АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1 ПОНЯТТЯ ВЕКТОРУ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. ЛІНІЙНІ (ВЕКТОРНІ) ПРОСТОРИ. ОРІЄНТОВНІ ТРІЙКИ ВЕКТОРІВ. АФІННА ТА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ.

Означення вектора. Лінійні операції над векторами. Ділення відрізка в даному відношенні

Вектор – напрямлений відрізок прямої. Позначення: $\overline{a}$ або $\vec{a}$. Якщо A – початок вектора, а B – кінець, то тоді вектор можна позначити так: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$.

Відстань між кінцем і початком вектора $\overline{a}$ будемо називати *довжиною* або *модулем вектора* й позначати одним із символів: $|\overline{a}|$ або a.

Два або більше векторів називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Три або більше векторів називають *компланарними*, якщо всі вони паралельні деякій площині або лежать в одній площині.

Якщо довжина вектора $\overline{a}$ дорівнює нулю, то вектор $\overline{a}$ називають *нульовим* і пишуть $\overline{a} = \overline{0}$.

Якщо положення початкової точки вектора в просторі значення не має, такі вектори називають *вільними*. Два вільні вектори мають *однаковий напрямок* ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), якщо вони колінеарні та їх кінці лежать по одну сторону від прямої, що проходить через їх початки. У супротивному випадку вектори називають *протилежно спрямованими* ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$). Два вільних вектори вважаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжини й однакові напрямки.

Невільні вектори поділяють на *ковзні* й *зв'язані*. Надалі будемо розглядати тільки вільні вектори.

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на число. *Сумою* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який можна отримати в результаті таких дій: з довільної точки A простору відкладаємо вектор $\overline{a}$, а з кінця B цього вектора відкладаємо вектор $\overline{b}$, будемо вважати при цьому, що кінець вектора $\overline{b}$ розташовано в точці C, тоді вектор $\overline{AC}$ і є сума векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис 1.1а). У деяких випадках зручніше користуватися правилом паралелограма (рис. 1.1б): якщо вектори відкласти від однієї точки, то вектор суми – та діагональ паралелограма, початок якої знаходиться в тій самій точці, що і початки векторів-доданків.

а) правило трикутника *б) правило паралелограма*

Рисунок 1 – Правила суми двох векторів

За правилом трикутника поняття суми легко узагальнюється на випадок будь-якого скінченого числа векторів.

Вектор $\overline{b}$ будемо називати *протилежним* вектору $\overline{a}$, якщо $\overline{a} = -\overline{b}$. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають так: $-\overline{a}$. Напрямки $\overline{a}$ й $-\overline{a}$ протилежні, а модулі однакові.

Під *різницею* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розуміють вектор $\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$. Різницю векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ будемо позначати так: $\overline{a}-\overline{b}$.

Добутком вектора $\overline{a}$ на число α називають вектор, який має довжину $|\alpha|\cdot|\overline{a}|$. Напрямок вектора $\alpha\overline{a}$ збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний йому, якщо $\alpha<0$. Якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Операції додавання векторів і множення їх на числа мають наступні **властивості**. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ та будь-яких дійсних чисел α і β:

1. Додавання векторів *комутативне*: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.
2. Додавання векторів *асоціативне*: $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$.
3. Додавання нульового вектора до будь-якого вектора $\overline{a}$ не змінює останнього: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.
4. $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$, $-1\in R$.
5. Множення вектора на число *асоціативне*: $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$.
6. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання чисел*: $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$.
7. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання векторів*: $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.
8. Множення вектора на одиницю не змінює останнього $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$, $1\in R$.

Використовуючи лінійні операції над векторами, можна формувати суми такого виду $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$, які називаються *лінійними комбінаціями векторів* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

Нехай на площині або в просторі зафіксована точка *O* (*полюс*). Вектор $\overline{OM}$ з початком у точці *O* та кінцем у деякій точці *M* площини або простору називається *радіус-вектором* точки *M*: $\overline{r}_M$.

Нехай дано три точки *A*, *B*, *C*, що лежать на одній прямій. Говорять, що точка *C* ділить напрямлений відрізок *AB* у відношенні λ, якщо $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\lambda$ (або $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$).

Теорема 1 Якщо точка *C* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda\neq-1$, то радіус вектор $\overline{r}_C$ точки *C* виражається через радіус-вектори $\overline{r}_A$ і $\overline{r}_B$ точок *A* й *B* наступним чином:

$$\overline{r}_C=\frac{\overline{r}_A+\lambda\overline{r}_B}{1+\lambda},\ \lambda\neq-1$$

– формула ділення відрізка в даному відношенні.

Лінійна залежність векторів.
Поняття векторного простору, базису й координат вектора

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, такі, що $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n=\overline{0}$. Якщо остання рівність можлива тільки при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, то вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*.

Умовимося вектор $\overline{b}=\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$ називати лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. У цій рівності $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – дійсні числа.

Теорема 2 Для того, щоб система векторів була лінійно залежною, необхідно й достатньо, щоб один з векторів був лінійною комбінацією інших.

Теорема 3 Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 4 Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок. Три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 5 Будь-які чотири вектори у просторі геометричних векторів лінійно залежні.

Множину векторів будемо називати *векторним простором*, якщо лінійні операції над будь-якими векторами цієї множини, тобто додавання двох векторів і множення вектора на число, дають вектори тієї ж множини (властивості див. вище).

Базисом векторного простору називається така впорядкована сукупність векторів цього простору, яка є лінійно незалежною і максимальною (додавання до цієї системи хоча б одного вектора робить її лінійно залежною). З максимальності системи базисних векторів безпосередньо виходить, що будь-який вектор $\bar{d}$ простору є лінійною комбінацією базисних векторів: $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, де $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – вектори базису. Числа α, β, γ називаються *координатами вектора* $\bar{d}$ в базисі $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Позначення: $\bar{d}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 6 Будь-які два базиси одного векторного простору мають однакову кількість векторів.

Теорема 7 Координати вектора у заданому базисі єдині.

Число векторів базису називається *розмірністю* даного векторного простору. Позначення: $\dim V$.

Теорема 8 Будь-яка координата суми скінченого числа векторів дорівнює сумі відповідних координат доданків:

$$\bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \ldots + \bar{d}_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n, \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n).$$

При множенні вектора на число, його координати множаться на це число, тобто

$$\lambda\bar{d}_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1),\ \lambda \in R.$$

Теорема 9 Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda \neq -1$ і $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати точки C можна знайти за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Загальна декартова й полярна системи координат

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – трійка некомпланарних векторів у просторі. Виберемо в просторі яку-небудь точку O і проведемо через неї три осі Ox, Oy, Oz, які зіставимо з векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Побудована конструкція з точки й трьох осей з напрямними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ називається *загальною декартовою* (або *афінною*) системою координат.

Якщо базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ є ортонормованим (вектори базису одиничні та попарно ортогональні), то загальна декартова система координат називається *прямокутною* декартовою системою координат або просто *декартовою системою координат*.

Базис у тривимірному векторному просторі може бути правим або лівим. Відкладемо вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ базису з однієї точки O простору. Будемо прагнути, повертаючи вектор $\bar{e}_1$ навколо точки O в площини векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, сполучити його з вектором $\bar{e}_2$. Із двох напрямків обертання слід брати той, якому відповідає найменший кут повороту. Якщо для спостерігача, який дивиться з кінця вектора $\bar{e}_3$ на площину векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, зазначений поворот вектора $\bar{e}_1$ відбувається проти ходу годинникової стрілки, то базис $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ вважається *правим*. А якщо ні, то базис $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ *– лівий*.

Надалі, говорячи про ортонормований базис тривимірного векторного простору, будемо завжди вважати, що базис є правим.

Полярна система координат на площині визначається точкою O – полюсом, променем Ox – полярною віссю та одиничним відрізком.

Положення довільної точки M площини в полярній системі координат визначається відстанню $\rho = OM$ і кутом φ, відлічуваним від полярної осі до променя OM в заданому напрямку. Числа ρ і φ називаються *полярними координатами* точки M (ρ – полярний радіус, φ – полярний кут, $0 \le \varphi < 2\pi$). Позначення: $M(\rho;\varphi)$.

Зв'язок між декартовими та полярними координатами однієї й тієї ж точки (початок декартової системи координат збігається з полюсом полярної системи координат, такі системи координат називаються *узгодженими*) визначаються формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ \rho \ge 0; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2)$$

ПРАКТИКА

Приклад 1 У трикутнику ABC пряма AM – бісектриса кута BAC, причому точка M належить стороні BC. Виразити вектор $\overline{AM}$ через $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$.

Розв'язання. $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{MC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left|\bar{c}\right|$, $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{BC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left(\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|\right)$.

Отже, $\overline{BM} = \dfrac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$. Оскільки $\overline{AM} = \overline{BM} + \overline{AB}$, то

$$\overline{AM} = \bar{b} + \frac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right) = \frac{\bar{b}\left|\bar{c}\right| + \bar{c}\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}.$$

Приклад 2 Радіус-векторами вершин трикутника ABC є $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$. Знайти радіус-вектор точки перетину медіан трикутника.

Розв'язання. Оскільки $\overline{BC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$, $\overline{BD} = \dfrac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{2}$ (D – середина BC), $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \dfrac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{2} + \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \dfrac{\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1}{2}$, $\overline{AM} = \dfrac{2}{3}\overline{AD}$ (M – точка перетину медіан трикутника), тому $\overline{AM} = \dfrac{\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1}{3}$. Отже, $\bar{r}_M = \bar{r}_1 + \overline{AM} = \dfrac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3}{3}$.

Приклад 3 У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{MN}\right| = \left|\overline{NB}\right|$. Виразити вектор $\overline{CM}$ через $\overline{CA} = \bar{a}$, $\overline{CB} = \bar{b}$.

Розв'язання. Оскільки $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$, то $\overline{AM} = \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{3}$. Враховуючи, що

$\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, маємо

$$\overline{CM} = \overline{a} + \frac{\overline{b} - \overline{a}}{3} = \frac{2\overline{a} + \overline{b}}{3}.$$

Приклад 4 Дано радіус-вектори $\overline{r}_A$, $\overline{r}_B$, $\overline{r}_C$ вершин трикутника *ABC*. Знайти радіус-вектор $\overline{r}$ точки перетину медіан трикутника *ABC*.

Розв'язання. Нехай *M* – точка перетину медіан трикутника *ABC*. Відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і нею діляться у відношенні 2:1, рахуючись від вершини. Тоді

$$\overline{r}_M = \frac{\overline{r}_A + 2\overline{r}_{A_1}}{3},$$

де A_1 – середина сторони *BC*, тому $\overline{r}_{A_1} = \frac{1}{2}(\overline{r}_B + \overline{r}_C)$. Врешті решт, будемо мати:

$$\overline{r}_M = \frac{1}{3}(\overline{r}_A + \overline{r}_B + \overline{r}_C).$$

Приклад 5 Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ містить нульовий вектор. З'ясувати, чи є вектори лінійно залежними або лінійно незалежними?

Розв'язання. Припустимо, що $\overline{a}_1 = \overline{0}$, тоді, $1 \cdot \overline{a}_1 + 0 \cdot \overline{a}_2 + ... + 0 \cdot \overline{a}_n = \overline{0}$. У цій лінійній комбінації векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ коефіцієнт при першому векторі відмінний від нуля. Отже, розглянуті вектори лінійно залежні. Таким чином, система лінійно незалежних векторів не може містити нульовий вектор.

Приклад 6 В паралелограмі *ABCD* точка *M* – середина *DC*, *N* – середина *BC*. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$.

Розв'язання. Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ лінійно залежні. Знайдемо яку-небудь нульову, але нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів.

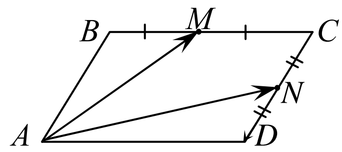

Рисунок 1 – Рисунок до прикладу 6

Виберемо базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$. Розкладемо вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ за базисом, отримаємо

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD},\ \overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AB},\ \overline{CB} = -\overline{AD}.$$

Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{AM} + \beta\overline{AN} + \gamma\overline{CB} = \overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію знайдені розклади й зберемо коефіцієнти при базисних векторах, отримаємо

$$\left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right)\overline{AB} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma\right)\overline{AD} = \overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta, \\ \alpha = \gamma - \frac{1}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta, \\ \gamma = -\frac{3}{2}\beta. \end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\beta = -2$. Тоді

$\alpha = 4$, $\gamma = 3$. Таким чином, знайдена лінійна залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ у вигляді

$$4\overline{AM} - 2\overline{AN} + 3\overline{CB} = \overline{0}.$$

Приклад 7 Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні. Чи будуть компланарними вектори $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$: $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{n} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$. Якщо так, то знайти їх лінійну залежність.

Розв'язання. Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні. Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{l} + \beta\overline{m} + \gamma\overline{n} = \overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію їх розклади і зберемо коефіцієнти при векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, отримаємо

$$(\alpha + \beta + 3\gamma)\overline{a} + (\alpha - \beta - \gamma)\overline{b} + (\alpha + \gamma)\overline{c} = \overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0, \\ \alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha, \\ \gamma = -\alpha. \end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\alpha = 1$. Тоді $\beta = 2$, $\gamma = -1$. Таким чином, вектори $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ компланарні та їх лінійну залежність можна записати у вигляді

$$\overline{l} + 2\overline{m} - \overline{n} = \overline{0}.$$

Приклад 8 Знайти вектор $\overline{a} = \overline{AB}$, якщо $A(1;\,3;\,2)$ і $B(5;8;-1)$.

Розв'язання. Координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, тому можемо записати: $\overline{r}_A(1;\,3;\,2)$, $\overline{r}_B(5;8;-1)$. Знайдемо координати шуканого вектора:

$$\overline{a} = \overline{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = (4;\,5;\,-3).$$

Приклад 9 Знайти координати центру ваги трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин: $A(-4;\,2)$, $B(2;\,0)$, $C(1;\,3)$.

Розв'язання. Центр ваги трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан, наприклад CD:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -1,\; y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = -1,\; D(-1;-1).$$

Центр ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника, тобто

$$x_P = \frac{x_C + \frac{1}{2}x_D}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2x_C + x_D}{3} = \frac{1}{3},\; y_P = \frac{y_C + \frac{1}{2}y_D}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2y_C + y_D}{3} = \frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(\frac{1}{3};\,\frac{5}{3}\right)$.

Приклад 10 Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $A\left(3;\,\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2;\,\frac{\pi}{4}\right)$. Визначити декартові координати цих точок.

Розв'язання.

Для визначення декартових координат цих точок скористаємося формулами (2):

$$A: \begin{cases} x = 3\cos\dfrac{\pi}{6}, \\ y = 3\sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \\ y = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} x = 2\cos\dfrac{\pi}{4}, \\ y = 2\sin\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Відповідь. $A\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

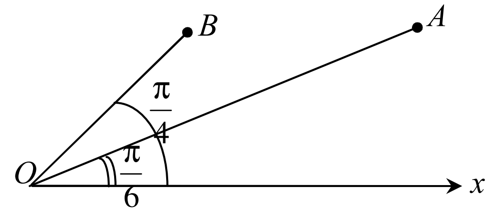

Рисунок 2 – Рисунок до прикладу 10

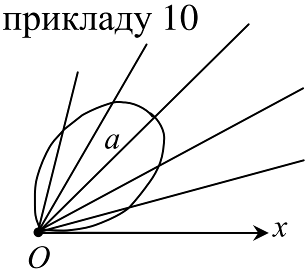

Рисунок 3 – Рисунок до прикладу 11

Приклад 11 Побудувати точки, полярні кути яких дорівнюють 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а відповідні радіус-вектори обчислюються з рівняння $\rho = a\sin 2\varphi$. Отримані точки з'єднати плавною кривою.

Розв'язання. Для побудови складемо таблицю

Таблиця 1 – Таблиця до прикладу 2

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\rho = a\sin 2\varphi$	0	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	0

Приклад 12 Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати точок L, M, N – середин ребер AC, AB, BC відповідно.

Розв'язання. Координати точок L, M, N співпадають з координатами їх радіус-векторів, тобто з координатами векторів $\overline{OL}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$. Використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні $\lambda = 1$ (точки є серединами відрізків), будемо мати

$$\overline{OL} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right), \qquad L\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right);$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right), \qquad M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right);$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right), \qquad N\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Відповідь. $L\left(\dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$, $N\left(0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Спростити вирази:

1) $\overline{AB} - \overline{CB} - \overline{DC} - \overline{AK} - \overline{KC} - \overline{CD}$; 2) $\overline{AB} + \overline{MN} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{PQ} + \overline{NM}$;

3) $\overline{AD} + \overline{MP} + \overline{EK} - \overline{EP} - \overline{MD}$; 4) $2\overline{x} - \overline{a} + 3\overline{b} - \overline{x} + 3\overline{a} - \overline{b}$.

№ 2 Для довільних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати: 1) $2\overline{a} - \dfrac{1}{3}\overline{b}$, $\dfrac{1}{2}\overline{a} + 3\overline{b}$, $-2\overline{a} - 3\overline{b}$,

$-3\overline{a}+2\overline{b}$; 2) $4\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$, $\frac{1}{4}\overline{a}+\frac{1}{3}\overline{b}$, $-3\overline{a}-4\overline{b}$, $-\frac{2}{3}\overline{a}+\frac{3}{4}\overline{b}$.

№ 3 Побудувати суму та різницю векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ трапеції $ABCD$, що є її основами .

№ 4 У правильному п’ятикутнику $ABCD$ задані вектори, що збігаються з його сторонами: $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{BC}=\overline{n}$, $\overline{CD}=\overline{p}$, $\overline{DE}=\overline{q}$, $\overline{EA}=\overline{r}$. Побудувати вектори: $\overline{m}-\overline{n}+\overline{p}-\overline{q}+2\overline{r}$, $\overline{m}+2\overline{p}+\frac{1}{2}\overline{r}$, $2\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}-3\overline{p}-\overline{q}+2\overline{r}$.

№ 5 У трикутнику ABC вектор $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{b}$. Знайти вектори, що збігаються з медіанами цього трикутника.

№ 6 Нехай $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$ – радіус-вектори трьох послідовних вершин паралелограма $ABCD$. Знайти радіус-вектор вершини D.

№ 7 Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр. Виразити вектори $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ через вектори $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$.

№ 8 Точка O – центр ваги трикутника ABC. Виразити вектори $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $-\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AO}$ через вектори $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{b}$.

№ 9 У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно. Виразити вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$.

№ 10 У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задані вектори, що збігаються з його ребрами: $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AD}=\overline{n}$, $\overline{AA_1}=\overline{p}$. Побудувати вектори: $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}$, $\overline{m}+\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$, $\frac{1}{2}\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}+\overline{p}$, $\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}$, $-\overline{m}-\overline{n}+\frac{1}{2}\overline{p}$.

№ 11 Точка O – центр ваги трикутника ABC. Довести, що $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$.

№ 12 Дано паралелограм $ABCD$. Точка K – середина сторони BC, точка L – середина сторони DC. Виразити вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ через вектори $\overline{AK}$ і $\overline{AL}$.

№ 13 Точка M_1 – середина відрізка A_1B_1, точка M_2 – середина відрізка A_2B_2. Довести векторну рівність $\overline{M_1M_2}=\frac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}\right)$.

№ 14 Побудувати точку M, що ділить відрізок AB у відношенні: 1) ± 2, $\pm\frac{1}{2}$; 2) $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{4}{3}$; 3) 3, –4, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

№ 15 В ΔABC: $AB=3$, $AC=5$. Виразити радіус-вектор $\overline{r}_D$ точки перетину бісектрис трикутника зі стороною BC через радіус-вектори точок B і C. Взяти точку A за полюс.

№ 16 В ΔABC бісектриса AD ділить BC у відношенні $\lambda=\frac{1}{2}$. В якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису.

№ 17 Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=-\frac{2}{3}$. Виразити радіус-вектор точки B через радіус вектори точок A і M.

№ 18 Дано трикутник ABC. Точка B_1 – середина сторони AC, точки A_1, A_2 ділять сторону CB на три рівні частини, точки C_1, C_2, C_3 ділять сторону AB на чотири рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{C_1A_2}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{C_2C}$.

№ 19 Дано паралелограм $ABCD$. Точка B_1 – середина AB, A_1 – середина AD, точки C_1, C_2 ділять DC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{A_1B_1}$, $\overline{DA_1}$, $\overline{BC_1}$.

№ 20 Дана трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$), у якої $DC = \frac{1}{3}AB$. Точки M і N – середини бічних сторін, точка P – середина основи AB. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{MN}$, $\overline{PC}$, $\overline{DA}$.

№ 21 У трикутнику ABC точка D – середина сторони AC, Точки E і F – ділять BC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{DF}$, $\overline{EA}$, $\overline{FE}$.

№ 22 Знайти, якщо вона існує, лінійну залежність векторів $\overline{l} = 2\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{m} = 2\overline{b} - \overline{a} - \overline{c}$, $\overline{n} = 2\overline{c} - \overline{b} - \overline{a}$, де вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні.

№ 23 Дано вектори $\overline{a}(-1;\,3;\,2)$, $\overline{b}(0;\,1;\,4)$. Обчислити координати векторів $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$, $\dfrac{\overline{a}+2\overline{b}}{3}$, $\dfrac{\overline{a}-2\overline{b}}{2}$, $2\overline{a}+3\overline{b}$.

№ 24 На матеріальну точку діють дві сили $\overline{F_1} = 2\overline{a}$ і $\overline{F_2} = 3\overline{b}$, де $\overline{a}(5;-2;\,3)$, $\overline{b}(1;\,0;\,-4)$. Знайти їх рівнодійну.

№ 25 Знайти лінійну залежність векторів $\overline{a}(1;3;5)$, $\overline{b}(0;\,4;\,5)$, $\overline{c}(7;\,-8;\,4)$, $\overline{d}(2;\,-1;\,3)$.

№ 26 Чи будуть вектори $\overline{l} = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{n} = \overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c}$ лінійно залежні, якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні?

№ 27 На прямій, визначеній точками $A(1;0;4)$ і $B(3;-1;2)$, знайти точку C таку, щоб точка A лежала між точками C і B й $AC = 3AB$.

№ 28 На прямій, визначеній точками $A(1;0;4)$ й $B(3;-1;2)$, знайти точку C таку, що точка B лежала між точками A і C й $AC = 3AB$.

№ 29 Чи колінеарні точки $A(4;-1)$, $B(6;-7)$, $C(3;2)$?

№ 30 Довести, що вектори $\overline{a}(1;-1;2)$, $\overline{b}(2;2;-1)$, $\overline{c}(3;7;-7)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\overline{d}(2;1;0)$ в цьому базисі.

№ 31 Дано три вектори $\overline{a}(3;-1)$, $\overline{b}(1;-2)$, $\overline{c}(-1;7)$. Знайти розклад вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ по базису $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

№ 32 Знайти розклад вектора $\overline{c}(11;6;-5)$ по базису $\overline{p}(3;-2;1)$, $\overline{q}(-1;1;-2)$, $\overline{r}(2;1;-3)$.

№ 33 Дано трикутник ABC. Довжини сторін AB і AC рівні відповідно 3 і 5. Відомі також координати вершин B и C: $B(2;2;1)$, $C(3;4;0)$. Знайти координати точки D перетину бісектриси трикутника зі стороною BC.

№ 34 Дано вектори $\overline{a}(2;3)$, $\overline{b}(1;-3)$, $\overline{c}(-1;3)$. При якому значенні α вектори $\overline{p} = \overline{a} + \alpha\overline{b}$ і $\overline{q} = \overline{a} + 2\overline{c}$ колінеарні?

№ 35 Знайти числа α, β, γ, для яких $\alpha\overline{a}, \beta\overline{b}, \gamma\overline{c}, \overline{d}$ утворюють замкнену ламану лінію, де $\overline{a}(3;-2;1)$, $\overline{b}(-1;1;-2)$, $\overline{c}(2;1;-3)$, $\overline{d}(11;6;-5)$.

№ 36 Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $\left(1;\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(5;\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(2{,}5;\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $(6;\,\pi)$, $\left(3;\,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};\,-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Визначити декартові координати цих точок.

№ 37 Знайти полярні координати точок, симетричних із точками $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$: 1) щодо полюса; 2) щодо полярної осі.

№ 38 Побудувати точки, полярні кути яких дорівнюють 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а відповідні радіус-вектори обчислюються з рівняння $\rho = a\cos 2\varphi$. Отримані точки з'єднати плавною кривою.

№ 39 Щоб зрівноважити тіло, вага якого рівна *P*, на похилій площині, що утворює з горизонтальною площиною кут *α*, потрібно застосувати силу $Q = P\sin\alpha$ (рис. 4). Сила Q одного і того ж самого вантажу *P* залежить від кута нахилу *α*. Виразити цю залежність графічно, користуючись полярними координатами.

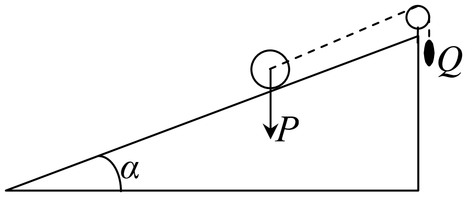

Рисунок 4 – Рисунок до задачі № 39

№ 40 Дано ромб $ABCD$, O – точка перетину його діагоналей. Приймаючи за початок координат точку *A*, а за базис – вектори $\overline{AO}$ і $\overline{AB}$, знайти в цій системі координат координати всіх вершин ромба.

№ 41 Вершина *O* тетраедра *OABC* прийнята за початок координат, вектори $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OL}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин тетраедра, де L, M, N – середини ребер *AC*, *AB*, *BC* відповідно.

№ 42 Вершина *O* тетраедра *OABC* прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати центрів ваги всіх граней тетраедра.

№ 43 Вершина *A* паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин паралелепіпеда.

№ 44 По горизонтальній балці, яка лежить на двох опорах *A* і *B*, йде людина. Тиск, якому піддається опора *B*, змінюється в залежності від положення людини на балці. Зобразити графічно залежність між цим тиском і відстанню людини від іншого кінця балки *A* при наступних чисельних даних: вага балки $P = 120$ кг, довжина її $l = 5$м, вага людини $p = 65$ кг.

№ 45 Найпростіший підіймальний пристрій складається з барабану і колеса, які обертаються на горизонтальній осі. На барабан намотана мотузка, до кінця якої підвішений вантаж *Q*, а колесо обмотане мотузкою, за яку тягнуть, щоб підняти вантаж. Сила *P*, яку при цьому треба застосувати, обчислюється за формулою $P = \frac{r}{R} \cdot Q$, де *r* – радіус барабану, *R* – радіус колеса. Зобразити графічно залежність між силою *P* і радіусом колеса *R*, якщо $r = 19$ см і $Q = 12$ кг (вага відра води).

2 ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Скалярний добуток двох векторів

Пряма l із заданим на ній напрямком, прийнятим за додатний, називається *віссю*.

Проекцією вектора $\overline{a}$ *на вісь* l називається число, яке позначається $\text{пр}_l\overline{a}$ і дорівнює $|\overline{a}|\cos\varphi$, де φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ – кут між додатним напрямком осі l й напрямком вектора $\overline{a}$, тобто за означенням $\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cos\varphi$.

При використанні векторів у фізиці складові вектора на осях координат називають *векторними проекціями на осі координат.* Координати складових на осях, тобто координати вектора, називають *скалярними проекціями,* або, коротко, *проекціями вектора на осі координат,* і позначають $\text{пр}_x \overline{a}$, $\text{пр}_y \overline{a}$, $\text{пр}_z \overline{a}$.

У прикладних питаннях вектор нерідко задають модулем і кутами, які вектор утворює з осями координат (точніше з ортами на цих осях). У цьому випадку координати (проекції) вектора $\overline{a}$ на площині обчислюються за формулами:

$$x = \text{пр}_x \overline{a} = |\overline{a}| \cos\alpha; \; y = \text{пр}_y \overline{a} = |\overline{a}| \sin\alpha,$$

де α – кут між вектором $\overline{a}$ і віссю *Ox.* У просторі мають місце аналогічні формули:

$$x = \text{пр}_x \overline{a} = |\overline{a}| \cos\alpha; \; y = \text{пр}_y \overline{a} = |\overline{a}| \cos\beta; \; z = \text{пр}_z \overline{a} = |\overline{a}| \cos\gamma,$$

де α, β, γ – кути між вектором $\overline{a}$ і відповідними осями координат; x, y, z – координати вектора $\overline{a}$. Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами* векторів, для яких має місце співвідношення: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Скалярним добутком $(\overline{a}, \overline{b})$ двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними: $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$. Якщо хоча б один з векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ є нульовим, тоді вважають $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$. Іноді для скалярного добутку $(\overline{a}, \overline{b})$ користуються іншим позначенням: $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Властивості скалярного добутку:

Властивість 1 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ скалярний добуток $(\overline{a}, \overline{b})$ комутативний: $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$.

Властивість 2 Для будь-якого вектора $\overline{a}$ скалярний добуток вектора $\overline{a}$ на себе дорівнює квадрату довжини цього вектора: $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2$.

Помітимо, що скалярний добуток $(\overline{a}, \overline{a})$ прийнято називати *скалярним квадратом* вектора $\overline{a}$ й позначати так: $\overline{a}^2$. Згідно з властивістю 2 довжина вектора $\overline{a}$ буде: $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}$.

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і будь-якого дійсного числа α вірні рівності: $(\alpha\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \alpha\overline{b}) = \alpha(\overline{a}, \overline{b})$.

Властивість 4 Якщо $\overline{a} \neq \overline{0}$ і $\overline{b} \neq \overline{0}$, а $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, то $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ортогональні.

Властивість 5 Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$

$$(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c}).$$

Наслідок Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$

$$(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c} + \overline{d}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{a}, \overline{d}) + (\overline{b}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{d}).$$

Легко переконатися в тому, що базис $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ є ортонормованим тоді й тільки тоді, коли мають місце рівності:

$$(\overline{i}, \overline{i}) = 1, \; (\overline{j}, \overline{j}) = 1, \; (\overline{k}, \overline{k}) = 1, \; (\overline{i}, \overline{j}) = 0, \; (\overline{i}, \overline{k}) = 0, \; (\overline{j}, \overline{k}) = 0. \qquad (1)$$

Ортом ненульового вектора $\overline{a}$ називають вектор $\overline{a}_0$, який має одиничну довжину, а його напрямок збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, тобто $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$.

Теорема 1 Скалярний добуток двох векторів, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат співмножників, тобто для $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \tag{2}$$

Наслідок 1 Довжина вектора $\overline{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі обчислюється за формулою

$$|\overline{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \tag{3}$$

Наслідок 2 Необхідною й достатньою умовою ортогональності ненульових векторів $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами є рівність

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \tag{4}$$

Наслідок 3 В ортонормованому базисі кут між двома векторами $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}},\ \overline{a} \neq \overline{0},\ \overline{b} \neq \overline{0}. \tag{5}$$

Наслідок 4 Декартові координати вектора $\overline{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі декартової системи координат:

$$\alpha = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{a},\ \beta = \text{пр}_{\overline{j}}\overline{a},\ \gamma = \text{пр}_{\overline{k}}\overline{a}.$$

Наслідок 5 Напрямні косинуси вектора $\overline{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі визначаються формулами:

$$\cos(\overline{a},\wedge\ \overline{i}) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad \cos(\overline{a},\wedge\ \overline{j}) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

$$\cos(\overline{a},\wedge\ \overline{k}) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Теорема 2 $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$.

Теорема 3 Якщо вектор зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *M*, а вектор $\overline{a}$ йде з деякої точки *O* в точку *M*, то робота цієї сили визначається формулою $A = \overline{F} \cdot \overline{MO}$.

Векторний добуток векторів

Векторним *добутком* двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, довжина якого $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Якщо $|\overline{c}| \neq 0$, то вектор $\overline{c}$ є перпендикулярним до векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і спрямований так, щоб трійка векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ виявилася правою. Векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають так: $[\overline{a}, \overline{b}]$ або $\overline{a} \times \overline{b}$. Якщо $\overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$, то вважають $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$.

Нехай $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – ортонормований базис. Визначимо векторні добутки цих векторів:

$$[\overline{i}, \overline{i}] = \overline{0},\ [\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k},\ [\overline{i}, \overline{k}] = -\overline{j},\ [\overline{j}, \overline{i}] = -\overline{k},\ [\overline{j}, \overline{j}] = \overline{0},\ [\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i},$$

$$[\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j},\ [\overline{k}, \overline{j}] = -\overline{i},\ [\overline{k}, \overline{k}] = \overline{0}. \tag{6}$$

Перейдемо до опису властивостей векторного добутку.

Властивість 1 Векторний добуток $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$ тоді й тільки тоді, коли вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні.

Властивість 2 Для будь-яких векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ векторний добуток $[\bar{a}, \bar{b}]$ антикомутативний, тобто $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ і будь-якого дійсного числа α:

$$\lambda[\bar{a}, \bar{b}] = [\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}].$$

Властивість 4 Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]; \qquad [\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}].$$

Відзначимо, що модуль векторного добутку $[\bar{a}, \bar{b}]$ має простий *геометричний зміст*: він дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах.

Нехай $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – правий ортонормований базис і нехай в цьому базисі відомі координати двох векторів $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Тоді координати вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ можна обчислити за формулою:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Теорема 4 Якщо вектор зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *M*, а вектор $\bar{a}$ йде з деякої точки *O* в точку *M*, то вектор $\overline{M_O} = \bar{a} \times \bar{F}$ являє собою момент сили *F* відносно точки *O*.

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називають число $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$.

Теорема 5 Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли один з векторів є нульовим або всі три вектори паралельні одній площині, тобто компланарні.

З означення мішаного добутку $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ випливають наступні його властивості.

Властивість 1 Мішаний добуток відмінних від нуля трьох некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ за абсолютним значенням дорівнює об'єму *V* паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. При цьому, якщо трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ права, то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = V$, якщо ж ліва, то $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -V$. Вірне й обернене твердження.

Властивість 2 При циклічній перестановці некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у мішаному добутку $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ останнє не змінюється, тобто $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$. При перестановці будь-яких двох векторів у мішаному добутку $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ останнє змінює знак, тобто

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}).$$

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$ та будь-яких дійсних чисел λ і μ

$$(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = \lambda(\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}) + \mu(\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}), \ (\bar{a}, \lambda\bar{b} + \mu\bar{c}, \bar{d}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}) + \mu(\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}),$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \lambda\bar{c} + \mu\bar{d}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) + \mu(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}).$$

Мішаний добуток векторів $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\bar{c}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, можна обчислити за формулою

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

ПРАКТИКА

Приклад 1 По похилій площині з кутом нахилу α рухається вниз брусок A масою m (рис. 1). Коефіцієнт тертя бруска до площини дорівнює μ. Визначити прискорення $\overline{a}$ бруска.

Розв'язання. На брусок діють три сили: сила тяжіння $\overline{F}_{\text{тяж}} = m\overline{g}$, сила тертя $\overline{F}_{\tau}$ і сила реакції опори $\overline{N}$. Напрямки цих сил показані на рис. 1. Разом ці сили й надають бруску прискорення $\overline{a}$, що напрямлене вздовж площини вниз. Щоб спростити рисунок, усі сили прикладені до центру бруска. Насправді, $\overline{F}_{\tau}$ і $\overline{N}$ прикладені до основи бруска.

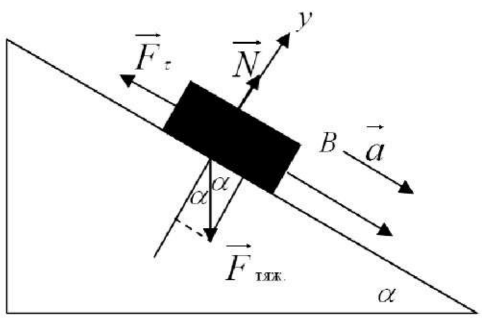

Рисунок 1 – Рисунок до прикладу 1

Спрямуємо осі координат Ox і Oy так, як показано на рис. 1. Другий закон Ньютона запишемо у векторній формі

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_{\tau},$$

а також у скалярній формі для проекції векторів, що входять до нього, на осі Ox і Oy.

Для проекцій на вісь Ox рівняння другого закону Ньютона запишеться так:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\tau}. \quad (*)$$

Для проекцій на вісь Oy маємо

$$0 = N - mg\cos\alpha \text{ або } N = mg\cos\alpha. \quad (**)$$

Оскільки сила тертя дорівнює μN, то, враховуючи (**), отримаємо $F_{\tau} = \mu mg\cos\alpha$. Підставляючи F_{τ} в (*), знайдемо:

$$\left|\,\overline{a}\,\right| = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Відповідь. $\left|\,\overline{a}\,\right| = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$.

Приклад 2 Дві однакові кульки підвішені на нитках завдовжки $l = 2$ м до однієї точки (рис. 2). Коли кулькам надали однакових зарядів по $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл, то вони розійшлися на відстань $r = 16$ см. Визначити натяг кожної нитки.

Розв'язання. На кожну кульку діють три сили: сила тяжіння $m\overline{g}$, сила пружності нитки $\overline{F}_{\text{пр}}$ і кулонівська сила $\overline{F}$.

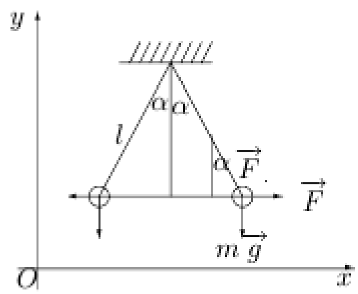

Рисунок 2 – Рисунок до прикладу 2

Кульки нерухомі, отже, сума проекцій відповідних сил на осі Ox і Oy дорівнює нулю. Для суми проекцій сил на вісь Ox ця умова має вигляд

$$A - A_{\text{пр}}\sin\alpha + mg\cos 90^{\circ} = 0.$$

Оскільки $\sin\alpha = \dfrac{r}{2l}$ і $F = k\dfrac{q^2}{r^2}$, то

$$F_{\text{пр}} = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F \cdot 2l}{r} = k\frac{q^2 \cdot 2l}{r^2} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Відповідь. $F_{\text{пр}} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н.

Приклад 3 Два однакових точкових заряди розміщені на відстані r один від одного в однорідному середовищі з діелектричною проникністю ε (рис. 3). Знайти напруженість електричного поля в точці, що розміщена на однаковій відстані r як від одного, так і від іншого заряду.

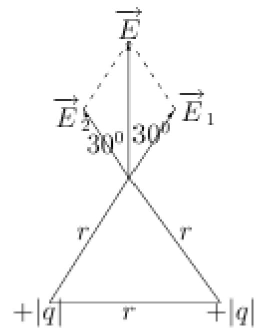

Рисунок 3 – Рисунок до прикладу 3

Розв'язання. Згідно з принципом суперпозиції, шукана напруженість $\overline{E}$ дорівнює геометричній напруженості полів, створених кожним із зарядів. Модулі напруженостей кожного заряду дорівнюють $E_1 = E_2 = k\dfrac{|q|}{\varepsilon r^2}$.

Діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\overline{E}_1$ та $\overline{E}_2$, є напруженістю результуючого поля, модуль якої дорівнює

$$E = eE_l \cos 30^\circ = 2k\frac{|q|}{\varepsilon r^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = k\frac{|q|\sqrt{3}}{\varepsilon r^2}.$$

Відповідь. $E = k\dfrac{|q|\sqrt{3}}{\varepsilon r^2}$.

Приклад 4 Задано вектори $\overline{a} = m\overline{i} + 8\overline{j} + 4\overline{k}$ і $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання. Скористаємось формулою (4):

$$4m + 8m - 28 = 0,\ m = \frac{7}{3}.$$

Відповідь. $m = \dfrac{7}{3}$.

Приклад 5 Знайти кут між векторами $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ і $\overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (5):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{2}{7}, \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Відповідь. $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

Приклад 6 Знайти орт вектора $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$.

Розв'язання. Знаходимо довжину вектора $\overline{a}$: $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$. Оскільки $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, то $\overline{a}_0 = \dfrac{1}{3}\overline{i} + \dfrac{2}{3}\overline{j} + \dfrac{2}{3}\overline{k}$.

Відповідь. $\overline{a}_0\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Приклад 7 До точки прикладені дві сили $\overline{P}$ і $\overline{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\overline{P}| = 7$, $|\overline{Q}| = 4$. Знайти величину рівнодійної сили $\overline{R}$.

Розв'язання. Оскільки $\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$, то

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{\overline{R}^2} = \sqrt{\left(\overline{P} + \overline{Q}\right)^2} = \sqrt{\overline{P}^2 + 2\overline{P}\,\overline{Q} + \overline{Q}^2} =$$
$$= \sqrt{\left|\overline{P}\right|^2 + 2\left|\overline{P}\right| \cdot \left|\overline{Q}\right| \cdot \cos 120^\circ + \left|\overline{Q}\right|^2} = \sqrt{37}\,.$$

Відповідь. $\left|\overline{R}\right| = \sqrt{37}$.

Приклад 8 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}(1;1;1)$, $\overline{b}(3;2;1)$, якщо координати векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані в правому ортонормованому базисі $\overline{i},\ \overline{j}, \overline{k}$.

Розв'язання. У випадку правого ортонормованого базису $\overline{i},\ \overline{j}, \overline{k}$ має місце формула (7), згідно з якою:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}\,.$$

Таким чином, $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = (-1;2;-1)$. Визначимо модуль вектора $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (кв. од).}$$

Відповідь. $S = \sqrt{6}$ (кв. од).

Приклад 9 В ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ задані вектори $\overline{a}(1;2;3)$, $\overline{b}(3;2;1)$, $\overline{c}(3;2;1)$. З'ясувати, чи є трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ правою. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання. Обчислимо мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ за формулою (8):

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12\,.$$

Оскільки $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) > 0$, то за властивістю 1 мішаного добутку векторів, трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – права й об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V = 12$ (куб. од.).

Відповідь. Трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – права і $V = 12$ (куб. од.).

Приклад 10 Обчислити роботу, що виконується силою $\overline{F} = (3;-5;2)$, коли точка прикладання переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}(2,-5,7)$.

Розв'язування. Якщо вектор зображає силу $\overline{F}$, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A = \left(\overline{F}, \overline{S}\right) = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot 7 = 45\,.$$

Відповідь. $A = 45$.

Приклад 11 Сила $\overline{P} = (2;-4;5)$ прикладена до точки $A(2;-1;1)$. Визначити момент цієї сили відносно початку координат.

Розв'язування. Якщо вектор $\overline{f}$ зображає силу, що прикладена в деякій точці *M*, а вектор $\overline{S}$ виходить з деякої точки *B* в точку *M*, то вектор $\left[\overline{S}, \overline{f}\right] = \overline{M}_f$ є моментом сили $\overline{f}$ відносно точки *B*, $\left[\overline{S}, \overline{f}\right]$ – векторний добуток векторів $\overline{S}$ і $\overline{f}$.

Оскільки вектор $\overline{OA}(2;-1;2)$, тоді момент сили $\overline{P}$ відносно початку координат буде:

$$\overline{M}_P=\left[\overline{OA},\ \overline{P}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=3\bar{i}-6\bar{j}-6\bar{k}\,.$$

Відповідь. $\overline{M}(3,-6,-6)$.

Приклад 12 Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ і $D(5;5;6)$.

Розв'язання. Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять із вершини A: $\overline{AB}(2;1;1)$, $\overline{AC}(2;3;2)$, $\overline{AD}(3;3;4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (8):

$$\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=24+6+6-9-12-8=7\,.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V=\dfrac{7}{6}$ (куб. од.).

Відповідь. $V=\dfrac{7}{6}$ (куб. од.).

Приклад 13 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$, $\angle(\bar{a},\bar{b})=30^\circ$.

Розв'язання. Маємо

$$\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)=\bar{a}\times(3\bar{a})+\left(3\bar{b}\right)\times(3\bar{a})+\bar{a}\times\bar{b}+\left(3\bar{b}\right)\times\bar{b}=$$
$$=3\cdot\bar{0}-9\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}+3\cdot\bar{0}=-8\bar{a}\times\bar{b}\,.$$

Отже,

$$S=\left|-8\bar{a}\times\bar{b}\right|=8\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=8\cdot1\cdot1\cdot\sin 30^\circ=4 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь. $S=4$ (кв. од.).

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Спростіть вираз:

1) $\left(2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}\right)\left(\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}\right)$; 2) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\left(\bar{a}-\bar{b}\right)$; 3) $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)^2+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2$;

4) $\bar{i}\times\bar{j}+\bar{i}\times\bar{k}-\bar{j}\times\bar{k}$; 5) $\bar{i}\times\bar{j}\times\bar{k}$; 6) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\left(\bar{c}+\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}\right)$;

7) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c}+\bar{a}\right)$; 8) $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$, якщо $\bar{a}\perp\bar{c}$ і $\bar{a}\perp\bar{b}$;

9) $\left(\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}\right)\cdot\left(2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}\right)\cdot\left(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}\right)$; 10) $\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}\right)$;

11) $\left(\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(3\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}\right)\cdot\left(7\bar{a}+14\bar{b}-13\bar{c}\right)$, якщо $\bar{a}^2=\bar{b}^2=\bar{c}^2=1$, $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}=\bar{0}$.

№ 2 Дано вектори $\bar{a}(2;3;0)$, $\bar{b}(-1;2;2)$, $\bar{c}(3;1;0)$. Знайдіть:

1) $\left(3\bar{a}-4\bar{b}\right)+\left(\bar{b}-3\bar{c}\right)+\left(2\bar{c}-\bar{a}\right)$; 2) $\left(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}\right)\left(-2\bar{a}-3\bar{b}\right)$; 3) $\left|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}\right|$;

4) $\angle\left(\bar{a},\bar{i}\right)$; 5) $\angle\left(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c},-2\bar{a}-3\bar{b}\right)$; 6) $\bar{a}\times\bar{b}$;

7) $\bar{a}\times\left(17\bar{a}+3\bar{b}\right)$; 8) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$; 9) $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}$;

10) одиничні вектори, які колінеарні вектору $\bar{b}+\bar{c}$;

11) одиничні вектори, які перпендикулярні векторам $\bar{b}$ і $\bar{c}$;

12) $\bar{x}$, якщо $\bar{a}=\bar{c}\times\bar{x}$; 13) $\bar{d}$, якщо $\bar{d}\perp\left(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}\right), \bar{d}\perp\left(-2\bar{a}-3\bar{b}\right), \left|\bar{d}\right|=1$.

№ 3 Визначити внутрішні кути трикутника з вершинами $A(0;0;5)$, $B(1;1;1)$ і $C(-1;2;3)$.

№ 4 Одиничні вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ утворюють трикутник. Обчислити $\left(\bar{a},\bar{b}\right)+\left(\bar{b},\bar{c}\right)+\left(\bar{a},\bar{c}\right)$.

№ 5 Знайти вектор $\bar{x}$, колінеарний до вектора $\bar{a}(1,-1,2)$, знаючи, що $\left|\bar{x}\right|=3\sqrt{6}$ і він утворює з віссю Ox тупий кут.

№ 6 Знайти вектор $\bar{x}$, перпендикулярний до осі Oy та до вектора $\bar{a}(1,2,-3)$ з модулем $3\sqrt{10}$.

№ 7 Знайти вектор $\bar{x}$, перпендикулярний до векторів $\bar{a}(1,1,2)$ і $\bar{b}(3,1,2)$ та задовольняє умову $\left(\bar{x}, 3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}\right)=-6$.

№ 8 Обчислити проекцію вектора $\bar{a}=5\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

№ 9 Дано три вектори $\bar{a}(7,-6,1)$, $\bar{b}(2,-3,-6)$ і $\bar{c}(3,-4,12)$. Обчислити $\text{пр}_{\bar{b}}\left(\bar{a}+\bar{c}\right)$.

№ 10 Задано вектори, що збігаються зі сторонами трикутника *ABC*, $\overline{AB}=5\bar{i}+2\bar{j}$ і $\overline{BC}=-2\bar{i}+4\bar{j}$. Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з точки *A*.

№ 11 Обчислити роботу, що її виконує сила $\bar{f}(4;5;2)$, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилася із положення $A(3;-7;1)$ у положення $B(6;-1;-2)$.

№ 12 Дано три сили: $\bar{f}_1(3;-4;2)$, $\bar{f}_2(2;3;-5)$, $\bar{f}_3(-3;-2;4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилася з точки $A(5;3;-7)$ у точку $B(4;-1;-4)$.

№ 13 Маса *m*, зосереджена в точці $A(x;y;z)$, притягується, згідно з законом Ньютона, до маси *M*, що зосереджена в початку координат. Знайти силу тяжіння.

№ 14 У початку координат розміщений заряд *q*. Визначити в довільній точці $M(x;y;z)$ простору напругу *E* електростатичного поля, утвореного цим зарядом.

№ 15 До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$, кут між якими *α*. Знайти величину рівнодійної.

№ 16 Дано точки *A*(3,1, 2), *B*(4, 0,1) і *C*(5,4, 7). Обчислити площу трикутника *ABC*.

№ 17 Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ та $\bar{b}=4\bar{i}+5\bar{j}+3\bar{k}$.

№ 18 Довести, що вектор $\bar{p}=\bar{b}\left(\bar{a},\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a},\bar{b}\right)$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}$.

№ 19 Довести, що вектор $\bar{p}=\bar{b}-\dfrac{\bar{a}\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{\bar{a}^2}$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}$.

№ 20 Дано, що $\left|\bar{a}\right|=3$, $\left|\bar{b}\right|=5$. Визначити, при якому значенні *α* вектори $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ і $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

№ 21 Якій умові повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, щоб вектор $\bar{a}+\bar{b}$ був перпендикулярний до вектора $\bar{a}-\bar{b}$.

№ 22 Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, обчислити: 1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) $\bar{a}^2$; 3) $\bar{b}^2$; 4) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; 5) $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$; 6) $(\bar{a} - \bar{b})^2$; 7) $(3\bar{a} + 2\bar{b})^2$.

№ 23 Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\bar{c}$ утворює з ними кути, рівні $\dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $|\bar{c}| = 8$, обчислити: 1) $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{b} + 3\bar{c})$; 2) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2$; 3) $(\bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c})^2$.

№ 24 Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$, обчислити кут між векторами $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$.

№ 25 Дано вектори $\bar{a}(4; -2; -4)$, $\bar{b}(6; -3; 2)$. Обчислити: 1) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; 2) $\sqrt{\bar{a}^2}$; 3) $\sqrt{\bar{b}^2}$; 4) $(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b})$; 5) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; 6) $(\bar{a} - \bar{b})^2$.

№ 26 Дано точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2 -1; 5)$ і $C(0; 1; -5)$. Обчислити: 1) $(2\overline{AB} - \overline{CB}) \cdot (2\overline{BC} + \overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

№ 27 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}$ і $\bar{b} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, якщо $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

№ 28 Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, обчислити: 1) $(\bar{a} \times \bar{b})^2$; 2) $((2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b}))^2$; 3) $((\bar{a} + 3\bar{b}) \times (3\bar{a} - \bar{b}))^2$.

№ 29 Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, обчислити: 1) $|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|$; 2) $|(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})|$.

№ 30 Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1\ 2; -1)$ і $C(3; 2; 1)$. Знайти координати векторних добутків: 1) $\overline{AB} \times \overline{BC}$; 2) $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.

№ 31 З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори?

1) $\bar{a}(2, 1, 2)$, $\bar{b}(3, -2, 1)$ і $\bar{c}(3, -1, -2)$; 2) $\bar{a}(2, -2, -3)$, $\bar{b}(2, 0, 3)$ і $\bar{c}(1, 1, 1)$.

№ 32 Знайти об'єм тетраедра за вершинами $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$.

№ 33 Знайти довжину висоти тетраедра з вершинами $A(1; 0; 6)$, $B(4; 5; -2)$, $C(7; 3; 4)$, $D(-1; 2; 1)$, опущеної з вершини D.

№ 34 Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

№ 35 Обчислити $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$, якщо

1) $\bar{a}(1, 2, -1)$, $\bar{b}(2, 1, -2)$, $\bar{c}(3, 1, -1)$; 2) $\bar{a}(3, 2, 1)$, $\bar{b}(0, 1, -1)$, $\bar{c}(-1, 1, 1)$.

№ 36 Обчислити $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} - \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, якщо $\bar{a}(1, -1, 3)$, $\bar{b}(-2, 2, 1)$, $\bar{c}(3, -2, 5)$.

№ 37 Сила $\bar{f}(2; -4; 3)$ прикладена до точки $A(1; 5; -2)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(5; -3; 4)$.

№ 38 Знайти момент сили відносно точки $A(3;-2;1)$, якщо ця сила прикладена до точки $B(2;-1;3)$, причому $\left|\bar{f}\right|=5$ і $\bar{f}\parallel\bar{a}$, де $\bar{a}(2,1,-2)$.

№ 39 Сила $\bar{f}(2;2;9)$ прикладена до точки $A(4;2;-3)$. Визначити величину та напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $B(2;4;0)$.

№ 40 По нескінченному прямолінійному провіднику тече струм із силою $\bar{I}$. Знайти в будь-якій точці простору напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного цим струмом, використовуючи при визначенні напрямку вектора напруженості $\overline{H}$ правило свердлика.

Використовуючи розв'язок задачі 40., розв'язати задачі 41, 42, 43:

№ 41 Обчислити в будь-якій точці простору напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом, що тече по прямолінійному провіднику, якщо напрямок провідника збігається з напрямком 1) осі Ox; 2) осі Oy; 3) осі Oz.

№ 42 Обчислити в точці $M(-3;4;2)$ напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\bar{I}=-3\bar{k}$, який тече по прямолінійному провіднику. Знайти орт вектора $\overline{H}$.

№ 43 Обчислити в точці $M(2;5;0)$ напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\bar{I}=-2\bar{i}$, який тече по прямолінійному провіднику, та знайти напрямні косинуси вектора $\overline{H}$.

№ 44 Вантаж вагою $\overline{P}$, підвішений на нитці до нерухомої точки, затримується горизонтальною силою $\overline{Q}$ в положенні, при якому нитка утворює з вертикаллю кут 45°. Знайти величину горизонтальної сили $\left|\overline{Q}\right|$ і натягу $\left|\overline{T}\right|$ нитки.

3 ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Таблиця 1 – Основні види рівнянь прямої на площині

Назва рівняння	**Рівняння**
Загальне рівняння прямої	$Ax+By+C=0$
Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(A,B)$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно вектору $\bar{a}(a_x,a_y)$ – напрямний вектор прямої	$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно вектору $\bar{a}(a_x,a_y)$	$\begin{cases} x-x_0=a_x t, \\ y-y_0=a_y t \end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
Рівняння прямої *у відрізках на осях*	$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$
Нормальне рівняння прямої	$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y=kx+b$

Формула відстані від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Таблиця 2 – Формули для обчислення кута між двома прямими й умов взаємного розташування двох прямих

Назва формули (умови)	**Види рівнянь прямих**		
	Загальний: $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$	**Канонічний:** $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}$ і $\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}$	**З кутовим коефіцієнтом:** $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$
Кут θ між двома прямими	$\cos\theta=\frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2\rvert}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}$	$\cos\theta=\frac{\lvert a_xb_x+a_yb_y\rvert}{\sqrt{(a_x^2+b_x^2)(a_y^2+b_y^2)}}$	$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
Умова перпендикулярності	$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$	$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0$	$k_1\cdot k_2=-1$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ $(C_1\neq C_2)$	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}$	$k_1=k_2$

ПРАКТИКА

Приклад 1 На площині заданий ΔABC з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,-4)$, $C(-8,-2)$. Потрібно знайти: 1) довжину сторони *BC*; 2) скласти загальне рівняння медіани, висоти та бісектриси кута *A*; 3) знайти відстань вершини *B* від медіани; 4) знайти кут між медіаною і висотою (у градусах).

Розв'язання.

1) Знайдемо координати вектора $\overline{BC}(-9,2)$ та його довжину: $BC=\sqrt{(-9)^2+2^2}=\sqrt{81+4}=\sqrt{85}$.

2) Медіана кута *A* ділить сторону *BC* навпіл, тому координати Точки *M* – середини *BC* будуть: $M\left(\frac{-1-8}{2},\frac{-4-2}{2}\right)$, $M\left(-\frac{9}{2},-3\right)$. Тепер складемо рівняння медіани як рівняння прямої за двома точками:

$$AM:\ \frac{x+1}{-\frac{9}{2}+1}=\frac{y-0}{-3-0},$$

$$\frac{x+1}{-\frac{7}{2}}=\frac{y}{-3},$$

$$-3(x+1)=-\frac{7}{2}y,$$

$$-3x-3+\frac{7}{2}y=0,$$

$6x-7y+6=0$ – загальне рівняння медіани кута *A*.

Висота кута *A* – це перпендикуляр до сторони *BC*, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої BC, тобто $\overline{n}_h(-9,2)$. Складемо рівняння висоти кута A за точкою та нормальним вектором:

$$-9(x+1)+2(y-0)=0,$$

$$-9x-9+2y=0,$$

$$9x-2y+9=0$$ – загальне рівняння висоти кута A.

Бісектриса кута A ділить сторону BC у відношенні, пропорційному відношенню прилеглих сторін, тобто $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$, N – основа бісектриси. Будемо мати: $\frac{BN}{NC}=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}}$, $\frac{BN}{NC}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}$. Тепер знайдемо координати Точки N, використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні:

$$x_N=\frac{-1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-10)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},$$

$$y_N=\frac{-6+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-4)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}.$$

Тепер складемо рівняння бісектриси кута A за двома точками $A(-1,0)$ та $N\left(\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}\right)$:

$$AN:\ \frac{x+1}{\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}+1}=\frac{y-0}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}-0},$$

$$\frac{x+1}{\frac{-18\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}}=\frac{y}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}},$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)(x+1)=\left(-18\sqrt{5}\right)y,$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)x+18\sqrt{5}y-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}=0$$

– загальне рівняння бісектриси кута A.

3) Відстань вершини B від медіани знайдемо за формулою відстані від точки до прямої. Будемо мати:

$$d=\frac{|6\cdot1-7\cdot(-4)+6|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{36+49}}=\frac{40}{\sqrt{85}}=\frac{8\sqrt{85}}{17}.$$

4) Знайдемо кут між медіаною й висотою за формулою:

$$\cos\left(\widehat{AM,h}\right)=\cos\left(\widehat{\overline{n}_{AM},\overline{n}_h}\right)=\frac{\overline{n}_{AM}\cdot\overline{n}_h}{|\overline{n}_{AM}|\cdot|\overline{n}_h|}.$$

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\cos\left(\widehat{AM,h}\right)=\frac{6\cdot 9+(-7)\cdot(-2)}{\sqrt{6^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{9^2+(-2)^2}}=\frac{68}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{85}}=\frac{68}{85}\approx 0{,}8,\ \ \angle(AM,h)\approx 37^\circ.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Визначити, які з точок $A_1(1;-2)$, $A_2(1;1)$ та $A_3(3;-4)$ лежать на прямій $x+2y-3=0$.

№ 2 Знайти відрізки, що відтинає пряма $x-3y+6=0$ на осях координат.

№ 3 Сторони *AB*, *BC* і *AC* трикутника *ABC* задані відповідно рівняннями $2x-3y-1=0$, $3x-4y-1=0$ та $x-y-1=0$. Визначити координати його вершин.

№ 4 Сила, прикладена в початку координат. Складові її на координатних осях відповідно дорівнюють 5 і –2. Знайти рівняння прямої, вздовж якої напрямлена сила.

№ 5 Через точку *P*(–1; 3) провести пряму, перпендикулярну до прямої $4x-2y+3=0$.

№ 6 Через точку *P*(1; 2) провести пряму, перпендикулярну до прямої $5x+2y-11=0$.

№ 7 Знайти проекцію точки *P*(1; –2) на пряму $3x-y-9=0$.

№ 8 Знайти точку, симетричну точці *P*(8; –9) відносно прямої, що проходить через точки *A*(3; –4) і *B*(–1; –2).

№ 9 Промінь світла, що має напрямок прямої $x+5y=0$, падає на дзеркало, що визначається рівнянням $2x-y+5=0$. Написати рівняння відбитого променя.

№ 10 Через точку перетину прямих $x+2y-1=0$ і $2x+y-4=0$ провести пряму, яка:

1) проходить через точку *M* (–1; 3);
2) паралельна осі *Oy*;
3) перпендикулярна до прямої $x-2y+11=0$.

№ 11 Обчислити відстань від точки *P* до прямої:

1) *P*(–2; 1), $4x-3y-2=0$; 2) *P*(3; –2), $12x+5y-3=0$;
3) *P*(0; 1), $x-2y+1=0$.

№ 12 Знайти точку *Q*, симетричну точці *P*(–5; 13) відносно прямої $2x-3y-3=0$.

4 ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Таблиця 1 – Основні види рівнянь площини

Назва рівняння, необхідні компоненти	**Рівняння**
Загальне рівняння площини	$Ax+By+Cz+D=0$
Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A,B,C)$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
Детермінантне рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
Нормальне рівняння площини	$\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$
Рівняння площини *у відрізках на осях*	$\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1$

Формула відстані від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Нехай дано дві площини: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Таблиця 2 – Формули для обчислення кута між двома площинами, взаємного розташування двох площин у просторі

Назва формули (умови)	**Формула**
Величина двогранного кута θ між двома площинами	$\cos\theta=\frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
Умова перпендикулярності	$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$

ПРАКТИКА

Приклад 1 Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Потрібно знайти: 1) рівняння грані $A_1A_2A_3$; 2) довжину висоти піраміди, яка проходити через вершину A_4.

Розв'язання.

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ -1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$x+1=0,$$

$x+1=0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

2) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань вершини A_4 від грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d=\frac{|1\cdot5+0\cdot2+0\cdot10+1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{6}{\sqrt{1+0+0}}=\frac{6}{1}=6.$$

Приклад 2 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-1;-5)$ і перпендикулярна площинам $3x-2y+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язання. Оскільки за нормальний вектор $\bar{n}$ шуканої площини можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\bar{n}_1(3;-2;2)$ і $\bar{n}_2(5;-4;3)$ заданих площин, то

$$\bar{n}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=2\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}.$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(2,1,-2)$. Отримаємо

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ або } 2x+y-2z-15=0.$$

Приклад 3 Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1=0$ та $x+2y+z=0$.

Розв'язання. Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$, тоді нормальні вектори площин $\overline{n}_1(2;-1;3)$ і $\overline{n}_2(1;2;1)$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\overline{n}(A, B, C)$, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases} 2A-B+3C=0, \\ A+2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{7}{5}C, \\ B=\dfrac{1}{5}C. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд

$$-\frac{7}{5}Cx+\frac{1}{5}Cy+Cz=0.$$

Оскільки $C\neq 0$, то рівняння площини $7x-y-5z=0$.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2;3;-5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

№ 2 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(0;\ 2;\ 1)$ і паралельна векторам $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ та $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$.

№ 3 Перевірити, які з точок $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ -2;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 2)$, $D(3;\ 0;\ 3)$ та $E(5;-7;11)$ лежать на площині $2x-3y+z-9=0$.

№ 4 Визначити координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 0)$ і $C(1;\ 5;\ -2)$.

№ 5 Скласти рівняння площини, якщо точки $A(1;\ -2;\ 0)$ і $B(3;\ 2;\ 6)$ симетричні відносно неї.

№ 6 Скласти рівняння площини, якщо точка $A(-1;\ 2;\ 3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину.

№ 7 Площина проходить через точки $A(1;\ 2;\ 1)$ та $B(0;\ 3;\ -1)$ паралельно до осі Oz. Написати її рівняння.

№ 8 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-1;\ 2;\ 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a=2$, $b=-1$.

№ 9 Через точку $P(1;\ 2;\ -1)$ провести площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.

№ 10 Через лінію перетину площин $x+y-z+5=0$ та $2x+y+z-3=0$ провести площину, яка:

1) проходить через точку $M(-1;\ 3;\ 4)$;
2) паралельна осі Oy;
3) перпендикулярна до площини $3x-y+2z-11=0$;
4) утворює з площиною $x-2y+2z-17=0$ кут $\alpha=\arccos\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

№ 11 Через точку перетину площин $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$ та $2x-3y+2z-9=0$ провести площину, яка:

1) проходить через точки $P_1(1;2;4)$ і $P_2(-1;3;1)$;

2) проходить через вісь Oy;

3) проходить через пряму $\begin{cases} y+2=0, \\ x+2z+1=0; \end{cases}$

4) паралельна площині $3x-5y+8z-19=0$;

5) перпендикулярна до площин $y=0$ і $2x+3z-11=0$.

№ 12 Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

5 ПРЯМА У ПРОСТОРІ

Таблиця 1 – Основні види рівнянь прямої в просторі

Назва рівняння, необхідні компоненти	**Рівняння**
Загальне рівняння прямої як перетину двох площин; напрямний вектор прямої має координати $\overline{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x,a_y,a_z)$ – напрямний вектор прямої	$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x,a_y,a_z)$	$\begin{cases} x-x_0=a_xt, \\ y-y_0=a_yt, \\ z-z_0=a_zt \end{cases}$

Формула відстані від точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$:

$$d=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\overline{a}\right|}{|\overline{a}|}.$$

Нехай задані дві прямі: $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ і $\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}=\frac{z-z_2}{b_z}$.

Таблиця 2 – Формули для обчислення відстані й кута між двома прямими, взаємного розташування двох прямих у просторі

Назва формули	**Формула**
Відстань між двома прямими	$\rho=\frac{\left|\left(\overline{M_1M_2},\overline{a}_1,\overline{a}_2\right)\right|}{\left|\overline{a}_1\times\overline{a}_2\right|}$

Кут θ між двома прямими в просторі	$\cos\theta = \dfrac{\left\|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right\|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$
Умова перпендикулярності	$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$
Умова паралельності	$\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$

Пряма й площина в просторі

Нехай дано пряма в канонічному виді: $\dfrac{x - x_1}{a_x} = \dfrac{y - y_1}{a_y} = \dfrac{z - z_1}{a_z}$ і площина в загальному виді $Ax + By + Cz + D = 0$.

Таблиця 3 – Формули для обчислення кута між прямою і площиною в просторі, взаємного розташування прямої і площини в просторі

Назва формули	**Формула**
Кут θ між прямою і площиною в просторі	$\sin\theta = \dfrac{\left\|A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z\right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямої і площини	$\dfrac{A}{a_x} = \dfrac{B}{a_y} = \dfrac{C}{a_z}$
Умова паралельності прямої і площини	$A \cdot a_x + B \cdot a_y + C \cdot a_z = 0$

ПРАКТИКА

Приклад 1 Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Потрібно знайти: 1) рівняння висоти піраміди, яка проходити через вершину A_4; 2) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання.

3) Висота піраміди, яка проходить через вершину A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\bar{a}_{A_4D}(1,0,0)$. Складемо рівняння висоти A_4D за точкою та напрямним вектором

$A_4D:\ \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-10}{0}$ – канонічне рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4.

4) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$\sin\left(A_1A_4,\ ^\wedge\ A_1A_2A_3\right) = \sin\left(\bar{a}_{A_1A_4},\ ^\wedge\ \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right) = \frac{\left|\bar{a}_{A_1A_4} \cdot \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}{\left|\bar{a}_{A_1A_4}\right| \cdot \left|\bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}.$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $\bar{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$.

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\sin\left(A_1A_4, \widehat{A_1A_2A_3}\right) = \frac{|6\cdot 1 + 2\cdot 0 + 9\cdot 0|}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{6}{\sqrt{121\cdot 1}} = \frac{6}{11} \approx 0{,}545,$$

$$\angle(A_1A_4, A_1A_2A_3) \approx 33^\circ.$$

Приклад 2 Точка $M(x;\, y;\, z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкової точки $M_0(11;\,-21;\,20)$ в напрямку вектора $\bar{s}(-1;\,2;\,-2)$ зі швидкістю $v=12$. Визначити, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, який міститься між площинами $2x+3y+5z-41=0$, $2x+3y+5z+31=0$.

Розв'язання. Рівняння траєкторії руху має вигляд

$$\frac{x-11}{-1} = \frac{y+21}{2} = \frac{z-20}{-2} \text{ або } \begin{cases} x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину траєкторії з площинами. Для цього розв'яжемо системи:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x+3y+5z-41=0, \\ x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}$$

Підставляючи вирази для x, y, z у перше рівняння, маємо:

$$-2t+22+6t-63-10t+100-41=0 \text{ або } 6t=18,\ t=3.$$

Отже, $x_1=8$, $y_1=-15$, $z_1=14$.

$$\text{б) } \begin{cases} 2x+3y+5z+31=0, \\ x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо $t=15$, $x_2=4$, $y_2=9$, $z_2=-10$. Отже, точками перетину паралельних площин траєкторією будуть $A(8;\,-15;\,14)$, $B(-4;\,9;\,-10)$. Довжина відрізка

$$AB = \sqrt{(8+4)^2+(-15-9)^2+(14+10)^2} = 36.$$

Оскільки час $t=\dfrac{|AB|}{v}$, то $t=\dfrac{36}{12}=3$.

Приклад 3 З початку координат опустити перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

Розв'язання. Оскільки напрямний вектор прямої $\bar{a}(2;\,3;\,1)$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x+3y+z=0.$$

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{1}, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-2=2t, \\ y-1=3t \\ z-3=t, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{5}{7}, \\ x=\dfrac{4}{7}, \\ y=\dfrac{6}{7}, \\ z=\dfrac{16}{7}. \end{cases}$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $O(0, 0, 0)$ і $M\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{6}{7}; \dfrac{16}{7}\right)$:

$$\frac{x}{4/7} = \frac{y}{6/7} = \frac{z}{16/7} \text{ або } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{8}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Знайти проекцію точки $P(2; -1; 3)$ на пряму $\begin{cases} x=3t, \\ y=5t-7, \\ z=2t. \end{cases}$

№ 2 Знайти точку Q, симетричну точці $P(4; 1; 6)$ відносно прямої $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

№ 3 Знайти точку S, симетричну точці $P(1; -2; -6)$ відносно прямої $\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-z+2=0. \end{cases}$

№ 4 Дано рівняння руху точки $M(x; y; z)$

$$\begin{cases} x=3-4t, \\ y=5+3t, \\ z=-2+12t. \end{cases}$$

Визначити її швидкість v.

№ 5 Дано рівняння руху точки $M(x; y; z)$

$$\begin{cases} x=5-2t, \\ y=-3+2t, \\ z=5-t. \end{cases}$$

Визначити відстань d, яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1=0$ до $t_2=7$.

№ 6 Скласти рівняння руху точки $M(x; y; z)$, яка, маючи початкове положення $M_0(3; -1; -5)$, рухається прямолінійно й рівномірно в напрямку вектора $\bar{s}(-2; 6; 3)$ зі швидкістю $v=21$.

№ 7 Скласти рівняння руху точки $M(x; y; z)$, яка, рухаючись прямолінійно пройшла відстань від точки $M_1(-7; 12; 5)$ до точки $M_2(9; -4; -3)$ за проміжок часу від $t_1=0$ до $t_2=4$.

№ 8 Точка $M(x; y; z)$ рухається прямолінійно й рівномірно з початкового положення $M_0(20; -18; -32)$ в напрямку, протилежному вектору $\bar{s}(-2; 6; 3)$, зі швидкістю $v=26$. Скласти рівняння руху точки M і визначити точку, з якою вона збігається в момент часу $t=3$.

№ 9 Точки $M(x; y; z)$ й $N(x; y; z)$ рухаються прямолінійно й рівномірно: перша з початкового положення $M_0(-5; 4; -5)$ зі швидкістю $v_M = 14$ в напрямку вектора $\bar{s}(3; -6; 2)$, друга з початкового положення $N_0(-5; 16; -6)$ зі швидкістю $v_N = 13$ в напрямку, протилежному вектору $\bar{r}(-4; 12; -3)$. Скласти рівняння руху кожної з точок і, переконавшись, що їхні траєкторії перетинаються, знайти:

1) точку *P* перетину їх траєкторій;
2) час, витрачений на рух точки *M* від M_0 до *P*;
3) час, витрачений на рух точки N від N_0 до *P*;
4) довжини відрізків M_0P і N_0P.

№ 10 Дано точки *A*(–3; 6), *B*(4; –1), *C*(–3; –5), *D*(–1; 2). Складіть рівняння:

1) прямої, що проходить через точки *B* і *C*;
2) прямої, що проходить через точку *A* й утворює кут 135° з віссю *x*;
3) прямої, що проходить через точку *D* перпендикулярно до прямої *BC*;
4) прямої, що проходить через точку *A* паралельно прямій *BC*;
5) прямої, яка симетрична прямій *BC* відносно початку координат;
6) прямої, яка симетрична прямій *BC* відносно осі *x*;
7) прямої, яка проходить через точку *B* і точку, що поділяє відрізок *AD* у відношенні 1:3, рухаючись від точки *A*;
8) прямої, яка складається з точок, рівновіддалених від точок *A* й *D*;
9) прямої, відрізок якої, що міститься між осями координат, ділиться точкою *D* навпіл;
10) прямої, яка проходить через точку *D* і відтинає на осі ординат відрізок довжиною 3.

№ 11 Дано прямі $l_1: 2x - 3y + 1 = 0$, $l_2: 3x - y - 4 = 0$ і $l_3: x + y + 1 = 0$. Знайдіть:

1) відстань від точки *A*(2; –1) до прямої l_1;
2) кут між прямими l_1 і l_2;
3) значення параметра *m*, при яких пряма $2x + my + 4 = 0$ перпендикулярна до прямої l_2;
4) значення параметра *p*, при яких пряма $px - y - p = 0$ збігається з прямою l_2;
5) знайдіть точку, симетричну точці *A*(2; –1) відносно прямої l_1.

№ 12 Дано точки *A*(1; –1; 1), *B*(1; 3; 1), *C*(4; 3; 1), *D*(4; –1; 1), *F*(2; 0; 1). Складіть рівняння:

1) площини, що проходить через точки *A*, *B*, *C*;
2) прямої, яка проходить через точку *A* й паралельна прямій *BC*;
3) площини, яка проходить через точку *A* й перпендикулярна до прямої *DF*;
4) прямої, яка проходить через точки *C* і *D*;
5) площини, яка проходить через точку *A* паралельно прямим *BC* і *DF*;
6) прямої, яка проходить через точку *D* перпендикулярно до площини (*ABC*);
7) прямої, яка проходить через точку *A* й паралельна площинам $2x - y + z - 1 = 0$ і $x + y + 2z + 1 = 0$;
8) площини, яка проходить через точки *B* і *C* паралельно прямій *DF*;
9) прямої, яка симетрична прямій *CD* відносно точки *A*.

№ 13 Дано площини $\alpha: 2x - y + z + 3 = 0$, $\beta: 3x - 2y - z - 1 = 0$, $\gamma: -4x + 2y - 2z + 1 = 0$ і прямі $l_1: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$, $l_2: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

1) Знайдіть відстань від точки $A(2; -1; 1)$ до площини α;
2) встановіть взаємне розташування площин α і β, β і γ, α і γ, прямої l_1 і площини β, прямих l_1 і l_2;
3) знайдіть відстань між площинами α і γ;
4) при яких значеннях параметра m площина α паралельна площині $2x - my + z = 0$;
5) знайдіть кути між площинами α і β, прямими l_1 і l_2;
6) при яких значеннях параметра p площини γ і $px - 2y + pz - 1 = 0$ перпендикулярні.
7) при яких значеннях параметра q пряма $\frac{x-q}{2} = \frac{y+1}{q} = \frac{z-1}{2}$ належить площині β;
8) при яких значеннях параметра k прямі l_1 і $\frac{x-k}{2} = \frac{y-2}{k} = \frac{z-1}{2}$ є мимобіжними?
9) знайдіть відстань між прямими l_1 і l_2.
10) знайдіть точку, симетричну точці $(1; -1; 0)$ відносно площини α.

6 ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Канонічне рівняння еліпса

Еліпс – геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок площини F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна і дорівнює $2a$.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = a^2 - c^2.$$

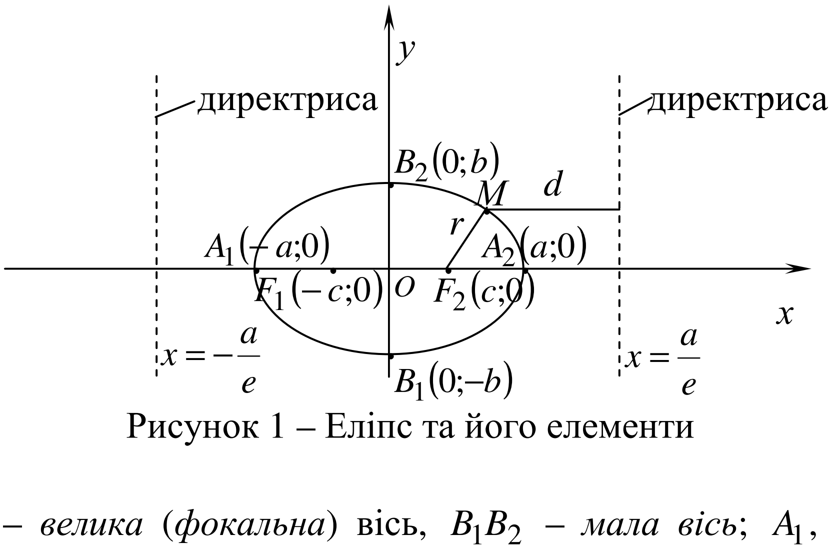

Рисунок 1 – Еліпс та його елементи

A_1A_2 – *велика* (*фокальна*) вісь, B_1B_2 – *мала вісь*; A_1, A_2, B_1 і B_2 – вершини (рис. 1);

$$0 \le e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1 \text{ – ексцентриситет.}$$

Директриси еліпса: $x=\frac{a}{e}$ (права), $x=-\frac{a}{e}$ (ліва).

Фокальні радіуси: $F_1M=a+ex$, $F_2M=a-ex$.

Рівняння *дотичної* в точці $M\left(x_1,y_1\right)$ еліпса: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Канонічне рівняння гіперболи

Гіпербола – геометричне місце точок площини, різниця відстаней від яких до двох даних точок площини F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна і дорівнює $2a$.

Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=c^2-a^2.$$

A_1A_2 – *дійсна вісь*, B_1B_2 – *уявна вісь*; A_1, A_2 – *вершини*;

$e=\frac{c}{a}<1$ – ексцентриситет; $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ – асимптоти.

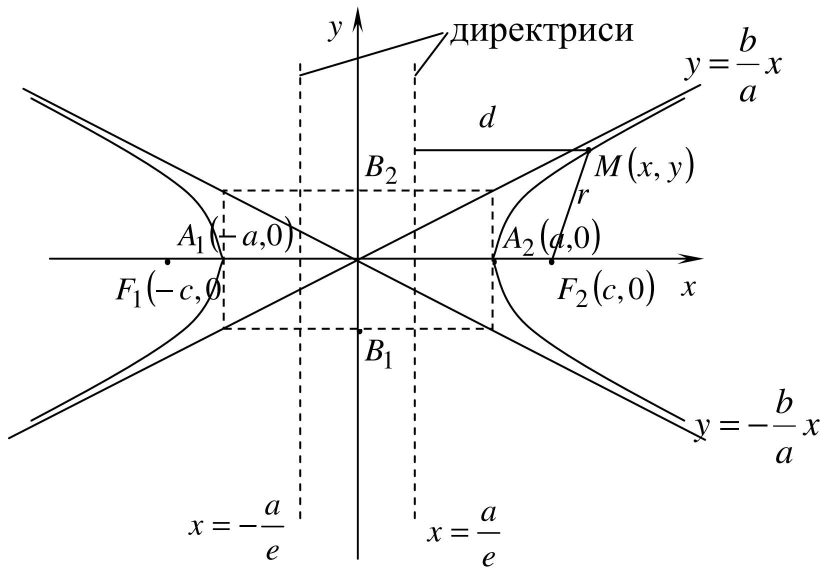

Рисунок 2 – Гіпербола та її елементи

Директриси: $x=\frac{a}{e}$ (права), $x=-\frac{a}{e}$ (ліва).

Фокальні *радіуси* для правої гілки гіперболи: $F_1M=ex+a$, $F_2M=ex-a$, для лівої: $F_1M=-\left(ex+a\right)$, $F_2M=-\left(ex-a\right)$.

Властивість директрис: відношення відстані r від правого фокуса F_2 до точки M правої гілки гіперболи до відстані d від цієї точки до правої директриси дорівнює ексцентриситету гіперболи, тобто $e=\frac{r}{d}$. Аналогічне твердження справедливе й для лівої гілки гіперболи.

Дотична до гіперболи в точці $M\left(x_1,y_1\right)$: $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Спряжена гіпербола $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ або $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$.

Канонічне рівняння параболи

Парабола – геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки F (фокуса) і даної прямої (директриси) (рис. 3).

Канонічне рівняння параболи: $y^2=2px$, p – відстань між фокусом і директрисою.

Ексцентриситет: $e=\dfrac{r}{d}=1$.

Дотична до параболи в точці $M(x_1, y_1)$: $yy_1=p(x+x_1)$.

Фокальний радіус: $FM=x+\dfrac{p}{2}$.

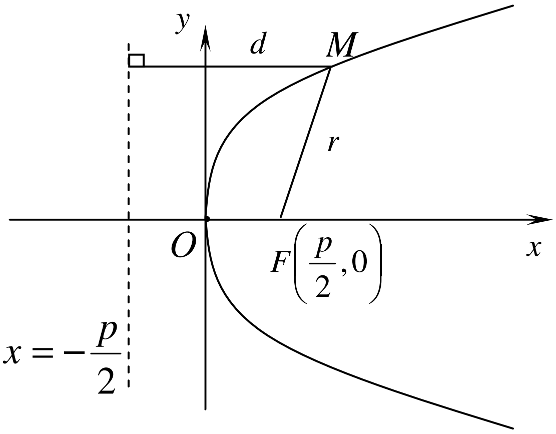

Рисунок 3 – Парабола та її елементи

ПРАКТИКА

Приклад 1 Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2;\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Це рівняння повинні задовольняти координати даних точок. Маємо

$$\begin{cases}\dfrac{25}{4a^2}+\dfrac{3}{8b^2}=1,\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=10,\\ b^2=1.\end{cases}$$

Отже, рівняння шуканого еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1.$$

Приклад 2 Задані точки $A(1;\ 0)$ і $B(2;\ 0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику AMB $\angle B$ у два рази більший за $\angle A$. Знайти рівняння кривої, яку описує точка M.

Розв'язування. Візьмемо точку M з координатами x і y. Виразимо $\operatorname{tg}\angle B$ і $\operatorname{tg}\angle A$ через координати точок A, B і M:

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{y}{2-x},\ \operatorname{tg}\angle A=\frac{y}{x+1}.$$

Згідно з умовою $\angle B=2\angle A$, тобто

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{2\operatorname{tg}\angle A}{1-\operatorname{tg}^2\angle A}\ \text{або}\ \frac{y}{2-x}=\frac{2\dfrac{y}{x+1}}{1-\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2}.$$

Після спрощення дістаємо $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. Отже, шукана крива – гіпербола.

Приклад 3 Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі *Ox*, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі *Ox*, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв'язання. Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки *M*, що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2 = 2px$ покладемо $x = 6$, $y = 8$. Тоді $2p = \frac{32}{3}$. Отже, рівняння шуканої параболи

$$y^2 = \frac{32x}{3}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) його півосі дорівнюють 5 і 2;
2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
4) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e = \frac{12}{13}$;
7) відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами $2c = 4$;
8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;
9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;
10) відстань між директрисами дорівнює 32 і $e = \frac{1}{2}$;
11) точка $M\left(-2\sqrt{5};\, 2\right)$ еліпсу і його мала піввісь дорівнює 3;
12) точка $M(2;\, -2)$ еліпсу і його велика піввісь дорівнює 4;
13) точки $M\left(4;\, -\sqrt{3}\right)$ і $N\left(2\sqrt{2};\, 3\right)$ еліпсу.

№ 2 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) її вісі $2a = 10$ і $2b = 8$;
2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;
3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$;
4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$;
5) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;
6) відстань між директрисами $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;

7) відстань між директрисами $\frac{32}{5}$ і вісь $2b = 6$;

8) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і $e = \frac{3}{2}$;

9) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами $12\frac{4}{5}$;

10) точки $M(6; -1)$ і $N\left(-8; 2\sqrt{2}\right)$ гіперболи;

11) точка $M(-5; 3)$ гіперболи і ексцентриситет $e = \sqrt{2}$;

12) точка $M\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$;

13) точка $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ гіперболи і рівняння директрис $x = \pm\frac{4}{3}$;

14) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x = \pm\frac{16}{5}$.

№ 3 Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо:

1) парабола розташована в правій півплощині симетрично відносно вісі Ox, і її параметр $p = 3$;
2) парабола розташована в лівій півплощині симетрично відносно вісі Ox, і її параметр $p = 0{,}5$;
3) парабола розташована в верхній півплощині симетрично відносно вісі Oy, і її параметр $p = \frac{1}{4}$;
4) парабола розташована в нижній півплощині симетрично відносно вісі Oy, і її параметр $p = 3$;
5) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;
6) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $B(-1; 3)$;
7) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $C(1; 1)$;
8) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $D(4; -8)$.

№ 4 Із точки $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ проведені дотичні до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Скласти їх рівняння.

№ 5 Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, які перпендикулярні до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.

№ 6 Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2; -1)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$.

№ 7 Скласти рівняння параболи, якщо заданий її фокус $F(4; 3)$ і директриса $y + 1 = 0$.

№ 8 Скласти рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

№ 9 Скласти рівняння параболи, якщо:

1) фокус має координати (5, 0), а вісь ординат є директрисою;
2) парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через початок координат і через точку $M(1; -4)$;
3) парабола симетрична відносно осі Oy, фокус знаходиться в точці $(0; 2)$, а вершина збігається з початком координат;
4) парабола симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат і через точку $M(6; -2)$.

№ 10 Точка $M\left(-\frac{5}{2}; 1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2 - 5y^2 = 20$. Знайти її фокальні радіуси.

№ 11 На еліпсі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайти точку з фокальним радіусом $r = \frac{10}{3}$.

№ 12 Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ з прямою $x - 2y + 2 = 0$.

№ 13 Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ з прямою $x - y + 5 = 0$.

№ 14 Через точку $M(2; 4)$ провести дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 15 Скласти рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0; -\frac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2 - 2y^2 = 1$.

№ 16 Знайти дотичні до гіперболи $x^2 - y^2 = 16$, паралельні до прямої $5x - 3y - 17 = 0$.

№ 17 Знайти дотичну до параболи $y^2 = 2x$, перпендикулярну до прямої $4x + y - 23 = 0$.

№ 18 Із правого фокуса еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ під кутом α до осі Ox напрямлено промінь світла. Дійшовши до еліптичного дзеркала, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

№ 19 З фокуса параболічного дзеркала $y^2 = 12x$ під кутом α напрямлено промінь світла. Дійшовши до параболи, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – *дискримінант старших членів* кривої,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ – } \textit{дискримінант кривої.}$$

Тут $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{13} = a_{31}$.

Таблиця 1 – Вид кривої другого порядку в залежності від значення дискримінантів старших членів та кривої

	$\Delta = 0$	$\Delta \neq 0$
$\delta > 0$	уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці	еліпс (дійсний або уявний)
$\delta = 0$	паралельні прямі (дійсні, уявні, співпадаючі)	парабола
$\delta < 0$	дійсні прямі, що перетинаються	гіпербола

Методи зведення рівнянь кривих другого порядку до канонічного вигляду:

1. За допомогою перетворень координат:

а) *паралельне перенесення*: $\begin{cases} x = \bar{x} + a, \\ y = \bar{y} + b, \end{cases}$ де $\bar{a}(a; b)$ – вектор паралельного переносу, $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – нові координати. За відсутності добутку xy це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно невідомих x і y.

б) *перетворення повороту* на кут φ у додатному напрямку. Наявність повороту вказує добуток xy. Нові координати $\bar{x}$ і $\bar{y}$ пов'язані з координатами x і y рівностями:

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \\ y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Кут повороту φ завжди можна вибрати таким чином: у випадку, коли $a_{22} \neq a_{11}$, то $\operatorname{tg}2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$, а коли $a_{22} = a_{11}$ і $a_{12} \neq 0$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

в) комбінування двох вищевказаних перетворень.

2. За допомогою теорії квадратичних форм:

Групу старших членів рівняння (1) представимо як квадратичну форму двох змінних. Цю квадратичну форму зводимо до канонічного вигляду будь-яким відомим методом. У результаті такого перетворення зникають доданки з добутком координат. Далі здійснюємо паралельне перенесення нових осей координат і отримаємо канонічний вигляд вихідної кривої:

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = C,$$

де $C > 0$ і λ_1, λ_2 – власні значення матриці старших членів.

7 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Приклад 1 Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0$.

Розв'язання. У загальному рівнянні кривої присутній член xy, тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22}=3\neq a_{11}=5$, тому $\operatorname{tg}2\varphi=\dfrac{2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)}{5-3}=-2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$, використовуючи формули: $\operatorname{tg}2\varphi=\dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$, $\sin\varphi=\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$. Будемо мати: $\operatorname{tg}\varphi=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right\}$, а $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ візьмемо, наприклад, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Запишемо формули перетворення

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}-\bar{y}\sqrt{2}\right), \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}\sqrt{2}+\bar{y}\right), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\bar{x}^2+5\bar{y}^2-42=0 \text{ або } \frac{\bar{x}^2}{14}+\frac{5\bar{y}^2}{42}=1.$$

Маємо рівняння еліпса у новій системі координат: $\dfrac{\bar{x}^2}{14}+\dfrac{5\bar{y}^2}{42}=1$ з центром в початку координат та осями $\sqrt{14}$ та $\sqrt{\dfrac{42}{5}}$, при цьому системи координат зв'язані формулами: $\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}+\dfrac{y\sqrt{6}}{3}, \\ \bar{y}=-\dfrac{x\sqrt{6}}{3}+\dfrac{y\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Приклад 2 Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи теорію квадратичних форм:

$$5x^2-4\sqrt{2}xy+3y^2-14=0.$$

Розв'язання. Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)-8=0,$$

$$\lambda^2-8\lambda+7=0,$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=7.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, відповідні знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\cdot\sqrt{2}+\mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$4x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 1$ власний вектор $X_1 = c_1\left(\sqrt{2};\, 2\right)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

При $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}-\mathrm{I}\cdot\sqrt{2} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$-2x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 7$ власний вектор $X_2 = c_2\left(-2;\, \sqrt{2}\right)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\overline{x} - \frac{2}{\sqrt{6}}\,\overline{y}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\,\overline{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\overline{y}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння кривої, спростимо його, будемо мати:

$$\overline{x}^2 + 7\overline{y}^2 - 42 = 0, \qquad \frac{\overline{x}^2}{42} + \frac{\overline{y}^2}{6} = 1 \text{ – еліпс.}$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу. Побудувати криву (якщо вона існує):

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 3 = 0$;

2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

3) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

4) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

5) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

№ 2 Привести рівняння кривої до канонічного виду за допомогою теорії квадратичних форм, визначити її тип і схематично побудувати:

1) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18 = 0$; 2) $x^2 + 2xy - y^2 - 8\sqrt{2} = 0$;

3) $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 - 24 = 0$; 4) $5x^2 - 2\sqrt{45}xy + y^2 - 5 = 0$;

5) $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0$; 6) $7x^2 - 8xy + y^2 - 9 = 0$.

8 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЇХ КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ЗОБРАЖЕННЯ

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Еліпсоїд: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

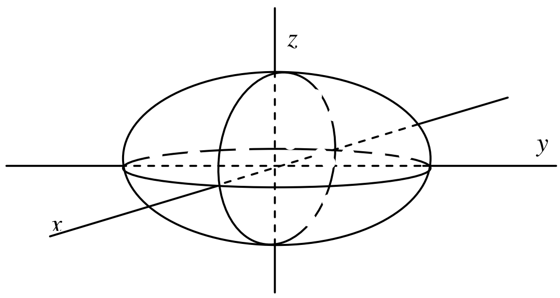

Рисунок 1 – Еліпсоїд

Еліптичний параболоїд: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

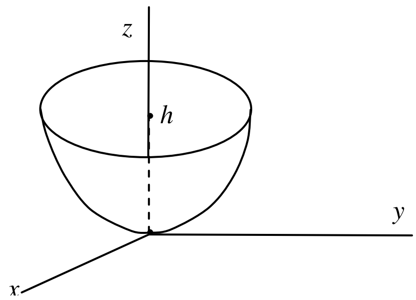

Рисунок 2 – Еліптичний параболоїд

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

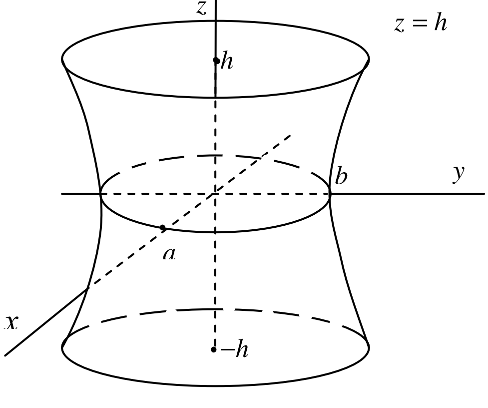

Рисунок 3 – Однопорожнинний гіперболоїд

***Двопорожнинний* гіперболоїд:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

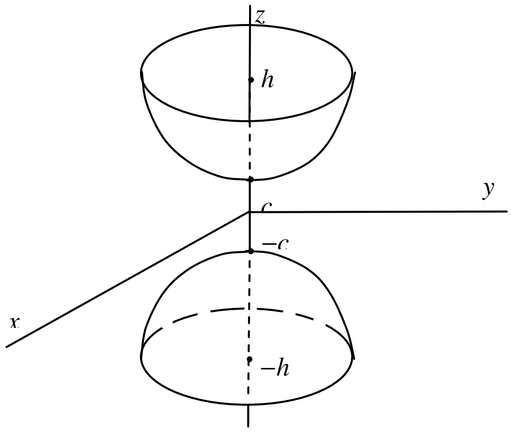

Рисунок 4 – Двопорожнинний гіперболоїд

Гіперболічний параболоїд: $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

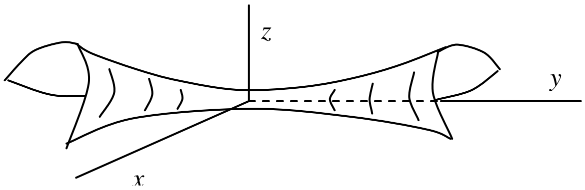

Рисунок 5 – Гіперболічний параболоїд

Конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

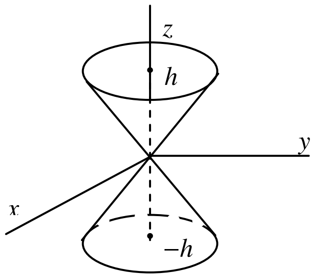

Рисунок 6 – Конус

Еліптичний циліндр:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Гіперболічний циліндр:
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параболічний циліндр:
$$y^2=2px$$

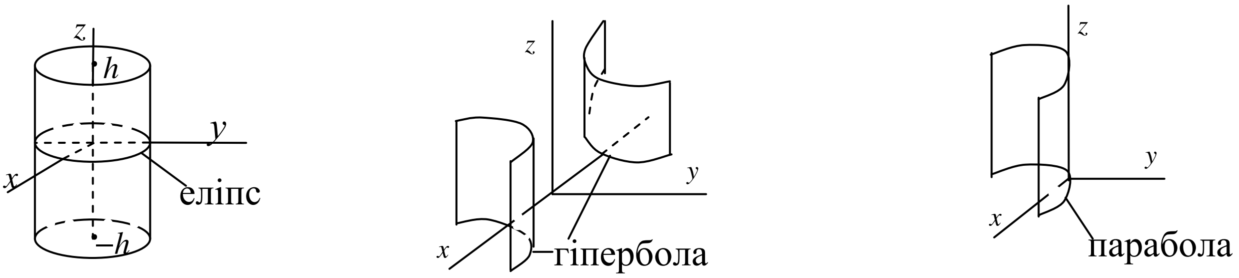

Рисунок 7 – Приклади циліндрів

Методи приведення загальних рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \qquad (1)$$

Методи зведення рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного вигляду:

1. За допомогою перетворень координат:

а) *паралельне перенесення*: $\begin{cases} x=\bar{x}+a, \\ y=\bar{y}+b, \\ z=\bar{z}+c, \end{cases}$ де $\bar{a}(a;b;c)$ – вектор паралельного переносу, $\bar{x}$, $\bar{y}$ і $\bar{z}$ – нові координати. За відсутності добутків xy, xz і yz це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно невідомих x, y і z.

б) *перетворення повороту* на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин. Наявність повороту вказують добутки xy, xz або yz. Нові координати $\bar{x}$, $\bar{y}$ і $\bar{z}$ пов'язані з координатами x, y і z рівностями при повороті на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин, наприклад xOy:

$$\begin{cases} x=\bar{x}\cos\varphi-\bar{y}\sin\varphi, \\ y=\bar{x}\sin\varphi+\bar{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Далі діємо аналогічно кривим другого порядку. Такі перетворення потрібно зробити у всіх координатних площинах, для яких у записі загального рівняння є добутки xy, xz або yz.

в) *комбінування* двох вищевказаних перетворень.

2. За допомогою теорії квадратичних форм.

Групу старших членів рівняння (1) представимо як квадратичну форму трьох змінних. Цю квадратичну форму зводимо до канонічного вигляду будь-яким відомим методом. У результаті такого перетворення зникають доданки з добутком координат. Далі здійснюємо паралельне перенесення нових осей координат і отримаємо канонічний вигляд вихідної поверхні:

$$\lambda_1 \overline{x}^2 + \lambda_2 \overline{y}^2 + \lambda_3 \overline{z}^2 = C,$$

де $C > 0$ і $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – власні значення матриці старших членів.

ПРАКТИКА

Приклад 1 Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0.$$

Розв'язання. Випишемо матрицю старших членів:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda) + 2 - (5-\lambda) - 2(3-\lambda) = 0,$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0,$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 2$ власний вектор $X_1 = c_1(1;0;-1)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

При $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftrightarrow \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad\quad = 0, \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_2. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 3$ власний вектор $X_2 = c_2(1;1;1)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

При $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot(-1/2) \\ -\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_3 = 6$ власний вектор $X_3 = c_3(1;-2;1)$, $c_3 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ y = \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння поверхні, спростимо його та виділимо повні квадрати відносно кожної змінної:

$$2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 6\bar{z}^2 - 6\sqrt{2}\bar{x} - 4\sqrt{3}\bar{y} - 2\sqrt{6}\bar{z} - 10 = 0,$$

$$2\left(\bar{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\bar{y} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(\bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 24,$$

$$\frac{\left(\bar{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12} + \frac{\left(\bar{y} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{8} + \frac{\left(\bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}{4} = 1.$$

Зробимо паралельне перенесення осей, будемо мати:

$$\begin{cases} x' = \bar{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y' = \bar{y} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ z' = \bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$$

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{8} + \frac{z'^2}{4} = 1 \text{ – еліпсоїд.}$$

Приклад 2 Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4x - 2y = 0.$$

Розв’язання. Випишемо матрицю старших членів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв’яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2(2-\lambda) = 0,$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. Для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ \quad\; - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = x_2. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 3$ власний вектор $X_1 = c_1(1; -1; -1)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

При $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \leftrightarrow \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 2$ власний вектор $X_2 = c_2(1; 0; 1)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

При $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 2 + \mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_2, \\ x_3 = -\frac{1}{2} x_2. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_3 = 0$ власний вектор $X_3 = c_3(1; 2; -1)$, $c_3 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x} \qquad\quad + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння поверхні, спростимо його, будемо мати:

$$3\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 2\sqrt{3}\bar{x} + 2\sqrt{2}\bar{y} = 0,$$

$$3\left(\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\left(\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2,$$

$$\frac{3\left(\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2} + \left(\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Зробимо паралельне перенесення осей, будемо мати:

$$\begin{cases} x' = \bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ y' = \bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{3x'^2}{2} + y'^2 = 1 \text{ – еліптичний циліндр.}$$

Задачі для самостійного розв’язування

№ 1 Визначте вид фігури, яка задана співвідношенням:

1) $x + 2y - z = 1$; 2) $x^2 - z^2 = 0$; 3) $x^2 + y^2 = 1$;

4) $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 \leq a$; 5) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 4 = 0$;

6) $xy = 0$; 7) $xyz = 0$; 8) $yz + z^2 = 0$; 9) $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$;

10) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 11) $x^2 = 6z$; 12) $x^2 + y^2 = 0$; 13) $x^2 + z^2 = 2z$;

14) $(x-3y+z-2)(2x+y-4z+1)=0$; 15) $(x^2+y^2-4)(y^2+z^2-1)=0$;

16) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$; 17) $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{0}$; 18) $\begin{cases} x=y, \\ y=z; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=0; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x^2+z^2=9, \\ x^2+y^2+z^2=9; \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=0; \end{cases}$

22) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+4)^2+z^2=25, \\ y+1=0; \end{cases}$ 23) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ x-2=0; \end{cases}$

24) $\begin{cases} x^2+z^2=16, \\ z=3; \end{cases}$ 25) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$; 26) $\dfrac{x^2}{4}-y^2+\dfrac{z^2}{4}=0$;

27) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=2z$; 28) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{z^2}{3}=y$; 29) $x^2+y^2-z^2=-1$;

30) $x^2+y^2-z^2=1$; 31) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1, \\ z+2=0; \end{cases}$

32) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z, \\ y+6=0; \end{cases}$ 33) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}; \end{cases}$

34) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}; \end{cases}$ 35) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z, \\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}; \end{cases}$

36) $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=1-2t, \\ z=t; \end{cases}$ 37) $\begin{cases} x=2u-v, \\ y=u+v, \\ z=u-v; \end{cases}$

38) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x-y=1; \end{cases}$ 39) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=2z, \\ x-2y+z=0; \end{cases}$ 40) $\begin{cases} y^2=x, \\ z^2=1-x. \end{cases}$

№ 2 Привести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити її тип й схематично побудувати:

1) $9x^2-4y^2-81z^2-36=0$; 2) $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0$;

3) $x^2+2y^2+2z^2-2x-4y-4z=0$; 4) $x^2+2y^2-z^2+2x-4y+2z+1=0$;

5) $x^2+2y^2-4z^2+2x-2y+2=0$; 6) $x^2+8z^2-4x+16z+6=0$;

7) $3y^2+4z^2+24x+12y-72z+360=0$; 8) $x^2-3y^2-2x+18y-z=0$;

9) $x^2-3y^2-2x+18y-26=0$; 10) $x^2-8z^2-4x+16z-12=0$;

11) $y^2-10z-2y-19=0$; 12) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+2=0$.