ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити визначник Δ:

1) розклавши його по елементах i-го рядка;

2) розклавши його по елементах j-го стовпця;

3) привівши його до трикутного вигляду.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\2&3&0&6\\2&-2&1&4\\3&1&-2&-1\end{vmatrix},\ i=3,\ j=2.$$

Розв'язання.

1) Застосуємо теорему про розклад визначника по елементах рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\2&3&0&6\\2&-2&1&4\\3&1&-2&-1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2&4&1\\3&0&6\\1&-2&-1\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&1\\2&0&6\\3&-2&-1\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&-2&1\\2&3&6\\3&1&-1\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}-1&-2&4\\2&3&0\\3&1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot1\cdot6-2\cdot(-1)\cdot64+1\cdot1\cdot(-38)+4\cdot(-1)\cdot(-30)=222.$$

2) Застосуємо теорему про розклад визначника по елементах стовпця:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\2&3&0&6\\2&-2&1&4\\3&1&-2&-1\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&0&6\\2&1&4\\3&-2&-1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&1\\2&1&4\\3&-2&-1\end{vmatrix}+$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&1\\2&0&6\\3&-2&-1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&1\\2&0&6\\2&1&4\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot(-1)\cdot(-28)+3\cdot1\cdot42-2\cdot(-1)\cdot64+1\cdot1\cdot24=222.$$

3) Застосуємо властивості визначників, отримаємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\2&3&0&6\\2&-2&1&4\\3&1&-2&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\+\mathrm{I}\cdot2\\-\mathrm{II}\\+\mathrm{I}\cdot3\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&-2&4&1\\0&-1&8&8\\0&-5&1&-2\\0&-5&10&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\-\mathrm{II}\cdot5\\-\mathrm{III}\end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 8 & 8\\ 0 & 0 & -39 & -42\\ 0 & 0 & 9 & 4\end{vmatrix}\cdot 13+\mathrm{III}\cdot 3 \qquad =\frac{1}{13}\begin{vmatrix}-1 & -2 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 8 & 8\\ 0 & 0 & -39 & -42\\ 0 & 0 & 0 & -74\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{13}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-39)\cdot(-74)=222.$$

2. Дано дві матриці *A* і *B*:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) AB; 2) BA; 3) A^{-1}; 4) $\left(AB+3BA-\det(A)\cdot A^{-1}\right)^t$.

Розв'язання.

1) $$AB=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 3+0\cdot 3+2\cdot 4 & -1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot 7 & -1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 5\\ 1\cdot 3+(-8)\cdot 3+5\cdot 4 & 1\cdot(-1)+(-8)\cdot 5+5\cdot 7 & 1\cdot 0+(-8)\cdot 1+5\cdot 5\\ 3\cdot 3+0\cdot 3+2\cdot 4 & 3\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot 7 & 3\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 15 & 10\\ -1 & -6 & 17\\ 17 & 11 & 10\end{pmatrix}.$$

2) $$BA=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+0\cdot 3 & 3\cdot 0+(-1)\cdot(-8)+0\cdot 0 & 3\cdot 2+(-1)\cdot 5+0\cdot 2\\ 3\cdot(-1)+5\cdot 1+1\cdot 3 & 3\cdot 0+5\cdot(-8)+1\cdot 0 & 3\cdot 2+5\cdot 5+1\cdot 2\\ 4\cdot(-1)+7\cdot 1+5\cdot 3 & 4\cdot 0+7\cdot(-8)+5\cdot 0 & 4\cdot 2+7\cdot 5+5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 5 & -40 & 33\\ 18 & -56 & 53\end{pmatrix}.$$

3) Знайдемо обернену матрицю, тобто A^{-1}.

Обчислимо визначник матриці *A*:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=64$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-8 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-16,\ A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}=13,\ A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -8\\ 3 & 0\end{vmatrix}=24,$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0,\ A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-8,\ A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}0 & 2\\ -8 & 5\end{vmatrix}=16,\ A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=7,\ A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -8\end{vmatrix}=8.$$

Будемо мати: $A^{-1}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}-16 & 0 & 16\\ 13 & -8 & 7\\ 24 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

4) $\left(AB+3BA-\det(A)\cdot A^{-1}\right)^t=$

$$=\left[\begin{pmatrix}5 & 15 & 10\\ -1 & -6 & 17\\ 17 & 11 & 10\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 5 & -40 & 33\\ 18 & -56 & 53\end{pmatrix}-64\cdot\frac{1}{64}\begin{pmatrix}-16 & 0 & 16\\ 13 & -8 & 7\\ 24 & 0 & 8\end{pmatrix}\right]^t=$$

$$=\left[\begin{pmatrix}5 & 15 & 10\\ -1 & -6 & 17\\ 17 & 11 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & 24 & 3\\ 15 & -120 & 99\\ 54 & -168 & 159\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-16 & 0 & 16\\ 13 & -8 & 7\\ 24 & 0 & 8\end{pmatrix}\right]^t=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 39 & -3\\ 1 & -118 & 109\\ 47 & -157 & 161\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}9 & 1 & 47\\ 39 & -118 & -157\\ -3 & 109 & 161\end{pmatrix}.$$

3. Знайти x з рівняння:

1) $\begin{vmatrix}-x^2 & 4 & 9\\ -x & 2 & 3\\ -33 & 33 & 33\end{vmatrix}=0$; **2)** $\begin{vmatrix}x^2 & -3 & 2\\ x & 1 & 33\\ 0 & -33 & 4\end{vmatrix}=0$; **3)** $\begin{vmatrix}3 & x & 132\\ 2 & -1 & -99\\ x+10 & 1 & -33\end{vmatrix}=0$.

Розв'язання.

1) Застосуємо властивості визначника, а потім обчислимо:

$$-33\begin{vmatrix}x^2 & 4 & 9\\ x & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}x^2 & 4 & 9\\ x & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$2x^2+9x+12-18-3x^2-4x=0,$$
$$-x^2+5x-6=0,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x_1=2,\ x_2=3.$$

2) Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix}x^2 & -3 & 2\\ x & 1 & 33\\ 0 & -33 & 4\end{vmatrix}=0,$$

$$4x^2-66x+1089x^2+12x=0,$$
$$1093x^2-54x=0,$$
$$x(1093x-54)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ 1093x-54=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\dfrac{54}{1093} \end{array}\right..$$

3) Застосуємо властивості визначника, а потім обчислимо:

$$33\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ x+10 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$
$$\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ x+10 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$
$$3+8-3x(x+10)+4(x+10)+9+2x=0,$$
$$20-3x^2-30x+4x+40+2x=0,$$
$$-3x^2-24x+60=0,$$
$$x^2+8x-20=0,$$
$$x_1=-10,\ x_2=2.$$

4. Розв'язати нерівності:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 33 & -66 & 33 \end{vmatrix}<1$**;** **2)** $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ 33 & 33 & 66 \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix}>0$**.**

Розв'язання.

1) Застосуємо властивості визначника, а потім обчислимо:

$$33\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}<1,$$
$$33(3x-2+4-x-12+2)<1,$$
$$33(2x-8)<1,$$
$$66(x-4)<1,$$
$$x-4<\frac{1}{66},$$
$$x<4\frac{1}{66}.$$

2) Застосуємо властивості визначника, а потім обчислимо:

$$33\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix} > 0,$$

$$-2x-3+10(x+2)-5+12+x(x+2)>0,$$

$$-2x-3+10x+20-5+12+x^2+2x>0,$$

$$x^2+10x+24>0,$$

$$(x+6)(x+4)>0,$$

$$x\in(-\infty;-6)\cup(-4;+\infty).$$

5. Перевірити на сумісність систему рівнянь й у випадку сумісності розв'язати її:

1) методом Гаусса;

2) по формулах Крамера;

3) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);

$$\begin{cases} 24x_1+2x_2-x_3=25, \\ 2x_1-19x_2+3x_3=-27, \\ x_1+5x_2-22x_3=-55. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Приведемо розширену матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 2 & -19 & 3 & -27 \\ 1 & 5 & -22 & -55 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\mathrm{III}\cdot 2 \\ \cdot 24-\mathrm{I} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 0 & -29 & 47 & 83 \\ 0 & 118 & -527 & -1345 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 29-\mathrm{II}\cdot 118 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 0 & -29 & 47 & 83 \\ 0 & 0 & -9737 & -29211 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1/9737) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 0 & -29 & 47 & 83 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}\tilde{A}=3=n=3 \Rightarrow$ система сумісна і має єдиний розв'язок. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 24x_1+2x_2-x_3=25, \\ \quad -29x_2+47x_3=83, \\ \qquad x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{25-2\cdot 2+3}{24}=\dfrac{24}{24}=1, \\ x_2=\dfrac{83-47\cdot 3}{-29}=\dfrac{-58}{-29}=2, \\ x_3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=3. \end{cases}$$

2) Розв'яжемо систему за формулами Крамера. Для цього обчислимо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 24 & 2 & -1 \\ 2 & -19 & 3 \\ 1 & 5 & -22 \end{vmatrix}=9737,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 25 & 2 & -1 \\ -27 & -19 & 3 \\ -55 & 5 & -22 \end{vmatrix} = 9737,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 24 & 25 & -1 \\ 2 & -27 & 3 \\ 1 & -55 & -22 \end{vmatrix} = 19474,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 24 & 2 & 25 \\ 2 & -19 & -27 \\ 1 & 5 & -55 \end{vmatrix} = 29211.$$

Будемо мати: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9737}{9737} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{19474}{9737} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{29211}{9737} = 3$.

3) Розв'яжемо систему засобами матричного числення. Для цього перепишемо систему в матричному вигляді: $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 24 & 2 & -1 \\ 2 & -19 & 3 \\ 1 & 5 & -22 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 25 \\ -27 \\ -55 \end{pmatrix}$.

Розв'язок буде: $X = A^{-1}B$. Знайдемо обернену матрицю, тобто A^{-1}, за допомогою елементарних перетворень:

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -19 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -22 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{III}\cdot 2 \\ \cdot 24 - \mathrm{I} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -29 & 47 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 118 & -527 & 1 & 0 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 29 + \mathrm{II}\cdot 2 \\ \\ \cdot 29 - \mathrm{II}\cdot 118 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 696 & 0 & 65 & 29 & 2 & -4 \\ 0 & -29 & 47 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9737 & -29 & 118 & 460 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 749 + \mathrm{III}\cdot 5 \\ \cdot 9737 + \mathrm{III}\cdot 47 \\ \cdot(-1) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 521304 & 0 & 0 & 21576 & 2088 & -696 \\ 0 & -282373 & 0 & -1363 & 15283 & 2146 \\ 0 & 0 & 9737 & 29 & -118 & -460 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 13/696 \\ \cdot(-1/29) \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9737 & 0 & 0 & 403 & 39 & -13 \\ 0 & 9737 & 0 & 47 & -527 & -74 \\ 0 & 0 & 9737 & 29 & -118 & -460 \end{array}\right).$$

Будемо мати: $A^{-1} = \frac{1}{9737}\begin{pmatrix} 403 & 39 & -13 \\ 47 & -527 & -74 \\ 29 & -118 & -460 \end{pmatrix}$. Підставимо та отримаємо:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{9737}\begin{pmatrix} 403 & 39 & -13 \\ 47 & -527 & -75 \\ 29 & -118 & -460 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ -27 \\ -55 \end{pmatrix} = \frac{1}{9737}\begin{pmatrix} 10075 - 1053 + 715 \\ 1175 + 14229 + 4070 \\ 725 + 3186 + 25300 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9737}\begin{pmatrix} 9737 \\ 19474 \\ 29211 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (знайти загальний розв'язок і ФСР):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \cdot 2 \\ -\mathrm{II} \cdot 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 7 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang} A = 2 < n = 3 \Rightarrow$ система сумісна і має безліч розв'язків, $n - r = 3 - 2 = 1$ – кількість розв'язків ФСР. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad -7x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{7}x_3, \\ x_2 = \frac{11}{7}x_3 \end{cases} \text{ – загальний розв'язок;}$$

$$\begin{cases} x_1 = -5, \\ x_2 = 11, \\ x_3 = 7 \end{cases} \text{ – фундаментальна система розв'язків.}$$

7. Знайдіть лінійну залежність векторів $\bar{a}(24;\ 2;\ 1)$, $\bar{b}(2;\ -19;\ 5)$, $\bar{c}(-1;\ 3;\ -22)$, $\bar{d}(50;\ -54;\ -110)$.

Розв'язання.

Вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ лінійно залежні, тому один з них є лінійною комбінацією інших векторів, наприклад, $\bar{d} = x_1\bar{a} + x_2\bar{b} + x_3\bar{c}$. Підставивши координати векторів, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 24x_1 + 2x_2 - x_3 = 50, \\ 2x_1 - 19x_2 + 3x_3 = -54, \\ x_1 + 5x_2 - 22x_3 = -110. \end{cases}$$

Приведемо розширену матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 2 & -19 & 3 & -54 \\ 1 & 5 & -22 & -110 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\mathrm{III}\cdot 2 \\ \cdot 24-\mathrm{I}\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 0 & -29 & 47 & 166 \\ 0 & 118 & -527 & -2690 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 29+\mathrm{II}\cdot 118\end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 0 & -29 & 47 & 166 \\ 0 & 0 & -9737 & -58422 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1/9737)\end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 50 \\ 0 & -29 & 47 & 166 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\tilde{A} = 3 = n = 3 \Rightarrow$ система сумісна і має єдиний розв'язок. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 24x_1 + 2x_2 - x_3 = 50, \\ \quad -29x_2 + 47x_3 = 166, \\ \qquad x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{50 - 2\cdot 4 + 6}{24} = \dfrac{48}{24} = 2, \\ x_2 = \dfrac{166 - 47\cdot 6}{-29} = \dfrac{-116}{-29} = 4, \\ x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 6. \end{cases}$$

Отже, лінійна залежність векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ має вигляд: $\bar{d} = 2\bar{a} + 4\bar{b} + 6\bar{c}$.

8. Дано вектори $\bar{a} = -68\bar{m} + 6\bar{n}$ і $\bar{b} = 2\bar{m} - 102\bar{n}$, де $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 5$, $\angle(\bar{m}, \bar{n}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайти:

1) $\left(-\bar{a} + 2\bar{b}\right)\cdot\left(2\bar{a} + 8\bar{b}\right)$**;**
2) $\left|\left[-\bar{a} + 2\bar{b}, 2\bar{a} + 8\bar{b}\right]\right|$**;**
3) **площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.**

Розв'язання.

1) Знайдемо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a} = -68\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} - 102\bar{n}$. Потім

$$-\bar{a} + 2\bar{b} = 68\bar{m} - 6\bar{n} + 2(2\bar{m} - 102\bar{n}) = 68\bar{m} - 6\bar{n} + 4\bar{m} - 204\bar{n} = 72\bar{m} - 210\bar{n},$$

$$2\bar{a} + 8\bar{b} = 2(-68\bar{m} + 6\bar{n}) + 8(2\bar{m} - 102\bar{n}) = -136\bar{m} + 12\bar{n} + 16\bar{m} - 816\bar{n} = -120\bar{m} - 804\bar{n},$$

$$\left(-\bar{a} + 2\bar{b}\right)\cdot\left(2\bar{a} + 8\bar{b}\right) = (72\bar{m} - 210\bar{n})\cdot(-120\bar{m} - 804\bar{n}) =$$

$$= -72\bar{m}\cdot 120\bar{m} - 72\bar{n}\cdot 804\bar{m} + 210\bar{m}\cdot 120\bar{n} + 210\bar{n}\cdot 804\bar{n} =$$

$$= -8640\bar{m}\cdot\bar{m} - 57888\bar{n}\cdot\bar{m} + 25200\bar{m}\cdot\bar{n} + 168840\bar{n}\cdot\bar{n} =$$

$$= -8640\bar{m}\cdot\bar{m} - 32688\bar{m}\cdot\bar{n} + 168840\bar{n}\cdot\bar{n} =$$

$$= -8640|\bar{m}|\cdot|\bar{m}| - 32688|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}\right) + 168840|\bar{n}|\cdot|\bar{n}| =$$

$$= -8640\cdot 3^2 - 32688\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{2} + 168840\cdot 5^2 = -8640\cdot 3^2 + 168840\cdot 5^2 = 4143240.$$

2) Скористаємося знайденими в пункті 1) векторами, будемо мати:

$$\left|\left[-\bar{a} + 2\bar{b}, 2\bar{a} + 8\bar{b}\right]\right| = \left|\left[72\bar{m} - 210\bar{n}, -120\bar{m} - 804\bar{n}\right]\right| =$$

$$= \left|-72\cdot 120[\bar{m}\cdot\bar{m}] + 210\cdot 120[\bar{n}\cdot\bar{m}] - 72\cdot 804[\bar{m}\cdot\bar{n}] + 210\cdot 804[\bar{n}\cdot\bar{n}]\right| = \left|-72(1154[\bar{m}\cdot\bar{n}])\right| =$$

$$= 83088\left|[\bar{m}\cdot\bar{n}]\right| = 83088\cdot|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{m}, \bar{n}}\right) = 83088\cdot 3\cdot 5\cdot\sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= 83088\cdot 3\cdot 5 = 1246320.$$

3) Запишемо формулу площі трикутника, підставимо вихідні дані, будемо мати:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{a},\,\overline{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[-68\overline{m}+6\overline{n},\;2\overline{m}-102\overline{n}\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left[4\left(-34\overline{m}+3\overline{n},\;\overline{m}-51\overline{n}\right)\right]\right| = 2\left|\left[-34\overline{m}+3\overline{n},\;\overline{m}-51\overline{n}\right]\right| =$$

$$= 2\left|-34\left[\overline{m}\cdot\overline{m}\right]+3\left[\overline{n}\cdot\overline{m}\right]+1734\left[\overline{m}\cdot\overline{n}\right]-153\left[\overline{n}\cdot\overline{n}\right]\right| = 2\left|1731\left[\overline{m}\cdot\overline{n}\right]\right| =$$

$$= 3462\left|\left[\overline{m}\cdot\overline{n}\right]\right| = 3462\cdot\left|\overline{m}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\overline{m},\,\overline{n}}\right) = 3462\cdot 3\cdot 5\cdot\sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= 3462\cdot 3\cdot 5 = 51930 \text{ (кв. од.)}$$

9. По координатах $A(-12;34;-24)$, $B(-2;-3;-1)$, $C(2;3;-4)$ для вказаних векторів знайти:

1) **скалярний добуток векторів $\overline{a} = -2\overline{AB}+6\overline{BC}$ і $\overline{b} = 2\overline{AC}-\overline{CB}$;**
2) **модуль векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (відповідь округліть до десятих);**
3) **координати точки *M*, яка ділить напрямлений відрізок *AB* у відношенні $N:2p$;**
4) **перевірити, чи ортогональні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$;**
5) **перевірити, чи колінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$;**
6) **перевірити, компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c} = (0,1,2)$;**
7) **сила $\overline{F} = \overline{a}$ прикладена до точки *A*. Обчислити роботу сили $\overline{F}$ у випадку, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку *B*, й модуль моменту сили $\overline{F}$ відносно точки *B* (відповідь округліть до одиниць);**
8) **обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках *A*, *B*, *C* и $D(0,0,34)$ (відповідь округліть до одиниць).**

Розв'язання.

1) Знайдемо координати необхідних векторів:

$$\overline{AB}(-2+12;\,-3-34;\,-1+24) = (10;\,-37;\,23),\; -2\overline{AB} = -2(10;\,-37;\,23) = (-20;\,74;\,-46),$$

$$\overline{BC}(2+2;\,3+3;\,-4+1) = (4;\,6;\,-3),\; 6\overline{BC} = 6(4;\,6;\,-3) = (24;\,36;\,-18),$$

$$\overline{a} = -2\overline{AB}+6\overline{BC} = (-20;\,74;\,-46)+(24;\,36;\,-18) = (4;\,110;\,-64);$$

$$\overline{AC}(2+12;\,3-34;\,-4+24) = (14;\,-31;\,20),\; 2\overline{AC} = 2(14;\,-31;\,20) = (28;\,-62;\,40),$$

$$\overline{CB}(-2-2;\,-3-3;\,-1+4) = (-4;\,-6;\,3),$$

$$\overline{b} = 2\overline{AC}-\overline{CB} = (28;\,-62;\,40)-(-4;\,-6;\,3) = (32;\,-56;\,37).$$

Тепер знайдемо скалярний добуток:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (4;\,110;\,-64)\cdot(32;\,-56;\,37) = 4\cdot 32+110\cdot(-56)-64\cdot 37 = 128-6160-2368 = -8400.$$

2) Спочатку знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 110 & -64 \\ 32 & -56 & 37 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 110 & -64 \\ -56 & 37 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 4 & -64 \\ 32 & 37 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} 4 & 110 \\ 32 & -56 \end{vmatrix} =$$

$$=486\bar{i}-2196\bar{j}-3744\bar{k}.$$

Тепер знайдемо модуль векторного добутку векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|=\sqrt{486^2+(-2196)^2+(-3744)^2}\approx 4367{,}6.$$

3) Скористаємося формулою ділення відрізка в даному відношенні в координатній формі:

$$x_M=\frac{x_A+\frac{34}{4}x_B}{1+\frac{34}{4}}=\frac{-12+\frac{17}{2}\cdot(-2)}{1+\frac{17}{2}}=\frac{-24-34}{2+17}=-\frac{58}{19},$$

$$y_M=\frac{y_A+\frac{34}{4}y_B}{1+\frac{34}{4}}=\frac{34+\frac{17}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{17}{2}}=\frac{68-57}{2+17}=\frac{11}{19},$$

$$z_M=\frac{z_A+\frac{34}{4}z_B}{1+\frac{34}{4}}=\frac{-24+\frac{17}{2}\cdot(-1)}{1+\frac{17}{2}}=\frac{-48-17}{2+17}=-\frac{65}{19}.$$

Отже, $M\left(-\frac{58}{19},\frac{11}{19},-\frac{65}{19}\right)$.

4) Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні, якщо $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$. Враховуючи результат обчислень пункту 1), отримаємо $\bar{a}\cdot\bar{b}=-8400\neq 0$. Отже вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не є ортогональними.

5) Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, якщо $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\bar{0}$. Враховуючи результат обчислень пункту 1), отримаємо $\left[\bar{a},\bar{b}\right]=486\bar{i}-2196\bar{j}-3744\bar{k}\neq\bar{0}$. Отже вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не є колінеарними.

6) Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}=(0{,}1{,}2)$ компланарні, якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$. Обчислимо мішаний добуток:

$$\begin{vmatrix}4 & 110 & -64\\ 32 & -56 & 37\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9684\neq 0,$$

отже, вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}=(0{,}1{,}2)$ не є компланарними.

7) Якщо вектор $\bar{F}=\bar{a}$ зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *A*, а вектор $\bar{a}$ йде з деякої точки *A* в точку *B*, то робота цієї сили визначається формулою $A=\bar{F}\cdot\overline{BA}$.

Знайдемо координати необхідних векторів:

$$\bar{a}=(4;\,110;\,-64),\ \overline{BA}=(-10;\,37;\,-23).$$

Тоді

$$A=\bar{F}\cdot\overline{BA}=\bar{a}\cdot\overline{BA}=4\cdot(-10)+110\cdot 37+(-64)\cdot(-23)=5502.$$

Якщо вектор $\bar{F}=\bar{a}$ зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *A*, а вектор переміщення йде з деякої точки *B* в точку *A*, то вектор $\overline{M}_B=\overline{BA}\times\bar{a}$ являє собою момент сили *F* відносно точки *B*.

Обчислимо координати моменту сили відносно точки *B*, використовуючи координати векторів $\bar{a}=(4;\,110;\,-64)$, $\overline{BA}=(-10;\,37;\,-23)$:

$$\overline{M}_B=\overline{BA}\times\overline{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 110 & -64\\ -10 & 37 & -23\end{vmatrix}=-162\bar{i}+732\bar{j}+1248\bar{k}.$$

Модуль моменту сили $\overline{F}=\overline{a}$ відносно точки B буде дорівнювати:

$$|\overline{M}_B|=|\overline{BA}\times\overline{a}|=\sqrt{(-162)^2+732^2+1248^2}\approx 1456.$$

8) Для обчислення об'єму трикутної піраміди знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини A: $\overline{AB}(10;\,-37;\,23)$, $\overline{AC}(14;\,-31;\,20)$, $\overline{AD}(12;\,-34;\,58)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів:

$$\left(\overline{AB},\,\overline{AC},\,\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}10 & -37 & 23\\ 14 & -31 & 20\\ 12 & -34 & 58\end{vmatrix}=-7592.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V\approx 1265$ (куб. од.).

10. Дано координати вершин ΔABC: $A(34;\,-24)$, $B(-3;\,-1)$, $C(3;\,-4)$. Знайти:

1) **рівняння і довжину сторони AC (відповідь округліть до десятих);**
2) **рівняння медіани m_C;**
3) **рівняння висоти h_B, опущеної з вершини B;**
4) **довжину висоти h_B (відповідь округліть до десятих);**
5) **точку перетину медіани m_C і висоти h_B;**
6) **кут між стороною AC і медіаною m_C (у градусах, відповідь округліть до одиниць);**
7) **рівняння прямої, що проходить через вершину B паралельно стороні AC.**

Розв'язання.

1) Складемо рівняння сторони AC як рівняння прямої за двома точками:

$$AC:\ \frac{x-34}{3-34}=\frac{y+24}{-4+24},$$

$$\frac{x-34}{-31}=\frac{y+24}{20},$$

$$20(x-34)=-31(y+24),$$

$$20x-680=-31y-744,$$

$$20x+31y+64=0 \text{ – загальне рівняння сторони } AC.$$

Довжину сторони AC знайдемо як відстань між двома точками:

$$AC=\sqrt{(3-34)^2+(-4+24)^2}=\sqrt{(-31)^2+20^2}\approx 36{,}9 \text{ (од.)}.$$

2) Медіана m_C ділить сторону AB навпіл, тому координати точки M – середини

AB будуть: $M\left(\frac{34-3}{2}, \frac{-24-1}{2}\right)$, $M\left(\frac{31}{2}, -\frac{25}{2}\right)$. Тепер складемо рівняння медіани як рівняння прямої за двома точками:

$$m_C: \frac{x-3}{\frac{31}{2}-3} = \frac{y+4}{-\frac{25}{2}+4},$$

$$\frac{x-3}{\frac{25}{2}} = \frac{y+4}{-\frac{17}{2}},$$

$$\frac{x-3}{25} = \frac{y+4}{-17},$$

$$-17(x-3) = 25(y+4),$$

$$-17x + 51 = 25y + 100,$$

$-17x - 25y - 49 = 0$ або $17x + 25y + 49 = 0$ – загальне рівняння медіани m_C.

3) Висота h_B – це перпендикуляр до сторони AC, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої AC, тобто $\bar{n}_h(-31, 20)$. Складемо рівняння висоти h_B за точкою та нормальним вектором:

$$-31(x+3) + 20(y+1) = 0,$$

$$-31x - 93 + 20y + 20 = 0,$$

$-31x + 20y - 73 = 0$ або $31x - 20y + 73 = 0$ – загальне рівняння висоти h_B.

4) Довжину висоти h_B знайдемо як вершини B від сторони AC, тобто за формулою відстані від точки до прямої. Будемо мати:

$$d = \frac{|20\cdot(-3) + 31\cdot(-1) + 64|}{\sqrt{20^2 + 31^2}} = \frac{27}{\sqrt{400+961}} = \frac{27}{\sqrt{1361}} = 0{,}7 \text{ (од.)}.$$

5) Точку перетину медіани m_C і висоти h_B знайдемо як розв'язок системи рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} 17x + 25y + 49 = 0, \\ 31x - 20y + 73 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 17x + 25y = -49, \\ 31x - 20y = -73. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 25 \\ 31 & -20 \end{vmatrix} = -1115, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -49 & 25 \\ -73 & -20 \end{vmatrix} = 2805, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 17 & -49 \\ 31 & -73 \end{vmatrix} = 278;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2805}{-1115} = -\frac{561}{223}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{278}{-1115} = -\frac{278}{1115}.$$

Отже, точка перетину має вигляд $\left(-\frac{561}{223}; -\frac{278}{1115}\right)$.

6) Знайдемо кут між стороною AC і медіаною m_C за формулою:

$$\cos\left(AC \hat{,} m_C\right) = \cos\left(\bar{n}_{AC} \hat{,} \bar{n}_{m_C}\right) = \frac{\bar{n}_{AC}\cdot\bar{n}_{m_C}}{|\bar{n}_{AC}|\cdot|\bar{n}_{m_C}|}.$$

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\cos\left(AC \hat{,} m_C\right) = \frac{20\cdot17 + 31\cdot25}{\sqrt{20^2+31^2}\cdot\sqrt{17^2+25^2}} = \frac{1115}{\sqrt{1361}\cdot\sqrt{914}} \approx 0{,}9997, \quad \angle(AC, m_C) \approx 1^\circ.$$

7) Шукана пряма паралельна до сторони AC, тому її нормальний вектор колінеарний до нормального вектора прямої AC, тобто $\bar{n}_h(20,31)$. Складемо рівняння прямої за точкою B та нормальним вектором:

$$20(x+3)+31(y+1)=0,$$

$$20x+60+31y+31=0,$$

$20x+31y+91=0$ – загальне рівняння шуканої прямої.

11. Дано чотири точки: $D(0;\ 0;\ 2)$, $A(34;\ -24;\ 1)$, $B(-3;\ -2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ -4)$. Знайти:

1) **рівняння ребер AB, AD, BD;**
2) **рівняння граней ABC, ABD;**
3) **рівняння висоти H_D, опущеної з точки D на площину ABC;**
4) **довжину висоти H_D (відповідь округліть до десятих);**
5) **косинус кута між ребрами AB і AD (відповідь округліть до тисячних);**
6) **синус кута між ребром AD і гранню ABC (відповідь округліть до тисячних);**
7) **косинус кута між гранями ABC і ABD (відповідь округліть до тисячних);**
8) **рівняння прямої, що проходить через точку C перпендикулярно площині ABD;**
9) **рівняння площини, що проходить через точку C перпендикулярно прямій BD.**

Розв'язання.

1) Складемо рівняння ребер як рівняння прямої за двома точками:

$$AB:\ \frac{x-34}{-3-34}=\frac{y+24}{-2+24}=\frac{z-1}{1-1},$$

$$\frac{x-34}{-37}=\frac{y+24}{22}=\frac{z-1}{0};$$

$$AD:\ \frac{x-34}{0-34}=\frac{y+24}{0+24}=\frac{z-1}{2-1},$$

$$\frac{x-34}{-34}=\frac{y+24}{24}=\frac{z-1}{1};$$

$$BD:\ \frac{x+3}{0+3}=\frac{y+2}{0+2}=\frac{z-1}{2-1},$$

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

2) Складемо рівняння грані ABC за трьома точками:

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -3-34 & -2+24 & 1-1 \\ 2-34 & 3+24 & -4-1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -32 & 27 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -32 & 27 & -5 \end{vmatrix} = (x-34)\begin{vmatrix} 22 & 0 \\ 27 & -5 \end{vmatrix} - (y+24)\begin{vmatrix} -37 & 0 \\ -32 & -5 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -37 & 22 \\ -32 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-34)\cdot(-110) - (y+24)\cdot 185 + (z-1)\cdot(-295) =$$

$$= -110x + 3740 - 185y - 4440 - 295z + 295 = -110x - 185y - 295z - 405,$$

$$-110x - 185y - 295z - 405 = 0,$$

$$22x + 37y + 59z + 81 = 0 \text{ – рівняння грані } ABC.$$

Аналогічно зробимо для грані ABD:

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -3-34 & -2+24 & 1-1 \\ 0-34 & 0+24 & 2-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -34 & 24 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-34 & y+24 & z-1 \\ -37 & 22 & 0 \\ -34 & 24 & 1 \end{vmatrix} = (x-34)\begin{vmatrix} 22 & 0 \\ 24 & 1 \end{vmatrix} - (y+24)\begin{vmatrix} -37 & 0 \\ -34 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -37 & 22 \\ -34 & 24 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-34)\cdot 22 - (y+24)\cdot(-37) + (z-1)\cdot(-140) =$$

$$= 22x - 748 + 37y + 888 - 140z + 140 = 22x + 37y - 140z + 280,$$

$$22x + 37y - 140z + 280 = 0 \text{ – рівняння грані } ABD.$$

3) Висота піраміди H_D, опущена з вершини D, це перпендикуляр до грані ABC, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані ABC, тобто $\bar{a}_{H_D}(22,37,59)$. Складемо рівняння висоти H_D за точкою D та напрямним вектором $\bar{a}_{H_D}(22,37,59)$:

$$H_D:\ \frac{x-0}{22} = \frac{y-0}{37} = \frac{z-2}{59},$$

$$\frac{x}{22} = \frac{y}{37} = \frac{z-2}{59} \text{ – канонічне рівняння висоти піраміди } H_D.$$

4) Довжину висоти H_D знайдемо як відстань вершини D від грані ABC за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d = \frac{|22\cdot 0 + 37\cdot 0 + 59\cdot 2 + 81|}{\sqrt{22^2 + 37^2 + 59^2}} = \frac{199}{\sqrt{484 + 1369 + 3481}} = \frac{199}{\sqrt{5334}} \approx 2{,}7 \text{ (од.).}$$

5) Знайдемо косинус кут між ребрами AB і AD за формулою:

$$\cos\left(AB,\hat{\ } AD\right) = \cos\left(\bar{a}_{AB},\hat{\ } \bar{a}_{AD}\right) = \frac{|\bar{a}_{AB}\cdot\bar{a}_{AD}|}{|\bar{a}_{AB}|\cdot|\bar{a}_{AD}|} =$$

$$=\frac{\left|-37\cdot(-34)+22\cdot 24+0\cdot 1\right|}{\sqrt{(-37)^2+22^2+0^2}\cdot\sqrt{(-34)^2+24^2+1^2}}=\frac{1786}{\sqrt{1853}\cdot\sqrt{1733}}\approx 0{,}997.$$

6) Знайдемо синус кута між ребром AD і гранню ABC за формулою:

$$\sin\left(AD,^\wedge\ ABC\right)=\sin\left(\overline{a}_{AD},^\wedge\ \overline{n}_{ABC}\right)=\frac{\left|\overline{a}_{AD}\cdot\overline{n}_{ABC}\right|}{\left|\overline{a}_{AD}\right|\cdot\left|\overline{n}_{ABC}\right|}=$$

$$=\frac{\left|-34\cdot 22+24\cdot 37+1\cdot 59\right|}{\sqrt{(-34)^2+24^2+1^2}\cdot\sqrt{22^2+37^2+59^2}}=\frac{199}{\sqrt{1733}\cdot\sqrt{5334}}\approx 0{,}065.$$

7) Знайдемо косинус кут між гранями ABC і ABD за формулою:

$$\cos\left(ABC,^\wedge\ ABD\right)=\cos\left(\overline{n}_{ABC},^\wedge\ \overline{n}_{ABD}\right)=\frac{\left|\overline{n}_{ABC}\cdot\overline{n}_{ABD}\right|}{\left|\overline{n}_{ABC}\right|\cdot\left|\overline{n}_{ABD}\right|}=$$

$$=\frac{\left|22\cdot 22+37\cdot 37+59\cdot(-140)\right|}{\sqrt{22^2+37^2+59^2}\cdot\sqrt{22^2+37^2+(-140)^2}}=\frac{6407}{\sqrt{5334}\cdot\sqrt{21453}}\approx 0{,}599.$$

8) Шукана пряма перпендикулярна площині ABD, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора площини ABD, тобто $\overline{n}_{ABD}(22,37,-140)$. Складемо рівняння прямої за точкою C та напрямним вектором:

$$\frac{x-2}{22}=\frac{y-3}{37}=\frac{z+4}{-140}$$ – канонічне рівняння шуканої прямої.

9) Шукана площина перпендикулярна прямій BD, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої BD, тобто $\overline{a}_{BD}(3,2,1)$. Складемо рівняння площини за точкою C та нормальним вектором:

$$3\cdot(x-2)+2\cdot(y-3)+1\cdot(z+4)=0,$$

$$3x-6+2y-6+z+4=0,$$

$$3x+2y+z-8=0$$ – загальне рівняння шуканої площини.

12. Написати рівняння дотичних:

1) до еліпсу $x^2+3y^2=2187$, проведених з точки на лінії $\left(1,\sqrt{\frac{2186}{3}}\right)$;

2) до параболи $1458x=y^2$, проведених з точки на лінії $(2,\ 54)$.

Розв’язання.

1) Спочатку перевіримо, чи належить точка $\left(1,\sqrt{\frac{2186}{3}}\right)$ еліпсу $x^2+3y^2=2187$. Для цього підставимо координати точки в рівняння еліпсу:

$$1^2+3\left(\sqrt{\frac{2186}{3}}\right)^2=2187,$$

$$1+3\cdot\frac{2186}{3}=2187,$$

$$1+2186=2187,$$

$$2187=2187.$$

Точка належить еліпсу. Складемо рівняння дотичної до еліпсу $x^2+3y^2=2187$ або $\frac{x^2}{2187}+\frac{y^2}{729}=1$:

$$\frac{x\cdot 1}{2187}+\frac{y\cdot\sqrt{\frac{2186}{3}}}{729}=1,$$
$$x+y\sqrt{6558}=2187,$$
$$x+y\sqrt{6558}-2187=0.$$

2) Спочатку перевіримо, чи належить точка $(2,\,54)$ параболі $1458x=y^2$. Для цього підставимо координати точки в рівняння параболи:

$$1458\cdot 2=54^2,$$
$$2916=2916.$$

Точка належить параболі. Складемо рівняння дотичної до параболи $1458x=y^2$ або $y^2=2\cdot 729x$ з параметром $p=729$:

$$yy_0=729(x+x_0),$$
$$y\cdot 54=729(x+2),$$
$$729x-54y+1458=0 \text{ або } 27x-2y+54=0.$$

13. Скласти канонічне рівняння гіперболи й схематично зобразити, знаючи, що:

1) **півосі її відповідно дорівнюють 54 і 2;**
2) **відстань між фокусами дорівнює 54 й дійсна піввісь дорівнює 25;**
3) **дійсна піввісь дорівнює 54 і ексцентриситет $\varepsilon=1{,}6$;**
4) **уявна піввісь дорівнює 27 і ексцентриситет $\varepsilon=1{,}7$;**
5) **вона проходить через точку $\left(1,\,\sqrt{\frac{2188}{3}}\right)$ й уявна піввісь дорівнює 27.**

Розв'язання.

1) півосі гіперболи дорівнюють 54 і 2, отже $a=54$, $b=2$. Складемо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{54^2}-\frac{y^2}{2^2}=1 \text{ або } \frac{x^2}{2916}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Схематичне зображення виконано на рис. 1.

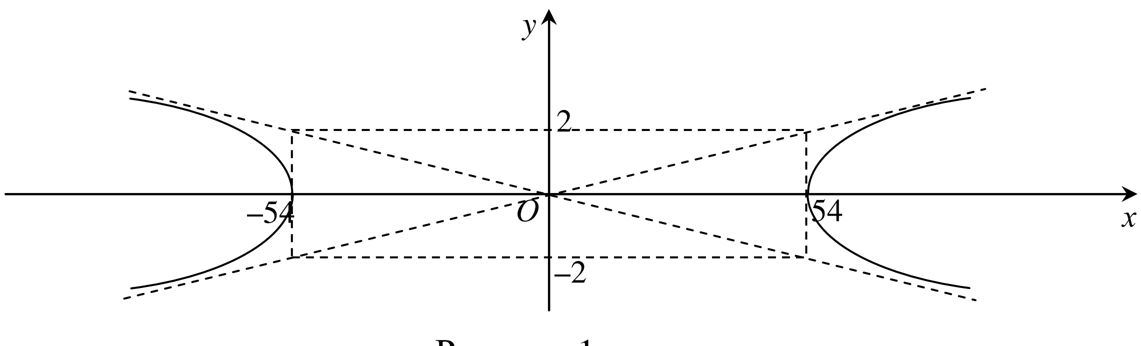

Рисунок 1

2) відстань між фокусами дорівнює 54, отже $c = 27$ й дійсна піввісь дорівнює 25, отже $a = 25$. Знайдемо b: $b^2 = c^2 - a^2 = 27^2 - 25^2 = 729 - 625 = 104$, звідки $b = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$. Складемо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{25^2} - \frac{y^2}{\left(2\sqrt{6}\right)^2} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{104} = 1.$$

Схематичне зображення виконано на рис. 2.

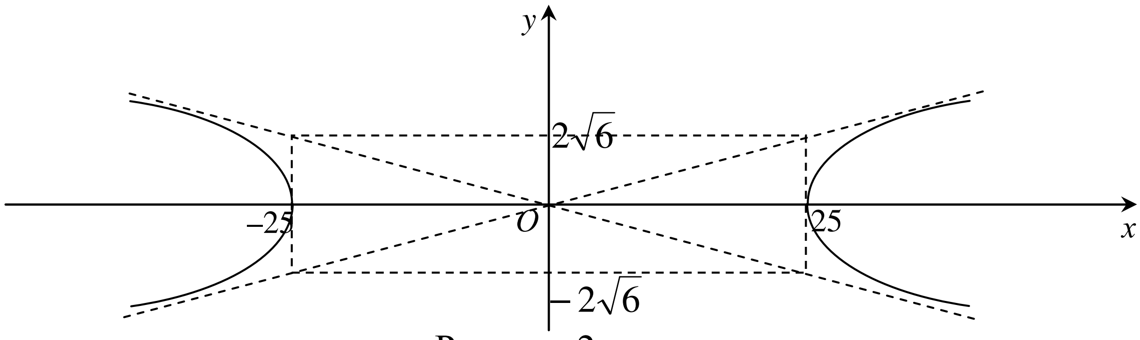

Рисунок 2

3) дійсна піввісь дорівнює 54, отже $a = 54$ і ексцентриситет $\varepsilon = 1{,}6$ або $\frac{c}{a} = 1{,}6$, звідки $c = 1{,}6 \cdot 54 = 86{,}4$. Знайдемо b: $b^2 = c^2 - a^2 = 86{,}4^2 - 54^2 = 7464{,}96 - 2916 = 4548{,}96$, звідки $b = \sqrt{4548{,}96} \approx 67$. Складемо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{54^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{4548{,}96}\right)^2} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{2916} - \frac{y^2}{4548{,}96} = 1.$$

Схематичне зображення виконано на рис. 3.

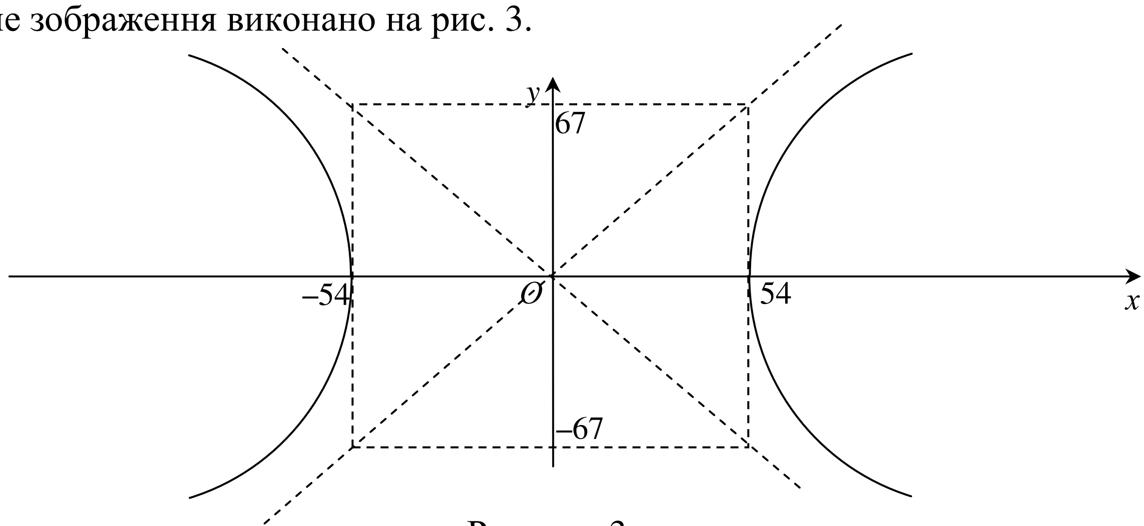

Рисунок 3

4) уявна піввісь дорівнює 27, отже $b = 27$ і ексцентриситет $\varepsilon = 1{,}7$ або $\frac{c}{a} = 1{,}7 = \frac{17}{10}$. Нехай $c = 17k$, $a = 10k$, тоді

$$b^2 = c^2 - a^2,$$
$$(17k)^2 - (10k)^2 = 27^2,$$
$$289k^2 - 100k^2 = 729,$$

$$189k^2 = 729,\ k^2 = \frac{729}{189},\ k^2 = \frac{27}{7},$$

звідки $k = 3\sqrt{\frac{3}{7}}$ (виходячи з геометричного змісту задачі беремо тільки додатне значення k). Отже, $c = 17 \cdot 3\sqrt{\frac{3}{7}}$, $a = 10 \cdot 3\sqrt{\frac{3}{7}} = 30\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 20$, $a^2 = \left(30\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 = \frac{2700}{7}$. Складемо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{\frac{2700}{7}} - \frac{y^2}{27^2} = 1 \text{ або } \frac{7x^2}{2700} - \frac{y^2}{729} = 1.$$

Схематичне зображення виконано на рис. 4.

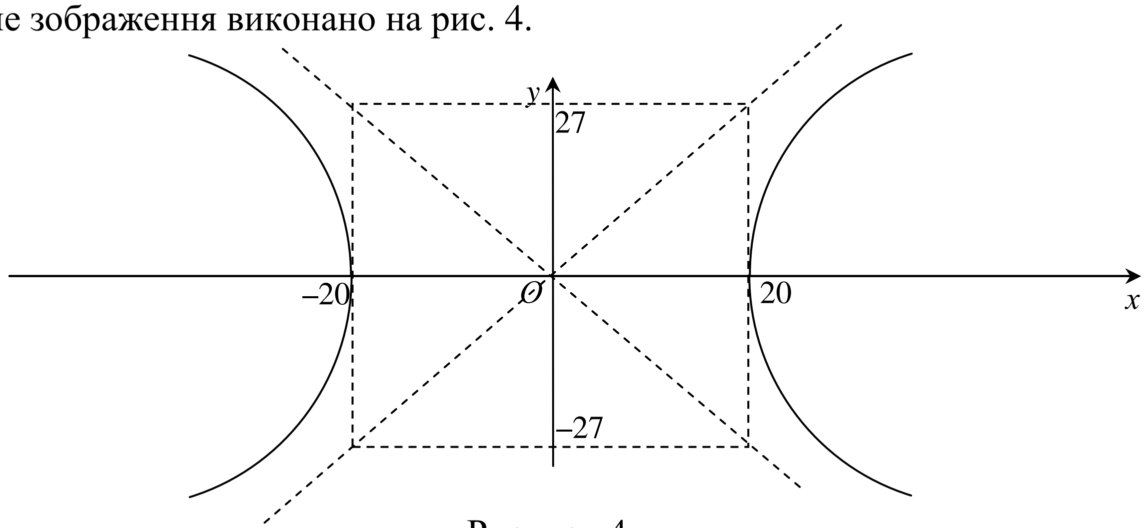

Рисунок 4

5) уявна піввісь дорівнює 27, отже $b = 27$ і вона проходить через точку $\left(1, \sqrt{\frac{2188}{3}}\right)$, отже координати цієї точки повинні задовольняти рівнянню гіперболи. Підставимо в канонічне рівняння гіперболи координати точки та значення b, отримаємо:

$$\frac{1^2}{a^2} - \frac{\left(\sqrt{\frac{2188}{3}}\right)^2}{27^2} = 1,$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2188}{2187} = 1,$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4375}{2187},$$

$$a^2 = \frac{2187}{4375}.$$

Складемо рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{\frac{2187}{4375}} - \frac{y^2}{27^2} = 1 \text{ або } \frac{4375x^2}{2187} - \frac{y^2}{729} = 1.$$

Схематичне зображення виконано на рис. 5.

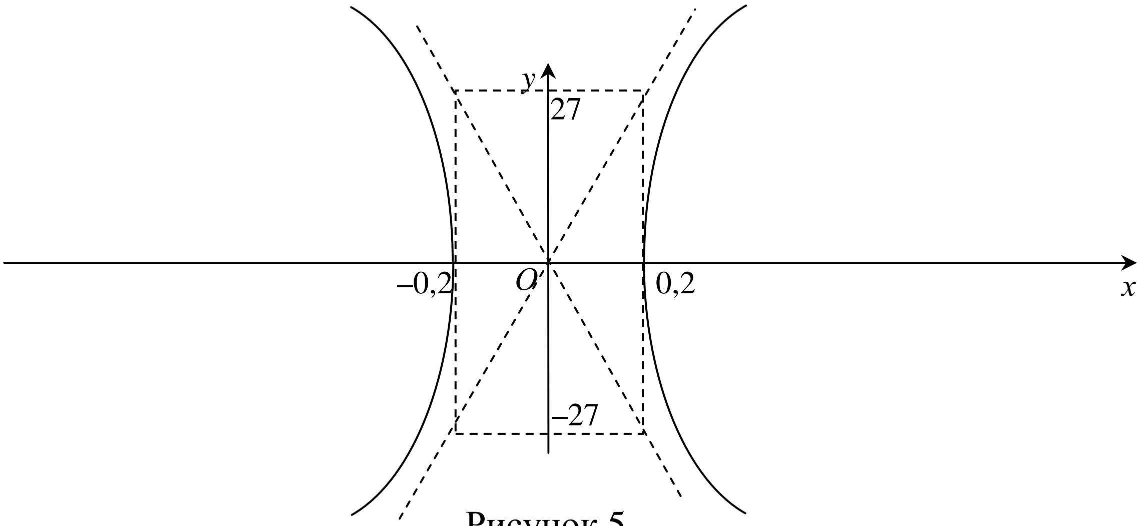

Рисунок 5

14. Привести до канонічного вигляду, визначити вид й схематично зобразити рівняння:

1) поверхні $3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz-12x-10=0$**;**

2) кривої $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$**.**

Розв'язання.

1) Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0, \qquad (3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +\mathrm{I}\\ -\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ \qquad x_2 \qquad =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3,\\ x_2=0.\end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 2$ власний вектор $X_1 = c_1(1; 0; -1)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

При $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftrightarrow \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_2. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 3$ власний вектор $X_2 = c_2(1; 1; 1)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

При $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot(-1/2) \\ -\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_3 = 6$ власний вектор $X_3 = c_3(1; -2; 1)$, $c_3 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння поверхні, спростимо його та виділимо повні квадрати відносно кожної змінної:

$$2\bar{x}^2+3\bar{y}^2+6\bar{z}^2-6\sqrt{2}\bar{x}-4\sqrt{3}\bar{y}-2\sqrt{6}\bar{z}-10=0,$$

$$2\left(\bar{x}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(\bar{y}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+6\left(\bar{z}-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=24,$$

$$\frac{\left(\bar{x}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12}+\frac{\left(\bar{y}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{8}+\frac{\left(\bar{z}-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}{4}=1.$$

Зробимо паралельне перенесення осей, будемо мати:

$$\begin{cases} x'=\bar{x}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y'=\bar{y}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ z'=\bar{z}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$$

$$\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{8}+\frac{z'^2}{4}=1 \text{ – еліпсоїд.}$$

Схематичне зображення виконано на рис. 6.

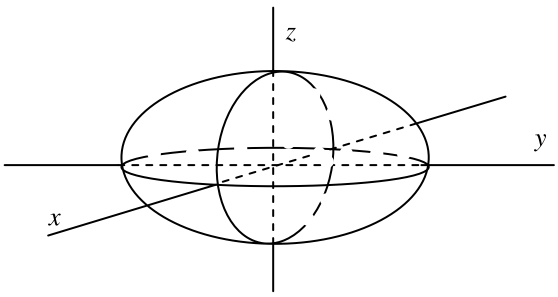

Рисунок 6

2) Розв’яжемо задачу двома способами.

І спосіб. Зведемо до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу.

У загальному рівнянні кривої присутній член xy, тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22}=9\neq a_{11}=4$, тому $\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\cdot 6}{4-9}=-\frac{12}{5}$. Знайдемо $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$, використовуючи формули: $\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$, $\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$. Будемо мати: $\operatorname{tg}\varphi=\left\{\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right\}$, а $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ візьмемо, наприклад, $\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$. Запишемо формули перетворення

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(2\overline{x} - 3\overline{y}\right), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(3\overline{x} + 2\overline{y}\right), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$4\left[\frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\overline{x} - 3\overline{y}\right)\right]^2 + 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\overline{x} - 3\overline{y}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\overline{x} + 2\overline{y}\right) + 9\left[\frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\overline{x} + 2\overline{y}\right)\right]^2 -$$

$$-4 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\overline{x} - 3\overline{y}\right) - 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\overline{x} + 2\overline{y}\right) + 1 = 0,$$

$$4 \cdot \frac{1}{13}\left(4\overline{x}^2 - 12\overline{xy} + 9\overline{y}^2\right) + 12 \cdot \frac{1}{13}\left(6\overline{x}^2 - 5\overline{xy} - 6\overline{y}^2\right) + 9 \cdot \frac{1}{13}\left(9\overline{x}^2 + 12\overline{xy} + 4\overline{y}^2\right) -$$

$$-\frac{8}{\sqrt{13}}\overline{x} + \frac{12}{\sqrt{13}}\overline{y} - \frac{18}{\sqrt{13}}\overline{x} - \frac{12}{\sqrt{13}}\overline{y} + 1 = 0,$$

$$4\left(4\overline{x}^2 - 12\overline{xy} + 9\overline{y}^2\right) + 12\left(6\overline{x}^2 - 5\overline{xy} - 6\overline{y}^2\right) + 9\left(9\overline{x}^2 + 12\overline{xy} + 4\overline{y}^2\right) -$$

$$-8\overline{x}\sqrt{13} + 12\overline{y}\sqrt{13} - 18\overline{x}\sqrt{13} - 12\overline{y}\sqrt{13} + 13 = 0,$$

$$16\overline{x}^2 - 48\overline{xy} + 36\overline{y}^2 + 72\overline{x}^2 - 60\overline{xy} - 72\overline{y}^2 + 81\overline{x}^2 + 108\overline{xy} + 36\overline{y}^2 -$$

$$-26\overline{x}\sqrt{13} + 13 = 0,$$

$$169\overline{x}^2 - 26\overline{x}\sqrt{13} + 13 = 0,$$

$$\left(13\overline{x} - \sqrt{13}\right)^2 = 0,$$

$$13\overline{x} - \sqrt{13} = 0 \text{ або } \overline{x} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Маємо рівняння прямої, яка паралельна вісі Oy у новій системі координат: $\overline{x} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$, при цьому системи координат зв'язані формулами:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(2\overline{x} - 3\overline{y}\right), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(3\overline{x} + 2\overline{y}\right). \end{cases}$$

Схематичне зображення виконано на рис. 7.

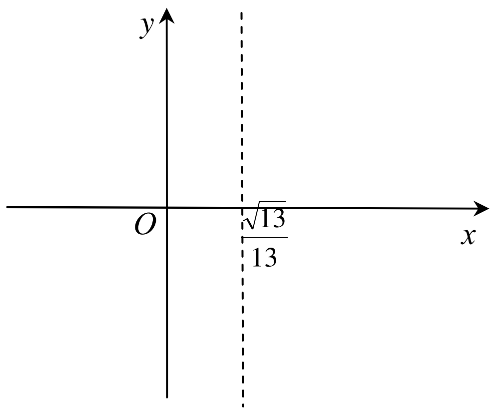

Рисунок 7

II спосіб. Зведемо до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$, використовуючи теорію квадратичних форм.

Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 6\\ 6 & 9-\lambda\end{vmatrix}=0, \qquad \lambda^2-13\lambda=0, \qquad \lambda_1=13,\ \lambda_2=0.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, відповідні знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix}4-\lambda & 6\\ 6 & 9-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1=13$:

$$\begin{pmatrix}-9 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-9 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix}_{\cdot 3+\mathrm{I}\cdot 2}\sim\begin{pmatrix}-9 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-9 & 6\end{pmatrix},$$

$$-9x_1+6x_2=0\Rightarrow x_1=\frac{2}{3}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_1=13$ власний вектор $X_1=c_1(2;3)$, $c_1=const\neq 0$, який після нормування буде: $E_1=\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

При $\lambda_2=0$:

$$\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}_{\cdot 2-\mathrm{I}\cdot 3}\sim\begin{pmatrix}4 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 6\end{pmatrix},$$

$$4x_1+6x_2=0\Rightarrow x_1=-\frac{3}{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_2=0$ власний вектор $X_2=c_2(-3;2)$, $c_2=const\neq 0$, який після нормування буде: $E_2=\left(-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{13}}\bar{x}-\frac{3}{\sqrt{13}}\bar{y},\\ y=\frac{3}{\sqrt{13}}\bar{x}+\frac{2}{\sqrt{13}}\bar{y}.\end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння кривої, спростимо його:

$$13\bar{x}^2+0\bar{y}^2-4\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\bar{x}-3\bar{y}\right)-6\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\bar{x}+2\bar{y}\right)+1=0,$$

$$13\bar{x}^2-\frac{8}{\sqrt{13}}\bar{x}+\frac{12}{\sqrt{13}}\bar{y}-\frac{18}{\sqrt{13}}\bar{x}-\frac{12}{\sqrt{13}}\bar{y}+1=0,$$

$$13\bar{x}^2-\frac{26}{\sqrt{13}}\bar{x}+1=0,$$

$$\bar{x}^2-\frac{2}{\sqrt{13}}\bar{x}+\frac{1}{13}=0,$$

$$\left(\bar{x}-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2=0,$$

$$\bar{x}-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$$

$$\bar{x}=\frac{1}{\sqrt{13}} \text{ або } \bar{x}=\frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Маємо рівняння прямої, яка паралельна вісі Oy у новій системі координат: $\bar{x}=\frac{\sqrt{13}}{13}$, при цьому системи координат зв'язані формулами:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(2\bar{x}-3\bar{y}\right), \\ y=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\bar{x}+2\bar{y}\right). \end{cases}$$

Схематичне зображення виконано на рис. 7.