# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

## 1 ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ МНОЖИН

**Множина** – це сукупність об’єктів, об’єднаних за певною ознакою, причому таких, що для кожного можна встановити, належить цей об’єкт даній множині чи ні.

Як правило, елементи множини позначаються маленькими буквами, а самі множини – великими. Приналежність елемента $m$ множині $M$ позначається так: $m \in M$ .

Множини можуть бути скінченими, нескінченними й порожніми. Множина, що містить скінчену кількість елементів, називається **скінченим**. Якщо множина не містить жодного елемента, то вона називається **порожнею** і позначається $\varnothing$.

Приклад*:* множина студентів 1 курсу фізичного факультету – скінчена множина; множина зірок у Всесвіті – нескінченна множина; множина студентів 1 курсу фізичного факультету, що добре знають три іноземні мови (японську, китайську й французьку) – порожня множина.

Множину $A$ називають **підмножиною** множини $B$ (позначається $A \subseteq B$), якщо всякий елемент множини $A$ є елементом множини $B$: $A \subseteq B \xleftrightarrow{def} a \in A \Rightarrow a \in B$ (рис. 1.1). При цьому говорять, що $B$ містить $A$, або $B$ покриває $A$. Невключення підмножини $C$ в множину $B$ позначається так: $C \not\subset B$.

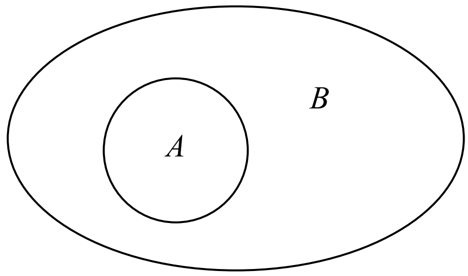

Рисунок 1.1

Множини $A$ й $B$ **рівні** ($A = B$) тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq B$, і $B \subseteq A$, тобто елементи множин $A$ і $B$ збігаються.

Множина $A$ називається **власною підмножиною** множини $B$, якщо $A \subseteq B$, а $B \not\subset A$. Позначається так: $A \subset B$.

*Приклад:* $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, c, d\}$, $A \subset B$.

**Потужністю** скінченої множини $M$ називається число його елементів. Позначається $|M|$.

*Приклад:* $|B| = 6$, $|A| = 3$.

Прийнято вважати, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини.

**Універсальною** множиною $U$ називається множина всіх розглянутих у даній задачі елементів.

***Способи завдання множин***: множини можуть бути задані переліком всіх її елементів; арифметичними операціями; описом властивостей або графічно.

1. Завдання множин **переліком всіх її елементів**. Наприклад, множина $A$ складається з букв $a, b, c, d$: $A = \{a, b, c, d\}$ або множина $N$ включає цифри 0, 2, 3, 4: $N = \{0, 2, 3, 4\}$.

*Приклад:* $\{0, 2, 3, 4\} = \{3, 4, 2, 0\} = \{4, 0, 2, 3\} = \ldots$ .

2. Завдання множин описом характеристичних властивостей елементів за допомогою **арифметичних операцій**.

*Приклад*: $B = \left\{ b \mid b = \frac{\pi}{2} \pm \pi k, k \in N \right\}$, $N$ – множина всіх натуральних чисел;

$M_2^n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ або $M_2^n = \{m \mid m = 2^n, n \in N\}$; $C = A + B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

3. Завдання множини **описом властивостей** елементів.

*Приклад*, $M$ – це множина чисел, що є степенями двійки.

До опису властивостей природно висунути вимоги точності й недвозначності. Так, «множина всіх гарних пісень 2003 року» кожний складе по-різному. Надійним способом однозначного завдання множини є використання розв’язної процедури, яка для будь-якого об’єкта встановлює, чи володіє він даною властивістю й відповідно чи є елементом розглянутого множини.

*Приклад*, $S$ – множина встигаючих студентів. Розв’язною процедурою включення в множину $S$ є відсутність незадовільних оцінок в останній сесії.

4. Графічне завдання множин відбувається за допомогою діаграм Ейлера-Венна. Замкнена лінія-коло Ейлера – обмежує множину, а рамка – універсальну

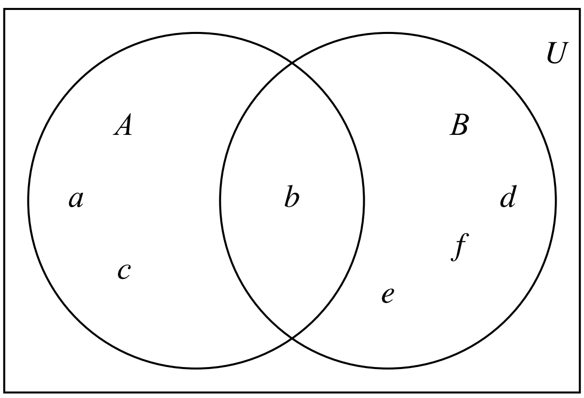

Рисунок 1.2

множину $U$ (рис. 1.2). Задано дві множини: $A=\{a,b,c\}$ і $B=\{b,d,e,f\}$. Якщо елементів множин небагато, то вони можуть на діаграмі вказуватися явно.

***Операції над множинами***

**Об'єднанням множин** $A$ і $B$ ($A\cup B$) називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній із множин $A$ або $B$. (рис. 1.3):

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ або } x\in B\}.$$

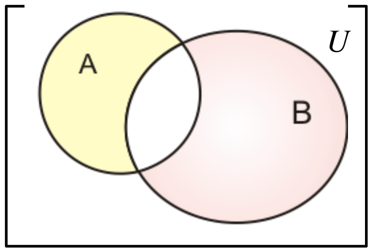


Рисунок 1.3

У загальному випадку операція об'єднання може бути використана для декількох множин: $A\cup B\cup C\cup D$ або $S=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, де $k$ – кількість об'єднаних множин.

*Приклад.* Дано дві множини: $A=\{1,2,4,6\}$ і $B=\{0,3,4,6\}$. Знайдемо множину $C=A\cup B$: $C=\{0,1,2,3,4,6\}$.

**Перетином** множин $A$ і $B$ ($A\cap B$) називається множина, що складається з елементів, що входять як у множину $A$, так і в множину $B$ (рис. 1.4): $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ і } x\in B\}$.

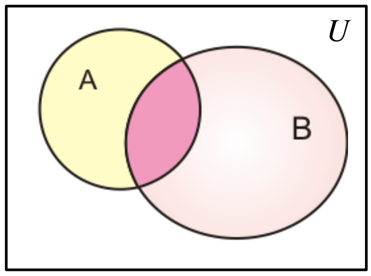


Рисунок 1.4

Операція перетину так само може бути розповсюджена на декілька множин, наприклад, $A\cap B\cap C\cap D$ або $S=\bigcap_{i=1}^{k} A_i$, де $k$ – кількість множин.

*Приклад.* Дано множини $A=\{1,2,4,6\}$ й $B=\{0,3,4,6\}$. Знайдемо їх перетин: $D=A\cap B=\{4,6\}$.

**Різницею** множин $A$ і $B$ ($A\setminus B$) називається множина всіх елементів множини $A$, які не містяться в $B$ (рис. 1.5, а): $A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ і } x\notin B\}$; аналогічно (рис. 1.5, б): $B\setminus A=\{x \mid x\in B \text{ і } x\notin A\}$.

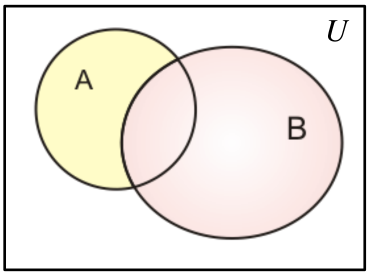


Рисунок 1.5, а

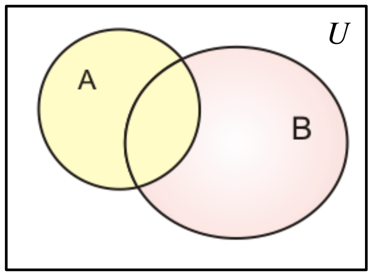


Рисунок 1.5, б

*Приклад.* Дано дві множини $A=\{1,2,4,6\}$ й $B=\{0,3,4,6\}$. Знайдемо їх різницю: $A\setminus B=\{1,2\}$; $B\setminus A=\{0,3\}$.

Доповненням (до універсальної множини $U$) множини $A$ називається множина всіх елементів, що не належать $A$, але приналежних універсальній множині $U$ (рис. 1.6): $\overline{A}=\{x \mid x\notin A \text{ і } x\in U\}$.

*Приклад.* Нехай універсальна множина $U$ складається з букв російського алфавіту, $A$ – множина голосних букв, тоді $\overline{A}$ – множина приголосних букв і букв ь и ъ.

Пріоритет виконання операцій: спочатку виконуються операції доповнення, потім перетину й тільки потім об'єднання й різниці. Послідовність виконання операцій може бути змінена дужками.

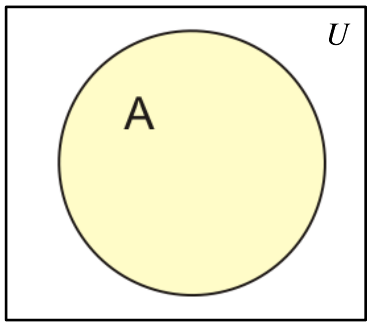


Рисунок 1.6

## ПРАКТИКА

*Приклад 1* Задати різними способами множину $A$ всіх парних чисел 2, 4, 6, …., що не перевищують 1000.

*Розв'язання.*

1. Переліком: $A=\{2,4,6,8,10,...,998,1000\}$;
2. Описом: $A=\left\{x \mid x\in N \text{ и } \frac{x}{2}\in N,\ N\le 1000\right\}$, де $N$ – множина натуральних чисел.
3. Арифметичними операціями: а) $2\in A$; б) якщо $x\in A$, то $(x+2)\in A$; в) $x\le 1000$.

*Приклад 2* Опитування 100 студентів, що вивчають іноземні мови, показав: англійську мову вивчають 29 студентів, німецьку –30, французьку –9, тільки французьку – 1, англійську і німецьку – 10, німецьку і французьку – 4, усі три мови – 3 студента. Скільки студентів не вивчають жодної мови? Скільки студентів вивчають тільки німецьку мова? При розв’язанні використовувати діаграми Венна.

*Розв’язання.* Уведемо позначення: I – множину всіх опитаних студентів; $A$ – множина студентів, що вивчають англійську мову; $H$ – множина студентів, що вивчають німецьку мову; $\Phi$ – множина студентів, що вивчають французьку мову (рис. 1.7)

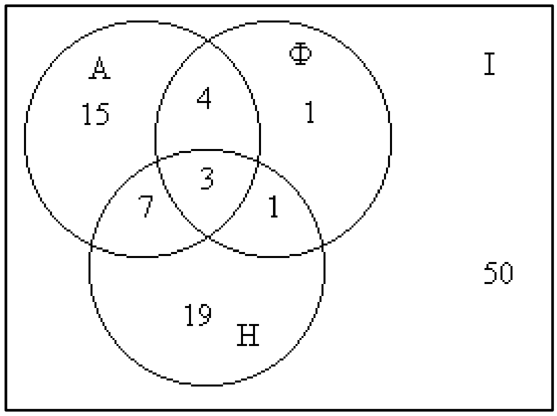


Рисунок 1.7

За умовою задачі очевидно, що $A \cap \Phi \cap H = 3$, тоді

$$(A \cap H) \setminus (A \cap \Phi \cap H) = 4 - 3 = 1;$$

$$(A \cap H) = (A \cap \Phi \cap H) = 10 - 3 = 7.$$

У такому випадку тільки німецька мову вивчають 30–7–3––1=19 студентів.

З умови задачі також випливає, що $(A \cap \Phi) \setminus (A \cap \Phi \cap H) = 9 - 1 - 1 - 3 = 4$, а тому тільки англійську мову вивчають 29–4–3–7=15 студентів. Тоді число студентів, що не вивчають жодної мови, буде

$$C \setminus (A \cup \Phi \cup H) = 100 - (1 + 1 + 3 + 4 + 7 + 15 + 19) = 50 \text{ студентів.}$$

**Задачі для самостійного розв’язування**

**№ 1.1.** Записати множини, перелічивши всі її елементи:

$A = \{x \mid x \in N \text{ и } x^2 - 4x + 3 = 0\}$; $\quad B = \{x \mid x \in R \text{ и } x^2 - 2x + 2 = 0\}$.

**№1.2.** Знайти об’єднання, переріз та різницю множин:

а) $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 \le x \le 3\}$; $\quad$ б) $A = \{x \mid x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

**№ 1.3.** Нехай $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 5\}$, $Y = \{1, 2, 4\}$, $Z = \{2, 5\}$.

Знайти множини:

а) $X \cap \overline{Y}$; $\quad$ б) $(X \cap Z) \cap \overline{Y}$; $\quad$ в) $X \cup (Y \cap Z)$; $\quad$ г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

д) $\overline{X \cup Y}$; $\quad$ е) $\overline{X} \cap \overline{Y}$; $\quad$ ж) $\overline{X \cap Y}$; $\quad$ з) $(X \cup Y) \cup Z$;

і) $X \cup (Y \cup Z)$; $\quad$ к) $X \setminus Z$; $\quad$ л) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

**Розв’яжіть задачі № 1.4 – 1.9 з використанням діаграм Ейлера-Венна.**

**№ 1.4.** У студентському потоці 37 людей добре знають математику, а 25 людей – електроніку, і 19 людей добре знають і математику й електроніку. Якщо в потоці кожний зі студентів знає хоча б один із цих предметів, то скільки студентів у потоці?

**№ 1.5.** З 250 студентів 151 вивчають німецьку мова, 136 – французьку мова, 27 – італійську, 63 – французьку й німецьку, 7 – італійську й французьку, 11 – німецьку й італійську, 4 – усі три мови.

а) Скільки студентів вивчають тільки німецьку або тільки французьку мови?

б) Скільки студентів вивчають тільки італійську мову?

в) Скільки студентів вивчають німецьку й французьку мова, але не італійську?

г) Скільки студентів не вивчають жодної мови?

д) Скільки студентів вивчають хоча б дві іноземні мови?

**№ 1.6.** Кожний з 500 студентів зобов’язано відвідувати хоча б один із трьох спецкурсів: з математики, фізики, астрономії. Три спецкурси відвідують 10 студентів, з математики й астрономії –25 студентів, спецкурс тільки з фізики – 80 студентів. Відомо також, що спецкурс з математики відвідують 345 студентів, з фізики – 145, з астрономії – 100 студентів. Скільки студентів відвідують спецкурс тільки з астрономії? Скільки студентів відвідують два спецкурси?

**№ 1.7.** Екзамен з математики містив три задачі: по алгебрі, геометрії й тригонометрії. З 800 абітурієнтів задачу по алгебрі розв’язали 250 людей; по алгебрі або геометрії – 660 людей; по дві задачі розв’язали 400 людей, з них дві задачі по алгебрі і й геометрії розв’язали 150 людей, по алгебрі й тригонометрії – 50 людей; жоден абітурієнт не розв’язав усі задачі; 20 абітурієнтів не розв’язали ні однієї задачі; тільки по тригонометрії задачі розв’язали 120 людей. Скільки абітурієнтів розв’язали тільки одну задачу? Скільки абітурієнтів розв’язали задачі по тригонометрії?

**№ 1.8.** На курсах іноземних мов вчиться 600 людей. З них французьку вивчають 220 людей, англійську – 270 людей. Слухачі, що вивчають англійську мову, не вивчають німецьку мову; одну французьку мову вивчають 100 людей, одну німецьку мову вивчають 180 людей. Скільки людей вивчають по дві іноземні мови? Скільки людей вивчають одну іноземну мову?

**№ 1.9.** Екзамен з математики містив три задачі: по алгебрі, геометрії й тригонометрії. З 750 абітурієнтів задачу по алгебрі розв'язали 400 абітурієнтів, по геометрії – 480, по тригонометрії – 420. Задачі по алгебрі або геометрії розв'язали 630 абітурієнтів; по геометрії або тригонометрії – 600 абітурієнтів; по алгебрі або тригонометрії – 620 абітурієнтів. 100 абітурієнтів не розв'язали ні однієї задачі. Скільки абітурієнтів розв'язали всі задачі? Скільки абітурієнтів розв'язали тільки одну задачу?

## 2 МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

**Матрицею** розміру $m \times n$, де $m$ – число рядків, $n$ – число стовпців, називається прямокутна таблиця чисел, розташованих у певному порядку. Ці числа називаються **елементами матриці**. Місце кожного елемента однозначно визначається номером рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться. Елементи матриці позначаються $a_{ij}$, де $i$ – номер рядка, а $j$ – номер стовпця. Позначення:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною** (квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею $n$-го порядку).

Елементи, у яких номер рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться, співпадає, утворюють **головну діагональ**.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається **діагональною**.

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі рівні 1, називається **одиничною**. Позначення:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається **трикутною**, якщо всі елементи, розташовані по одну сторону від головної діагоналі, рівні 0.

Матриця, усі елементи якої рівні 0, називається **нульовою**. Позначення:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці називаються **рівними**, якщо вони мають однаковий розмір і рівні відповідні елементи, тобто

$$A = B \text{, якщо } a_{ij} = b_{ij} \text{, де } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо $a_{mn} = a_{nm}$, то матриця називається **симетричною**. Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця, що містить один рядок або один стовпець, називається **вектором** (або матрицею-**рядком** або матрицею-**стовпцем** відповідно). Їх вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ – матриця-стовпець,} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ – матриця-рядок.}$$

Матриця розміру $1\times1$, що складається з одного числа, ототожнюється із цим числом, тобто $(5)_{1\times1}$ є 5.

***Транспонування***

Матриця, отримана з даною заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається матрицею, **транспонованою** до даної. Позначення: $A^T$ або $A^t$.

*Приклад.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонована матриця має властивість: $\left(A^t\right)^t=A$.

***Додавання матриць***

Сумою двох матриць однакового розміру називається матриця того ж розміру, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів матриць-доданків, тобто

якщо $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ й $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$, то $C_{m\times n}=A_{m\times n}+B_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

*Приклад.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається **різниця матриць**.

***Множення матриці на число***

**Добутком матриці** $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ **на число** $k\in R$ називається матриця $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$, кожний елемент якої отриманий множенням відповідного елемента матриці $A$ на число $k$, тобто $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

*Приклад.*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ k=2, \qquad A\cdot k=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матриця $-A=(-1)\cdot A$ називається **протилежною** матриці $A$.

Різниця матриць $A-B$ можна визначити так: $A-B=A+(-B)$.

*Властивості операцій додавання матриць і множення матриці на число*
*($A,B,C$ – матриці, $\alpha,\beta\in R$):*

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+\theta=A$;
4. $A+(-A)=\theta$;
5. $1\cdot A=A$;
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta A$;
8. $\alpha\cdot(\beta A)=(\alpha\beta)\cdot A$.

***Добуток матриць***

**Добутком** матриці $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицю $B_{n\times p}=\left(b_{jk}\right)$ називається така матриця $C_{m\times p}=\left(c_{ik}\right)$, елемент $i$-й рядка й $k$-го стовпця якої дорівнює сумі добутків елементів $i$-й рядка матриці $A$ й відповідних елементів $k$-го стовпця матриці $B$, тобто

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}, \text{ де } i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p}.$$

*Зауваження 1.* Добуток матриць можливий у випадку, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої.

*Зауваження 2.* Якщо матриці $A$ й $B$ квадратні одного розміру, то добутки $AB$ й $BA$ завжди існують.

Матриці $A$ й $B$ називаються **переставними**, якщо $AB=BA$.

*Властивості операцій транспонування, множення, додавання матриць і множення матриці на число ( $A,B,C$ – матриці, $\alpha,\beta\in R$ ), якщо записані операції мають сенс:*

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$;
2. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
3. $A\cdot E=E\cdot A=A$;
4. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
5. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
6. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha A)B$;
7. $(A+B)^t=A^t+B^t$;
8. $(AB)^t=B^tA^t$.

***Елементарні перетворення матриць***

**Елементарними перетвореннями матриць** є:

– перестановка місцями двох паралельних рядів матриці;

– множення всіх елементів ряду матриці на число, відмінне від нуля;

– додаток до всіх елементів ряду матриці відповідних елементів паралельного ряду матриці, помножених на одне й теж число.

Дві матриці $A$ й $B$ називаються **еквівалентними**, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначення: $A\sim B$.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна привести до матриці, у якої:

– після нульового ряду йде тільки нульовий ряд;

– якщо перші ненульові елементи двох будь-які сусідніх рядів мають номери $k$ й $m$, то $k<m$.

Таку матрицю називають **ступінчастою**. Наприклад,

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&4&-1&1\\0&0&5&1\end{pmatrix}.$$

**ПРАКТИКА**

*Приклад 1* Привести до ступінчастого виду матрицю

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання*. Виконуючи елементарні перетворення, одержимо:

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\4&0&5&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2\cdot\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&1&2\\0&2&-1&1\\0&-6&3&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot2-3\cdot\mathrm{II}\\ \\ +3\cdot\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}4&0&5&1\\0&2&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

*Приклад 2* Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2&4&1\end{pmatrix}$.

*Розв'язання.*

$$AB=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2&1\cdot4&1\cdot1\\4\cdot2&4\cdot4&4\cdot1\\3\cdot2&3\cdot4&3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\8&16&4\\6&12&3\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+4\cdot4+1\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\end{pmatrix}=21.$$

*Приклад 3* Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}$.

*Розв'язання.*

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+10&4+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&16\end{pmatrix};$$

$BA = \varnothing$ – не існує.

*Приклад 4* Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Знайти $A^t \cdot B + 2C$.

*Розв'язання.*

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^t B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$2C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^t \cdot B + 2C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

*Приклад 5* Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти $A^3$.

*Розв'язання.* $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ є переставними.

### Задачі для самостійного розв'язування

**№ 1** Для заданих матриць обчислити $AB$ й $BA$, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

**№ 2** Для заданих матриць виконати зазначені дії:

а) для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ обчислити $2A^T - 3B$, $AB + E$, $BA - C^2$, $(AB)^T$, $B^T A^T$, $AC + (CB)^T$, $CA^T$, $CA^T + B$;

б) для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ обчислити $2B - 3C$, $A(B + C)$, $BC^T + A^2$, $AC - BC^T$, $CB^T - 2A^2$;

в) для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ обчислити $4A - 3B + C$, $A^T + B^T$, $AB - BA$, $BC + A^2$;

# 3 ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Квадратній матриці $A$ порядку $n$ можна співставити число $\det A$ (або $|A|$, або $\Delta$), яке називають її **визначником**, у такий спосіб:

$$n = 1, \qquad A = (a_1), \qquad \det A = a_1;$$

$$n = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$n = 3, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\ldots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник матриці $A$ також називають її **детермінантом**. Правило обчислення детермінанта для матриці порядку $n$ є досить складним для сприйняття й застосування. Однак відомі методи, що дозволяють реалізувати обчислення визначників високих порядків на основі визначників нижчих порядків.

*Обчислення визначника 2-го порядку ілюструється схемою:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

*Приклад.*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 27.$$

*При обчисленні визначника 3-го порядку зручно користуватися:*

– **правилом трикутників**, яке ілюструється схемою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

– **правилом прямих**, яке ілюструється схемою:

$$\begin{array}{c} \qquad\quad «+» \qquad «-» \\ \det A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} = \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

*Приклад.*

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \text{ (двома способами).}$$

***Властивості визначників***

1. Визначник не міняється при транспонуванні, тобто $\det A = \det A^t$.
2. При перестановці двох паралельних рядів визначник змінює знак.
3. Визначник, що має два однакові ряди, дорівнює нулю.
4. При множенні ряду матриці на число її визначник множиться на це число.

5. Якщо елементи деякого ряду пропорційні відповідним елементам паралельного ряду, то такий визначник дорівнює нулю.

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на будь-яке число.

**Мінором** деякого елемента $a_{ij}$ визначника $n$-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий з вихідного шляхом викреслювання рядка й стовпця, на перетині яких перебуває обраний елемент. Позначення: $M_{ij}$. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$:

$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 24 = 15$, $M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$.

**Алгебраїчним доповненням** елемента $a_{ij}$ визначника називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -15$,

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 7$.

7. (*Розкладання визначника по елементах деякого ряду*). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого ряду на відповідні їм алгебраїчні доповнення, тобто $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ (по елементах $i$-й рядка) або $\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$ (по елементах $k$-го стовпця).

Ця властивість є спосіб обчислення визначників вищих порядків.

*Приклад*.

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 19.$$

8. Сума добутків елементів якого-небудь ряду визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного ряду дорівнює нулю, тобто $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = 0$.

9. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

10. Визначник від добутку матриць дорівнює добутку визначників.

## ПРАКТИКА

*Приклад 1* Для заданих матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

обчислити $\det(AB)$.

Розв'язання. Знайдемо добуток заданих матриць:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{pmatrix}.$$

Тоді визначник отриманої матриці буде:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{vmatrix} = 150.$$

*Приклад 2* Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

*Розв'язання.*

$$а)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;$$

$$б)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2+0+18-(-6+3+0) = 19;$$

$$\downarrow$$

$$в)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\text{III} \\ \\ \\ +\text{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\text{II}\cdot 3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 21 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 21 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 122.$$

**Завдання для самостійного розв'язування**

**№ 1** Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 13) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 14) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

15) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; 17) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

21) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; 22) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; 23) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; 24) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

**№ 2** Розв'язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 3x \\ -\cos 2x & \sin 3x \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

**№3** Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох заданих матриць:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

## 4 ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ ОБЧИСЛЕННЯ

Нехай $A$ – квадратна матриця $n$-го порядку.

Квадратна матриця називається **невиродженою**, якщо її визначник відмінний від нуля. А якщо ні, то матриця називається **виродженою**.

Матриця $A^{-1}$ називається **оберненою** матриці $A$, якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де $E$ – одинична матриця того ж порядку, що й матриця $A$. Матриця $A^{-1}$ має той же порядок, що й матриця $A$.

*Приклад.* Визначити, при яких значеннях $\lambda$ не існує матриця, обернена даній $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Розв'язання. Оберненої матриці не існує, якщо вихідна матриця вироджена, тобто її визначник буде дорівнювати нулю. Будемо мати:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2\lambda - 12 + 2\lambda = 4\lambda - 9,$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4\lambda - 9 = 0,\ \lambda = \frac{9}{4}.$$

*Відповідь:* $\lambda = \frac{9}{4}$.

*Властивості оберненої матриці:*

1. $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

Усяка невироджена матриця має обернену, яку можна обчислити двома методами:

1. *Метод алгебраїчних доповнень*:
   - обчислити визначник даної матриці: $\det A$;
   - обчислити алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці: $A_{ij}$;
   - записати обернену матрицю у вигляді: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.
2. *Метод приєднання одиничної матриці*:

– приєднати до даної матриці одиничну того ж порядку, тобто записати матрицю виду: $(A \mid E)$;

– привести записану матрицю до виду $(E \mid A^{-1})$ за допомогою елементарних перетворень матриць.

## ПРАКТИКА

*Приклад 1* Знайти матрицю, обернену даній

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

двома способами.

*Розв'язання.*

**I спосіб.**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**II спосіб.**

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot 2 + \mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 5 - \mathrm{II} \cdot 3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 1/10 \\ \cdot 1/10 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right);$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Відповідь:* $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

### Завдання для самостійного розв'язування

**№ 1** Для заданих матриць знайти обернені й зробити перевірку:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

# 5 ОЗНАЧЕННЯ СЛАР, КЛАСИФІКАЦІЯ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СЛАР

## Ранг матриці

Нехай дана матриця розміру $m \times n$. Викреслимо із цієї матриці деякі рядки й стовпці так, щоб число рядків і стовпців, що залишилися, стало однаково, наприклад $k$. Із цих рядків і стовпців складемо визначник. Він називається **мінором** $k$-го порядку. Кількість мінорів визначається числами $m$ і $n$, а найвищий порядок рівний $\min\{m, n\}$. Найменший порядок цих визначників рівний 1, причому ці визначники – елементи матриці.

Припустимо, що всі визначники деякого порядку $k$, що входять у матрицю, рівні 0, тоді всі визначники $(k+1)$-го порядку також рівні 0, тому що будь-який визначник порядку $(k+1)$ можна представити у вигляді суми добутків елементів його деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення (а це визначники $k$-го порядку) цих елементів. Якщо всі визначники $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то й усі визначники $(k+2)$-го порядку також рівні 0 і т.д.

Отже, якщо всі визначники деякого певного порядку, що входять у дану матрицю, рівні 0, то і всі визначники більш високого порядку цієї матриці рівні 0.

**Рангом** матриці називається найвищий порядок, відмінних від нуля мінорів цієї матриці й позначається $rangA$.

Якщо ранг матриці рівний $k$, то серед визначників порядку $k$, що входять у цю матрицю, є принаймні один, відмінний від 0, але всі визначники порядку $(k+1)$ рівні 0.

Ранг нульової матриці рівний 0.

*Властивості рангу матриці:*

1. При транспонуванні матриці її ранг не міняється.
2. Якщо викреслити з матриці нульовий ряд, то ранг матриці не зміниться.
3. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

***Способи обчислення рангу матриці***

1. Метод мінорів: пошук базисного мінору.
2. Метод елементарних перетворень матриці: ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків (або стовпців) у ступінчастій матриці.

Якщо за допомогою елементарних перетворень не вдається знайти матрицю, еквівалентну вихідній, але меншого розміру, то знаходження рангу матриці слід починати з обчислення мінорів найвищого можливого порядку.

## Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему $m$ рівнянь із $n$ невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Ця система рівнянь характеризується матрицею

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

яка називається **розширеною матрицею системи**. Її розмір – $m \times (n+1)$. Матриця, що стоїть ліворуч вертикальної риси, називається **матрицею системи**. **Елементами матриці системи** (1) є коефіцієнти при невідомих. Матриця, що стоїть праворуч від вертикальної риси, називається **стовпцем вільних членів**.

**Розв’язком системи** рівнянь (1) називають будь-яку впорядковану сукупність дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, яка має таку властивість: кожне рівняння системи перетворюється в тотожність, якщо покласти в ньому $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$.

Система (1) називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв’язок. Якщо система не має розв’язків, вона називається **несумісною**.

Якщо система (1) має більше одного розв’язку, вона називається **невизначеною**, а якщо має єдине, то називається **визначеною**.

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються **еквівалентними** (**рівносильними**), якщо кожний розв’язок першої системи є розв’язком другої й навпаки.

**Теорема 1** Якщо від матриці $\tilde{A}$ до матриці $\tilde{B}$ можна перейти скінченим числом елементарних перетворень рядків, то всякий розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, відповідний матриці $\tilde{A}$, служить розв’язком системи з матрицею $\tilde{B}$ й навпаки, тобто розглянуті системи рівнянь еквівалентні.

**Теорема 2 (теорема Кронекера-Капеллі)** Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи, тобто $rang\,\widetilde{A} = rang\,A$.

**Зауваження.** 1) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, тобто є визначеною. 2) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР менше числа невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків, тобто є невизначеною.

### ***Методи розв'язку СЛАР***

*Алгоритм розв'язку системи рівнянь (1)* ***методом Гаусса***:

1. Записати розширену матрицю $\widetilde{A}$ вихідної системи рівнянь.
2. Привести матрицю $\widetilde{A}$ до ступінчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків. Якщо в отриманій ступінчастій матриці $\widetilde{B}$ є рядок, у якому перший ненульовий елемент перебуває на останньому місці, то вихідна система розв'язків не має (несумісна).
3. Якщо система рівнянь сумісна, то в системі рівнянь із матрицею $\widetilde{B}$ необхідно відкинути рівняння, які відповідають нульовим рядкам матриці $\widetilde{B}$. У рівняннях, що залишилися, виділяємо головні невідомі (визначник, складений з коефіцієнтів при них, не дорівнює еулю), а члени з вільними невідомими переносимо в праві частини.
4. Послідовно виражаємо головні невідомі через вільні, рухаючись від останнього рівняння до першого, отримаємо загальний розв'язок системи.
5. Надаючи вільним невідомим різні числові значення й обчислюючи відповідні значення головних невідомих будемо одержувати різні розв'язки вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо частинні розв'язки системи.

*Приклад.* Розв'язати методом Гаусса системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+3y=12, \\ 4x-5y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$

*Відповідь:* 1) $x=3$, $y=2$; 2) $x=1{,}5-2{,}5y$; 3) $\varnothing$.

### ***Метод Крамера***

Розглянемо тепер систему $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь із $n$ невідомими ($n \ge 2$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Одержимо явні вирази для розв'язку системи (2) через коефіцієнти $a_{ij}$ цієї системи й вільні члени $b_i$ в припущенні, що визначник системи, тобто визначник її матриці, не дорівнює нулю.

**Теорема 3 (Теорема Крамера)** Якщо визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, тобто є сумісною й визначеною. Цей розв'язок визначається за правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $\Delta_i$ – визначник, який отримано з визначника $\Delta$ заміною $i$-го стовпця стовпцем вільних членів.

*Наслідок.* Якщо система $n$ однорідних лінійних рівнянь із $n$ невідомими має хоча б один нетривіальний розв'язок, то її визначник дорівнює нулю.

*Зауваження.* Система (2) може:

1) мати єдиний розв'язок, коли $\Delta \ne 0$;
2) мати нескінченну множину розв'язків, коли $\Delta = \Delta_i = 0$, $i = \overline{1,n}$;

3) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ й хоча б один з визначників $\Delta_i$, $i = \overline{1,n}$, відмінний від нуля.

*Приклад.* Розв'язати методом Крамера системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+3y=12, \\ 4x-5y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$

*Відповідь:* 1) $x=3$, $y=2$; 2) $R$, тому що $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$; 3) $\varnothing$, тому що $\Delta = 0$, $\Delta_x = 36$, $\Delta_y = -60$.

### *Матричний спосіб*

Систему $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь із $n$ невідомими (2) можна записати в матричному виді: $A \cdot X = B$, де $A$ – матриця системи, $X$ – матриця-стовпець невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $B$ – матриця-стовпець вільних членів. Якщо $A$ – невироджена матриця, то після множення ліворуч на $A^{-1}$ обидві частини матричного рівняння $A \cdot X = B$, одержимо $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = A^{-1} \cdot B$. Так як $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot X = EX = X$, то очевидно

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

## ПРАКТИКА

**№ 1** Обчислити ранг матриці.

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 2$$

$$\text{або } \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow rangA = 2.$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 2.$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow rangA = 2.$$

**№ 2** Знайти ранг матриць:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. ( $\det A = 14$ )

*Розв'язання.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\mathrm{III} \cdot 2 - \mathrm{I}}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\mathrm{III} \cdot 3 - \mathrm{II} \cdot 10} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 3.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

*Розв'язання.*

$$A=\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\4&6&4\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{III}\cdot\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\2&3&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{III}-\text{II}}\begin{pmatrix}3&5&4\\2&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{II}\cdot3-\text{I}\cdot2}\begin{pmatrix}3&5&4\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=2\cdot$$

3) $A=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&0&0&0\\1&5&3&2\end{pmatrix}$.

*Розв'язання.*

$$A=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&0&0&0\\1&5&3&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{III}\leftrightarrow\text{II}}\begin{pmatrix}2&4&6&1\\1&5&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{II}\cdot2-\text{I}}\begin{pmatrix}2&4&6&1\\0&6&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rangA=2.$$

**№ 3** Розв'язати методом Гаусса системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1)\ \begin{cases}x_1+\ x_2+x_3\ +x_4=10,\\ \qquad x_2\qquad -x_4=-2,\\ x_1\qquad\qquad +x_4=5,\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=13.\end{cases}$$

*Розв'язання.* Розширена матриця $\widetilde{A}$ системи рівнянь має вигляд:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\1&0&0&1&5\\2&2&1&1&13\end{pmatrix}.$$

Виконавши елементарні перетворення рядків, приведемо матрицю $A$ до східчастого виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\1&0&0&1&5\\2&2&1&1&13\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -\text{I}\\ \text{IV}-2\cdot\text{I}\end{array}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&-1&-1&0&-5\\0&0&-1&-1&-7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ +\text{II}\\ \\ \end{array}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&0&-1&-1&-7\\0&0&-1&-1&-7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ -\text{III}\end{array}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&0&-1&-1&-7\\0&0&0&0&0\end{array}\right)=\widetilde{B}.$$

З виду матриці $\widetilde{B}$ випливає, що вихідна система рівнянь сумісна й що головними невідомими є $x_1, x_2, x_3$, а вільною невідомою – $x_4$. Виразимо головні невідомі $x_1, x_2, x_3$, через вільну невідому $x_4$, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10-x_4,\\ \quad x_2\qquad=-2+x_4,\\ \qquad -x_3=-7+x_4.\end{cases}$$

Рухаючись від останнього рівняння до першого, будемо мати

$$\begin{cases}x_1=5-x_4,\\ x_2=-2+x_4,\\ x_3=7-x_4.\end{cases}$$

Поклавши $x_4=c$, де $c$ – довільне число, одержимо загальний розв'язок вихідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = 5 - c, \\ x_2 = -2 + c, \\ x_3 = 7 - c, \\ x_4 = c. \end{cases}$$

При будь-якому дійсному $c$ $x_1, x_2, x_3,$ задовольняють усім рівнянням вихідної системи.

$$2)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 3 - \mathrm{I}\cdot 7 \\ \cdot 3 - \mathrm{I}\cdot 5 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 5 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II}\cdot 2 \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

*Відповідь:* система несумісна.

$$3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_3 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -3\cdot\mathrm{I} \\ -3\cdot\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \\ +\mathrm{III} \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матриця ступінчаста, система сумісна, невизначена. $x_3, x_4, x_5$ – головні невідомі, $x_1, x_2$ – вільні невідомі.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ x_4 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 1 + 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

**№ 4** Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Обчислимо визначник системи $\Delta$ й визначники $\Delta_x$, $\Delta_y$, $\Delta_z$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{vmatrix}=-11\neq 0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=33,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 5\end{vmatrix}=-55,\ \Delta_z=\begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=-44.$$

За формулами Крамера одержуємо єдиний розв'язок системи:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{33}{-11}=-3,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-55}{-11}=5,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-44}{-11}=4.$$

*Відповідь:* $(-3;\ 5;\ 4)$.

**№ 5** Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases}3x+2y+z=5,\\ x+y-z=-2,\\ 4x-y+5z=3.\end{cases}$$

*Розв'язання*. Перепишемо вихідну систему у вигляді

$$A\cdot X=B,$$

де $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці системи:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{vmatrix}=-11\neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці системи й потім складемо обернену матрицю:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=4,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-9,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-11,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=11,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -11 & -3\\ -9 & 11 & 4\\ -5 & 11 & 1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок:

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -11 & -3\\ -9 & 11 & 4\\ -5 & 11 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}33\\ -55\\ -44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 5\\ 4\end{pmatrix}.$$

*Відповідь:* $(-3;\ 5;\ 4)$.

### Задачі для самостійного розв'язання

**№ 1** Дослідити на сумісність і знайти розв'язок СЛАУ у випадку сумісності:

1) $\begin{cases}2x+y-z=0,\\ x+2y+z=0,\\ 2x-y+3z=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y-4z-1=0,\\ 2x+y-5z+1=0,\\ x-y-z+2=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x-y+2z=5,\\ 2x-y-z=2,\\ 4x-2y-2z=-3.\end{cases}$

**№ 2** Знайти розв'язок СЛАР трьома способами, якщо це можливо:

1) $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x-y-3z=13, \\ 3x-2y+4z=-15; \end{cases}$ $\Delta=-34$, $\Delta_1=34$, $\Delta_2=68$, $\Delta_3=136$ 2) $\begin{cases} x+y-2z=4, \\ 2x-3y+z=3, \\ 3x-2y+6z=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+2y+z=1, \\ 3x+y+2z=-2, \\ 4x-y-z=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x-3y+6z=6, \\ 2x-y-3z=8, \\ x+4y-2z=9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=11, \\ x+y+2z=8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y-4z=-2, \\ 6x+2y+z=9, \\ 2x+4y-3z=3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+y+z=3, \\ 2x-6y-z=8, \\ x+y+z=1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+4y+z=4, \\ 3x+6y+2z=4, \\ 4x-y-3z=1; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x-3y+z=-2, \\ 4x+y-z=3, \\ 5x+2y-3z=0; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ -3x+y+z=9, \\ 2x-3y+2z=9; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5, \\ x-3y-z=1. \end{cases}$

**№ 3** Знайти загальний розв'язок СЛАР:

1) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1-5x_2-8x_3=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7; \\ x_1+8x_2-7x_3=12. \end{cases}$

## 6 ОДНОРІДНІ СЛАР, ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ'ЯЗКІВ

Система лінійних рівнянь (1) називається **однорідною**, якщо праві частини всіх рівнянь дорівнюють нулю.

Однорідна система є завжди сумісною, тому що має нульовий (**тривіальний**) розв'язок: $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$. Крім нульового розв'язку, в однорідної системи можуть бути й ненульові розв'язки.

**Теорема 1** Якщо число рівнянь однорідної системи менше числа невідомих, то система має нетривіальні розв'язки.

*Фундаментальною* системою розв'язків системи (1) називається сукупність будь-яких $n-rangA$ частинних, лінійно незалежних розв'язків однорідної системи (частинний розв'язок може бути записаний у вигляді стовпця), де $n$ – число невідомих у системі (1), $A$ – матриця системи.

*Алгоритм знаходження ФСР системи рівнянь (1)*:

1. Записати матрицю вихідної системи рівнянь.
2. Привести матрицю до ступінчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків.
3. Виділяємо головні невідомі (визначник, складений з коефіцієнтів при них, не дорівнює нулю), а члени з вільними невідомими переносимо в праві частини.
4. Послідовно виражаємо головні невідомі через вільні, рухаючись від останнього рівняння до першого, отримаємо загальний розв'язок системи.
5. Надаючи вільним невідомим числові значення (для вільних невідомих надаємо значень у вигляді діагональної матриці) й обчислюючи відповідні значення головних невідомих будемо одержувати різні розв'язки вихідної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, отримаємо частинні розв'язки системи.

## ПРАКТИКА

*Приклад 1* Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної СЛАР

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

*Розв'язання*. Ранг матриці системи дорівнює двом, число невідомих дорівнює п'яти, тому будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї системи рівнянь складається з трьох розв'язків. Розв'яжемо систему, обмежившись першими двома незалежними рівняннями й вважаючи $x_3, x_4, x_5$ вільними невідомими. Ми отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{8}x_3 + \dfrac{3}{8}x_4 - \dfrac{1}{2}x_5, \\ x_2 = \dfrac{7}{8}x_3 - \dfrac{25}{8}x_4 + \dfrac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

Беремо, далі, наступні три незалежних вектори (8, 0, 0), (0, 8, 0), (0, 0, 2). Підставляючи компоненти кожного з них в загальний розв'язок в якості значень для вільних невідомих й обчислюючи значення для $x_1, x_2$, отримаємо фундаментальну систему розв'язків заданої системи рівнянь:

$$\alpha_1 = (19,\ 7,\ 8,\ 0,\ 0), \qquad \alpha_2 = (3,\ -25,\ 0,\ 8,\ 0), \qquad \alpha_3 = (-1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 2).$$

**Завдання для самостійного розв'язання**

**№ 1** Знайти загальний розв'язок та ФСР однорідної СЛАР:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

## 7 ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ Й ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ

Нехай дана невироджена квадратна матриця $A$, ненульовий стовпець $X$ і число $\lambda$. Якщо виконується рівність $AX = \lambda X$, то число $\lambda$ називають **власним значенням** матриці $A$, а стовпець $X$ – **власним вектором** (**стовпцем**), відповідним до власного значення $\lambda$.

Розглянемо матричну рівність $AX = \lambda X$ і виконаємо деякі перетворення:

$$AX - \lambda X = \theta,$$
$$AX - \lambda EX = \theta,$$
$$(A - \lambda E)X = \theta. \tag{2}$$

Одержали однорідну СЛАР. Існування ненульового стовпця $X$ рівносильне існуванню ненульового розв'язку цієї системи, тобто визначник матриці цієї системи повинен дорівнювати нулю: $|A - \lambda E| = 0$ – рівняння для відшукання власних значень, яке називають **характеристичним рівнянням**.

Для відшукання власних векторів підставляємо знайдені $\lambda$ в систему (2) і розв'язуємо однорідні СЛАР.

*Зауваження.* Нехай дана квадратна матриця порядку $n$, тоді:

1) число коренів характеристичного рівняння, відмінних від нуля, дорівнює рангу матриці, тобто ранг матриці менше $n$ тоді й тільки тоді, коли хоча б один корінь характеристичного рівняння дорівнює нулю.
2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \Delta(A)$.
3) якщо матриця симетрична, то всі $n$ коренів характеристичного рівняння дійсні.

### ПРАКТИКА

*Приклад.* Знайти власні значення й відповідні їм власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння й знайдемо його корені, тобто власні значення даної матриці:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(4-\lambda^2\right)\left(\lambda+3\right)+3-2\left(\lambda+3\right)-5\left(\lambda+2\right)=0,$$

$$4\lambda-3\lambda^2-\lambda^3+12+3-2\lambda-6-5\lambda-10=0,$$

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0,$$

$$\left(\lambda+1\right)^3=0,$$

$$\lambda_{1,2,3}=-1.$$

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda=-1$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I}\cdot 5 \\ \cdot 3 + \mathrm{I} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, відповідну до отриманої матриці й знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, відповідний до власного значення $\lambda=-1$, буде мати вигляд $\bar{x}=\left(-c;-c;c\right)$, де $c=const\neq 0$.

*Відповідь:* для $\lambda=-1$ $X=\left(-c;-c;c\right)$, $c=const\neq 0$.

**Задачі для самостійного розв'язання**

**№ 1** Знайти власні значення й власні вектори наступних матриць:

1) $A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $D=\begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 8 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

## 8 КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

**Квадратичною формою** називається однорідний многочлен другого степеня від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ виду

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + +a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

де коефіцієнти $a_{ij}$, ($i, j = 1,...,n$) – дійсні числа. Вважають $a_{ik} = a_{ki}$.

Із квадратичною формою можна зв'язати квадратну симетричну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

складену з коефіцієнтів квадратичної форми. Ранг $r$ матриці називається **рангом квадратичної форми**. Якщо $r=n$, то квадратична форма $n$ змінних називається **невиродженою**. Якщо ця матриця діагональна, то говорять квадратична форма має **канонічний** (діагональний) вид:

$$f=b_1 y_1^2+b_2 y_2^2+\cdots+b_n y_n^2.$$

Квадратичну форму можна записати в матричному виді:

$$f=x_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)+\cdots+x_n\left(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n\right)=$$

$$=\left(x_1,x_2,x_n\right)\cdot\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}=\left(x_1,x_2,x_n\right)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$f=X^t\cdot A\cdot X\ ,$$

де $A$ – матриця квадратичної форми, а $X$ – матриця-стовпець $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

*Основна задача теорії квадратичних форм* – за допомогою різних замін змінних (лінійних перетворень) привести квадратичну форму до канонічного виду

Приведення квадратичних форм до діагонального виду **невиродженим** лінійним перетворенням змінних може бути здійснене нескінченним числом способів. При цьому коефіцієнти при квадратах змінних у діагональній формі можуть не збігатися, але кількість додатних, від'ємних і нульових коефіцієнтів повинне збігатися.

Стовпець $X$ називається **нормованим**, якщо сума квадратів його елементів дорівнює одиниці, тобто

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1 \text{ або } X^tX=1.$$

Два стовпці $X$ й $Y$, що мають однакове число елементів, називаються **ортогональними**, якщо сума добутків їх відповідних елементів дорівнює нулю, тобто

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=0 \text{ або } X^tY=Y^tX=0.$$

Квадратна матриця називається **ортогональною**, якщо всі її стовпці нормовані й попарно ортогональні. Щоб квадратна матриця $A$ була ортогональною, необхідно й достатньо, щоб $A^tA=E$. Лінійне перетворення змінних називається **ортогональним**, якщо його матриця ортогональна.

Властивості ортогональних матриць:

1. Визначник ортогональної матриці рівний $\pm 1$.
2. Добуток ортогональних матриць є ортогональна матриця.
3. Одинична матриця ортогональна.
4. Для ортогональної матриці $A$ обернена матриця існує й рівна транспонованій $A^{-1}=A^t$, причому обернена матриця ортогональна.

Квадратична форма називається **додатно визначеною**, якщо при будь-яких значеннях аргументів $f\geq 0$, причому $f=0$ тоді й тільки тоді, коли $x_1=x_2=...=x_n=0$.

Щоб квадратична форма була додатно визначеною необхідно й достатньо, щоб при приведенні її до діагонального виду **невиродженим** лінійним перетворенням змінних усі коефіцієнти при квадратах нових змінних були додатні.

Квадратична форма $f$ називається **від'ємно визначеною**, якщо форма $-f$ – додатно визначена.

Квадратична форма називається **невизначеною**, якщо вона не є визначеною ні додатно, ні від'ємно.

Якщо квадратичну форму можна представити у вигляді

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \text{ де } \lambda = 0, \pm 1,$$

те говорять, що квадратична форма має **нормальний вид**.

***Методи приведення квадратичної форми до канонічного виду***

*Метод Лагранжа.* Виділення повних квадратів відносно змінних.

*Метод власних векторів.*

Алгоритм:

1) Записати матрицю $A$ розглянутої квадратичної форми.

2) Визначити з рівняння $|A - \lambda E| = 0$ власні значення цієї матриці.

3) Для кожного власного значення $\lambda_k$ визначити відповідні йому власні вектори ($n$ мірні матриці-стовпці).

4) Після того, як будуть знайдені всі $n$ власних векторів матриці $A$, потрібно координати цих векторів помістити у відповідні стовпці шуканої матриці $B$.

5) Написати канонічний вид квадратичної форми

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ власні значення матриці $A$.

6) Записати вид лінійного перетворення змінних $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, яке приводить задану квадратичну форму $f = X^t \cdot A \cdot X$ до канонічного виду.

## ПРАКТИКА

*Приклад 1* Привести до канонічного виду квадратичну форму методом Лагранжа

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

*Розв'язання*. Зробимо заміну змінних $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тоді квадратична форма перетвориться до виду

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

Зробимо нову заміну змінних

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3),\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,$$

одержимо

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$

Після заміни змінних $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратична форма $f$ буде приведена до канонічного виду

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2.$$

*Відповідь.* $f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2$.

*Приклад 2* Привести ортогональним перетворенням змінних квадратичну форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ до канонічного виду.

*Розв'язання*. Запишемо матрицю заданої квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння $|A-\lambda E|=0$:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0.$$

Власними значеннями матриці $A$ є числа $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, $\lambda_4=-3$.

*Відповідь.* $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$.

## Завдання для самостійного розв'язання

**№ 1** Привести до канонічного виду квадратичну форму методом Лагранжа:

1) $f=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$; 2) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

**№ 2** Привести до канонічного виду квадратичну форму методом власних векторів

1) $f=x_1^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$; 2) $f=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$;

3) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.