого необходимо ответить на вопрос, насколько точны «весы экономиста», нужно уметь определить, с какой ошибкой осуществляются измерения. Следует указать условия, при которых эти весы работают правильно, а при каких условиях им доверять нельзя. Но вместо этого анализа А. Маршалл утверждает без всякого на то основания, что экономические измерения вполне удовлетворительны. Причем нерешенность этого основного для экономической науки вопроса (если она претендует на точность) очевидна уже по тому разнообразию оценок точности экономических измерений, которые дает А. Маршалл на протяжении всего лишь десятка страниц его работы, где он затрагивает данный вопрос. В приведенных выше цитатах он сначала говорит об определенном и точном денежном измерении, затем — об измерении с известным приближением к точности и далее — о возможности приблизительно измерить. О «весах же экономиста» он сам говорит, что они грубы и несовершенны, и далее мы читаем, что «экономические измерения не являются идеально точными» (т. 1, с. 82), «редко бывают точными» (т. 1, с. 87) и все же «отличаются достаточной точностью» (т. 1, с. 82).

Разнообразие оценок степени точности экономических измерений, которые дает А. Маршалл, есть следствие и свидетельство того, что он не располагает способом *проверки* надежности и точности экономических измерений или, иначе говоря, способом оценки ошибки экономических измерений. По-видимому, именно в способах проверки правильности экономических измерений заключается собственно специфика экономической теории, разительно отличающая ее от наук естественных.

Различие здесь такое же, как между тем, что есть и что должно быть. Или, например, между научной истиной и правдой. Первую доказывают, вторую чувствуют. Как оценить ущерб природе? Велик он или мал? Где следует остановиться, чтобы им можно было пренебречь при денежной оценке стоимости? На эти и подобные им вопросы мы должны уметь отвечать, чтобы относиться с доверием к «весам» экономиста.

10.2. Теория стоимости и экономические измерения

Проблема экономических измерений. Основной массив экономических данных составляют данные в стоимостном выражении. Эти данные — либо цены и индексы цен, либо количество продукции (в натуральном выражении), помноженное на цены. Какие бы преобразования мы затем с этими данными ни делали, качество результата (надежность, точность) будет определяться качеством исходных данных. Поэтому проблема экономических измерений — это проблема цен.

Проблема надежности и точности экономических измерений *актуальна,* по крайней мере, в двух аспектах. Во-первых, проблема использования данных в стоимостном выражении в различных расчетах экономической эффективности хозяйственных мероприятий и при моделировании экономических процессов, в том числе при построении эконометрических моделей. Во-вторых, объяснение «природы» рыночных цен и их роли в хозяйственной деятельности важно для общей оценки рынка как механизма саморегулирования. Оценка заключается в доверии или недоверии к этому механизму. Ответ на этот вопрос важен для выработки правильной экономической политики, и практической деятельности отдельных лиц.

Традиционно в экономической теории рыночные цены тесно связаны с понятием конкуренции. В соответствии с этой теорией при совершенной конкуренции устанавливаются «истинные» цены. Монополия, государственное регулирование, инфляция, внешние эффекты (*externalities* — по выражению П. Самуэльсона) нарушают механизм конкуренции и цен.

Сначала теория стоимости и цен рассматривается для нормальных условий, а затем делаются поправки к теории с учетом разного рода нарушений. Конечно, основная трудность при таком подходе состоит в том, чтобы понять, что считать нормой.

В этой главе при рассмотрении проблемы теории рыночных цен основное внимание уделено побочным эффектам, ибо указанные выше нарушения можно рассматривать как их разновидности.

Положительные и отрицательные побочные эффекты. В своей деятельности человек преследует ту или иную цель. Эта деятельность оказывает воздействие на него самого, природу и общество. Воздействия являются побочными эффектами основной цели деятельности; они могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательные побочные воздействия наносят ущерб современникам, последующим поколениям и природе.

Совокупный результат деятельности состоит из цели деятельности и побочных воздействий. Если бы все побочные воздействия были положительными, то в оценке совокупного результата не было бы никаких проблем. Проблема возникает, когда хотя бы часть побочных воздействий является отрицательной. Поэтому в этих случаях появляются такие оценки совокупного результата деятельности, как «с одной стороны..., а с другой стороны...».

Сказанное верно и для хозяйственной деятельности. Кроме основного продукта — электричества, угольная электростанция производит и ряд нежелательных побочных продуктов: дым, сажу, оксиды азота и серы, углекислый газ, радиоактивные вещества, тепло и др. Каждый из названных побочных продуктов деятельности, если он не может быть усвоен и переработан природными организмами, попадая в окружающую среду, нарушает экологическое равновесие. Побочные продукты загрязняют почву, воду, воздух, нарушают условия существования и жизни природных организмов. Наличие этих веществ угнетающе воздействует на жизнедеятельность природных организмов, а порою и убивает их. Указанные «выбросы» могут быть вредны для здоровья человека. Кроме того, чем интенсивнее мы сжигаем уголь, тем меньше его остается для последующих поколений, которые, возможно, эти запасы могли бы использовать более эффективно.

Нормальные условия и критические состояния. При нормальных условиях отрицательные побочные эффекты хозяйственной деятельности столь малы, что ими можно пренебречь. Отрицательные побочные воздействия должны быть пренебрежимо малы, ибо только в этом случае можно построить какую-то теорию стоимости и цен.

Наоборот, в критических состояниях отрицательные побочные эффекты столь велики, что ими пренебречь невозможно.

В критических состояниях трудно ответить на вопрос «чего это сто́ит?» в форме, привычной для экономиста, т.е. оценить стоимость в денежном выражении. Поэтому ни трудовая теория стоимости, ни теория полезности здесь ничего не объясняют.

В этом случае кроме цен в денежном выражении следует учитывать отрицательные побочные явления (например, различные виды ущерба природе).

Деятельность по созданию нормальных условий должна быть выдвинута как самостоятельная задача и более важная, чем сама хозяйственная деятельность.

Проблема стоимости при нормальных условиях. Эта проблема заключается в следующем. Все величины Гаусс подразделял на два рода — экстенсивные и интенсивные. *Экстенсивные величины* состоят из частей однородных, и они образуют предмет математики. *Интенсивные величины* состоят из частей неоднородных, и нужно указать способ их соизмерения или взвешивания, чтобы можно было перейти к количественной оценке таких величин.

Например, первоначально в экономической теории для объяснения рыночных цен вводилось понятие стоимости, под которой подразумевались затраты труда. Затраты труда мы можем измерять в человеко-часах. Но поскольку при производстве почти каждого товара, особенно при глубоком разделении труда, используется труд разного характера (труд разных специальностей, разной тяжести, с разным уровнем квалификации, интенсивности и т.д.), постольку нужно указать, каким образом (используя какие шкалы) оценивать труд разного характера, т.е. нужно указать прием, используя который мы могли бы складывать человеко-часы труда разного характера, часто вредного для здоровья или сопряженного с риском для жизни. Труд крестьянину стоил пота и крови. На каких весах взвешивать то и другое?

В теории предельной полезности считается, что каждый потребитель в состоянии упорядочить различные наборы товаров по степени их предпочтительности. Иначе говоря, потребители удовлетворительно решают задачу соизмерения разнородных полезностей и потребностей. Потребители рассматриваются как суверенные, верховные судьи. Осуществив свой выбор, они указывают тем самым, что следует производить, в каких количествах и, следовательно, косвенно влияют на распределение ограниченных ресурсов между различными видами деятельности. В этой теории мы получаем заметное продвижение в решении проблемы соизмерения разнородных величин по сравнению с трудовой теорией стоимости. Но как соизмерить предпочтения разных людей? При построении общественной функции полезности возникает проблема интегрируемости индивидуальных функций полезности.

Далее в теории обосновывается, что отношение цен на два товара равно одновременно отношению их предельных полезностей и отношению их придельных издержек. Таким образом, в известном смысле трудовая теория стоимости не противоречит теории полезности. Но этот вывод означает также, что проблема цен состоит как в соизмерении труда разного характера, так и разнородных потребностей.

Неединственность рыночных цен и неопределенность понятия совершенной конкуренции. Допустив возможность соизмерения разнородных потребностей потребителем и положив в основание теории стоимости понятие полезности, мы не получаем окончательного решения проблемы соизмерения разнородных величин. Теперь она появляется в другой форме: как проблема соизмерения и сопоставления индивидуальных предпочтений. Можно обойти эту проблему допуская, что каждый из вариантов соизмерения равновозможен.

Развитие теории полезности в этом направлении привело к понятию оптимизации по Парето. *При оптимизации по Парето* мы фиксируем положение одного индивидуума и ищем такое распределение ресурсов, при котором положение другого может быть улучшено. Такой подход возможен и при решении производственных задач. Тогда фиксируют объем производства одного продукта и ищут такое распределение ресурсов, при котором производство другого продукта может быть увеличено. Это оптимизационные задачи и при их решении часто используют вспомогательные величины, которые могут быть интерпретированы как теневые цены продуктов (ресурсов). Поскольку оптимальных по Парето состояний бесконечно много (фиксировать исходное положение одного из индивидуумов можно на разных уровнях), постольку и систем цен, обеспечивающих оптимальное по Парето распределение ресурсов, также бесконечно много. Каждое оптимальное по Парето состояние характеризуется определенным разрывом в уровнях материальной обеспеченности отдельных индивидуумов. Если под экономическим оптимумом понимать систему цен и соответствующее ей распределение ресурсов для одного из оптимальных по Парето состояний, то говорят, что социальные отношения (разрыв в уровнях материальной обеспеченности) определяют оптимум экономический.

Таким образом, в современной экономической теории эффективность и справедливость оказываются тесно связанными между собой. Проблема сопоставления индивидуальных предпочтений здесь предстает как проблема сопоставления материального благополучия отдельных индивидуумов, а проблема стоимости теперь оказывается связанной с нашими представлениями о справедливости.

Но это означает и тесную связь конкуренции с представлениями о справедливости. Понятие совершенной конкуренции неопределенно, если нет единства в понимании справедливости. Конкуренция может быть разной: от конкурса талантов — до борьбы без правил.

Одной из характеристик конкуренции следует считать уровень социальной напряженности. Обострение социальной напряженности является отрицательным побочным эффектом усиления конкуренции. Речь здесь идет не только об обострении отношений между богатыми и бедными внутри данного общества, но и между богатыми и бедными странами.

Проблема издержек производства. В результате анализа причин деградации природы было показано, что она стала возможной из-за неправильной калькуляции издержек производства. Проблема издержек производства состоит в том, что при их подсчете не учитываются отрицательные побочные воздействия предприятий на природу, т.е. не учитывается ущерб природе.

Ущерб природе редко может быть оценен в денежной форме. Если ущерб невелик, то им можно пренебречь, и тогда нет непреодолимых проблем в подсчете издержек производства. Если же ущерб велик, то им невозможно пренебречь и невозможно одновременно выразить его в деньгах. В этом и заключается уже непреодолимая проблема издержек производства, наличие которой препятствует построению какой-либо теории рыночных цен.

Стимулированный спрос. *Стимулированный спрос* — это искусственно созданные потребности. Их формирует реклама. Возможность управления потребностями посредствам рекламы появляется при достаточно высоких доходах и уровне потребления в обществе массового потребления с низким уровнем культуры, при котором у людей теряется способность отделить полезное от бесполезного и ненужного.

При стимулированном спросе условие независимости принятия решений потребителем не выполняется. Утверждение теории, что отношение цен на два товара равно отношению их предельных полезностей, оказывается неверным. Равно и наличие проблемы издержек производства означает, что отношение цен на два товара не равно отношению предельных издержек их производства. Таким образом, при наличии стимулированного спроса и проблемы издержек производства неверным оказывается утверждение современной теории о том, что рыночные цены являются надежным инструментом эффективного распределения ресурсов. Стимулированный спрос и проблема издержек производства объясняют гигантскую расточительность современной экономики, допускающей появление в широких масштабах отрицательных побочных воздействий хозяйственной деятельности на природу и общество.

Товарное хозяйство. Натуральное хозяйство органически вписывалось в космос природы. Крестьянское хозяйство по существу не имело отходов производства, т.е. отрицательные побочные воздействия были пренебрежимо малы.

Товарное сельское хозяйство сопряжено с выносом химических элементов из почвы. С каждым новым урожаем, предназначенным на продажу, плодородие почвы уменьшается. Почва становится беднее, ибо из нее безвозвратно изымаются именно те элементы, которые образуют тело нового урожая.

Почва — это одна из кладовых природы. Продавая новый урожай, продают органическое вещество, образующее почву, т.е. обедняют кладовую природы. Товарное хозяйство размыкает круговорот веществ в природе.

Конкуренция. Указанное свойство товарного хозяйства усиливается конкуренцией, ибо она усиливает борьбу за выживание. В ходе хозяйственной деятельности человек преобразует вещество природы в полезности, вещи. В определенном смысле он ничего не создает, а только перерабатывает и потребляет созданное природой. Поэтому экономику иногда уподобляют насосу. Если принять эту аналогию, то конкуренция увеличивает мощность насоса. Но при этом следует помнить, что мощность источника ограничена.

Большая прибыль обычно сопряжена с большими отрицательными побочными воздействиями. Известно, что замена мыла на стиральный порошок оказалась очень выгодной для производителей стирального порошка. Конечно, и для потребителей стиральный порошок более предпочтителен, чем мыло. Однако пена, образующаяся при употреблении в стирке мыла, разлагается, а пена стирального порошка — нет. В книге Б. Коммонера «Замыкающийся круг» приведено множество подобных примеров. Он убедительно показал, что наиболее прибыльными и быстрорастущими в послевоенное 25-летие в экономике США оказались те отрасли, негативное воздействие которых на природу было особенно велико.

Наоборот, низкая прибыль, ее отсутствие или даже убыточность характерны для отраслей деятельности с положительными побочными воздействиями (пример — фундаментальные научные исследования, сфера воспитания и образования).

При оценке результата деятельности предприятия по размеру прибыли оказывается, что деятельность прибыльных предприятий с отрицательным побочным воздействием (предприятия первого рода) получает завышенную оценку, а деятельность убыточных с положительным побочным воздействием (предприятия второго рода) — заниженную оценку. Предприятия первого рода производят больше, чем дóлжно с точки зрения истинной стоимости, а предприятия второго рода — меньше. Распределение ограниченных ресурсов осуществляется в пользу предприятий первого рода, а предприятия второго рода получают недостаточно ресурсов. Конкуренция, усиливая борьбу за выживание, способствует выживанию предприятий с высокой прибылью, а следовательно, расширяет масштабы и глубину неэффективного использования ресурсов.

Мы пришли к выводу, что механизм селекции и отбора при конкуренции далек от совершенства, ибо ведет к выживанию предприятий и видов деятельности с высоким уровнем отрицательных побочных эффектов.

Традиционный подход в экономической теории состоит в признании конкуренции как образца по сравнению с другими типами рынка. Этот образец в экономической теории получил двусмысленное название — *совершенная конкуренция*. Это двусмысленное и неверно ориентирующее название, ибо совершенная конкуренция оказывается далекой от совершенства.

Инфляция. Инфляция развивается неравномерно в различных отраслях хозяйственной деятельности, поэтому инфляция искажает соотношение цен. Как следствие при инфляции снижается надежность и точность экономических измерений.

Выводы. Проблема рыночных цен, а следовательно, и экономических измерений возникает тогда, когда ущерб природе, социальная напряженность и стимулированный спрос достигают таких размеров, что ими невозможно пренебречь. Тогда проблема стоимости из необычной, но разрешимой задачи соизмерения разнородных величин (затрат труда разного характера, разного рода полезностей), превращается в неразрешимую проблему соизмерения несоизмеримого, например, издержек производства в денежном выражении и ущерба природе, если его невозможно оценить в денежном выражении.

Проблему теории стоимости и цен можно сформулировать иначе: она возникает, когда по каким-либо причинам оказываются нарушенными отношения людей друг к другу, последующим поколениям и природе.

Полученные нами выводы показывают, в каких направлениях следует искать решения проблемы теории стоимости и цен, а следовательно, и проблемы экономических измерений. Во-первых, нужно каким-то образом устранить перекос в оценке видов деятельности с положительными и отрицательными побочными воздействиями. Во-вторых, следует стремиться к устранению социальной напряженности. В-третьих, нужно снизить ущерб природе до уровня, когда им можно было бы пренебречь. И, в-четвертых, следует отказаться от стимулирования спроса, т.е. от создания искусственных потребностей.

Средства решения проблемы теории стоимости и цен. Устранить перекос в оценке видов деятельности посредством увеличения налогов на виды деятельности с отрицательным побочным воздействием может государство. Оно в состоянии взять на себя финансирование видов деятельности с положительными побочными эффектами (образование, воспитание, просвещение, искусство, культура, медицина, спортивно-оздоровительные учреждения, базы массового отдыха на природе и, наконец, экстенсивное сельское хозяйство, а еще лучше — возрождение лада натурального хозяйства). Эти действия ведут к снижению социальной напряженности и могут быть усилены регулированием цен (максимальная и минимальная цена), расширением прав и возможностей профсоюзов, созданием учебных заведений по переподготовке и освоению новых профессий (для уменьшения структурной безработицы). Экономическая политика государства должна быть направлена на снижение безработицы и инфляции.

Анализ проблемы стоимости и цен, а следовательно, и экономических измерений, показывает, что, двигаясь по разным направлениям, мы приходим к одним и тем же вопросам, касающимся *отношения людей друг к другу, последующим поколениям и природе.* Эти же вопросы являются центральными в любой религии, они же составляют предмет морали. Это говорит нам, во-первых, о том, где следует искать решения проблемы стоимости и цен. Во-вторых, мы приходим и к такому выводу: наше внимание должно привлекать и все то, что нарушает нормальную духовную деятельность каждого человека и общества в целом. Поэтому среди *других* отрицательных побочных воздействий хозяйственной деятельности следует выделить сосредоточение экономической власти в руках узкого круга лиц и ее влияние на политическую, культурную и духовную жизнь общества, в частности, через такие мощные рычаги влияния, как средства массовой информации. Опасность здесь состоит в том, что объектом воздействия становится сознание людей, а объектом манипуляций — общественное мнение. Представители любого вида деятельности заинтересованы в создании среды, удобной именно для данного вида деятельности. Такую среду, в которой интересы немногих оказываются предпочтительнее интересов общества в целом, и создают средства массовой информации, формируя поведение людей и влияя на их выбор.

Главным в теории стоимости является не вопрос о том, что лежит в основании стоимости (затраты труда, полезность), а какими мотивами руководствуются люди в их повседневной жизни, принимая хозяйственные, политические, технические и другие решения. Конкуренция вынуждает обращать внимание на ближайшие следствия (прибыль) и закрывать глаза на отдаленные во времени и пространстве отрицательные побочные эффекты. Но, кроме того, мотивы деятельности подвергаются массированной обработке средствами массовой информации. Цель этой обработки — внушение и формирование такого сознания, когда, как писал Д. Гэлбрейт, трудно поверить, что существует нечто более важное, чем производство товаров.

Построение какой-либо теории стоимости и цен возможно лишь для нормальных условий, при которых сведены к минимуму отрицательные побочные воздействия хозяйственной деятельности: ущерб природе, стимулированный спрос, инфляция, сосредоточение экономической власти в немногих руках и ее влияние на духовную жизнь общества.

10.3. Положительные побочные эффекты как признак нормальных условий

В параграфе 10.2 нормальные условия были определены таким образом: отрицательные побочные эффекты сведены к минимуму такому, когда ими можно пренебречь. При этом минимуме ущерб природе не вызывает тревоги. Естественно, оценка этого минимума весьма *субъективна*, если использовать язык науки, но она может быть *объективной* и *правдивой* при определенных условиях, если использовать язык морали.

Теперь мы остановимся на значении положительных побочных эффектов для оценки нормальных условий.

Нетрудно привести примеры отрицательных побочных воздействий. Примеры положительных побочных воздействий также могут быть приведены, но трудно подобрать пример *бесспорный*. Такой пример необходим как образец для сравнения. Любая наука начинает исследование с неких идеальных объектов, которых, может быть, и не существует в природе: идеальный газ, совершенная конкуренция и т.д. Затем теория, конечно, подлежит корректировке с учетом различных «нарушений», которые появляются, как только мы переходим к реальности. Не найдя примеров бесспорно положительных побочных воздействий в человеческой деятельности, обратимся к миру природы.

Растение как образец положительного побочного эффекта. Используя солнечную энергию, растения создают из углекислого газа и воды органическое вещество. Побочным продуктом этой деятельности растений (фотосинтеза) является кислород: лишь незначительное количество кислорода используется растениями для дыхания, основная же его масса образует атмосферу. Она — побочный продукт жизнедеятельности растений. Без нее жизнь на Земле могла бы существовать лишь в самых примитивных формах.

Пример растений наводит на мысль о том, что в ходе естественного отбора выживали лишь те организмы, которые оказывали положительное воздействие на природу в целом. Иначе говоря, в ходе так называемой борьбы за существование шансы на выживание имели организмы, оказывающие только положительное воздействие на природу. Положительное воздействие не только в смысле увеличения разнообразия природы, расширения генофонда, увеличения количества информации, заложенной в генах, но и скрепления тесными узами ее единства. И небо — поистине символ этого единства. Организмы с отрицательным побочным воздействием на природу в целом, по-видимому, отвергались природой, ибо если допустить обратное, то они за миллионы лет существования подточили бы устои природы, нарушили бы ее многообразие и единство. Но поскольку этого не произошло, следует допустить, что таких организмов нет. (Это заключение относится ко всем организмам за исключением человека.)

Растения дают нам пример положительного побочного эффекта, имеющего фундаментальное значение в жизни природы. Если природу рассматривать как образец, достойный подражения, то нормой следует считать такое состояние, когда в основу жизнедеятельности человеческого общества положены виды деятельности с положительными побочными эффектами. Великое значение видов деятельности с положительными побочными эффектами состоит в том, что о последствиях можно не думать.

В одном из последних докладов Римскому клубу (2, с. 374) есть любопытное высказывание (по-видимому, авторы — не экономисты): «Цены должны говорить правду». Но сначала мы должны научиться этому

Вопросы и задания

1. В чем заключается проблема экономических измерений?
2. Почему важно правильное решение проблемы экономических измерений?
3. Раскройте понятие социальной стоимости.
4. В каких случаях рыночные цены не могут быть инструментом эффективного распределения ресурсов?
5. Говорят ли рыночные цены правду?

Библиографический список

Глава 1

1. *Айвазян С.А.* Прикладная статика. Основы эконометрики. — Изд. 2-е. — Т. 2. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
2. *Магнус Я.Р.*, *Катышев П.К.*, *Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс. — Изд. 6-е. — М.: Дело, 2004.
3. *Доугерти К.* Введение в эконометрику. — М.: ИНФРА-М, 1997.
4. *Chatterjee S.*, *Price B.* Regression Analysis by Example. — New York: John Wiley & Sons, 1977.
5. *Greene W.H.* Econometric analysis. Ed. 5th. — New Jersey, 2003.
6. *Griffiths W.E.*, *Hill R.C.*, *Judge G.G.* Learning and Practicing Econometrics. — New York: John Wiley & Sons, 1993.

Глава 2

1. *Вэриан Х.Р.* Микроэкономика. Промежуточный уровень, современный подход. — М.: «ЮНИТИ», 1997.
2. *Mas-Colell*, *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomic Theory. — New York: Oxford University Press, 1995.
3. *Varian H.R.* Microeconomic Analysis, Second Edition. — New York—London: W.W. Norton & Company, 1992.

Главы 3, 4

1. *Экономико*-математический энциклопедический словарь. — М.: Науч. изд-во «Большая Российская энциклопедия» и Издательский дом «ИНФРА-М», 2003.
2. *Замков О.О*, *Толстопятенко А.В.*, *Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. — М.: Дело и Сервис, 2003.
3. *Mas-Colell*, *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomic Theory. — New York: Oxford University Press, 1995.
4. *Varian H.R.* Microeconomic Analysis. — New York—London: W.W. Norton & Company, 1992.

Глава 5

1. *Вурос А.*, *Розанова Н.* Экономика отраслевых рынков. — М.: Теис, 2000.
2. *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности: Пер. с англ. — Т. 1, 2. — СПб., 2000.
3. *Хайман Д.К.* Современная микроэкономика: анализ и применение: Пер. с англ. — Т.2. — М.: Финансы и статистика, 1992.
4. *Хэй Д.*, *Моррис Д.* Теория организации промышленности: Пер. с англ. — Т.1, 2. — СПб., 1999.
5. *Шерер Ф.М.*, *Росс Д.* Структура отраслевых рынков: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 1997.
6. *Carlton D.*, *Perloff J.* Modern Industrial Organization. — USA, 1994.

7. *Clarke R.* Industrial Economics. — USA: Blackwell Publishers, 1993.
8. *Ferguson P.R.*, *Ferguson G.J.* Industrial Economics (Issues and Perspectives). Ed. 2nd — London: The Macmillan Press LTD, 1994.

Глава 6

1. *Гранберг А.Г.* Динамические модели народного хозяйства. — М.: Экономика, 1986
2. *Замков О.О.*, *Толстопятенко А.В.*, *Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. — М.: Дело и Сервис, 1999.
3. *Мэнкью Н.Г.* Макроэкономика. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
4. *Chiang A.* Fundamental Methods of Mathematical Economics. Thrid Edition. — McGraw-Hill, 1984.
5. *Solow R.A.* Contribution to the Theory of Growth Quarterly // Journal of Economics, 1956, February.

Главы 7, 8

1. *Бурда М.*, *Виплощ Ч.* Макроэкономика. Европейский текст. — Изд. 2-е. — СПб: Судостроение, 1998.
2. *Дорнбуш Р.*, *Фишер С.* Макроэкономика. — М.: Изд-во МГУ, 1997; ИНФРА-М, 1997.
3. *Мэнкью Н.Г.* Макроэкономика. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
4. *Саке Д.*, *Ларен Ф.* Макроэкономика. Глобальный подход. — М.: Дело, 1996.
5. *Frenkel J.*, *Razin A.* The Mundell—Fleming Model. A Quarter Genture Later. — NBER Working Paper, 2321. 1987.

Глава 9

1. *Блех Ю.*, *Гетце Г.* Инвестиционные расчеты. — Калининград: Янтарный сказ, 1995.
2. *Волков И.М.*, *Грачева М.В.* Проектный анализ: Учебник. — М.: ЮНИТИ, 1998.
3. *Грачева М.В.* Анализ проектных рисков. — М.: Финстатинформ, 1999.
4. *Беренс В.*, *Хавранюк П.* Руководство по оценке эффективности инвестиционных проектов. — М.: Экономика, 2000.
5. *Методические* рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов. — М.: Экономика, 2000.
6. Риск-анализ инвестиционного проекта: Учебник под общ. ред. М.В. Грачевой. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
7. *Виленский П.Л.*, *Лившиц В.Н.*, *Смоляк С. А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов. — М.: Дело, 2002.
8. *Управление* инвестициями / Под общ. ред. В.В. Шеремета — М.: Высшая школа, 1998.

Глава 10

1. *Маршалл А.* Принципы политической экономии. — Т. 1. — М., 1983.
2. *Смит А.* Исследование о природе и причинах богатства народов. — М., 1962.
3. *Рикардо Д.* Начала политической экономии и податного обложения. — СПб., 1908.
4. *Воркуев Б.Л.* Ценность, стоимость и цена. — М.: Изд-во МГУ, 1995.

Оглавление

Учебник

Грачева Марина Владимировна
Фадеева Людмила Николаевна
Черемных Юрий Николаевич и др.

Моделирование экономических процессов

Редактор *О.И. Левшина*
Корректор *Г.Ф. Ефимова*
Оригинал-макет *Н.М. Белоусовой*
Оформление художника *В.А. Лебедева*

Лицензия серии ИД № 03562 от 19.12.2000 г.

Подписано в печать 8.06.2005
Формат 60x88 1/16. Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 17,0
Тираж 10 000 экз. (1-й завод — 3000). Заказ 3174

ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА»
Генеральный директор *В.Н. Закаидзе*

123298, Москва, ул. Ирины Левченко, 1
Тел.: 8(499) 740-60-15. Тел./факс: 8(499) 740-60-14
www.unity-dana.ru E-mail: unity@unity-dana.ru

Отпечатано во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, Ульяновск, ул. Гончарова, 14