

Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет

М.І. Клименко, С.М. Гребенюк

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Конспект лекцій  
для аспірантів спеціальності 113  
«Прикладна математика»

Затверджено  
Вченою радою ЗНУ  
Протокол № 11  
від 23. 06. 2021 р.

Запоріжжя  
2021

УДК 519.95:530.1  
К 20  
ББК 22.132я73.

Клименко М.І., Гребенюк С.М., Математичне моделювання складних систем: конспект лекцій. Для аспірантів спеціальності 113 «Прикладна математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2021. 73 с.

У навчально-методичному виданні наведено конспект лекцій, що містить виклад основного теоретичного матеріалу з дисципліни «Математичне моделювання складних систем». Текст містить достатню кількість прикладів, які допоможуть студентам при вивченні даної дисципліни.

Конспект лекцій призначений для аспірантів, що навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

Рецензент

*С. В. Чопоров, д. т. н., доцент*  
професор кафедри комп'ютерних наук

Відповідальний за випуск

*М. І. Клименко, к. ф-м. н., доцент*  
доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	4
<b>Змістовий модуль 1. Сутність та задачі математичного моделювання складних систем</b> .....	7
Тема 1. Поняття та характеристики складних систем.....	7
1.1 Поняття складної системи .....	7
1.2 Ефективність функціонування складної системи.....	8
1.3 Показники, що характеризують властивості складних систем.....	9
Тема 2. Основні принципи моделювання складних систем.....	11
2.1 Сутність математичного моделювання.....	11
2.2 Класифікація математичних моделей складних систем та їх властивості...	12
2.3 Побудова математичної моделі складної системи.....	14
<b>Змістовий модуль 2. Математичні моделі динамічних систем</b> .....	16
Тема 3. Математичне моделювання динамічних систем.....	16
3.1 Поняття динамічної системи.....	16
3.2 Приклади побудови елементарних диференціальних моделей динамічних систем.....	16
3.3 Фазовий портрет та особливі точки динамічної системи.....	22
3.4 Різницеві моделі динамічних систем. Основні поняття та означення.....	23
3.5 Лінійні системи різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	27
<b>Змістовий модуль 3. Застосування кореляційно-регресійного аналізу при побудові складних систем</b> .....	30
Тема 4. Побудова кореляційних та регресійних моделей.....	30
4.1 Сутність кореляційно-регресійного моделювання об'єктів та процесів.....	30
4.2 Багатовимірні статистичні сукупності.....	31
4.3 Основні поняття кореляційного аналізу.....	36
4.4 Парна лінійна регресія.....	39
4.5 Багатофакторний кореляційно-регресійний аналіз.....	44
4.6 Непараметричні методи дослідження зв'язків між показниками діяльності складної системи.....	50
<b>Змістовий модуль 4. Імітаційне моделювання складних систем</b> .....	53
Тема 5. Моделювання випадкових величин.....	53
5.1 Сутність імітаційного моделювання. Метод Монте-Карло.....	53
5.2 Оцінка похибки методу Монте-Карло.....	56
5.3 Генерування випадкових чисел .....	57
5.4 Моделювання дискретних випадкових величин.....	60
5.5 Моделювання неперервних випадкових величин.....	62
Тема 6. Моделювання об'єктів та процесів з використанням імітаційного підходу.....	68
6.1 Застосування імітаційного моделювання для проектування систем масового обслуговування.....	68
6.2 Застосування методу Монте-Карло до обчислення визначених інтегралів...	70
<b>Література</b> .....	71

## ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни «Математичне моделювання складних систем» є ознайомлення аспірантів спеціальності 113 «Прикладна математика» з науковими основами, методологією та особливостями математичного моделювання складних систем. Основними завданнями вивчення цієї освітньої компоненти є формування у аспірантів цілісної системи знань та навичок щодо теорії та практики математичного моделювання складних систем, необхідної для подальшої наукової та професійної діяльності фахівців з прикладної математики.

За підсумками вивчення курсу аспіранти повинні ознайомитися з методикою моделювання складних природних, технічних та соціально-економічних систем, методами побудови та аналізу динамічних моделей, принципами статистичного та імітаційного моделювання.

Згідно з вимогами освітньо-наукової програми аспіранти повинні досягти таких програмних компетентностей:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу нових та комплексних ідей;
- здатність вчитися, оволодівати сучасними знаннями, застосовувати їх у практичних ситуаціях;
- здатність до пошуку, оброблення та аналізу наукової інформації з різних джерел; використання інформаційно-комунікаційних технологій у дослідницькій та викладацькій діяльності;
- знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності;
- здатність до засвоєння основних концепцій, розуміння теоретичних і практичних проблем, історії розвитку та сучасного стану наукових знань за спеціальністю 113 «Прикладна математика», оволодіння термінологією з цього наукового напрямку;
- здатність до оволодіння методологією та методами наукових досліджень у галузі 11 «Математика та статистика»;
- здатність вдосконалювати існуючі методи та підходи до математичного та комп'ютерного моделювання природних та технічних систем та процесів;
- здатність застосовувати сучасні інформаційні технології, бази даних та інші електронні ресурси, спеціалізоване програмне забезпечення у науковій та навчальній діяльності;
- здатність виявляти, ставити та вирішувати дослідницькі науково-прикладні задачі та/або проблеми в сфері прикладної математики, оцінювати та забезпечувати якість виконуваних досліджень;

- здатність розробляти підходи до математичного моделювання у різних сферах та створювати відповідне програмне забезпечення;
- здатність інтегрувати знання з інших дисциплін, застосовувати системний підхід при розв’язанні інженерних задач та проведенні досліджень.

Очікуваними програмними результатами навчання аспірантів є:

- сприяння у формуванні системного наукового світогляду та загального культурного кругозору; володіння техніками і технологіями критичного мислення;
- оволодівати сучасними знаннями та застосовувати їх у практичній діяльності; здійснювати абстрактний аналіз, оцінку і синтез нових та комплексних ідей; демонструвати відданість їх розвитку у передових контекстах професійної та наукової діяльності;
- здійснювати пошук, оброблення та аналіз наукової інформації, її систематизацію та узагальнення; використовувати інформаційно-комунікаційні технології у дослідницькій та викладацькій діяльності;
- знати основні концепції, історію розвитку та сучасний стан наукових знань за спеціальністю 113 «Прикладна математика»;
- володіти методологією, методами та термінологічним апаратом наукового дослідження у галузі математики та статистики;
- формулювати і перевіряти гіпотези; використовувати для обґрунтування висновків належні докази, зокрема, результати теоретичного аналізу, експериментальних досліджень і математичного та/або комп’ютерного моделювання, наявні літературні дані;
- розробляти та досліджувати концептуальні, математичні і комп’ютерні моделі процесів і систем, ефективно використовувати їх для отримання нових знань та/або створення інноваційних продуктів у прикладній математиці та дотичних міждисциплінарних напрямках;
- застосовувати сучасні інструменти і технології пошуку, оброблення та аналізу інформації, зокрема, статистичні методи аналізу даних великого обсягу та/або складної структури, спеціалізовані бази даних та інформаційні системи;
- розробляти математичні моделі об’єктів, явищ та процесів у різних сферах;
- вдосконалення методів розв’язання науково-прикладної задачі, критичне оцінювання отриманих результатів.

Класичні методи прикладної математики не завжди є ефективними при дослідженні складних систем. Тому останнім часом активно розвиваються нові методи, пов’язані з теорією випадкових процесів, теорією ігор та статистичних рішень, теорією автоматів тощо. Такий підхід при достатньо загальних допущеннях про характер функціонування складних систем у багатьох випадках дозволяє

отримати рівняння, що моделюють поведінку системи та здійснити її дослідження. Отримав подальший розвиток аналітичний апарат досліджень складних систем.

Поряд з точними аналітичними методами математичного моделювання складних систем широкого розповсюдження набуло використання наближених методів, зокрема, методів статистичного або імітаційного моделювання. Сутність імітаційного моделювання полягає у побудові алгоритму, що імітує поведінку та взаємодію елементів складної системи з врахуванням дії стохастичних факторів. Для імітації дії таких факторів використовують псевдовипадкові числа, які генерують з допомогою комп'ютерних програм. Метод імітаційного моделювання дозволяє розв'язувати досить складні задачі, недоступні для аналітичних методів.

Цей метод розглянуто у пропонованому конспекті лекцій поряд з класичними аналітичними диференціальними та різницеvими методами моделювання складних систем, а також побудовою та застосуванням моделей кореляційно-регресійного аналізу.

Автори сподіваються, що посібник надасть аспірантам, що навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика», суттєву допомогу в оволодінні знаннями з математичного моделювання складних систем та буде ефективно використаний ними при вивченні курсу.

# Змістовий модуль 1. Сутність та задачі математичного моделювання складних систем

## Тема 1. Поняття та характеристики складних систем

### 1.1 Поняття складної системи

Одним з важливих завдань сучасної науки є розробка та впровадження у практику методів дослідження динаміки функціонування складних систем. До таких систем відносять великі виробничі енергетичні, гідротехнічні комплекси з автоматизованим керуванням, комп'ютерні комплекси, що є засобами керування такими системами, а також різноманітні соціально-економічні та біологічні системи. Суттєву роль у таких дослідженнях відіграють загальносистемні питання, що відносяться до загальної структури системи, організації взаємозв'язків між її елементами, взаємодії елементів системи з її зовнішнім середовищем, керування діяльністю її елементів тощо. Ці питання складають сутність системного підходу до вивчення властивостей реальних складних об'єктів.

На сьогодні не існує загальноприйнятого означення складної системи. Віднесення певного об'єкту моделювання до категорії складних систем значною мірою залежить від мети та задач його моделювання. Надалі будемо вважати об'єкт моделювання *складною системою*, якщо його властивості та особливості задач, що виникають при моделюванні цього об'єкту, вимагають дослідження цього об'єкту як системи з великою кількістю елементів, що взаємопов'язані та взаємодіють між собою, а також забезпечують виконання нею деякої достатньо складної функції.

Сукупність деяких взаємопов'язаних елементів, що входять до складу системи, утворює її *підсистему*. Підсистеми є деякими частинами системи, що можуть функціонувати самостійно. Наприклад, у системі виробничого підприємства окремий цех можна розглядати як підсистему.

Функціонування складної системи здійснюється під впливом підсистеми керування. Під *керуванням системою* розуміють цілеспрямований вплив на неї, що здійснюється з метою її певної зміни або підтримки у існуючому стані. Цей вплив здійснюється підсистемою керування.

Характерною рисою складної системи є її взаємодія з зовнішнім середовищем та функціонування в умовах дії випадкових зовнішніх факторів.

Отже, надалі складною системою будемо називати систему, що здійснює деяку складну функцію, та до складу якої входить велика кількість елементів.

Серед задач, що виникають у зв'язку з моделюванням складних систем, можна виокремити два основні класи: 1) задачі аналізу, пов'язані з дослідженням властивостей та поведінки системи у залежності від її структури та значень параметрів; 2) задачі синтезу, що зводяться до вибору структури та значень параметрів у залежності від заданих властивостей системи.

Типовими задачами математичного моделювання складних систем можуть бути пошук оптимальних або близьких до оптимальних розв'язків задач підвищення їх ефективності, визначення їх характеристик та властивостей, а також встановлення взаємозв'язків між елементами системи.

При проектуванні складних систем, їх модернізації, а також при визначенні оптимальних режимів експлуатації, задачі аналізу розглядають як задачі оцінки можливих варіантів системи. Для кожного з них обчислюють систему показників, що характеризують властивості системи (ефективність, надійність тощо). Порівнюючи ці характеристики, вибирають оптимальний варіант для проектування системи.

## 1.2 Ефективність функціонування складної системи

Якість функціонування складної системи визначають з допомогою її показників ефективності. Показником ефективності складної системи називають її числову характеристику, що відображає ступінь пристосованості системи до виконання поставлених перед нею задач. Без визначення показника ефективності складної системи неможливо чітко визначити її мету та задачі. При цьому вибір показника ефективності суттєво впливає на інтерпретацію властивостей системи та результатів її дослідження.

Нехай складною системою є деякий виробничий процес. За показник ефективності цієї системи можна вибрати її продуктивність, тобто кількість виробів, виготовлених за одиницю часу. Оцінюючи якість виробничого процесу на основ цього критерію, ми будемо приділяти основну увагу факторам, що сприяють досягненню максимальної продуктивності. При цьому недостатня увага буде приділятися таким характеристикам виробничого процесу як витрати енергії та матеріалів, витрати на заробітну платню, якість продукції тощо. Аналогічна ситуація має місце і для інших показників ефективності. Цей приклад свідчить, що вибір показника ефективності функціонування системи суттєво впливає на формування його цілей та задач.

Для того, щоб показник ефективності достатньо повно відображав якість роботи системи, він повинен враховувати її основні особливості та властивості, умови її діяльності та взаємодію з зовнішнім середовищем. Отже, він повинен



залежати від структури системи, значень її параметрів, характеру взаємодії з зовнішнім середовищем, тобто вибір показника ефективності визначається характером діяльності системи. Тому показник ефективності складної системи можна розглядати як функціонал, визначений на множині всіх можливих процесів її функціонування.

У зв'язку з тим, що складні системи функціонують в умовах впливу випадкових факторів, значення таких функціоналів виявляються випадковими величинами. Тому при виборі показників ефективності використовують їх середні значення (математичні сподівання): середня кількість виробів за одиницю часу, середня тривалість поїздки, середній час очікування у черзі. Інколи за показник ефективності обирають ймовірність деякої події, наприклад, ймовірність успішної посадки літака.

### **1.3 Показники, що характеризують властивості складних систем**

Крім показників ефективності, при описанні роботи складної системи використовують і інші показники, що характеризують її властивості: надійність, якість керування тощо.

Розглянемо побудову показника, що характеризує надійність діяльності системи. Звичайно у теорії надійності таким показником є середній час безвідмовної роботи системи або ймовірність безвідмовної роботи системи на протязі деякого заданого часу. Проте для багатьох складних систем відмова окремого елемента ще не означає зупинки роботи системи у цілому, вона спричиняє лише зниження ефективності її роботи.

Постановка задачі про оцінку надійності складної системи зводиться до наступного. Вважаються відомими показники, що описують інтенсивність відмов окремих елементів складної системи: середня кількість відмов за одиницю часу, закон розподілу проміжків часу між послідовними відмовами. Ці характеристики визначаються експериментально. Нехай за показник ефективності складної системи вибрано деякий функціонал  $R$ . Його значення залежить не лише від структури та параметрів системи, але й від показників надійності її окремих елементів.

Нехай  $R_1$  – значення показника ефективності для випадку, коли відмови елементів мають інтенсивності, що відповідають заданим характеристикам,  $R_2$  – для випадку відсутності відмов елементів. Тоді за показник надійності даної системи можна вибрати величину  $\Delta R = |R_1 - R_2|$ , що показує, наскільки зменшується ефективність системи внаслідок можливих відмов її елементів, у

порівнянні з ефективністю ідеальної системи, елементи якої є абсолютно надійними.

Для розрахунку показників надійності, крім характеристик інтенсивності відмов елементів, задаються також характеристики витрат часу на відновлення їх працездатності.

## Тема 2. Основні принципи моделювання складних систем

### 2.1 Сутність математичного моделювання

Модель – це об’єкт, який у ході дослідження заміняє оригінал, відображаючи при цьому характеристики оригіналу, що є найбільш важливими для дослідника. Математичною моделлю реальної системи або процесу називають сукупність математичних співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов тощо), що визначають характеристики стану системи у залежності від її параметрів, зовнішніх умов (вхідних сигналів, зовнішніх впливів), початкових умов та часу. За визначенням В.М. Глушкова, математична модель – це множина символічних математичних об’єктів та співвідношень між ними.

Прикладом математичної моделі є описання руху матеріальної точки під дією сталої сили  $\bar{F}$  у вигляді рівняння:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 \cdot t + \frac{\bar{F}t^2}{2m}. \quad (2.1)$$

Тут  $\bar{r}(t)$  – радіус-вектор точки у момент часу  $t$ ,  $\bar{r}_0$  – радіус-вектор точки у початковий момент часу,  $\bar{v}_0$  – початкова швидкість точки,  $m$  – її маса.

Якщо рух точки здійснюється під впливом змінної сили  $\bar{F}(t)$ , то математична модель руху точки є векторним диференціальним рівнянням другого порядку, для якого задані початкові умови:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{\bar{F}(t)}{m}, \bar{r}(0) = \bar{r}_0, \bar{v}(0) = \bar{v}_0. \quad (2.2)$$

У співвідношеннях, що утворюють математичну модель, розрізняють два типи змінних: екзогенні та ендогенні. Екзогенні змінні визначаються поза моделлю, а ендогенні змінні визначають у ході розрахунків за моделлю. У моделі (2.2) екзогенними змінними є  $\bar{F}(t)$ ,  $m$ ,  $\bar{r}_0$ ,  $\bar{v}_0$ , ендогенною змінною є радіус-вектор  $\bar{r}(t)$  матеріальної точки, який визначається шляхом розв’язання задачі Коші (2.2).

Математичні моделі різних об’єктів можуть мати однакову математичну структуру, але різні змістовні інтерпретації, тобто одну й ту ж математичну модель можна використати для дослідження різних об’єктів.

Поряд з експериментом, математичне моделювання є основним способом дослідження. Активне застосування математичного моделювання у різних областях науки обумовлене наступними причинами:

- неможливість здійснення експериментів у багатьох дослідженнях;
- значні витрати на проведення експериментів;
- ускладнення типів задач, що розв’язуються у ході досліджень;

- скорочення термінів дослідження та отримання результатів;
- можливість багаторазового повторення дослідження на математичній моделі.

## 2.2 Класифікація математичних моделей складних систем та їх властивості

Складні системи характеризуються функціями, які вони виконують, процесами, що відбуваються у них, структурою та змінами стану системи у часі. Відповідно розрізняють функціональні, структурні, інформаційні та поведінські моделі складних систем.

Функціональна модель описує сукупність функцій, які виконує система та процесів, що у ній відбуваються. Структурна модель відображає побудову системи. Інформаційна модель характеризує співвідношення між елементами системи, а також між системою та зовнішнім середовищем. Інформаційні моделі здебільшого мають вигляд рівнянь регресії, що відображають зв'язок між рядами даних або інших статистичних моделей. Поведінська модель складної системи відображає динаміку її функціонування.

Існують також інші системи класифікації математичних моделей складних систем. З точки зору зміни стану системи у часі розрізняють динамічні та статичні моделі. У статичних моделях розглядають стан системи у конкретний момент часу і змінні характеристики моделі не залежать від часу. В динамічних моделях вони є функціями часу.

З точки зору врахування випадкових факторів розрізняють детерміновані та стохастичні моделі. Детерміновані моделі передбачають наявність жорстких функціональних зв'язків між змінними моделі. Стохастичні моделі допускають наявність дії випадкових факторів на систему – об'єкт дослідження. Вони використовують для моделювання системи апарат теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів. За виглядом співвідношень між змінними розрізняють лінійні та нелінійні моделі.

Оптимізаційні моделі передбачають побудову цільової функції, що відображає результати функціонування системи та подальше дослідження її на екстремум з врахуванням обмежень на систему.

Найбільш розповсюдженими формами представлення математичної моделі складної системи є інваріантна, аналітична, алгоритмічна та графічна форми. У інваріантній формі моделі записують у вигляді алгебраїчних, диференціальних, інтегральних та інших рівнянь та нерівностей, без врахування методу подальшого аналізу моделі. Аналітична форма – це запис моделі у вигляді аналітичного розв'язку вихідних рівнянь інваріантної форми моделі. Алгоритмічна форма – це запис алгоритму дослідження вихідної моделі. Використання графічної форми

передбачає подання моделі у вигляді геометричних об'єктів, графів, схем, графіків тощо.

За методами аналізу моделі розрізняють моделі, що досліджуються аналітично та чисельно. Результатом аналітичного дослідження є отримання формул, що задають шукані величини у явному вигляді, тут можуть бути також отримані висновки про стійкість розв'язку, наявність у нього особливих точок, його асимптотику тощо. У більшості реальних випадків математичну модель неможливо звести до вигляду, для якого можливо отримати аналітичний розв'язок за умови збереження адекватності моделі. Тому для дослідження моделі використовують чисельні методи. Проблемами при використанні чисельного аналізу можуть бути некоректність або нестійкість побудованої математичної моделі. У некоректно поставленій задачі відсутній єдиний розв'язок (його немає або розв'язків декілька). Нестійкість моделі означає, що малі похибки у визначенні її вихідних даних спричиняють великі відхилення у отриманих результатах. У таких випадках застосування чисельних методів здебільшого не має сенсу.

До основних властивостей математичних моделей відносять їх скінченність, спрощеність, наближеність, повноту, адекватність та істинність.

Скінченність моделі означає, що вона відображає лише деякі з характеристик, притаманних оригіналу. Вона обумовлена обмеженістю часу, потрібного для розробки та аналізу моделі.

Спрощеність моделі означає, що при її побудові були відкинуті характеристики оригіналу, несуттєві для дослідника.

Наближеність означає, що модель лише наближено відображає характеристики системи та співвідношення у ній. Типовими прикладами наближень, що використовуються при математичному моделюванні, є заміна дискретних систем неперервних систем дискретними та навпаки, заміна нелінійних залежностей лінійними, установлення обмежень на точність обчислення результатів тощо. З скінченності та наближеності моделі впливає, що вона відображає оригінал неповно. Ступінь повноти моделі залежить від мети та задач моделювання.

Адекватність моделі характеризує можливість реалізації мети моделювання, а її істинність відображає відповідність моделі існуючим знанням про об'єкт моделювання. Критеріями адекватності є відображення всіх суттєвих властивостей об'єкта дослідження, вірне відображення існуючих взаємозв'язків між окремими елементами складної системи. При кількісному дослідженні показником адекватності моделі є величина відхилення результатів моделювання від існуючих емпіричних даних. Істинність моделі не є гарантією її адекватності. Це може бути обумовлено накопиченням обчислювальних похибок при розрахунках по моделі. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Прикладом є

регресійні моделі для прогнозування поведінки системи, що досліджується, у деякому діапазоні зміни вхідних параметрів, не відображаючи при цьому відомі дані щодо структури системи та взаємозв'язків між її елементами.

### 2.3 Побудова математичної моделі складної системи

Основними підходами до побудови математичних моделей складних систем є: 1) застосування фундаментальних законів природи; 2) використання варіаційних принципів; 3) використання аналогій; 4) застосування ієрархії моделей. Розглянемо сутність цих підходів.

Найбільш розповсюджений метод побудови математичних моделей полягає у застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Ці закони є загальноновизнаними та підтверджені експериментально і використовувалися багато разів, тому їх обґрунтованість не викликає сумніву. Основним питанням є, який з законів природи застосовувати у конкретному випадку, і як це зробити. До таких законів у фізиці, зокрема, у механіці, відносяться закон збереження енергії, закон збереження матерії, закон збереження імпульсу, закони Ньютона.

Варіаційні принципи, що застосовуються при математичному моделюванні, – це твердження про те, що з всіх можливих варіантів поведінки об'єкта дослідження, можливим є лише той, що задовольняє певній умові. Згідно з цією умовою функціонал, пов'язаний з об'єктом дослідження, досягає екстремального значення для певного стану об'єкту.

На практиці у багатьох випадках при моделюванні певної системи або неможливо безпосередньо вказати фундаментальні закони чи варіаційні принципи, яким безпосередньо відповідає поведінка системи, або немає впевненості у існуванні таких законів, що допускають математичне формулювання. У такому випадку використовуються аналогії з вже існуючими об'єктами, для яких розроблені математичні моделі.

Лише у виняткових випадках вдається побудувати математичну модель складної системи, що адекватно відображає всі її властивості та фактори, суттєві для її функціонування. Тому спочатку будуємо найпростішу модель об'єкта дослідження, а потім її поступово уточнюємо. При цьому отримується ієрархічна послідовність моделей, що реалізує принцип «від простого до складного». Кожна наступна модель включає у себе попередню.

Наведемо основні етапи побудови математичної моделі складної системи. До них відносяться:

- 1) формулювання предмету та цілей дослідження;

- 2) визначення елементів та характеристик системи, що є важливими для дослідження з точки зору досягнення його мети;
- 3) вербальний опис взаємозв'язків між виділеними елементами та характеристиками системи;
- 4) введення символічних позначень для визначених характеристик складної системи та формалізація зв'язків між ними у вигляді математичних співвідношень;
- 5) здійснення розрахунків за побудованою математичною моделлю;
- 6) аналіз отриманих результатів (формальний, з точки зору їх відповідності математичній моделі, та змістовний, з точки зору відповідності реальному об'єкту моделювання).

## Змістовий модуль 2. Математичні моделі динамічних систем

### Тема 3. Математичне моделювання динамічних систем

#### 3.1 Поняття динамічної системи

Динамічною системою називають об'єкт або процес, для яких однозначно визначено поняття стану як сукупності значень деяких величин у заданий момент часу, а також задано оператор, що визначає еволюцію початкового стану у часі. Прикладом динамічної системи є система матеріальних точок, що знаходиться під дією заданих сил. Її стан повністю визначається координатами та швидкостями точок у початковий момент часу, а еволюцію системи визначають рівняння руху (другий закон Ньютона).

Якщо досліджується задача визначення стану динамічної системи у будь-який момент часу на заданому інтервалі його зміни, то маємо динамічну систему з неперервним часом. Для моделювання еволюції таких систем використовують диференціальні рівняння. Якщо для опису поведінки системи достатньо знати її стан у скінченну чи зліченну множину моментів часу, то отримаємо систему з дискретним часом. Для моделювання таких задач використовують різницеві рівняння.

Розрізняють детерміновані та стохастичні динамічні системи. Якщо початкові умови та еволюційний оператор дозволяють однозначно визначити параметри системи у будь-який момент часу, то відповідна динамічна система є детермінованою. Якщо на еволюцію системи впливають випадкові фактори, то її називають стохастичною. Для моделювання стохастичних динамічних систем використовують теорію випадкових процесів.

#### 3.2 Приклади побудови елементарних диференціальних моделей динамічних систем

Розглянемо приклади побудови найпростіших диференціальних моделей динамічних систем. Спочатку розглянемо кілька прикладів моделювання економічних систем.

**Приклад 3.1.** Нехай  $y(t)$  – обсяг виробництва продукції деякого підприємства. Будемо вважати, що зі збільшенням обсягу виробництва відбувається насичення ринку і ціна товару  $p(y)$  при цьому зменшується. Нехай  $p(y) = b - ay$ , де параметри  $a$  та  $b$  є сталими додатними величинами, а швидкість збільшення обсягу виробництва є зростаючою функцією доходу підприємства.



Побудувати диференціальну модель виробничої діяльності підприємства та визначити обсяг виробництва продукції як функцію часу.

**Розв'язання.** Згідно з умовою швидкість зміни обсягу виробництва задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = k(b - ay) \cdot y.$$

Отримали диференціальне рівняння, у якому можна відокремити змінні:

$$\frac{dy}{y(b - ay)} = k \cdot dt.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо:

$$y(t) = \frac{C \cdot be^{bkt}}{1 + C \cdot ae^{bkt}}.$$

Графіком отриманої функції є логістична крива.

**Приклад 3.2.** Розглянемо задачу про оптимізацію прибутку фірми-монополіста. Нехай така фірма пропонує на ринку однорідний товар, для якого функція витрат має вигляд:  $C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma$ , де  $\alpha, \beta, \gamma$  – додатні сталі,  $Q = Q(t)$  – обсяг виробництва. Далі вважається, що він дорівнює попиту на товар фірми.

Попит залежить не лише від ціни  $p(t)$  на цей товар, але й від швидкості  $\frac{dp}{dt}$  її зміни.

Ця залежність має вигляд:

$$Q = a - b \cdot p(t) + h \cdot \frac{dp}{dt}, \quad a > 0, b > 0, h \neq 0.$$

Побудувати диференціальну модель для визначення зміни ціни у часі, що максимізує прибуток фірми на протязі часу  $T$ .

**Розв'язання.** Величина прибутку як функції часу має вигляд:

$$\begin{aligned} R\left(p, \frac{dp}{dt}\right) &= p \cdot Q - C = p\left(a - bp + h \frac{dp}{dt}\right) - \alpha\left(a - bp + h \frac{dp}{dt}\right)^2 - \\ &- \beta\left(a - bp + h \frac{dp}{dt}\right) - \gamma. \end{aligned}$$

Загальний прибуток  $I$  за час  $T$  є функціоналом:

$$I = \int_0^T R\left(p(t), \frac{dp}{dt}\right) dt \rightarrow \max.$$

При цьому відомі значення ціни у початковий момент часу  $t = 0$  та її прогнозоване значення у момент  $t = T$ :  $p(0) = p_0, p(T) = p_1$ .

Необхідною умовою досягнення функціоналом  $I$  екстремуму на функції  $p(t)$  є те, що ця функція повинна бути розв'язком рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{p}} \right) = 0.$$

Після підстановки у це рівняння виразу для  $R \left( p, \frac{dp}{dt} \right)$  отримуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції  $p(t)$ :

$$\frac{d^2 p}{dt^2} - \frac{b(1+ab)}{\alpha h^2} p = -\frac{\alpha + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha}.$$

Розв'язавши це рівняння та визначивши довільні сталі з крайових умов  $p(0) = p_0$ ,  $p(T) = p_1$ , отримуємо вигляд функції  $p(t)$ .

**Приклад 3.3.** Дві рідкі хімічні речовини,  $A$  та  $B$ , об'єм яких становить відповідно 10 л та 20 л, у процесі хімічної реакції утворюють нову рідку хімічну речовину  $C$ . Вважаючи, що температура у ході реакції не змінюється, а також, що з кожних двох об'ємів речовини  $A$  та одного об'єму речовини  $B$ , утворюються 3 об'єми речовини  $C$ , визначити кількість речовини  $C$  у довільний момент часу  $t$ , якщо за 20 хвилин отримуємо 6 л цієї речовини. При побудові математичної моделі використати закон діючих мас, згідно з яким швидкість хімічної реакції при сталій температурі пропорційна добутку концентрацій речовин, що у даний момент часу беруть участь у реакції (швидкість реакції – це швидкість утворення нової речовини).

**Розв'язання.** Нехай  $x$  л – об'єм речовини  $C$ , що утворилася до моменту часу  $t$  годин. Тоді з умови задачі випливає, що до цього моменту часу у хімічну реакцію вступило  $2x/3$  л речовини  $A$  та  $x/3$  л речовини  $B$ . Отже, до цього моменту часу залишилося  $10 - \frac{2x}{3}$  літрів речовини  $A$  та  $20 - \frac{x}{3}$  літрів речовини  $B$ . У відповідності до закону діючих мас, отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 \left( 10 - \frac{2x}{3} \right) \left( 20 - \frac{x}{3} \right).$$

Його можна записати у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = k(15-x)(60-x).$$

Тут  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки у початковий момент часу  $t = 0$  речовини  $C$  ще не було, то у цей момент часу  $x = 0$ . При  $t = \frac{1}{3}$  кількість речовини  $C$   $x = 6$ . Отже, для отриманого

диференціального рівняння маємо крайові умови:  $x(0) = 0$ ,  $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$ .

Для розв'язку отриманої крайової задачі спочатку проінтегруємо останнє диференціальне рівняння, використавши умову  $x(0) = 0$ . Отримаємо співвідношення:

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4e^{45kt}.$$

Для визначення коефіцієнту пропорційності  $k$  використаємо умову  $x\left(\frac{1}{3}\right) = 6$ . Отримуємо, що  $e^{15k} = \frac{3}{2}$ , звідки знаходимо:

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3t}.$$

З останньої рівності знаходимо  $x(t)$ :

$$x(t) = \frac{15 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}\right)}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}.$$

**Приклад 3.4** (диференціальна модель бойових дій). Розглянемо математичну модель бойових дій регулярних військ, запропоновану британським математиком та інженером Ф.У. Ланчестером.

Нехай  $x(t)$  та  $y(t)$  – чисельність армій протидіючих у конфлікті сторін. Тут  $t$  – час, що пройшов з початку конфлікту (у днях). Практично важко вказати кількісний вимір інших критеріїв, що впливають на результат конфлікту (рівень озброєнь, ступінь бойової готовності, досвід, моральний дух тощо), тому будемо вважати, що вирішальну роль мають показники  $x(t)$  та  $y(t)$ . При цьому вони змінюються неперервно та є диференційовними як функції часу. Нехай  $\alpha(t)$  – швидкість, з якою сторона  $x$  несе небойові втрати (від хвороби та інше),  $\beta(t)$  – швидкість бойових втрат,  $\gamma(t)$  – швидкість надходження підкріплень до сторони  $x$ . Загальна швидкість зміни величини  $x(t)$  визначається рівністю:

$$\frac{dx}{dt} = -(\alpha + \beta) + \gamma.$$

Аналогічне рівняння виконується і для невідомої функції  $y(t)$ . Подальше завдання полягає у тому, щоб вказати відповідні формули для введених величин  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ , а потім дослідити отримані диференціальні рівняння, щоб визначити ймовірного переможця.

У подальшому будемо використовувати наступні позначення:  $a, b, c, d$  – невід’ємні сталі, що характеризують рівень впливу різних факторів на людські втрати обох сторін,  $p(t), q(t)$  – функції, що моделюють можливість підходу підкріплень відповідно до сторін  $x$  та  $y$  на протязі дня,  $x_0, y_0$  – чисельність сил  $x$  та  $y$  перед початком конфлікту. Тоді диференціальна модель бойових дій набуває вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + p(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t) - dy(t) + q(t).$$

Кожне з цих диференціальних рівнянь відображає швидкість зміни чисельності військ сторін конфлікту у залежності від дії різних факторів. Відносні швидкості для втрат, не пов’язаних з бойовими діями, визначаються рівняннями:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = -d.$$

Доданок  $-b \cdot y(t)$  у моделі Ланчестера відображає бойові втрати сторони  $x$ , а коефіцієнт  $b$  у ньому – ефективність бойових дій сторони  $y$ . З рівняння

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = -b$$

випливає, що стала  $b$  – це одиниця вимірювання середньої ефективності кожної одиниці бойових сил сторони  $y$ . Аналогічно можна пояснити і доданок  $-c \cdot x(t)$ .

Коефіцієнти  $b$  та  $c$  подаються у вигляді:

$$b = r_y \cdot p_y, \quad c = r_x \cdot p_x, \quad (3.1)$$

де  $r_x, r_y$  – коефіцієнти потужності озброєнь відповідно сторін  $x$  та  $y$ ,  $p_x, p_y$  – ймовірності ураження противника кожним пострілом з боку  $x$  чи  $y$ .

Розглянемо випадок, коли втрати, не пов’язані з бойовими діями, відсутні і при цьому обидві сторони не отримують підкріплень. Тоді модель Ланчестера зводиться до системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = -by(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t). \quad (3.2)$$

Поділивши перше рівняння цієї системи на друге, отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}.$$

Після інтегрування цього рівняння отримуємо рівність

$$b(y^2(t) - y_0^2) = c(x^2(t) - x_0^2). \quad (3.3)$$

Позначивши  $K$  сталу величину  $by_0^2 - cx_0^2$ , отримуємо при  $K \neq 0$  рівняння гіперболи:

$$by^2 - cx^2 = K.$$

При  $K = 0$  отримаємо рівняння пари прямих.

З'ясуємо, яка зі сторін є переможцем згідно з моделлю Ланчестера. Далі вважатимемо, що перемогла та чи інша сторона, якщо вона першою знищила бойові сили суперника. У випадку, що розглядається, перемагає сторона  $y$ , якщо  $K > 0$ . З (3.3) випливає, що у цьому випадку  $y$  не дорівнює нулю, у той час, як при значенні

$y(t) = \sqrt{\frac{K}{b}}$  змінна  $x$  набуває нульового значення. Отже, для перемоги сторони  $y$ , їй потрібно намагатися досягти такої ситуації, коли виконується нерівність  $K > 0$ , тобто коли

$$by_0^2 > cx_0^2. \quad (3.4)$$

З (3.1) випливає, що нерівність (3.4) можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{r_x}{r_y} \cdot \frac{p_x}{p_y}. \quad (3.5)$$

Ліва частина нерівності (3.5) свідчить, що зміна у співвідношенні сил  $y_0/x_0$  надають перевагу одній зі сторін у відповідності з квадратичним законом.

Отримаємо відповідні співвідношення, які б враховували явно час. Для цього продиференціюємо по змінній  $t$  перше з рівнянь системи (3.2), а потім використаємо друге рівняння цієї ж системи. У результаті отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - bcx = 0. \quad (3.6)$$

Для цього рівняння маємо початкові умови:

$$x(0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -by_0.$$

Використовуючи ці умови, розв'язок рівняння (3.6) отримуємо у вигляді:

$$x(t) = x_0 \cos \beta t - \gamma y_0 \sin \beta t. \quad (3.7)$$

Тут  $\beta = \sqrt{bc}$ ,  $\gamma = \sqrt{\frac{b}{c}}$ . Аналогічно отримуємо вираз для  $y(t)$ :

$$y(t) = y_0 \cos \beta t - \frac{x_0}{\gamma} \sin \beta t. \quad (3.8)$$

Зауважимо, що для перемоги сторони  $y$  не обов'язково, щоб виконувалася нерівність  $y_0 > x_0$ , достатньо, щоб виконувалася нерівність  $\gamma y_0 > x_0$ .

### 3.3 Фазовий портрет та особливі точки динамічної системи

Нехай вектор  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  у деякий момент часу описує стан динамічної системи. Визначимо еволюційний оператор, вказавши швидкість зміни стану системи:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Евклідовий простір  $\mathbb{R}^n$   $n$ -вимірних векторів  $\bar{x}$  називають фазовим простором, а вектор  $\bar{x}$  – фазовою точкою. Системи, що мають вигляд (3.9), у яких права частина не залежить у явному вигляді від часу  $t$ , називають автономними. Якщо систему (3.9) доповнити початковими умовами  $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ , то отримаємо задачу Коші для цієї системи. Її розв'язок  $\bar{x}(t)$ , що розглядається як множина фазових точок, утворює фазову траєкторію. У фазовому просторі праві частини рівнянь системи (3.9) визначають векторне поле швидкостей. Фазові траєкторії та векторне поле швидкостей динамічної системи формують наочне уявлення про характер поведінки системи у часі. Множина фазових траєкторій, що відповідають різним початковим умовам, визначає фазовий портрет динамічної системи.

Розглянемо автономну систему, стан якої визначається диференціальними рівняннями

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y). \quad (3.10)$$

Нехай функції  $f(x, y)$  та  $g(x, y)$  є неперервно диференційовними у деякому околі точки  $(x_0, y_0)$ , у якій вони одночасно дорівнюють нулю, тобто  $f(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = 0$ . Точку  $(x_0, y_0)$  називають особливою точкою системи (3.10) на фазовій площині  $Oxy$ . У найпростішому випадку, коли  $f(x, y)$  та  $g(x, y)$  є лінійними функціями, тобто  $f(x, y) = ax + by$ ,  $g(x, y) = cx + dy$ , де величини  $a, b, c, d$  є сталими, визначення типу особливих точок здійснюється за наступною схемою. Спочатку знаходять корені  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  характеристичного рівняння системи

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.11)$$

Якщо корені дійсні,  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то особливу точку називають вузлом. Тут множина інтегральних кривих за формою нагадує множину парабол з вершинами

у початку координат. Якщо дійсні корені мають різні знаки, то особливу точку називають сідлом, а інтегральні криві нагадують дещо деформовані параболи. Якщо корені характеристичного рівняння є комплексними, з дійсною частиною, відмінною від нуля, то особливу точку називають фокусом, а інтегральні криві мають вигляд спіралей, що закручуються навколо початку координат. Якщо дійсна частина коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, а уявна ненульова, то особливу точку у цьому випадку називають центром. Інтегральні криві у випадку центру є замкненими та охоплюють початок координат.

Для побудови на фазовій площині фазового портрету динамічної системи потрібно дослідити особливі точки цієї системи. Після цього з допомогою похідних

$\frac{dy}{dx}$  та  $\frac{d^2y}{dx^2}$  вивчають поведінку інтегральних кривих рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Якщо необхідно побудувати траєкторії рівняння  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$ , то вводять нову змінну  $y = \dot{x}$  та переходять до системи виду (3.10):

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = g(x, y)$$

Граничним циклом системи (3.9) називають замкнену ізольовану траєкторію цієї системи, у якої існує окіл, цілком заповнений траєкторіями, по яким фазова точка необмежено наближається до цієї замкненої кривої при  $t \rightarrow +\infty$  чи  $t \rightarrow -\infty$ . Якщо траєкторії системи (3.9) наближаються до граничного циклу лише при  $t \rightarrow +\infty$ , то його називають стійким. Якщо ж траєкторії системи (3.9) наближаються до граничного циклу лише при  $t \rightarrow -\infty$ , то цей граничний цикл називають нестійким.

У випадку  $n = 2$  (фазова площина) розглядають також напівстійкі цикли. Граничний цикл на фазовій площині називають напівстійким, якщо траєкторії системи (3.10) з одного боку наближаються до нього при  $t \rightarrow +\infty$ , з іншого – при  $t \rightarrow -\infty$ . Отже, можливі напівстійкі цикли двох типів.

### 3.4 Різницеві моделі динамічних систем. Основні поняття та означення

Різницеvim оператором  $\Delta$  називають оператор, що переводить послідовність  $x_n$  у послідовність  $y_n$  за правилом

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Вираз  $\Delta x_n$  називають різницею першого порядку.

Різницеvim рівнянням називають рівняння, що містить невідому послідовність та її різниці. Розв'язком різницевого рівняння називають будь-яку послідовність, при підстановці якої у різницеve рівняння для довільного натурального  $n$  отримуємо тотожність.

Різницею другого порядку називають вираз

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n. \quad (3.13)$$

Оскільки  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ ,  $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$ , то

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \quad (3.14)$$

За індукцією можна визначити різницю  $m$ -го порядку:

$$\Delta^m x_n = \Delta^{m-1} x_{n+1} - \Delta^{m-1} x_n. \quad (3.15)$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести формулу:

$$\Delta^m x_n = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k x_{n+k}. \quad (3.16)$$

Виконується також рівність:

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^m C_m^k \Delta^k x_n. \quad (3.17)$$

У формулах (3.16) та (3.17)  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$  – біноміальні коефіцієнти.

Лінійним різницеvim рівнянням називають рівняння виду

$$a_0(n) \Delta^m x_n + a_1(n) \Delta^{m-1} x_n + \dots + a_m(n) x_n = f(n). \quad (3.18)$$

де  $x_n$  – невідома послідовність,  $a_0, a_1, \dots, a_m, f$  – задані функції натурального аргументу  $n$ . Число  $m$  (старший порядок різниці) називають порядком різницевого рівняння. Використовуючи формулу (3.16), лінійне різницеve

рівняння можна записати у вигляді:

$$c_0(n) x_{n+m} + c_1(n) x_{n+m-1} + \dots + c_m(n) x_n = f(n). \quad (3.19)$$

Якщо  $f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , то рівняння (3.18) або (3.19) називають лінійним однорідним різницеvim рівнянням  $m$ -го порядку.

Розглянемо різницеve рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = b, \quad (3.20)$$

де  $y_n, y_{n+1}$  – члени невідомої числової послідовності.



Різницеві рівняння є дискретним аналогом диференціальних рівнянь, тому математичні моделі, у яких використовуються різницеві рівняння, відносяться до дискретних моделей. Методи розв'язання лінійних різницевих рівнянь аналогічні методам розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

Загальний розв'язок рівняння (3.20) будемо шукати у вигляді:  $y_n = y_n^o + \tilde{y}_n$ , де  $y_n^o$  – загальний розв'язок відповідного однорідного різницевого рівняння  $f(n) = 0$ ,  $\tilde{y}_n$  – частинний розв'язок заданого неоднорідного різницевого рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_n^o$  шукаємо у вигляді:  $y_n^o = C \cdot \lambda^n$ , де  $C$  – довільна стала. Підставивши  $y_n^o$  у рівняння  $y_{n+1} + a \cdot y_n = 0$ , знаходимо:

$$C \cdot (\lambda^{n+1} + a \cdot \lambda^n) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a.$$

Тут  $\lambda$  фактично є коренем характеристичного рівняння  $\lambda + a = 0$ , отриманого аналогічно такому рівнянню для диференціального рівняння  $y' + ay = 0$  (у різницевому рівнянні  $y_{n+m}$  замінюємо на  $\lambda^m$ ).

Отже,  $y_n^o = C \cdot (-a)^n$ .

Частинний розв'язок  $\tilde{y}_n$  неоднорідного різницевого рівняння (3.20) шукаємо за виглядом його правої частини  $f(n)$ . Оскільки у даному випадку  $f(n) = b = \text{const}$ , то  $\tilde{y}_n = A = \text{const}$ .

Знайдемо сталу  $A$ , підставивши  $\tilde{y}_n = A$  у рівняння. Маємо:

$$A + a \cdot A = b \Rightarrow A = \frac{b}{1+a} = \tilde{y}_n.$$

Таким чином, ми отримали розв'язок різницевого рівняння (3.20) у вигляді:

$$y_n = y_n^o + \tilde{y}_n = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a}.$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що має вигляд:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = b. \tag{3.21}$$

Тут  $p$ ,  $q$  та  $b$  – задані сталі.

Структура загального розв'язку рівняння (3.21) також визначається рівністю  $y_n = y_n^o + \tilde{y}_n$ . Характеристичне рівняння має вигляд:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . Можливими є наступні випадки.

1. Корені  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  характеристичного рівняння є дійсними, причому  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння  $y_n^o = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$ .

2. Корені  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  характеристичного рівняння є дійсними,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $y_n^o = (C_1 n + C_2) \cdot \lambda^n$ .

3. Корені характеристичного рівняння комплексні:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . Тоді маємо:  $y_n^o = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$ ,  $\varphi = \arg(\lambda_2)$ .

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.21) у відповідності до його правої частини шукаємо у вигляді:  $\tilde{y}_n = B = \text{const}$ . Підставивши  $\tilde{y}_n$  у рівняння, знаходимо:  $B + pB + qB = b$ , звідки  $B = \frac{b}{1 + p + q}$ . Отже, розв'язком рівняння (3.21)

є послідовність  $y_n = y_n^o + \frac{b}{1 + p + q}$ , де  $y_n^o$  визначається у залежності від вигляду коренів характеристичного рівняння.

Прикладом економіко-математичної моделі, що приводиться до розв'язання лінійного різницевого рівняння, є так звана павутиноподібна модель ринку.

Нехай деяке виробниче підприємство визначає пропозицію свого товару у поточному періоді на основі цін, що склалися у попередньому періоді:  $s_n = s(p_{n-1})$ . Попит на товар залежить від ціни товару у поточному періоді:  $d_n = d(p_n)$ . Будемо вважати функції попиту та пропозиції лінійними, тобто

$$s_n = m + l \cdot p_{n-1}, \quad d_n = a - b \cdot p_n, \quad a > m > 0, \quad l > 0, \quad b > 0.$$

Знайдемо ціну рівноваги з умови  $d_n = s_n$ . Тоді  $a - b \cdot p_n = m + l \cdot p_{n-1}$ . Замінивши номер  $n - 1$  члена послідовності на  $n$ , отримуємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку відносно ціни  $p_n$ :

$$b \cdot p_{n+1} + l \cdot p_n = a - m.$$

Розв'язком цього лінійного різницевого рівняння є послідовність

$$p_n = C \cdot \left(-\frac{l}{b}\right)^n + \frac{a - m}{b + l}.$$

З отриманого розв'язку випливає, що при  $l < b$   $p_n \rightarrow p_0 = \frac{a - m}{b + l}$ , якщо  $n \rightarrow \infty$ .

Це значення  $p_0$  є ціною рівноваги для даного товару. Якщо  $l > b$ , то з часом ціна  $p_n$  буде віддалятися від ціни рівноваги  $p_0$ . Для випадку  $l = b$  спостерігаємо циклічні коливання ціни  $p_n$  у  $n$ -му періоді часу відносно значення  $p_0$ .



Якщо всі власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  матриці  $A$  є дійсними і різними (всі корені характеристичного рівняння дійсні та прості), то фундаментальну систему розв'язків утворюють векторні послідовності  $D_1\lambda_1^n, D_2\lambda_2^n, \dots, D_m\lambda_m^n$ . Тут  $D_i$  – власний вектор матриці  $A$ , що відповідає власному значенню  $\lambda_i, i=1,2,\dots,m$ . Загальний розв'язок лінійної однорідної системи різницьових рівнянь у цьому випадку має вигляд:  $X_n^o = C_1D_1\lambda_1^n + C_2D_2\lambda_2^n + \dots + C_mD_m\lambda_m^n$ .

У моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу  $X = AX + Y$ , розглянутій раніше, всі її елементи вважалися сталими, середніми за деякий період часу. На практиці обсяг виробництва у період часу  $n+1$  визначається значеннями  $X_n$  та  $Y_n$ , що були досягнуті у періоді  $n$ . Тому розглядається динамічна модель Леонтьєва у вигляді:

$$X_{n+1} = AX_n + Y_n. \quad (3.25)$$

Векторне рівняння (3.25) є системою  $m$  лінійних різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі: для заданого вектора кінцевого споживання  $Y_n$  та матриці прямих витрат  $A$  визначити вектор валового виробництва  $X_m$ .

Приклад. Визначити вектор валового виробництва  $X_m$  у динамічній моделі Леонтьєва, якщо технологічна матриця  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ , вектор кінцевого споживання  $Y_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$ .

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок системи  $X_{n+1} = AX_n + Y_n$  лінійних різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді  $X_n = X_n^o + \tilde{X}_n$ , де  $X_n^o$  – загальний розв'язок однорідної системи,  $\tilde{X}_n$  – частинний розв'язок заданої системи. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,2 - \lambda & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = -0,1, \lambda_2 = 0,5$ . Знайдемо відповідні власні вектори. При  $\lambda_1 = -0,1$  отримуємо рівняння для координат  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  власного вектору:

$$0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0,$$

звідки  $\alpha_1 = -\alpha_2$ , наприклад,  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$ .

Для  $\lambda_2 = 0,5$  маємо:

$$-0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0.$$

Звідси отримуємо  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

Отже, власні вектори  $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Тоді  $X_n^o = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n$ ,  $C_1$  та  $C_2$  – довільні сталі.

Частинний розв'язок заданої системи будемо шукати за виглядом правої частини цієї системи:  $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n$ ,  $\tilde{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1}$ . Підставивши ці вирази у задану неоднорідну систему, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n + \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1 \\ 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1 \end{pmatrix} \cdot 2^n.$$

Після скорочення обох частин цієї рівності на  $2^n$ , отримуємо систему рівнянь відносно  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1, \\ 2\alpha_2 = 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,8\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = -1, \\ 0,3\alpha_1 - 1,8\alpha_2 = -1. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

Отже,  $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n$ , загальний розв'язок системи (вектор валового

виробництва)  $X_n$  у розглянутій динамічній моделі Леонт'єва матиме вигляд:

$$X_n = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n.$$

Значення сталих  $C_1$  та  $C_2$  можна знайти, знаючи вектор валового виробництва у перші два роки.

### Змістовий модуль 3. Застосування кореляційно-регресійного аналізу при побудові складних систем

#### Тема 4. Побудова кореляційних та регресійних моделей

##### 4.1 Сутність кореляційно-регресійного моделювання об'єктів та процесів

Адекватні моделі функціонування складних систем та їх окремих складових з врахуванням взаємозв'язків між ними та зовнішнім середовищем системи можна побудувати, використовуючи методи математичної статистики, зокрема, кореляційного та регресійного аналізу. Ці розділи математичної статистики створюють можливість дослідження за даними відповідних вибірок статистичної залежності між показниками діяльності системи. При наявності статистичної залежності величини, що є об'єктом дослідження, не пов'язані між собою функціонально, проте, як випадкові величини, вони мають сумісний розподіл ймовірностей.

Дослідження залежності випадкової величини від декількох випадкових та детермінованих величин є метою регресійного аналізу, що дозволяє отримати модель регресії між цими величинами. Регресійна модель описує статистичну залежність між величинами, проте не встановлює причинно-наслідковий зв'язок між величинами. Гіпотезу про наявність причинно-наслідкового зв'язку потрібно формулювати, виходячи зі змістовної моделі об'єкту дослідження. Прикладом кореляційного зв'язку може бути статистична взаємозалежність між окремим галузями економіки або параметрами різних частин людського тіла.

За наявності регресійного зв'язку одна випадкова величина (залежна змінна  $Y$ ) залежить від кількох детермінованих факторів, що описуються незалежними змінними  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а також набору випадкових величин  $Z' = (z_1, z_2, \dots, z_l)$ :  $Y = f(x', Z')$ . Прикладом регресійної залежності є залежність між врожайністю певної сільськогосподарської культури та природними і економічними факторами, що впливають на неї.

Усі природні та суспільні явища взаємопов'язані. Зв'язок між багатьма з них має причинно-наслідковий характер. Ознаки, що характеризують причини та умови зв'язку, називають *факторними*. Ознаки, що характеризують наслідки зв'язку, називають *результативними*. Факторні зв'язки поділяють на функціональні та стохастичні. При *функціональному зв'язку* кожному значенню факторної ознаки  $x$  відповідає єдине значення результативної ознаки  $y$ . Функціональні зв'язки вивчають у математиці та природничих науках. Наприклад, зв'язок між радіусом круга та його площею є функціональним.

На відміну від функціональних, стохастичні зв'язки є неоднозначними. Наприклад, залежність рівня знань студентів від забезпеченості сучасною навчальною літературою є стохастичною. При стохастичному зв'язку кожному значенню ознаки  $x$  відповідає певна множина значень  $y$ , які утворюють так званий умовний розподіл. При умовному розподілі значення  $y$  – це значення випадкової величини. При кожному значенні  $x$  можна вказати ймовірності отримання певних значень  $y$ . Якщо умовні розподіли замінюють одним параметром – середньою, то такий зв'язок називають кореляційним. Кореляційний зв'язок є різновидом стохастичного зв'язку і проявляється у змінні середніх значень  $x$  та  $y$ .

За напрямком розрізняють прямі та обернені зв'язки. Прямий зв'язок передбачає, що зі зростанням факторної ознаки  $x$  зростає і результативна ознака  $y$ . При оберненому зв'язку зростання факторної ознаки супроводжується спаданням результативної ознаки.

Далі розглянемо особливості застосування кореляційно-регресійного аналізу для дослідження статистичної залежності між вибірковими даними.

## 4.2 Багатовимірні статистичні сукупності

При статистичному моделюванні багатовимірних випадкових величин розрізняють генеральну сукупність та вибіркові сукупності. Генеральною сукупністю називають множину всіх можливих результатів спостережень, які можна отримати при даному комплексі умов. Об'єктом дослідження у багатовимірному статистичному аналізі є випадковий вектор (випадкова точка)  $k$ -вимірною евклідового простору, тобто  $k$ -вимірною випадковою величиною  $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ .

Функцією розподілу випадкового вектора  $X'$  називають детерміновану не випадкову величину, що визначається рівністю:

$$F(x') = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_k < x_k) = P(X' < x'). \quad (4.1)$$

У рівності (4.1)  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$  –  $k$ -вимірний дійсний фіксований вектор.

Функція розподілу має наступні властивості.

1.  $F(x') = 0$ , якщо серед  $x_j$  є хоча б одна компонента, що дорівнює  $-\infty$ ;
2.  $F(x') = 1$ , якщо всі компоненти вектора  $\bar{x}$  дорівнюють  $+\infty$ .
3.  $F(x')$  задовольняє формулу обчислення ймовірності потрапляння випадкової точки у  $k$ -вимірний паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам.

Розрізняють неперервні  $k$ -вимірні випадкові величини, всі компоненти яких є неперервними одновимірними випадковими величинами, дискретні  $k$ -вимірні випадкові величини, всі компоненти яких є дискретними випадковими величинами, та змішані  $k$ -вимірні випадкові величини, серед компонент яких є неперервні та дискретні випадкові величини.

Функція розподілу  $F(x')$  для неперервної  $k$ -вимірної випадкової величини за визначенням є неперервною.

Дискретна  $k$ -вимірна випадкова величина визначається заданням ймовірностей її потрапляння у довільну точку скінченної або зліченної множини допустимих точок.

Умовними розподілами випадкового вектора  $X'$  називають розподіли підсистеми  $L$  ( $1 \leq L \leq k$ ) його компонент за умови, що решта  $k - L$  компонент є фіксованими. Ці компоненти від нефіксованих будемо відокремлювати похилою рискою.

Моментом  $l$ -го порядку ( $l = l_1 + l_2 + \dots + l_k$ ) випадкового вектора  $X'$  відносно сталого вектору  $c'$  називають величину

$$M_{l_1, l_2, \dots, l_k} = M \left[ (X_1 - c_1)^{l_1} (X_2 - c_2)^{l_2} \dots (X_k - c_k)^{l_k} \right]. \quad (4.2)$$

При  $c' = 0'$  моменти називають початковими, при  $c' = (MX_1, MX_2, \dots, MX_k)$  – центральними моментами.

При  $l_1 = l_2 = \dots = l_k = 1$  та  $c' = 0'$  з формули (4.2) отримуємо математичне сподівання випадкового вектора  $X'$ .

На практиці достатньо обмежитися моментами до другого порядку включно. Далі будемо використовувати наступні позначення:

$MX_j^l = M(X_j)^l$  – початковий момент  $l$ -го порядку, математичне сподівання  $l$ -го степеня  $j$ -ої компоненти вектора  $X'$ ;

$M(X_i X_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$  – початковий мішаний момент другого порядку;

$\sigma_{jj} = \sigma_j^2 = MX_j^2 - (MX_j)^2 = M(X_j - MX_j)^2$  – дисперсія  $j$ -ої компоненти вектора  $X'$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ;

$\sigma_{ij} = M[(X_i - MX_i)(X_j - MX_j)] = M(X_i X_j) - M(X_i)M(X_j)$  – центральний мішаний момент другого порядку, коефіцієнт коваріації  $i$ -ої та  $j$ -ої компонент вектора  $X'$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ .

Коваріаційною матрицею  $[\Sigma]$  випадкового вектора  $X'$  називають математичне сподівання добутку центрованого випадкового вектора на цей же транспонований вектор:



$$[\Sigma] = M \left[ (X' - MX')(X' - MX')^T \right]. \quad (4.3)$$

Коваріаційна матриця  $[\Sigma]$  має вигляд:

$$[\Sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \dots & \sigma_{kk} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Коваріаційна матриця є симетричною та невід'ємно визначеною.

Коефіцієнт парної кореляції визначається за формулою:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (4.5)$$

За абсолютною величиною цей показник не перевищує одиниці. Якщо коефіцієнт парної кореляції дорівнює нулю, то компоненти  $X_i$  та  $X_j$  є незалежними, при  $|\rho_{ij}|=1$  між цими компонентами спостерігається лінійна функціональна залежність.

Матрицю

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

називають кореляційною матрицею. Вона симетрична та невід'ємно визначена.

Квадрат коефіцієнта кореляції називають коефіцієнтом детермінації.

Вибірку обсягом  $n$  з  $k$ -вимірної генеральної сукупності можна подати у вигляді наступної матриці даних:

$$[X'] = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Її рядки будемо розглядати як  $n$  незалежних реалізацій  $k$ -вимірного випадкового вектора. Отже, елементи  $x_{ij}$  матриці  $[X]$  можна розглядати або як одновимірні випадкові величини, незалежні по  $i$ , або як конкретні результати спостереження – координати  $n$  точок у  $k$ -вимірному евклідовому просторі.

Оцінку початкового моменту  $m$ -го порядку  $l$ -ої компоненти випадкового вектора  $X'$  обчислюють за формулою:

$$\bar{X}_l^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{il}^m, l = 1, 2, \dots, k. \quad (4.8)$$

При  $m=1$  маємо середню арифметичну.

Оцінку коваріаційної матриці  $[\Sigma]$  випадкового вектора  $X'$  (матриці вибірових дисперсій та коефіцієнтів коваріації) визначають за формулою:

$$[S] = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1k} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{kk} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Коефіцієнти цієї матриці мають вигляд:

$$s_{lj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{il} - \bar{x}_l)(x_{ij} - \bar{x}_j), l, j = 1, 2, \dots, k. \quad (4.10)$$

Тут  $s_{ll} = s_l^2$  – вибіркова дисперсія  $l$ -ої компоненти випадкового вектора  $X'$ ,  $s_{lj}$  – вибірковий коефіцієнт коваріації  $l$ -ої та  $j$ -ої компонент вектора  $X'$ . Замість матриці  $[S]$  використовують також незміщену оцінку матриці  $[\hat{S}]$ :

$$[\hat{S}] = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \dots & \hat{s}_{1k} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \dots & \hat{s}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{s}_{k1} & \hat{s}_{k2} & \dots & \hat{s}_{kk} \end{pmatrix} = \frac{n}{n-1} [S]. \quad (4.11)$$

Оцінку кореляційної матриці  $[R]$  можна знайти за формулою:

$$[R] = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Тут  $r_{lj} = \frac{s_{lj}}{s_l s_j}$  – оцінка парного коефіцієнта кореляції між  $l$ -ою та  $j$ -ою компонентами вектора  $X'$ .

Оцінку кореляційної матриці можна отримати також за формулою

$R = \frac{1}{n} Z^T Z$ , де матриця  $Z$  має вигляд:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1k} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nk} \end{pmatrix}, \quad z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}. \quad (4.13)$$

Для отримання оцінок параметрів умовних розподілів потрібні певним чином організовані вибірки, тобто вибірки при фіксованих значеннях частини компонент генеральної сукупності. На практиці таку вибірку можна отримати за допомогою групування даних по закріпленим значенням частини ознак, що дорівнюють їх дискретним значенням або середнім значенням областей групування.

Розглянемо деякі оцінки параметрів умовних розподілів на прикладі двовимірної генеральної сукупності.

Нехай ми отримали вибірку з генеральної сукупності  $(X, Y)$  обсягом  $n$ :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_j, y_j), \dots, (x_n, y_n).$$

Таблиця 4.1 відображає загальний вигляд кореляційної таблиці. У рядку  $x$  у порядку зростання розташовані варіанти  $x_k$ , а у стовпчику  $y$  – варіанти  $y_l$ . На перетині стовпця  $x_k$  та рядка  $y_l$  знаходиться частота  $m_{kl}$ , що дорівнює кількості точок вибірки з координатами  $(x_k, y_l)$ . У стовпчику  $m_y$  розташовані частоти

$m_l = \sum_k m_{kl}$ , а у рядку  $x$  – частоти  $m_k = \sum_l m_{kl}$ . Значення  $n$  дорівнює сумі частот будь-якого з одновимірних рядів,  $x$  чи  $y$ .

**Таблиця 4.1.** Загальний вигляд кореляційної таблиці

	...	$x_k$	...	$m_y$
...	...	...	...	...
$y_l$	...	$m_{kl}$	...	$m_l$
...	...	...	...	...
$m_x$	...	$m_k$	...	$n$

Якщо зафіксувати  $X$  на величині  $x_k$ , то отримаємо одновимірний згрупований ряд зі значеннями (варіантами)  $y_1, \dots, y_l, \dots, y_s$  з відповідними частотами  $m_{k1}, \dots, m_{kl}, \dots, m_{ks}$  і, відповідно з об'ємом  $m_k$  групи  $x_k$ .

Середня арифметична та початковий момент другого порядку

$$\bar{y}_k = \frac{1}{m_k} \sum_{l=1}^s y_l \cdot m_{kl}, \quad \bar{y}_k^2 = \frac{1}{m_k} \sum_{l=1}^s y_l^2 \cdot m_{kl},$$

а також вибіркова дисперсія  $s_{y^2}^2 = \bar{y}_k^2 - (\bar{y}_k)^2$  цього умовного згрупованого ряду є точковими оцінками для умовного математичного сподівання  $MY / X = x_k$  та дисперсії  $DY / X = x_k$  генеральної сукупності  $(X, Y)$ .

Послідовність пар  $(x_1, \bar{y}_1), (x_2, \bar{y}_2), \dots, (x_k, \bar{y}_k), \dots, (x_r, \bar{y}_r)$  є оцінкою регресії  $Y$  на  $X$ . Таку регресію називають емпіричною.

Величина

$$s_y^2 = \frac{\sum_{k=1}^r s_{yk}^2 m_k}{\sum_{k=1}^r m_k} \quad (4.14)$$

є оцінкою залишкової дисперсії  $Y$ , а величину

$$s_{y\text{ пер.}}^2 = \frac{\sum_{k=1}^s (\bar{y}_k - \bar{y})^2 m_k}{\sum_{k=1}^s m_k} \quad (4.15)$$

називають дисперсією емпіричної регресії  $Y$ , яка є оцінкою генеральної дисперсії регресії  $DY_{\text{пер.}} = M[MU / x - MU]^2$ . Виконується рівність  $s_y^2 = s_{y\text{ пер.}}^2 + \bar{s}_y^2$ .

### 4.3 Основні поняття кореляційного аналізу

Кореляційний аналіз є одним з методів статистичного аналізу взаємозалежності кількох ознак – компонент випадкового вектора  $X'$ .

Одним з основних показників взаємозалежності двох випадкових величин є парний коефіцієнт кореляції, що є мірою лінійної статистичної залежності між цими величинами. Це ж відноситься і до частинних та сукупних коефіцієнтів кореляції. Однією з вимог, за виконання якої застосовують кореляційний аналіз, є вимога лінійності статистичного зв'язку, тобто лінійності рівняння регресії. Загалом кореляційний аналіз застосовують, коли результати спостережень можна вважати випадковими та вибраними з генеральної сукупності, розподіленої за багатовимірним нормальним законом.

Основна задача кореляційного аналізу полягає у оцінці  $\frac{k(k+3)}{2}$  параметрів, що визначають нормальний закон розподілу  $k$ -вимірного вектора  $X'$ , зокрема, кореляційної матриці генеральної сукупності за вибіркою з неї. Крім того, при виконанні кореляційного аналізу здійснюється оцінка коефіцієнтів рівнянь регресії.

Для генеральної сукупності з двома ознаками,  $X$  та  $Y$ , її розподіл визначається 5 параметрами:  $MX, MY, DX, DY, \rho = M\left[\frac{X - MX}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - MY}{\sigma_Y}\right]$ . Знаючи ці параметри, можна отримати рівняння ліній регресії, що описують зміну умовних

математичних сподівань у залежності від зміни відповідних значень випадкових аргументів:

$$MY / X - MY = \beta_{YX} (X - MX) \text{ – пряма регресії } Y \text{ на } X;$$

$$MX / Y - MX = \beta_{XY} (Y - MY) \text{ – пряма регресії } Y \text{ на } X;$$

$$\beta_{YX} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \text{ – коефіцієнт регресії } Y \text{ на } X;$$

$$\beta_{XY} = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \text{ – коефіцієнт регресії } X \text{ на } Y.$$

Квадрат коефіцієнта кореляції (коефіцієнт детермінації) у кореляційній моделі характеризує частку дисперсії однієї випадкової величини, обумовленої зміною іншої.

Точкові оцінки параметрів генеральної сукупності через вибіркові параметри визначають з допомогою наведених раніше формул для обчислення вибіркових середніх та вибіркових дисперсій. Оцінка для коефіцієнта кореляції має вигляд:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}. \quad (4.16)$$

Оцінки коефіцієнтів регресії  $\beta_{YX}, \beta_{XY}$  отримаємо за формулами:

$$b_{yx} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}, b_{xy} = r \cdot \frac{s_x}{s_y}. \quad (4.17)$$

Відповідно оцінки рівнянь регресії мають вигляд:

$$\overline{y / x} - \bar{y} = b_{yx} (x - \bar{x}), \overline{x / y} - \bar{x} = b_{xy} (y - \bar{y}). \quad (4.18)$$

У двовимірній моделі параметрами зв'язку є коефіцієнт кореляції  $\rho$  та коефіцієнти регресії  $\beta_{XY}, \beta_{YX}$ . У двовимірній моделі достатньо перевірити лише значущість коефіцієнта кореляції. Якщо він незначущий, то випадкові величини  $X$  та  $Y$  є незалежними.

Статистика  $r$  пов'язана зі статистикою  $t$ , що має розподіл Стьюдента з  $n-2$  ступенями вільності, формулою:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}. \quad (4.19)$$

Знаючи межі для  $t$ , що відповідають рівню значущості  $\alpha$ , можна отримати межі для  $r$ , використавши цю формулу. Побудовані таблиці таких меж. Для перевірки гіпотези  $H_0: \rho = 0$  за обраним рівнем значущості  $\alpha$  (звичайно рівень значущості набуває значень 0,1; 0,05; 0,02; 0,01) а також величиною  $\nu = n - 2$  знаходять  $r_{табл.}$ . Якщо абсолютна величина обчисленого значення  $r$  перевищує  $r_{табл.}$ ,

то гіпотеза  $H_0$  відхиляється з ймовірністю помилки  $\alpha$ , у протилежному випадку гіпотезу  $H_0$  приймають.

Головною характеристикою кореляційного зв'язку є лінія регресії. Лінія регресії  $x$  на  $y$  – функція, що пов'язує середні значення ознаки  $y$  з середніми значеннями ознаки  $x$ . У залежності від форми лінії регресії розрізняють лінійний та нелінійний зв'язки. Лінія регресії може бути представлена таблично, графічно, аналітично. Лінія регресії є неперервною і зображується у вигляді функції  $\tilde{y} = f(x)$ . Цю функцію називають рівнянням регресії, а  $\tilde{y}$  називають теоретичними значеннями результуючої ознаки.

Сутність кореляційно-регресійного аналізу (КРА) розглянемо на наступному прикладі. Візьмемо сукупність людей середнього віку і визначимо для них зріст та масу тіла. Відповідні пари показників – це точки у системі координат «зріст – маса». Ці точки на координатній площині утворюють поле кореляції. Нехай «зріст» – факторна ознака, «маса» –результативна ознака. Тут кожному значенню зросту може відповідати кілька значень маси. Маємо умовний розподіл показника маси. Можна його знайти середні значення та стандартне відхилення, що відповідає кожному значенню зросту. Коли сукупність людей є досить великою, то їх розподіл за масою є близьким до нормального. У природі масових явищ нормальний розподіл досить поширений. Тут багато прикладів можна навести з біології, коли мова йде про норму, а не патологію. Нормально розвинені люди нормально розподілені за зростом, масою, артеріальним тиском тощо. Значно рідше нормальний розподіл зустрічається при дослідженні соціально-економічних явищ.

Побудувавши поле кореляції, ми бачимо, що між показниками «зріст» та «маса» існує стохастичний кореляційний прямий зв'язок: при зростанні зросту збільшується ймовірне середнє значення маси. У нашому прикладі кореляційне поле набуває певної форми і його можна моделювати певною функцією  $\tilde{y} = f(x)$ , де  $\tilde{y}$  – теоретичне значення результативної ознаки.

При відсутності зв'язку між ознаками кореляційне поле являє множину хаотично розкиданих точок, що не групуються біля певної лінії – лінії регресії.

Кореляційно-регресійний аналіз складається з наступних етапів:

- Вибір форми лінії регресії;
- Визначення параметрів рівняння цієї лінії;
- Оцінка тісноти зв'язку;
- Перевірка істотності зв'язку.

При виборі функції, що визначає форму лінії регресії, використовують вигляд поля кореляції. Можливий перебір функцій, коли використовують рівняння регресії різних видів і з них вибирають найкраще.

#### 4.4 Парна лінійна регресія

Найбільш поширеною у статистичному аналізі є лінійна функція

$$\tilde{y} = a + bx. \quad (4.20)$$

Тут параметр  $b$  називають *коефіцієнтом регресії*. Він показує, на скільки одиниць власного виміру у середньому змінюється значення ознаки  $y$  при збільшенні ознаки  $x$  на одиницю. Параметр  $a$  – це значення  $y$  при  $x=0$ .

Якщо  $x$  за своїм змістом не може набувати нульового значення, то  $a$  змістовно не інтерпретується, як вільний член рівняння регресії він має лише розрахункове значення.

У деяких випадках суть явища, що моделюється, приводить до необхідності використання нелінійних рівнянь регресії, наприклад, степеневі функції  $\tilde{y} = ax^b$

або гіперболи  $\tilde{y} = a + \frac{b}{x}$ .

У подальших формулах підсумовування здійснюється за всіма значеннями ознаки, що спостерігаються у вибірці і у значку суми індекси підсумовування опущені, як це зазвичай робиться у статистичних дослідженнях.

Визначення параметрів рівняння регресії проводиться методом найменших квадратів. Його основною умовою є мінімізація суми квадратів відхилень емпіричних значень результативної ознаки від теоретичних. Це дає можливість отримати найкращі оцінки параметрів регресії  $a$  та  $b$ . Маємо:

$$\sum (y - \tilde{y})^2 \rightarrow \min. \quad (4.21)$$

Для їх обчислення у випадку використання лінійної функції (лінійної регресії) складають та розв'язують систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum xy. \end{cases} \quad (4.22)$$

Розв'язуючи цю систему, отримують значення коефіцієнтів  $a$  та  $b$ :

$$a = \frac{\sum y \cdot \sum x^2 - \sum xy \cdot \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, b = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}. \quad (4.23)$$

Коефіцієнти рівняння регресії розраховують, виходячи з даних вибірки, які можуть вказувати на лінійний характер зв'язку між показниками, хоча насправді у генеральній сукупності він не існує. Тому необхідно визначити ймовірність того, що лінійний зв'язок у вибірці свідчить про такий самий зв'язок у генеральній сукупності, тобто оцінити значущість коефіцієнтів регресії. Її оцінюють з

використанням t-критерію Стьюдента з  $V = n - 2$  ступенями вільності і вибраним рівнем значущості  $\alpha$ . Розрахункове значення критерію знаходять за формулою:

$$t_{\text{розра.}} = |b| \cdot \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{\sum (y - \tilde{y})^2} \cdot (n - 2)}$$

Якщо  $t_{\text{розра.}} > t_{\text{крит.}}$ , то коефіцієнт регресії вважається значущим, тобто має значення і у генеральній сукупності.

Незміщена стандартна похибка коефіцієнта регресії дорівнює

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y})^2}{\sum (x - \bar{x})^2} \cdot \frac{1}{n - 2}}$$

Враховуючи цю рівність, знаходять граничну похибку коефіцієнта регресії  $\Delta_b = t_{\text{крит.}} \cdot \sigma_b$ . Межі довірчого інтервалу коефіцієнта регресії становлять  $b \pm \Delta_b$ .

Визначення щільності зв'язку між  $x$  та  $y$  ґрунтується на визначенні дисперсій. Тут обчислюють факторну дисперсію

$$\sigma_{\tilde{y}}^2 = \frac{\sum (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{n} \quad (4.24)$$

Тут  $\tilde{y}_i$  – теоретичні значення результативної ознаки, обчислені за рівнянням (4.20),  $\bar{y}$  – середня емпіричних значень ознаки  $y_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – кількість спостережень.

Факторна дисперсія (4.24) характеризує варіацію результативної ознаки, пов'язану з варіацією факторної ознаки.

Розраховують також залишкову випадкову дисперсію:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum (\tilde{y}_i - y_i)^2}{n} \quad (4.25)$$

Загальна дисперсія розраховується за формулою:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\tilde{y}}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} \quad (4.26)$$

Вона характеризує варіацію результативної ознаки, не пов'язану з варіацією факторної ознаки.

Мірою щільності зв'язку у кореляційно-регресійному аналізі (КРА) є коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = \frac{\sigma_{\tilde{y}}^2}{\sigma_y^2} \quad (4.27)$$



Індекс кореляції  $R = \sqrt{R^2}$  також характеризує щільність зв'язку. Він набуває значень від 0 (за відсутності лінійного зв'язку) до 1 (зв'язок між ознаками є функціональним).

При лінійному зв'язку між ознаками використовують також лінійний коефіцієнт кореляції

$$r = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{(n \sum y^2 - (\sum y)^2) \cdot (n \sum x^2 - (\sum x)^2)}}. \quad (4.28)$$

Перевірку істотності зв'язку у КРА здійснюють за допомогою  $F$ -критерію Фішера:

$$F_R = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1}, \quad (4.29)$$

де  $m$  – кількість параметрів регресії.

Залежність між факторною та результативною ознаками у багатьох випадках можна змоделювати рівнянням двочленної гіперболічної регресії виду

$$\tilde{y} = a + \frac{b}{x} \quad (4.30)$$

(наприклад, залежність між собівартістю одиниці продукції та обсягом її виробництва). Вона відрізняється від лінійної лише тим, що замість величини  $x$  там присутня  $1/x$ . Тоді система нормальних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} na + b \sum \frac{1}{x} = \sum y, \\ a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо наступні вирази для параметрів  $a$  та  $b$ :

$$a = \frac{\sum y \cdot \sum \frac{1}{x^2} - \sum \frac{y}{x} \cdot \sum \frac{1}{x}}{n \sum \frac{1}{x^2} - \left( \sum \frac{1}{x} \right)^2}, \quad (4.32)$$

$$b = \frac{n \sum \frac{y}{x} - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum y}{n \sum \frac{1}{x^2} - \left( \sum \frac{1}{x} \right)^2}.$$

Для розрахунку параметрів рівняння регресії, що має форму степеневі функції  $\tilde{y} = ax^b$  необхідно привести цю функцію до лінійного вигляду шляхом логарифмування:  $\lg \tilde{y} = \lg a + b \lg x$ . Отримане рівняння відрізняється від рівняння

(4.20) звичайної лінійної регресії лише тим, що замість  $\tilde{y}$ ,  $x$ ,  $a$  у рівнянні присутні їхні логарифми.

**Приклад 4.1.** За допомогою КРА визначити наявність та характер статистичного зв'язку між ознаками «вік устаткування» та «витрати на ремонт». Вихідні дані та проміжні розрахунки наведено у таблиці 4.2.

**Розв'язання.** За даними таблиці обчислюємо параметри рівняння регресії:

$$a = \frac{27 \cdot 536 - 70 \cdot 217,1}{10 \cdot 536 - 70 \cdot 70} \approx -1,576;$$

$$b = \frac{10 \cdot 217,1 - 70 \cdot 27}{10 \cdot 536 - 70 \cdot 70} \approx 0,611.$$

**Таблиця 4.2.** Вік устаткування та витрати на ремонт для групи підприємств

№	Вік устаткування, років, $x$	Витрати на ремонт, тис. г.о., $y$	$x^2$	$xy$	$\tilde{y}$	$(y - \tilde{y})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	4	1,5	16	6,0	0,868	0,399	1,44
2	5	2,0	25	10,0	1,479	0,271	0,49
3	5	1,4	25	7,0	1,479	0,006	1,69
4	6	2,3	36	13,8	2,090	0,044	0,16
5	8	2,7	64	21,6	3,312	0,374	0,0
6	10	4,0	100	40,0	4,534	0,285	1,69
7	8	2,3	64	18,4	3,312	1,024	0,16
8	7	2,5	49	17,5	2,700	0,040	0,04
9	11	6,6	121	72,6	5,145	2,117	15,21
10	6	1,7	36	10,2	2,090	0,152	1,0
Разом	70	27	536	217,1	27,010	4,712	21,92

Отже, маємо прямий зв'язок між віком устаткування та витратами на його ремонт. Лінійне рівняння регресії має вигляд:

$$\tilde{y} = -1,576 + 0,611x.$$

Підставляючи у це рівняння значення  $x$ , отримуємо теоретичні значення  $\tilde{y}$ . Залишкова дисперсія дорівнює:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum(\tilde{y}_i - y_i)^2}{n} = \frac{4,712}{10} = 0,4712.$$

Загальна дисперсія дорівнює:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{21,92}{10} = 2,192.$$

Тоді факторну дисперсію визначаємо з формули (4.7):

$$\sigma_y^2 = 2,192 - 0,4712 = 1,7208.$$

Коефіцієнт детермінації дорівнює:

$$R^2 = \frac{1,7208}{2,192} \approx 0,785.$$

Отже, 78,5% загальної варіації витрат на ремонт устаткування залежить від варіації його віку.

Індекс кореляції  $R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,785} \approx 0,886$  є близьким до 1, що свідчить про досить тісний прямий зв'язок між віком устаткування та витратами на його ремонт.

Для перевірки істотності індексу кореляції застосовують таблицю критичних значень  $F$ -критерію Фішера. Спочатку розраховуємо значення цього критерію:

$$F_R = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1} = \frac{0,785}{1 - 0,785} \cdot \frac{10 - 2}{2 - 1} \approx 54,6.$$

При рівні значущості  $\alpha = 0,01$ ,  $n - m = 8$ ,  $m - 1 = 1$  табличне критичне значення  $F$ -критерію становить 11,26, що менше, ніж фактичне значення цього критерію, що становить 54,6. Таким чином, обчислений нами індекс кореляції є істотним та адекватно відображає щільність взаємозв'язку між віком устаткування та витратами на його ремонт.

Для моделювання періодичних коливань результативної ознаки під дією певних факторів використовують криві регресії у вигляді тригонометричного многочлена:

$$\tilde{y} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Такі криві використовуються, зокрема, при моделюванні сезонних явищ. Якщо є результати щомісячного спостереження за сезонним явищем протягом року, то аргумент  $x$  як фактор часу може набувати значень від  $2\pi/12$  до  $2\pi$ . Застосувавши метод найменших квадратів, можна знайти невідомі параметри рівняння регресії періодичного вигляду:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum y, a_n = \frac{2}{n} \sum y \cos kx, b_n = \frac{2}{n} \sum y \sin kx.$$

Оцінку значущості коефіцієнтів нелінійної регресії можна проводити аналогічно до оцінки значущості коефіцієнтів лінійного рівняння, користуючись  $t$ -критерієм, попередньо звівши модель до лінійної. Наприклад, для оцінки коефіцієнта  $a_1$  періодичного рівняння регресії  $\tilde{y} = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x$  проводимо заміну  $\cos x = u$  і для знаходження розрахункового значення критерія використовуємо формулу

$$t_{\text{розр.}} = |a_1| \cdot \sqrt{\frac{\sum (u - \bar{u})^2}{\sum (y - \tilde{y})^2} \cdot (n - 2)}.$$

#### 4.5 Багатофакторний кореляційно-регресійний аналіз

Значення багатьох показників, що описують функціонування складної системи, формується під впливом не однієї, а кількох факторних ознак. При цьому кожна з факторних ознак окремо не чинить вирішального впливу на значення результативної ознаки, але спільний вплив факторних ознак є визначальним. Для кількісного аналізу характеру впливу декількох факторних ознак на значення результативної ознаки використовують моделі множинної кореляції та множинної регресії.

Розглянемо сутність багатофакторного кореляційно-регресійного аналізу. На його першому етапі необхідно вирішити, які саме фактори потрібно включити у модель. Необхідною умовою такого включення є наявність статистичного зв'язку між даним фактором та результативною ознакою. Помилкою є спроба врахувати при побудові моделі всі фактори, що можуть впливати на результативну ознаку. Проте, якщо між факторами існує функціональний або дуже щільний статистичний зв'язок (явище мультиколінеарності), то не потрібно включати їх у модель разом, оскільки один з них виражається через інший. Включення у модель взаємопов'язаних факторів призводить до розширення інтервалів довіри, незначущості t-статистики для оцінки параметрів моделі, труднощів обчислювального характеру, пов'язаних із розв'язанням системи нормальних рівнянь для визначення коефіцієнтів моделі. Рівняння множинної регресії об'єктивно відображає явище лише тоді, коли фактори є кореляційно незалежними, тобто мультиколінеарність відсутня.

Другим кроком кореляційно-регресійного аналізу є статистичний аналіз факторів з метою перевірки основних припущень класичної регресійної моделі.

Кількісною мірою щільності зв'язку між результативною ознакою та факторами є множинний (сукупний) коефіцієнт кореляції, який характеризує міру спільного впливу незалежних факторів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на величину результативної ознаки  $y$ .

Коефіцієнт множинної кореляції розраховують за формулою:

$$R = \frac{\sum (y - \bar{y})(y - \tilde{y})}{\sqrt{\sum (y - \bar{y})^2 (y - \tilde{y})^2}}. \quad (4.33)$$

Значення множинного коефіцієнта кореляції може набувати значень у проміжку від 0 до 1. Чим ближче це значення до 1, тим щільнішим є множинний



набором значущих факторів визначаємо остаточний вигляд рівняння лінійної множинної регресії, а також коефіцієнт множинної кореляції.

На підставі розрахованих значень  $\sigma_{b_i}$  та вибраного рівня значущості  $\alpha$  можна знайти довірчі межі коефіцієнтів регресії у генеральній сукупності:

$$b_i - t_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{b_i} \leq \beta_i \leq b_i + t_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{b_i}. \quad (4.38)$$

Оцінку значущості коефіцієнта множинної кореляції можна здійснити з використанням  $F$ -критерію із  $V_1 = m, V_2 = n - m - 1$  ступенями вільності:

$$F_{\text{розр.}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}. \quad (4.39)$$

Цей же критерій використовують і для оцінки адекватності регресійної моделі, тобто оцінки значущості рівняння регресії.

Гранична похибка оцінки за рівнянням множинної регресії визначається за формулою (4.40):

$$\Delta_y = t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y})^2}{n - m - 1}}. \quad (4.40)$$

Крім моделей лінійної множинної регресії, при дослідженні складних систем використовують і нелінійні моделі. Наприклад, для аналізу залежності факторів виробництва від факторів, що його забезпечують, використовують статистичну залежність (мультиплікативну модель):

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}. \quad (4.41)$$

Логарифмуючи цю функцію, отримуємо:

$$\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_m \ln x_m.$$

Систему нормальних рівнянь та коефіцієнти даної моделі отримуємо аналогічно до випадку лінійної залежності між факторною та результативними ознаками. Прикладами мультиплікативних моделей є мультиплікативні виробничі функції.

**Приклад 4.2.** Згідно з даними про обсяг виробленої продукції  $P$ , витрати праці  $L$  на її виробництво, а також вартість виробничих фондів  $K$ , наведених у таблиці 4.3, Побудувати мультиплікативну виробничу функцію, що встановлює залежність між обсягом виробництва (результативний показник) та факторами – вартістю виробничих фондів та витратами праці. Здійснити оцінку адекватності отриманої моделі.

**Розв'язання.** Мультиплікативну виробничу функцію можна записати у вигляді функції

$$P = b_0 \cdot L^b \cdot K^{b_2}.$$

**Таблиця 4.3.** Дані про обсяги виробництва, витрати праці та вартість виробничих фондів на підприємствах галузі за рік

№	Обсяг виробництва ( $P$ ), тис. у.г.о.	Витрати праці ( $L$ ), тис. у.г.о.	Вартість виробничих фондів ( $K$ ), тис. у.г.о.
1	16,207	1,426	7,905
2	16,250	1,539	7,956
3	16,091	1,002	7,704
4	16,105	1,078	7,792
5	16,211	1,499	7,911
6	16,117	1,156	7,840
7	16,301	1,697	8,165
8	16,278	1,625	8,098
9	16,144	1,215	7,853
10	16,263	1,936	7,993
11	16,186	1,355	7,896

Після логарифмування отримуємо:

$$\ln P = \ln b_0 + b_1 \ln L + b_2 \ln K .$$

Позначимо  $Y = \ln P$ ,  $X_1 = \ln L$ ,  $X_2 = \ln K$ ,  $B_0 = \ln b_0$ . Отримаємо множинну лінійну регресійну модель у вигляді:  $Y = B_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ .

Значення  $Y$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  наведені у таблиці 4.4.

Для знаходження невідомих параметрів рівняння множинної регресії скористаємось стандартною функцією ЛИНЕЙН електронних таблиць Excel. Отримаємо рівняння:

$$Y = 2,505 + 0,112X_1 + 0,134X_2 .$$

За допомогою цієї функції отримуємо також стандартні похибки оцінки коефіцієнтів рівняння  $\sigma_{B_0} = 0,074$ ,  $\sigma_{B_1} = 0,003$ ,  $\sigma_{B_2} = 0,036$ , множинний коефіцієнт детермінації  $R^2 = 0,964$ , значення  $F$ -статистики  $F = 109,897$ .

Розрахуємо  $t$ -статистики коефіцієнтів рівняння за формулою (4.37):

$$t_{0, \text{розр.}} = \frac{2,505}{0,074} = 33,916; t_{1, \text{розр.}} = \frac{0,112}{0,003} = 37,333; t_{2, \text{розр.}} = \frac{0,134}{0,036} = 3,722.$$

З таблиці  $t$ -розподілу при  $\alpha = 0,05$  та  $V = 11 - 2 - 1 = 8$  ступенів вільності знаходимо  $t_{\text{крит.}} = 2,306$ , що менше від розрахункових значень. Отже, всі коефіцієнти моделі є статистично значущими з ймовірністю 0,95.

**Таблиця 4.4.** Значення змінних  $Y, X_1, X_2$ .

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$Y$	2,785	2,788	2,778	2,779	2,786	2,780	2,791	2,790	2,782	2,789	2,784
$X_1$	0,355	0,431	0,002	0,075	0,405	0,145	0,529	0,486	0,195	0,661	0,304
$X_2$	2,067	2,074	2,042	2,053	2,068	2,059	2,100	2,092	2,061	2,079	2,066

Обчислений коефіцієнт детермінації  $R^2 = 0,964$  близький до 1, що свідчить про дуже щільний зв'язок між обсягами виробництва продукції та факторами, що їх визначають.

З таблиці  $F$ -розподілу знаходимо для  $\alpha = 0,05$  та значень  $V_1 = 2, V_2 = 8$  ступенів вільності значення  $F_{крит.} = 4,46$ . Оскільки  $F_{розн.} = 109,897$  значно перевищує критичне значення, то можна стверджувати, що побудована модель є статистично значущою.

Враховуючи, що  $b_0 = e^{2,505} = 12,238$ , отримуємо виробничу функцію:

$$P = 12,238 \cdot L^{0,012} \cdot K^{0,134}.$$

Розглянуті вище регресійні моделі є вибірковими моделями, побудованими на основі даних певної вибірки. Модель, яка відображає взаємозв'язок між факторами для всієї генеральної сукупності, називають узагальненою регресійною моделлю. Вона має вигляд:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m + \varepsilon,$$

де  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$  – параметри моделі, які потрібно оцінити,  $\varepsilon$  – неспостережувана випадкова величина.

У теорії математичної статистики доводиться, що математичні сподівання параметрів вибіркової лінійної регресії, розраховані методом найменших квадратів, дорівнюють параметрам узагальненої моделі для генеральної сукупності при наступних класичних припущеннях:

- випадкова величина  $\varepsilon$  є нормально розподіленою з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, та одиничною дисперсією;
- випадкові величини (фактори) незалежні між собою;
- значення випадкової величини  $\varepsilon$  не залежить від значень факторів;
- регресійну модель визначено вірно (у модель включені лише істотні для вимірювання зв'язку незалежні змінні і вірно підібрана аналітична форма зв'язку).

Якщо яке-небудь з цих припущень не виконується, то результати дослідження можуть бути помилковими. Підкреслимо, що модель є адекватною, коли всі змінні є статистично значущими.



Розглянемо вибір оптимальної регресійної моделі, для якої виконується остання вимога. Для цього розроблено декілька підходів: метод усіх можливих регресій, метод виключення та кроковий регресійний аналіз.

Перший підхід передбачає побудову кожного з усіх можливих регресійних рівнянь. Їх кількість дорівнює  $2^m$ , де  $m$  – кількість факторів. Отримані статистично значущі моделі ранжують за значеннями коефіцієнта детермінації та стандартного відхилення залишків. Остаточний вибір моделі здійснюється на основі якісного аналізу, у зв'язку з чим вибір оптимальної моделі певною мірою є суб'єктивним. Використання методу всіх можливих регресій пов'язане зі значними витратами часу, тому його доцільно використовувати при невеликій кількості факторів, що враховуються у моделі.

В основі методу виключень та крокового аналізу знаходиться використання часткового  $F$ -критерію. Нехай  $S_1$  – сума квадратів відхилень, обумовлена регресією, що враховує  $k$  факторів,  $\sigma_\varepsilon^2$  – оцінка дисперсії залишку цієї моделі,  $S_2$  – сума квадратів залишків, обумовлена регресією за умови включення у модель лише перших  $k-1$  факторів. Величину  $S = S_1 - S_2$  називають додатковою сумою квадратів. Вона порівнюється з дисперсією  $\sigma_\varepsilon^2$  за допомогою  $F$ -критерію. Розглянутий варіант критерію Фішера називають частковим  $F$ -критерієм. Його застосовують для перевірки гіпотези, що  $\beta_k = 0$ . При цьому кількості ступенів вільності  $V_1 = 1, V_2 = n - k - 1$ .

Згідно з алгоритмом методу виключень спочатку будують регресійну модель, що містить всі фактори, далі для кожного фактору обчислюють величину часткового  $F$ -критерію, серед обчислених часткових  $F$ -критеріїв знаходять  $F_{\min}$ . Якщо  $F_{\min} < F_{\text{крит.}}$ , то фактор, якому відповідає  $F_{\min}$ , виключається з числа факторів моделі.

При застосуванні крокового аналізу рухаються у зворотному напрямі: модель формують послідовним включенням додаткових факторів. На першому етапі вибирають фактор, що має найбільший коефіцієнт кореляції з результативним показником, далі будують модель парної регресії, яку перевіряють на адекватність. Якщо побудоване рівняння парної регресії є незначущим, то процедура побудови моделі припиняється. У протилежному випадку знаходять наступну змінну, яка має найбільший коефіцієнт кореляції з результативною ознакою і будують нове рівняння регресії, де враховуються вже 2 фактори. Після цього розраховують частковий  $F$ -критерій. За результатами тестування змінна або залишається у моделі, або замість неї вводиться нова змінна. Цей процес продовжують до повного перегляду факторних ознак.

#### 4.6 Непараметричні методи дослідження зв'язків між показниками діяльності складної системи

Розглянуті вище методи вимірювання взаємозв'язків між ознаками називають параметричними, оскільки вони ґрунтуються на використанні середніх величин та дисперсій, які є основними параметрами розподілу. Параметричні методи не можна застосовувати, якщо ознаки неможливо виміряти кількісно або не виконується припущення про нормальний розподіл результативної ознаки для малих сукупностей. В таких випадках використовують непараметричні методи оцінки зв'язку, які не вимагають використання числових значень ознак та обчислення параметрів розподілу. Застосування непараметричних методів надає менші можливості для дослідження взаємозв'язків між ознаками, оскільки дозволяє лише оцінити щільність зв'язку та перевірити його істотність, але не дає можливості побудови регресійної моделі.

В основі обчислення щільності зв'язку між атрибутивними (якісними) ознаками знаходиться побудова таблиці взаємного спряження (взаємозалежності) (таблиця 4.5), у якій наводяться комбінаційні розподіли сукупностей за факторною та результативною ознаками.

**Таблиця 4.5.** Загальний вигляд таблиці взаємного спряження

Групи за ознакою $x$	Групи за ознакою $y$						Разом
	Група 1	Група 2	...	Група $j$	...	Група $m_2$	
Група 1	$f_{11}$	$f_{12}$	...	$f_{1j}$	...	$f_{1m_2}$	$f_{10}$
Група 2	$f_{21}$	$f_{22}$	...	$f_{2j}$	...	$f_{2m_2}$	$f_{20}$
...	...	...	...	...	...	...	...
Група $i$	$f_{i1}$	$f_{i2}$	...	$f_{ij}$	...	$f_{im_2}$	$f_{i0}$
...	...	...	...	...	...	...	...
Група $m_1$	$f_{m_11}$	$f_{m_12}$	...	$f_{m_1j}$	...	$f_{m_2m_1}$	$f_{m_10}$
Разом	$f_{01}$	$f_{02}$	...	$f_{0j}$	...	$f_{0m_21}$	$n$

Величина  $f_{ij}$  – це число спостережень на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця, тобто частота групи  $i$  у групі  $j$ , а  $f_{i0}$  та  $f_{0j}$  – відповідно підсумкові частоти ха ознакою  $x$  та ознакою  $y$ . У випадку відсутності стохастичної залежності між ознаками частки умовних розподілів збігаються і дорівнюють часткам безумовного розподілу (часткам розподілу по підсумковому рядку). Розбіжність між фактичною

кількістю спостережень у клітинках таблиці 4.4 і теоретично можливою за повної відсутності зв'язку оцінюють за допомогою показника  $\chi^2$ , який розраховують за формулою:

$$\chi^2 = n \left[ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \frac{f_{ij}^2}{f_{i0}f_{j0}} - 1 \right]. \quad (4.42)$$

За відсутності зв'язку між ознаками  $\chi^2 = 0$ .

Для вимірювання щільності зв'язку між ознаками використовують кілька коефіцієнтів спряження. Найчастіше використовують коефіцієнт Чупрова. Він обчислюється за формулою:

$$K_{\text{Ч}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\sqrt{(m_1-1)(m_2-1)}}}. \quad (4.43)$$

Тут  $n$  – кількість спостережень.

Якщо кількості виділених груп за кожною ознакою рівні, тобто  $m_1 = m_2$  і між ознаками існує функціональний зв'язок, то коефіцієнт Чупрова дорівнює 1. Проте, якщо  $m_1 \neq m_2$ , то значення коефіцієнта Чупрова відмінне від 1 навіть за наявності функціонального зв'язку між ознаками.

Модифікацією коефіцієнта Чупрова є коефіцієнт Крамера:

$$K_{\text{К}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(m-1)}}. \quad (4.44)$$

Тут  $m = \min(m_1, m_2)$ .

Оцінити щільність зв'язку між якісними ознаками можна також за допомогою коефіцієнта Пірсона:

$$K_{\text{П}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}. \quad (4.45)$$

Значення коефіцієнтів Чупрова, Крамера та Пірсона коливаються у межах від 0 до 1. Коефіцієнт Чупрова враховує кількість виділених груп за кожною ознакою і дає найбільш обережну оцінку щільності зв'язку. Якщо значення цього коефіцієнта  $K_{\text{Ч}} \geq 0,3$ , то можна говорити про помірний або щільний зв'язок між ознаками. Перевірка істотності зв'язку здійснюється на основі  $\chi^2$ -критерію з  $V = (m_1 - 1)(m_2 - 1)$  ступенями вільності.

**Приклад 4.3.** На основі даних, наведених у таблиці 4.6, дослідити щільність зв'язку між категоріями працівників підприємства та задоволеністю рівня оплати праці.

**Розв'язання.** Обчислимо значення  $\chi^2$ . За формулою (4.42) маємо:

$$\chi^2 = 131 \left( \frac{625}{71 \cdot 40} + \frac{225}{60 \cdot 40} + \frac{1600}{71 \cdot 80} + \frac{1600}{60 \cdot 80} + \frac{36}{71 \cdot 11} + \frac{25}{60 \cdot 11} - 1 \right) = 1,69.$$

Обчислимо значення коефіцієнта Чупрова:

$$K_{\chi} = \sqrt{\frac{1,69}{131 \sqrt{2 \cdot 1}}} = 0,1.$$

**Таблиця 4.6.** Дані щодо задоволеності рівнем оплати праці різних категорій працівників підприємства

Група працівників	Кількість працівників		
	Задоволений оплатою праці	Незадоволений оплатою праці	Разом
Управлінський та інженерно-технічний персонал	25	15	40
Робітники	40	40	80
Допоміжний персонал	6	5	11
Разом	71	60	131

Оскільки значення цього коефіцієнта менше 0,3, то можна говорити, про дуже слабкий зв'язок між ознаками, що розглядаються. Аналогічний висновок отримуємо, використавши  $\chi^2$ -критерій. Для рівня значимості  $\alpha = 0,05$  та  $V = (3 - 1)(2 - 1) = 2$  ступенів вільності з таблиць розподілу  $\chi^2$  отримуємо  $\chi_{табл.}^2 = 5,99 > 1,69$ , тому слід прийняти гіпотезу про відсутність зв'язку між ознаками, що розглядаються.

## **Змістовий модуль 4. Імітаційне моделювання складних систем**

### **Тема 5. Моделювання випадкових величин**

#### **5.1 Сутність імітаційного моделювання. Метод Монте-Карло**

Для дослідження поведінки реальних систем широко застосовують статистичне або імітаційне моделювання. Застосування методів імітаційного моделювання дозволяє отримати інформацію про поведінку системи шляхом створення її комп'ютеризованої моделі. Статистичне моделювання дозволяє оцінити функціональні характеристики системи, що є об'єктом моделювання. Воно застосовується у різних галузях науки та техніки. Прикладами задач, що розв'язують з допомогою статистичного моделювання, є наступні задачі.

- 1) Обчислення кратних інтегралів;
- 2) Обчислення констант;
- 3) Обернення матриць;
- 4) Дослідження процесів дифузії;
- 5) Проектування систем масового обслуговування, зв'язку, управління запасами;
- 6) Аналіз хімічних процесів;
- 7) Оцінка поведінки споживачів, визначення цін, прогнозування діяльності підприємств;
- 8) Дослідження динаміки демографічних процесів, впливу екології на здоров'я людини;
- 9) Задачі біології та медицини;
- 10) Дослідження військової стратегії та тактики.

Сутність статистичного моделювання полягає у імітації випадкових величин та випадкових процесів та ґрунтується на використанні випадкових вибірок. Замість аналітичного описання складної системи тут використовують імітацію випадкового процесу з використанням випадкових чисел. У результаті кожного разу отримуємо нову, відмінну від попередньої, реалізацію випадкового процесу. Ці реалізації можна використати як статистичні дані. Потрібні характеристики системи отримуємо у результаті їх обробки методами математичної статистики.

Найпростішою формою методу статистичного моделювання є метод Монте-Карло. Розглянемо сутність цього методу на простому прикладі обчислення площі круга, обмеженого колом, рівняння якого має вигляд:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

Спочатку помістимо цей круг у квадрат зі стороною, що дорівнює діаметру круга, тобто 10 одиниць. Сторони квадрату дотикаються до кола. Нехай при киданні точки навмання у квадрат потрапляння у точки з різними координатами, розташованими всередині квадрату, є рівноймовірними подіями.

Нехай вибірка складається з  $n$  спостережень за точками квадрата,  $m$  з яких потрапили у круг. Тоді відношення площі круга до площі квадрату можна наближено оцінити як відношення  $\frac{m}{n}$ .

Координати  $x$  та  $y$  точок квадрату розглядаються як рівномірно розподілені випадкові величини з щільностями розподілу ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{10}, -4 \leq x \leq 6; \quad f(y) = \frac{1}{10}, -3 \leq y \leq 7.$$

Поза вказаними проміжками щільності розподілу ймовірностей дорівнюють нулю.

Нехай  $R_1$  та  $R_2$  – різні випадкові числа з відрізка  $[0; 1]$ . Тоді координати  $(x, y)$  точок квадрату можна виразити через ці випадкові числа у наступному вигляді:

$$x = -4 + (6 - (-4))R_1 = -4 + 10R_1,$$

$$y = -3 + (7 - (-3))R_2 = -3 + 10R_2.$$

У таблиці 5.1 наведено невеликий список випадкових чисел з відрізка  $[0; 1]$ .

Використовуючи наведені вище формули, ми генеруємо випадково розподілені точки  $(x', y')$  квадрата для кожної пари випадкових чисел  $(R_1, R_2)$ . Отримана точка  $(x', y')$  потрапляє всередину круга, якщо

$$(x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 \leq 25.$$

**Таблиця 5.1.** Випадкові числа

0,0589	0,3529	0,5869	0,3455	0,7900	0,6307
0,6733	0,3646	0,1281	0,4871	0,7698	0,2346
0,4799	0,7676	0,2867	0,8111	0,2871	0,4220
0,9486	0,8931	0,8216	0,8912	0,9534	0,6991
0,6139	0,3919	0,8261	0,4291	0,1394	0,9475
0,5933	0,7876	0,3866	0,2302	0,9025	0,3428
0,9341	0,5199	0,7125	0,5954	0,1605	0,6037
0,1782	0,6358	0,2108	0,5423	0,3567	0,2569
0,3473	0,7422	0,3575	0,4208	0,3070	0,0546
0,5644	0,8954	0,2926	0,6975	0,5513	0,0305

Наприклад, якщо  $R_1 = 0,0589$  та  $R_2 = 0,6733$ , отримуємо:

$$x' = -4 + 10R_1 = -4 + 10 \cdot 0,0589 = -3,411,$$

$$y' = -3 + 10R_2 = -3 + 10 \cdot 0,6733 = 3,733.$$

Оскільки величина  $(-3,411 - 1)^2 + (3,733 - 2)^2 = 22,46 < 25$ , то точка  $(x', y')$  потрапляє всередину круга.

Оцінка площі круга покращується зі збільшенням кількості  $n$  генерованих точок (обсягу вибірки). Підвищити точність обчислення площі можна, здійснивши її оцінку при  $n$  спостереженнях  $N$  разів, і прийнявши за наближене значення площі круга середню арифметичну  $N$  отриманих результатів. Точність цього наближення для площі круга збільшується зі збільшенням обсягу  $n$  вибірки.

Результати експерименту, пов'язаного з імітаційним моделюванням, необхідно отримати у вигляді довірчого інтервалу, що характеризує величину відхилення наближеного значення показника від його точного значення.

Нехай  $A$  – точне значення показника, що обчислюється,  $\bar{A}$  та  $\tilde{\sigma}^2$  – його середнє значення та вибіркова дисперсія при  $N$  спостереженнях. Тоді довірчий інтервал для  $A$  при довірчій ймовірності  $1 - \alpha$  має вигляд:

$$\bar{A} - \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}, N-1} \leq A \leq \bar{A} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}.$$

Тут  $t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$  – точка  $t$ -розподілу Стьюдента, що відповідає рівню значимості  $\alpha$  та кількості ступенів вільності  $N-1$ .

У розглянутому вище прикладі про площу круга при  $n=10000$ ,  $N=10$ ,  $\bar{A} = 78,57 \text{ см}^2$ ,  $\tilde{\sigma} = 0,47 \text{ см}^2$  при  $\alpha = 0,05$  довірчий інтервал для оцінки точного значення площі становить  $78,23 \leq A \leq 78,9$ . Зазначимо, що точне значення площі цього круга, округлене до 0,01, становить  $78,54 \text{ см}^2$ .

Отже, сутність методу Монте-Карло полягає у наступному. Для знаходження значення  $a$  деякої величини вибирають випадкову величину  $X$ , математичне сподівання якої  $M(X) = a$ . Здійснюють  $n$  випробувань, у результаті яких отримують

$n$  можливих значень  $X$ , далі обчислюють їх середню арифметичну  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$  За

оцінку наближеного значення  $a^*$  числа  $a$  вибирають  $\bar{x}$ . Метод Монте-Карло називають також методом статистичних випробувань. Теорія цього методу визначає, як найбільш доцільно визначити випадкову величину  $X$ , як знайти її можливі значення та оцінити похибку методу.

## 5.2 Оцінка похибки методу Монте-Карло

Нехай для отримання оцінки  $a^*$  математичного сподівання  $a$  випадкової величини  $X$  було здійснено  $n$  незалежних випробувань (тобто розіграно  $n$  можливих значень  $X$ ) і з їх результатами була знайдена вибіркова середня  $\bar{x}$ , прийнята у якості оцінки математичного сподівання, тобто  $a^* = \bar{x}$ . Розглянемо задачу знаходження верхньої межі  $\delta$  похибки такої оцінки з заданою ймовірністю (надійністю)  $\gamma$ :

$$P(|\bar{x} - a| \leq \delta) = \gamma. \quad (5.1)$$

Тут маємо визначити точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковою середньою з допомогою довірчих інтервалів. Ця задача розглядається у математичній статистиці. Використаємо отримані там результати, а саме розглянемо три можливі випадки.

1. Випадкова величина  $X$  має нормальний закон розподілу і її середнє квадратичне відхилення  $\sigma$  відоме. У цьому випадку з надійністю  $\gamma$  верхня межа похибки

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad (5.2)$$

де  $n$  – кількість випробувань (розіграних значень  $X$ ),  $t$  – значення аргументу функції Лапласа  $\Phi(t)$ , для якого  $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ ,  $\sigma$  – відоме середнє квадратичне відхилення  $X$ .

**Приклад 5.1.** З надійністю  $\gamma = 0,95$  знайти верхню межу похибки  $\delta$ , якщо для оцінки математичного сподівання випадкової величини  $X$ , розподіленої за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням  $\sigma = 0,5$ , було розіграно 100 можливих значень  $X$ .

**Розв'язання.** Маємо  $n=100$ ,  $\sigma=0,5$ ,  $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$ . За таблицею значень функції Лапласа знаходимо  $t=1,96$ . Отже, за формулою (4.1) верхня межа похибки  $\delta = \frac{1,96 \cdot 0,5}{\sqrt{100}} = 0,098$ .

2. Випадкова величина  $X$  розподілена за нормальним законом, її середнє квадратичне відхилення невідоме. У цьому випадку з надійністю  $\gamma$  верхня межа похибки визначається за формулою

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}. \quad (5.3)$$

У формулі (4.3)  $n$  – кількість випробувань,  $s$  – виправлене вибіркоче середнє квадратичне відхилення



$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (5.4)$$

Значення  $t_\gamma$  знаходять за статистичною таблицею значень цього показника.

**Приклад 5.2.** З надійністю  $\gamma = 0,95$  знайти верхню межу похибки  $\delta$ , якщо для оцінки математичного сподівання величини  $X$ , розподіленої за нормальним законом, було розіграно 100 її можливих значень і за ними знайдено виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення  $s=0,5$ .

**Розв'язання.** За умовою,  $n=100$ ,  $s=0,5$ . Використавши статистичну таблицю значень  $t_\gamma$ , знаходимо, що при  $\gamma = 0,95$ ,  $n=100$   $t_\gamma = 1,984$ . Отже,

$$\delta = \frac{1,984 \cdot 0,5}{\sqrt{100}} = 0,099.$$

3. Випадкова величина  $X$  розподілена за законом, що відрізняється від нормального. У цьому випадку при достатньо великій кількості випробувань ( $n > 30$ ) з надійністю, що наближено дорівнює  $\gamma$ , верхню межу похибки  $\delta$  можна обчислити за формулою (5.2), якщо середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$  відоме.

Якщо величина  $\sigma$  є невідомою, то у формулу (5.2) замість нього можна підставити його оцінку  $s$ , або використати формулу (5.3). Зі зростанням  $n$  різниця між результатами, отриманими за цими формулами зменшується, оскільки при  $n \rightarrow \infty$  розподіл Стюдента наближається до нормального розподілу.

Для того, щоб знайти найменше число випробувань, яке забезпечить наперед задану верхню межу похибки  $\delta$ , потрібно виразити  $n$  з формул (5.2) або (5.3). Отримаємо:

$$\begin{aligned} n &= \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2} \text{ (формула (5.2)),} \\ n &= \frac{t_\gamma^2 \cdot s^2}{\delta^2} \text{ (формула (5.3)).} \end{aligned} \quad (5.5)$$

### 5.3 Генерування випадкових чисел

Нехай  $R$  – неперервна випадкова величина, розподілена рівномірно у інтервалі  $(0; 1)$ .

Випадковими числами називають можливі значення  $r$  неперервної випадкової величини  $R$ , розподіленої рівномірно у інтервалі  $(0; 1)$ .

Для випадкової величини, що має рівномірний розподіл на  $[a; b]$ , щільність розподілу має вигляд:

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & r \in [a; b], \\ 0, & r \notin [a; b]. \end{cases}$$

Математичне сподівання цієї випадкової величини  $m_r = \frac{a+b}{2}$ , а її дисперсія

$$\sigma_r^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ймовірність потрапляння рівномірно розподіленої випадкової величини у деякий інтервал  $[\alpha; \beta]$ , що міститься всередині  $[a; b]$ , дорівнює  $\beta - \alpha$ , тобто довжині цього інтервалу. Цю властивість використовують як необхідну та достатню умову того, що випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку  $[a; b]$ .

Генерування значень рівномірно розподіленої випадкової величини  $R$  можна здійснювати, використавши наступне перетворення:

$$R = z_1 \cdot 2^{-1} + z_2 \cdot 2^{-2} + \dots + z_k \cdot 2^{-k} + \dots, \quad (5.6)$$

де  $z_k$  – реалізація випадкової величини  $Z$ , яка з рівною ймовірністю  $p=0,5$  може набувати значення 0 або 1.

Випадкова величина  $R$  може мати нескінченну кількість реалізацій. Але при запису числа у комп'ютері використовують скінченну кількість двійкових розрядів. Тому кількість значень випадкової величини  $R$ , які можна використовувати при моделюванні, також буде скінченною. Максимальна кількість випадкових чисел, що записують за допомогою  $k$  двійкових розрядів і які не збігаються одне з одним, дорівнює  $2^k$ . Із сукупності чисел  $0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$  можна отримати такі значення дискретної випадкової величини  $R$ :

$$r_i = \frac{i}{2^k - 1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1. \quad (5.7)$$

Їх ймовірності дорівнюють  $p_i = \frac{1}{2^k}$ . Розподіл такої випадкової величини є квазірівномірним.

Для генерування рівномірно розподілених послідовностей випадкових чисел застосовують табличний, фізичний та програмний способи. У першому випадку використовують таблиці випадкових чисел, отриманих за допомогою фізичного або програмного генератора випадкових чисел. Такі таблиці можуть містити більш ніж мільйон випадкових чисел. Таблиці здебільшого використовують при ручних розрахунках.

При фізичній генерації випадкових чисел можна використовувати довільний випадковий фізичний процес. Найчастіше користуються джерелами

радіоактивного випромінювання або власними шумами електронних ламп. У першому випадку задається деякий проміжок часу  $\Delta t$ , потім підраховується кількість частинок, випромінених за цей проміжок часу. Значення  $r_i$  знаходять за формулою (5.6). При цьому вибирають  $z_i = 0$ , якщо  $k$  непарне,  $z_i = 1$  для парного  $k$ . Проміжок  $\Delta t$  повинен бути достатньо великим, щоб ймовірності отримання парних та непарних значень  $k$  були рівними.

При використанні програмного методу генерування випадкових чисел значення  $i+1$ -го випадкового числа визначають, використовуючи значення  $i$ -го числа за рекурентною формулою  $r_{i+1} = f(r_i)$ . Завдяки цьому числа, що отримуються у такий спосіб, не є дійсно випадковими, їх називають псевдовипадковими. Функція  $f$  повинна бути достатньо складною для того, щоб взаємозв'язок сусідніх елементів послідовності  $r_i$  та  $r_{i+1}$  не впливав на результати. Існує багато алгоритмів отримання псевдовипадкових чисел. Розглянемо два з них: алгоритм Неймана та метод лишків.

При застосуванні алгоритму Неймана вибирають число  $r_k$ , що є  $m$ -розрядним двійковим числом та задовольняє умові  $0 < r_k < 1$  та має вигляд:

$$r_k = \varepsilon_1 \cdot 2^{-1} + \varepsilon_2 \cdot 2^{-2} + \dots + \varepsilon_m \cdot 2^{-m}. \quad (5.8)$$

Квадрат цього числа має вигляд:

$$r_k^2 = \delta_1 \cdot 2^{-1} + \delta_2 \cdot 2^{-2} + \dots + \delta_{2m} \cdot 2^{-2m}. \quad (5.9)$$

Будемо вважати  $m$  парним числом (така умова завжди виконується для сучасних комп'ютерів). Наступне псевдовипадкове число  $r_{k+1}$  отримаємо, використовуючи коефіцієнти середніх членів суми (5.9), за формулою:

$$r_{k+1} = f(r_k) = \frac{\delta_{\frac{m}{2}+1}}{2} \cdot 2^{-1} + \frac{\delta_{\frac{m}{2}+2}}{2} \cdot 2^{-2} + \dots + \frac{\delta_{\frac{3m}{2}}}{2} \cdot 2^{-m}. \quad (5.10)$$

Отримана за таким алгоритмом послідовність псевдовипадкових чисел за своїми властивостями є близькою до рівномірної випадкової послідовності. Проте кількість малих чисел, що генеруються за алгоритмом Неймана, є дещо вищою, ніж це має бути для рівномірної випадкової послідовності.

При застосуванні методу лишків для отримання рівномірної послідовності псевдовипадкових чисел використовують рекурентне співвідношення  $r_{k+1} = \{M \cdot r_k\}$ . Тут хвилястими дужками позначено дробову частину числа. Початковим значенням послідовності випадкових чисел можна обрати  $2^{-m}$ , де  $m$  – кількість двійкових розрядів комірки комп'ютера. Число  $M$  має бути достатньо великим цілим числом. Рекомендується використовувати  $M = 5^{2p+1}$ , де  $p$  є максимальним з цілих чисел, для яких виконується умова  $5^{2p+1} < 2^m$ .

## 5.4. Моделювання дискретних випадкових величин

Нехай потрібно розіграти дискретну випадкову величину  $X$ , тобто отримати послідовність її можливих значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , якщо відомий закон розподілу  $X$ :

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Нехай  $R$  – рівномірно розподілена у інтервалі  $(0;1)$  випадкова величина,  $r_1, r_2, \dots$  – її можливі значення, тобто випадкові числа.

Розіб'ємо інтервал  $0 < R < 1$  на осі  $Or$  точками з координатами  $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots, p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}$  на  $n$  інтервалів  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Довжини цих інтервалів відповідно дорівнюють:

$$\Delta_1 = p_1, \Delta_2 = (p_1 + p_2) - p_1 = p_2, \dots, \Delta_n = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}) = p_n.$$

Для вказаних інтервалів  $\Delta_i = p_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Виконується наступна теорема.

**Теорема 5.1.** Якщо кожному випадковому числу  $r_j$  ( $0 < r_j < 1$ ), що потрапило у інтервал  $\Delta_i$ , поставити у відповідність можливе значення  $x_i$ , а таких інтервалів  $n$ , то отримуємо випадкову величину  $X$

**Доведення.** Оскільки при потраплянні випадкового числа у проміжок  $\Delta_i$  величина, що моделюється, набуває значення  $x_i$ , а таких інтервалів  $n$ , то ця величина набуває тих же значень, що й  $X$ , тобто  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ймовірність потрапляння випадкової величини  $R$  у інтервал  $\Delta_i$  дорівнює його довжині  $p_i$ , тому закон розподілу розіграної випадкової величини співпадає з законом розподілу випадкової величини  $X$ .

Отже, для того, щоб розіграти дискретну випадкову величину  $X$ , потрібно:

- 1) розбити інтервал  $(0; 1)$  на  $n$  інтервалів:  $\Delta_1 = (0; p_1), \Delta_2 = (p_1; p_1 + p_2), \dots, \Delta_n = (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}; 1)$ ;
- 2) вибрати випадкове число  $r_j$ ;
- 3) якщо число  $r_j$  потрапило у інтервал  $\Delta_i$ , то випадкова величина, що моделюється, набуває значення  $x_i$ .

**Приклад 5.3.** Змоделювати 8 значень дискретної випадкової величини  $X$ , закон розподілу якої поданий таблицею:

$X$	3	11	24
$p$	0,25	0,16	0,59

**Розв'язання.** Розіб'ємо проміжок  $(0;1)$  точками з координатами 0,25; 0,26+0,16=0,41 на три інтервали:  $\Delta_1 = (0;0,25)$ ,  $\Delta_2 = (0,25;0,41)$ ,  $\Delta_3 = (0,41;1)$ . Виберемо з таблиці випадкових чисел 8 чисел, наприклад, 0,1; 0,37; 0,08; 0,99; 0,12; 0,66; 0,31; 0,85. Число 0,1 потрапляє у інтервал  $\Delta_1$ , йому відповідає число 3, 0,37 належить  $\Delta_2$ , йому відповідає 11, 0,08 належить  $\Delta_1$ , йому відповідає 3, 0,99 належить  $\Delta_3$ , йому відповідає 24. Продовжуючи встановлювати відповідність таким способом, отримуємо послідовність чисел, що є значеннями випадкової величини  $X$  у 8 випробуваннях: 3, 11, 3, 24, 3, 24, 11, 24.

Розігрування подій можна звести до розігрування дискретної випадкової величини.

Нехай потрібно розіграти випробування, у кожному з яких подія  $A$  з'являється з ймовірністю  $p$ , відповідно вона не з'являється з ймовірністю  $q=1-p$ .

Розглянемо дискретну випадкову величину  $X$ , що приймає значення 1 з ймовірністю  $p$ , та значення 0 з ймовірністю  $q=1-p$ . Будемо вважати, що подія  $A$  з'явилася, якщо  $X = 1$ , вона не з'явилася, якщо  $X = 0$ . Розіграємо дискретну випадкову величину  $X$ . Проміжок  $(0;1)$  поділимо точкою  $p$  на проміжки:  $\Delta_1 = (0;p)$  та  $\Delta_2 = (p;1)$ . Далі вибираємо випадкове число  $r_j$ . Якщо воно потрапляє у  $\Delta_1$ , то подія  $A$  з'явилася, потрапляє у  $\Delta_2$  – не з'явилася.

Отже, щоб розіграти випробування, у кожному з яких ймовірність події  $A$  дорівнює  $p$ , потрібно вибрати випадкове число  $r_j$ . Якщо  $r_j < p$ , то подія  $A$  з'явилась.

Розігрування повної групи  $n$  несумісних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , ймовірності яких відповідно дорівнюють  $p_1, p_2, \dots, p_n$  зводиться до розігрування дискретної випадкової величини  $X$ , з наведеним нижче законом розподілу.

$X$	1	2	...	$n$
$p$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Тут досить вважати, що коли у випробуванні величина  $X$  набула значення  $x_i = i, i=1, 2, \dots, n$ , то з'явилася подія  $A_i$ .

**Приклад 5.4.** Задано ймовірності чотирьох подій, що утворюють повну групу:

$$p_1 = p(A_1) = 0,19; p_2 = p(A_2) = 0,21; p_3 = p(A_3) = 0,34; p_4 = p(A_4) = 0,26.$$

Змоделювати 5 випробувань, у кожному з яких з'являється одна з подій  $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

**Розв'язання.** Побудуємо закон розподілу випадкової величини  $X$  за заданими ймовірностями подій:

$X$	1	2	3	4
$p$	0,19	0,21	0,34	0,26

Розіграємо цю випадкову величину. Для цього розіб'ємо проміжок  $(0; 1)$  на чотири проміжки:

$$\Delta_1 = (0; 0,19); \Delta_2 = (0,19; 0,4); \Delta_3 = (0,4; 0,74); \Delta_4 = (0,74; 1).$$

Виберемо з таблиці навмання 5 випадкових чисел, наприклад, 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73.

Маємо:

$$0,66 \in \Delta_3; 0,31 \in \Delta_2; 0,85 \in \Delta_4; 0,63 \in \Delta_3; 0,73 \in \Delta_3.$$

Отже, послідовність подій має вигляд:  $A_3, A_2, A_4, A_3, A_3$ .

**Приклад 5.5.** Події  $A$  та  $B$  незалежні та сумісні. Потрібно змоделювати 6 випробувань, у кожному з яких ймовірність події  $A$  дорівнює 0,6, а події  $B$  – 0,2.

Розв'язання. Можливі 4 наслідки випробувань:

$$A_1 = AB, A_2 = A\bar{B}, A_3 = \bar{A}B, A_4 = \bar{A}\bar{B}.$$

Знайдемо ймовірності цих наслідків.

$$P(A_1) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12; P(A_2) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48; P(A_3) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08;$$

$$P(A_4) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32.$$

Задача зводиться до розігрування повної групи подій  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Будуємо допоміжну випадкову величину  $X$  з законом розподілу:

$X$	1	2	3	4
$p$	0,12	0,48	0,08	0,32

Будуємо інтервали:

$$\Delta_1 = (0; 0,12); \Delta_2 = (0,12; 0,6); \Delta_3 = (0,6; 0,68); \Delta_4 = (0,68; 1).$$

Виберемо навмання 6 випадкових чисел: 0,45; 0,65; 0,06; 0,59; 0,33; 0,70.

Отримаємо послідовність інтервалів, що відповідають цим випадковим числам:  $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_2, \Delta_4$ . Відповідна послідовність подій має вигляд:

$$\bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, AB, A\bar{B}, A\bar{B}, \bar{A}\bar{B}.$$

## 5.5. Моделювання неперервних випадкових величин

Нехай необхідно отримати послідовність  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  можливих значень неперервної випадкової величини  $X$ , знаючи її функцію розподілу  $F(x)$ .

**Теорема.** Якщо  $r_i$  – випадкове число, то можливе значення  $x_i$  неперервної випадкової величини  $X$  з заданою функцією розподілу  $F(x)$ , що відповідає  $r_i$ , є коренем рівняння  $F(x_i) = r_i$ .

**Доведення.** Нехай вибрано випадкове число  $r_i \in (0;1)$ . Функція розподілу  $F(x)$  монотонно зростає на всій своїй області визначення, монотонно змінюючись від 0 до 1, тому рівняння  $F(x_i) = r_i$  має єдиний корінь  $x_i$ . Доведемо, що він є значенням випадкової величини  $X$ . Для цього покажемо, що ймовірність потрапляння цієї величини (позначимо її поки що  $\xi$ ) у інтервал  $(c; d)$ , що належить множині можливих значень  $X$ , дорівнює:

$$P(c < \xi < d) = F(d) - F(c).$$

З монотонності  $F(x)$  випливає, що

$$c < x_i < d \Leftrightarrow F(c) < r_i < F(d).$$

Отже, отримуємо:

$$\xi \in (c; d) \Leftrightarrow R \in (F(c); F(d)) \Rightarrow P(c < \xi < d) = P(F(c) < R < F(d)).$$

Оскільки  $R$  розподілена рівномірно на  $(0;1)$ , то виконується рівність

$$P(F(c) < R < F(d)) = F(d) - F(c).$$

Отже,  $P(c < \xi < d) = F(d) - F(c)$ , тобто випадкова величина  $\xi$  дорівнює випадковій величині  $X$  з функцією розподілу  $F(x)$ .

Отже, для того, щоб знайти можливі значення  $x_i$  випадкової величини  $X$ , потрібно вибрати випадкове число  $r_i$  та знайти  $x_i$ , розв'язавши рівняння  $F(x_i) = r_i$ .

**Приклад 5.6.** Отримати три можливі значення неперервної випадкової величини  $X$ , розподіленої рівномірно на  $(2;10)$ .

**Розв'язання.** Функція розподілу неперервної випадкової величини  $X$ , розподіленої рівномірно на  $(a; b)$ , має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Отже, отримуємо рівняння

$$\frac{x_i - a}{b - a} = r_i \Rightarrow x_i = a + (b - a)r_i.$$

Підставивши у отриманий вираз для  $x_i$  значення  $a = 2, b = 10$ , маємо формулу  $x_i = 2 + 8r_i$ .

Виберемо три випадкових числа, наприклад,  $r_1 = 0,11$ ;  $r_2 = 0,17$ ;  $r_3 = 0,66$ . Знаходимо числа  $x_i$ , що відповідають цим випадковим числам:

$$x_1 = 2 + 8 \cdot 0,11 = 2,88; x_2 = 2 + 8 \cdot 0,17 = 3,36; x_3 = 2 + 8 \cdot 0,66 = 7,28.$$

**Приклад 5.7.** Неперервна випадкова величина  $X$  розподілена за показниковим законом, заданим функцією розподілу:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0$$

Знайти формулу для моделювання можливих значень  $x_i$  випадкової величини  $X$  з допомогою випадкових чисел

**Розв'язання.** З рівняння  $F(x_i) = r_i$  отримуємо, що  $1 - e^{-\lambda x_i} = r_i$ . З цього рівняння знаходимо, що  $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i)$ . Оскільки випадкове число  $r_i \in (0;1)$ , то  $1 - r_i \in (0;1)$  і також є випадковим числом, тому для знаходження  $x_i$  також можна використати формулу  $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i$ .

Якщо відома щільність  $f(x)$  розподілу ймовірностей випадкової величини  $X$ , то з рівності  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  випливає, що можливі значення  $x_i$  можна отримати, розв'язавши рівняння  $\int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = r_i$ .

**Приклад 5.8.** Задано щільність розподілу ймовірностей випадкової величини  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \left(1 - \frac{\lambda x}{2}\right), & x \in \left(0; \frac{2}{\lambda}\right) \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{2}{\lambda}\right). \end{cases}$$

Знайти формулу для отримання можливих значень цієї випадкової величини.

**Розв'язання.** Для отримання можливих значень випадкової величини з заданою щільністю розподілу ймовірностей  $f(x)$  розв'яжемо рівняння  $\int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = r_i$ .

Отримуємо:

$$\int_0^{x_i} \lambda \left(1 - \frac{\lambda x}{2}\right) dx = r_i \Leftrightarrow \lambda \left(x_i - \frac{\lambda x_i^2}{4}\right) = r_i$$

Це квадратне рівняння відносно невідомої  $x_i$ :



$$\lambda^2 x_i^2 - 4\lambda x_i + 4r_i = 0.$$

Його корені  $x_{i,1} = \frac{2}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - r_i^2})$ ,  $x_{i,2} = \frac{2}{\lambda}(1 + \sqrt{1 - r_i^2})$ . Оскільки  $x_{i,2} > \frac{2}{\lambda}$ , то  $x_i = \frac{2}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - r_i^2})$ .

Нехай функцію розподілу неперервної випадкової величини  $X$ , що моделюється з допомогою випадкових чисел, можна подати у вигляді:

$$F(x) = C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x),$$

де сталі  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$ ,  $F_1(x)$  та  $F_2(x)$  – функції розподілу випадкових величин  $X_1$  та  $X_2$ . Оскільки  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = 1$ , то  $C_1 + C_2 = 1$ .

Розглянемо допоміжну випадкову величину  $Z$ , що має наступний закон розподілу.

$Z$	1	2
$P$	$C_1$	$C_2$

Для цієї випадкової величини  $P(Z = 1) = C_1$ ,  $P(Z = 2) = C_2 = 1 - C_1$ .

Виберемо два незалежних випадкові числа  $r_1$  та  $r_2$ . По числу  $r_1$  розіграємо можливі значення випадкової величини  $Z$ . Якщо  $Z = 1$ , то значення  $x_i$  знаходять, розв'язуючи рівняння  $F_1(x_i) = r_2$ . Якщо ж  $Z = 2$ , то значення  $x_i$  знаходять, розв'язуючи рівняння  $F_2(x_i) = r_2$ .

Покажемо, що при такому виборі  $x_i$  отримаємо значення випадкової величини з функцією розподілу  $F(x)$ . Нехай подія  $A - X < x$ , подія  $B_1 - Z = 1$ , подія  $B_2 - Z = 2$ . Тоді за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A).$$

Знайдемо ймовірності, що використовуються у останній формулі:

$$P(B_1) = C_1, P(B_2) = C_2, P_{B_1}(A) = P_{B_1}(X < x) = F_1(x),$$

$$P_{B_2}(A) = P_{B_2}(X < x) = F_2(x).$$

Отже, за формулою повної ймовірності отримуємо:

$$P(A) = P(X < x) = C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x).$$

Метод суперпозиції можна розповсюдити також на випадок, коли функція розподілу  $F(x)$  є лінійною комбінацією  $n$  функцій розподілу:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(x).$$

**Приклад 5.9.** Знайти формулу для моделювання випадкової величини  $X$ , заданої своєю функцією розподілу  $F(x) = 1 - 0,25(e^{-2x} + 3e^{-x})$ ,  $x > 0$ .

**Розв'язання.** Представимо функцію розподілу у вигляді:

$$F(x) = 0,25(1 - e^{-2x}) + 0,75(1 - e^{-x}) = C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x).$$

Закон розподілу допоміжної випадкової величини  $Z$  подаємо у вигляді таблиці:

$Z$	1	2
$P$	0,25	0,75

Виберемо незалежні випадкові числа  $r_1$  та  $r_2$ . Розіграємо  $Z$  за випадковим числом  $r_1$ . Для цього побудуємо інтервали  $\Delta_1 = (0; 0,25)$  та  $\Delta_2 = (0,25; 1)$ . Якщо  $r_1 < 0,25$ , то  $Z = 1$ , якщо  $r_1 \in \Delta_2$ , то  $Z = 2$ . Отже, при  $r_1 < 0,25$   $F(x_i) = F_1(x_i) = 1 - e^{-2x_i} = r_2$ , звідки  $x_i = -\frac{1}{2} \ln(1 - r_2)$  або  $x_i = -\frac{1}{2} \ln(r_2)$ . При  $r_1 \in (0,25; 1)$   $F(x_i) = F_2(x_i) = 1 - e^{-x_i} = r_2$ . Звідси знаходимо:  $x_i = -\ln(1 - r_2)$  або  $x_i = -\ln(r_2)$ . Отже, отримали:

$$x_i = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln r_2, & r_1 \in (0; 0,25), \\ -\ln r_2, & r_1 \in (0,25; 1). \end{cases}$$

Якщо випадкова величина  $R$  розподілена рівномірно у інтервалі  $(0; 1)$ , то її математичне сподівання та дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M(R) = \frac{1}{2}, D(R) = \frac{1}{12}.$$

Складемо суму  $n$  незалежних, розподілених рівномірно на  $(0; 1)$  випадкових величин  $R_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Пронормуємо цю випадкову величину, попередньо знайшовши її математичне сподівання та дисперсію. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, тому

$$M\left(\sum_{j=1}^n R_j\right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Оскільки дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій окремих доданків, то маємо:

$$D\left(\sum_{j=1}^n R_j\right) = \sum_{j=1}^n D(R_j) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{12} = \frac{n}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення відповідно дорівнює  $\sigma_\Sigma = \sqrt{\frac{n}{12}}$ .

Нормована сума розглянутих випадкових чисел має вигляд:

$$\frac{\sum_{j=1}^n R_j - M\left(\sum_{j=1}^n R_j\right)}{\sigma_\Sigma} = \frac{\sum_{j=1}^n R_j - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}.$$

З центральної граничної теореми випливає, що при  $n \rightarrow \infty$  розподіл цієї нормованої випадкової величини прямує до нормального розподілу з параметрами  $a = 0$  та  $\sigma = 1$ . При скінченному  $n$  розподіл є наближено нормальним. Зокрема, при  $n=12$  отримуємо достатньо зручне наближення для значення нормально розподіленої випадкової величини:

$$x_i = \sum_{j=1}^n R_j - 6.$$

Отже, щоб змоделювати можливе значення  $x_i$  нормально розподіленої випадкової величини  $X$  з параметрами  $a=0$  та  $\sigma=1$ , потрібно скласти 12 незалежних випадкових чисел і з отриманої суми відняти 6.

Якщо потрібно змоделювати можливе значення  $z_i$  нормально розподіленої випадкової величини  $Z$  з математичним сподіванням  $a$  та стандартним відхиленням  $\sigma$ , то, розігравши за вказаним вище правилом можливе значення  $x_i$ , можливе значення  $z_i$  за формулою:

$$z_i = \sigma \cdot x_i + a,$$

оскільки  $x_i = \frac{z_i - a}{\sigma}$ .

## Тема 6. Моделювання об'єктів та процесів з використанням імітаційного підходу

### 6.1 Застосування імітаційного моделювання для проектування систем масового обслуговування

Розглянемо особливості застосування методу Монте-Карло до проектування систем масового обслуговування. Розглянемо спочатку основні поняття теорії масового обслуговування.

Послідовність подій, що з'являються у випадкові моменти часу, називають поток подій. Прикладами потоку подій є надходження викликів до «Швидкої допомоги», прихід клієнтів у перукарню, послідовність відмов елементів приладу тощо.

До основних властивостей потоків подій відносять стаціонарність, відсутність післядії та ординарність. Властивість стаціонарності полягає у тому, що ймовірність появи  $k$  подій на будь-якому проміжку часу залежить лише від числа  $k$  та тривалості  $t$  проміжку часу. Властивість ординарності означає, що за нескінченно малий проміжок часу може з'явитися не більше однієї події. Відсутність післядії означає взаємну незалежність появ певного числа подій у проміжки часу, що не перетинаються між собою. Потік подій, що має властивості стаціонарності, ординарності та відсутності після дії називають найпростішим або пуассонівським потоком.

Інтенсивністю  $\lambda$  потoku подій називають середню кількість подій, що з'являються за одиницю часу. Ймовірність появи  $k$  подій у найпростішого потоку за час  $t$  визначають за формулою Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \quad (6.1)$$

Розглянемо систему масового обслуговування, що складається з  $N$  каналів з відмовами (заявка покидає таку систему, якщо всі канали виявляться зайнятими). На неї надходить найпростіший потік заявок. Відома щільність розподілу інтервалу часу  $\tau$  між двома послідовними заявками:

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}, \lambda > 0, \tau > 0. \quad (6.2)$$

Щільність (6.2) – щільність для показникового закону розподілу.

Кожна заявка надходить до першого каналу обслуговування. Якщо він вільний, то він обслуговує заявку, інакше заявка надходить на другий канал та обслуговується ним, якщо він вільний, інакше переодить до третього каналу і так далі. Якщо всі канали виявляться зайнятими, заявка отримує відмову.

Здійснюється підрахунок кількості виконаних заявок та кількості відмов.

Нехай потрібно знайти математичне сподівання кількості виконаних заявок та кількості відмов за певний час  $T$ . Для розв'язання цієї задачі виконують  $n$  випробувань, кожне тривалістю  $T$ . У кожному випробуванні визначається кількість виконаних заявок та кількість відмов.

Нехай  $t_0$  – тривалість обслуговування каналом заявки,  $t_i$  – момент звільнення  $i$ -го каналу,  $T_k$  – момент надходження  $k$ -ої заявки,  $\tau_k$  – проміжок часу між надходженнями  $k$ -ої та  $k+1$ -ої заявок,  $T_{k+1} = T_k + \tau_k$  – момент надходження  $k+1$ -ої заявки,  $n$  – кількість випробувань.

Нехай перша заявка надійшла у момент часу  $T_1 = 0$ , коли всі канали вільні. Вона надходить до першого каналу і обслуговується ним за час  $t_0$ .

Змоделюємо момент  $T_2$  надходження другої заявки. Для цього виберемо випадкове число  $r_1$  та розіграємо значення  $\tau_1$ , враховуючи показниковий закон розподілу випадкової величини з щільністю  $f(\tau)$ . Для цього випадку отримуємо:

$$\tau_1 = -\frac{\ln r_1}{\lambda}. \quad (6.3)$$

Отже, друга заявка надійде у момент часу  $T_2 = T_1 + \tau_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1$ . Якщо виявиться, що  $t_1 \leq T_2$ , тобто друга заявка надійшла після того, як звільнився перший канал, то він задовольняє другу заявку і у лічильник виконаних заявок додається одиниця. Якщо  $t_1 > T_2$ , то перший канал зайнятий і заявка надходить до другого каналу і виконується ним, оскільки розрахунок почався з припущенням, що всі канали вільні. У лічильник виконаних заявок додається одиниця.

Якщо у деякий момент часу всі канали виявилися зайнятими, то заявка отримує відмову і у лічильник відмов додається одиниця.

Випробування закінчується, якщо чергова заявка надійде у момент часу, що перевищує момент закінчення випробування, тобто, якщо  $T_{k+1} > T$ .

У результаті  $i$ -го випробування у лічильниках виявиться  $n_{1,i}$  виконаних заявок та  $n_{2,i}$  відмов. Оцінками математичних сподівань виконаних заявок та відмов є вибіркові середні:

$$\bar{n}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n n_{1,i}}{n}, \quad \bar{n}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_{2,i}}{n}. \quad (6.4)$$

Для знаходження найменшої кількості випробувань, яка з надійністю  $\gamma$  забезпечує задану верхню межу похибки  $\delta$ , використовують формулу:

$$n = \frac{z^2 \sigma^2}{\delta^2}. \quad (6.5)$$

Тут значення параметра  $z$  визначають з рівності  $\Phi(z) = \frac{\gamma}{2}, \sigma = \frac{1}{\lambda}$ .

## 6.2 Застосування методу Монте-Карло до обчислення визначених інтегралів

Розглянемо один зі способів обчислення визначених інтегралів за допомогою імітаційного моделювання – метод осереднення підінтегральної функції.

Нехай потрібно наближено обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (6.6)$$

Розглянемо випадкову величину  $X$ , розподілену рівномірно на інтервалі інтегрування  $(a; b)$  з щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in (a; b), \\ 0, & x \notin (a; b). \end{cases}$$

Тоді математичне сподівання функції випадкової величини  $X$

$$M(\varphi(x)) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (6.7)$$

Звідси знаходимо:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = (b-a) M(\varphi(x)). \quad (6.8)$$

Замінімо математичне сподівання  $M(\varphi(x))$  його оцінкою – вибірковою середньою і отримаємо наближене значення інтегралу у вигляді:

$$I^* = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i), \quad (6.9)$$

де  $x_i$  – можливі значення випадкової величини  $X$ ,  $x_i = a + (b-a)r_i$ ,  $r_i$  – випадкові числа.

## Література

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Москва: Физматлит, 2005. 320 с.
2. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. Москва: Физматлит, 2003. 396 с.
3. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций. Москва: Экзамен, 2003. 448 с.
4. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. Москва: Финансы и статистика, 2000. 352 с.
5. Вітлінський В.В. Моделювання економіки. Київ: КНЕУ, 2003. 448 с.
6. Александрова И.Е., Александрова Т.Е. Математическое моделирование, системный анализ и синтез сложных технических объектов. Красноярск: Научно-инновационный центр, 2016. 207 с.
7. Введение в математическое моделирование. Учебное пособие под ред. П.В. Трусова. Москва: Логос, 2005. 440 с.
8. Бахрушин В.Є. Математичне моделювання. Запоріжжя: ЗІДМУ, 2004. 140 с.
9. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: Колледж, 2005. 320 с.
10. Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудерли А.Д.Р. Физические основы математического моделирования. Москва: Академия, 2005. 320 с.
11. Зайцев В.Ф. Математические модели в точных и гуманитарных науках. Санкт-Петербург: Книжный дом, 2006. 112 с.
12. Козин Р.Г. Математическое моделирование: примеры решения задач. Москва: НИЯУ МИФИ, 2010. 176 с.
13. Лоу А., Кельтон Д. Имитационное моделирование. Санкт-Петербург: Питер, 2004. 847 с.
14. Калиткин Н.Н., Карпенко И.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.Б. Математические модели природы и общества. Москва: Физматлит, 2005. 360 с.
15. Маценко В.Г. Математичне моделювання. Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. 519 с.
16. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. Москва: Вузовский учебник, 2007. 365 с.
17. Морозов А.В., Петухова Е.О. Моделирование: системное, имитационное, аналитическое. Санкт-Петербург: Изд-во СЗТУ, 2008. 288 с.

18. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Москва: Высшая школа, 2001. 343 с.
19. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.
20. Каток А., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Москва: Факториал, 1999. 768 с.
21. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000. 352 с.
22. Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В. Введення в моделювання динамічних систем. Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 131 с.
23. Жлуктенко В.І, Наконечний С.І., Савіна С.С. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології. Київ: КНЕУ, 2002. 226 с.
24. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Москва: ЮНИТИ, 1998. 1005 с.
25. Брандт З. Анализ данных. Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров. Москва: АСТ, 2003. 686 с.
26. Дуброва Т.А. Статистические методы прогнозирования. Москва: ЮНИТИ, 2003. 206 с.
27. Єріна А.М. Статистичне моделювання та прогнозування. Київ: КНЕУ, 2001. 170 с.
28. Крянев А.В., Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределенных данных. Москва: Физматлит, 2003. 216 с.
29. Орлов А.И. Прикладная статистика. Москва: Экзамен, 2004. 656 с.
30. Тараскин А.Ф. Статистическое моделирование и метод Монте-Карло. Самара: СГАУ, 62 с.
31. Тюркин Ю.И., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. Москва: Инфра-М, 2003. 544 с.
32. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. Москва: КомКнига, 2007. 192 с.



Навчальне видання  
(українською мовою)

Клименко Михайло Іванович  
Гребенюк Сергій Миколайович

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Конспект лекцій  
для аспірантів спеціальності 113  
«Прикладна математика»

Рецензент *С.В. Чопоров, доктор технічних наук, доцент*

Відповідальний за випуск *М.І. Клименко, кандидат фізико-математичних наук, доцент*