КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

М.П. МОКЛЯЧУК

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ

Підручник

***Затверджено
Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів***

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2009

УДК 517.97(076.1)
ББК 22.16 Укр.я 7
М74

Рецензенти:
академік НАН України, проф. А. М. Самойленко,
д-р фіз.-мат. наук, проф. П. С. Кнопов,
д-р фіз.-мат. наук, проф. М. Д. Копачевський

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол № 9 від 14 квітня 2008 року)

Моклячук, М. П.
М74 Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. – 380 с.
ISBN

Викладена теорія варіаційного числення. Показано як розв'язуються класичні задачі Лагранжа, Больца, ізопериметричні задачі. Приведені основні положення теорії оптимального управління, в основу якої покладений принцип максимуму Понтрягина, узагальнюючий принцип невизначених множників Лагранжа. Користуючись принципом максимуму і методом динамічного програмування розв'язані задачі Майєра, Лагранжа, Больца. Серед цих задач, зокрема, задачі про посадку космічного апарату на поверхню Місяця, про запуск штучного супутника Землі. Принцип максимуму Понтрягина використаний для аналізу економічної моделі Леонтьева.

Теоретичний матеріал доповнений задачами студентам, які можна розв'язувати самостійно або на лабораторних заняттях. Складні задачі можна використовувати як теми курсових та дипломних робіт.

Для студентів університетів.

Бібліогр. 44 назв.

УДК 517.97(076.1)
ББК 22.16 Укр.я 7

Затверджено Міністерством освіти і науки України, лист № 1.4/18-Г-2331 від 12.11.2008 року

ISBN

Передмова

Цей підручник з теорії варіаційного числення і методів оптимального керування розрахований на студентів університетів, які вивчають курс "Варіаційне числення і методи оптимізації".

Підручник складається з трьох розділів: основи теорії екстремальних задач, варіаційне числення, оптимальне керування.

У першому розділі викладено методи знаходження екстремумів функцій багатьох змінних, теорія диференціального числення в нормованих просторах. На підставі цієї теорії досліджено задачі на безумовний і умовний екстремум (задачі з обмеженнями-рівностями і задачі з обмеженнями-нерівностями) у нескінченновимірних нормованих просторах. Описано необхідні й достатні умови екстремуму функціоналів, метод невизначених множників Лагранжа. Окремо розглянуто задачі опуклого програмування. Доведено теорему Куна – Таккера. Описано економічні інтерпретації множників Лагранжа.

Другий розділ найбільш об'ємний за кількістю матеріалу. Тут досліджуються як класичні задачі варіаційного числення, так і їхні узагальнення. Аналізуються рівняння Ейлера, Ейлера – Пуассона, Ейлера – Остроградського, варіаційні задачі з рухомими границями, ламані екстремалі, канонічні рівняння Ейлера, ізопериметричні задачі. Викладено необхідні й достатні умови екстремуму в задачах варіаційного числення. У цьому розділі також розв'язана велика кількість екстремальних задач, які мають практичний інтерес.

Третій розділ присвячується задачам оптимального керування. Описуються два підходи до розв'язування таких задач: принцип максимуму Понтрягіна і метод динамічного програмування Беллмана. Розв’язано задачі Майєра, Лагранжа, Больца. Описується взаємозв'язок між принципом максимуму і необхідними умовами екстремуму в задачах варіаційного числення.

Принцип максимуму Понтрягіна використовується для аналізу економічної моделі Леонтьєва.

У підручнику наводяться приклади розв’язування екстремальних задач. Серед таких задач, зокрема, задачі про посадку космічного апарата на поверхню Місяця, запуск штучного супутника Землі. Більше 500 задач запропоновано для самостійного розв’язування. До задач надаються відповіді.

Перше видання підручника відзначено премією імені Тараса Шевченка Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Розділ 1

Основи теорії екстремальних задач

1. Екстремуми функцій однієї й багатьох змінних

1.1. Основні поняття, пов'язані з екстремальними задачами

Слово *максимум* (від лат. maximum) означає *найбільше*, а слово *мінімум* (від лат. minimum) означає *найменше*. Ці два поняття об'єднуються терміном *екстремум* (від лат. extremum), тобто *крайнє*. Ще користуються терміном оптимальний (від лат. optimus), що означає *найкращий*. Задачі визначення найбільших і найменших величин називають задачами на екстремум або екстремальними задачами. Задачі на екстремум виникають у різних галузях діяльності людини і тому для опису таких задач вживають різні терміни. Щоб використовувати теорію екстремальних задач, необхідно описати задачу мовою математики. Цей процес називається формалізацією задачі.

Формалізована задача складається з таких елементів:

- функціонала якості $f : X \to \overline{R}$;
- області X визначення функціонала f;
- області $C \subset X$.

Тут $\overline{R}$ – розширена числова пряма, тобто множина всіх дійсних чисел, доповнена значеннями $+\infty$, $-\infty$, C – підмножина області визначення X функціонала f. Отже, формалізувати екстремальну задачу –

це чітко визначити й описати елементи f, C, X. Формалізовану задачу записують у вигляді

$$f(x) \to \inf\ (\sup), \quad x \in C. \qquad (1.1)$$

Точки множини C називаються *допустимими точками* задачі (1.1). Якщо $C = X$, то допустимими будуть усі точки області визначення функціонала. Задача (1.1) у цьому випадку називається задачею без обмежень.

Задачу на максимум завжди можна привести до задачі на мінімум, замінивши функціонал $f(x)$ на функціонал $g(x) = -f(x)$. І навпаки, задачу на мінімум так само можна привести до задачі на максимум. Тому необхідні умови екстремуму в задачах на мінімум і максимум виписуємо лише для задачі на мінімум. Якщо необхідно досліджувати обидві задачі, то пишуть

$$f(x) \to extr, \ x \in C.$$

Допустима точка $\hat{x}$ є точкою *абсолютного* або *глобального мінімуму* (максимуму) екстремальної задачі, якщо для будь-якого $x \in C$ виконується нерівність

$$f(x) \geq f(\hat{x}) \quad (f(x) \leq f(\hat{x})).$$

Тоді пишемо $\hat{x} \in abs \min$ ($abs \max$). Точка абсолютного мінімуму (максимуму) називається *розв'язком задачі.* Величина $f(\hat{x})$, де $\hat{x}$ – розв'язок задачі, називається числовим значенням задачі. Цю величину позначають $S_{\min}$ ($S_{\max}$).

Крім глобальних, досліджують і локальні екстремуми. Нехай X – нормований простір. У точці $\hat{x}$ досягається *локальний мінімум* (максимум) задачі $\hat{x} \in loc \min$ ($\hat{x} \in loc \max$), якщо існує таке число $\delta > 0$, що для будь-якої допустимої точки $x \in C$, яка задовольняє умову $\|x - \hat{x}\| < \delta$, виконується нерівність

$$f(x) \geq f(\hat{x}) \quad (f(x) \leq f(\hat{x})).$$

Інакше кажучи, якщо $\hat{x} \in loc \min$ ($\hat{x} \in loc \max$), то існує окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$ такий, що $\hat{x} \in abs \min$ ($abs \max$) в задачі

$$f(x) \to \inf\ (\sup), \quad x \in C \cap O_{\hat{x}}.$$

Теорія екстремальних задач дає загальні правила розв'язування екстремальних задач. Теорія необхідних умов екстремуму більш розвинута. Необхідні умови дозволяють виділити множину точок, серед яких міститься розв'язок задачі. Така множина називається *критичною,* а самі точки – *критичними точками.* Як правило, критична множина містить не дуже багато точок і розв'язок задачі можна знайти тим або іншим методом.

1.2. Екстремуми функції однієї змінної

Нехай $f : R \to R$ – функція однієї дійсної змінної.

Означення 1.1. Функція f називається *напівнеперервною знизу* (*напівнеперервною зверху*) у точці $\hat{x}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ виконується нерівність

$$f(x) > f(\hat{x}) - \varepsilon \quad (f(x) < f(\hat{x}) + \varepsilon).$$

Означення 1.2 (еквівалентне). Функція f називається напівнеперервною знизу (напівнеперервною зверху) у точці $\hat{x}$, якщо для всіх $a < f(\hat{x})$ $(a > f(\hat{x}))$, $a \in R$, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ виконується нерівність

$$f(x) > a \quad (f(x) < a).$$

Якщо функція набуває значення в $\overline{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, то означення 1.2 має сенс тоді, коли $f(\hat{x}) = +\infty$ $(f(\hat{x}) = -\infty)$. Якщо ж $f(\hat{x}) = -\infty$ $(f(\hat{x}) = +\infty)$, то функція вважається напівнеперервною знизу (зверху) за домовленістю.

Наведемо деякі приклади.

1. Функція $y = [x]$ (ціла частина від x) напівнеперервна зверху в точках розриву.

2. Функція $y = \{x\}$ (дробова частина від x) напівнеперервна знизу в точках розриву.

3. Функція Діріхле, що дорівнює 0 в раціональних точках і 1 в ірраціональних точках, напівнеперервна знизу в кожній раціональній точці й напівнеперервна зверху в кожній ірраціональній точці.

4. Якщо функція $f : R \to \overline{R}$ має локальний мінімум (максимум) у точці $\hat{x}.$, то вона напівнеперервна знизу (зверху) в точці $\hat{x}$.

5. Функція $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ при $x \neq 0$, $f(0) = +\infty$ напівнеперервна знизу в точці 0. Якщо визначити функцію в точці 0 як $f(0) = b$ або $f(0) = -\infty$, то вона залишиться напівнеперервною знизу.

Теорема 1.1. *Нехай f, g – напівнеперервні знизу функції. Тоді:*

1) функція $f+g$ напівнеперервна знизу;

2) функція αf напівнеперервна знизу при $\alpha \geq 0$ і напівнеперервна зверху при $\alpha \leq 0$;

3) функція $f \cdot g$ напівнеперервна знизу, якщо $f \geq 0, g \geq 0$;

4) функція $1/f$ напівнеперервна зверху, якщо $f > 0$;

5) функції $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ напівнеперервні знизу;

6) функції $\sup\{f_i\}$ $(\inf\{f_i\})$ напівнеперервні знизу (зверху), якщо f_i напівнеперервні знизу (зверху).

Теорема 1.2 (Вейєрштрасса). *Напівнеперервна знизу (зверху) на відрізку $[a,b]$ функція $f: R \to R$ обмежена знизу (зверху) на $[a,b]$ і досягає найменшого (найбільшого) значення.*

Теорема 1.3 (Ферма). *Якщо $\hat{x}$ – точка локального екстремуму функції $f(x)$, диференційовної в точці $\hat{x}$, то $f'(\hat{x}) = 0$.*

Теорема Ферма дає необхідну умову першого порядку існування локального екстремуму функції $f(x)$ у точці $\hat{x}$. Наступні теореми дають необхідні та достатні умови екстремуму другого порядку.

Теорема 1.4 (про необхідні умови другого порядку). *Якщо $\hat{x}$ – точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$, що має в точці $\hat{x}$ другу похідну, то виконуються умови*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) \geq 0 \quad (f''(\hat{x}) \leq 0).$$

Теорема 1.5 (про достатні умови другого порядку). *Якщо функція $f(x)$ має в точці $\hat{x}$ другу похідну і виконуються умови*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) > 0 \quad (f''(\hat{x}) < 0),$$

то $\hat{x}$ – точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$.

Необхідні й достатні умови вищого порядку існування екстремуму функції $f(x)$ наведені в наступних теоремах.

Теорема 1.6 (про необхідні умови вищого порядку). *Якщо $\hat{x}$ – точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$, яка має в цій точці $\hat{x}$ похідну порядку n, то або*

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0,$$

або

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0,$$

$$f^{(2m)}(\hat{x}) > 0 \quad (f^{(2m)}(\hat{x}) < 0)$$

при деякому $2m \leq n$.

Доведення. За формулою Тейлора для n разів диференційовної в точці $\hat{x}$ функції

$$f(\hat{x}+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!}x^k+r(x),\quad \frac{r(x)}{x^n}\to 0,\quad x\to 0.$$

Якщо $n=1$, то твердження теореми справджується внаслідок теореми Ферма. Нехай $n>1$, тоді

$$f'(\hat{x})=\ldots=f^{(n)}(\hat{x})=0$$

або

$$f'(\hat{x})=\ldots=f^{(l-1)}(\hat{x})=0,\quad f^{(l)}(\hat{x})\neq 0,\quad l\leq n.$$

Нехай l – непарне число. Тоді функцію $g(u)=f(\hat{x}+u^{\frac{1}{l}})$, $u\in R$, можна розкласти в ряд за формулою Тейлора

$$g(u)=f(\hat{x})+\sum_{k=l}^{n}\frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!}u^{\frac{k}{l}}+r(u^{\frac{1}{l}}),$$

$$r(u^{\frac{1}{l}})/u^{\frac{n}{l}}\to 0\quad u\to 0.$$

Функція $g(u)$ має похідну в точці $u=0$. Оскільки $\hat{x}\in loc\min f$, то $0\in loc\min g$. За теоремою Ферма $g'(0)=f^{(l)}(\hat{x})/l!=0$. Звідки $f^{(l)}(\hat{x})=0$. Це суперечить умові $f^{(l)}(\hat{x})\neq 0$. Тому число l парне, $l=2m$. За формулою Тейлора

$$f(\hat{x}+x)-f(\hat{x})=\frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!}x^{2m}+r_1(x),$$

$$\frac{r_1(x)}{x^{2m}}\to 0,\quad x\to 0.$$

Оскільки $f^{(2m)}(\hat{x})\neq 0$, то $f^{(2m)}(\hat{x})>0$ при $\hat{x}\in loc\min f$ і $f^{(2m)}(\hat{x})<0$ при $\hat{x}\in loc\max f$. □

Теорема 1.7 (про достатні умови вищого порядку). *Якщо функція $f(x)$ має в точці $\hat{x}$ похідну порядку n і*

$$f'(\hat{x})=\ldots=f^{(2m-1)}(\hat{x})=0,$$

$$f^{(2m)}(\hat{x})>0\quad (f^{(2m)}(\hat{x})<0)$$

при деякому $m\geq 1$, $2m\leq n$, то функція $f(x)$ досягає в точці $\hat{x}$ локального мінімуму (максимуму).

Доведення. Оскільки $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0$, то за формулою Тейлора

$$f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) = \frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!} x^{2m} + r_1(x),$$

$$\frac{r_1(x)}{x^{2m}} \to 0, \quad x \to 0.$$

Якщо $f^{(2m)}(\hat{x}) > 0$, то $f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) \geq 0$ при достатньо малих x, тобто $\hat{x} \in loc\min f$. Якщо ж $f^{(2m)}(\hat{x}) < 0$, то $f(\hat{x}+x) - f(\hat{x}) \leq 0$ при достатньо малих x, або $\hat{x} \in loc\max f$. □

1.3. Екстремуми функцій n змінних

Нехай $f : R^n \to \overline{R}$ – функція n дійсних змінних.

Означення 1.3. Функція $f : R^n \to \overline{R}$ називається *напівнеперервною знизу (напівнеперервною зверху)* у точці $\hat{x}$, якщо існує δ-окіл

$$O_{\hat{x}} = \{x : \|x - \hat{x}\| < \delta\}, \ \|x\| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}},$$

точки $\hat{x}$ такий, що для всіх $x \in O_{\hat{x}}$ виконується нерівність

$$f(x) > f(\hat{x}) - \varepsilon \quad (f(x) < f(\hat{x}) + \varepsilon).$$

Теорема 1.8. *Функція $f : R^n \to \overline{R}$ напівнеперервна знизу на R^n тоді й тільки тоді, коли для кожного $a \in R$ множина $f^{-1}((a, +\infty])$ відкрита або доповнююча множина $f^{-1}((-\infty, a])$ замкнута.*

Доведення. Нехай функція f напівнеперервна знизу на R^n, $a \in R$, $\hat{x} \in f^{-1}((a, +\infty])$. Тоді існує окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$ такий, що для всіх точок $x \in O_{\hat{x}}$ виконується нерівність $f(x) > a$. А це означає, що $O_{\hat{x}} \subset f^{-1}((a, +\infty])$. Тому множина $f^{-1}((a, +\infty])$ відкрита.

Навпаки, якщо множина $f^{-1}((a, +\infty])$ відкрита для будь-якого $a \in R$ і $\hat{x} \in R^n$, *то або* $f(\hat{x}) = -\infty$ і функція f напівнеперервна в точці $\hat{x}$ за домовленістю або $f(\hat{x}) > -\infty$ і $\hat{x} \in f^{-1}((a,+\infty])$ при $a < f(\hat{x})$. Оскільки множина $f^{-1}((a,+\infty])$ відкрита, то існує δ-окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$ такий, що $O_{\hat{x}} \subset f^{-1}((a,+\infty])$ і $f(x) > a$ для будь-якого $x \in O_{\hat{x}}$. Це означає, що функція f напівнеперервна знизу в точці $\hat{x}$. □

Теорема 1.9 (Вейєрштрасса). *Напівнеперервна знизу (зверху) функція на непорожній обмеженій замкнутій підмножині простору R^n обмежена знизу (зверху) і досягає найменшого (найбільшого) значення.*

Теорема 1.9 (Вейєрштрасса). *Якщо функція f напівнеперервна знизу і для деякого числа a множина $\{x : f(x) \le a\}$ непорожня і обмежена, то функція $f(x)$ досягає свого абсолютного мінімуму.*

Наслідок 1.1. Якщо функція f напівнеперервна знизу (зверху) на R^n і

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty\right),$$

то f досягає свого мінімуму (максимуму) на кожній замкнутій підмножині простору R^n.

Теорема 1.11 (про необхідні умови першого порядку). *Якщо $\hat{x}$ – точка локального екстремуму диференційовної в точці $\hat{x}$ функції, то всі частинні похідні функції f рівні нулю в точці $\hat{x}$:*

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0.$$

Теорема 1.12 (про необхідні умови другого порядку). *Якщо $\hat{x}$ – точка локального мінімуму функції f і ця функція диференційовна двічі в точці $\hat{x}$, то виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} h_k h_j \ge 0 \quad \forall h = (h_1,\dots,h_n) \in R^n.$$

Ця умова означає, що матриця

$$f''(\hat{x}) = \left\{\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j}\right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$$

невід'ємно визначена.

Теорема 1.13 (про достатні умови другого порядку). *Нехай функція $f : R^n \to \overline{R}$ диференційовна двічі в точці $\hat{x}$ і виконуються умови:*

1) $\dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \dots = \dfrac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0;$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} h_k h_j > 0 \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in R^n, h \neq 0.$

Тоді $\hat{x}$ – точка локального мінімуму задачі на екстремум

$$f(x) \to \inf, \quad x \in R^n.$$

Умова 2) теореми 1.13 означає, що матриця

$$f''(\hat{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} \right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$$

додатно визначена.

Теорема 1.13 (критерій Сільвестра). *Матриця A додатно визначена тоді й тільки тоді, коли її головні мінори додатні. Матриця A від'ємно визначена тоді й тільки тоді, коли* $(-1)^k \det A_k > 0$ *, де*

$$A_k = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{1,k}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Запишемо ряд головних мінорів матриці A

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тоді можливі такі варіанти:

1) матриця A додатно визначена, якщо

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0;$$

2) матриця A від'ємно визначена, якщо

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0;$$

3) матриця A невід'ємно (недодатно) визначена, якщо

$$\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0 \quad (\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0)$$

та існує таке, що $\Delta_j = 0$;

4) матриця A невизначена.

Приклад 1.1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 \to extr.$$

Розв'язок:

Функція неперервна. Очевидно, що $S_{\max} = +\infty$. Згідно з наслідком 1.1 із теореми Вейєрштрасса мінімум досягається. Необхідні умови першого порядку

$$\frac{f(\hat{x})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{f(\hat{x})}{\partial x_2} = 0$$

дають рівняння

$$3x_1^2 - 3x_2 = 0, \quad 3x_2^2 - 3x_1 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, визначаємо критичні точки $(0,0)$, $(1,1)$. Щоб використати умови другого порядку, запишемо матриці, складені з других похідних:

$$A(\hat{x}) = \left\{\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j}\right\}_{k,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 6\hat{x}_1 & -3 \\ -3 & 6\hat{x}_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = A(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця A_1 недодатно визначена. Тому точка $(0,0)$ не задовольняє необхідні умови мінімуму другого порядку. Точка не може бути розв'язком задачі, $(0,0) \notin locextr$. Матриця A_2 додатно визначена. Отже, згідно з теоремою 1.13 у точці $(1,1)$ досягається локальний мінімум задачі.

Відповідь: $(0,0) \notin locextr$; $(1,1) \in loc\min$. Δ

1.4. Задачі на умовний екстремум. Метод Лагранжа

1.4.1. Задачі з обмеженнями-рівностями

Нехай $f_k : R^n \to R$, $k = 0,1,\dots,m$, – диференційовні функції n дійсних змінних.

Задачею на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями називається задача

$$f_0(x) \to extr, \quad f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0. \qquad (1.2)$$

Точки $\hat{x} \in R^n$, які задовольняють рівняння $f_k(\hat{x}) = 0$, $k = \overline{1,m}$, називаються *допустимими* в задачі (1.2). Допустима точка $\hat{x}$ дає локальний мінімум (максимум) задачі (1.2), якщо існує таке число $\delta > 0$, що для всіх допустимих $x \in R^n$, які задовольняють умови $f_k(x) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\|x - \hat{x}\| < \delta$, виконується нерівність

$$f(x) \ge f(\hat{x}) \quad (f(x) \le f(\hat{x})).$$

Основним методом розв'язування задач на умовний екстремум є *метод невизначених множників Лагранжа.* Він базується на тому факті, що умовний екстремум у задачі (1.2) досягається в точках, які є критичними в задачі на безумовний екстремум

$$L(x, \lambda, \lambda_0) \to extr,$$

де $L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x)$ – функція Лагранжа, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – множники Лагранжа.

Теорема 1.15 (Лагранжа). *Нехай $\hat{x}$ – точка локального екстремуму задачі (1.2), функції $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, неперервно диференційовні в деякому околі U точки $\hat{x}$. Тоді існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такі, що виконується умова стаціонарності по x функції Лагранжа*

$$L'_x(\hat{x}, \lambda, \lambda_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L(\hat{x}, \lambda, \lambda_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Щоб $\lambda_0 \ne 0$, достатньо, щоб вектори $f'_1(\hat{x}), \ldots, f'_m(\hat{x})$ були лінійно незалежними.

Доведення. Щоб довести теорему, використаємо теорему про обернену функцію в скінченновимірному просторі.

Теорема 1.16 (про обернену функцію). Нехай $F_1(x_1, \ldots, x_s)$, $\ldots, F_s(x_1, \ldots, x_s)$ – s функцій s змінних, неперервно диференційовних у деякому околі точки $\hat{x}$, і якобіан

$$\det \left\{ \frac{\partial F_i(\hat{x})}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1}^{s}$$

не дорівнює нулю. Тоді існують числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $K > 0$ такі, що для будь-якого $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $\|y\| \le \varepsilon$, можна знайти $x = (x_1, \ldots, x_s)$ таке, що виконуються умови $\|x\| < \delta$, $F(\hat{x} + x) = F(\hat{x}) + y$, $\|x\| \le K\|y\|$.

Доведемо теорему Лагранжа методом від супротивного. Припустимо, що умова стаціонарності

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f'_i(\hat{x}) = 0$$

не виконується і вектори $f_i^{'}(\hat{x})$, $i = 0,1,\dots,m$ лінійно незалежні. Це означає, що ранг матриці

$$A = \left\{ \frac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_j} \right\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{0,m}}$$

дорівнює $m+1$. Тому існує підматриця матриці A розмірності $(m+1)\times(m+1)$, визначник якої не дорівнює нулю. Нехай це буде матриця, що складена з перших $m+1$ стовпців матриці A. Побудуємо функцію $F: R^{m+1} \to R^{m+1}$ за допомогою функцій $f_k(x)$, $k = 0,\dots,m$. Нехай

$$F_1(x_1,\dots,x_{m+1}) = f_0(x_1,\dots,x_{m+1},\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n) - f_0(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n),$$

$$F_k(x_1,\dots,x_{m+1}) = f_{k-1}(x_1,\dots,x_{m+1},\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n), \quad k = 2,\dots,m+1.$$

Тут $x_1,\dots,x_{m+1}$ – змінні, а $\hat{x}_{m+2},\dots,\hat{x}_n$ – фіксовані величини. Якщо $\hat{x} = (\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$ – розв'язок задачі на умовний екстремум, то $F(\hat{x}) = 0$. Функції $F_k(x_1,\dots,x_{m+1})$, $k = 1,\dots,m+1$ задовольняють умови теореми про обернену функцію. Візьмемо $y = (\varepsilon,0,\dots,0)$. Для достатньо малих за модулем значень ε існує вектор $\overline{x}(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon),\ \dots,\ x_{m+1}(\varepsilon))$ такий, що

$$F_1(\overline{x}(\varepsilon)) = \varepsilon, \quad F_k(\overline{x}(\varepsilon)) = 0, \quad k = \overline{2,m+1},$$

тобто

$$f_0(x(\varepsilon)) - f_0(\hat{x}) = \varepsilon, \quad f_k(x(\varepsilon)) = 0, \quad k = \overline{1,m},$$

де $x(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon),\dots,x_{m+1}(\varepsilon),\hat{x}_{m+2},\ \dots,\ \hat{x}_n)$ і $\|x(\varepsilon) - \hat{x}\| < K\,|\,\varepsilon\,|$. А це суперечить тому, що $\hat{x}$ – розв'язок задачі на умовний екстремум (1.2), оскільки як при додатних, так і при від'ємних значеннях ε існують близькі до $\hat{x}$ вектори, на яких функціонал $f_0(x(\varepsilon))$ набуває значення як менше, так і більше $f_0(\hat{x})$. Теорему доведено. □

Таким чином, для визначення $m+n+1$ невідомих $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$, $\hat{x}_1$, $\dots$, $\hat{x}_n$ ми одержали $n+m$ рівнянь

$$f_1(\hat{x}) = \dots = f_m(\hat{x}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(\hat{x}) \right) = 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Множники Лагранжа визначені з точністю до пропорційності. Якщо відомо, що $\lambda_0 \neq 0$, то можна вибрати $\lambda_0 = 1$. Тоді кількість рівнянь і кількість невідомих однакова.

Лінійна незалежність векторів похідних $f_1'(\hat{x}),\ldots,f_m'(\hat{x})$ є та умова регулярності, яка гарантує виконання умови $\lambda_0 \neq 0$. Проте перевірка цієї умови складніша, ніж безпосередня перевірка того, що λ_0 не може бути рівним нулю. Із часів Лагранжа (майже ціле століття) правило множників використовувалося з $\lambda_0 = 1$, незважаючи на те, що в загальному випадку воно невірне.

Як і у випадку безумовної задачі оптимізації стаціонарні точки задачі на умовний екстремум не обов'язково є її розв'язком. Для таких задач також існують необхідні та достатні умови оптимальності в термінах других похідних. Позначимо через

$$L''_{xx}(x,\lambda,\lambda_0) = \left\{ \frac{\partial^2 L(x,\lambda,\lambda_0)}{\partial x_k \partial x_j} \right\}_{j=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,n}$$

матрицю других похідних функції Лагранжа $L(x,\lambda,\lambda_0)$.

Теорема 1.17 (про необхідні умови другого порядку). *Нехай функції $f_i(x)$, $i = 0,1,\ldots,m$ двічі диференційовні в точці $\hat{x}$ і неперервно диференційовні в деякому околі U точки $\hat{x}$, причому градієнти $f_i'(\hat{x})$, $i = 1,\ldots,m$ – лінійно незалежні. Якщо $\hat{x}$ – локальний мінімум задачі (1.2), то*

$$\langle L''_{xx}(\hat{x},\lambda,\lambda_0)h,h\rangle \geq 0$$

для всіх λ,λ_0, які задовольняють умову

$$L'_x(\hat{x},\lambda,\lambda_0) = 0,$$

і всіх $h \in R^n$ таких, що

$$\langle f_i'(\hat{x}),h\rangle = 0, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Теорема 1.18 (про достатні умови другого порядку). *Нехай функції $f_i(x), i = 0,1,\ldots,m$ – двічі диференційовні в точці $\hat{x} \in R^n$, яка задовольняє умови*

$$f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Припустимо, що при деяких λ,λ_0 виконується умова

$$L'_x(\hat{x},\lambda,\lambda_0) = 0,$$

і, крім того,

$$\langle L''_{xx}(\hat{x},\lambda,\lambda_0)h,h\rangle > 0$$

при всіх ненульових $h \in R^n$, які задовольняють умову

$$\langle f_i'(\hat{x}),h\rangle = 0, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Тоді $\hat{x}$ *– локальний мінімум задачі* (*1.2*).

Правило невизначених множників Лагранжа розв'язування задач на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями таке.

1. Скласти функцію Лагранжа

$$L(x,\lambda,\lambda_0)=\sum_{k=0}^{m}\lambda_k f_k(x).$$

2. Виписати необхідні умови екстремуму функції $L(x,\lambda,\lambda_0)$ – рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x_j}L(x,\lambda,\lambda_0)=0,\quad j=1,\ldots,n.$$

3. Знайти стаціонарні точки, тобто розв'язки цих рівнянь за умови, що не всі множники Лагранжа $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ рівні нулю.

4. Знайти розв'язок задачі серед стаціонарних точок або довести, що задача не має розв'язків.

1.4.2. Задачі з рівностями і нерівностями

Нехай $f_i:R^n\to R$ – диференційовні функції n дійсних змінних. Задачею на *умовний екстремум з рівностями і нерівностями* називається задача

$$\begin{aligned} &f_0(x) &&\to \inf, \\ &f_i(x) &&\le 0,\quad i=1,\ldots,m, \\ &f_{m+k}(x) &&=0,\quad k=1,\ldots,s. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Сформулюємо необхідні умови мінімуму задачі (1.3).

Теорема 1.19 (про невизначені множники Лагранжа). *Нехай* $\hat{x}$ *– точка локального мінімуму задачі* (*1.3*), *функції* f_i, $i=0,\ldots,m+s$ *неперервно диференційовні в деякому околі* U *точки* $\hat{x}$. *Тоді існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+s}$ *такі, що для функції Лагранжа*

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+s})=\sum_{i=0}^{m+s}\lambda_i f_i(x)$$

виконуються умови:

1) стаціонарності по x

$$L_x(\hat{x},\lambda)=0\Leftrightarrow\frac{\partial L(\hat{x},\lambda)}{\partial x_j}=0,\quad j=1,\ldots,n;$$

2) доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_i f_i(\hat{x})=0,\quad i=1,\ldots,m;$$

3) невід'ємності

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Правило невизначених множників Лагранжа розв'язування задач на умовний екстремум з рівностями і нерівностями таке.

1. Скласти функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m+s} \lambda_i f_i(x).$$

2. Записати необхідні умови:

а) стаціонарності

$$\frac{\partial L(\hat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

б) доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

в) невід'ємності

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, m.$$

3. Знайти критичні точки, тобто всі допустимі точки, які задовольняють необхідні умови з множником Лагранжа $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_0 \neq 0$.

4. Знайти розв'язок задачі серед усіх критичних точок або показати, що розв'язків немає.

Зауваження. Користуючись правилом невизначених множників Лагранжа розв'язування задач на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями, можна вибирати число λ_0 як додатне, так і від'ємне. Для задач, де присутні обмеження рівності та обмеження нерівності, знак λ_0 істотний.

Приклад 1.2. Розв'язати задачу на умовний екстремум:

$$x_1 \to \inf, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Розв'язок:

Єдиним очевидним розв'язком цієї задачі є точка $\hat{x} = (0,0)$. Розв'яжемо задачу методом Лагранжа.

1. Складемо функцію Лагранжа $L = \lambda_0 x_1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2)$.

2. Запишемо рівняння стаціонарності:

$$L'_{x_1} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda x_1 + \lambda_0 = 0,$$

$$L'_{x_2} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda x_1 = 0.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 1$, то одержимо рівняння:

$$2\lambda x_1 + 1 = 0, \quad 2\lambda x_2 = 0.$$

Перше рівняння несумісне з умовою $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Тому система рівнянь

$$\begin{aligned} &2\lambda x_1 + 1 = 0, \\ &2\lambda x_2 = 0, \\ &x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

розв'язків не має. Якщо ж покласти $\lambda_0 = 0$, то отримаємо, що $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ – розв'язок системи рівнянь. Відповідь: $(0,0) \in abs\min$. Δ

Приклад 1.2 показує, що не завжди можна брати $\lambda_0 = 1$ при складанні функції Лагранжа.

Приклад 1.3. Розв'язати екстремальну задачу

$$\frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 \to \min, \quad x_1^3 + x_2^3 = 1,$$

де $a > 0$ і $b > 0$ – задані числа.

Розв'язок:

1. Випишемо (регулярну) функцію Лагранжа (указана в теоремі 1.15 умова регулярності тут виконана):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - 1).$$

2. Оскільки

$$L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = ax_1 + 3\lambda x_1^2, \quad L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = bx_2 + 3\lambda x_2^2,$$

то система рівнянь для визначення стаціонарних точок буде такою:

$$ax_1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \quad bx_2 + 3\lambda x_2^2 = 0 \quad x_1^3 + x_2^3 = 1.$$

3. Ця система рівнянь має три розв'язки:

$$\left(0, 1, -\frac{b}{3}\right), \left(1, 0, -\frac{a}{3}\right), \left(\frac{a}{(a^3 + b^3)^{1/3}}, \frac{b}{(a^3 + b^3)^{1/3}}, -\frac{(a^3 + b^3)^{1/3}}{3}\right).$$

4. Матриця других похідних

$$L''_{xx}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} a + 6\lambda x_1 & 0 \\ 0 & b + 6\lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Для вказаних розв'язків ця матриця набуде відповідно вигляду:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Умова $\langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m$ у даному випадку має вигляд $3x_1^2 h_1 + 3x_2^2 h_2 = 0$. Для перших двох розв'язків це означає, що $h_1 = 0$ і $h_2 = 0$ відповідно. Звідси ясно, що матриці A_1 і A_2 задовольняють умову теореми 1.17 (хоч вони не є додатно визначеними). Тому точки $(0,1)$, $(1,0)$ – строгі локальні розв'язки задачі. Для матриці A_3 умова теореми 1.17 не виконується. Тому точка

$$\left(\frac{a}{(a^3+b^3)^{1/3}}, \frac{b}{(a^3+b^3)^{1/3}}\right)$$

не може бути розв'язком задачі на мінімум. Ця точка є строгим локальним розв'язком задачі максимізації тієї ж функції за тих же обмежень.

Відповідь: $\hat{x}_1 = (0,1) \in loc\min$, $\hat{x}_2 = (1,0) \in loc\min$,

($\hat{x}_3 = (a/(a^3+b^3)^{1/3}, b/(a^3+b^3)^{1/3}) \in loc\max$). Δ

Приклад 1.4. Розв'язати екстремальну задачу:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \to \inf;$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \quad \le 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \quad = 3.$$

Розв'язок:

1. Складемо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3).$$

2. Запишемо необхідні умови:

а) стаціонарності

$$L'_{x_1} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$
$$L'_{x_2} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 x_2 + \lambda_2 - \lambda_1 = 0,$$
$$L'_{x_3} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 x_3 + \lambda_2 + \lambda_1 = 0;$$

б) доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0;$$

в) невід'ємності $\lambda_1 \ge 0$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то з умови стаціонарності одержимо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Тоді всі множники Лагранжа – нулі. Це суперечить умові теореми 1.19. Візьмемо $\lambda_0 = 1/2$. Якщо $\lambda_1 \ne 0$, то з умови доповнюючої нежорсткості $2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$. Виразимо x_1, x_2, x_3 через λ_1, λ_2 і підставимо в рівняння

$$x_1 + x_2 + x_3 \quad = 3,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \quad = 5.$$

Одержимо $\lambda_1 = -9/14 < 0$. А це суперечить умові невід'ємності. Нехай $\lambda_1 = 0$, тоді $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ – критична точка.

4. Функція $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty$ при $|x| \to \infty$. За наслідком з теореми Вейєрштрасса розв'язок задачі існує. Оскільки критична точка єдина, то розв'язком задачі може бути лише вона.

Відповідь: $\hat{x} = (1,1,1) \in abs\min$, $S_{\min} = 3$. Δ

Приклад 1.5. Приклад нерегулярної задачі. Розглянемо екстремальну задачу

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 \to \min, \\ g_1(x_1, x_2) &= -x_1^3 + x_2 \le 0, \\ g_2(x_1, x_2) &= -x_1^3 - x_2 \le 0, \\ g_3(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0. \end{aligned}$$

На рис. 1.1 зображені допустима множина задачі й лінії рівня цільової функції. Розв'язком задачі є точка $\hat{x} = (0,0)$. Активними в цій точці є перше і друге обмеження. При цьому $f'(\hat{x}) = f'(0,0) = (1,0)$, $g_1'(\hat{x}) = g_1'(0,0) = (0,1)$, $g_2'(\hat{x}) = g_2'(0,0) = (0,-1)$.

Вектор $f'(\hat{x}) = f'(0,0) = (1,0)$ не можна зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів $g_1'(\hat{x}) = g_1'(0,0) = (0,1)$, $g_2'(\hat{x}) = g_2'(0,0) = (0,-1)$. Співвідношення

$$\lambda_0 f'(\hat{x}) + \lambda_1 g_1'(\hat{x}) + \lambda_2 g_2'(\hat{x}) + \lambda_3 g_3'(\hat{x}) = 0$$

у точці $\hat{x} = (0,0)$ може виконуватися лише при

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\lambda, \lambda_3 = 0.$$

Градієнти $g_1'(\hat{x}) = g_1'(0,0) = (0,1)$, $g_2'(\hat{x}) = g_2'(0,0) = (0,-1)$ у даному випадку лінійно залежні.

Відповідь: $\hat{x} = (0,0) \in abs\min$, $S_{\min} = 0$. Δ

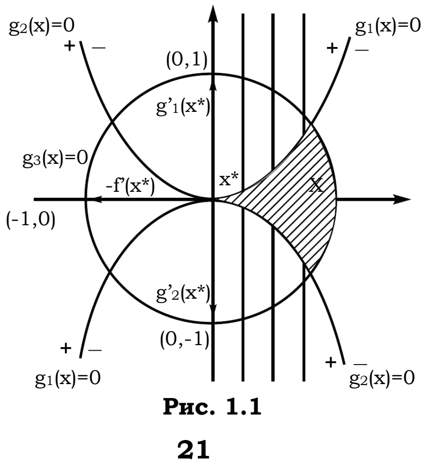

Рис. 1.1

Приклад 1.6. Розв'язати екстремальну задачу:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= x_2 \to \min, \\ g_1(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ g_2(x_1,x_2) &= -x_1 + x_2^2 \le 0, \\ g_3(x_1,x_2) &= x_1 + x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язок:

Умова Слейтера виконується. Тому запишемо регулярну функцію Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(-x_1 + x_2^2) + \lambda_3(-x_1 - x_2).$$

Необхідні умови екстремуму (стаціонарності, доповнюючої нежорсткості, невід'ємності) дають таку систему співвідношень для визначення стаціонарних точок:

$$\begin{array}{lll} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, & & 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 \ge 0, & x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, & \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2 \ge 0, & -x_1 + x_2^2 \le 0, & \lambda_2(-x_1 + x_2^2) = 0, \\ \lambda_3 \ge 0, & x_1 + x_2 \ge 0, & \lambda_3(x_1 + x_2) = 0. \end{array}$$

На рис. 1.2 зображені допустима множина задачі й лінії рівня цільової функції. Точка $x = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ є розв'язком системи. У цій точці перше і третє співвідношення активні: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, а друге – пасивне: $-x_1 + x_2^2 < 0$. Тому тут $\lambda_2 = 0$. У результаті одержимо таку систему для визначення λ_1 і λ_3:

$$\sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad 1 - \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0.$$

Ця система має розв'язок $\lambda_1 = \sqrt{2}/4$, $\lambda_3 = 1/2$. Точка $x = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ є розв'язком задачі. Переконайтеся в тому, що інших стаціонарних точок і, отже, розв'язків задачі немає.

Відповідь: $\hat{x} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \in abs\min$, $S_{\min} = -\sqrt{2}/2$. Δ

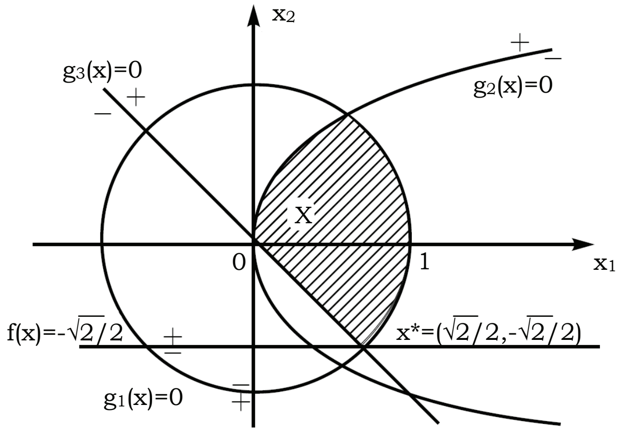

Рис. 1.2

Приклад 1.7. Нехай числа $a>0$, $b>0$, причому $a<b$. Знайти точку локального мінімуму і максимуму функції

$$f(x)=\frac{1}{2}ax_1^2+\frac{1}{2}bx_2^2$$

на множині розв'язків системи

$$x_1^3+x_2^3\le 1,\quad x_1^2+x_2^2\ge 1.$$

Позначимо цю множину через X. Випишемо функцію Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left(\frac{1}{2}ax_1^2+\frac{1}{2}bx_2^2\right)+\lambda_1\left(x_1^3+x_2^3-1\right)+\lambda_2\left(-x_1^2-x_2^2+1\right).$$

Система для визначення стаціонарних точок має вигляд:

$$a\lambda_0x_1+3\lambda_1x_1^2-2\lambda_2x_1=0,$$

$$b\lambda_0x_2+3\lambda_1x_2^2-2\lambda_2x_2=0,$$

$$\lambda_1\ge 0,\quad x_1^3+x_2^3\le 1,\quad \lambda_1\left(x_1^3+x_2^3-1\right)=0,$$

$$\lambda_2\ge 0,\quad x_1^2+x_2^2\ge 1,\quad \lambda_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)=0,$$

$$(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\ne 0.$$

Нехай $x_1=0$. Тоді із системи виходить, що $x_2\le 1, x_2^2\ge 1$. Звідси або $x_2=1$, або $x_2\le -1$. Інакше $\lambda_1=0$. Якщо при цьому $x_2<-1$, то $\lambda_2=0$. Але тоді $\lambda_1=0$, що суперечить умовам задачі. Тепер легко знаходимо перші дві групи розв'язків системи.

1) $x_1 = 0, x_2 = 1, b\lambda_0 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$;

2) $x_1 = 0, x_2 = -1, b\lambda_0 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$.

Аналогічно, вважаючи $x_2 = 0$, знаходимо ще дві групи розв'язків системи:

3) $x_1 = 1, x_2 = 0, a\lambda_0 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$;

4) $x_1 = -1, x_2 = 0, a\lambda_0 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$.

Припустимо тепер, що $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. Тоді рівняння системи можна записати так:

$$a\lambda_0 + 3\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad b\lambda_0 + 3\lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 = 0.$$

Якщо тут $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0 = 0$, оскільки $a \neq b$. Але тоді $\lambda_2 = 0$, що суперечить системі умов. Залишається припустити, що $\lambda_1 > 0$. Тоді $x_1^3 + x_2^3 = 1$. Враховуючи, що $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, одержуємо $x_1^2 + x_2^2 > 1$, і тому $\lambda_2 = 0$. Тепер одержуємо ще одну групу розв'язків системи:

5) $x_1 = a / \sqrt[3]{a^3 + b^3}, x_2 = b / \sqrt[3]{a^3 + b^3}, \lambda_0 < 0, \lambda_1 = -\lambda_0 \sqrt[3]{a^3 + b^3} / 3, \lambda_2 = 0$.

Відмітимо, що в 1) і 3) множник λ_0 може приймати як додатні, так і від'ємні значення, у 2) і 4) – тільки додатні, а у 5) – від'ємні. Тому $(0,1)$ і $(1,0)$ – стаціонарні точки як у задачі мінімізації, так і в задачі максимізації, точки $(0,-1)$ і $(-1,0)$ – лише в задачі мінімізації, а точка із 5) – лише в задачі максимізації.

Тепер проведемо дослідження стаціонарних точок на оптимальність. Функція f сильно опукла в R^2. Тому вона досягає глобального мінімуму на будь-якій замкнутій множині X. Обчислимо значення f у стаціонарних точках задачі мінімізації:

$$f(0,1) = f(0,-1) = b/2, f(1,0) = f(-1,0) = a/2.$$

Оскільки $a < b$, то звідси випливає, що $(1,0)$ і $(-1,0)$ – точки глобального мінімуму функції на X.

Зобразимо f у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2}a\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2}(b - a)x_2^2.$$

Якщо рухатимемось із точок $(0,1)$ і $(0,-1)$, залишаючись на колі $x_1^2 + x_2^2 = 1$, а значить і в X, то значення f зменшуватиметься. Отже, ці точки не є точками локального мінімуму f на X. У той же час при будь-якому $\varepsilon > 0$ точка $(-\varepsilon, 1)$ лежить в X і $f(0,1) < f(-\varepsilon,1)$. Тому точка $(0,1)$ не є точкою локального максимуму f на X. Отже, стаціонарні точки $(0,1)$ і $(0,-1)$ виявилися "сторонніми".

Розглянемо тепер матрицю других похідних функції Лагранжа:

$$L''_{xx} = \begin{bmatrix} a\lambda_0 + 6\lambda_1 x_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & b\lambda_0 + 6\lambda_1 x_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

При значеннях із 5) матриця має вигляд:

$$L''_{xx} = \begin{bmatrix} -a\lambda_0 & 0 \\ 0 & -b\lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\lambda_0 < 0$, то ця матриця додатно визначена. Тому виконуються достатні умови екстремуму і $(a / \sqrt[3]{a^3 + b^3}, b / \sqrt[3]{a^3 + b^3})$ – точка строгого локального максимуму f на X.

Відповідь: $\hat{x}_1 = (1,0) \in abs\min$, $\hat{x}_2 = (-1,0) \in abs\min$,

$\hat{x}_3 = (a/\sqrt[3]{a^3 + b^3}, b/\sqrt[3]{a^3 + b^3}) \in loc\max$. Δ

2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІЗУ

2.1. Лінійні нормовані та банахові простори

Лінійний простір X називається *нормованим*, якщо на X визначений функціонал $\|\cdot\| : X \to R$, який називається *нормою* і задовольняє аксіоми:

1) $\|x\| \ge 0$ для всіх $x \in X$ і $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\,\alpha\,|\,\|x\|$ для всіх $\alpha \in R$, $x \in X$;

3) $\|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|$ для всіх $x_1, x_2 \in X$.

Щоб підкреслити, що норма визначена в просторі X, писатимемо $\|\cdot\|_X$.

Нормований простір X є *метричним простором* з *метрикою* $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. Повний (відносно вказаної метрики) лінійний нормований простір називається *банаховим простором*. Множина X^* усіх лінійних неперервних функціоналів на X (*спряжений* з X *простір*) є банаховим простором з нормою $\|x^*\|_{X^*} = \sup\limits_{\|x\|_X \le 1} \langle x^*, x\rangle$,

де $\langle x^*, x\rangle$ – результат дії на x функціонала x^*.

Ми вивчатимемо екстремальні задачі в таких банахових просторах:

1. Простір R^n векторів $x = (x_1, \dots, x_n)$ з нормою

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |\,x_k\,|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Простір $C(K, R^n)$ неперервних вектор-функцій $x(\cdot) : K \to R^n$, які визначені на компакті K з нормою

$$\|x(\cdot)\|_0 = \|x(\cdot)\|_C = \max_{t \in K} \|x(t)\|.$$

3. Простір $C^k([t_0, t_1], R^n)$ к разів неперервно диференційовних вектор-функцій $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to R^n$, визначених на відрізку $[t_0, t_1]$ з нормою

$$\|x(\cdot)\|_k = \max\{\|x(\cdot)\|_0, \|x'(\cdot)\|_0, \dots, \|x^{(k)}(\cdot)\|_0\}.$$

4. Простір l_2 послідовностей

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

з нормою

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори. Їхній декартовий добуток $X \times Y$ (множина всіх пар (x,y), $x \in X$, $y \in Y$) буде нормованим простором, якщо визначити норму елемента $(x,y) \in X \times Y$ за формулою

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Декартовий добуток банахових просторів буде банаховим простором.

Лема 2.1. *Кожний лінійний неперервний функціонал $\Lambda \in (X \times Y)^*$ можна однозначно зобразити у вигляді*

$$\langle \Lambda, (x,y) \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle,$$

де $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$.

2.2. Теорема Хана – Банаха та її наслідки

У теорії екстремальних задач важливу роль відіграють теореми про розділення та інші результати опуклого аналізу. Більшість із них є наслідком теореми Хана – Банаха, яку часто називають *першим основним принципом лінійного аналізу.*

Нехай X – лінійний простір, $\overline{R}$ – розширена числова пряма: $\overline{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Означення 2.1. Функція $p: X \to \overline{R}$ називається *опуклою і однорідною*, якщо:

1) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ для всіх $x, y \in X$,
2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ для всіх $x \in X$, $\alpha > 0$.

Нехай A – опукла множина лінійного простору X, яка містить 0. *Функція Мінковського* $\mu A(\cdot)$ множини A визначається рівністю

$$\mu A(x) = \inf\{t > 0 : x/t \in A\}.$$

(Якщо таких t немає, то $\mu A(x) = +\infty$).

Лема 2.2. *Функція Мінковського невід'ємна, опукла й однорідна, крім того,* $\{x : \mu A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x : \mu A(x) \le 1\}$.

Якщо X – лінійний топологічний простір [КФ, с. 180], то функція $\mu A(\cdot)$ неперервна в точці 0 тоді й тільки тоді, коли $0 \in \operatorname{int} A$.

Лема 2.3. *Для того, щоб лінійний функціонал* x^* *на лінійному топологічному просторі* X *був неперервним, необхідно і достатньо, щоб для деякої опуклої однорідної неперервної в точці* 0 *функції* $p(\cdot)$ *для всіх* $x \in X$ *виконувалася нерівність* $\langle x^*, x\rangle \le p(x)$.

Теорема 2.1 (Хана – Банаха) [КФ, с. 145.]. *Нехай* $p : X \to \overline{R}$ *– опукла однорідна функція на лінійному просторі* X *і* $l : L \to R$ *– лінійний функціонал на підпросторі* L *простору* X *такий, що* $\langle l, x\rangle \le p(x)$ *для всіх* $x \in L$. *Тоді існує визначений на всьому просторі* X *лінійний функціонал* Λ, *який є продовженням* l, *тобто* $\langle \Lambda, x\rangle = \langle l, x\rangle$, $x \in L$, *і задовольняє нерівність*

$$\langle \Lambda, x\rangle \le p(x) \quad \forall \quad x \in X.$$

Наслідок 2.1. Нехай X – нормований простір і $x_0 \in X$, $x_0 \ne 0$. Тоді існує лінійний функціонал $\Lambda \in X^*$ такий, що $\|\Lambda\| = 1$, $\langle \Lambda, x_0\rangle = \|x_0\|$.

Наслідок 2.2. Якщо нормований простір X нетривіальний ($X \ne \{0\}$), то і спряжений простір X^* нетривіальний.

2.3. Теореми про розділення

Нехай X – лінійний топологічний простір, X^* – спряжений до X простір. Функціонал $x^* \in X^*$ *розділяє* множини $A \subset X$ та $B \subset X$, якщо

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle \le \inf_{x \in B} \langle x^*, x\rangle,$$

і *строго розділяє* A та B, якщо

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle < \inf_{x \in B} \langle x^*, x\rangle.$$

Перша нерівність означає, що *гіперплощина* $H(x^*, c) = \{x : \langle x^*, x\rangle = c\}$, де

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle \le c \le \inf_{x \in B} \langle x^*, x\rangle$$

розділяє множини A та B. Множина A лежить у півпросторі $H_+(x^*,c)=\{x : \langle x^*,x\rangle \le c\}$, а множина B – у півпросторі $H_-(x^*,c)=\{x : \langle x^*,x\rangle \ge c\}$. Друга нерівність означає, що можна вибрати таке c, щоб A та B належали півпросторам і не мали спільних точок з гіперплощиною $H(x^*,c)$.

Теорема 2.2 (перша теорема про розділення) [АТФ, с. 124.]. *Якщо множини $A \subset X$, $B \subset X$ опуклі, непорожні та не перетинаються, множина A відкрита, то існує ненульовий лінійний неперервний функціонал, який розділяє A та B.*

Доведення. Оскільки A, B непорожні, то існують точки $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Множина $C=(A-a_0)-(B-b_0)=\{x : x=a-a_0-b+b_0, a\in A, b\in B\}$ опукла, містить 0 і відкрита. Дійсно, якщо $\hat{x}=\hat{a}-a_0-\hat{b}+b_0$ і $\hat{a}\in A$, то існує окіл U точки $\hat{a} : \hat{a}\in U\subset A$. Тоді $\hat{x}\in U-a_0-\hat{b}+b_0\subset C$. Крім того, $c=b_0-a_0\notin C$. Якщо це не так, то існують $\hat{a}\in A$, $\hat{b}\in B$ такі, що $b_0-a_0=\hat{a}-a_0+b_0-\hat{b}$, тоді $\hat{a}=\hat{b}\in A\cap B$. Але множини A, B не перетинаються.

Позначимо через $p(x)$ функцію Мінковського множини C. Така функція невід'ємна, опукла і неперервна в точці 0. Крім того, $p(x)\le 1$ для всіх $x\in C$. На підпросторі $L=\{x : x=\alpha c=\alpha(b_0-a_0), \alpha\in R\}$ визначимо лінійний функціонал l за формулою $\langle l,\alpha c\rangle=\alpha p(c)$. Якщо $\alpha>0$, то $\langle l,\alpha c\rangle=\alpha p(c)=p(\alpha c)$, а коли $\alpha<0$, то $\langle l,\alpha c\rangle=\alpha p(c)\le 0\le p(\alpha c)$, оскільки $p(\cdot)$ невід'ємна. Отже, для всіх $x\in L$ справджується нерівність $\langle l,x\rangle\le p(x)$ і за теоремою Хана – Банаха l можна продовжити до лінійного функціонала Λ на X такого, що $\langle \Lambda,\alpha c\rangle=\langle l,\alpha c\rangle=\alpha p(c)$, $\alpha\in R$; $\langle \Lambda,x\rangle\le p(x)$, $x\in X$. Функція $p(\cdot)$ неперервна в точці 0 і тому функціонал Λ неперервний. Для будь-яких $a\in A$, $b\in B$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}\langle \Lambda,a-b\rangle &= \langle \Lambda,a-a_0-b+b_0\rangle+\langle \Lambda,a_0-b_0\rangle \\ &\le p(a-a_0-b+b_0)+\langle l,a_0-b_0\rangle\le 1-p(b_0-a_0),\end{aligned}$$

оскільки $a-a_0-b+b_0\in C$, а на C функція $p(x)\le 1$. Але при $0<t\le 1$ точка $(b_0-a_0)/t=c/t$ не може належати множині C через те, що множина C опукла і містить 0, а на відрізку $[0,c/t]$ лежить точка $c=b_0-a_0\notin C$. Тому

$$p(b_0-a_0)=\inf\{t : t>0, (b_0-a_0)/t\in C\}\ge 1.$$

Отже,

$$\langle \Lambda, a-b \rangle \le 1 - p(b_0 - a_0) \le 0$$

для будь-яких $a \in A$, $b \in B$. У нерівності $\langle \Lambda, a \rangle \le \langle \Lambda, b \rangle$ елементи $a \in A$, $b \in B$ можна вибирати незалежно, тому

$$\sup_{a \in A} \langle \Lambda, a \rangle \le \inf_{b \in B} \langle \Lambda, b \rangle.$$

Крім того,

$$\langle \Lambda, b_0 - a_0 \rangle = p(b_0 - a_0) \ge 1,$$

тому $\Lambda \ne 0$.

Отже, Λ розділяє множини A та B. □

Теорема 2.3 (друга теорема про розділення) [АТФ, с. 126.]. *Нехай* X *– локально опуклий лінійний топологічний простір* [КФ, с. 183.] A *– непорожня замкнута опукла множина в* X, $\hat{x} \notin A$. *Тоді існує ненульовий лінійний неперервний функціонал, який строго розділяє* A *та* $\hat{x}$.

Доведення. Оскільки $\hat{x} \notin A$ і A – замкнута множина, то існує окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$ такий, що $A \cap O_{\hat{x}} = \varnothing$. Простір X локально опуклий, тому існує опуклий окіл $B \subset O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$. Оскільки $B \cap A = \varnothing$, то за першою теоремою про розділення існує ненульовий функціонал x^*, який розділяє A і B:

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle \le \inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle.$$

Але $\inf_{x \in B} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle$, оскільки нижня грань ненульового лінійного функціонала x^* не може досягатися у внутрішній точці $\hat{x}$ множини B. □

Означення 2.2. *Анулятором* $A^{\perp}$ множини A лінійного простору X називається множина лінійних функціоналів l на X таких, що $\langle l, x \rangle = 0$, $x \in A$.

Зауважимо, що $A^{\perp}$ завжди містить $0 \in X^*$.

Лема 2.4 (про нетривіальність анулятора) [КФ, с. 194.]. *Нехай* L *– замкнутий підпростір локально опуклого топологічного простору* X, *причому* $L \ne X$. *Тоді анулятор* $L^{\perp}$ *містить ненульовий елемент* $x^* \in X^*$.

Доведення. Нехай $\hat{x} \notin L$. Згідно з другою теоремою про розділення існує ненульовий функціонал $x^* \in X^*$, який строго розділяє $\hat{x}$ і L:

$$\sup_{x \in L} \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, \hat{x} \rangle.$$

Покажемо, що $\langle x^*, x\rangle = 0$ для всіх $x \in L$. Нехай це не так. Тоді існує $x_0 \in L$ таке, що $\langle x^*, x_0\rangle \neq 0$. Але $\alpha x_0 \in L$ для будь-якого $\alpha \in R$ і

$$\sup_{x \in L}\langle x^*, x\rangle \geq \sup_{\alpha \in R}\langle x^*, \alpha x_0\rangle = +\infty.$$

А це суперечить тому, що x^* розділяє $\hat{x}$ та L. Отже, $x^* \in L^{\perp}$. □

2.4. Теорема Банаха про обернений оператор

Теорема 2.4 (Теорема Банаха про обернений оператор) [КФ, с. 241.]. *Нехай* X, Y *– банахові простори,* Λ *– неперервний лінійний оператор з* X *в* Y. *Якщо* Λ *– мономорфізм, тобто* $\mathrm{Ker}\Lambda = \{x : \Lambda x = 0\} = \{0\}$, *і епіморфізм, тобто* $\mathrm{Im}\Lambda = \{y : y = \Lambda x, x \in X\} = Y$, *то* Λ *– ізоморфізм між* X *та* Y, *тобто існує лінійний неперервний оператор* $M = \Lambda^{-1} : Y \to X$ *такий, що* $M\Lambda = I_X$, $\Lambda M = I_Y$.

Лема 2.5 (про обернене справа відображення) [АТФ, с. 128.]. *Нехай* X, Y *– банахові простори,* Λ *– лінійний неперервний оператор з* X *в* Y , Λ *– епіморфізм. Тоді існує відображення* $M : Y \to X$ (*може бути розривним і нелінійним*) *таке, що* $\Lambda \circ M = I_Y$, $\|M(y)\| \leq C\|y\|$ *для деякого* $C > 0$.

Лема 2.6 (про замкнутість образів) [АТФ, с. 129.]. *Нехай* Y, Z *– банахові простори* $A : X \to Y$, $B : X \to Z$ *– лінійні неперервні оператори* $C : X \to Y \times Z$ *– лінійний неперервний оператор, який визначається рівністю* $Cx = (Ax, Bx)$. *Якщо підпростір* $\mathrm{Im}A$ *замкнутий в* Y , *а підпростір* $B\mathrm{Ker}A$ *замкнутий в* Z , *то підпростір* $\mathrm{Im}C$ *замкнутий в* $Y \times Z$.

Лема 2.7 (про анулятор ядра регулярного оператора) [АТФ, с. 130.]. *Нехай* X, Y *– банахові простори,* $A : X \to Y$ *– лінійний неперервний епіморфізм. Тоді* $(\mathrm{Ker}A)^{\perp} = \mathrm{Im}A^*$.

Оператор називається *регулярним*, якщо він лінійний неперервний епіморфізм.

3. ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

3.1. Похідні за напрямком, перша варіація, похідні Гато, Фреше, строга диференційовність

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, U – окіл точки x в X, F – відображення $U \to Y$.

Означення 3.1. Границя

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(x+\lambda h) - F(x)}{\lambda} = F'(x,h) \tag{3.1}$$

(якщо вона існує) називається *похідною відображення F у точці x за напрямком h.*

Означення 3.2. Відображення $h \to \delta F(x,h)$ називається *першою варіацією Лагранжа відображення F* у точці x, якщо для будь-якого $h \in X$ існує границя

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(x+\lambda h) - F(x)}{\lambda} = \delta F(x,h). \tag{3.2}$$

Означення 3.3. Якщо відображення F має в точці x першу варіацію Лагранжа і існує лінійний неперервний оператор $\Lambda \in L(X,Y)$ такий, що $\delta F(x,h) = \Lambda h$, то оператор Λ називається *похідною Гато* (*слабкою похідною*) відображення F у точці x і позначається $F_{\Gamma}'(x)$.

Означення 3.4. Відображення F називається *диференційовним за Фреше* в точці x (пишуть $F \in D(x)$), якщо в околі точки x можна записати співвідношення

$$F(x+h) = F(x) + \Lambda h + \alpha(h)\|h\|, \tag{3.3}$$

де $\Lambda \in L(X,Y)$ і

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|\alpha(h)\| = 0. \tag{3.4}$$

Оператор Λ називається *похідною Фреше* (*сильною похідною*) відображення F у точці x і позначається $F'(x)$.

Співвідношення (3.3), (3.4) можна записати у вигляді

$$F(x+h) = F(x) + \Lambda h + o(\|h\|). \tag{3.5}$$

Отже, відображення F має похідну Фреше в точці x, якщо існує лінійний неперервний оператор $\Lambda \in L(X,Y)$ такий, що для будь-якого

$\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, при якому для всіх h, таких що $\|h\| < \delta$, виконується нерівність

$$\|F(x+h) - F(x) - \Lambda h\| \le \varepsilon \|h\|. \qquad (3.6)$$

Означення 3.5. Відображення F називається *строго диференційовним* у точці x (пишуть $F \in SD(x)$), якщо існує лінійний неперервний оператор $\Lambda \in L(X,Y)$ такий, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, при якому для всіх $x_1, x_2 : \|x_1 - x\| < \delta$, $\|x_2 - x\| < \delta$ виконується нерівність

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\| \le \varepsilon \|x_1 - x_2\|. \qquad (3.7)$$

Оператор Λ називається *строгою похідною* відображення F у точці x.

Якщо в (3.7) покладемо $x_1 = x + h$, $x_2 = x$, то одержимо (3.6). Тому строго диференційовна функція диференційовна за Фреше і $\Lambda = F'(x)$.

Похідна $F'(x)$ (Гато, Фреше чи строга) за визначенням є лінійний неперервний оператор, що діє із простору X у простір Y. Результат дії цього оператора на елемент $h \in X$ називається *диференціалом* (Гато, Фреше чи строгим) відображення F у точці x і позначається $F'(x)[h]$.

Теорема 3.1. *Якщо відображення F сильно диференційовне в точці x, то F неперервне в цій точці. Якщо відображення F строго диференційовне в точці x, то F неперервне в околі точки x.*

Теорема 3.2. *Між означеннями 3.1–3.5 діють такі співвідношення*: $3.5 \Rightarrow 3.4 \Rightarrow 3.3 \Rightarrow 3.2 \Rightarrow 3.1$. *Жодне із цих співвідношень не може бути обернене.*

Справедливість указаних співвідношень випливає з означень. Наведемо декілька прикладів, що ілюструють взаємозв'язок означень.

1. Нехай $f_1 : R \to R$,

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \ne 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функція неперервна в точці $x = 0$, але не має похідної за напрямком.

2. Нехай $f_2 : R \to R$ $f_2(x) = |x|$. Ця функція має похідні за напрямками в точці $x = 0$, але похідні зліва і справа різні. Тому перша варіація в точці $x = 0$ не існує. Функція f_2 неперервна, але не диференційовна.

3. Нехай функція $f_3 : R^2 \to R$ визначається в полярних координатах за формулою $f_3(x) = r\cos(3\varphi)$, $x = (x_1, x_2) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Така функція в точці $(0,0)$ має першу варіацію Лагранжа, але не диференційовна за Гато, оскільки перша варіація нелінійна.

4. Нехай $f_4 : R^2 \to R$,

$$f_4(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1^2 = x_2 > 0; \\ 0, & \text{в інших точках.} \end{cases}$$

Ця функція диференційовна за Гато в точці $(0,0)$, але має розрив у цій точці й не диференційовна за Фреше.

5. Нехай $$f_5(x) = \begin{cases} x,^2 & x - \textit{раціональне}, \\ 0 & x - \textit{ірраціональне}. \end{cases}$$

У точці $x = 0$ така функція диференційовна за Фреше, але не є строго диференційовною.

Теорема 3.3. *Нехай X, Y, Z – лінійні нормовані простори U – окіл точки x у просторі X. Якщо відображення $F_i : U \to Y$, $i = 1,2$ і відображення $A : U \to L(Y,Z)$ диференційовні відповідно до одного з означень 1–5 (однаковим для всіх трьох відображень), то для будь-яких $a, b \in R$ відображення $F = aF_1 + bF_2$, $\Phi = AF_i$, $i = 1,2$ відповідно диференційовні в точці x і*

$$F'(x) = aF'_1(x) + bF'_2(x),$$

або

$$F'(x,h) = aF'_1(x,h) + bF'_2(x,h),$$

та

$$\Phi'(x,h) = A'(x,h)F_i(x) + A(x)F'_i(x,h).$$

Теорема 3.4 (про суперпозицію). *Нехай X, Y, Z – лінійні нормовані простори, U – окіл точки x у просторі X, V – окіл точки y у просторі Y, відображення $\Phi : U \to V, \Phi(x) = y$; $\Psi : V \to Z, \Psi(y) = z$; $F = \Psi \circ \Phi : U \to Z$, $F(x) = \Psi(\Phi(x))$ – суперпозиція відображень Φ та Ψ. Якщо відображення Ψ у точці $y = \Phi(x)$ диференційовне за Фреше і відображення Φ у точці x диференційовне за Фреше (диференційовне за Гато, має першу варіацію, похідну за напрямком h), то відображення F у точці x диференційовне за Фреше (диференційовне за Гато, має першу варіацію, похідну за напрямком h). Похідна*

$F'(x) = \Psi'(y) \circ \Phi'(x)$ *або* $F'(x,h) = \Psi'(y)[\Phi'(x,h)]$. *Якщо відображення* Ψ *строго диференційовне в точці* y, *а відображення* Φ *строго диференційовне в точці* x, *то і відображення* F *строго диференційовне в точці* x.

Доведення. Нехай відображення Φ має похідну за напрямком. За означенням існує границя

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x)}{\lambda} = \Phi'(x,h).$$

Згідно з означенням похідної Фреше

$$\Psi(y + v) = \Psi(y) + \Psi'(y)v + \alpha(v)\|v\|,$$

де

$$\lim_{\|v\| \to 0} \|\alpha(v)\| = 0.$$

Обчислимо

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(x + \lambda h) - F(x)}{\lambda} \\
= \;&\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Psi(\Phi(x + \lambda h)) - \Psi(\Phi(x))}{\lambda} \\
= \;&\lim_{\lambda \downarrow 0} [\frac{\Psi'(y)[\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x)]}{\lambda} \\
+ \;&\frac{\alpha(\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x))\|\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x)\|}{\lambda}] \\
= \;&\Psi'(y)[\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x)}{\lambda}] \\
+ \;&\lim_{\lambda \downarrow 0} \alpha(\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x)) \left\| \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x)}{\lambda} \right\| \\
= \;&\Psi'(y)[\Phi'(x,h)] + \lim_{\lambda \downarrow 0} \alpha(\Phi(x + \lambda h) - \Phi(x))\|\Phi'(x,h)\| \\
= \;&\Psi'(y)[\Phi'(x,h)].
\end{aligned}$$

Отже, $F'(x,h) = \Psi'(y)[\Phi'(x,h)]$. □

Покажемо, що теорема про суперпозицію невірна, якщо відображення Ψ диференційовне лише за Гато.

Приклад 3.1. Нехай $X = Y = R^2$, $Z = R$,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = (x_1^2, x_2),$$

$$\psi(y) = \psi(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & y_2^2 = y_1, y_2 > 0, \\ 0, & \text{в інших точках.} \end{cases}$$

Відображення φ диференційовне за Фреше в точці $(0,0)$, а відображення ψ диференційовне за Гато в точці $(0,0)$. Проте функція

$$f(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(x_1^2, x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 = |x_1|, x_2 > 0, \\ 0, & \text{в інших точках.} \end{cases}$$

не диференційовна за Гато в точці $(0,0)$ і навіть не має похідних за напрямками $h_1 = (1,1)$, $h_2 = (-1,1)$.

Добре відомо, що для числових функцій однієї змінної справедлива теорема Лагранжа, яку ще називають теоремою про середнє значення.

Теорема 3.5 (Лагранжа). *Якщо функція* $f:[a,b] \to R$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і диференційовна на інтервалі* (a,b), *то існує точка* $c \in (a,b)$ *така, що* $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Цю формулу називають *формулою скінченних приростів*. Вона буде вірна і для числових функцій, аргументи яких належать топологічному векторному простору. Якщо функція $f(x)$ диференційовна за Гато, відрізок $[a,b]$ й інтервал (a,b) визначені формулами $[a,b] = \{x : x = a + t(b-a),\ 0 \le t \le 1\}$, $(a,b) = \{x : x = a + t(b-a),\ 0 < t < 1\}$, то функція $\Phi(t) = f(a + t(b-a)), t \in R$ задовольняє умови теореми Лагранжа на відрізку $[0,1]$. Формула скінченних приростів для функції $\Phi(t)$ на відрізку $[0,1]$ визначає відповідну формулу для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Для векторнозначних функцій формула скінченних приростів невірна.

Приклад 3.2. Нехай відображення $f:R \to R^2$ визначається рівністю $f(t) = (\sin(t), -\cos(t))$. Тоді для будь-якого t існує похідна Фреше і $f'(t)[h] = (h\cos(t), h\sin(t))$. У той же час для будь-якого $c \in [0, 2\pi]$ маємо $0 = f(2\pi) - f(0) \ne f'(c)[2\pi - 0] = (2\pi\cos(c), 2\pi\sin(c))$.

Можна, проте, відмітити, що сама формула скінченних приростів використовується в математичному аналізі не так часто, як оцінка

$$|f(b) - f(a)| \le M\,|b-a|, \quad M = \sup_{c \in [a,b]} |f'(c)|,$$

яка є наслідком формули скінченних приростів. Таку оцінку можна встановити для довільних нормованих просторів.

Теорема 3.6 (Лагранжа). *Нехай X, Y – лінійні нормовані простори і відкрита множина $U \subset X$ містить відрізок $[a,b]$. Якщо відображення $F : U \to Y$ диференційовне за Гато в кожній точці $x \in [a,b]$, то*

$$\|F(b) - F(a)\| \le \sup_{c \in [a,b]} \|F'(c)\| \cdot \|b - a\|.$$

Доведення. Візьмемо довільний функціонал $y^* \in Y^*$ і розглянемо числову функцію $f(t) = \langle y^*, F(a + t(b-a))\rangle$, визначену на відрізку $[0,1]$. Ця функція диференційовна в кожній точці $t \in [0,1]$. Дійсно, у виразі

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \left\langle y^*, \frac{F(a + t(b-a) + \Delta t(b-a)) - F(a + t(b-a))}{\Delta t} \right\rangle$$

можна перейти до границі при $\Delta t \to 0$ під знаком лінійного неперервного функціонала y^* і одержати

$$f'(t) = \langle y^*, F'(a + t(b-a))[b-a]\rangle.$$

Застосуємо до функції $f(t)$ на відрізку $[0,1]$ формулу скінченних приростів. За теоремою Лагранжа існує таке $\theta \in (0,1)$, що $f(1) - f(0) = f'(\theta)$ або

$$\langle y^*, F(b) - F(a)\rangle = \langle y^*, F'(a + \theta(b-a))[b-a]\rangle.$$

Відповідно до наслідку 2.1 з теореми Хана – Банаха для будь-якого елемента $y \in Y$ існує лінійний неперервний функціонал $y^* \in Y^*$ такий, що $\|y^*\| = 1$ і $\langle y^*, y\rangle = \|y\|$. Виберемо такий функціонал y^* для елемента $y = F(b) - F(a)$. Тоді

$$\begin{aligned} \|F(b) - F(a)\| &= \langle y^*, F(b) - F(a)\rangle \\ &= \langle y^*, F'(a + \theta(b-a))[b-a]\rangle \\ &\le \|y^*\| \cdot \|F'(a + \theta(b-a))[b-a]\| \\ &\le \sup_{c \in [a,b]} \|F'(c)\| \cdot \|b-a\|. \end{aligned}$$

Отже, теорему доведено. □

Наслідок 3.1. Нехай виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді для будь-якого лінійного неперервного оператора $\Lambda \in L(X,Y)$ виконується нерівність

$$\|F(b) - F(a) - \Lambda(b-a)\| \le \sup_{c \in [a,b]} \|F'(c) - \Lambda\| \cdot \|b-a\|.$$

Доведення. Щоб переконатися у справедливості нерівності, досить застосувати теорему про середнє до відображення $G(x) = F(x) - \Lambda x$. □

Наслідок 3.2. Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, U – окіл точки $\hat{x} \in X$, відображення $F : U \to Y$ диференційовне за Гато в кожній точці $x \in U$. Якщо відображення $x \to F'_\Gamma(x)$ неперервне в рівномірній операторній топології простору $L(X,Y)$ в точці $\hat{x}$, то відображення F строго диференційовне в точці $\hat{x}$ (отже, диференційовне за Фреше в цій точці).

Доведення. Унаслідок неперервності $F'_\Gamma(x)$ у точці $\hat{x}$ для заданого ε існує таке δ, що $\left\| F'_\Gamma(x) - F'_\Gamma(\hat{x}) \right\| < \varepsilon$ для всіх $x \in U$, які задовольняють нерівність $\|x - \hat{x}\| < \delta$. Якщо $\|x_1 - \hat{x}\| < \delta$ і $\|x_2 - \hat{x}\| < \delta$, то для будь-якого $x \in [x_1, x_2]$, $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $0 \le t \le 1$ виконується нерівність

$$\|x - \hat{x}\| = \|x_1 + t(x_2 - x_1) - \hat{x}\| < \delta.$$

Тому $\left\| F'_\Gamma(x) - F'_\Gamma(\hat{x}) \right\| < \varepsilon$ для всіх $x \in [x_1, x_2]$. Застосуємо тепер наслідок 3.1 при $\Lambda = F'_\Gamma(\hat{x})$. Одержимо

$$\left\| F(x_1) - F(x_2) - F'_\Gamma(\hat{x})(x_1 - x_2) \right\|$$
$$\le \sup_{x \in [x_1, x_2]} \left\| F'_\Gamma(x) - F'_\Gamma(\hat{x}) \right\| \cdot \|x_1 - x_2\| < \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Це означає строгу диференційовність F у точці $\hat{x}$. □

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори $F : U \to Y$ – відображення, що визначено на деякій відкритій множині $U \subset X$. Відображення F належить класу $C^1(U)$, якщо в кожній точці $x \in U$ воно має похідну і відображення $x \to F'(x)$ неперервне (у рівномірній операторній топології).

Зауваження. Наслідок 3.2 показує, що в просторі $C^1(U)$ всі похідні збігаються. Цим користуються при перевірці диференційовності конкретних функціоналів. Доводять спочатку, що існує похідна Гато. Потім показують, що вона неперервна. А це гарантує строгу диференційовність та існування похідної Фреше.

Означення похідної й диференціала були дані для відображення F, яке діє з одного лінійного нормованого простору X в інший лінійний

ний нормований простір Y. Похідна $F'(x)$ такого відображення при кожному x – це лінійний неперервний оператор із простору X у простір Y, тобто $F'(x) \in L(X,Y)$. Якщо $Y = R$ – числова пряма, то $F: X \to R$ – це функціонал, а похідна $F'(x)$ – лінійний неперервний функціонал на X. Отже, $F'(x) \in X^*$ при кожному $x \in X$.

Приклад 3.3. Нехай X – дійсний гільбертів простір. Розглянемо функціонал $F(x) = \|x\|^2$. Для такого функціонала

$$F(x+h) - F(x) = \|x+h\|^2 - \|x\|^2 = (2x,h) + \|h\|^2 .$$

Величина $(2x,h)$ є головною лінійною (по h) частиною приросту функціонала $F(x) = \|x\|^2$ у точці x. Тому $F'(x) = 2x$, $dF(x,h) = F'(x)h = (2x,h)$. Δ

Якщо простір $X = R$, то відображення $F: R \to Y$ називається *абстрактною функцією*. Похідна $F'(x)$ абстрактної функції – це елемент простору Y – *дотичний вектор* до кривої $F(x)$. Похідні Гато і Фреше абстрактних функцій збігаються.

3.2. Частинні похідні. Теорема про повний диференціал

Нехай X, Y, Z – лінійні нормовані простори, U – окіл точки $(\hat{x},\hat{y})$ в $X \times Y$, відображення $F: U \to Z$ і відображення $x \to F(x,\hat{y})$ диференційовні в точці $\hat{x}$ (за Гато, Фреше або строго).

Означення 3.6. *Частинною похідною* по x відображення F у точці $(\hat{x},\hat{y})$ (позначається $F_x(\hat{x},\hat{y})$ або $\frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})$) називається похідна відображення $x \to F(x,\hat{y})$ у точці $\hat{x}$.

Аналогічно визначається похідна по y:

$$F_y(\hat{x},\hat{y}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}).$$

Теорема 3.7 (про повний диференціал). *Нехай X, Y, Z – лінійні нормовані простори, U – окіл в $X \times Y$, відображення $F: U \to Z$ має в кожній точці $(x,y) \in U$ частинні похідні $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$ за Гато. Як-*

що відображення $(x,y)\to F_x(x,y)$, $(x,y)\to F_y(x,y)$ *неперервні в точці* $(\hat{x},\hat{y})\in U$ *у рівномірній операторній топології, то* F *строго диференційовне в цій точці і*

$$F'(\hat{x},\hat{y})[u,v]=F_x(\hat{x},\hat{y})u+F_y(\hat{x},\hat{y})v.$$

Доведення. Унаслідок неперервності відображень $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$ у точці $(\hat{x},\hat{y})$ для будь-якого $\varepsilon>0$ можна підібрати таке $\delta>0$, що окіл $V=B(\hat{x},\delta)\times B(\hat{y},\delta)=\{(x,y):\|x-\hat{x}\|<\delta,\|y-\hat{y}\|<\delta\}$ точки $(\hat{x},\hat{y})$ міститься в U і для кожної точки $(x,y)\in V$ виконуються нерівності

$$\|F_x(x,y)-F_x(\hat{x},\hat{y})\|<\varepsilon,\quad \|F_y(x,y)-F_y(\hat{x},\hat{y})\|<\varepsilon.$$

Нехай

$$\begin{aligned}\Delta &= F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)-F_x(\hat{x},\hat{y})[x_1-x_2]-F_y(\hat{x},\hat{y})[y_1-y_2]\\ &= F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)-F_x(\hat{x},\hat{y})[x_1-x_2]\\ &+F(x_2,y_1)-F(x_2,y_2)-F_y(\hat{x},\hat{y})[y_1-y_2].\end{aligned}$$

Якщо точки (x_1,y_1), (x_2,y_2) лежать в околі V, то і точка (x_2,y_1) лежить в околі V і відрізки $[(x_1,y_1),(x_2,y_1)]$, $[(x_2,y_1),(x_2,y_2)]$ лежать у V. Тому відображення $x\to F(x,y_1)$, $y\to F(x_2,y)$ диференційовні за Гато. Перше з них має похідну F_x на $[x_1,x_2]$, а друге має похідну F_y на $[y_1,y_2]$. Із наслідку 3.2 з теореми про середнє випливає

$$\begin{aligned}\|\Delta\| &\le \sup_{x\in[x_1,x_2]}\|F_x(x,y_1)-F_x(\hat{x},\hat{y})\|\cdot\|x_1-x_2\|\\ &+\sup_{y\in[y_1,y_2]}\|F_y(x_2,y)-F_y(\hat{x},\hat{y})\|\cdot\|y_1-y_2\|\\ &\le \varepsilon\|x_1-x_2\|+\varepsilon\|y_1-y_2\|\end{aligned}$$

для будь-яких $(x_1,y_1)\in V$, $(x_2,y_2)\in V$. А це означає, що відображення F строго диференційовне. □

Наслідок 3.3. Для того щоб $F\in C^1(U)$, необхідно і достатньо, щоб в області U частинні похідні F_x, F_y були неперервними.

3.3. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, F – диференційовне за Фреше відображення із простору X у простір Y. За означенням похідна $F'(x)$ для кожного x є елементом простору $L(X,Y)$ лінійних неперервних операторів з X в Y. Простір $L(X,Y)$ – нормований. Тому F' відображає лінійний нормований простір X у лінійний нормований простір $L(X,Y)$. Якщо це відображення диференційовне, то його похідна називається *другою похідною відображення* F і позначається $F''(x)$. Друга похідна $F''(x)$ є елементом простору $L(X,L(X,Y))$ лінійних неперервних операторів із простору X у простір $L(X,Y)$. Елементи такого простору допускають більш природну і зручнішу інтерпретацію як білінійні відображення.

Ми кажемо, що задано *білінійне відображення* простору X в простір Y, якщо кожній впорядкованій парі елементів (x_1, x_2) із простору X відповідає елемент $y = B(x_1, x_2)$ простору Y так, що виконуються умови:

1) для будь-яких x_1, x_2, x_3, x_4 із простору X і будь-яких чисел a, b виконується рівність

$$B(ax_1 + bx_3, x_2) = aB(x_1, x_2) + bB(x_3, x_2),$$
$$B(x_1, ax_2 + bx_4) = aB(x_1, x_2) + bB(x_1, x_4);$$

2) існує число $M > 0$ таке, що при всіх $x_1, x_2 \in X$

$$\|B(x_1, x_2)\| \le M\|x_1\|\|x_2\|.$$

Перша з умов означає, що відображення B лінійне по кожному із двох своїх аргументів. Друга умова рівносильно неперервності B по сукупності аргументів. Найменше із чисел M у нерівності називається *нормою білінійного відображення* B і позначається $\|B\|$. Лінійні операції над білінійними відображеннями визначаються звичайним чином і мають звичні властивості. Білінійні відображення простору X у простір Y самі утворюють лінійний нормований простір, який позначається $B(X^2,Y)$. Якщо простір Y повний, то і простір $B(X^2,Y)$ повний.

Кожному елементу A із простору $L(X,L(X,Y))$ відповідає елемент B із простору $B(X^2,Y)$ за правилом $B(x_1, x_2) = (Ax_1)(x_2)$. Ця відповідність ізометрична і відображає простір $L(X, L(X,Y))$ на весь простір $B(X^2, Y)$. Дійсно, якщо $y = B(x_1, x_2) = (Ax_1)(x_2)$, то

$$\|y\| \le \|Ax_1\| \|x_2\| \le \|A\| \cdot \|x_1\| \|x_2\|.$$

Звідси $\|B\| \le \|A\|$.

З іншого боку, якщо задано білінійне відображення B, то при фіксованому $x_1 \in X$ відображення $x_2 \to B(x_1, x_2) = (Ax_1)(x_2)$ є лінійне відображення простору X у простір Y. Таким чином, кожному $x_1 \in X$ відповідає елемент Ax_1 простору $L(X,Y)$. Отже, білінійне відображення B визначає елемент A простору $L(X, L(X,Y))$ і

$$\|Ax_1\| = \sup_{\|x_2\| \le 1} \|(Ax_1)(x_2)\| = \sup_{\|x_2\| \le 1} \|B(x_1, x_2)\| \le \|B\| \cdot \|x_1\|.$$

Звідси $\|A\| \le \|B\|$. Отже, $\|A\| = \|B\|$.

Таким чином, відповідність між $B(X^2, Y)$ і $L(X, L(X,Y))$, яка визначається рівністю $B(x_1, x_2) = (Ax_1)(x_2)$, лінійна та ізометрична, а тому взаємно однозначна. Друга похідна $F''(x)$ є елементом простору $L(X, L(X,Y))$. Відповідно до сказаного можна вважати $F''(x)$ елементом простору $B(X^2, Y)$.

Приклад 3.4. Нехай $X = R^n$, $Y = R$. Лінійне відображення з R^n в R можна задавати n-вимірним вектором. Похідна Фреше $F'(x)$ відображення $F : R^n \to R$ – це вектор частинних похідних у точці x:

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

Друга похідна $F''(x)$ визначається величинами $a_{kj} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j}$. Матрицю $F''(x) = \{a_{kj}\}_{j=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}}$ можна розглядати як лінійне відображення простору X у простір $L(X,Y)$, яке визначається формулою

$$b_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j, \quad k = \overline{1,n},$$

або як білінійне відображення простору X в Y, що визначається формулою

$$y = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_k^{(1)} x_j^{(2)}; \quad x^{(1)}, x^{(2)} \in X.$$

За індукцією можна ввести поняття третьої, четвертої і, взагалі, n-ї похідної відображення F, яке діє з X в Y, визначивши похідну n-го порядку як похідну від похідної $(n-1)$-го порядку. Похідна n-го порядку є елемент простору $L(X, L(X, \dots, L(X, Y))\dots)$. Кожному елементу цього простору відповідає елемент простору $N(X^n, Y)$ n-лінійних відображень простору X у простір Y. Під *n-лінійним відображенням* розуміють відображення впорядкованої системи елементів $x_1, x_2, \dots, x_n$ простору X у простір Y, яке лінійне по кожному x_k, $k = \overline{1, n}$ і задовольняє нерівності $\|N(x_1, \dots, x_n)\| \le M\|x_1\| \dots \|x_n\|$. Отже, n-у похідну відображення F можна вважати елементом простору $N(X^n, Y)$.

Диференціал відображення F – це результат дії лінійного оператора $F'(x)$ на елемент h простору X :$dF(x, h) = F'(x)[h]$. Диференціал другого порядку $d^2F(x, h) = F''(x)[h, h]$ є квадратичний вираз, який відповідає відображенню $F''(x) \in B(X^2, Y)$. Аналогічно, *диференціалом n-го порядку* називається

$$d^n F(x, h) = F^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n),$$

тобто той елемент простору Y, в який елемент $(h_1, \dots, h_n) \in X^n$ переводиться n-лінійним відображенням $F^{(n)}(x)$.

3.4. Інтегрування

Нехай F – абстрактна функція дійсного аргументу t зі значеннями в банаховому просторі Y. Якщо функція F задана на відрізку $[a, b]$, то можна визначити інтеграл від функції F на відрізку $[a, b]$. Цей інтеграл розуміють як границю (за нормою простору Y) інтегральних сум

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k),$$

що відповідають розбиттям $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, інтервалу $[a,b]$ за умови, що $\max\limits_k (t_{k+1} - t_k) \to 0$. Інтеграл є елементом простору Y і позначається символом

$$\int_a^b F(t)dt.$$

Міркування, аналогічні тим, які приводять для дійсних функцій дійсної змінної, показують, що інтеграл від неперервної на відрізку функції існує. Він має властивості аналогічні властивостям звичайного інтеграла Рімана. Наприклад:

1) Нехай $F(t)$ – абстрактна функція, A – фіксоване лінійне неперервне відображення простору Y у простір Z, тоді

$$\int_a^b AF(t)dt = A\int_a^b F(t)dt.$$

2) Нехай $F(t)$ має вигляд $f(t)y_0$, де $f(t)$ – числова функція, а y_0 – фіксований елемент простору Y, тоді

$$\int_a^b F(t)dt = y_0\int_a^b f(t)dt.$$

3) $\left\|\int\limits_a^b F(t)dt\right\| \le \int\limits_a^b \|F(t)\|dt.$

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, а $BC(X,Y)$ – лінійний простір усіх неперервних обмежених (лінійних і нелінійних) відображень простору X у простір Y. У просторі $BC(X,Y)$ можна ввести топологію, породжену околами нуля

$$U_{k,\varepsilon} = \{F : \sup_{\|x\| \le k} \|F(x)\| < \varepsilon\}.$$

На підпросторі $L(X,Y) \subset BC(X,Y)$ усіх лінійних неперервних відображень X в Y ця топологія збігається зі звичайною топологією в $L(X,Y)$, яка задається операторною нормою. Нехай $[a,b]$ – відрізок у просторі X, $F(x)$ – відображення цього відрізка в простір $BC(X,Y)$, яке неперервно залежний від аргументу x. Тоді можна визначити інтеграл від $F(x)$ за відрізком $[a,b]$ за формулою

$$\int_a^b F(x)dx = \int_0^1 F(a + t(b-a))(b-a)dt.$$

Тут $F(a+t(b-a))(b-a)$ при кожному $t \in [0,1]$ є елемент простору Y, який є образом елементу $(b-a)$ при відображенні $F(a+t(b-a))$. Інтеграл, що стоїть у правій частині формули, існує і є елементом простору Y.

Застосуємо визначений таким чином інтеграл до задачі відновлення відображення за його похідною. Нехай відображення F діє із простору X у простір Y і має на відрізку $[a,b]$ сильну похідну, яка неперервно залежить від x. Тоді існує інтеграл $\int_a^b F'(x)dx$.

Доведемо для відображень *формулу Ньютона – Лейбніца*

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

За означенням

$$\begin{aligned}\int_a^b F'(x)dx &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} F'(a + t_k(b-a))(t_{k+1} - t_k)(b-a) \\ &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)\Delta x_k,\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} x_k &= a + t_k(b-a), \\ \Delta x_k &= (t_{k+1} - t_k)(b-a), \\ \delta &= \max_{0\le k\le n-1}(t_{k+1} - t_k). \end{aligned}$$

Разом з тим при такому розбитті відрізка $[a,b]$

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=0}^{n-1}[F(a + t_{k+1}(b-a)) - F(a + t_k(b-a))] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1}) - F(x_k)]. \end{aligned}$$

Користуючись формулою скінченних приростів, одержимо

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)\Delta x_k] \right\| \\ &\le \|b-a\| \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\sup_{0\le\theta\le 1}\|F'(x_k + \theta\Delta x_k) - F'(x_k)\|. \end{aligned}$$

Оскільки похідна $F'(x)$ неперервна, а тому і рівномірно неперервна на відрізку $[a,b]$, права частина нерівності прямує до нуля при $\delta \to 0$. Отже, формула Ньютона – Лейбніца доведена. □

3.5. Формула Тейлора

Сильна диференційовність відображення F означає, що різницю $F(x+h) - F(x)$ можна подати у вигляді суми лінійного доданку та доданку, який має вищий від першого порядок відносно норми приросту аргументу $\|h\|$. Більш загальною є *формула Тейлора* для відображень, аналогічна формулі Тейлора для числових функцій.

Теорема 3.8 (формула Тейлора). *Нехай відображення F діє із простору X у простір Y, визначене в деякій області $U \subset X$ і має похідну порядку n, яка рівномірно неперервна в області U. Тоді справедлива формула*

$$F(x+h) = F(x) + F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)[h,h] + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)[h,\ldots,h] + \omega(x,h),$$

де $\|\omega(x,h)\| = o(\|h\|^n)$.

Доведення. Указану рівність доведемо за індукцією. При $n=1$ рівність – це означення похідної. Візьмемо довільне фіксоване n і припустимо, що рівність уже доведена для всіх відображень, що задовольняють умови теореми, в яких n замінено $n-1$. Тоді для відображення $F'(x)$ справедлива рівність

$$F'(x+h) \quad = F'(x) + F''(x)h + \frac{1}{2!}F'''(x)[h,h] + \cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)[h,\ldots,h] + \omega_1(x,h),$$

$$\|\omega_1(x,h)\| \quad = o(\|h\|^{n-1}).$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності на відрізку $[x, x+h]$ і користуючись формулою Ньютона – Лейбніца, одержимо

$$F(x+h) - F(x) \quad = \int_0^1 F'(x+th)h\,dt$$

$$= \int_0^1 [F'(x) + tF''(x)h + \frac{t^2}{2!}F'''(x)[h,h] + \cdots$$

$$+ t^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)[h,\ldots,h]]h\,dt + R_n,$$

де

$$R_n = \int_0^1 \omega_1(x,th)h\,dt.$$

Це співвідношення можна подати у вигляді

$$F(x+h)-F(x) = F'(x)h+\frac{1}{2!}F''(x)[h,h]+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)[h,\ldots,h]+R_n,$$

де

$$\|R_n\| \le \int_0^1 \|\omega_1(x,th)\|\cdot\|h\|\,dt = o(\|h\|^n).$$

Тим самим доведена формула Тейлора для відображень. □

3.6. Теорема про неявну функцію. Теорема Люстерника

Теорема 3.9 (про неявну функцію) [АТФ, с. 161.]. *Нехай X – топологічний простір, Y, Z – банахові простори, W – окіл точки (x_0,y_0) в $X\times Y$, відображення Ψ діє з W в Z :$\Psi(x_0,y_0)=z_0$. Нехай*:

1) відображення $x\to\Psi(x,y_0)$ неперервне в точці x_0;

2) існує лінійний неперервний оператор $\Lambda:Y\to Z$ такий, що для будь-якого $\varepsilon>0$ можна вказати число $\delta>0$ і окіл O_{x_0} точки x_0, для яких за умов $\|y_2-y_0\|<\delta$, $\|y_1-y_0\|<\delta$, $\forall x\in O_{x_0}$ виконується нерівність

$$\|\Psi(x,y_1)-\Psi(x,y_2)-\Lambda(y_1-y_2)\|\le\varepsilon\|y_1-y_2\|;$$

3) $\Lambda Y=Z$.

Тоді існують число $K>0$, окіл U точки (x_0,z_0) в $X\times Z$ і відображення $\Phi:U\to Y$ такі, що:

а) $\Psi(x,\Phi(x,z))=z$;

б) $\|\Phi(x,z)-y_0\|\le K\|\Psi(x,y_0)-z\|$.

Теорема 3.10 (Теорема Люстерніка). *Нехай X, Y – банахові простори, U – окіл точки $\hat{x}\in X$, відображення $F:U\to Y$. Якщо $F\in SD(\hat{x})$ і $F'(\hat{x})$ – епіморфізм, то існують окіл $V\subset U$ точки $\hat{x}$, число $K>0$ і відображення $\Phi:V\to X$ такі, що*

$$F(\hat{x}+\Phi(x))=F(\hat{x}),\quad \|\Phi(x)\|\le K\|F(x)-F(\hat{x})\|.$$

Доведення теореми базується на модифікованому методі Ньютона.

1. Будемо вважати, що $\hat{x} = 0$ і $F(\hat{x}) = 0$. Виберемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, що окіл $B(0, \varepsilon) = \{x : \|x\| < \varepsilon\} \subset U$ і виконується нерівність

$$\|F(x_1) - F(x_2) - F'(0)(x_1 - x_2)\| \le \frac{1}{2C}\|x_1 - x_2\| \qquad (3.8)$$

при $\|x_1\| < \varepsilon$, $\|x_2\| < \varepsilon$. Цього можна досягти, оскільки $F \in SD(\hat{x})$. Константа C у нерівності (3.8) визначена відповідно до леми про правий обернений оператор M до оператора $F'(0)$. Нехай $x \in V = B(0, \delta)$, де δ вибрано настільки мале, що $\|x\| + C\|F(x)\| < \varepsilon/2$ при $\|x\| < \delta$. Побудуємо послідовність ξ_n, $n \ge 0$, за правилом

$$\xi_0 = x, \quad \xi_{n+1} = \xi_n - M(F(\xi_n)), \quad n \ge 0. \qquad (3.9)$$

2. Доведемо за індукцією, що $\|\xi_n\| < \varepsilon$, $n \ge 0$. Очевидно, що $\|\xi_0\| = \|x\| < \varepsilon/2$. При $n = 1$ із (3.9) і леми про правий обернений оператор випливає така оцінка:

$$\|\xi_1 - x\| = \|MF(x)\| \le C\|F(x)\|. \qquad (3.10)$$

Звідси $\|\xi_1\| < \varepsilon$. Нехай $\|\xi_i\| < \varepsilon$ при $i = 0, 1, \ldots, k$. Доведемо, що $\|\xi_{k+1}\| < \varepsilon$. Для $i = 0, 1, \ldots, k$ із (3.9) одержимо таке співвідношення:

$$F'(0)(\xi_{i+1} - \xi_i) + F(\xi_i) = 0. \qquad (3.11)$$

Тому

$$\begin{aligned} \|\xi_{i+1} - \xi_i\| &\le C\|F(\xi_i)\| \\ &= C\|F(\xi_i) - F(\xi_{i-1}) - F'(0)(\xi_i - \xi_{i-1})\| \le \frac{1}{2}\|\xi_i - \xi_{i-1}\|. \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Із (3.10), (3.12) одержимо

$$\|\xi_{i+1} - \xi_i\| \le 2^{-i}\|\xi_1 - x\| < \varepsilon \cdot 2^{-1-i} \qquad (3.13)$$

для $i = 1, 2, \ldots, k$. Із нерівності трикутника випливає, що

$$\begin{aligned} \|\xi_{k+1}\| &= \|\xi_{k+1} - \xi_k + \xi_k - \xi_{k-1} + \cdots + \xi_2 - \xi_1 + \xi_1\| \\ &\le \|\xi_{k+1} - \xi_k\| + \|\xi_k - \xi_{k-1}\| + \cdots + \|\xi_2 - \xi_1\| + \|\xi_1\| \\ &< \varepsilon(2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-k-1}) + \varepsilon/2 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже, $\|\xi_{k+1}\| < \varepsilon$ і відповідно до принципу математичної індукції $\|\xi_n\| < \varepsilon$ для всіх n.

3. Із нерівностей (3.12), (3.13) одержимо

$$\begin{aligned}\|\xi_{n+m}-\xi_n\| &\le \|\xi_{n+1}-\xi_n\|(1+2^{-1}+\dots+2^{-m-1})\\ &\le 2\|\xi_{n+1}-\xi_n\| \le 2^{1/(n-1)}\|\xi_1-x\| \to 0, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Отже ξ_n, $n \ge 0$, – фундаментальна послідовність у банаховому просторі X. Вона має границю. Позначимо $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$. Оскільки

$$\|\xi_n - x\| \le \|\xi_1 - x\|(1+2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-n+1}) \le 2\|\xi_1 - x\|,$$

то, переходячи до границі, одержуємо

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)-x\| &\le 2\|\xi_1-x\| \le 2C\|F(x)\| \le K\|F(x)\|,\\ \|\Phi(x)\| &\le \|x\| + 2\|\xi_1 - x\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Отже, F неперервна в точці $\Psi(x)$. Тому відповідно до (3.11)

$$F(\Phi(x)) = \lim_{n\to\infty} F(\xi_n) = -\lim_{n\to\infty} F'(0)(\xi_{n+1}-\xi_n) = 0.$$

Теорему доведено. □

Нехай X – нормований простір M – підмножина X.

Означення 3.7. Елемент h називається *одностороннім дотичним вектором* до множини M у точці $\hat{x} \in M$, якщо існують число $\varepsilon > 0$ і відображення $r:[0,\varepsilon] \to X$ такі, що:

а) $\hat{x} + th + r(t) \in M$ для всіх $t \in [0,\varepsilon]$,

б) $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to +0$.

Означення 3.8. Вектор h називається *дотичним* до множини M у точці $\hat{x} \in M$, якщо h і $-h$ односторонні дотичні вектори до M у точці $\hat{x}$.

Множину всіх дотичних векторів до M у точці $\hat{x}$ позначають $T_{\hat{x}}M$. Множину односторонніх дотичних векторів до M у точці $\hat{x}$ позначають $T_{\hat{x}}^{+}M$. Множини $T_{\hat{x}}M$ та $T_{\hat{x}}^{+}M$ – це конуси. Якщо множина $T_{\hat{x}}M$ є підпростором в X, то вона називається дотичним простором до M у точці $\hat{x}$. Наведемо приклади таких множин.

1. Нехай $X = R^2$, $M = \{(x,y) | x \ge 0\}$. Тоді

$$T_{\hat{x}}^{+}M = M, \quad T_{0,0}M = \{(0,b) | b \in R\},$$

$$T_{1,0}M = T_{1,0}^{+}M = R^2.$$

2. Нехай $X = R^2$, $M = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge 0\} = R_{+}^{2}$. Тоді

$$T_{1,0}M = \{(a,0) | a \in R\}, \quad T_{0,0}M = \{0\},$$
$$T_{0,1}M = \{(0,b) | b \in R\}, \quad T^+_{0,0}M = M,$$
$$T^+_{1,0}M = \{(a,b) | a \in R,\, b \geq 0\}.$$

Зауваження. У геометрії дотичною прямою, площиною і т. п. називають не $T_{\hat{x}}M$, а $T_{\hat{x}}M + \hat{x}$.

У багатьох випадках множину дотичних векторів можна визначити, скориставшись таким наслідком із теореми Люстерника.

Теорема 3.11 (Теорема про дотичний простір). [АТФ, с. 173.] *Нехай X, Y – банахові простори, U – окіл точки $\hat{x} \in X$, відображення $F : U \to Y$. Якщо $F \in SD(\hat{x})$, $F'(\hat{x})$ – епіморфізм і $M = \{x \in X | F(x) = F(\hat{x})\}$,* то $T_{\hat{x}}M = \mathrm{Ker}F'(\hat{x})$.

Доведення. Нехай $h \in T_{\hat{x}}M$, $r(\cdot)$ – відображення з означення дотичного вектора. Оскільки $F \in SD(\hat{x})$, то при малих α

$$F(\hat{x}) = F(\hat{x} + \alpha h + r(\alpha)) = F(\hat{x}) + \alpha F'(\hat{x})[h] + o(\alpha).$$

Тому $\alpha F'(\hat{x})[h] + o(\alpha) = 0$. Отже, $F'(\hat{x})[h] = 0$, а це означає, що $T_{\hat{x}}M \subset \mathrm{Ker}F'(\hat{x})$.

Доведемо тепер протилежне включення: $\mathrm{Ker}F'(\hat{x}) \subset T_{\hat{x}}M$. Нехай $h \in \mathrm{Ker}F'(\hat{x})$, візьмемо $r(\alpha) = \Phi(\hat{x} + \alpha h)$, де Φ – відображення, що побудоване відповідно до теореми Люстерника. Тоді

$$F(\hat{x} + \alpha h + r(\alpha)) = F(\hat{x}),$$
$$\|r(\alpha)\| = \|\Phi(\hat{x} + \alpha h)\| \leq K \|F(\hat{x} + \alpha h) - F(\hat{x})\| = o(\alpha).$$

Отже $h \in T_{\hat{x}}M$. Теорему доведено. □

3.7. Теорема Рісса. Формула Діріхле

Означення 3.9. Функція обмеженої варіації $v(\cdot) : [a,b] \to R$ називається *канонічною*, якщо вона неперервна справа і $v(a) = 0$.

Теорема 3.12 (Ф. Рісса) [КФ, с. 388.]. *Для кожного лінійного неперервного функціонала $x^* \in C^*[a,b]$ існує канонічна функція обмеженої варіації $v(\cdot) : [a,b] \to R$ така, що для всіх $x(\cdot) \in C[a,b]$*

$$\langle x^*, x \rangle = \int_a^b x(t)\,dv(t). \tag{3.14}$$

Ця відповідність однозначна: якщо для всіх $x(\cdot) \in C[a,b]$ і канонічної $v(\cdot)$

$$\int_a^b x(t)dv(t) = 0,$$

то $v(t) \equiv 0$. Відмітимо, що інтеграл у (3.14) – це інтеграл Стілтьєса.

Теорему можна обґрунтувати і для векторних функцій. Якщо $e_1, e_2, \dots, e_n$ – одиничні вектори стандартного базису в R^n, то функцію $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) \in C([a,b], R^n)$ можна записати у вигляді

$$x(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} x_k(\cdot)e_k.$$

Якщо $x^* \in C^*([a,b], R^n)$, то

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x^*, x_k(\cdot)e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k^*, x_k(\cdot)\rangle,$$

де $x_k^* \in C^*[a,b]$, $\langle x_k^*, y(\cdot)\rangle = \langle x^*, y(\cdot)e_k\rangle$. Застосовуючи до x_k^* теорему Рісса, одержимо

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b x_k(t)dv_k(t). \tag{3.15}$$

Набір функцій обмеженої варіації $v(\cdot) = (v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot))$ називають *векторозначною функцією обмеженої варіації* $v(\cdot): [a,b] \to R^n$. Формулу (3.15) можна записати у вигляді

$$\langle x^*, x(\cdot)\rangle = \int_a^b dv(t)x(t), \tag{3.16}$$

якщо взяти до уваги, що $x(\cdot)$ – це вектор-стовпчик, а $v(\cdot)$ – вектор-рядок.

Кожна функція обмеженої варіації $v(\cdot): [a,b] \to R$ визначає узагальнену міру, інтеграл у (3.14) є інтеграл по цій мірі. Аналогічно векторнозначна функція обмеженої варіації визначає на $[a,b]$ міру з векторними значеннями, інтегралом по якій є інтеграл (3.16). Міру, яка відповідає $v(t)$, позначають $dv(t)$. Якщо $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ – дві функції обмеженої варіації на $[a,b]$, то на квадраті $[a,b] \times [a,b]$ визначено добуток мір $dv_1(\cdot) \times dv_2(\cdot)$ і справедлива теорема Фуббіні. Справедлива також формула зміни границь інтегрування, яка називається *формулою Діріхле*:

$$\int_a^b \{\int_a^t f(t,s)dv_1(s)\} dv_2(t) = \int_a^b \{\int_s^b f(t,s)dv_2(t)\} dv_1(s). \tag{3.17}$$

Для векторних функцій формула (3.17) має вигляд

$$\int_a^b dv_2(t) \{\int_a^t f(t,s)dv_1(s)\} = \int_a^b \{\int_s^b dv_2(t) f(t,s)\} dv_1(s). \tag{3.18}$$

Задачі

Дослідити відображення на диференційовність за Фреше. Обчислити похідні та диференціали.

3.1. $f: R^n \to R^m$, $f(x) = Ax$, A – матриця розмірності $m \times n$.

3.2. $f: X \to Y$, $f(x) = Ax$, X, Y - нормовані простори, $A \in L(X, Y)$.

3.3. $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2, x_1^2 + x_2^2)$, $\hat{x} = (1, 2)$.

3.4. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$

3.5. $f: R^n \to R$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.

3.6. $f: H \to R$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, $a \in H$, H – гільбертів простір.

3.7. $f: H \to R$, $f(x) = e^{\langle x, x \rangle}$.

3.8. $f: H \to R$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

3.9. $f: H \to R$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, A – самоспряжений лінійний неперервний оператор.

3.10. $f: H \setminus \{0\} \to H$, $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$.

3.11. $f: L_2[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_0^1 y(t) x(t) dt$, $y(\cdot) \in L_2[0,1]$.

3.12. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_0^1 x^3(t) dt$.

3.13. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = (\int_0^1 x(t) dt)^2$.

3.14. $f: L_2[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = (\int_0^1 x^2(t) dt)^3$.

3.15. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = x(0)$.

3.16. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = x^2(1)$.

3.17. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = x(0) x(1)$.

3.18. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = | x(0) |$.

3.19. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = e^{x(0)}$.

3.20. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \sin(x(1))$.

3.21. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_0^1 | x(t) | dt$, $\hat{x}(t) = at^2 + bt + c$, $a, b, c \in R$, $f'(\hat{x}(\cdot)) = ?$

3.22. $f: C[0,1] \to C[0,1]$, $f(x(\cdot)) = \cos(x(\cdot))$.

3.23. $f: C^1[0,1] \to C[0,1]$, $f(x(\cdot)) = \sqrt{1+(x')^2(\cdot)}$.

3.24. $f: C[0,1] \to C[0,1]$, $f(x(t)) = \varphi(t, x(t))$, $\varphi(\cdot) \in C^1(R^2)$.

3.25. $f: C[0,1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_0^1 \varphi(x(t))\,dt$, $\varphi(\cdot) \in C^1(R^1)$.

3.26. $f: C[t_0, t_1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \varphi(x(t_0), x(t_1))$, $\varphi(\cdot) \in C^1(R^2)$.

3.27. $f: C^1[t_0, t_1] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt$, $L(\cdot) \in C^1(R^3)$.

3.28. $f: C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_a^b \left(x^3(t) + t(x'(t))^2\right)dt$.

3.29. $f: C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_a^b \sqrt{2 + t^2 - \sin(x'(t))}\,dt$.

3.30. $f: C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_a^b \left[e^t x(t) + 3(x'(t))^4\right]dt + 2(x'(a))^2$.

3.31. $f: C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_a^b \left(t^2 x^2(t) + e^{x'(t)}\right)dt$.

3.32. $f: C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \sin(x'(a)) + \cos(x(b))$.

3.33. $f: C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \left(\int_a^b \left(t^2 x(t) + 2x'(t)\right)dt\right) \times \left(\int_a^b (1 + x'(t))^2\,dt\right)$.

3.34. $f: C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \left(\int_a^b x(t)dt\right) / \left(\int_a^b \left(1 + (x'(t))^2\right)dt\right)$.

3.35. $f: C^1[a,b] \times C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = f(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) =$
$= \int_a^b \left[(x_1(t))^2 + (x_2'(t))^3\right]dt$.

3.36. $f: C^1[a,b] \times C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = f(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) =$
$= \int_a^b \left[e^{x_1'(t)} - t^2 x_1(t) x_2'(t)\right]dt$.

3.37. $f: C^1[a,b] \times C^1[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = f(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) =$
$= \int_a^b \left[\sin^2(x_1(t)) + t x_2(t) + x_1'(t)(x_2(t))^2\right]dt$.

3.38. $f: C^2[a,b] \to R$, $f(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t), x''(t))dt$,
$L(t, x, y, z) \in C^1([a,b] \times R^3)$.

3.39. $f: C^1(D) \to R$, $f(x(\cdot,\cdot)) = \iint\limits_D \left[(x'_{t_1})^2 + (x'_{t_2})^2\right]dt_1 dt_2$.

3.40. $f: C^1(D) \to R$, $f(x(\cdot,\cdot)) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (x'_{t_1})^2 + (x'_{t_2})^2}\,dt_1 dt_2$.

4. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛІВ

4.1. Умови існування екстремуму

Нехай X – топологічний простір, $f : X \to R$ – числова функція (функціонал).

Означення 4.1. Функція $f : X \to R$ називається *напівнеперервною знизу* (*напівнеперервною зверху*) *у точці* $\hat{x}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$, що для всіх $x \in O_{\hat{x}}$ виконується нерівність

$$f(x) > f(\hat{x}) - \varepsilon \quad (f(x) < f(\hat{x}) + \varepsilon).$$

Означення 4.2 (еквівалентне). Функція $f : X \to R$ називається напівнеперервною знизу (напівнеперервною зверху) у точці $\hat{x}$, якщо для всіх $a < f(\hat{x})$ $(a > f(\hat{x}))$, $a \in R$, існує такий окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$, що для всіх $x \in O_{\hat{x}}$ виконується нерівність

$$f(x) > a \quad (f(x) < a).$$

Означення 4.3. Функція f називається *напівнеперервною*, якщо вона напівнеперервна в кожній точці простору X.

Теорема 4.1. *Функція $f : X \to R$ напівнеперервна знизу (зверху) у точці $\hat{x}$ тоді й тільки тоді, коли*

$$f(\hat{x}) = \varliminf_{x \to \hat{x}} f(x) \quad (f(\hat{x}) = \varlimsup_{x \to \hat{x}} f(x)),$$

де

$$\varliminf_{x \to \hat{x}} f(x) = \sup_{O_{\hat{x}}} (\inf_{x \in O_{\hat{x}}} f(x)),$$

$$\varlimsup_{x \to \hat{x}} f(x) = \inf_{O_{\hat{x}}} (\sup_{x \in O_{\hat{x}}} f(x))$$

$O_{\hat{x}}$ пробігають усі околи точки $\hat{x}$.

Доведення. Доведемо твердження про напівнеперервність знизу. Нехай функція $f : X \to R$ напівнеперервна знизу в точці $\hat{x}$. Тоді для кожного $a < f(\hat{x})$ існує такий окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$, що для всіх $x \in O_{\hat{x}}$ виконується нерівність $a < f(x)$. Тому

$$a \le \inf_{x \in O_{\hat{x}}} f(x) \le \sup_{O_{\hat{x}}} (\inf_{x \in O_{\hat{x}}} f(x)).$$

Отже, для всіх a таких, що $a < f(\hat{x})$, виконується нерівність

$$a \le \varliminf_{x\to\hat{x}} f(x).$$

Тому

$$f(\hat{x}) \le \varliminf_{x\to\hat{x}} f(x).$$

Враховуючи, що завжди $\varliminf_{x\to\hat{x}} f(x) \le f(\hat{x})$, одержимо

$$f(\hat{x}) = \varliminf_{x\to\hat{x}} f(x).$$

Якщо

$$f(\hat{x}) = \sup_{O_{\hat{x}}}(\inf_{x\in O_{\hat{x}}} f(x)).$$

то для всіх a, $a < f(\hat{x})$ існує такий окіл $O_{\hat{x}}$, що

$$a < \inf_{x\in O_{\hat{x}}} f(x) \le f(\hat{x}).$$

Отже, для всіх $x \in O_{\hat{x}}$ справджується нерівність $f(x) > a$. А це означає, що $f(x)$ напівнеперервна знизу в точці $\hat{x}$. □

Теорема 4.2. *Напівнеперервна знизу (зверху) функція $f : X \to R$ на компактній множині $A \subset X$ обмежена знизу (зверху) і досягає своєї нижньої (верхньої) грані.*

Доведення. Нехай функція f напівнеперервна знизу і $\inf_{x\in A} f(x) = -\infty$. Тоді існує така послідовність $\{x_n\} \in A$, що $f(x_n) < -n$. Оскільки множина A компактна, то нескінченна множина $\{x_n\}$ має граничну точку $\hat{x}$. Функція f напівнеперервна знизу в точці $\hat{x}$, тому існує окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$ такий, що для всіх $x \in O_{\hat{x}}$ справджується нерівність $f(x) > f(\hat{x}) - 1$. Тоді окіл $O_{\hat{x}}$ може мати лише скінченну кількість точок із множині $\{x_n\}$, а це суперечить тому, що $\hat{x}$ – гранична точка множині $\{x_n\}$ Отже, функція f має скінченну нижню грань. Нехай $\inf_{x\in A} f(x) = S$. Тоді існує послідовність $y_n \in A$ така, що $f(y_n) \le S + \frac{1}{n}$. Множина A компактна. Тому $\{y_n\}$ має граничну точку y_0. Якщо $f(y_0) > S$, то в силу напівнеперервності знизу існує $\delta > 0$ та окіл O_{y_0} такі, що для всіх $x \in O_{y_0}$ справджується нерівність $f(x) > S + \delta$. Але такий окіл не може містити нескінченну кількість точок множини

$\{y_n\}$. Прийшли до суперечності. Отже, $f(y_0)=S$, $y_0 \in A$ – точка мінімуму функції f. □

Наслідок 4.1. Нехай функція f напівнеперервна знизу на топологічному просторі X. Якщо існує таке a, що множина $L_a f = \{x : f(x) \le a\}$ непорожня і компактна, то функція f досягає на X свого мінімуму.

4.2. Необхідні та достатні умови екстремуму

Нехай X – лінійний нормований простір, $F : X \to R$ – дійсний функціонал на X.

Теорема 4.3 (про необхідну умову першого порядку). *Якщо функціонал F досягає в точці $\hat{x} \in X$ локального мінімуму (максимуму) і має в цій точці похідну за напрямком h, то*

$$F'(\hat{x},h) \ge 0 \quad (F'(\hat{x},h) \le 0).$$

Наслідок 4.2. Якщо функціонал F досягає в точці $\hat{x} \in X$ локального мінімуму і має в цій точці першу варіацію Лагранжа, то

$$\delta F(\hat{x},h) = 0 \quad \forall\, h \in X.$$

Наслідок 4.3 (Теорема Ферма). Якщо функціонал F досягає в точці $\hat{x}$ локального мінімуму і має в цій точці похідну Фреше (Гато), то

$$F'(\hat{x}) = 0 \quad (F_{\Gamma'}(\hat{x}) = 0),$$

тобто

$$dF(\hat{x},h) = F'(\hat{x})h = 0 \quad \forall\, h \in X.$$

Означення 4.4. Точки $\hat{x}$, що задовольняють рівняння $F'(x)=0$, називаються *стаціонарними точками* задачі на екстремум $F(x) \to extr$.

Теорема 4.4 (про необхідні умови другого порядку). *Нехай F – дійсний функціонал на банаховому просторі X, який має другу варіацію Лагранжа в точці $\hat{x} \in X$. Якщо функціонал F досягає в точці $\hat{x}$ локального мінімуму (максимуму), то виконуються такі умови:*

1) $\delta F(\hat{x},h) = 0 \quad \forall\, h \in X$,

2) $\delta^2 F(\hat{x},h) \ge 0\ \forall\, h \in X \quad (\delta^2 F(\hat{x},h) \le 0\ \forall\, h \in X)$.

Доведення теореми базується на визначеннях першої та другої варіацій Лагранжа функціонала F у точці $\hat{x}$ і теоремі 1.4 для функції однієї дійсної змінної $\varphi(\lambda) = F(\hat{x} + \lambda h)$, яка має мінімум (максимум) у точці $\lambda = 0$. □

Наслідок 4.4. Нехай функціонал F має в точці $\hat{x}$ другу похідну Фреше. Якщо F досягає в точці $\hat{x}$ локального мінімуму (максимуму), то:

1) $F'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow dF(\hat{x}, h) = 0 \quad \forall\, h \in X$,

2) $F''(\hat{x}) \geq 0 \Leftrightarrow d^2F(\hat{x}, h) = F''(\hat{x})[h, h] \geq 0 \quad \forall\, h \in X$,

$(F''(\hat{x}) \leq 0 \Leftrightarrow d^2F(\hat{x}, h) = F''(\hat{x})[h, h] \leq 0 \quad \forall\, h \in X)$.

Доведення. За формулою Тейлора

$$F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) = F'(\hat{x})h + \frac{1}{2}F''(\hat{x})[h, h] + o(\|h\|^2).$$

Якщо в точці $\hat{x}$ функціонал F досягає мінімуму, то відповідно до наслідку 4.3 $F'(\hat{x})h = 0$. Залишається рівність

$$F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) = \frac{1}{2}F''(\hat{x})[h, h] + o(\|h\|^2). \tag{4.1}$$

Припустимо, що існує такий елемент $\tilde{h}$ простору X, що $F''(\hat{x})[\tilde{h}, \tilde{h}] < 0$. Оскільки $F''(\hat{x})[\varepsilon h, \varepsilon h] = \varepsilon^2 F''(\hat{x})[h, h]$, то в будь-якому околі точки $\hat{x}$ існують елементи $\hat{x} + h$ $h = \varepsilon\tilde{h}$ простору X, що задовольняють нерівність $F''(\hat{x})[h, h] < 0$. Але при малих $\|h\|$ знак виразу (4.1) визначається знаком головного доданку $F''(\hat{x})[h, h]$. Тому в будь-якому околі точки $\hat{x}$ існують елементи h такі, що

$$F(\hat{x} + h) - F(\hat{x}) = \frac{1}{2}F''(\hat{x})[h, h] + o(\|h\|^2) < 0.$$

А це суперечить тому, що функціонал F досягає в точці $\hat{x}$ локального мінімуму. Тому $F''(\hat{x})[h, h] \geq 0$ для всіх $h \in X$. □

Необхідні умови першого і другого порядку екстремуму функціоналів аналогічні відповідним умовам екстремуму функцій однієї та багатьох змінних. Для достатніх умов екстремуму це не так. Умова $F''(\hat{x})[h, h] > 0$, яка є достатньою умовою мінімуму функції n змінних, не буде достатньою умовою мінімуму функціоналів, визначених на банахових просторах нескінченної розмірності.

Приклад 4.1. Нехай у гільбертовому просторі ℓ_2 визначено функціонал F за формулою

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4.$$

У точці $\hat{x}=0$ перший диференціал функціонала дорівнює нулю, а другий диференціал

$$d^2F(0,h)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^2}{n^3}>0 \quad \forall h\neq 0.$$

Умова $d^2F(0,h)>0$ виконується для всіх $h\neq 0$. Проте функціонал F у точці $\hat{x}=0$ мінімуму не досягає. Щоб переконатися в цьому, розглянемо послідовність $\{e_n/n\}$, де $\{e_n\}$ – ортонормований базис в ℓ_2. Тоді

$$F(0)=0, \quad F\left(\frac{e_n}{n}\right)=\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^4}<0.$$

Крім того, у будь-якому околі точки $\hat{x}=0$ існують елементи e_n/n при досить великому n.

Означення 4.5. Квадратичний функціонал B називається *сильно* (*строго*) *додатно визначеним*, якщо можна вказати таке число $C>0$, що $B(x,x)\geq C\|x\|^2$ для всіх $x\in X$.

Теорема 4.5 (про достатні умови другого порядку). *Якщо функціонал F, що визначений на банаховому просторі X, має другу похідну Фреше і виконуються умови:*

1) $F'(\hat{x})=0$;

2) $F''(\hat{x})[h,h]\geq C\|h\|^2$ для всіх $h\in X$

($F''(\hat{x})[h,h]\leq -C\|h\|^2$ для всіх $h\in X$),

то F досягає в точці $\hat{x}$ локального мінімуму (*максимуму*).

Доведення. Нехай $F''(\hat{x})[h,h]\geq C\|h\|^2$. Виберемо $\varepsilon>0$ так, щоб величина $o(\|h\|^2)$ у формулі Тейлора (4.1) задовольняла нерівність $|o(\|h\|^2)|\leq\frac{C}{4}\|h\|^2$ при $\|h\|<\varepsilon$. Тоді

$$F(\hat{x}+h)-F(\hat{x})=\frac{1}{2}F''(\hat{x})[h,h]+o(\|h\|^2)>\frac{C}{4}\|h\|^2>0$$

при $\|h\|<\varepsilon$. Отже, $\hat{x}$ – точка локального мінімуму. □

Зауваження. У скінченновимірному просторі сильна додатна визначеність квадратичної форми еквівалентна її додатній визначеності. У нескінченновимірному просторі (як показує приклад) сильна додатна визначеність є більш строгою умовою.

4.3. Задачі з обмеженнями-рівностями. Метод невизначених множників Лагранжа

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, F – відображення X в Y, f – функціонал на X. Задача пошуку екстремуму функціонала $f: X \to R$ на множині тих елементів простору X, які задовольняють рівняння $F(x) = 0$, називається *екстремальною задачею з обмеженнями – рівностями.* Задачу записують так:

$$f(x) \to extr, \quad F(x) = 0. \tag{4.2}$$

Елемент $x \in X$ називається *допустимим* у задачі (4.2), якщо $F(x) = 0$.

Функцією Лагранжа задачі (4.2) називається функція

$$L(x, y^*, \lambda_0) = \lambda_0 f(x) + \langle y^*, F(x)\rangle, \tag{4.3}$$

де $\lambda_0 \in R, y^* \in Y^*$ – *множники Лагранжа.*

Теорема 4.6 (про невизначені множники Лагранжа в задачах з обмеженнями-рівностями). *Нехай X, Y – банахові простори, U – відкрита множина в X, функціонал $f: U \to R$ і відображення $F: U \to Y$ строго диференційовні в точці $\hat{x} \in U$. Якщо $\hat{x}$ – точка локального екстремуму в задачі (4.2) і образ $\mathrm{Im}F'(\hat{x})$ – замкнутий підпростір простору Y, то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0 \in R$, $y^* \in Y^*$ такі, що виконується умова стаціонарності для функції Лагранжа*

$$L'_x(\hat{x}, y^*, \lambda_0) = 0 \Leftrightarrow \langle \lambda_0 f'(\hat{x}), h\rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0 \;\forall h \in X. \tag{4.4}$$

Якщо, крім того, $\mathrm{Im}F'(\hat{x}) = Y$ (умова регулярності відображення $F: X \to Y$), то множник $\lambda_0 \neq 0$.

Доведення. Нехай $\hat{x}$ – точка мінімуму задачі (4.2). Визначимо відображення $G: X \to R \times Y$ за формулою $G(x) = (f(x) - f(\hat{x}), F(x))$. Це відображення строго диференційовне в точці $\hat{x}$, $G'(\hat{x}) = (f'(\hat{x}), F'(\hat{x}))$. Образ $\mathrm{Im}G'(\hat{x})$ збігається або не збігається з $R \times Y$.

1. Нехай $\mathrm{Im}G'(\hat{x}) \neq R \times Y$. Застосуємо до відображення $G'(\hat{x})$ лему про замкнутість образу. Образ $\mathrm{Im}F'(\hat{x})$ замкнутий в Y за умовою теореми, образ $f'(\hat{x})(\mathrm{Ker}F'(\hat{x}))$ дорівнює $\{0\}$ або R, отже, замкнутий. За лемою образ $\mathrm{Im}G'(\hat{x})$ замкнутий в $R \times Y$. За припущенням він не збігається з $R \times Y$. Тому $\mathrm{Im}G'(\hat{x})$ – власний замкнутий підпростір простору

$R \times Y$. За лемами про нетривіальність анулятора та про загальний вид лінійного неперервного функціонала на $R \times Y$ існують число λ_0 і елемент $y^* \in Y^*$ такі, що $|\lambda_0| + \|y^*\| \neq 0$ і виконується рівняння (4.4).

2. Нехай тепер $\mathrm{Im}G'(\hat{x}) = R \times Y$. Застосуємо теорему про неявну функцію. За цією теоремою існують константа $K > 0$, окіл U точки $(0,0)$ у просторі $R \times Y$ і відображення $\varphi : U \to X$ такі, що

$$\begin{aligned} &\varphi(0,0) = \hat{x}; \quad G(\varphi(\alpha, y)) = (\alpha, y); \\ &\|\varphi(\alpha, y) - \hat{x}\| \quad \le K \|G(\hat{x}) - (\alpha, y)\|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Покладемо $x(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon, 0) = \varphi(z(\varepsilon))$, тоді із (4.5) одержимо

$$G(x(\varepsilon)) \quad = z(\varepsilon) \Leftrightarrow f(x(\varepsilon)) - f(\hat{x}) = -\varepsilon, \quad F(x(\varepsilon)) = 0; \tag{4.6}$$

$$\|x(\varepsilon) - \hat{x}\| \quad = \|\varphi(z(\varepsilon)) - \hat{x}\| \le K \|(0,0) - (-\varepsilon, 0)\| = K \cdot \varepsilon. \tag{4.7}$$

Із (4.6) і (4.7) випливає, що $x(\varepsilon)$ – допустимий елемент задачі (4.2) з $K \cdot \varepsilon$ околу точки $\hat{x}$ і $f(x(\varepsilon)) < f(\hat{x})$. Це суперечить тому, що $\hat{x}$ – точка мінімуму задачі (4.2). Отже, $\mathrm{Im}G'(\hat{x}) \neq R \times Y$. Тобто вірна перша частина теореми.

Перейдемо до доведення другої частини. Нехай відображення F регулярне в точці $\hat{x}$ і $\lambda_0 = 0$. Тоді $y^* \neq 0$ і співвідношення (4.4) має вигляд

$$\langle y^*, F'(\hat{x})[h] \rangle = 0 \quad \forall h \in X.$$

Виберемо такий елемент $\tilde{y} \in Y$, щоб $\langle y^*, \tilde{y} \rangle \neq 0$. Це можна зробити, оскільки $y^* \neq 0$. Тепер візьмемо елемент $\tilde{h} \in X$ такий, що $F'(\hat{x})[\tilde{h}] = \tilde{y}$, тоді

$$0 \neq \langle y^*, \tilde{y} \rangle = \langle y^*, F'(\hat{x})[\tilde{h}] \rangle = 0.$$

Ця суперечність доводить справедливість твердження другої частини теореми. □

Зауваження. 1. Рівняння (4.4) називається *рівнянням Ейлера – Лагранжа* задачі (4.2).

2. Метод невизначених множників Лагранжа показує, що існують такі $\lambda_0 \in R$, $y^* \in Y^*$, для яких умова локального екстремуму в задачі (4.2) зводиться до необхідної умови безумовного екстремуму функції Лагранжа (4.3).

3. Якщо виконується умова регулярності $\mathrm{Im}F'(\hat{x}) = Y$, то умови екстремуму можна записати так:

$$L'_x(x, y^*, \lambda_0) = 0, \quad L'_{y^*}(x, y^*, \lambda_0) = 0.$$

Указані рівняння – це умова стаціонарності функції Лагранжа за змінними x, y^*.

Теорема 4.7 (про необхідні умови другого порядку). *Нехай X, Y – банахові простори, функціонал $f: X \to R$ і відображення $F: X \to Y$ мають другі похідні Фреше в точці $\hat{x}$. Якщо $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.2) і образ $\mathrm{Im} F'(\hat{x}) = Y$, то існує множник Лагранжа $y^* \in Y^*$ такий, що для функції Лагранжа*

$$L(x, y^*) = f(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$$

виконуються умови:

1) стаціонарності

$$L'_x(\hat{x}, y^*) = 0 \Leftrightarrow \langle f'(\hat{x}), h \rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h] \rangle = 0 \text{ для всіх } h \in X; \quad (4.8)$$

2) невід'ємності

$$L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h, h] \geq 0 \quad \text{для всіх} \quad h \in \mathrm{Ker} F'(\hat{x}). \quad (4.9)$$

Доведення. Існування другої похідної Фреше в точці $\hat{x}$ забезпечує строгу диференційовність відображення в цій точці. Тому умова стаціонарності з множником Лагранжа $\lambda_0 = 1$ випливає з теореми Лагранжа для гладкої задачі з обмеженнями-рівностями.

Доведемо справедливість другої умови. Нехай $h \in \mathrm{Ker} F'(\hat{x})$. За теоремою про дотичний простір $\mathrm{Ker} F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}} M$, де $M = \{x \in X \mid F(x) - F(\hat{x}) = 0\}$. Отже, $h \in T_{\hat{x}} M$. Тому існують $\varepsilon > 0$ і відображення $r: [-\varepsilon; \varepsilon] \to X$ такі, що $F(\hat{x} + th + r(t)) = 0$ $\forall t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ і $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to 0$. Таким чином, $\hat{x} + th + r(t)$ – допустимий елемент у задачі (4.2) для всіх $t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$, і оскільки $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.2), то $f(\hat{x}) \leq f(\hat{x} + th + r(t))$. За формулою Тейлора

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) \quad &\leq f(\hat{x} + th + r(t)) = f(\hat{x} + th + r(t)) \pm \langle y^*, F(\hat{x} + th + r(t)) \rangle = \\ &= L(\hat{x} + th + r(t), y^*) - \langle y^*, F(\hat{x} + th + r(t)) \rangle = \\ &= L(\hat{x}, y^*) + L'_x(\hat{x}, y^*)[th + r(t)] + \frac{1}{2} L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[th + r(t), th + r(t)] + \\ &+ o(\|th + r(t)\|^2) = f(\hat{x}) + \frac{t^2}{2} L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h, h] + o(t^2). \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{t^2}{2}L''_{xx}(\hat{x},y^*)[h,h]+o(t^2)\geq 0.$$

при малих t. Розділимо обидві частини останньої нерівності на t^2 і спрямуємо t до нуля. Одержимо

$$L''_{xx}(\hat{x},y^*)[h,h]\geq 0 \quad \text{для всіх} \quad h\in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}).$$

Теорему доведено. □

Теорема 4.8 (про достатні умови другого порядку). *Нехай X, Y – банахові простори, функціонал $f:X\to R$ і відображення $F:X\to Y$ мають другі похідні Фреше в точці $\hat{x}$, образ $\operatorname{Im}F'(\hat{x})=Y$. Якщо існує множник Лагранжа $y^*\in Y^*$ такий, що для функції Лагранжа*

$$L(x,y^*)=f(x)+\langle y^*,F(x)\rangle$$

виконуються умови:

1) стаціонарності

$$L'_x(\hat{x},y^*)=0\Leftrightarrow \langle f'(\hat{x}),h\rangle+\langle y^*,F'(\hat{x})[h]\rangle=0 \text{ для всіх } h\in X; \tag{4.10}$$

2) строгої додатності

$$L''_{xx}(\hat{x},y^*)[h,h]\geq \alpha\|h\|^2 \text{ для всіх } h\in \operatorname{Ker}F'(\hat{x}), \tag{4.11}$$

то $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.2).

Доведення. За лемою про обернене справа відображення для відображення $F'(\hat{x}):X\to Y$ існують відображення $M:Y\to X$ і константа $C>0$ такі, що

$$F'(\hat{x})\circ M=I_Y, \quad \|M(y)\|\leq C\|y\| \text{ для всіх } y\in Y.$$

Візьмемо допустимий елемент $\hat{x}+h$ в задачі (4.2) $(F(\hat{x}+h)=0)$. Покладемо $h_2=M(F'(\hat{x})[h])$ і позначимо $h_1=h-h_2$. Тоді

$$F'(\hat{x})[h_1]=F'(\hat{x})[h-h_2]=F'(\hat{x})[h]-F'(\hat{x})M(F'(\hat{x})[h])=F'(\hat{x})[h]-F'(\hat{x})[h]=0.$$

Отже, $h_1\in \operatorname{Ker}F'(\hat{x})$. За формулою Тейлора

$$0=F(\hat{x}+h)=F(\hat{x})+F'(\hat{x})[h]+\frac{1}{2}F''(\hat{x})[h,h]+o(\|h\|^2).$$

Звідси

$$F'(\hat{x})[h]=-\frac{1}{2}F''(\hat{x})[h,h]-o(\|h\|^2).$$

Тому існує таке $\delta > 0$, що

$$\|F'(\hat{x})[h]\| \le \frac{1}{2}\|F''(\hat{x})[h,h]\| + \left\|o(\|h\|^2)\right\| \le C_1\|h\|^2$$

з деякою константою $C_1 > 0$ для $\|h\| < \delta$. Отже,

$$\|h_2\| = \|M(F'(\hat{x})[h])\| \le C\|F'(\hat{x})[h]\| \le CC_1\|h\|^2 \le CC_1\delta\|h\| = \varepsilon\|h\|,$$

де $\varepsilon = CC_1\delta$ і $\|h\| - \|h_2\| \le \|h_1\| = \|h - h_2\| \le \|h\| + \|h_2\|$ при $(1-\varepsilon)\|h\| \le \|h_1\| \le (1+\varepsilon)\|h\|$. Знову за формулою Тейлора

$$\begin{aligned} f(\hat{x}+h) &= L(\hat{x}+h, y^*) = \\ &= L(\hat{x}, y^*) + L'_x(\hat{x}, y^*)[h] + \frac{1}{2}L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h,h] + o(\|h\|^2) = \\ &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2}L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h,h] + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Звідси, позначаючи $B = \left\|L''_{xx}(\hat{x}, y^*)\right\|$, одержимо

$$\begin{aligned} & f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \\ = \ & \frac{1}{2}L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h_1+h_2, h_1+h_2] + o(\|h\|^2) = \\ = \ & \frac{1}{2}(L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h_1,h_1] + 2L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h_1,h_2] + L''_{xx}(\hat{x}, y^*)[h_2,h_2]) + o(\|h\|^2) \ge \\ \ge \ & \frac{1}{2}\left(\alpha\|h_1\|^2 - 2B\|h_1\|\|h_2\| - B\|h_2\|^2\right) + o(\|h_2\|^2) \ge \\ \ge \ & \frac{1}{2}\|h\|^2\left(\alpha(1-\varepsilon)^2 - 2B(1+\varepsilon)\varepsilon - B\varepsilon^2\right) + o(\|h\|^2) \ge 0 \end{aligned}$$

при достатньо малих $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon = 0$ множник у круглих дужках дорівнює $\alpha > 0$). З останнього співвідношення випливає, що $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.2). Теорему доведено. □

4.4. Задачі опуклого програмування

Нехай X – лінійний простір, A – опукла підмножина $f_i : X \to \overline{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ – опуклі функції. *Задачею опуклого програмування* називається задача

$$f_0(x) \to \inf, \quad f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \in A. \tag{4.12}$$

Підкреслимо, що (4.12) – це задача на мінімум.

Нагадаємо, що множина $A \subset X$ називається *опуклою*, якщо разом із точками $x, y \in A$ вона містить весь відрізок $[x, y] = \{z : z = tx + (1-t)y, 0 \le t \le 1\}$.

Функція $f : X \to R$ називається *опуклою*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконується нерівність Ієнсена

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \text{ для всіх } t \in [0,1].$$

Елемент $x \in X$ називається *допустимим* у задачі (4.12), якщо $x \in A$ і $f_i(x) \le 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Лема 4.1. *Нехай X – лінійний нормований простір. Локальний мінімум задачі опуклого програмування є глобальним мінімумом задачі.*

Доведення. Нехай $\hat{x}$ – локальний мінімум задачі (4.12). Це означає, що існує окіл U точки $\hat{x}$ такий, що $-\infty < f_0(\hat{x}) \le f_0(x)$ для будь-якої допустимої точки $x \in U$. Тоді для малих $t > 0$ вектор $y = (1-t)\hat{x} + tx \in U$ буде допустимим. За нерівністю Ієнсена

$$f_0(\hat{x}) \le f_0(y) \le (1-t)f_0(\hat{x}) + tf_0(x).$$

Отже, $f_0(\hat{x}) \le f_0(x)$ для будь-якої допустимої точки x. □

Теорема 4.9 (Теорема Куна – Таккера). *Нехай X – лінійний нормований простір, $f_i : X \to \overline{R}$, $i = 0,1,\ldots,m$, – опуклі функції на X, A – опукла підмножина X.*

1. Якщо $\hat{x}$ – розв'язок задачі опуклого програмування (4.12), то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа λ_i, $i = 0,1,\ldots,m$, такі, що для функції Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

виконуються:

а) принцип мінімуму

$$\min_{x \in A} L(x, \lambda) = L(\hat{x}, \lambda);$$

б) умова доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

в) умова невід'ємності

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

2. Якщо $\lambda_0 \ne 0$, то умови а), б), в) достатні для того, щоб допустима точка $\hat{x}$ була розв'язком задачі.

3. Для того, щоб $\lambda_0 \neq 0$, *достатньо виконання умови Слейтера: існує точка* $\bar{x} \in A$ *така, що* $f_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Доведення. Нехай $\hat{x}$ – розв'язок задачі (4.12). Будемо вважати, що $f_0(\hat{x}) = 0$. Визначимо множину

$$B = \{b = (b_0,\ldots,b_m) \in R^{m+1} \mid \exists x \in A : f_i(x) \le b_i, i = 0,1,\ldots,m\}. \qquad (4.13)$$

Покажемо, що множина B непорожня й опукла. Дійсно $R_+^{m+1} \subset B$, оскільки в (4.13) можна взяти $x = \hat{x}$. Перевіримо опуклість. Нехай $b, b' \in B$, елементи $x, x' \in A$ такі, що $f_i(x) \le b_i$, $f_i(x') \le b_i'$, $i = 0,1,\ldots,m$, $x_t = tx + (1-t)x'$, $0 \le t \le 1$. Тоді $x_t \in A$, оскільки множина A опукла. Функції f_i опуклі, тому

$$\begin{aligned} f_i(x_t) &= f_i(tx + (1-t)x') \le tf_i(x) + (1-t)f_i(x') \\ &\le tb_i + (1-t)b_i', \quad i = 0,1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Отже, $tb + (1-t)b' \in B$. Це означає, що множина B опукла.

Нехай $C = \{c = (c_0,0,\ldots,0) \in R^{m+1} | c_0 < 0\}$, тоді $C \cap B = \varnothing$. Дійсно, якщо існує точка $c = (c_0,0,\ldots,0) \in B$, $c_0 < 0$, то існує елемент $\tilde{x} \in A$ такий, що $f_0(\tilde{x}) \le c_0 < 0$, $f_i(\tilde{x}) \le 0$, $i = 1,\ldots,m$. Це суперечить тому, що $\hat{x}$ – розв'язок задачі (4.12). Отже, $C \cap B = \varnothing$.

Покажемо, що множники $\lambda_i \ge 0$, $i = 0,1,\ldots,m$. За першою теоремою про розділення множини B і C можна розділити. Існує вектор $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \neq 0$ такий, що

$$\inf_{b \in B} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i \ge \sup_{c \in C} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_i. \qquad (4.14)$$

Оскільки $0 \in B$, то із (4.14) одержимо

$$0 \ge \sup_{c \in C} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i c_i = \sup_{c \in C} \lambda_0 c_0.$$

Звідси $\lambda_0 \ge 0$ і $\sup\limits_{c \in C} \lambda_0 c_0 = 0$. Тепер нерівність (4.14) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i \ge 0 \quad \forall b \in B. \qquad (4.15)$$

Оскільки вектор $(0,\ldots,1,0\ldots,0) \in B$, то з нерівності (4.15) випливає, що $\lambda_i \ge 0$.

Перевіримо, що виконується умова $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1,\ldots,m$. Якщо $f_i(\hat{x}) = 0$, то рівність очевидна. Нехай $f_i(\hat{x}) < 0$. Точка $(0,\ldots,0,\ f_i(\hat{x}),0,\ldots,0)$ належить B. Щоб переконатися в цьому, досить покласти $x = \hat{x}$ в (4.13). Підставимо цю точку в (4.15). Одержимо $\lambda_i f_i(\hat{x}) \geq 0$. У попередньому пункті ми показали, що $\lambda_i \geq 0$. Тому $\lambda_i = 0$ і $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$.

Покажемо, що в точці $\hat{x}$ виконується принцип мінімуму. Нехай $x \in A$. Тоді точка $(f_0(x),\ldots,f_m(x)) \in B$. Підставимо цю точку в (4.14). Одержимо

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) = L(x,\lambda) \geq 0.$$

Якщо врахувати, що $f_0(\hat{x}) = 0$ і $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, то для будь-якого $x \in A$

$$L(x,\lambda) \geq 0 = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(\hat{x}) = L(\hat{x},\lambda).$$

Перше твердження теореми доведено.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай $\lambda_0 \neq 0$. Візьмемо $\lambda_0 = 1$. Тоді для допустимого x виконується нерівність

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_0(x) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) = L(x,\lambda) \geq L(\hat{x},\lambda) \\ &= f_0(\hat{x}) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(\hat{x}) = f_0(\hat{x}). \end{aligned}$$

Отже, $\hat{x}$ – розв'язок задачі (4.12).

Доведемо третє твердження. Якщо виконується умова Слейтера і $\lambda_0 = 0$, то

$$L(\bar{x},\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}) < 0 = L(\hat{x},\lambda).$$

Це суперечить принципу мінімуму. Теорему доведено. □

4.5. Задача з обмеженнями-нерівностями.

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, F – відображення X в Y $f_i : X \to R$ $i = 0,1,\ldots,m$ – функціонали на X. Задача пошуку екстремуму функціонала $f_0(x)$ на множині тих елементів простору X, які задовольняють рівняння $F(x) = 0$ і нерівності $f_i(x) \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$, називається *екстремальною задачею з обмеженнями-нерівностями.* Задачу записують так:

$$f_0(x) \to \inf, \quad f_i(x) \le 0, \quad i = 1,\ldots,m, \quad F(x) = 0. \qquad (4.16)$$

Теорема 4.10 (про невизначені множники Лагранжа в задачах з обмеженнями-нерівностями). *Нехай X, Y – банахові простори $f_i \in SD(\hat{x})$, $i = 1,\ldots,m$, $F \in SD(\hat{x})$, $\mathrm{Im}F'(\hat{x})$ – замкнутий підпростір в Y. Якщо $\hat{x}$ – розв'язок задачі (4.16), то існують одночасно не рівні нулю вектор $\lambda \in R^{m+1}$ і функціонал $y^* \in Y^*$ такі, що для функції Лагранжа*

$$L(x, y^*, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$$

виконуються умови:

а) стаціонарності

$$L'_x(\hat{x}, y^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0;$$

б) доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m;$$

в) невід'ємності

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = 0,1,\ldots,m.$$

Доведення. Вважатимемо, що $f_0(\hat{x}) = 0$. Якщо $f_i(\hat{x}) \ne 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, то такі обмеження не враховуватимемо, оскільки для локального екстремуму обмеження $f_i(\hat{x}) < 0$ неістотні. Таким чином, можна вважати, що умови доповнюючої нежорсткості виконано.

Якщо $\mathrm{Im}F'(\hat{x})$ – власний підпростір Y, то з леми про нетривіальність анулятора випливає, що існує функціонал $y^* \in Y^*$, $y^* \ne 0$ такий, що $\langle y^*, y \rangle = 0$ для всіх $y \in \mathrm{Im}F'(\hat{x}) \Leftrightarrow \langle y^*, F'(\hat{x})[h] \rangle = 0$ для всіх $h \in X \Leftrightarrow (F'(\hat{x}))^* y^* = 0$. Залишається визначити $\lambda_i = 0$, $i = 0,1,\ldots,m$, щоб довести справедливість теореми.

Нехай тепер $F'(\hat{x})$ відображає X на весь простір Y, тобто $\mathrm{Im}F'(\hat{x}) = Y$. Визначимо для $0 \le k \le m$ множини

$$A_k = \{h | \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle < 0, i = k, k+1,\ldots,m; F'(\hat{x})[h] = 0\}.$$

Очевидно, що $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_m$.

Лема 4.2. *Якщо $\hat{x}$ – розв'язок задачі (4.16), то A_0 – порожня множина.*

Доведення. Нехай це не так, $A_0 \neq \varnothing$. Тоді існує вектор $h \in \mathrm{Ker} F'(\hat{x})$ такий, що $\langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = b_i < 0$, $i = 0,1,\ldots,m.$ Згідно з теоремою Люстерніка існують відображення $r : [-\alpha, \alpha] \to X$ і число K такі, що

$$\begin{gathered} F(\hat{x} + \lambda h + r(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in [-\alpha, \alpha] \\ \|r(\lambda)\| \leq K \|F(\hat{x} + \lambda h) - F(\hat{x})\| = K \|\lambda F'(\hat{x})[h] + o(\lambda)\| = o(\lambda). \end{gathered} \tag{4.17}$$

Для достатньо малих $\lambda > 0$ виконується нерівність

$$f_i(\hat{x} + \lambda h + r(\lambda)) = f_i(\hat{x}) + \lambda \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle + o(\lambda) = \lambda b_i + o(\lambda) < 0, \quad i = 0,1,\ldots,m. \tag{4.18}$$

Співвідношення (4.17) і (4.18) при $i = 1,2,\ldots,m$ означають, що при малих λ елемент $\hat{x} + \lambda h + r(\lambda)$ допустимий в задачі (4.16). Але нерівність (4.18) при $i = 0$ суперечить тому, що $\hat{x}$ – розв'язок задачі (4.16).□

Лема 4.3. *Якщо A_m – порожня множина, то для задача (4.16) виконується принцип Лагранжа.*

Доведення. Оскільки $A_m = \{h | \langle f_m'(\hat{x}), h \rangle < 0, F'(\hat{x})[h] = 0\}$ – порожня множина, то $\langle f_m'(\hat{x}), h \rangle = 0$ для будь-якого $h \in \mathrm{Ker} F'(\hat{x})$. Тому $f_m'(\hat{x}) \in (\mathrm{Ker} F'(\hat{x}))^{\perp}$. За лемою про анулятор ядра регулярного оператора

$$(\mathrm{Ker} F'(\hat{x}))^{\perp} = \mathrm{Im}\big(F'(\hat{x})\big)^*.$$

Тому існує $y^* \in Y^*$ такий, що

$$f_m'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0.$$

Це і є умова стаціонарності функції Лагранжа при $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$, $\lambda_m = 1$.

Таким чином, принцип Лагранжа обґрунтований ($A_m = \varnothing$), або існує таке число k, $0 \leq k < m$, що $A_{k+1} \neq \varnothing$.□

Лема 4.4. *Якщо існує число k, $0 \leq k \leq m$ таке, що $A_k = \varnothing$, $A_{k+1} \neq \varnothing$, то $\hat{h} = 0$ є розв'язком задачі*

$$\langle f_m'(\hat{x}), h \rangle \to \inf; \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle \quad \leq 0, i = k+1,\ldots,m; F'(\hat{x})[h] \quad = 0. \tag{4.19}$$

Доведення. Знову використаємо метод від супротивного. Нехай твердження леми невірне. Тоді існує такий елемент $h \in X$, що $\langle f_k'(\hat{x}), h \rangle < 0$, $\langle f_i'(\hat{x}), h \rangle \leq 0$ $i = k+1,\ldots,m$; $F'(\hat{x})[h] = 0$. Нехай u – елемент із A_{k+1}. Тоді $\langle f_{i'}(\hat{x}), u \rangle < 0$, $i = k+1,\ldots,m$, $F'(\hat{x})[u] = 0$. Але при малих $\varepsilon > 0$ елемент $h + \varepsilon u \in A_k$, що суперечить умовам леми. □

Застосуємо до задачі (4.19) теорему Куна – Таккера. Відповідно до цієї теореми існують невід'ємні числа $\lambda_{k+1},\dots,\lambda_m$ такі, що для функції Лагранжа задачі (4.19)

$$\tilde{L}(h,\lambda)=\sum_{i=k}^{m}\lambda_i\langle f_i'(\hat{x}),h\rangle$$

у точці $\hat{h}=0$ виконується принцип мінімуму

$$\min_{h\in\mathrm{Ker}F'(\hat{x})}\tilde{L}(h,\lambda)=\tilde{L}(\hat{h},\lambda)=0.$$

Звідси $\langle\sum_{i=k}^{m}\lambda_i f_i'(\hat{x}),h\rangle=0$ для будь-якого $h\in\mathrm{Ker}F'(\hat{x})$. Отже,

$$\sum_{i=k}^{m}\lambda_i f_i'(\hat{x})\in(\mathrm{Ker}F'(\hat{x}))^{\perp}.$$

За лемою про анулятор ядра регулярного оператора випливає, що

$$(\mathrm{Ker}F'(\hat{x}))^{\perp}=\mathrm{Im}(F'(\hat{x}))^{*}.$$

Тому існує $y^*\in Y^*$ такий, що

$$\sum_{i=k}^{m}\lambda_i f_i'(\hat{x})+(F'(\hat{x}))^{*}y^{*}=0.$$

А це й є умова стаціонарності функції Лагранжа $L(x,y^*,\lambda)$ при $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_{k-1}=0$. Теорему доведено. □

Зауваження. Якщо $\mathrm{Im}F'(\hat{x})=Y$ (відображення F регулярне в точці $\hat{x}$) та існує елемент $h\in\mathrm{Ker}F'(\hat{x})$ такий, що $\langle f_i'(\hat{x}),h\rangle<0$, $i=1,\dots,m$ (аналог умови Слейтера), то $\lambda_0\neq 0$ і можна брати $\lambda_0=1$.

Теорема 4.11 (про необхідні умови другого порядку). *Нехай X, Y – банахові простори, функціонали $f_i:X\to R$, $i=0,1,\dots,m$ і відображення $F:X\to Y$ двічі диференційовні за Фреше в деякому околі U точки $\hat{x}$. Якщо $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.16) і образ $\mathrm{Im}F'(\hat{x})=Y$, то*

$$\max_{(\lambda,y^*)\in L}L''_{xx}(\hat{x},y^*,\lambda)[h,h]\geq 0 \ \text{ для всіх } h\in K,$$

де

$$L(x,y^*,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x)+\langle y^*,F(x)\rangle$$

– функція Лагранжа,

$$K = \{h \in X: \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le 0, i = 0,1,\ldots,m; F'(\hat{x})[h] = 0\}$$

– конус допустимих варіацій, а

$$L = \left\{(\lambda, y^*) \in R^{m+1} \times Y^* \,\middle|\, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0; \right.$$

$$\left. \lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, i = 1,\ldots,m; \lambda_i \ge 0, i = 0,1,\ldots,m; \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\} \ne \varnothing$$

– множина наборів (λ, y^*), для яких виконано умови теореми 4.10 про множники Лагранжа для задач із рівностями та нерівностями.

Доведення базується на лемі про мінімакс і теоремі Люстерніка.

Лема 4.5 (Лема про мінімакс) [АТФ, с. 280]. *Нехай X, Y – банахові простори, $\Lambda \in L(X,Y)$ – лінійний неперервний оператор з X на простір Y, $\Lambda X = Y$, $x_i^* \in X^*$, $i = 1,\ldots,n$ – функціонали на X такі, що*

$$\max_{i=1,\ldots,n} \langle x_i^*, x\rangle \ge 0 \quad \forall x \in \operatorname{Ker}\Lambda. \tag{4.20}$$

Нехай для вектора $a = (a_1,\ldots,a_n) \in R^n$ і елемента $y \in Y$

$$S(a,y) = \min_{x:\Lambda x + y = 0} \max_{i=1,\ldots,n} (a_i + \langle x_i^*, x\rangle).$$

Тоді

1) величина $S(a,y)$ допускає зображення

$$S(a,y) = sL(a,y) = \max_{(\lambda,y^*)\in L} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \langle y^*, y\rangle \right),$$

де $sL(a,y)$ – опорна функція в точці (a,y) множини

$$L = \left\{(\lambda, y^*) \in R^n \times Y^* \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0; \lambda_i \ge 0, i = 1,\ldots,n; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\};$$

2) мінімум у визначенні $S(a,y)$ і максимум у визначенні $sL(a,y)$ досягаються.

Доведемо спочатку лему.

Лема 4.6. *Вектор $\hat{h} = 0$ доставляє абсолютний мінімум функції*

$$\varphi(h) = \max_{i=0,1,\ldots,m} \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + \delta \operatorname{Ker} F'(\hat{x})(h) \tag{4.21}$$

за умови, що $f_i(\hat{x}) = 0, i = 0,1,\ldots,m$ $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$, де $\delta A(\cdot)$ – індикаторна функція опуклої множини A.

Доведення. Припустимо, що $0 \notin abs\min(\varphi)$. Тоді існує вектор $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$, для якого

$$\max_{i=0,1,\dots,m} \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0 \Leftrightarrow \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle < 0, i = 0,1,\dots,m.$$

Оскільки $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$, то за теоремою про дотичний простір $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}}M$, де $M = \{x : F(x) = F(\hat{x}) = 0\}$. За визначенням дотичного вектора існує відображення $r : [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$ таке, що $F(\hat{x} + th + r(t)) = 0 \,\forall\, t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \|r(t)\| = o(t)$. Тому

$$f_i(\hat{x} + th + r(t)) = f_i(\hat{x}) + \langle f_i'(\hat{x}), th + r(t)\rangle + o(\|th + r(t)\|) =$$

$$= t\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + o(t) < 0, i = 0,1,\dots,m$$

при малих t. Отже, вектор $\hat{x} + th + r(t)$ є допустимим елементом у задачі (4.16), але при цьому

$$f_0(\hat{x} + th + r(t)) < 0 = f_0(\hat{x}).$$

Це суперечить тому, що $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.16).

Визначимо тепер $x_i^* = f_i'(\hat{x}), a_i = \frac{1}{2} f_i''(\hat{x})[h,h],\ i = 0,1,\dots,m,\ \Lambda = F'(\hat{x})$, $y = \frac{1}{2}F''(\hat{x})[h,h]$, де $h \in K$ – деякий фіксований вектор. Із доведеної леми випливає, що вектор $\hat{h} = 0$ доставляє абсолютний мінімум функції $\varphi(h)$, що визначена за формулою (4.21). Тому

$$\max_{i=0,1,\dots,m} \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \geq 0$$

для будь-якого $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. Отже, умова (4.20) леми про мінімакс виконується. За цією лемою існує елемент $\xi = \xi(h)$, $\Lambda\xi + y = 0$ такий, що

$$\max_{i=0,\dots,m} (a_i + \langle x_i^*, \xi\rangle) = \max_{(\lambda, y^*) \in L} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i a_i + \langle y^*, y\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{(\lambda, y^*) \in L} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i''(\hat{x})[h,h] + \langle y^*, F''(\hat{x})[h,h]\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{(\lambda, y^*) \in L} L_{xx}''(\hat{x}, y^*, \lambda)[h,h].$$

За формулою Тейлора через умови $F'(\hat{x})[h] = 0$, $\Lambda\xi + y = 0$

$$F(\hat{x}+th+t^2\xi)=$$
$$= \quad F(\hat{x})+F'(\hat{x})[th+t^2\xi]+\frac{1}{2}F''(\hat{x})[th+t^2\xi,th+t^2\xi]+o(t^2)=$$
$$= \quad t^2F'(\hat{x})[\xi]+\frac{t^2}{2}F''(\hat{x})[h,h]+o(t^2)=t^2(\Lambda\xi+y)+o(t^2)=o(t^2).$$

За теоремою Люстерника існує відображення $\varphi:U\to X$ деякого околу U точки $\hat{x}$ таке, що
$$F(x+\varphi(x))=0,\|\varphi(x)\|\le K\|F(x)\|\forall x\in U.$$

Поклавши $r(t)=\varphi(\hat{x}+th+t^2\xi)$, одержимо, що при малих t
$$F(\hat{x}+th+t^2\xi+r(t))= \quad F(\hat{x}+th+t^2\xi+\varphi(\hat{x}+th+t^2\xi))=0,$$
$$\|r(t)\|\le \quad K\left\|F(\hat{x}+th+t^2\xi)\right\|=o(t^2).$$

Лема 4.7. *Вектор $\hat{x}$ доставляє локальний мінімум задачі*
$$\max_{i=0,1,\dots,m} f_i(x)\to\min, \quad F(x)=0, \tag{4.22}$$
(*за умови, що* $f_i(\hat{x})=0, i=0,1,\dots,m$).

Доведемо лему від супротивного. Припустимо, що $\hat{x}$ не доставляє локального мінімуму задачі (4.22). Тоді $\forall\delta>0$ існує точка $x=x(\delta)$ така, що $\|x-\hat{x}\|<\delta$ і
$$\max_{i=0,1,\dots,m} f_i(x)<\max_{i=0,1,\dots,m} f_i(\hat{x})= \quad 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_i(x)<0, i=0,1,\dots,m; F(x)= \quad 0$$
Це означає, що точка $x=x(\delta)$ є допустимою в задачі (4.22) і $f_0(x)<f_0(\hat{x})$. А це означає, що точка $\hat{x}$ не доставляє локального мінімуму задача (4.16). Одержали суперечність. □

Із доведеної леми випливає, що

$$
\begin{aligned}
0 &= \max_{i=0,1,\ldots,m} f_i(\hat{x}) \le \max_{i=0,1,\ldots,m} f_i(\hat{x}+th+t^2\xi+r(t)) = \\
&= \max_{i=0,1,\ldots,m} \{f_i(\hat{x}) + f_i'(\hat{x})[th+t^2\xi+r(t)] + \\
&+ \frac{1}{2} f_i''(\hat{x})[th+t^2\xi+r(t), th+t^2\xi+r(t)] + o(t^2)\} = \\
&= \max_{i=0,1,\ldots,m} \left\{ tf_i'(\hat{x})[h] + t^2 f_i'(\hat{x})[\xi] + \frac{t^2}{2} f_i''(\hat{x})[h,h] + o(t^2) \right\} \le \\
&\le t^2 \max_{i=0,1,\ldots,m} \left\{ f_i'(\hat{x})[\xi] + \frac{1}{2} f_i''(\hat{x})[h,h] \right\} + o(t^2) = \\
&= t^2 \max_{i=0,1,\ldots,m} \left\{ \langle x_i^*, \xi \rangle + a_i \right\} + o(t^2) = \\
&= \frac{t^2}{2} \max_{(\lambda, y^*) \in L} L''_{xx}(\hat{x}, y^*, \lambda)[h,h] + o(t^2).
\end{aligned}
$$

Розділимо вираз на t^2 і спрямуємо t до нуля. Одержимо

$$\max_{(\lambda, y^*) \in L} L''_{xx}(\hat{x}, y^*, \lambda)[h,h] \ge 0$$

для будь-якого вектора $h \in K$. Теорему доведено. □

Теорема 4.12 (про достатні умови другого порядку) [АТФ, с. 293]. *Нехай X, Y – банахові простори, функціонали $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\ldots,m$ і відображення $F : X \to Y$ двічі диференційовні за Фреше в деякому околі U точки $\hat{x}$, образ $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$, множина*

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{ (\lambda, y^*) \in R^{m+1} \times Y^* \;\middle|\; \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_{i'}(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0; \right. \\
\lambda_i f_i(\hat{x}) &\left. = 0, i = 1,\ldots,m; \lambda_i \ge 0, i = 0,1,\ldots,m; \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\} \ne \varnothing
\end{aligned}
$$

і виконується умова строгої додатної визначеності

$$\max_{(\lambda, y^*) \in L} L''_{xx}(\hat{x}, y^*, \lambda)[h,h] \ge \alpha \|h\|^2$$

для деякого $\alpha > 0$ і для всіх h, що належать конусу допустимих варіацій

$$K = \{h \in X : \langle f_{i'}(\hat{x}), h \rangle \le 0, i = 0,1,\ldots,m; F'(\hat{x})[h] = 0\}.$$

Тоді $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.16).

Доведення. Щоб довести справедливість теореми, використаємо властивості відображень, сформульовані в кінці параграфа у вигляді лем (лема Хоффмана та ін.). Вважатимемо, що $f_i(\hat{x}) = 0, i = 0,1,\ldots,m$. Покажемо, що існує таке $\delta > 0$, що умови

$$f_i(\hat{x}+h) \le 0, i = 0,1,\ldots,m; F(\hat{x}+h) = 0 \tag{4.23}$$

суперечливі при $\|h\| \le \delta, h \ne 0$. Із цього випливатиме, що $\hat{x}$ – точка локального мінімуму в задачі (4.16). Нехай умови (4.23) виконуються. Користуючись формулою Тейлора, можемо записати, що при $\|h\| \le \delta_1$

$$f_i(\hat{x}+h) = f_i(\hat{x}) + \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + \frac{1}{2} f_i''(\hat{x})[h,h] + r_i(h),\ \|r_i(h)\| = o(\|h\|^2),$$

$$F(\hat{x}+h) = F(\hat{x}) + F'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2} F''(\hat{x})[h,h] + r(h),\ \|r(h)\| = o(\|h\|^2).$$

Визначимо

$$f(x) = \max_{i=0,1,\ldots,m} f_i(x), a_i = \frac{1}{2} f_i''(\hat{x})[h,h] + r_i(h), i = 0,1,\ldots,m;$$

$$x_i^* = f_i'(\hat{x}), \Lambda = F'(\hat{x}), y = \frac{1}{2} F''(\hat{x})[h,h] + r(h).$$

Тоді вказані розклади можна записати у вигляді

$$f_i(\hat{x}+h) = \langle x_i^*, h\rangle + a_i \le 0, i = 0,1,\ldots,m; \Lambda h + y = 0. \tag{4.24}$$

Звідси

$$\langle x_i^*, h\rangle_+ \le |a_i| \le C_1 \|h\|^2, i = 0,1,\ldots,m; \|\Lambda h\| = \|y\| \le C_1 \|h\|^2. \tag{4.25}$$

Із леми Хоффмана випливає, що відстань від вектора h до конуса допустимих варіацій K оцінюється за формулою

$$d(h,K) \le C_2 \left(\sum_{i=0}^{m} \langle x_i^*, h\rangle_+ + \|\Lambda h\| \right) \le C_3 \|h\|^2.$$

Вектор h можна подати у вигляді суми $h = h_1 + h_2$, де $h_1 \in K$, $\|h_2\| \le C_3 \|h\|^2$. Виберемо δ_2 так, щоб з умови $\|h\| \le \delta_2$ випливала нерівність $C_1 \|h\| \le 1/2$ ($\delta_2 = 1/2C_3$). Тоді

$$\|h_1\| \ge \|h\| - \|h_2\| \ge \|h\| - C_3 \|h\|^2 \ge \|h\|(1 - C_3 \|h\|) \ge \|h\|/2.$$

і

$$\|h_2\| \le C_3 \|h\|^2 \le 4C_3 \|h_1\|^2. \tag{4.26}$$

Із леми про компактність множини L випливає, що $\left\|y^*\right\| \le C_4$ при $(\lambda, y^*) \in L$. Виберемо δ_3 настільки малим, щоб з умови $\|h\| \le \delta_3$ виходила нерівність

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\lambda_i r_i(h) + \langle y^*, r(h)\rangle\right| \le \frac{\alpha}{16}\|h\|^2 \le \frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2. \tag{4.27}$$

Позначимо

$$C_5 = \max_{(\lambda, y^*)\in L}\left\|L''_{xx}(\hat{x}, y^*, \lambda)\right\|.$$

Якщо $(\lambda, y^*) \in L$, то за визначенням множини L виконуються умови:

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i = 1; \lambda_i \ge 0, \quad i = 0,1,\ldots,m; \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\langle x_i^*, x\rangle + \langle \Lambda^* y^*, x\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\langle x_i^*, x\rangle + \langle y^*, \Lambda x\rangle = 0 \,\forall\, x \in X.$$

Звідси

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\langle x_i^*, x\rangle = 0 \,\forall\, x \in \mathrm{Ker}\Lambda.$$

Тому

$$\max_{i=0,1,\ldots,m}\langle x_i^*, x\rangle \ge 0 \,\forall\, x \in \mathrm{Ker}\Lambda.$$

Отже, можна скористатися лемою про мінімакс. Із цієї леми випливає, що

$$0 \ge \max_{i=0,1,\ldots,m} f_i(\hat{x} + h) = \max_{i=0,1,\ldots,m}\{\langle x_i^*, h\rangle + a_i\}$$

$$= \min_{\Lambda x + y = 0}\max_{i=0,1,\ldots,m}\{\langle x_i^*, h\rangle + a_i\} =$$

$$= \max_{(\lambda, y^*)\in L}\Big(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i \frac{1}{2} f_i''(\hat{x})[h,h] + \langle y^*, \frac{1}{2}F''(\hat{x})[h,h]\rangle + \sum_{i=0}^{m}\lambda_i r_i(h) +$$

$$+ \ \langle y^*, r(h)\rangle\Big) \ge \max_{(\lambda, y^*)\in L} L''_{xx}(\hat{x}, y^*, \lambda)[h_1 + h_2, h_1 + h_2] - \frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2 \ge$$

$$\ge \max_{(\lambda, y^*)\in L} L''_{xx}(\hat{x}, y^*, \lambda)[h_1, h_1] - C_5\|h_1\|\|h_2\| - \frac{\alpha}{4}C_5\|h_2\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|h\|^2 \ge$$

$$\ge \frac{\alpha}{2}\|h_1\|^2 - 4C_3C_5\|h_1\|^3 - 8C_3^2C_5\|h_1\|^4 - \frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2$$

якщо з нерівності $\|h\| < \delta \le \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ випливає нерівність

$$\frac{\alpha}{4}\|h_1\|^2 \ge 4C_3C_5\|h_1\|^3 + 8C_3^2C_5\|h_1\|^4 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} \ge 4C_3C_5\|h_1\| + 8C_3^2C_5\|h_1\|^2,$$

яка завжди виконуватиметься при достатньо малих h_1, а через нерівність $\|h\| \le 2\|h_1\|$ – і при достатньо малих h. Одержали суперечність:

$$0 \ge \max_{i=0,1,\ldots,m} f_i(\hat{x}+h) > 0.$$

Теорему доведено. □

Лема 4.8 (про замкнутість) [11, с. 95]. *Нехай X – банаховий простір, L, L_1 – підпростори в X, причому L – замкнутий підпростір, а L_1 – підпростір скінченної розмірності* $(\dim L_1 < \infty)$. *Тоді сума $L + L_1$ є замкнутим підпростором X.*

Лема 4.9 (про компактність L) [11, с. 96]. *Нехай X, Y – банахові простори, $\Lambda \in L(X,Y)$ – лінійний неперервний оператор з X на простір Y, $\Lambda X = Y$, $x_i^* \in X^*$, $i = 1,\ldots,n$ – функціонали на X. Тоді множина*

$$L = \left\{(\lambda, y^*) \in R^n \times Y^* \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* = 0;\ \ \lambda_i \ge 0, i = 1,\ldots,n; \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\right\}$$

компактна.

Лема 4.10 (Лема Хоффмана) [АТФ, с. 279]. *Нехай задані банахові простори X, Y, лінійний неперервний оператор $\Lambda \in L(X,Y)$ з X на простір Y, $\Lambda X = Y$, функціонали $x_i^* \in X^*$, $i = 1,\ldots,n$ на X, конус*

$$K = \{h \in X : \langle x_i^*, h\rangle \le 0, i = 0,1,\ldots,m; \Lambda h = 0\}.$$

Тоді існує константа $C > 0$ така, що відстань

$$d(x,K) \le C\left(\sum_{i=0}^{m}\langle x_i^*, h\rangle_+ + \|\Lambda h\|\right).$$

4.6. Економічні інтерпретації множників Лагранжа

Множникам Лагранжа можна давати різноманітні економічні інтерпретації залежно від вигляду задачі та її тлумачення. Нижче наводяться дві такі інтерпретації. У першій множники Лагранжа виникають як вектор дефіцитності ресурсів, а в другій вони збігаються з вектором цін, які діють у системі.

Розглянемо задачу максимізації

$$f(x) \to \max, \quad g(x) \le b, \quad x \in P, \tag{4.28}$$

де x – n-вимірний вектор виробництва товарів підприємством; P – множина технологічно можливих планів виробництва товарів $P \subset R_+^n$; $g(x)$ – m-вимірний вектор витрат ресурсів на виробництва товарів x, $g(x) \ge 0$; b – вектор, який характеризує запаси ресурсів, $b > 0$; $f(x)$ – прибуток, який одержує підприємство від реалізації x товарів. Задача (4.28) задовольняє умову Слейтера: $g(0) < b$. Необхідні для застосування викладеної вище теорії припущення про опуклість множини, угнутості функції f і опуклості функції g також мають економічну інтерпретацію. Так, необхідною (а при неперервності f і достатньою) умовою угнутості f на P є нерівність

$$f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x) \le f(x + \Delta x) - f(x),$$

яка виконується при всіх $x \in P$ і $\Delta x \in R^n$ таких, що $x + 2\Delta x \in P$.

При $\Delta x \ge 0$ ця нерівність означає, що із зростанням масштабів виробництва приріст прибутку знижується (напр., у зв'язку із труднощами, що виникають при реалізації товарів).

Нехай тепер $\hat{x} = \hat{x}(b)$ – розв'язок задачі (4.28), а $\Phi(b) = f(\hat{x}(b))$ – значення задачі (4.28), тобто оптимальний план випуску товарів і максимальний прибуток від реалізації товарів при запасі ресурсів b. Нехай $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m)$ – множники Лагранжа задачі (4.28), точніше еквівалентної задача

$$-f(x) \to \min, \quad g(x) - b \le 0, \quad x \in P.$$

Тоді, якщо і-й ресурс використовується не повністю ($g_i(\hat{x}) < b$), то $\hat{\lambda}_i = 0$ в силу теореми 4.10. При цьому збільшення тільки і-го ресурсу не може привести до збільшення прибутку підприємства ($\Phi(b + \alpha e_i) = \Phi(b)$ при $\alpha > 0$). У цьому випадку говорять, що і-й ресурс *недефіцитний*. Якщо ж $\hat{\lambda}_i > 0$, то і-й ресурс *дефіцитний*: він використовується повністю ($g_i(\hat{x}) = b_i$). Збільшення його запасу приводить до зростання прибутку підприємства ($\Phi(b + \alpha e_i) > \Phi(b)$ при $\alpha > 0$).

Отже, множники Лагранжа задачі (4.28) виступають як характеристика дефіцитності ресурсів, які використовуються для виробництва товарів.

Ми не враховували, що придбання додаткових ресурсів вимагає певних затрат з боку підприємства. Тепер врахуємо цю обставину. Нехай $P = (p_1, \ldots, p_m)$ – заданий вектор цін на ресурси, $p > 0$. Вважатимемо, що підприємство може як купувати необхідні ресурси, так і продавати "непотрібну" частину ресурсів з метою максимізації загального прибутку, який враховує і результати торгових операцій з ресурсами. Тоді діяльність підприємства описується такою задачею:

$$f(x) - \langle p, h \rangle \to \max, \quad g(x) \le b + h, \quad x \in P, \quad h \ge -b, \qquad (4.29)$$

де $h = (h_1, \ldots, h_m)$ – вектор продажу-купівлі ресурсів підприємством: при $h_i > 0$ ресурс i купується, при $h_i < 0$ ресурс продається. Умова $h \ge -b$ означає, що підприємство не може продати ресурсів більше, ніж у нього є. Нехай $(\hat{x}, \hat{h})$ – розв'язок задачі (4.29), а $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m)$ – її множники Лагранжа, які відповідають функціональному обмеженню $g(x) \le b + h$. Тоді за теоремою 4.10 маємо

$$L(\hat{x}, \hat{h}, \hat{\lambda}) = \min_{x \in P, h \ge -b} L(x, h, \hat{\lambda}),$$

де

$$L(x, h, \lambda) = -f(x) + \langle p, h \rangle + \langle \lambda, g(x) - b - h \rangle.$$

Природно вважати, що $\hat{h} > -b$, тобто підприємству не вигідно повністю продавати ресурси. Тоді градієнт функції $L(x, h, \hat{\lambda})$ по h у точці $(\hat{x}, \hat{h})$ перетворюється в нуль:

$$L'_h(\hat{x}, \hat{h}, \hat{\lambda}) = p - \hat{\lambda} = 0.$$

Тепер множники Лагранжа задачі (4.29) – це вектор діючих цін.

Задачі

Розв'язати такі задачі на екстремум.

4.1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \to extr.$

4.2. $f(x,y) = ae^{-x} + be^{-y} + \ln(e^x + e^y) \to extr.$

4.3. $f(x,y) = (x+y)(x-a)(y-b) \to extr.$

4.4. $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5 \to extr.$

4.5. $f(x,y) = x + y + 4\sin(x)\sin(y) \to extr.$

4.6. $f(x,y) = xe^x - (1+e^x)\cos(y) \to extr.$

4.7. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \to extr.$

4.8. $f(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2) \to extr.$

4.9. $f(x,y) = x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3\text{arctg}(y/x) \to extr.$

4.10. $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y) \to extr, 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi.$

4.11. $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y) + \cos(x-y) \to extr, 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/2.$

4.12. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln(x) - 10\ln y \to extr.$

4.13. $f(x,y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+y^2+xy)} \to extr.$

4.14. $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y) \to extr.$

4.15. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) \to extr.$

4.16. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \to extr.$

4.17. $f(x,y) = (ax + by + c)/\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \to extr.$

4.18. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2} \to extr.$

4.19. $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2 \to extr.$

4.20. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to extr.$

4.21. $f(x,y) = xy + 50/x + 20/y \to extr.$

4.22. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y \to extr.$

4.23. $f(x,y) = 5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \to extr.$

4.24. $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to extr.$

4.25. $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2 \to extr.$

4.26. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to extr.$

4.27. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 2z \to extr.$

4.28. $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) \to extr, a > 0.$

4.29. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \to extr, x > 0, y > 0, z > 0.$

4.30. $f(x,y,z) = x + y^2/4x + z^2/y + 2/z \to extr.$

4.31. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z \to extr.$

4.32. $f(x,y) = y \to extr$, $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

4.33. $f(x,y) = x^3 + y^3 \to extr$, $ax + by = 1, a > 0, b > 0.$

4.34. $f(x,y) = x^3/3 + y \to extr$, $x^2 + y^2 = a, a > 0.$

4.35. $f(x,y) = x\sin(y) \to extr$, $3x^2 - 4\cos(y) = 1$.

4.36. $f(x,y) = x/a + y/b \to extr$, $x^2 + y^2 = 1$.

4.37. $f(x,y) = x^2 + y^2 \to extr$, $x/a + y/b = 1$.

4.38. $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \to extr$, $x^2 + y^2 = 1$.

4.39. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2 \to extr$, $4x^2 + y^2 = 25$.

4.40. $f(x,y) = \cos^2(x) + \cos^2(y) \to extr$, $x - y = \pi/4$.

4.41. $f(x,y) = x/2 + y/3 \to extr$, $x^2 + y^2 = 1$.

4.42. $f(x,y) = x^2 + y^2 \to extr$, $3x + 4y = 1$.

4.43. $f(x,y) = e^{xy} \to extr$, $x + y = 1$.

4.44. $f(x,y) = 5x^2 + 4xy + y^2 \to extr$, $x + y = 1$.

4.45. $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2 \to extr$, $x + y = 1$.

4.46. $f(x,y,z) = xy^2z^3 \to extr$, $x + y + z = 1$.

4.47. $f(x,y,z) = xyz \to extr$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

4.48. $f(x,y,z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \to extr$,
$x^2 + y^2 + z^2 = 1, a > b > c > 0$.

4.49. $f(x,y,z) = x + y + z^2 + 2(xy + yz + zx) \to extr$, $x^2 + y^2 + z = 1$.

4.50. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z \to extr$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.51. $f(x,y,z) = x^m y^n z^p \to extr$, $x + y + z = a$, $m > 0, n > 0, p > 0, a > 0$.

4.52. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \to extr$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$,
$a > b > c > 0$.

4.53. $f(x,y,z) = xy^2z^3 \to extr$, $x + 2y + 3z = a$, $x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$.

4.54. $f(x,y,z) = xy + yz \to extr$, $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$, $x > 0, y > 0, z > 0$.

4.55. $f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z) \to extr$, $x + y + z = \pi/2$.

4.56. $f(x,y) = e^{x-y} - x - y \to extr$, $x + y \le 1, x \ge 0$, $y \ge 0$.

4.57. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y \to extr$, $2x + 3y - 6 \le 0$, $x + 4y - 5 \le 0$.

4.58. $f(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 \to extr$, $x - y + 1 \ge 0$, $2x + 3y + 6 \le 0$.

4.59. $f(x,y) = x^2 + y^2 \to extr$, $-5x + 4y \le 0$, $-x + 4y + 3 \le 0$.

4.60. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x \to extr$, $x - 2y + 2 \le 0$, $2x - y \ge 0$.

4.61. $f(x,y,z) = xyz \to extr$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

4.62. $f(x,y,z) = 2x^2 + 2x + 4y - 3z \to extr$,
$8x - 3y + 3z \le 40, -2x + y - z = -3$, $y \ge 0$.

4.63. $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 \to extr$, $x + y + z \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4.64. $f(x,y,z) = 3y^2 - 11x - 3y - z \to extr$, $x - 7y + 3z + 7 \le 0$,
$5x + 2y - z \le 2$, $z \ge 0$.

4.65. $f(x,y,z) = xy - 2y \to extr$, $2x - y - 3z \le 10$, $3x + 2y + z = 6$, $y \ge 0$.

4.66. $f(x,y,z) = -4x - y + z^2 \to extr$, $x^2 + y^2 + xz - 1 \le 0$,
$x^2 + y^2 - 2y \le 0$, $5 - x + y + z \le 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4.67. $\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \to \max$, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{\beta_j} = b$,
$b > 0, x_j \ge 0, \alpha_j > 0, \beta_j > 0, a_j > 0, j = 1,2,\ldots,n.$

4.68. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha_j} \to \min$, $\prod_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j} = b$,
$b > 0, x_j \ge 0, c_j > 0, \alpha_j > 0, \beta_j > 0, j = 1,2\ldots,n.$

4.69. $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{c_j}{x_j^{\alpha_j}} \to \min$, $\prod_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j} = b$,

$b > 0, x_j > 0, c_j > 0, \alpha_j > 0, \beta_j > 0, j = 1,2\ldots,n.$

4.70. $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{c_j}{x_j^{\alpha_j}} \to \min$, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$,

$b > 0, \alpha > 0, x_j > 0, c_j > 0, j = 1,2\ldots,n.$

4.71. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha} \to \max$, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$,
$b > 0, 0 < \alpha < 1, x_j > 0, c_j > 0, j = 1,2\ldots,n.$

4.72. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha} \to \min$, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$,
$c_j > 0, a = (a_1,\ldots,a_n) \ne 0, \alpha = 2m, m \in N.$

4.73. $\sum_{j=1}^{n} c_j \mid x_j \mid^{\alpha} \to \min$, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$,
$c_j > 0, a = (a_1,\ldots,a_n) \ne 0, \alpha > 1.$

4.74. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$, $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{\alpha} = b$,
$b > 0, a_j > 0, c = (c_1,\ldots,c_n) \ne 0, \alpha = 2m, m \in N.$

4.75. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$, $\sum_{j=1}^{n} a_j \mid x_j \mid^{\alpha} = b$,

$b > 0, a_j > 0, c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0, \alpha > 1$.

4.76. $\sum_{j=1}^{n} \mid c_j + x_j \mid^{\alpha} \to \max(\min)$, $\sum_{j=1}^{n} \mid x_j \mid^{\alpha} = b$,

$b > 0, c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0, \alpha > 1$.

4.77. Розділити число 8 на дві частини так, щоб добуток їхнього добутку на різницю був максимальним (задача Тартальї).

4.78. Визначити прямокутний трикутник найбільшої площі за умови, що сума довжин його катетів дорівнює заданому числу (задача Ферма).

4.79. На стороні BC трикутника ABC визначити точку E так, щоб паралелограм $ADEK$, у якого точки D і K лежать відповідно на сторонах AB і AC, мав найбільшу площу (задача Евкліда).

4.80. На заданій грані тетраедра беруть точку, через яку проводять площини, паралельні трьом іншим граням. Вибрати точку так, щоб об'єм паралелепіпеда був максимальним (узагальнена задача Евкліда).

4.81. Визначити поліном другого степеня $t^2 + x_1 t + x_2$ такий, що інтеграл

$$\int_{-1}^{1} (t^2 + x_1 t + x_2)^2 \, dt$$

набуває найменшого значення (задача про поліном Лежандра другого степеня).

4.82. Визначити поліном третього степеня $t^3 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3$ такий, що інтеграл

$$\int_{-1}^{1} (t^3 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3)^2 \, dt$$

набуває найменшого значення (задача про поліном Лежандра третього степеня).

4.83. Серед усіх дискретних випадкових величин, що набувають n значень, визначити випадкову величину з найбільшою ентропією. (Ентропією послідовності додатних чисел, що дорівнюють у сумі одиниці, називається число $H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$.)

4.84. Вписати в коло прямокутник максимальної площі.

4.85. Вписати в коло трикутник максимальної площі.

4.86. Вписати в кулю циліндр максимального об'єму (задача Кеплера).

4.87. Вписати в кулю конус максимального об'єму.

4.88. Серед конусів, вписаних у кулю, визначити конус з максимальною площею бічної поверхні.

4.89. Вписати в кулю простору R^n прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

4.90. Вписати у сферу тетраедр найбільшого об'єму.

4.91. Серед трикутників, що мають заданий периметр, визначити трикутник найбільшої площі.

4.92. Серед усіх n-кутників, що мають заданий периметр, визначити n-кутник найбільшої площі (задача Зенона).

4.93. Вписати в коло n-кутник максимальної площі.

4.94. На діаметрі AB кола одиничного радіуса взята точка, через яку провели хорду CD. Визначити положення хорди, за якого площа чотирикутника $ACBD$ максимальна.

4.95. Визначити в трикутнику таку точку, щоб сума відношень довжин сторін і відстаней від цієї точки до відповідних сторін була мінімальною.

4.96. Вписати в коло трикутник з найбільшою сумою квадратів сторін.

4.97. Через задану точку всередині кута провести відрізок з кінцями на сторонах кута так, щоб площа утвореного трикутника була найменша.

4.98. Через точку всередині кута провести відрізок з кінцями на сторонах кута так, щоб периметр утвореного трикутника був найменшим.

4.99. Визначити чотирикутник із заданими сторонами найбільшої площі.

4.100. Серед сегментів кулі, які мають задану площу бічної поверхні, відшукати сегмент з найбільшим об'ємом (задача Архімеда).

4.101. Визначити на прямій точку C таку, що сума відстаней від точки C до заданих точок A і B мінімальна.

4.102. Серед усіх тетраедрів із заданими основою і висотою відшукати тетраедр з найменшою бічною поверхнею.

4.103. Серед усіх тетраедрів із заданими основою і площею бічної поверхні відшукати тетраедр з найбільшим об'ємом.

4.104. Серед усіх тетраедрів, які мають задану площу поверхні, відшукати тетраедр, який має найбільший об'єм.

4.105. На площині задано три точки x_1, x_2, x_3. Визначити таку точку x_0, що сума квадратів відстаней від точки x_0 до точок x_1, x_2, x_3 найменша.

4.106. У просторі R^n задано N точок $x_1,\ldots,x_N$ і N додатних чисел $m_1,\ldots,\ m_N$. Визначити таку точку x_0, що сума з коефіцієнтами m_i квадратів відстаней від точки x_0 до $x_1,\ldots,x_N$ найменша.

4.107. Розв'язати задачу 4.106 за умови, що точка x_0 лежить на кулі одиничного радіуса.

4.108. Розв'язати задачу 4.106 за умови, що точка x_0 належить сфері одиничного радіуса.

4.109. Визначити відстань від точки до еліпса. Скільки нормалей можна провести з точки до еліпса (задача Аполлонія)?

4.110. Визначити відстань від точки до параболи.

4.111. Визначити відстань від точки до гіперболи.

4.112. Визначити відстань від точки x_0 у просторі R^n до гіперплощини $H=\{x\in R^n \mid \langle a,x\rangle=\beta\}$.

4.113. Визначити відстань від точки до гіперплощини в гільбертовому просторі.

4.114. Визначити відстань від точки до прямої у просторі R^n.

4.115. Визначити мінімум лінійного функціонала на одиничній кулі.

4.116. В еліпс $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ вписати прямокутник найбільшої площі із сторонами, паралельними осям координат.

4.117. В еліпсоїд $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму з ребрами, паралельними осям координат.

4.118. Довести нерівність між середніми степеневими

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, -\infty<p\le q\le\infty, p\ne 0, q\ne 0.$$

4.119. Довести нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ 0<p\le q\le\infty.$$

4.120. Довести нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним:

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad x_i\ge 0, i=1,\ldots,n.$$

4.121. Довести нерівність Гельдера

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i a_i| \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, q>1, p\ge 1.$$

Переконатися, що при $a=(a_1,\ldots,a_n)\ne 0$ рівність має місце лише при $|x_i|=\lambda |a_i|, i=1,\ldots,n.$

4.122. Довести нерівність Мінковського

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}, p>1.$$

Переконатися, що при $y=(y_1,\ldots,y_n)\ne 0$ рівність має місце лише при $x_i=\lambda y_i, \lambda>0, i=1,\ldots,n.$

Розділ II

Варіаційне числення

5. РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА ТА ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ

5.1. Задача про брахістохрону

І. Бернуллі в 1696 р. сформулював таку задачу. Нехай у вертикальній площині задано дві точки A і B. Визначити шлях, рухаючись по якому під дією сили власної ваги, тіло переміститься із точки A в точку B за мінімальний час.

Виберемо в площині систему координат (x,y) так, щоб вісь X була горизонтальною, а вісь Y була направлена вниз. Вважатимемо, що точка A збігається з початком координат, а точка B має координати (x_1,y_1), $x_1>0$, $y_1>0$.

Нехай $y(x)$ – функція, яка задає рівняння кривої, що сполучає точки A і B. Відповідно до закону Галілея швидкість тіла в точці $M(x,y(x))$ залежить не від форми кривої, а від ординати $y(x)$. Ця швидкість рівна $\sqrt{2gy(x)}$, де g – прискорення вільного падіння. Тому час переміщення тіла з точки $(x,y(x))$ в точку $(x+dx,y(x)+dy)$ по кривій довжини $ds=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ дорівнює $ds/\sqrt{2gy(x)}$. Звідси виникає така формалізація задачі про брахістохрону:

$$J(y(\cdot)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx \to \inf, \qquad (5.1)$$
$$y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1.$$

Задача про брахістохрону звелася до задачі визначення неперервної функції $y = y(x)$ на відрізку $[0, x_1]$, яка набуває заданих значень на кінцях відрізка $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$, і на якій досягає мінімального значення функціонал, заданий формулою (5.1) (рис. 5.1).

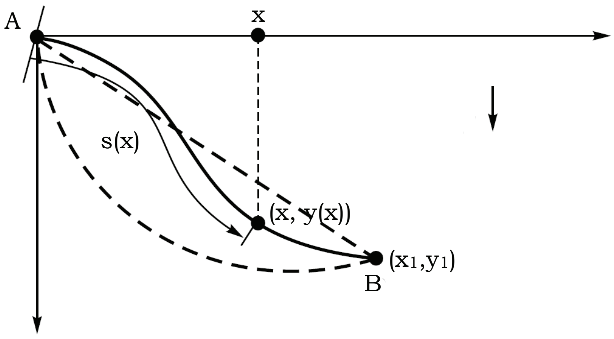

Рис. 5.1

Головна відмінність цієї задачі від задачі дослідження на екстремум функції однієї або багатьох змінних полягає в тому, що функціонал $J(y(\cdot))$ визначений на множині кривих, що сполучають дві точки, а множина всіх таких кривих має нескінченну розмірність. Тобто задача про брахістохрону – це задача на екстремум функції нескінченної кількості змінних.

5.2. Найпростіша задача варіаційного числення

Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа на множині функцій із закріпленими кінцями) – це задача визначення екстремуму інтегрального функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr \qquad (5.2)$$

на множині функцій із простору $C^1([t_0,t_1],R)$ неперервно диференційовних скалярних функцій на відрізку $[t_0,t_1]$, що задовольняють граничні умови

$$x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1. \tag{5.3}$$

Простір $C^1([t_0,t_1],R)$ є банаховим, тобто повним нормованим простором відносно норми

$$\|x(\cdot)\|_1=\max\{\max_{t_0\le t\le t_1}|x(t)|,\ \max_{t_0\le t\le t_1}|x'(t)|\}.$$

Функція $L(t,x,x')$, яка задає функціонал, називається *інтегрантом* або *лагражіаном* задачі. Вважатимемо, що функція $L(t,x,x')$ неперервна за сукупністю змінних разом із своїми частинними похідними $L_x(t,x,x')$ $L_{x'}(t,x,x')$. Функції $x(t)$, $t_0\le t\le t_1$, називаються *допустимими* в задачі (5.2), (5.3), якщо вони належать простору $C^1([t_0,t_1],R)$ і задовольняють граничні умови (5.3).

Функціонал $J(x(\cdot))$ досягає на допустимій функції $\hat{x}(\cdot)$ *сильного локального мінімуму* (*сильного локального максимуму*), якщо існує таке число $\varepsilon>0$, що для всіх допустимих функцій $x(\cdot)$, які задовольняють умову

$$\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_0=\max_{t_0\le t\le t_1}|x(t)-\hat{x}(t)|<\varepsilon,$$

виконується нерівність

$$J(x(\cdot))\ge J(\hat{x}(\cdot)) \quad (J(x(\cdot))\le J(\hat{x}(\cdot))).$$

Функціонал $J(x(\cdot))$ досягає на допустимій функції $\hat{x}(\cdot)$ *слабкого локального мінімуму* (*слабкого локального максимуму*), якщо існує таке число $\varepsilon>0$, що для всіх допустимих функцій $x(\cdot)$, які задовольняють умову

$$\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_1=\max\left(\max_{t_0\le t\le t_1}|x(t)-\hat{x}(t)|,\ \max_{t_0\le t\le t_1}|x'(t)-\hat{x}'(t)|\right)<\varepsilon,$$

виконується нерівність

$$J(x(\cdot))\ge J(\hat{x}(\cdot)) \quad (J(x(\cdot))\le J(\hat{x}(\cdot))).$$

При визначенні сильного мінімуму (максимуму) порівнюються значення функціонала $J(x(\cdot))$ на допустимих функціях $x(\cdot)$, значення яких близькі до значень функції $\hat{x}(\cdot)$, тобто таких, які задовольняють умову $|x(t)-\hat{x}(t)|<\varepsilon$ для всіх $t\in[t_0,t_1]$.

При визначенні слабкого мінімуму (максимуму) порівнюються значення функціонала $J(x(\cdot))$ на допустимих функціях $x(\cdot)$, значення яких близькі до значень $\hat{x}(\cdot)$ і значення похідної $x'(\cdot)$, близькі до значень похідної $\hat{x}(\cdot)$, тобто

$$|x(t)-\hat{x}(t)| \quad < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$
$$|x'(t)-\hat{x}'(t)| \quad < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Якщо на функції $\hat{x}(\cdot)$ досягається сильний екстремум, то досягається і слабкий екстремум. Тому необхідні умови слабкого екстремуму будуть необхідними умовами сильного екстремуму, а достатні умови сильного екстремуму будуть достатніми умовами слабкого екстремуму.

Теорема 5.1 (про необхідну умову екстремуму в найпростішій задачі класичного варіаційного числення). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R)$ *– розв'язок задачі* (*5.2*), (*5.3*). *Тоді вона задовольняє рівняння*

$$L_x^{'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - \frac{d}{dt} L_{x'}^{'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = 0. \tag{5.4}$$

Рівняння (5.4) називають *рівнянням Ейлера.* Допустима функція, яка задовольняє це рівняння, називається *екстремаллю.* Таким чином, локальні екстремуми задачі (5.2), (5.3) є екстремалями.

Теорему доведемо методом Лагранжа. При цьому додатково припускатимемо, що функція $L'_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ неперервно диференційовна на відрізку $[t_0, t_1]$. Потім доведемо теорему методом Дюбуа – Реймона без цих додаткових припущень.

Доведення. А. Визначення першої варіації Лагранжа. Позначимо через H_0 підпростір у просторі $C^1([t_0, t_1], R)$ функцій $h(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, які задовольняють нульові граничні умови $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Якщо функція $x(\cdot)$ допустима в задачі (5.2), (5.3), то функції $x(\cdot) + \lambda h(\cdot)$, $h(\cdot) \in H_0$ також допустимі в задачі (5.2) (5.3). Розглянемо функцію

$$\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \hat{x}'(t) + \lambda h'(t)) dt.$$

Обмеження, які задовольняє функція $L(t, x, x')$, дозволяють диференціювати під знаком інтеграла (для цього достатньо, щоб функція, що стоїть під знаком інтеграла, та її похідна по λ були неперервні). Продиференціюємо $\varphi(\lambda)$ і підставимо $\lambda = 0$. Одержимо

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_x(t)h(t) + \hat{L}_{x'}(t)h'(t))dt, \tag{5.5}$$

де $\hat{L}_x(t) = L'_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$, $\hat{L}_{x'}(t) = L'_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$. Тому границя

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}(J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot))) = \varphi'(0) = \delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$$

існує для кожної функції $h(\cdot) \in H_0$. Функція $h(\cdot) \to \delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$ називається *першою варіацією Лагранжа* функціонала $J(x(\cdot))$ в точці $\hat{x}(\cdot)$.

B. Перетворення першої варіації за допомогою інтегрування частинами. Проінтегруємо частинами другий доданок у виразі (5.5), враховуючи, що функція $\hat{L}_{x'}(t) = L'_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ неперервно диференційовна, а функція $h(\cdot) \in H_0$ задовольняє нульові граничні умови $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Одержимо

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{x'}(t)h'(t)dt &= \hat{L}_{x'}(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)\right)h(t)dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)\right)h(t)dt. \end{aligned}$$

Перша варіація Лагранжа функціонала $J(\hat{x}(\cdot))$ буде рівна

$$\delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)\right)h(t)dt. \tag{5.6}$$

Функціонал $J(x(\cdot))$ досягає на функції $\hat{x}(\cdot)$ екстремуму. Тому функція дійсної змінної $\varphi(\lambda)$ має локальний екстремум у точці $\lambda = 0$. Із теореми Ферма випливає, що $\varphi'(0) = \delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = 0$ для всіх $h(\cdot) \in H_0$. Порівнюючи з (5.6), одержимо таку умову локального екстремуму:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)\right)h(t)dt = 0 \tag{5.7}$$

для кожної функції $h(\cdot) \in H_0$.

C. Основна лема класичного варіаційного числення (лема Лагранжа).

Лема 5.1 (Лема Лагранжа). *Нехай $a(t)$ – неперервна на відрізку $[t_0, t_1]$ функція. Якщо*

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)dt = 0$$

для кожної неперервно диференційовної функції $h(t)$ з нульовими граничними умовами $h(t_0) = h(t_1) = 0$, то $a(t) = 0$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Доведення. Лему доведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує точка $\tau \in [t_0, t_1]$ така, що $a(\tau) \neq 0$. Унаслідок неперервності функції $a(t)$ існує відрізок $\Delta = [\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$, на якому функція $a(t)$ зберігає знак. Нехай $a(t) \geq m > 0$, $t \in \Delta$. Побудуємо при $k \geq 1$ функцію

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} (t-\tau_0)^{2k}(t-\tau_1)^{2k}, & t \in \Delta, \\ 0, & t \neq \Delta. \end{cases}$$

Вона неперервно диференційовна і задовольняє нульові граничні умови. Тому $\tilde{h}(\cdot) \in H_0$. У той же час

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\tilde{h}(t)dt = \int_\Delta a(t)\tilde{h}(t)dt \geq m\int_\Delta \tilde{h}(t)dt > 0.$$

Ця суперечність доводить справедливість леми.

Зіставляючи A, B, C, переконуємося в тому, що теорема 5.1 доведена.

Для доведення ми використали так званий *метод варіацій.* За його допомогою доводять необхідні умови екстремуму. Суть методу можна пояснити так. Нехай $\hat{x}$ – точка, яка досліджується на екстремум у задачі $f(x) \to \inf$, $x \in C$. Тоді будують неперервне відображення $\lambda \to x(\lambda)$, $\lambda \in R_+$ так, щоб $x(0) = \hat{x}$ і $x(\lambda) \in C$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Таку криву природно називати *варіацією аргументу функціонала* $f(x)$. Нехай $\varphi(\lambda) = f(x(\lambda))$. Припустимо, що функція $\varphi(\lambda)$ диференційовна справа по λ в точці $\lambda = 0$. Якщо $\hat{x}$ – дійсно точка мінімуму, то має виконуватися нерівність $\varphi'(+0) \geq 0$. Якщо вдається побудувати достатньо масивну множину варіацій аргументу, то нерівності $\varphi'(+0) \geq 0$, які стосуються всіх варіацій, дають необхідну умову мінімуму.

Щоб довести теорему 5.1, ми використовували варіації за напрямком $x(\lambda) = \hat{x} + \lambda h$. При доведенні необхідної умови Вейєрштрасса, а також принципу максимуму Понтрягина використовують варіації іншого типу – так звані "голкові'' варіації.

Виведемо рівняння Ейлера методом Дюбуа – Реймона без додаткового припущення про те, що похідна $L_{x'}'(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ неперервно диференційовна.

Лема 5.2 (Лема Дюбуа – Реймона). *Нехай* $b(t)$ *– неперервна на відрізку* $[t_0, t_1]$ *функція. Якщо для будь-якої неперервної на* $[t_0, t_1]$ *функції* $\eta(t)$, *яка дорівнює нулю в середньому, тобто*

$$\int_{t_0}^{t_1}\eta(t)dt = 0,$$

виконується рівність

$$\int_{t_0}^{t_1}b(t)\eta(t)dt = 0,$$

то функція $b(t)$ *стала на* $[t_0,t_1]$, *тобто* $b(t) = C = \mathrm{const}$, $t \in [t_0,t_1]$.

Доведення. Лему доведемо за допомогою методу від супротивного. Нехай функція $b(t)$ не стала на $[t_0,t_1]$. Тоді існують точки τ_1, $\tau_2 \in (t_0,t_1)$ такі, що $b(\tau_1) \neq b(\tau_2)$. Нехай $\tau_1 < \tau_2$ і $b(\tau_1) > b(\tau_2)$. Унаслідок неперервності $b(t)$ існує таке $\varepsilon > 0$, що інтервали $\Delta_1 = (\tau_1 - \varepsilon, \tau_1 + \varepsilon)$, $\Delta_2 = (\tau_2 - \varepsilon, \tau_2 + \varepsilon)$ не перетинаються і

$$b_1 = \min_{t\in\Delta_1} b(t) > b_2 = \max_{t\in\Delta_2} b(t).$$

Побудуємо функцію

$$\tilde{\eta}(t) = \begin{cases} (t-\tau_1+\varepsilon)^2(t-\tau_1-\varepsilon)^2, & t \in \Delta_1, \\ -(t-\tau_2+\varepsilon)^2(t-\tau_2-\varepsilon)^2, & t \in \Delta_2, \\ 0, & t \neq \Delta_1 \cup \Delta_2. \end{cases}$$

Вона задовольняє вимоги леми: неперервна і

$$\int_{t_0}^{t_1}\tilde{\eta}(t)dt = 0.$$

Проте

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1}b(t)\tilde{\eta}(t)dt &= \int_{\Delta_1}b(t)\tilde{\eta}(t)dt + \int_{\Delta_2}b(t)\tilde{\eta}(t)dt \\ &\geq (b_1 - b_2)\int_{\Delta_1}\tilde{\eta}(t)dt > 0. \end{aligned}$$

Ця суперечність доводить справедливість леми.

Лема 5.3. *Нехай* $a(t)$, $b(t)$ *– неперервні на відрізку* $[t_0,t_1]$ *функції і для кожної неперервно диференційовної на* $[t_0,t_1]$ *функції* $h(t)$ *такої, що* $h(t_0) = h(t_1) = 0$, *виконується умова*

$$\int_{t_0}^{t_1}(a(t)h(t) + b(t)h'(t))dt = 0.$$

Тоді функція $b(t)$ *неперервно диференційовна на* $[t_0,t_1]$ *і* $b'(t) = a(t)$, $t \in [t_0,t_1]$.

Доведення. Позначимо через $A(t)$ первісну функції $a(t)$, яка дорівнює нулю при $t = t_0$, тобто

$$A(t)=\int_{t_0}^{t}a(t)dt.$$

Тоді

$$a(t)h(t)=A'(t)h(t)=\frac{d}{dt}(A(t)h(t))-A(t)h'(t),$$

звідки

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}(a(t)h(t)+b(t)h'(t))dt=\\&=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(A(t)h(t))dt+\int_{t_0}^{t_1}(b(t)-A(t))h'(t)dt=0\end{aligned}\tag{5.8}$$

для всіх неперервно диференційовних функцій $h(t)$ таких, що $h(t_0)=h(t_1)=0.$ Тому

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(A(t)h(t))dt=A(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0.$$

Функція $h'(t)$ неперервна і дорівнює нулю в середньому

$$\int_{t_0}^{t_1}h'(t)dt=h(t_1)-h(t_0)=0.$$

Із рівняння (5.8) і леми 5.2 випливає, що $b(t)-A(t)=C=\text{const}$, або

$$b(t)=\int_{t_0}^{t}a(t)dt+C.$$

Звідси робимо висновок, що функція $b(t)$ диференційовна і $b'(t)=a(t)$. Лема доведена.

Необхідна умова локального екстремуму функціонала $J(x(\cdot))$ найпростішої задачі варіаційного числення має вигляд

$$\delta J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}(\hat{L}_x(t)h(t)+\hat{L}_{x'}(t)h'(t))dt=0\tag{5.9}$$

для всіх функцій $h(\cdot)\in H_0$. Застосовуючи лему 5.3, одержимо, що функція $\hat{L}_{x'}(t)=L'_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$ неперервно диференційовна і

$$\frac{d}{dt}L'_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))=L'_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)).\tag{5.10}$$

Це *рівняння Ейлера в диференціальній формі.*

Перетворимо рівняння (5.9), інтегруючи частинами перший доданок. Одержимо

$$\delta J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}(\hat{L}_x(t)h(t)+\hat{L}_{x'}(t)h'(t))dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}[-\int_{t_0}^{t}\hat{L}_x(u)du+\hat{L}_{x'}(t)]h'(t))dt = 0.$$

Функція $h(\cdot)\in H_0$. Тому функція $h'(\cdot)$ неперервна і дорівнює нулю в середньому. Застосовуючи лему 5.2, одержимо

$$\hat{L}_{x'}(t) = \int_{t_0}^{t}\hat{L}_x(u)du + C,$$

або

$$L'_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) = \int_{t_0}^{t}L'_x(u,\hat{x}(u),\hat{x}'(u))du + C. \tag{5.11}$$

Це *рівняння Ейлера в інтегральній формі.*

За припущенням функція $L'_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$ неперервна, а функція $\hat{x}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1],R)$. Тому обидві частини рівняння (5.11) можна диференціювати й одержати рівняння Ейлера в диференціальній формі (5.10). Його можна записати в такому вигляді:

$$L'_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) - L''_{x't}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) - L''_{x'x}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))\hat{x}'(t)$$
$$- L''_{x'x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))\hat{x}''(t) = 0.$$

Це нелінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно шуканої функції $x(t)$. Його загальний розв'язок залежить від двох невідомих констант. Ці константи визначають, використовуючи граничні умови (5.3).

Приклад 5.1. Відшукати екстремалі задачі:

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\pi/2}((x')^2(t) - x^2(t))dt \to extr,$$
$$x(0)=0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Оскільки $L(t,x,x') = (x')^2 - x^2$, то $L'_x = -2x$, $L'_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt}L'_{x'} = 2x''$. Рівняння Ейлера має вигляд $x'' + x = 0$. Його загальний розв'язок

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

Із граничних умов обчислимо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Відповідь. Функція $x(t) = \sin t$ – єдина допустима екстремаль. Δ

У даному прикладі рівняння Ейлера легко інтегрується. Проте таке можливо не завжди.

5.3. Інтеграли рівняння Ейлера

Розглянемо приклади задач, для яких рівняння Ейлера інтегрується.

1. Функція $L(t,x,x')$ не залежить від x', тобто $L = L(t,x)$. Рівняння Ейлера в цьому випадку має вигляд $L_x^{'}(t,x(t)) = 0$. Це взагалі не диференціальне рівняння. Розв'язки рівняння не містять невідомих констант і можуть не проходити через граничні точки (t_0,x_0), (t_1,x_1). Лише тоді, коли розв'язок рівняння $L_x^{'}(t,x(t)) = 0$ проходить через ці точки, існує функція, яка може давати екстремум функціонала.

Приклад 5.2. Відшукати екстремалі задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} x^2(t)dt \to extr,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Рівняння Ейлера має вигляд $x(t) = 0$. Екстремаль $x(t) = 0$ проходить через граничні точки, якщо $x_0 = 0$, $x_1 = 0$. Якщо ця умова не виконується, то екстремуму функціонал на неперервних функціях не досягає.

Відповідь. Якщо $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, то $x(t) = 0$ – єдина екстремаль. Якщо $x_0 \neq 0$ або $x_1 \neq 0$, то допустимих екстремалей не існує. Δ

2. Функція $L(t,x,x')$ лінійно залежить від x':

$$L(t,x,x') = M(t,x) + x'N(t,x).$$

Рівняння Ейлера має вигляд $M_x^{'}(t,x(t)) - N_t^{'}(t,x(t)) = 0$. Це також не диференціальне рівняння і в загальному випадку його розв'язки не задовольняють граничні умови. Якщо ж $M_x^{'} - N_t^{'} \equiv 0$, то $Mdt + Ndx$ є точний диференціал і інтеграл

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (M + N\frac{dx}{dt})dt = \int_{t_0}^{t_1} (M\,dt + N\,dx)$$

не залежить від шляху інтегрування. Тоді варіаційна задача не має сенсу. Δ

Приклад 5.3. Відшукати екстремалі задачі:

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (x^2(t) + t^2 x'(t))dt \to extr,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = a.$$

Рівняння Ейлера має вигляд $x(t)=t$. Перша гранична умова задовольняється, а друга – лише за умови $a=1$. Якщо $a\neq 1$, то екстремалей, які задовольняють граничні умови, не існує.

Відповідь. Якщо $a=1$, то $\hat{x}(t)=t$ – єдина екстремаль. Якщо ж $a\neq 1$, то допустимих екстремалей не існує. Δ

Приклад 5.4. Відшукати екстремалі задачі

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}(x(t)+tx'(t))dt\to extr,$$

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1.$$

Рівняння Ейлера перетворюється на тотожність $1=1$. Вираз під інтегралом є точним диференціалом, і інтеграл не залежить від шляху інтегрування

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}(xdt+tdx)=\int_{t_0}^{t_1}d(tx)=t_1x_1-t_0x_0.$$

Відповідь. Варіаційна задача не має сенсу. Δ

3. Функція $L(t,x,x')$ залежить лише від x'. Рівняння Ейлера має вигляд $L''_{x'x'}(x')x''=0$. Розв'язками такого рівняння будуть лише функції вигляду $x(t)=C_1t+C_2$. Тому екстремалями задачі будуть лише прямі лінії. Δ

Приклад 5.5. Серед усіх кривих, що з'єднують точки $A(t_0,x_0)$, $B(t_1,x_1)$, визначити криву, яка має найменшу довжину.

Довжина дуги кривої, що сполучає точки $A(t_0,x_0)$, $B(t_1,x_1)$, обчислюється за формулою

$$l(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+(x')^2(t)}dt,\quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1.$$

Функціонал $l(x(\cdot))$ залежить лише від $x'(\cdot)$. Тому він може досягати екстремуму лише на відрізках прямих ліній.

4. Функція $L(t,x,x')$ залежить лише від $t,x' : L=L(t,x')$. Рівняння Ейлера має вигляд $\dfrac{d}{dt}L'_{x'}(t,x')=0$ або $L'_{x'}(t,x')=C$. Це так званий *інтеграл імпульсу*. Якщо рівняння не розв'язується відносно x', то його можна розв'язати, увівши певним чином вибраний параметр. Δ

Приклад 5.6. Відшукати екстремалі задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+(x')^2(t)}}{t} dt \to extr,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Рівняння Ейлера $L'_{x'}(t, x(t)) = C$ має вигляд

$$\frac{x'}{t\sqrt{1+(x')^2}} = C.$$

Це рівняння можна проінтегрувати, якщо ввести параметр. Нехай $x' = tg(u)$. Тоді з рівняння Ейлера

$$t = \frac{x'}{C\sqrt{1+(x')^2}} = C_1 \sin(u),$$

де $C_1 = 1/C$. Щоб відшукати вираз x через u, використаємо рівність $x' = \dfrac{dx}{dt} = tg(u)$. Тоді

$$dx = x'dt = tg(u) \cdot C_1 \cos(u) du = C_1 \sin(u) du.$$

Інтегруючи це рівняння, одержимо $x = -C_1 \cos(u) + C_2$. Тепер ми маємо залежність змінних x, t від параметра u:

$$x = -C_1 \cos(u) + C_2, \quad t = C_1 \sin(u).$$

Виключаючи параметр, одержимо $t^2 + (x - C_2)^2 = C_1^2$. Це рівняння кола. Невідомі константи C_1, C_2 визначаємо з граничних умов.

Відповідь. Допустимі екстремалі задачі визначаються рівняннями $x = -C_1 \cos(u) + C_2$, $t = C_1 \sin(u)$, або рівнянням $t^2 + (x - C_2)^2 = C_1^2$. Δ

5. Функція $L(t, x, x')$ залежить лише від x, x'. У цьому випадку рівняння Ейлера має перший інтеграл (*інтеграл енергії*)

$$L(\hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - \hat{x}'(t) L'_{x'}(\hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = C.$$

Щоб переконатися в цьому, обчислимо

$$\frac{d}{dt}(L - x'L'_{x'}) = L'_x x' + L'_{x'} x'' - x'' L'_{x'} - L''_{x'x} (x')^2 - L''_{x'x'} x' x''$$
$$= x'(L'_{xx} - \frac{d}{dt} L'_{x'}).$$

Рівняння $L - x'L'_{x'} = C$ можна інтегрувати, вводячи параметр.

Приклад 5.7 (задача про найменшу поверхню обертання). Визначити криву, що проходить через точки $A(a, a_1)$, $B(b, b_1)$, від обертання якої навколо осі $0X$ утворюється поверхня мінімальної площі (рис. 5.2).

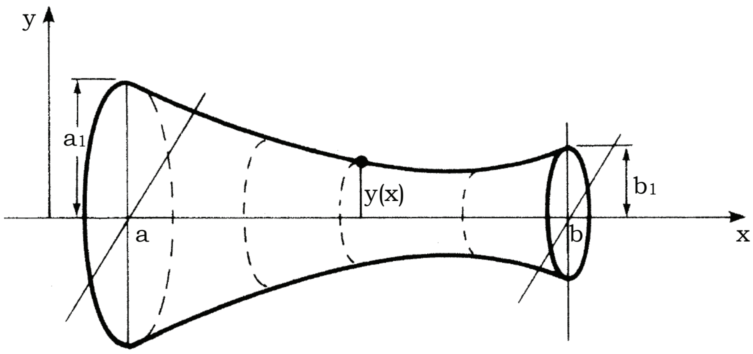

Рис. 5.2

1. Формалізація задачі. Площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$S(x(\cdot)) = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y')^2(x)}dx.$$

Отже, формалізована задача має вигляд

$$S(x(\cdot)) = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y')^2(x)}dx \to \inf, \quad y(a) = a_1, y(b) = b_1.$$

2. Складемо рівняння Ейлера. Підінтегральна функція залежить лише від y , y'. Тому рівняння Ейлера можна записати у вигляді

$$y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

або

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C.$$

Це рівняння можна проінтегрувати, якщо ввести параметр. Нехай $y' = sh(u)$. Тоді $y = Cch(u)$,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{Csh(u)du}{sh(u)} = Cdu.$$

Звідси $x = Cu + C_1$. Отже, мінімальна *поверхня обертання утворюється* кривою, рівняння якої в параметричній формі має вигляд $y = Cch(u)$, $x = Cu + C_1$. Виключаючи параметр, одержуємо

$$y(x) = Cch\left(\frac{x - C_1}{C}\right).$$

Це рівняння *ланцюгових ліній*, від обертання яких утворюються поверхні, що називаються *катеноїдами.*

Відповідь. Найменша поверхня утворюється від обертання кривої $y(x) = Cch\left(\frac{x - C_1}{C}\right)$. Δ

Приклад 5.8 (задача про брахістохрону).

$$J(y(\cdot)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}} dx \to \inf, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Функція L під знаком інтеграла залежить лише від y, y'. Тому рівняння Ейлера має перший інтеграл $L - y'L_{y'} = C$. Це рівняння має вигляд

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y}\sqrt{1 + (y')^2}} = C.$$

Після спрощення одержуємо рівняння $y(1 + (y')^2(x)) = C_1$. Введемо параметр за допомогою підстановки $y' = ctg(u)$, тоді

$$y \quad = \frac{C_1}{1 + ctg^2(u)} = C_1 \sin^2(u) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(2u)),$$

$$dx \quad = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin(u)\cos(u)}{ctg(u)} = 2C_1 \sin^2(u)du = C_1(1 - \cos(2u))du,$$

$$x \quad = C_1(u - \frac{\sin(u)}{2}) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2u - \sin(2u)) + C_2.$$

У параметричній формі рівняння шуканої кривої має вигляд

$$x = \frac{C_1}{2}(2u - \sin(2u)) + C_2, \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(2u)).$$

Якщо покласти $2u = \theta$ і взяти до уваги, що $C_2 = 0$, оскільки $y(0) = 0$, то одержимо рівняння *сім'ї циклоїд*

$$x = \frac{C_1}{2}(\theta - \sin(\theta)), \quad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(\theta)),$$

де $C_1/2$ – радіус круга, що котиться. Цей радіус визначається з умови проходження циклоїди через точку $B(x_1, y_1)$ (рис. 5.3).

Відповідь. Брахістохрона – це циклоїда. Δ

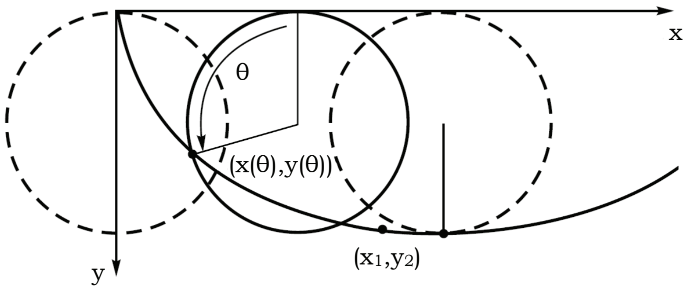

Рис. 5.3

5.4. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення. Векторнозначні функції

Розглянемо задачу на екстремум функціонала

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))dt \to extr, \qquad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \quad \overline{x}(t_1) = \overline{x}_1 \tag{5.12}$$

у класі функцій $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ із простору $C^1([t_0, t_1], R^n)$ неперервно диференційовних на відрізку $[t_0, t_1]$ функцій. Вважатимемо, що функція $L: R \times R^n \times R^n \to R$ під знаком інтеграла неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх $2n+1$ аргументах. Як і в найпростішій задачі варіаційного числення функції $\overline{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ називатимемо *допустимими* в задачі (5.12), якщо вони належать простору $C^1([t_0, t_1], R^n)$ і задовольняють граничні умови $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$, $\overline{x}(t_1) = \overline{x}_1$. Позначимо через H_0 підпростір простору $C^1([t_0, t_1], R^n)$, утворений функціями, що задовольняють нульовим граничним умовам $\overline{h}(t_0) = \overline{h}(t_1) = 0$. Відмітимо, що функції $\overline{x}(\cdot)$ та $\overline{x}(\cdot) + \overline{h}(\cdot)$, $\overline{h}(\cdot) \in H_0$ одночасно допустимі або недопустимі в задачі (5.12).

Теорема 5.2. *Нехай функція* $\overline{x}(\cdot)=(\hat{x}_1(\cdot),\ldots,\hat{x}_n(\cdot))$ *доставляє локальний екстремум задачі (5.12). Тоді вона задовольняє систему рівнянь Ейлера*

$$L'_{x_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))=\frac{d}{dt}L'_{x'_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)),\quad k=\overline{1,n}.$$

Доведення. Доведемо теорему методом Лагранжа. Будемо вважати, що функція L задовольняє умови, необхідні для застосування леми Лагранжа (функції $L'_{x'_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))$ неперервно дифференційовні). Відшукаємо першу варіацію Лагранжа функціонала $J(x(\cdot))$. Для цього використаємо функцію $\varphi(\lambda)=J(\overline{x}(\cdot)+\lambda\overline{h}(\cdot))$, $\overline{h}(\cdot)\in H_0$. Обчислимо

$$\varphi'(0)=\int_{t_0}^{t_1}[\sum_{k=1}^{n}L'_{x_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))h_k(t)+\sum_{k=1}^{n}L'_{x'_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))h'_k(t)]dt. \tag{5.13}$$

Похідна $\varphi'(0)$ існує внаслідок неперервності функцій

$$L'_{x_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)),\quad L'_{x'_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)),\quad k=\overline{1,n}.$$

Тому для кожної функції $\overline{h}(\cdot)\in H_0$ існує

$$\delta J(\overline{x}(\cdot),\overline{h}(\cdot))=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[J(\overline{x}(\cdot)+\lambda\overline{h}(\cdot))-J(\overline{x}(\cdot))]=\varphi'(0).$$

Перетворимо вираз (5.13), інтегруючи частинами другий доданок, враховуючи граничні умови $h_k(t_0)=h_k(t_1)=0$, $k=\overline{1,n}$. Одержимо

$$\delta J(\overline{x}(\cdot),\overline{h}(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}[L'_{x_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))-\frac{d}{dt}L'_{x'_k}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))]h_k(t)dt.$$

Відповідно до першої необхідної умови екстремуму функціонала в точці $\overline{x}(\cdot)$ виконується умова $\delta J(\overline{x}(\cdot),\overline{h}(\cdot))=0$ для всіх $\overline{h}(\cdot)\in H_0$. Ця умова виконується і для функції $\overline{h}(\cdot)=(0,\ldots,0,h_j(\cdot),0,\ldots,0)$, $h_j(\cdot)\in H_0$. Така функція має лише одну ненульову компоненту, для якої виконується рівняння

$$\int_{t_0}^{t_1}[L'_{x_j}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))-\frac{d}{dt}L'_{x'_j}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))]h_j(t)dt=0.$$

Застосовуючи лему Лагранжа, одержимо

$$L'_{x_j}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t))=\frac{d}{dt}L'_{x'_j}(t,\overline{x}(t),\overline{x}'(t)),\quad j=\overline{1,n}.$$

Теорему доведено.

Теорему 5.2 можна довести і методом Дюбуа – Реймона.

Приклад 5.9. Відшукати екстремалі задачі:

$$J(x(\cdot),y(\cdot))=\int_0^{\pi/2}((x')^2(t)+(y')^2(t)+2x(t)y(t))dt \to extr,$$

$$x(0)=0,\quad x(\pi/2)=1,\quad y(0)=0,\quad y(\pi/2)=-1.$$

Розв'язок:

1. Складемо систему диференціальних рівнянь Ейлера. Вона має вигляд

$$x''-y=0,$$

$$y''-x=0.$$

Виключаючи одну із змінних, наприклад y, одержимо рівняння

$$x^{(4)}-x=0.$$

Інтегруючи його, одержимо загальний розв'язок системи рівнянь

$$x(t)\quad =C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos(t)+C_4\sin(t),$$

$$y(t)\quad =C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos(t)-C_4\sin(t).$$

2. Використаємо граничні умови і одержимо $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$, $C_4=1$.

Відповідь: Функції $x(t)=\sin(t)$, $y(t)=-\sin(t)$ – екстремалі задачі. Δ

Приклад 5.10. Скласти диференціальне рівняння лінії поширення світла в оптично неоднорідному середовищі зі швидкістю $v(x,y,z)$.

Розв'язок:

1. Формалізація. Відповідно до принципу Ферма світло проходить із точки $A(x_0,y_0,z_0)$ в точку $B(x_1,y_1,z_1)$ по лінії, уздовж якої час T проходження буде мінімальним. Якщо рівняння лінії $y=y(x)$, $z=z(x)$, то

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{(1+(y')^2(x)+(z')^2(x))}}{v(x,y,z)}dx.$$

Отже, формалізована задача така:

$$T(y(\cdot),z(\cdot))=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{(1+(y')^2(x)+(z')^2(x))}}{v(x,y,z)}dx \to \min,$$

$$y(x_0)=y_0,\quad z(x_0)=z_0,\quad y(x_1)=y_1,\quad z(x_1)=z_1.$$

2. Система рівнянь Ейлера для такого функціонала має вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\sqrt{1+(y')^2(x)+(z')^2(x)}}{v^2(x,y,z)}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{v(x,y,z)}\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2(x)+(z')^2(x)}}=0,\\
&\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{1+(y')^2(x)+(z')^2(x)}}{v^2(x,y,z)}+\frac{d}{dx}\frac{z'}{v(x,y,z)}\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2(x)+(z')^2(x)}}=0
\end{aligned}\qquad(5.14)$$

Відповідь: Диференціальні рівняння (5.14) визначають лінії розповсюдження світла в оптично неоднорідному середовищі. Δ

Приклад 5.11 (геодезичні лінії). Скласти рівняння лінії найменшої довжини, яка лежить на даній поверхні та сполучає дві точки. Така лінія називається *геодезичною*.

Розв'язок:

1. Формалізація. Нехай поверхня задана рівнянням $r=r(u,v)$, а лінія на поверхні визначена рівнянням $u=u(t)$, $v=v(t)$. Довжина відрізка лінії між точками, які відповідають значенням t_0, t_1 параметра t, дорівнює

$$J(u(\cdot),v(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}\,dt,$$

де E, F, G – коефіцієнти першої квадратичної форми

$$E=\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial u}\right),\quad F=\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right),\quad G=\left(\frac{\partial r}{\partial v},\frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

Отже, формалізована задача така:

$$J(u(\cdot),v(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}\,dt\to\min,$$

$$u(t_0)=u_0,\quad v(t_0)=v_0,\quad u(t_1)=u_1,\quad v(t_1)=v_1.$$

2. Рівняння Ейлера такої задачі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{E_u(u')^2+2F_uu'v'+G_u(v')^2}{\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}}=\frac{2(Eu'+Fv')}{\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}};\\
&\frac{E_v(u')^2+2F_vu'v'+G_v(v')^2}{\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}}=\frac{2(Fu'+Gv')}{\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}}.
\end{aligned}\qquad(5.15)$$

Відповідь: Диференціальні рівняння (5.15) визначають *рівняння геодезичної лінії* на поверхні. Δ

Приклад 5.11 (геодезичні лінії на циліндрі). Скласти рівняння лінії найменшої довжини, яка лежить на циліндрі та сполучає дві точки.

Розв'язок:

Нехай $r = (a\cos(\theta), a\sin(\theta), z)$ – рівняння циліндра. Роль параметрів u, v відіграють змінні θ, z. Перша квадратична форма має коефіцієнти: $E = a$, $F = 0$, $G = 1$. Рівняння геодезичних ліній для такої поверхні матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{a^2\theta'}{\sqrt{a^2(\theta')^2+(z')^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{z'}{\sqrt{a^2(\theta')^2+(z')^2}} = 0,$$

звідки $\dfrac{dz}{d\theta} = C$, $z = C\theta + A$.

Отже, геодезичні лінії на циліндрі – це *гвинтові лінії* (рис. 5.4). Δ

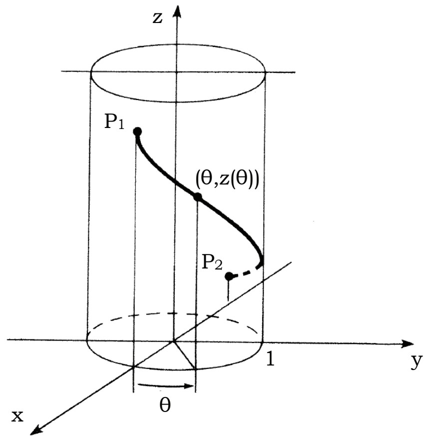

Рис. 5.4

Приклад 5.12 (геодезичні лінії на сфері). Скласти рівняння лінії найменшої довжини, яка лежить на сфері та сполучає дві точки.

Розв'язок:

Запишемо рівняння сфери у вигляді

$r = r(\theta,\varphi) = (R\cos(\theta)\sin(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\varphi))$.

Тоді $E = R^2\sin^2(\varphi)$, $F = 0$, $G = R^2$ і рівняння Ейлера має вигляд

$$\theta'\sin^2(\varphi) = C\sqrt{1+\sin^2(\varphi)(\theta')^2},$$

звідки

$$\theta' = -Cd(ctg(\varphi))\sqrt{(1-C^2)-C^2ctg^2(\varphi)},$$

$$\theta(\varphi) = \arccos(C_1 ctg(\varphi)) + C_2, \quad C_1 = C/\sqrt{(1-C^2)},$$

$$R\cos(\varphi) = AR\cos(\theta)\sin(\varphi) + BR\sin(\theta)\sin(\varphi),$$

$$A = \frac{\cos(C_2)}{C_1}, \quad B = \frac{\sin(C_2)}{C_1}.$$

У декартових координатах це означає, що екстремаль лежить на сфері й задовольняє рівняння $z = Ax + By$. Це рівняння площини, яка проходить через центр сфери і перетинає сферу по великому колу. Отже, геодезична лінія на сфері – це дуга великого кола (рис. 5.5). Δ

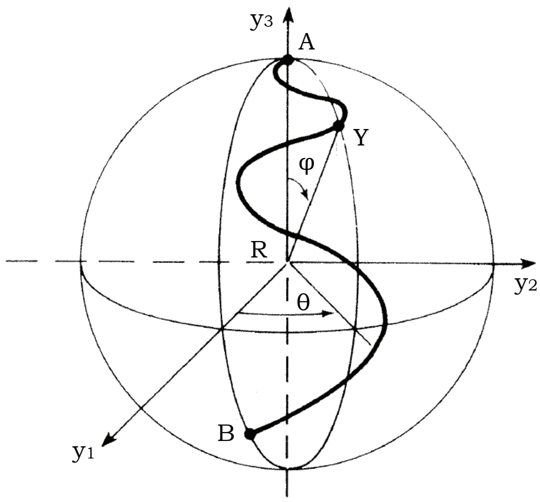

Рис. 5.5

5.5. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку

Розглянемо задачу дослідження на екстремум функціонала

$$\begin{aligned} J(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t))dt \to extr \\ x^{(k)}(t_0) &= x_{0k}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_{1k}, \quad k = 0,1,\dots,n-1 \end{aligned} \qquad (5.16)$$

у просторі $C^n([t_0, t_1], R)$ n разів неперервно диференційовних функцій. Вважатимемо, що функція $L(t, x, x', \dots, x^{(n)})$ має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх аргументах. Функції $x(\cdot)$ із простору $C^n([t_0,t_1],R)$ називатимемо *допустимими* в задачі (5.16), якщо вони задовольняють граничні умови. Позначимо через H_0^n підпростір у просторі $C^n([t_0,t_1],R)$, утворений функціями, що задовольняють граничні умови $h^{(k)}(t_0)=h^{(k)}(t_1)=0$, $k=0,1,\dots,n-1$. Якщо $x(\cdot)$ – допустима функція в задачі (5.16), то такими ж будуть і функції $x(\cdot)+h(\cdot)$, $h(\cdot)\in H_0^n$.

Теорема 5.3. *Нехай допустима функція* $\hat{x}(\cdot)\in C^n([t_0,t_1],R)$ *дає локальний екстремум функціонала задачі* (*5.16*). *Тоді вона задовольняє рівнянню Ейлера – Пуассона*

$$L'_x-\frac{d}{dt}L'_{x'}+\frac{d^2}{dt^2}L'_{x''}-\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}L'_{x^{(n)}}=0. \qquad (5.17)$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}L'_{x^{(k)}}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\dots,\hat{x}^{(n)}(t))=0.$$

Доведення. Доведемо теорему методом Лагранжа. Для цього необхідно припустити, що існують неперервні похідні

$$\frac{d^k}{dt^k}L'_{x^{(k)}}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\dots,\hat{x}^{(n)}(t)),\quad k=\overline{1,n}.$$

Обчислимо першу варіацію Лагранжа функціонала $J(x(\cdot))$. Для цього відшукаємо похідну $\varphi'(0)$ функції $\varphi(\lambda)=J(\hat{x}(\cdot)+\lambda h(\cdot))$, $h(\cdot)\in H_0^n$, у точці $\lambda=0$:

$$\varphi'(0)=\delta J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}[\sum_{k=0}^{n}L'_{x^{(k)}}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\dots,\hat{x}^{(n)}(t))h^{(k)}(t)]dt. \qquad (5.18)$$

Відповідно до першої необхідної умови екстремуму функціонала в точці $\hat{x}(\cdot)$ виконується рівність $\delta J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=\varphi'(0)=0$ для всіх $h(\cdot)\in H_0^n$. Щоб застосувати лему Лагранжа, перетворимо вираз (5.18), інтегруючи частинами k разів k-й доданок під знаком інтеграла при $k=1,2,\dots,n$. Враховуючи нульові граничні умови, які задовольняє функція $h(\cdot)\in H_0^n$, одержимо

$$J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}L'_{x^{(k)}}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\dots,\hat{x}^{(n)}(t))]h(t)dt=0.$$

Застосуємо тепер лему Лагранжа. Одержимо рівняння (5.17). Теорема доведена.

Доведемо теорему методом Дюбуа – Реймона.

Лема 5.4 (узагальнена лема Дюбуа – Реймона). Якщо неперервна на відрізку $[t_0, t_1]$ функція $M(t)$ задовольняє рівність

$$\int_{t_0}^{t_1} M(t) h^{(n)}(t) dt = 0$$

для будь-якої функції $h(\cdot) \in H_0^n$, то

$$M(t) = C_0 + C_1(t - t_0) + \cdots + C_{n-1}(t - t_0)^{n-1}.$$

Доведення. Щоб переконатися у справедливості леми, досить застосувати лему Дюбуа – Реймона до функції $M(t) - [C_0 + C_1(t - t_0) + \cdots + C_{n-1}(t - t_0)^{n-1}]$.

Рівність нулю першої варіації (5.18) функціонала $J(x(\cdot))$ можна використовувати, щоб вивести рівняння Ейлера – Пуассона в інтегральній формі. Для цього k-й доданок у сумі (5.18) проінтегруємо частинами і одержимо

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) h^{(k)}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} ((-1)^{n-k} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) dt \dots dt) h^{(n)}(t) dt.$$

Застосуємо тепер узагальнену лему Дюбуа – Реймона. Одержимо інтегральне рівняння Ейлера – Пуассона

$$\hat{L}_{x^{(n)}} - \int_{t_0}^{t} \hat{L}_{x^{(n-1)}}(t) dt + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \hat{L}_{x^{(n-2)}}(t) dt dt + \cdots + (-1)^n \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} \hat{L}_x(t) dt \dots dt$$
$$= C_0 + C_1(t - t_0) + \cdots + C_{n-1}(t - t_0)^{n-1}.$$

Якщо функція $x(\cdot)$ неперервно диференційовна $2n$ рази, то, диференціюючи інтегральне рівняння n разів, одержимо диференціальне рівняння Ейлера – Пуассона. Якщо функція $L(t, x, x', \dots, x^{(n)})$ має неперервну похідну порядку $n+1$ по всіх аргументах, то повні похідні можна відшукати за правилом диференціювання складних функцій.

Приклад 5.14. Відшукати екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (1 + (x'')^2(t)) dt \to extr,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad x'(1) = 1.$$

Розв'язок:

1. Рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд

$$\frac{d^2}{dt^2}(2x'') = 0$$

або $x^{(4)}=0$. Загальний розв'язок цього рівняння такий:

$$x(t)=C_1t^3+C_2t^2+C_3t+C_4.$$

2. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 обчислимо, використовуючи граничні умови. Одержимо $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=0$.

Відповідь. Єдина допустима екстремаль функціонала задачі – пряма $x=t$. Δ

Приклад 5.15. Відшукати екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot))=\int_0^{\pi/2}((x'')^2(t)+x^2(t)+t^2)dt\to extr,$$

$$x(0)=1,\quad x'(0)=0,\quad x(\pi/2)=0,\quad x'(\pi/2)=-1.$$

Розв'язок:

1. Рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд $x^{(4)}-x=0$. Його загальний розв'язок такий:

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos(t)+C_4\sin(t).$$

2. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 обчислимо, використовуючи граничні умови. Одержимо $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=0$.

Відповідь: Єдина допустима екстремаль функціонала задачі – функція $x(t)=\cos(t)$. Δ

Приклад 5.16. Визначити екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot))=\int_{-l}^{l}(\frac{1}{2}\mu(y'')^2+\rho y)dx\to extr,$$

$$y(-l)=0,\quad y'(-l)=0,\quad y(l)=0,\quad y'(l)=0.$$

До цієї варіаційної задачі зводиться задача про визначення осі пружної циліндрової балки, закріпленої на кінцях.

Розв'язок:

1. Якщо балка однорідна, то ρ, μ – сталі. Рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд

$$\rho+\frac{d^2}{dx^2}(\mu y'')=0\quad \textit{або}\quad y^{(4)}=-\rho\mu.$$

Його загальний розв'язок такий:

$$y=-\frac{\rho}{24\mu}x^4+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

2. Використовуючи граничні умови, одержимо

$$y=-\frac{\rho}{24\mu}(x^2-l^2)^2.$$

Відповідь: Єдина допустима екстремаль функціонала задачі – крива $y=-\frac{\rho}{24\mu}(x^2-l^2)^2$. Δ

Розглянемо задачу зі старшими похідними на множині векторнозначних функцій

$$J(x_1(\cdot),\dots,x_m(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x_1(t),\dots,x_1^{(n_1)}(t),x_2(t),\dots,x_m^{(n_m)}(t))dt\to extr, \quad (5.19)$$

$$x_k^{(j)}(t_0)=x_{0kj},\quad x_k^{(j)}(t_1)=x_{1kj},\quad k=\overline{1,m},\quad j=\overline{0,n_k-1},$$

де $x_k(\cdot)\in C^{n_k}[t_0,t_1],R)$, $k=\overline{1,m}$.

Теорема 5.4. *Нехай* $\hat{x}_k(\cdot)$, $k=\overline{1,m}$ *– розв'язок екстремальної задачі* (*5.19*). *Тоді функції* $\hat{x}_k(\cdot)$ *задовольняють систему рівнянь Ейлера – Пуассона*

$$\sum_{i=0}^{n_k}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}L'_{x_k^{(j)}}(t,\hat{x}_1(t),\dots,\hat{x}_1^{(n_1)}(t),\dots,\hat{x}_m^{(n_m)}(t))=0,\quad k=\overline{1,m}.$$

Розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь, що задовольняють граничні умови, будуть екстремалями задачі (5.19).

5.6. Функціонали, що залежать від функцій багатьох змінних

Нехай G – замкнута обмежена область у просторі R^2 з гладкою границею ∂G. Розглянемо екстремальну задачу вигляду

$$J(z(\cdot))=\iint_G L(x,y,z(x,y),\frac{\partial}{\partial x}z(x,y),\frac{\partial}{\partial y}z(x,y))dxdy\to extr \quad (5.20)$$

у класі допустимих функцій із простору $C^1(G)$ один раз неперервно диференційовних по всіх змінних функцій, що набувають на границі ∂G області G задані значення $z(x,t)=v(x,y)$, $(x,y)\in\partial G$. Простір $C^1(G)$ є лінійним нормованим простором з нормою

$$\|z(\cdot)\|_1=\max\{\max_{(x,y)\in G}|z(x,y)|,\max_{(x,y)\in G}|\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)|,\max_{(x,y)\in G}|\frac{\partial}{\partial y}z(x,y)|\}.$$

Позначимо через $H_0(G)$ підпростір простору $C^1(G)$, породжений функціями, що задовольняють нульові граничні умови $h(x,y)=0$, $(x,y)\in\partial G$. Якщо $z(x,y)$ – допустима функція задачі (5.20), то функції $z(x,y)+h(x,y)$, $h(x,y)\in H_0(G)$ також допустимі.

Обчислимо першу варіацію Лагранжа функціонала $J(z(\cdot))$. Як і раніше, вважатимемо, що функція L неперервно диференційовна. Розглянемо функцію $\varphi(\lambda) = J(z(\cdot)+\lambda h(\cdot))$, $h(\cdot)\in H_0(G)$. Оскільки $\delta J(z(\cdot),h(\cdot)) = \varphi'(0)$, то потрібно обчислити $\varphi'(0)$. Одержимо

$$\delta J(z(\cdot),h(\cdot)) = \varphi'(0) =$$
$$= \iint_G [L'_z h(x,y) + L'_p \frac{\partial}{\partial x} h(x,y) + L'_q \frac{\partial}{\partial y} h(x,y)]dxdy,$$

де

$$p = \frac{\partial}{\partial x} z(x,y), \quad q = \frac{\partial}{\partial y} z(x,y), \quad L = L(x,y,z,p,q).$$

Якщо $\hat{z}(\cdot)$ – функція, яка дає екстремум функціоналу (5.20), то необхідно, щоб $\delta J(z(\cdot),h(\cdot)) = 0$ для всіх функцій $h(\cdot)\in H_0(G)$. Перетворимо вираз $\delta J(z(\cdot),h(\cdot))$ так, щоб можна було застосувати лему, аналогічну лемі Лагранжа. Для цього другий і третій доданки замінимо на вирази

$$L'_p \frac{\partial}{\partial x} h(x,y) \quad = \frac{\partial}{\partial x}\{L'_p h(x,y)\} - \frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\} h(x,y),$$
$$L'_q \frac{\partial}{\partial y} h(x,y) \quad = \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q h(x,y)\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q\} h(x,y),$$

де $\frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\}$ – повна частинна похідна по змінній x. При її обчисленні змінна y вважається фіксованою, але залежність z, p, q від x враховується:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\} = L''_{px} + L''_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + L''_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + L''_{pq}\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial y}\{L'_q\} = L''_{qy} + L''_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} L''_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + L''_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Одержимо

$$\delta J(z(\cdot),h(\cdot)) \quad = \iint_G [L'_z - \frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q\}] h(x,y)dxdy$$
$$+ \iint_G [\frac{\partial}{\partial x}\{L'_p h\} + \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q h\}]dxdy.$$

Користуючись формулою Гріна

$$\iint_G \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial G} (N dy - M dx),$$

запишемо

$$\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\{L'_p h\} + \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q h\}\right] dxdy = \int_{\partial G} (L'_p dy - L'_q dx) h(x,y) = 0,$$

оскільки функція $h(\cdot) \in H_0(G)$ і дорівнює нулю на границі ∂G області G. Необхідна умова екстремуму $\delta J(z(\cdot), h(\cdot)) = 0$ матиме вигляд

$$\iint_G \left[L'_z - \frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q\}\right] h(x,y) dxdy = 0 \qquad (5.21)$$

для всіх $h(\cdot) \in H_0(G)$.

Використовуємо тепер такий аналог леми Лагранжа.

Лема 5.5. *Якщо для неперервної функції $a(x,y)$, $(x,y) \in G$ виконується умова*

$$\iint_G a(x,y) h(x,y) dxdy = 0, \quad \forall h(\cdot) \in H_0(G),$$

то $a(x,y) = 0$ для всіх $(x,y) \in G$.

Доведення. Доведемо лему методом від супротивного. Нехай існує така точка $(x_0, y_0) \in G$, що $a(x_0, y_0) = c \neq 0$. Візьмемо $c > 0$. Побудуємо навколо точки паралелепіпед $A = \{(x,y) : x_1 \le x \le x_2, y_1 \le y \le y_2\}$ так, щоб він повністю лежав в області G і для всіх $(x,y) \in A$ виконувалася нерівність $a(x,y) > c/2$. Побудуємо функцію

$$\tilde{h}(x,y) = \begin{cases} \sin^2\left(\pi \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \sin^2\left(\pi \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right), & (x,y) \in A, \\ 0, & (x,y) \neq A. \end{cases}$$

Така функція належить простору $H_0(G)$, але

$$\iint_G a(x,y) \tilde{h}(x,y) dxdy = \iint_A a(x,y) \tilde{h}(x,y) dxdy > 0.$$

Ця суперечність доводить лему.

Застосувавши лему до співвідношення (5.21), доведемо таке твердження.

Теорема 5.5. *Нехай $\hat{z}(\cdot)$ – розв'язок екстремальної задачі (5.20). Тоді функція $\hat{z}(\cdot)$ задовольняє рівняння*

$$L'_z - \frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q\} = 0 \qquad (5.22)$$

з граничними умовами $(x,y)\in\partial G$.

Рівняння другого порядку в частинних похідних (5.22) називається *рівнянням Ейлера – Остроградського.*

Приклад 5.17. Визначити екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot))=\iint_G\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\to extr,$$

$$z(x,y)=v(x,y),\quad (x,y)\in\partial G.$$

Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\quad \textit{або}\quad \Delta z=0.$$

Рівняння Ейлера – Остроградського цієї задачі перетворюється на рівняння Лапласа. Щоб відшукати екстремалі функціонала, потрібно визначити неперервну функцію, яка задовольняє рівняння Лапласа і на межі області G набуває заданих значень $v(x,y)$. Це одна з основних задач математичної фізики – *задача Діріхле.*

Отже, екстремалі даної задачі варіаційного числення – це розв'язок задачі Діріхле. Δ

Приклад 5.18. Визначити екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot))=\iint_G\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x,y)\right]dxdy\to extr,$$

$$z(x,y)=v(x,y),\quad (x,y)\in\partial G.$$

Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}^2=f(x,y)\quad \textit{або}\quad \Delta z=f(x,y).$$

Рівняння Ейлера – Остроградського цієї задачі перетворюється на рівняння Пуассона. Отже, екстремаль функціонала – це неперервна функція, яка задовольняє рівняння Пуассона і набуває заданого значення $v(x,y)$ на межі області G. Δ

Приклад 5.19. Визначити поверхню мінімальної площі, яка натягнута на заданий просторовий контур C.

Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$S(z(\cdot))=\iint_G\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\}=0,$$

або

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}=0.$$

Отже, середня кривизна поверхні в кожній точці дорівнює нулю. Фізичною реалізацією мінімальних поверхонь є мильні плівки, що натягнуті на заданий контур C. Δ

Нехай G – замкнута обмежена область у просторі R^n з гладкою границею ∂G. Розглянемо задачу на екстремум у класі функцій $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n змінних із простору $C^1(G)$, що набувають на границі ∂G області G фіксованих значень:

$$\begin{gathered} J(z(\cdot))=\int\limits_G\!\ldots\!\int L(x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n)dx_1\ldots dx_n \to extr, \\ z(x_1,\ldots,x_n)=\upsilon(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\partial G, \end{gathered} \tag{5.23}$$

де $p_k=\dfrac{\partial z}{\partial x_k}$, $k=\overline{1,n}$.

Теорема 5.6. *Нехай* $\hat{z}(\cdot)$ *– розв'язок задачі* (*5.23*). *Тоді функція* $\hat{z}(\cdot)$ *задовольняє рівняння Ейлера – Остроградського*

$$L'_z-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\{L'_{p_k}\}=0.$$

Приклад 5.20. Скласти рівняння екстремалей функціонала

$$J(u(\cdot))=\iiint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz\to extr$$

Рівняння Ейлера – Остроградського екстремалі $\hat{u}(x,y,z)$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Якщо функція L під інтегралом залежить від похідних вищого порядку, то, застосовуючи перетворення такі, як при виведенні рівняння Ейлера – Остроградського, одержимо рівняння, аналогічне рівнянню Ейлера – Пуассона. Δ

Функція $\hat{z}(x,y)$, яка дає екстремум функціонала

$$J(z(\cdot)) = \iint_G L\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dxdy,$$

задовольняє рівняння четвертого порядку в частинних похідних

$$L_z^{'} - \frac{\partial}{\partial x}\{L_p^{'}\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L_q^{'}\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{L_r^{'}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\{L_s^{'}\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{L_t^{'}\} = 0,$$

де

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Приклад 5.21. Функція $\hat{z}(x,y)$, яка дає екстремум функціонала

$$J(z(\cdot)) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dxdy,$$

задовольняє так зване *бігармонічне рівняння*

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0,$$

яке коротко записується так: $\Delta\Delta z = 0$.

Функція $\hat{z}(x,y)$, яка дає екстремум функціонала

$$J(z(\cdot)) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2zf(x,y)\right] dxdy,$$

задовольняє рівняння $\Delta\Delta z = f(x,y)$. Δ

До бігармонічного рівняння приведуть також задачі на екстремум функціонала

$$J(z(\cdot)) = \iint_G \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dxdy$$

і функціонала більш загального вигляду

$$J(z(\cdot)) = \iint_G \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dxdy,$$

де μ – параметр.

5.7. Задача Больца. Умови трансверсальності

Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа на множині функцій із закріпленими кінцями) – це задача з обмеженнями. Граничні умови $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ утворюють два обмеження типу рівності.

Задача Больца – задача дослідження на екстремум функціонала

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to extr \tag{5.24}$$

у просторі $C^1([t_0, t_1], R)$. Це задача без обмежень. Вважається, що функція $L(t, x, x')$ задовольняє такі самі умови, як і в найпростішій задача, тобто вона неперервна і неперервно диференційовна по кожній із двох змінних x, x', а функція $l(x_0, x_1)$ неперервно диференційовна по кожній із двох змінних.

Теорема 5.7 (необхідні умови екстремуму в задачі Больца). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R)$ *– розв'язок задачі* (*5.24*). *Тоді виконується рівняння Ейлера*

$$L_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = \frac{d}{dt} L'_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \tag{5.25}$$

і умови трансверсальності:

$$\begin{aligned} L'_{x'}(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{x}'(t_0)) &= \frac{\partial}{\partial x_0} l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)), \\ L'_{x'}(t_1, \hat{x}(t_1), \hat{x}'(t_1)) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)). \end{aligned}$$

Доведення. Як і при доведенні теореми про необхідну умову екстремуму найпростішої задачі варіаційного числення, знайдемо вираз для першої варіації Лагранжа функціонала $B(x(\cdot))$. Нехай $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R)$. Розглянемо функцію $\varphi(\lambda) = B(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot))$. Функції $L(t, x, x')$, $l(x(t_0), x(t_1))$, $\hat{x}(\cdot)$, $h(\cdot)$ – неперервно диффеpенційовні. Тому функція $\varphi(\lambda)$ диференційовна в точці $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = \delta B(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}[B(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) - B(\hat{x}(\cdot))] = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\hat{L}_x(t)h(t) + \hat{L}_{x'}(t)h'(t)]dt + \hat{l}'_{x_0} h(t_0) + \hat{l}'_{x_1} h(t_1), \end{aligned} \tag{5.26}$$

де

$$\hat{L}_x(t) \quad = L_x^{'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)), \qquad\qquad \hat{L}_{x'}^{'}(t) = L_{x'}^{'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)),$$

$$\hat{l}_{x_0}^{'} \quad = l_{x_0}^{'}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)), \qquad\qquad \hat{l}_{x_1}^{'} = l_{x_1}^{'}(\hat{x}(t_0), \hat{x}'(t_1)).$$

Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R)$ – розв'язок задачі (5.24), то необхідно, щоб $\delta B(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = 0$ для всіх $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R)$. Звідси випливає, що $\delta B(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = 0$ для кожної функції із простору $C^1([t_0, t_1], R)$, яка задовольняє граничні умови $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Для таких функцій виконується рівність

$$\int_{t_0}^{t_1} [\hat{L}_x(t)h(t) + \hat{L}_{x'}^{'}(t)h'(t)]dt = 0.$$

За лемою Дюбуа – Реймона функція $\hat{L}_{x'}^{'}(t)$ неперервно диференційовна і

$$\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}^{'}(t) = \hat{L}_x(t).$$

А це і є рівняння Ейлера (5.25).

Проінтегруємо другий доданок у (5.26) і використаємо останнє співвідношення. Тоді перша варіація Лагранжа функціонала $B(x(\cdot))$ матиме вигляд

$$\delta B(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \quad = \int_{t_0}^{t_1} [\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}^{'}(t)]h(t)dt +$$

$$+ \hat{L}_{x'}^{'}(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \hat{l}_{x_0}^{'}h(t_0) + \hat{l}_{x_1}^{'}h(t_1) =$$

$$= [\hat{L}_{x'}^{'}(t_1) + \hat{l}_{x_1}^{'}]h(t_1) + [-\hat{L}_{x'}^{'}(t_0) + \hat{l}_{x_0}^{'}]h(t_0) = 0.$$

Ця рівність виконується для будь-якої функції $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R)$. Виберемо $h(t) = t - t_0$, а потім $h(t) = t - t_1$, одержимо умови трансверсальності:

$$\hat{L}_{x'}^{'}(t_0) = \hat{l}_{x_0}^{'}, \quad \hat{L}_{x'}^{'}(t_1) = -\hat{l}_{x_1}^{'}.$$

Теорему доведено.

Як і в задачі Лагранжа ми одержали диференціальне рівняння другого порядку і дві граничні умови – умови трансверсальності. Ці умови дають можливість визначити дві невідомі константи, які входять у загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку.

Якщо функція $l(x_0, x_1) = 0$, то задача Больца перетворюється на задачу Лагранжа на множині функцій з вільними (незакріпленими) кінцями, і з теореми 5.7 випливає такий наслідок.

Теорема 5.8. *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R)$ – розв'язок задачі Лагранжа на множині функцій з вільними (незакріпленими) кінцями*

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr,$$

то $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера (5.25) і граничні умови

$$L'_{x'}(t_k, \hat{x}(t_k), \hat{x}'(t_k)) = 0, \quad k = 0,1.$$

Необхідні умови екстремуму у векторній задачі Больца

$$\begin{aligned} B(\overline{x}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t))dt + \\ &+ l(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) \to extr \end{aligned} \tag{5.27}$$

мають такий же вигляд, як і в скалярній задачі.

Теорема 5.9. *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ – розв'язок задачі Больца (5.27). Тоді компоненти $\hat{x}_k(\cdot)$, $k = \overline{1, n}$, функції $\hat{x}(\cdot)$ задовольняють систему рівнянь Ейлера*

$$\begin{aligned} &L'_{x_j}(t, \hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t), \hat{x}_1'(t), \dots, \hat{x}_n'(t)) = \\ &= \frac{d}{dt} L'_{x_j'}(t, \hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t), \hat{x}_1'(t), \dots, \hat{x}_n'(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{5.28}$$

та умови трансверсальності:

$$\begin{aligned} &L'_{x_j'}(t, \hat{x}_1(t_k), \dots, \hat{x}_n(t_k), \hat{x}_1'(t_k), \dots, \hat{x}_n'(t_k)) = \\ &= (-1)^k \frac{\partial}{\partial x_j(t_k)} l(\hat{x}_1(t_0), \dots, \hat{x}_n(t_0), \hat{x}_1'(t_1), \dots, \hat{x}_n'(t_1)), \\ &k = 0,1; \;\; j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Теорема 5.10. *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ – розв'язок задачі Лагранжа на множині векторних функцій з вільними (незакріпленими) кінцями*

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t))dt \to extr,$$

то $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє систему рівнянь Ейлера (5.28) і граничні умови

$$L'_{x_j'}(t, \hat{x}_1(t_k), \dots, \hat{x}_n(t_k), \hat{x}_1'(t_k), \dots, \hat{x}_n'(t_k)) = 0, \; k = 0,1.$$

Приклад 5.22. Розв'язати задачу

$$B(x(\cdot)) = \int_0^1((x')^2(t) - x(t))dt + x^2(1) \to extr.$$

Розв'язок:

1. Складемо рівняння Ейлера:

$$L_x = -1, \quad L'_{x'} = 2x', \quad \frac{d}{dt}L'_{x'} = 2x'',$$

$$L_x = \frac{d}{dt}L'_{x'} \Leftrightarrow 2x'' = -1.$$

Загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x(t) = -t^2/4 + C_1t + C_2.$$

2. Запишемо умови трансверсальності

$$\hat{L}'_{x'}(0) = \hat{l}'_{x_0} \Leftrightarrow \hat{x}'(0) = 0;$$

$$\hat{L}'_{x'}(1) = -\hat{l}'_{x_1} \Leftrightarrow \hat{x}'(1) = -\hat{x}(1).$$

3. Визначимо допустимі екстремалі. З умов трансверсальності дістанемо такі значення невідомих констант: $C_1 = 0$, $C_2 = 3/4$.

Отже, задача має одну допустиму екстремаль: $\hat{x}(t) = (3 - t^2)/4$.

4. Покажемо, що ця екстремаль дає абсолютний мінімум у задачі. Дійсно, для будь-якої функції $h(\cdot) \in C^1([0,1], R)$

$$B(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - B(\hat{x}(\cdot)) =$$

$$= \int_0^1 2\hat{x}'h'dt + \int_0^1(h')^2dt - \int_0^1 hdt + 2\hat{x}(1)h(1) + h^2(1).$$

Проінтегруємо частинами і врахуємо, що $\hat{x}(t) = (3 - t^2)/4$, тоді

$$B(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - B(\hat{x}(\cdot)) = 2\hat{x}'h\,|_0^1 - \int_0^1(2\hat{x}'' + 1)hdt +$$

$$+ \int_0^1(h')^2dt + 2\hat{x}(1)h(1) + h^2(1) = \int_0^1(h')^2dt + h^2(1) \geq 0.$$

Відповідь: $\hat{x}(t) = (3 - t^2)/4 \in abs\min$. Δ

Приклад 5.23. Визначити екстремалі функціонала

$$B(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_0^1(x_1'(t)x_2'(t) + x_1(t)x_2(t))dt$$

$$+ x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) \to extr.$$

Розв'язок:

1. Складемо систему рівнянь Ейлера:

$$L'_{x_1} = x_2, \qquad L'_{x_1'} = x_2', \qquad \frac{d}{dt}L'_{x_1'} = x_2'',$$

$$L'_{x_2} = x_1, \qquad L'_{x_2'} = x_1', \qquad \frac{d}{dt}L'_{x_2'} = x_1''.$$

Отже, $x_2'' = x_2$, $x_1'' = x_1$. Загальний розв'язок цих рівнянь такий:

$$\hat{x}_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}, \quad \hat{x}_2(t) = A_1e^t + A_2e^{-t}.$$

2. Щоб скласти умови трансверсальності, обчислимо:

$$\hat{L}'_{x_1'}(0) = \hat{x}_2'(0) = A_1 - A_2, \quad \hat{l}'_{x_1(0)} = \hat{x}_2(1) = A_1e + A_2e^{-1},$$

$$\hat{L}'_{x_1'}(1) = \hat{x}_2'(1) = A_1e - A_2e^{-1}, \quad \hat{l}'_{x_1(1)} = \hat{x}_2(0) = A_1 + A_2,$$

$$\hat{L}'_{x_2'}(0) = \hat{x}_1'(0) = C_1 - C_2, \quad \hat{l}'_{x_2(0)} = \hat{x}_1(1) = C_1e + C_2e^{-1},$$

$$\hat{L}'_{x_2'}(1) = \hat{x}_1'(1) = C_1e - C_2e^{-1}, \quad \hat{l}'_{x_2(1)} = \hat{x}_1(0) = C_1 + C_2.$$

Умови трансверсальності мають вигляд

$$\hat{L}'_{x_1'}(0) = \hat{l}'_{x_1(0)} \Leftrightarrow A_1 - A_2 = A_1e + A_2e^{-1},$$

$$\hat{L}'_{x_1'}(1) = -\hat{l}'_{x_1(1)} \Leftrightarrow A_1e - A_2e^{-1} = -A_1 - A_2,$$

$$\hat{L}'_{x_2'}(0) = \hat{l}'_{x_2(0)} \Leftrightarrow C_1 - C_2 = C_1e + C_2e^{-1},$$

$$\hat{L}'_{x_2'}(1) = -\hat{l}'_{x_2(1)} \Leftrightarrow C_1e - C_2e^{-1} = -C_1 - C_2.$$

Одержали систему рівнянь

$$A_1(1-e) - A_2(1+e^{-1}) = 0, \quad A_1(1+e) + A_2(1-e^{-1}) = 0,$$

$$C_1(1-e) - C_2(1+e^{-1}) = 0, \quad C_1(1+e) + C_2(1-e^{-1}) = 0,$$

з яких випливає, що $C_1 = C_2 = A_1 = A_2 = 0$.

Відповідь: Допустимі екстремалі задачі: $\hat{x}_1(t) \equiv 0$, $\hat{x}_2(t) \equiv 0$. Δ

Розглянемо задачу Больца на множині функцій багатьох змінних.

Досліджуватимемо на екстремум функціонал

$$B(z(\cdot)) = \iint\limits_G L(x, y, z, z_x, z_y)dxdy + \int_{\partial G} F(s, z, z_s)ds \tag{5.29}$$

у класі $C^1(G)$ один раз неперервно диференційовних в області функцій $z(x,y)$, $(x,y) \in G$. Функція $L(x,y,z,z_x,z_y)$, як і функція $F(s,z,z_s)$, неперервно диференційовна.

Теорема 5.11. *Якщо функція* $\hat{z}(\cdot) \in C^1(G)$ *– розв'язок задачі* (*5.29*), *то вона задовольняє рівняння Ейлера – Остроградського* (*5.22*) *і граничні умови*

$$L'_{z_x}\frac{dy}{ds} - L'_{z_y}\frac{dx}{ds} + F'_z - \frac{d}{ds}L'_{z_s} = 0, \quad (x,y) \in \partial G.$$

Доведення. Щоб довести теорему, обчислимо першу варіацію функціонала $B(z(\cdot))$. Одержимо

$$\delta B(z(\cdot),h(\cdot)) = \iint\limits_G [F'_z - \frac{\partial}{\partial x}\{L'_{z_x}\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L'_{z_y}\}]h(x,y)dxdy$$
$$+\int_{\partial G}\left(L'_{z_x}\frac{dy}{ds} - L'_{z_y}\frac{dx}{ds}\right)hds + \int_{\partial G}\left(F'_z - \frac{d}{ds}L'_{z_s}\right)hds.$$

Відповідно до необхідної умови екстремуму $\delta B(\hat{z}(x,y),h(x,y)) = 0$ для всіх допустимих функцій $h(x,y) \in C^1(G)$. Застосуємо тепер лему Лагранжа.

Теорема 5.12. *Якщо функція* $\hat{z}(x,y) \in C^1(G)$ *– розв'язок задачі Лагранжа на множині функцій з вільними (незакріпленими) граничними значеннями*

$$J(z(\cdot)) = \iint\limits_G L(x,y,z,z_x,z_y)dxdy \to extr,$$

то функція $\hat{z}(\cdot)$ *задовольняє рівняння Ейлера – Остроградського* (*5.22*) *і граничні умови*

$$L'_{z_x}\frac{dy}{ds} - L'_{z_y}\frac{dx}{ds} = 0, \quad (x,y) \in \partial G.$$

Приклад 5.24. Визначити екстремалі функціонала

$$B(z(\cdot)) = \iint\limits_G (z_x^2 + z_y^2)dxdy + \iint\limits_{\partial G} \sigma z^2 ds \to extr.$$

Розв'язок:

Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Отже, екстремалі функціонала – це розв'язки задачі Діріхле з граничними умовами

$$\frac{\partial z}{\partial n} + \sigma z = 0, \quad (x,y) \in \partial G,$$

де через $\frac{\partial z}{\partial n}$ позначена операція диференціювання по зовнішній нормалі до кривої $\hat{z}(\cdot)$. Δ

Задачі

Визначити допустимі екстремалі функціоналів:

5.1. $\int\limits_a^b (2tx + (t^2 + e^x)x')dt \to extr$, $x(a) = c$, $x(b) = d$.

5.2. $\int\limits_0^\pi ((x')^2 - x^2)dt \to extr$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$.

5.3. $\int\limits_0^1 ((x')^2 + x^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

5.4. $\int\limits_0^{\pi/2} (x^2 - (x')^2 - 8x \cdot ch(t))dt \to extr$, $x(0) = 2$, $x(\pi/2) = 2ch(\pi/2)$.

5.5. $\int\limits_0^{3\pi/2} ((x')^2 - x^2 - 4x\sin(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(3\pi/2) = 0$.

5.6. $\int\limits_0^1 ((x')^2 + 4x^2)dt \to extr$, $x(0) = e^2$, $x(1) = 1$.

5.7. $\int\limits_0^{1/2} x^{-1}(1 + (x')^2)^{\frac{1}{2}} dt \to extr$, $x(0) = 1$, $x(1/2) = \sqrt{5/2}$.

5.8. $\int\limits_0^{\ln(2)} ((x')^2 + 3x^2)e^{2t} dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(\ln(2)) = 15/8$.

5.9. $\int\limits_1^2 ((x_1')^2 + x_2^2 + (x_2')^2)dt \to extr$, $x_1(1) = 1$, $x_1(2) = 2$, $x_2(1) = 0$, $x_2(2) = 1$.

5.10. $\int\limits_0^\pi (2x_1x_2 - 2x_1^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2)dt \to extr$, $x_1(0) = 0$, $x_1(\pi) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(\pi) = -1$.

5.11. $\int\limits_0^{\pi/4} (2x_2 - 4x_1^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2)dt \to extr$, $x_1(0) = 0$, $x_1(\pi/4) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(\pi/4) = 1$.

5.12. $\int\limits_{-1}^1 (2tx_1 - (x_1')^2 + (x_2')^3/3)dt \to extr$, $x_1(1) = 0$, $x_1(-1) = 2$, $x_2(1) = 1$, $x_2(-1) = -1$.

5.13. $\int_0^1 ((x_1')^2 + (x_2')^2 + 2x_1)dt \to extr$, $x_1(0) = 1$, $x_1(1) = 3/2$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

5.14. $\int_a^b (2x_1 \cos(t) + 2x_2^2 + 2x_1'x_2' + (x_1')^2 - (x_2')^2)dt \to extr.$

5.15. $\int_0^1 ((x_1')^2 + (x_2')^2 - 2x_1x_2)dt \to extr$, $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = sh(1)$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = -sh(1)$.

5.16. $\int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1'x_2')dt \to extr$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = x_2(1) = sh(1)$.

5.17. $\int_0^1 (x_1'x_2' + x_1x_2)dt \to extr$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $x_1(1) = e$, $x_2(1) = 1/e$.

5.18. $\int_0^{\pi/2} (x_1'x_2' - x_1x_2)dt \to extr$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(\pi/2) = 1$, $x_2(\pi/2) = -1$.

5.19. $\int_0^{\pi/2} (x_1'x_2' + 6tx_1 + 12t^2x_2)dt \to extr$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = x_2(1) = 1$.

5.20. $\int_0^{\pi/2} ((x_1')^2 + (x_3')^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3)dt \to extr$, $x_1(0) = x_3(0) = 1$, $x_2(0) = -1$, $x_1(\pi/2) = \pi/2$, $x_2(\pi/2) = 0$, $x_3(\pi/2) = -\pi/2$.

5.21. $\int_0^1 (x^2 + 2(x')^2 + (x'')^2)dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$, $x'(0) = 1$, $x'(1) = -ch(1)$.

5.22. $\int_{-1}^0 (240x - (x''')^2)dt \to extr$, $x(-1) = 1$, $x(0) = 0$, $x'(-1) = -9/2$, $x'(0) = 0$, $x''(-1) = 16$, $x''(0) = 0$.

5.23. $\int_a^b ((x')^2 + xx'')dt \to extr$, $x(a) = A_1$, $x'(A) = A_2$, $x(b) = B_1$, $x'(b) = B_2$.

5.24. $\int_0^{\pi/2} ((x''')^2 - (x'')^2)dt \to extr$, $x(0) = x'(0) = x''(\pi/2) = 0$, $x(\pi/2) = x'(\pi/2) = x''(0) = 1$.

5.25. $\int_0^{\pi}((x''')^2-(x'')^2)dt \to extr$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x''(\pi)=0$,
$x(\pi)=\pi$, $x'(\pi)=2$.

5.26. $\int_0^{\pi}((x''')^2-(x')^2)dt \to extr$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=x''(0)=0$,
$x(\pi)=x''(\pi)=sh(\pi)$, $x'(\pi)=ch(\pi)+1$.

5.27. $\int_0^1\int_0^1 e^{z_{y'}}\sin(z_{y'})dxdy \to extr$, $z(x,0)=0$, $z(x,1)=1$.

Відшукати допустимі екстремалі функціоналів в задачах Больца

5.28. $\int_0^{\pi}((x')^2-x^2-2x\sin(t))dt+x^2(0)+x^2(\pi)\to extr.$

5.29. $\int_0^{\pi/2}((x')^2-x^2)dt-x^2(\pi/2)+2x(\pi/2)\to extr.$

5.30. $\int_0^{\ln(2)}((x')^2+2x^2)e^t\,dt+(x(0)-9)x(\ln(2))\to extr.$

5.31. $\int_1^{e}2x'(tx'+x)dt+3x^2(1)-x^2(e)-4x(e)\to extr.$

5.32. $\int_0^{3}4x^2(x')^2\,dt+x^4(0)-x(3)\to extr.$

5.33. $\int_0^{1}e^x(x')^2\,dt+4e^{x(0)}+32e^{-x(1)}\to extr.$

5.34. $\int_0^{1}e^{t+1}((x')^2+2x^2)dt+2x(1)(x(0)+1)\to extr.$

5.35. $\int_0^{e-1}(t+1)(x')^2\,dt+2x(0)(x(e-1)+1)\to extr.$

5.36. $\int_1^{2}t^2(x')^2\,dt+2x(1)+x^2(2)\to extr.$

5.37. $\int_0^{\pi/2}((x')^2-x^2-2x)dt-2x^2(0)+x^2(\pi/2)\to extr.$

6. КАНОНІЧНА ФОРМА РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА

6.1. Інваріантість рівнянь Ейлера й Остроградського

Досліджуючи на екстремум функцію однієї змінної $y = f(x)$, ми можемо зробити заміну незалежної змінної $x = g(u)$, де u – нова незалежна змінна. Нехай функція $g(u)$ монотонна і має відмінну від нуля похідну $g'(u)$. Тоді відповідно до правила диференціювання складної функції

$$\frac{dy}{du} = f'(x)g'(u). \tag{6.1}$$

Необхідна умова екстремуму функції $y(u) = f(g(u))$ має вигляд $f'(x)g'(u) = 0$. Оскільки $g'(u) \neq 0$, то ця умова рівносильна умові $f'(x) = 0$ екстремуму функції $y = f(x)$. Таку властивість інваріантості при заміні змінних має і рівняння Ейлера.

Розглянемо основну задачу варіаційного числення:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Нехай u – нова незалежна змінна і $dt/du \neq 0$. Тоді

$$L(t, x, x') = L\left(t(u), x, \frac{dx/du}{dt/du}\right) = \Phi\left(u, x, \frac{dx}{du}\right),$$

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt = \int_{u_0}^{u_1} \Phi\left(u, x, \frac{dx}{du}\right)\frac{dt}{du}du.$$

Скористаємося позначенням $[L]_x = L_x - \frac{d}{dt}L_{x'}$. Визначимо функцію $\varphi(\lambda) = J(x(\cdot) + \lambda h(\cdot))$, де $h(\cdot)$ – допустима варіація функції $x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$. Тоді $\delta J(x(\cdot), h(\cdot)) = \varphi'(0)$. Для змінної t похідна

$$\begin{aligned}\varphi'(0) \quad &= \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t) + \lambda h(t), x'(t) + \lambda h'(t))dt\,|_{\lambda=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [L]_x h(t)dt.\end{aligned}$$

Для змінної u похідна $\varphi'(0)$

$$\varphi'(0) \quad = \frac{d}{d\lambda}\int_{u_0}^{u_1}\Phi\left(u, x(u)+\lambda h_1(u), \frac{dx}{du}+\lambda\frac{dh_1}{du}\right)\frac{dt}{du}du\Bigg|_{\lambda=0}$$

$$= \int_{u_0}^{u_1}\left[\Phi\frac{dt}{du}\right]_x h_1(u)du, \quad h_1(u) = h(t(u)).$$

Порівнюючи отримані вирази, одержимо

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{[L]_x - \left[\Phi\frac{dt}{du}\right]_x \frac{du}{dt}\right\}h(t)dt = 0.$$

Ця рівність виконується для будь-якої допустимої варіації $h(\cdot)$. Скориставшись лемою Лагранжа, одержимо

$$[L]_x = \left[\Phi\frac{dt}{du}\right]_x \frac{du}{dt}. \tag{6.2}$$

Ця формула аналогічна формулі (6.1) для функції однієї змінної, а рівняння Ейлера

$$\left[\Phi\frac{dt}{du}\right]_x = 0$$

рівносильне рівнянню Ейлера $[L]_x = 0$. Отже, властивість кривої бути екстремаллю не залежить від системи координат.

Можна робити заміну і незалежної змінної і функції. Нехай замість координат (x, y) введені нові координати за формулами $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$. Крива $y = y(x)$ у нових координатах визначається рівнянням $v = v(u)$. За такої заміни змінних функціонал

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x))dx$$

переходить у функціонал

$$J_1(v(\cdot)) \quad = \int_{u_0}^{u_1} L\left(x(u,v), y(u,v), \frac{y_u + y_v v_u}{x_u + x_v v_u}\right)(x_u + x_v v_u)du = \int_{u_0}^{u_1}\Phi(u,v,v')du$$

і рівняння Ейлера $[L]_y = 0$ рівносильне рівнянню Ейлера $[\Phi]_v = 0$.

Розглянемо задачу на множині функцій, що залежать від двох незалежних змінних. Нехай

$$J(z(\cdot)) = \iint_B L(x, y, z(x,y), z_x(x,y), z_y(x,y))dxdy.$$

Замінимо змінні (x, y) на нові незалежні змінні $(u,v): x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Будемо вважати, що функції $x(u,v)$, $y(u,v)$ неперервно диференційовні й визначник

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u$$

не перетворюється в нуль. Тоді

$$L(x,y,z,z_x,z_y) \quad = L(x(u,v),y(u,v),z,z_u u_x + z_v v_x, z_u u_y + z_v v_y)$$
$$= \Phi(u,v,z,z_u,z_v).$$

Нехай $h(x,y)$, $(x,y) \in D$ – варіація функції $z(x,y)$. Визначимо функцію $\varphi(\lambda) = J(z(\cdot) + \lambda h(\cdot))$. Порівнюючи вирази $\varphi'(0)$ в різних системах координат, одержимо

$$\iint_B [L]_z h(x,y) dxdy = \iint_{B_1} \left[\Phi \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right]_z h_1(u,v) dudv,$$

де $h_1(u,v) = h(x(u,v), y(u,v))$; $[L]_z = L_z - \frac{\partial}{\partial x} L_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{z_y}$; B_1 – образ B при перетворенні $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$. Якщо зробити заміну змінних в інтегралі, що стоїть у правій частині рівності та використати лему Лагранжа для функцій двох змінних, то одержимо

$$[L]_z = \left[\Phi \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right]_z \frac{D(u,v)}{D(x,y)}.$$

Тому рівняння Остроградського $[L]_z = 0$ рівносильне рівнянню Остроградського $\left[\Phi \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right]_z = 0$ для незалежних змінних u, v.

Приклад 6.1. Визначити екстремалі функціонала

$$J_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

Розв'язок:

Екстремалі функціонала задовольняють рівняння Ейлера

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} - \frac{d}{d\varphi} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} = 0,$$

яке розв'язати не так і легко. Проте заміна змінних $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ дає функціонал

$$J_2 = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Екстремалі такого функціонала – це прямі лінії $y = cx + d$. Отже, екстремалі функціонала J_1 описуються рівнянням $r\sin(\varphi) = cr\cos(\varphi) + d$, де c, d – довільні константи. Δ

Приклад 6.2. Визначити екстремалі функціонала

$$J_1(y(\cdot)) = \int_0^{\ln(2)} (e^{-x}(y')^2 - e^x y^2)dx.$$

Розв'язок:

Рівняння Ейлера такого функціонала

$$y'' - y' + e^{2x} y = 0.$$

Зробимо заміну змінних $x = \ln(u)$, $y = v$. Тоді функціонал матиме вигляд

$$J_2(v(\cdot)) = \int_1^2 ((v')^2 - v^2)dv.$$

Рівняння Ейлера $v'' + v = 0$ функціонала J_2 легко інтегрується. Одержимо $v = C_1 \cos(u) + C_2 \sin(u)$. Перейдемо до координат x, y. Рівняння екстремалі буде таким: $y = C_1 \cos(e^x) + C_2 \sin(e^x)$. Δ

Приклад 6.3. Визначити екстремалі функціонала, який залежить від функцій двох змінних

$$J(u(\cdot)) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)dxdy.$$

Рівняння Ейлера – Остроградського такого функціонала перетворюється в рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Якщо зробити заміну змінних $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, то функціонал матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&\iint_D (u_x^2 + u_y^2)dxdy = \\
&= \iint_{D_1} \left[\left(u_r \frac{\partial r}{\partial x} + u_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(u_r \frac{\partial r}{\partial y} + u_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] r dr d\varphi \\
&= \iint_{D_1} \left(r u_r^2 + \frac{1}{r} u_\varphi^2 \right) dr d\varphi.
\end{aligned}$$

Рівняння Ейлера – Остроградського такого функціонала перетворюється в рівняння Лапласа в полярних координатах

$$u_r + r u_{rr} + \frac{1}{r} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Отже, екстремалі функціонала визначаються рівнянням Лапласа. Δ

6.2. Варіаційні задачі в параметричній формі

Досліджуючи на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt,$$

ми вважали, що аргументи функціонала – функції $x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$, що задані в явному вигляді $x = x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. У деяких задачах доцільно функцію $x = x(t)$ задавати в параметричній формі $x = x(u)$, $t = t(u)$. Тоді функціонал J можна записати так:

$$J(x(\cdot), t(\cdot)) \quad = \int_{u_0}^{u_1} L\left(t(u), x(u), \frac{x'(u)}{t'(u)}\right) t'(u)du = \int_{u_0}^{u_1} F(t, x, t', x')du.$$

Цей функціонал залежить від двох функцій $x(u)$, $t(u)$, $u_0 \le u \le u_1$. Функція $F(t, x, t', x')$ під знаком інтеграла не залежить явно від змінної u. Вона додатно однорідна першого порядку відносно x', t', тобто

$$F(t, x, kt', kx') = kF(t, x, t', x').$$

Ці дві властивості достатні для того, щоб функціонал залежав від функції $x = x(t)$ і не залежав від способу її параметризації. Дійсно, нехай заданий функціонал

$$J(x(\cdot), t(\cdot)) = \int_{u_0}^{u_1} F(t, x, t', x')du,$$

де функція F не залежить явно від параметра u й однорідна першого порядку відносно t', x'. Замість u визначимо інший параметр v так, щоб $u = u(v)$ і $u'(v) > 0$. Тоді відрізок $u_0 \le u \le u_1$ переходить у відрізок $v_0 \le v \le v_1$, а функціонал

$$J \quad = \int_{u_0}^{u_1} F(t, x, \frac{dt}{du}, \frac{dx}{du})du = \int_{v_0}^{v_1} F(t, x, \frac{dt}{dv}\frac{dv}{du}, \frac{dx}{dv}\frac{dv}{du})\frac{du}{dv}dv =$$

$$= \int_{v_0}^{v_1} F(t, x, \frac{dt}{dv}, \frac{dx}{dv})dv$$

не залежить від перетворення параметра, що не змінює напрямку руху вздовж кривої ($u'(v) > 0$). Тому екстремаль не залежить від вибору параметра. Однорідна першого порядку по t', x' функція $F(t, x, t', x')$ задовольняє співвідношення $F(t, x, kt', kx') = \ kF(t, x, t', \ x')$. Продиференціюємо цю рівність по k і візьмемо $k = 1$. Одержимо

$$t'F_{t'}(t, x, t', x') + x'F_{x'}(t, x, t', x') = F(t, x, t', x').$$

Диференціюємо тепер по t, x, t', x'. Одержимо

$$F_t = t'F_{tt'} + x'F_{tx'}, \quad F_x = t'F_{xt'} + x'F_{xx'},$$
$$0 = t'F_{t't'} + x'F_{t'x'}, \quad 0 = t'F_{t'x'} + x'F_{x'x'}.$$

З останніх двох рівностей знаходимо

$$\frac{F_{t't'}}{(x')^2} = \frac{F_{t'x'}}{-t'x'} = \frac{F_{x'x'}}{(t')^2} = F_1(t, x, t', x'),$$

де через $F_1(t, x, t', x')$ позначена величина всіх трьох відношень. Ці співвідношення можна записати у вигляді

$$F_{t't'} = (x')^2 F_1, \quad F_{t'x'} = -t'x'F_1, \quad F_{x'x'} = (t')^2 F_1.$$

Їх можна використовувати для аналізу рівнянь Ейлера

$$F_x - \frac{d}{du} F_{x'} = 0, \quad F_t - \frac{d}{du} F_{t'} = 0$$

функціонала $J(x(\cdot), t(\cdot))$. Одне із цих рівнянь є наслідком іншого. Дійсно,

$$\begin{aligned} F_x - \frac{d}{du} F_{x'} &= (t'F_{xt'} + x'F_{xx'}) - (t'F_{x't} + x'F_{x'x} + x''F_{x'x'} + t''F_{x't'}) \\ &= -t'[F_{tx'} - F_{xt'} - F_1(t'x'' - t''x')], \\ F_t - \frac{d}{du} F_{t'} &= (t'F_{tt'} + x'F_{tx'}) - (t'F_{tt'} + x'F_{xt'} + t''F_{t't'} + x''F_{t'x'}) \\ &= -x'[F_{tx'} - F_{xt'} - F_1(t'x'' - t''x')]. \end{aligned}$$

Якщо x', t' одночасно не дорівнюють нулю ($x'^2 + t'^2 \neq 0$), то два рівняння Ейлера зводяться до одного рівняння:

$$-F_1(t, x, t', x')(t'x'' - t''x') + F_{tx'} - F_{xt'} = 0.$$

Це так звана *форма Вейєрштрасса рівнянь Ейлера*. До цього рівняння з двома невідомими функціями можна додати ще одне рівняння, що характеризує вибір параметра u. Якщо, наприклад, за параметр беремо довжину дуги S шуканої екстремалі, то додаткове рівняння буде $x'^2 + t'^2 = 1$.

Якщо врахувати, що радіус кривизни R плоскої кривої, яка задана в параметричній формі $x = x(u)$, $t = t(u)$, обчислюється за формулою

$$\frac{1}{R} = \frac{t'x'' - t''x'}{(x'^2 + t'^2)^{3/2}},$$

то форму Вейєрштрасса рівнянь Ейлера можна записати у вигляді

$$\frac{1}{R} = \frac{F_{tx'} - F_{xt'}}{F_1(x'^2 + t'^2)^{3/2}}.$$

Ця форма інваріантна відносно перетворення параметра.

Приклад 6.4. Відшукати екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{t_1} x^2 x'^2 dt, \quad x(0) = 0, x(t_1) = x_1.$$

Якщо криву $x(t)$ задати в параметричній формі $x = x(u)$, $t = t(u)$, то функція під знаком інтеграла $F = x^2 \frac{x'^2}{t'^2} t'$ однорідна першого порядку відносно t', x'. Рівняння Ейлера $F_t - \frac{d}{du} F_{t'} = 0$ має вигляд

$$\frac{d}{du}\left(\frac{x^2 x'^2}{t'}\right) = 0,$$

звідки $x^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c_1^2$, $x^2 = 2c_1 t + c_2$. Із граничної умови $x(0) = 0$ випливає, що $c_2 = 0$.

Відповідь. Екстремалі функціонала – це параболи $x^2 = 2c_1 t$. Δ

Приклад 6.5. Визначити екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^{t_1} (\sqrt{x'^2 + y'^2} + a^2 (xy' - yx'))dt.$$

Функція $F = \sqrt{x'^2 + y'^2} + a^2 (xy' - yx')$ додатно однорідна першого порядку відносно x', y'. Скористаємося формою Вейєрштрасса рівнянь Ейлера:

$$F_{xy'} = a^2, \quad F_{yx'} = -a^2, \quad F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = \frac{1}{(x'^2 + t'^2)^{3/2}}.$$

Отже, рівняння Ейлера у формі Вейєрштрасса має вигляд $\frac{1}{R} = 2a^2$. Таким чином, кривизна екстремалі стала. Тому екстремалі – це дуги кола. Δ

6.3. Канонічна (гамільтонова) форма рівнянь Ейлера

Рівняння Ейлера (диференціальне рівняння другого порядку)

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0 \tag{6.3}$$

функціонала основної задачі варіаційного числення

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

можна замінити системою двох рівнянь першого порядку, якщо ввести позначення

$$L_{x'}(t, x, x') = p. \tag{6.4}$$

Тоді рівняння Ейлера (6.3) буде мати вигляд

$$L_x = p'. \tag{6.5}$$

Якщо друга похідна $L_{x'x'} \neq 0$, то рівняння (6.5) можна розв'язати відносно x'. Нехай $x' = w(t, x, p)$. Підставимо цей вираз у рівняння (6.5). Одержимо систему двох рівнянь відносно невідомих функцій $p(t)$, $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = w(t, x, p), \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} L(t, x, p). \tag{6.6}$$

Функцією Гамільтона, чи гамільтоніаном H функціонала $J(x(\cdot))$ називається функція змінних t, x, p, що визначається рівністю $H = -L(t, x, x') + x'L_{x'}(t, x, x')$, де $x' = w(t, x, p)$. За допомогою функції H систему рівнянь (6.6) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dp}{dt}. \tag{6.7}$$

Ці рівняння називаються *канонічною* чи *гамільтоновою системою рівнянь Ейлера* функціонала $J(x(\cdot))$. Змінні t, x, p називаються *канонічними*. У механіці змінну p називають *імпульсом*, а функцію H – *енергією*.

Теорема 6.1. *Рівняння Ейлера* (*6.3*) *еквівалентне канонічній системі рівнянь* (*6.7*).

Доведення. Дійсно, нехай $x(t)$ – розв'язок рівняння (6.3). Покажемо, що $x(t)$, $p(t) = L_{x'}(t, x(t), x'(t))$ – це розв'язок системи рівнянь (6.7). Перше рівняння в (6.7) – наслідок визначення функції H. Щоб вивести друге, запишемо

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x, x') = L_x(t, x, x') = -H_x$$

Нехай тепер $x(t)$, $p(t)$ – розв'язок системи (6.7). Тоді

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = L_x, \quad p = L_{x'}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} L_{x'}.$$

Порівнюючи праві частини рівнянь, одержимо рівняння Ейлера.

Користуючись канонічною системою рівнянь Ейлера, можна довести, що гамільтоніан H уздовж екстремалі задовольняє рівняння

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}. \tag{6.8}$$

Дійсно,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Відповідно до рівняння (6.8) гамільтоніан не змінюється вздовж екстремалі ($H = C = \mathrm{const}$), якщо функція L не залежить явно від t. А це означає, що $H(x, p)$ – перший інтеграл канонічної системи.

Якщо функціонал

$$J(x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t))dt$$

залежить від n функцій, то систему рівнянь другого порядку

$$L_{x_k} - \frac{d}{dt}L_{x_k'} = 0, \quad k = \overline{1,n}$$

можна замінити канонічною системою $2n$ рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial H}{\partial H} = \frac{dx_k}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = -\frac{dp_k}{dt}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{6.9}$$

Гамільтоніан $H(t, x_1,\ldots,x_n, p_1,\ldots,p_n)$ функціонала визначається рівністю

$$H \quad = -L(t, x_1,\ldots,x_n, x_1',\ldots,x_n') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} x_k' L_{x_k'}(t, x_1,\ldots,x_n, x_1',\ldots,x_n'),$$

де $x_k' = \omega_k(t, x_1,\ldots,x_n, p_1,\ldots,p_n)$ знайдені з рівнянь $L_{x_k'} = p_k$, $k = \overline{1,n}$ за умови, що визначник

$$\left| L_{x_k' x_j'} \right|_{k,j=\overline{1,n}} \neq 0.$$

Зауважимо, що диференціальне рівняння другого порядку можна привести до системи рівнянь першого порядку ще й іншими способами. Канонічна система має ті переваги, що вона проста і симетрична.

Приклад 6.6. Скласти канонічну систему рівнянь Ейлера функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x^2+t^2}\sqrt{1+x'^2}\,dt.$$

Канонічні змінні

$$p = L'_{x'} = \frac{x'\sqrt{x^2+t^2}}{\sqrt{1+x'^2}}, \quad x'^2 = \frac{p^2}{x^2+t^2-p^2},$$

$$H = [-L + x'L'_{x'}]\big|_{x'=p/\sqrt{x^2+t^2-p^2}} = -\sqrt{x^2+t^2-p^2}.$$

Канонічна система рівнянь буде така:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+t^2-p^2}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{\sqrt{x^2+t^2-p^2}}. \ \Delta$$

Приклад 6.7. Скласти канонічну систему рівнянь Ейлера функціонала

$$J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (2x_1x_2 - 2x_1^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2)dt.$$

Нехай $L'_{x_1'} = p_1$, $L'_{x_2'} = p_2$. Тоді $p_1 = 2x'_1$, $p_2 = -2x'_2$. Визначник

$$\begin{vmatrix} L''_{x_1'x_1'} & L''_{x_1'x_2'} \\ L''_{x_2'x_1'} & L''_{x_2'x_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно x_1', x_2'. Одержимо $x_1' = p_1/2$, $x_2' = -p_2/2$. Гамільтоніан даного функціонала

$$H = (-L + x_1'L'_{x_1'} + x_2'L'_{x_2'})\big|_{x_1'=p_1/2, x_2'=-p_2/2} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + p_1^2/4 - p_2^2/4.$$

Канонічна система рівнянь Ейлера матиме такий вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{p_1}{2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{p_2}{2},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -4x_1 + 2x_2, \quad \frac{dp_2}{dt} = 2x_1.$$

Тут $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $p_1 = p_1(t)$, $p_2 = p_2(t)$ – невідомі функції від t. Δ

6.4. Рівняння Гамільтона – Якобі

Розглянемо задачу варіаційного числення

$$J_{t,v}(x(\cdot)) = \int_a^t L(s, x(s), x'(s))ds, \quad x(a) = b, x(t) = v,$$

що залежить від параметрів t, v. Позначимо через $\hat{x}(s,t,v)$, $s \in [a,t]$, функцію, що дає мінімум функціонала $J_{t,v}(x(\cdot))$, а через $S(t,v)$ – сам мінімум функціонала. Тоді

$$\begin{aligned} S(t,v) &= \int_a^t L(s, \hat{x}(s,t,v), \hat{x}_s(s,t,v))ds = \\ &= \int_a^{t-\Delta t} L(s, \hat{x}(s,t,v), \hat{x}_s(s,t,v))ds + \\ &\quad + \int_{t-\Delta t}^t L(s, \hat{x}(s,t,v), \hat{x}_s(s,t,v))ds = \\ &= S(t-\Delta t, \hat{x}(t, t-\Delta t, v)) + L(t, \hat{x}(t,t,v), \hat{x}_t^{'}(t,t,v))\Delta t + o(|\Delta t|). \end{aligned}$$

Розділимо обидві частини на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Одержимо рівняння

$$\frac{dS(t,x)}{dt} = L(t, \hat{x}(t), x'(t)).$$

Враховуючи, що

$$\frac{dS(t,x)}{dt} = \frac{\partial S(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\frac{dx}{dt},$$

це рівняння можна записати так:

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} - L(t,x,x') + \frac{\partial S(t,x)}{\partial x}x' = 0.$$

Якщо перейти до канонічних змінних x, p, то рівняння матиме вигляд

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} + H(t, x, \frac{\partial S(t,x)}{\partial x}) = 0. \qquad (6.10)$$

Це рівняння в частинних похідних називається *рівнянням Гамільтона – Якобі.* Канонічні рівняння Ейлера – це рівняння характеристик рівняння Гамільтона – Якобі.

Розглянемо взаємозв'язок між розв'язками рівняння Гамільтона – Якобі та першими інтегралами системи рівнянь Ейлера.

Теорема 6.2 (теорема Якобі). *Нехай* $S = S(t,x,\alpha) \in C^2[t_0,t_1]$ *– повний інтеграл Гамільтона – Якобі і* $\partial^2 S / \partial\alpha\partial x \neq 0$. *Тоді функція* $x(t,\alpha,\beta) \in C^1[t_0,t_1]$, *визначена з рівняння* $\partial S(t,x,\alpha)/\partial\alpha = \beta$, *разом із функцією*

$$p(t,\alpha,\beta)=\frac{\partial S(t,x(t,\alpha,\beta))}{\partial x}$$

становлять загальний розв'язок канонічної системи рівнянь Ейлера.

Доведення. Покажемо спочатку, що $\partial S/\partial\alpha=\beta$ – це перший інтеграл канонічної системи, тобто $d(\partial S/\partial\alpha)/dt=0$. Запишемо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial\alpha}+\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial\alpha}\frac{dx}{dt}. \tag{6.11}$$

Продиференціюємо тотожність

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}+H(t,x,\frac{\partial S(t,x)}{\partial x})=0 \tag{6.12}$$

за параметром α. Одержимо

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial\alpha}=-\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial\alpha}. \tag{6.13}$$

Підставимо рівняння в (6.11) і скористаємося канонічною системою рівнянь Ейлера:

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{dx}{dt},\quad \frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{dp}{dt}. \tag{6.14}$$

Тоді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\left(-\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{dx}{dt}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial\alpha}=0.$$

Перевіримо тепер, що функції $p(t,\alpha,\beta)$, $x(t,\alpha,\beta)$ задовольняють канонічну систему рівнянь (6.14). Із визначення функції $x(t,\alpha,\beta)$ і рівності (6.13) випливає, що

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial^2 S/\partial\alpha\partial t}{\partial^2 S/\partial\alpha\partial x}=\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{6.15}$$

Це одне з рівнянь канонічної системи. Щоб скласти друге рівняння, продиференціюємо за x тотожність (6.12). Одержимо

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=0.$$

Відповідно до визначення функції $p(t,\alpha,\beta)$ з рівняння (6.14) одержимо

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{dH}{dp}.$$

З останніх двох рівнянь виводимо друге рівняння канонічної системи (6.13). Теорему доведено.

Якщо функціонал $J(x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot))$ залежить від вектора-функції, то рівняння Гамільтона – Якобі має вигляд

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial S}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)=0. \qquad (6.16)$$

Повним інтегралом рівняння в частинних похідних першого порядку називається такий його о зв'язок, що містить стільки невідомих констант, скільки є незалежних змінних. Рівняння Гамільтона – Якобі (6.16) залежить тільки від частинних похідних невідомої функції. Повний інтеграл такого рівняння можна подати у вигляді $S=S(t,x_1,\ldots,$ $x_n,$ $a_1,\ldots,a_n)+a$, де $a,a_1,\ldots,a_n$ – невідомі константи.

Якщо функціонал $J(x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot))$ залежить від вектора-функції, то вірна теорема, аналогічна теоремі 6.2.

Теорема 6.3 (теорема Якобі). *Нехай S – повний інтеграл Гамільтона – Якобі. Якщо виконуються умови:*

1) функція S неперервно диференційовна за параметрами a_k, $k=\overline{1,n}$;

2) частинні похідні $\dfrac{\partial S}{\partial a_k}$, $\dfrac{\partial S}{\partial x_k}$, $k=\overline{1,n}$ неперервно диференційовні за всіма аргументами;

3) визначник $\left|\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial a_j}\right|_{k,j=\overline{1,n}}\neq 0,$

то рівності

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}=b_k,\quad \frac{\partial S}{\partial x_k}=p_k,\quad k=\overline{1,n},$$

де b_k – довільні константи, задають розв'язок канонічної системи рівнянь

$$\frac{\partial H}{\partial p_k}=\frac{dx_k}{dt},\quad \frac{\partial H}{\partial x_k}=-\frac{dp_k}{dt},\quad k=\overline{1,n},$$

що залежить від $2n$ змінних.

Приклад 6.8. Відшукати екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x^2+t^2}\sqrt{1+(x')^2}\,dt.$$

Гамільтоніан функціонала $H=-\sqrt{x^2+t^2-p^2}$. Рівняння Гамільтона – Якобі має вигляд

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\sqrt{x^2+t^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2},$$

або

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2=x^2+t^2.$$

Якщо розв'язок шукати у вигляді $S=\frac{1}{2}(At^2+2Bxt+Cx^2)$, то для невідомих A, B, C виконуватимуться такі співвідношення: $A^2+B^2=1$, $B(A+C)=0$, $B^2+C^2=1$. Нехай $A=-C=\sin(\beta)$, $B=\cos(\beta)$. Розв'язок рівняння буде таким:

$$S=\frac{1}{2}(t^2\sin(\beta)-2xt\cos(\beta)-x^2\sin(\beta)).$$

Відповідно до теореми Якобі інтеграл рівняння Ейлера визначається з рівності $\frac{\partial S}{\partial \beta}=\text{const}=\frac{1}{2}\alpha$, чи $t^2\cos(\beta)+2tx\sin(\beta)-x^2\cos(\beta)=\alpha$. Це сім'я гіпербол. Отже, екстремалі функціонала – гіперболи. Δ

6.5. Варіаційні принципи механіки

Основним варіаційним принципом механіки є принцип стаціонарної дії Остроградського – Гамільтона, відповідно до якого серед усіх можливих рухів системи матеріальних точок у дійсності відбувається рух, що дає стаціонарне значення (тобто значення, що відповідає аргументу, за якого варіація функціонала дорівнює нулю) інтеграла

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt,$$

де T – кінетична, а U – потенційна енергія системи.

Застосуємо цей принцип до деяких задач механіки.

Приклад 6.9. Нехай задана система n матеріальних точок із масами m_k, $k=\overline{1,n}$ і координатами (x_k,y_k,z_k). На систему діють сили $\overline{F}_k$ з потенціалом $-U$, що залежить лише від координат:

$$F_{kx} = -\frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial U}{\partial z_k},$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – координати вектора $\overline{F}_k$, що діє на точку (x_k, y_k, z_k). Скласти диференціальне рівняння руху системи матеріальних точок.

Розв'язок. Кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k((x_k')^2 + (y_k')^2 + (z_k')^2),$$

а потенційна енергія системи дорівнює U. Система рівнянь Ейлера функціонала $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$ має такий вигляд:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_k'} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_k'} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_k'} = 0,$$

або

$$m_k x_k'' - F_{kx} = 0, \quad m_k y_k'' - F_{ky} = 0, \quad m_k z_k'' - F_{kz} = 0.$$

Це звичайні рівняння вільного руху системи n матеріальних точок. Якщо рух підпорядкований ще деякій системі незалежних зв'язків $\varphi_j(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, $m < 3n$, то із цих рівнянь можна виразити m змінних через $3n - m$ незалежних змінних (не беручи до уваги t). Позначимо ці змінні через $q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}$. Тоді кінетичну і потенціальну енергії T, U також можна розглядати як функції від змінних $q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}, t$. Система рівнянь Ейлера матиме вигляд

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k'} = 0, \quad k = 1, \ldots, 3n - m.$$

Розглянемо канонічні змінні для функціонала

$$J = \int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k((x_k')^2 + (y_k')^2 + (z_k')^2).$$

Запишемо $p_{kx} = L_{x_k'} = m_k x_k'$, $p_{ky} = L_{y_k'} = m_k y_k'$, $p_{kz} = L_{z_k'} = m_k z_k'$. Тобто p_{kx}, p_{ky}, p_{kz} – це компоненти імпульсу k-й матеріальної точки. Гамільтоніан

$$H = \sum_{k=1}^{n}(x_k' p_{kx} + y_k' p_{ky} + z_k' p_{kz}) - L = 2T - (T-U) = T + U$$

це повна енергія системи матеріальних точок. Δ

Користуючись виглядом функції під знаком інтеграла, можна встановити закон збереження енергії. Дійсно, нехай система консервативна, тобто функція Лагранжа L не залежить від t. (Це означає, що енергія U не змінюється із часом.) У такому випадку, як було показано раніше, $H = \text{const}$ уздовж кожної екстремалі, тобто повна енергія консервативної системи не міняється під час руху.

Приклад 6.10. Вивести диференціальне рівняння вільних коливань струни.

Помістимо початок координат в один із кінців струни. У стані спокою під дією натягу струна лежить на прямій, по якій направимо вісь абсцис. Відхилення від положення рівноваги $u(x,t)$ буде функцією, що залежить від абсциси x і часу t. Потенціальна енергія u елемента абсолютно гнучкої струни пропорційна розтягу струни. Відрізок dx у деформованому стані має довжину $ds = \sqrt{1+(u_x^{'})^2}\,dx$. Тому приріст довжини елемента дорівнює $(\sqrt{1+(u_x^{'})^2}-1)dx$. За формулою Тейлора $\sqrt{1+(u_x^{'})^2} \approx 1+\frac{1}{2}(u_x^{'})^2$. Вважаючи $u_x^{'}$ малим і відкидаючи більш високі степені, визначаємо потенціальну енергію елемента: $\frac{1}{2}k(u_x^{'})^2 dx$, де k – коефіцієнт пропорційності. Потенціальна енергія всієї струни дорівнює $\frac{1}{2}\int_0^l k(u_x^{'})^2 dx$. Кінетична енергія струни дорівнює $\frac{1}{2}\int_0^l \rho(u_t^{'})^2 dx$, де ρ – густина струни. Інтеграл $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$ має вигляд

$$\upsilon = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\rho(u_t^{'})^2 - k(u_x^{'})^2]dxdt.$$

Рівнянням руху струни буде рівнянням Остроградського функціонала υ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t^{'}) - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x^{'}) = 0.$$

Якщо струна однорідна, то ρ, k – сталі, і рівняння коливань струни спрощується: $\rho u_{tt}^{''} - k u_{xx}^{''} = 0$. Нехай на струну діє зовнішня сила $f(t,x)$, яка перпендикулярна до її положення рівноваги і розрахована на одиницю маси. Силова функція цієї зовнішньої сили, що діє на елемент струни, дорівнює $\rho f(t,x)dx$. Тому інтеграл Остроградського – Гамільтона матиме вигляд

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[\rho(u_t^{'})^2 - k(u_x^{'})^2 + 2\rho f(t,x)u]dxdt,$$

а рівняння вимушених коливань струни буде таким:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t^{'}) - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x^{'}) = \rho f(t,x),$$

або

$$u_{tt}^{''} - \frac{k}{\rho}u_{xx}^{''} = f(t,x).$$

Положення стійкої рівноваги струни описується рівнянням Остроградського функціонала

$$\int_0^l(\frac{k}{2}u_x^2 - f(x)u)dx.$$

Якщо зовнішня сила $f = f(x)$ не залежить від часу, то рівняння має вигляд $ku_{xx} + f(x) = 0$. Δ

Приклад 6.11. Вивести диференціальне рівняння коливань прямого стрижня.

Спрямуємо вісь абсцис по осі стрижня, що перебуває в положенні рівноваги. Відхилення від цього положення $u(x,t)$ буде функцією координати x і часу t. Кінетична енергія стрижня довжиною l дорівнює

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l\rho(u_t^{'})^2\,dx.$$

Будемо вважати, що стрижень не розтягується. Потенціальна енергія пружного стрижня за сталої кривизни пропорційна квадрату кривизни. Тому потенціальна енергія стрижня

$$U = \frac{1}{2}k\int_0^l\frac{(u_{xx}^{''})^2}{\sqrt{(1+u_x^2)^3}}\,dx.$$

Якщо відхилення стрижня від положення рівноваги малі й доданком u_x^2 можна знехтувати, то

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l k(u_{xx}^{''})^2\,dx.$$

Інтеграл Остроградського – Гамільтона має вигляд

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[\rho(u_t^{'})^2 - k(u_{xx}^{''})^2]dxdt.$$

Тому при вільних коливаннях стрижня вірне таке рівняння руху:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t^{'}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k u_{xx}^{''}) = 0.$$

Якщо стрижень однорідний, то ρ, k – сталі, і рівняння коливань можна подати у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Коли на стрижень діє зовнішня сила $f(t,x)$, потрібно враховувати потенціал цієї сили. У цьому випадку має місце таке рівняння:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(t,x).$$

Рівняння рівноваги під дією зовнішньої сили $f(x)$, що не залежить від часу, набуває вигляду

$$k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x).$$

Розв’язки диференціальних рівнянь задовольняють граничні умови:

$$u(0) = u_x(0) = u(l) = u_x(l)$$

(стрижень із закріпленими кінцями) і

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(l,t) = 0$$

(стрижень з вільними (незакріпленими) кінцями). Δ

Приклад 6.12. Виходячи із принципу найменшої дії, визначити траєкторію руху матеріальної точки одиничної маси під дією сили тяжіння.

Розв’язок:

Направимо вісь OY вгору. Тоді потенціал сили тяжіння $u = -gy$. Відповідно до принципу найменшої дії на траєкторії γ руху інтеграл дії

$$I = \int_{t_0}^{t_1} T\,dt$$

має мінімальне значення. Принцип найменшої дії можна зобразити у формі Якобі

$$\int_\gamma \sqrt{2(u+h)}\,ds \to \min,$$

де ds – диференціал дуги траєкторії γ. Якщо матеріальна точка рухається під дією сили тяжіння, то функціонал

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(h-gy)}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Рівняння Гамільтона – Якобі такого функціонала має вигляд

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \sqrt{2h - 2gy - (\frac{\partial S}{\partial y})^2} = 0,$$

або

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 2(h - gy).$$

Його повний інтеграл –

$$S = Ax + \int\sqrt{2h - 2gy - A^2}\,dy = Ax - \frac{1}{3g}\sqrt{(2h - 2gy - A^2)^3} + B,$$

де A, B – константи.

Отже, екстремалі задачі задовольняють рівняння

$$x + \frac{A}{g}\sqrt{2h - 2gy - A^2} = C,$$

звідки

$$y = \frac{h}{g} - \frac{A^2}{2g} - \frac{g}{2A^2}(x - C)^2,$$

де A, C – константи.

Якщо екстремалі проходять через початок координат, то $y(0) = 0$, і рівняння має вигляд

$$y = -\frac{g}{2A^2}x^2 + \frac{\sqrt{2h - A^2}}{A}x.$$

Отже, траєкторія руху матеріальної точки описується однопараметричним сімейством парабол. Δ

Задачі

Скласти канонічні системи рівнянь Ейлера:

6.1. $\int tx(x')^3\,dt.$

6.2. $\int tx\sqrt{x'}\,dt.$

6.3. $\int tx(x')^2\,dt.$

6.4. $\int((x_1')^2 + x_2^2 + (x_2')^2)dt.$

6.5. $\int(t^2 + x_1(x_1')^2 + x_2(x_2')^2)dt.$

6.6. $\int(2tx_1 - (x_1')^2 + (x_2')^3/3)dt.$

Відшукати загальний розв’язок рівняння Ейлера, розв'язуючи рівняння Гамільтона – Якобі:

6.7. $\frac{1}{2}\int (x')^2 dt.$

6.8. $\frac{1}{2}\int ((x')^2 + x^2)dt.$

6.9. $\frac{1}{2}\int ((x')^2 - x^2)dt.$

6.10. $\int \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x} dt.$

6.11. $\int x^p \sqrt{1+(x')^2}\, dt.$

6.12. Побудувати траєкторію руху точки в площині під дією сили відштовхування від осі OX, пропорційної відстані точки від цієї осі й спрямованої паралельно осі OY за умови, що інтеграл живої сили має вигляд

$$\frac{v^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 0,$$

а інтеграл дії дорівнює

$$\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}\, dx, \quad y > 0.$$

6.13. Матеріальна точка описує коло $\rho = 2R\cos(\varphi)$ (ρ, φ – полярні координати) радіуса R під дією центральної сили k/ρ^5. Показати, що на будь-якій дузі кола ($-\pi/2 < \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_1 < \pi/2$) інтеграл дії досягає сильного мінімуму.

6.14. Визначити траєкторію руху матеріальної точки під дією центральної сили притягання, що пропорційна відстані від центра, виходячи із принципу найменшої дії та застосовуючи метод Гамільтона – Якобі.

7. ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА МНОЖИНІ ФУНКЦІЙ З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

7.1. Задачі Больца і Лагранжа на множині функцій з вільними границями

Нехай Δ – скінченний замкнутий відрізок дійсної прямої. У просторі $C^1(\Delta, R^n) \times R \times R$, що складається з елементів $(x(\cdot), t_0, t_1)$, розглянемо задачу Больца

$$B(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to extr, \quad (7.1)$$

де точки t_0, t_1 не фіксовані. Відомо лише, що t_0, $t_1 \in \Delta$.

Допустимий елемент $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ дає *слабкий локальний мінімум* (*слабкий локальний максимум*) функціонала задачі (7.1), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якого іншого допустимого елемента $(x(\cdot), t_0, t_1) \in C^1(\Delta, R^n) \times R \times R$, який задовольняє умови $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon$, $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1(\Delta, R^n)} < \varepsilon$, виконується нерівність

$$B(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \le B(x(\cdot), t_0, t_1) \quad (B(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \ge B(x(\cdot), t_0, t_1)).$$

Щоб знайти екстремалі функціонала (7.1), використовуємо необхідну умову екстремуму першого порядку. Нехай функції $L = L(t, x, x')$, $l = l(t_0, x_0, t_1, x_1)$ та їхні частинні похідні L_x, $L_{x'}$, l_{t_j}, l_{x_j}, $j = 0,1$, неперервні. Обчислимо першу варіацію функціонала $B(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$. Для цього визначимо функцію $\varphi(\lambda) = B(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot), \hat{t}_0 + \lambda\tau_0, \hat{t}_1 + \lambda\tau_1)$, де $h(\cdot)$, τ_0, τ_1 – допустимі варіації функції $\hat{x}(\cdot)$ і точок $\hat{t}_0$, $\hat{t}_1$:

$$\varphi(\lambda) = \int_{\hat{t}_0 + \lambda\tau_0}^{\hat{t}_1 + \lambda\tau_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \hat{x}'(t) + \lambda h'(t))dt$$

$$+ l(\hat{t}_0 + \lambda\tau_0, \hat{x}(\hat{t}_0 + \lambda\tau_0) + \lambda h(\hat{t}_0 + \lambda\tau_0), \hat{t}_1 + \lambda\tau_1, \hat{x}(\hat{t}_1 + \lambda\tau_1) + \lambda h(\hat{t}_1 + \lambda\tau_1)).$$

Оскільки $\delta B((\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1), (h(\cdot), \tau_0, \tau_1)) = \varphi'(0)$, то

$$
\begin{aligned}
\delta B((\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1),(h(\cdot),\tau_0,\tau_1)) &= \varphi'(0) \\
&= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}(\hat{L}_x(t)h(t)+\hat{L}_{x'}(t)h'(t))dt+\hat{L}(\hat{t}_1)\tau_1-\hat{L}(\hat{t}_0)\tau_0 \qquad (7.2)\\
&+\hat{l}_{t_0}\tau_0+\hat{l}_{t_1}\tau_1+\hat{l}_{x_0}(h(\hat{t}_0)+\hat{x}'(\hat{t}_0)\tau_0)+\hat{l}_{x_1}(h(\hat{t}_1)+\hat{x}'(\hat{t}_1)\tau_1),
\end{aligned}
$$

де

$$
\hat{L}(t) = L(t,\hat{x}'(t),\hat{x}'(t)), \qquad \hat{L}_x(t)=L_x(t,\hat{x}'(t),\hat{x}'(t)),
$$

$$
\hat{L}_{x'}(t)=L_{x'}(t,\hat{x}'(t),\hat{x}'(t)),
$$

$$
\hat{l}_{t_j} = l_{t_j}(\hat{t}_0,\hat{x}(\hat{t}_0),\hat{t}_1,\hat{x}(\hat{t}_1)), \quad \hat{l}_{x_j}=l_{x_j}(\hat{t}_0,\hat{x}(\hat{t}_0),\hat{t}_1,\hat{x}(\hat{t}_1)), \quad j=0,1.
$$

Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta,R^n)\times R\times R$ дає локальний екстремум функціонала (7.1), то

$$
\delta B((\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1),(h(\cdot),\tau_0,\tau_1))=0
$$

для будь-яких допустимих варіацій із простору $C^1(\Delta,R^n)\times R\times R.$ Розглянемо спочатку варіацію $(h(\cdot),0,0)$, де $h(\cdot)\in C^1(\Delta,R^n)$, $h(\hat{t}_j)=0$, $j=0,1.$ Із (7.2) випливає, що

$$
\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}(\hat{L}_x(t)h(t)+\hat{L}_{x'}(t)h'(t))dt=0
$$

для будь-якої вектор-функції $h(\cdot)\in C^1([\hat{t}_0,\hat{t}_1],R^n)$ такої, що $h(\hat{t}_0)=h(\hat{t}_1)=0.$ Застосовуючи лему Дюбуа – Реймона, одержимо рівняння Ейлера $\hat{L}_x(t)=\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t).$ Враховуючи це співвідношення, проінтегруємо частинами інтегральний доданок у (7.2). Одержимо

$$
(\alpha_0-\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0))h(\hat{t}_0)+(\alpha_1+\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1))h(\hat{t}_1)+\beta_0\tau_0+\beta_1\tau_1=0,
$$

де $\alpha_j=\hat{l}_{x_j}$, $\beta_j=\hat{l}_{t_j}+\hat{l}_{x_j}\hat{x}'(\hat{t}_j)+(-1)^{j+1}\hat{L}(\hat{t}_j)$, $j=0,1.$ Останнє співвідношення виконується для довільних векторів $h(\hat{t}_0)$, $h(\hat{t}_1)$ і чисел τ_0, τ_1. Тому кожен доданок дорівнює нулю. Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 7.1 (про необхідні умови екстремуму в задачі Больца на множині функцій з вільними границями). *Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta,R^n)\times R\times R$ дає слабкий локальний екстремум функціонала задачі Больца (7.1), то $\hat{x}(t)$, $\hat{t}_0\le t\le\hat{t}_1$ задовольняє:*

1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t), \quad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1];$$

2) умови трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}(t_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad \hat{L}_{x'}(t_1) = -\hat{l}_{x_1};$$

3) умови стаціонарності по t

$$(-1)^{j+1}\hat{L}(\hat{t}_j) + \hat{l}_{t_j} + \hat{l}_{x_j}\hat{x}'(\hat{t}_j) = 0, \quad j = 0,1.$$

Зауваження. Умови стаціонарності по t записуються тільки тоді, коли задача досліджується на множині функцій з вільними границями.

Теорема 7.2 (про необхідні умови екстремуму в задачі Лагранжа на множині функцій з вільними границями). *Якщо елемент* $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *простору* $C^1(\Delta, R^n) \times R \times R$ *дає локальний екстремум функціонала задачі Лагранжа*

$$J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr, \tag{7.3}$$

то $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *задовольняє*:

1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t);$$

2) умови трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = 0, \quad \hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = 0;$$

3) умови стаціонарності по t_0, t_1

$$\hat{L}(\hat{t}_0) = 0, \quad \hat{L}(\hat{t}_1) = 0.$$

Зауваження. Граничні умови в задачі Лагранжа (7.3) відсутні. Тому вона й називається задачею Лагранжа на множині функцій з вільними границями. Умови стаціонарності по t записуються тільки для таких задач.

Приклад 7.1. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot), T) = \int_0^T ((x')^2 - x + 1)dt \to extr, \quad x(0) = 0.$$

Це задача Лагранжа на множині функцій з фіксованим лівим кінцем і вільним правим кінцем. Тому умова трансверсальності та умова стаціонарності по T записуються тільки на правому кінці. Скористаємося необхідними умовами екстремуму.

1. Складемо рівняння Ейлера для інтегранта $L=(x')^2-x+1$. Воно має вигляд

$$\hat{L}_x=\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'} \Leftrightarrow 2x''=-1.$$

Загальний розв'язок рівняння $x=-\frac{t^2}{4}+C_1t+C_2$. Із граничної умови $x(0)=0$ випливає, що $C_2=0$.

2. Для визначення невідомих C_1, $\hat{T}$ використовуємо умову трансверсальності по x:

$$\hat{L}_{x'}\,|_{t=\hat{T}}=0, \quad 2x'(\hat{T})=0 \Leftrightarrow -\hat{T}+2C_1=0, \quad \hat{T}=2C_1$$

та умову стаціонарності по T:

$$L(\hat{T})=0 \Leftrightarrow (x')^2(\hat{T})-x(\hat{T})+1=0,$$

$$(2C_1-\hat{T})^2-(4C_1\hat{T}-\hat{T}^2)+4=0,$$

$$\hat{T}^2=4, \quad \hat{T}=2, \quad C_1=1.$$

Отже, існує одна екстремаль $\hat{x}=t-t^2/4$ на відрізку $[0,2]$.

3. Покажемо, що вона не дає локального екстремуму функціонала. Дійсно, для $\hat{x}=t-t^2/4$

$$J(\hat{x}(\cdot),T) \quad =\int_0^T((\hat{x}')^2-\hat{x}+1)dt$$

$$=\int_0^T((1-t/2)^2-(t-t^2/4)+1)dt=\frac{(T-2)^3}{6}+\frac{4}{3}.$$

При T, близьких до $\hat{T}=2$, значення функціонала $J(\hat{x}(\cdot),T)$ можуть бути як менші, так і більші $J(\hat{x},\hat{T})$. Крім того, для послідовності пар $x_n(t)=t$, $T_n=n$

$$J(x_n(\cdot),T_n)\to-\infty.$$

Отже, $S_{\min}=-\infty$. Аналогічно показуємо, що $S_{\max}=+\infty$.

Відповідь: Екстремаль $\hat{x}=t-t^2/4$ задовольняє необхідні умови екстремуму функціонала, але $\hat{x}\notin locextr$. Δ

7.2. Задача Лагранжа на множині функцій з рухомими границями

Розглянемо у просторі $C^1(\Delta, R)\times R\times R$ задачу на екстремум функціонала

$$J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr, \tag{7.4}$$

із двома рухомими границями

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0), \quad x(t_1) = \varphi_1(t_1). \tag{7.5}$$

Точки $t_0, t_1 \in \Delta$ – не фіксовані, Δ – заданий відрізок числової прямої.

Теорема 7.3 (про необхідні умови екстремуму в задачі Лагранжа на множині функцій з рухомими границями). *Нехай функція $L(t, x, x')$ та її частинні похідні $L_x(t, x, x')$, $L_{x'}(t, x, x')$ – неперервні, а функції $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ – неперервно диференційовні. Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot), t_0, t_1)$ простору $C^1(\Delta, R)\times R\times R$ такий, що $\hat{x}(t_0) = \varphi_0(\hat{t}_0)$, $\hat{x}(t_1) = \varphi_1(\hat{t}_1)$, дає локальний екстремум функціонала задачі (7.4), (7.5), то $(\hat{x}(\cdot), t_0, t_1)$ задовольняє:*

1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t), \quad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1];$$

2) умови трансверсальності

$$\hat{L}(\hat{t}_j) = \hat{L}_{x'}(\hat{t}_j)(\hat{x}'(\hat{t}_j) - \varphi_j'(\hat{t}_j)), \quad j = 0,1.$$

Доведення. Рівняння Ейлера виконується, тому що $\hat{x}(\cdot)$ дає локальний екстремум функціонала (7.4) і при фіксованих граничних умовах $x(\hat{t}_j) = \hat{x}(\hat{t}_j)$, $j = 0,1$. Виведемо умову трансверсальності в точці $\hat{t}_1$. Умова трансверсальності в точці $\hat{t}_0$ виводиться аналогічно. Визначимо однопараметричну множину функцій $x(t, C) = \hat{x}(t) + C(t - t_0)$ і функцію двох змінних $\psi(t_1, C) = x(t_1, C) - \varphi_1(t_1)$. За умовами теореми

$$\psi(\hat{t}_1, 0) = \hat{x}(\hat{t}_1) - \varphi_1(\hat{t}_1) = 0, \quad \psi_c'(\hat{t}_1, 0) = \hat{t}_1 - \hat{t}_0 \neq 0.$$

Відповідно до теореми про неявну функцію існує така неперервно диференційовна функція $C(t_1)$, що $C(\hat{t}_1) = 0$ і $x(t_1, C(t_1)) = \varphi(t_1)$, $C'(\hat{t}_1) = (\varphi_1'(\hat{t}_1) - \hat{x}'(\hat{t}_1))/(\hat{t}_1 - \hat{t}_0)$. Нехай τ_1 – варіація точки $\hat{t}_1$, $t_1 = \hat{t}_1 + \tau_1$. Визначимо функцію

$$A(t_1) \quad = J(x(\cdot, C(t_1)), \hat{t}_0, t_1) = \int_{\hat{t}_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + C(t_1)(t - \hat{t}_0), \hat{x}'(t) + C(t_1))dt.$$

Оскільки елемент $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ дає локальний екстремум функціонала $J(x(\cdot), t_0, t_1)$, то $\hat{t}_1$ дає локальний екстремум функції $A(t_1)$. Тому $\delta A(t_1, \tau_1) = A'(t_1)\tau_1 = 0$ для всіх можливих варіацій τ_1. Похідна

$$A'(\hat{t}_1) = \hat{L}(\hat{t}_1) + C'(\hat{t}_1)\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{L}_x(t)(t - \hat{t}_0) + \hat{L}_{x'}(t))dt.$$

Інтегруючи частинами та враховуючи рівняння Ейлера і вираз для $C'(\hat{t}_1)$, одержимо

$$A'(\hat{t}_1) =$$

$$= \quad \hat{L}(\hat{t}_1) + C'(\hat{t}_1)\left(\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} (\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t))(t - \hat{t}_0)dt + (t - \hat{t}_0)\hat{L}_{x'}(t)\,\Big|_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \right)$$

$$= \quad \hat{L}(\hat{t}_1) + (\varphi_1'(\hat{t}_1) - \hat{x}'(\hat{t}_1))\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1).$$

Тому варіація функціонала $J(x(\cdot), t_0, t_1)$ на правому кінці $\hat{t}_1$ відрізка $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ дорівнює

$$\delta J(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)[x(\cdot, C(\hat{t}_1 + \tau_1)) - \hat{x}(\cdot), 0, \tau_1]$$
$$= [\hat{L}(\hat{t}_1) - (\varphi_1'(\hat{t}_1) - \hat{x}'(\hat{t}_1))\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1)]\tau_1.$$

Варіація функціонала на лівому кінці $\hat{t}_0$ відрізка $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ обчислюється аналогічно і дорівнює

$$\delta J(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)[x(\cdot, C_0(\hat{t}_0 + \tau_0)) - \hat{x}(\cdot), \tau_0, 0]$$
$$= [-\hat{L}(\hat{t}_0) + (\varphi_0'(\hat{t}_0) - \hat{x}'(\hat{t}_0))\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0)]\tau_0,$$

де τ_0 – варіація точки $\hat{t}_0$, а функція $C_0(t_0)$ визначається аналогічно функції $C(t_1)$. Застосовуючи необхідну умову екстремуму першого порядку, виводимо умови трансверсальності на лівому і правому кінцях відрізка. Теорему доведено.

Зауваження. 1. Нехай точка t_j фіксована, а гранична умова в цій точці відсутня. Це означає, що гранична точка рухається по вертикальній прямій. Умова трансверсальності в цьому випадку має вигляд $\hat{L}_{x'}(t_j) = 0$.

2. Нехай точка t_j не фіксована, а гранична умова має вигляд $x(t_j)=a$. Це означає, що гранична точка рухається по горизонтальній прямій. Цього разу умова трансверсальності така:

$$\hat{L}(\hat{t}_j)-\hat{x}'(\hat{t}_j)\hat{L}_{x'}(\hat{t}_j)=0.$$

Приклад 7.2. Записати умову трансверсальності для функціонала

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x)e^{arctg(x')}\sqrt{1+(x')^2}\,dt, \quad f(t,x)\neq 0.$$

Розв'язок 1. Нехай лівий кінець екстремалі фіксований, $x(t_0)=x_0$, а правий кінець рухається по кривій $x=\psi(t)$. Оскільки

$$L_{x'}=f(t,x)e^{arctg(x')}(1+x')\frac{1}{\sqrt{1+(x')^2}},$$

то умова трансверсальності

$$[L-(\psi'-x')L_{x'}]|_{t=t_1}=0$$

має вигляд

$$[f(t,x)e^{arctg(x')}\sqrt{1+(x')^2}+$$
$$+\quad(\psi'-x')f(t,x)e^{arctg(x')}\frac{1+x'}{\sqrt{1+(x')^2}}]|_{t=t_1}=0.$$

Оскільки $f(t,x)\neq 0$, то одержимо $\dfrac{\psi'-x'}{1-\psi'x'}=-1.$

Відповідь. Умова трансверсальності в точці (t_1,x_1) така:

$$\frac{\psi'(t_1)-x'(t_1)}{1-\psi'(t_1)x'(t_1)}=-1.$$

Це означає, що екстремалі $\hat{x}=x(t)$ перетинають криву $x=\psi(t)$ під кутом $\pi/4$. Δ

Приклад 7.3. Знайти відстань між параболою $x=t^2$ і прямою $x=t-5$.

Розв'язок. Щоб розв'язати задачу, потрібно дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+(x')^2}\,dt$$

на множині функцій з рухомими границями $\varphi_0(t)=t^2$, $\varphi_1(t)=t-5$. Це задача Лагранжа на множині функцій з рухомими границями. Використаємо необхідні умови екстремуму.

1. Рівняння Ейлера

$$\sqrt{1+(x')^2}-\frac{(x')^2}{\sqrt{1+(x')^2}}=C$$

має розв'язок $x(t)=C_1t+C_2$.

2. Умови трансверсальності

$$[\sqrt{1+(x')^2}+(2t-x')\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}}]\,|_{t=t_0}=0,$$

$$[\sqrt{1+(x')^2}+(1-x')\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}}]\,|_{t=t_1}=0.$$

3. Граничні умови $x(t_0)=t_0^2$, $x(t_1)=t_1-5$ дають рівняння $C_1t_0+C_2=t_0^2$, $C_1t_1+C_2=t_1-5$.

Таким чином, ми відшукали систему чотирьох рівнянь для визначення невідомих C_1, C_2, $\hat{t}_0$, $\hat{t}_1$:

$$\sqrt{1+C_1^2}+(2t_0-C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0,$$

$$\sqrt{1+C_1^2}+(1-C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0,$$

$$C_1t_0+C_2=t_0^2,\quad C_1t_1+C_2=t_1-5.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо $C_1=-1$, $C_2=3/4$, $\hat{t}_0=1/2$, $\hat{t}_1=23/8$.

Відповідь. Рівняння екстремалі $\hat{x}=-t+3/4$. Відстань між параболою і прямою дорівнює $(19\sqrt{2})/8$. Δ

Приклад 7.4. Дослідити на екстремум функціонал задачі про брахістохрону:

$$J(y(\cdot))=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx,\quad y(0)=0,$$

якщо відсутня гранична умова $y(x_1)=y_1$.

У цій задачі лівий кінець фіксований, а правий рухається по вертикальній прямій. Екстремалями функціонала є *циклоїди*, рівняння яких, з огляду на умову $y(0)=0$, мають вигляд

$$x=C_1(t-\sin(t)),\quad y=C_1(1-\cos(t)).$$

Для визначення невідомої константи C_1 використовуємо умову трансверсальності $\hat{L}_{y'}(\hat{x}_1)=0.$ Вона має вигляд

$$\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2}}=0,$$

звідки $y'=0.$ Отже, шукана циклоїда повинна перетинати пряму під прямим кутом. Тому точка $x=x_1$, $y=y_1$ має бути вершиною циклоїди. Оскільки вершині циклоїди відповідає значення $t=\pi$, то $x_1=C_1\pi$, $C_1=x_1/\pi.$

Відповідь. Екстремаль функціонала задачі про брахістохрону на множині функцій таких, що лівий кінець фіксований, а правий рухається по вертикальній прямій, визначається рівняннями:

$$x=\frac{x_1}{\pi}(t-\sin(t)),\quad y=\frac{x_1}{\pi}(1-\cos(t)).$$

Це рівняння циклоїди. Δ

7.3. Задачі Больца на множині функцій з рухомими границями

У просторі $C^1(\Delta,R^n)\times R\times R$ дослідити на екстремум функціонал задачі Больца:

$$B(x(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))dt+\Psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to extr \quad (7.8)$$

за умов

$$\Psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=0,\quad j=1,\dots,m,\quad (7.9)$$

де точки t_0, $t_1\in\Delta$ не фіксовані, Δ – заданий відрізок числової прямої.

Використовуючи метод множників Лагранжа, можна довести таке твердження.

Теорема 7.4 (про необхідні умови екстремуму в задачі Больца на множині функцій з рухомими границями). *Нехай функція $L(t,x,x')$ та її частки похідні $L_x(t,x,x')$, $L_{x'}(t,x,x')$ неперервні, а функції Ψ_j, $j=0,1,\dots,m$ – неперервно диференційовні. Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta,R^n)\times R\times R$ дає локальний екстремум функці-*

онала задачі Больца (*7.8*), (*7.9*), *то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R$ *такі, що для функції Лагранжа*

$$L(x(\cdot), t_0, t_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 L(t, x(t), x'(t))dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

де

$$l = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \Psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

виконуються умови:

1) стаціонарності по x *– рівняння Ейлера*

$$\lambda_0 \hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt} \lambda_0 \hat{L}_{x'}(t);$$

2) трансверсальності по x

$$\lambda_0 \hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = l_{x(t_0)}, \quad \lambda_0 \hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = -l_{x(t_1)};$$

3) стаціонарності по t_0, t_1 (*тільки на множині функцій з рухомими кінцями*)

$$L_{t_0} = 0 \quad \Leftrightarrow -\lambda_0 \hat{L}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)} \hat{x}'(\hat{t}_0) = 0,$$

$$L_{t_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{L}(\hat{t}_1) = \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)} \hat{x}'(\hat{t}_1) = 0.$$

Ця теорема являє собою окремий випадок теореми Ейлера – Лагранжа.

Наслідок 7.1. Нехай елемент $(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta, R) \times C^1(\Delta, R) \times R \times R$ дає локальний екстремум функціонала задачі Лагранжа в тривимірному просторі

$$J(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t))dt,$$

коли точка $A(t_0, x_0, y_0)$ рухається по кривій $x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$, а точка $B(t_1, x_1, y_1)$ рухається по кривій $x = \varphi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$. Тоді функції $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{y}(\cdot)$ задовольняють рівняння Ейлера:

$$L_x(t) - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0, \quad L_y(t) - \frac{d}{dt} L_{y'} = 0$$

і умови трансверсальності:

$$[\hat{L}(t) + (\varphi_k'(t) - \hat{x}'(t))\hat{L}_{x'}(t) + (\psi_k'(t) - \hat{y}'(t))\hat{L}_{y'}(t)]\,|_{t=\hat{t}_k} = 0, \quad k = 0,1.$$

Доведення. Щоб переконатися у справедливості цього твердження, запишемо необхідні умови теореми 7.4 при $\lambda_0 = 1$. У цьому випадку:

$$
\begin{aligned}
l &= \lambda_1(x(t_0)-\varphi_0(t_0))+\lambda_2(y(t_0)-\psi_0(t_0)) \\
&\quad+\mu_1(x(t_1)-\varphi_1(t_1))+\mu_2(y(t_1)-\psi_1(t_1)), \\
\hat{l}_{t_0} &= -\lambda_1\varphi_0'(\hat{t}_0)-\lambda_2\psi_0'(\hat{t}_0), \\
\hat{l}_{t_1} &= -\mu_1\varphi_1'(\hat{t}_1)-\mu_2\psi_1'(\hat{t}_1), \\
\hat{l}_{x(t_0)} &= \lambda_1, \quad \hat{l}_{y(t_0)}=\lambda_2, \quad \hat{l}_{x(t_1)}=\mu_1, \quad \hat{l}_{y(t_1)}=\mu_2.
\end{aligned}
$$

Умови трансверсальності на лівому кінці

$$L_{x'}(\hat{t}_0)=\hat{l}_{x(t_0)}, \quad -\hat{L}(\hat{t}_0)+\hat{l}_{t_0}+\hat{l}_{x(t_0)}\hat{x}'(\hat{t}_0)=0$$

матимуть вигляд

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0)=\lambda_1, \quad \hat{L}_{y'}(\hat{t})=\lambda_2,$$

$$\hat{L}(\hat{t}_0)+\lambda_1\varphi_0'(\hat{t}_0)+\lambda_2\psi_0'(\hat{t}_0)-\lambda_1\hat{x}'(\hat{t}_0)-\lambda_2\hat{y}'(\hat{t}_0)=0.$$

Крім невідомого λ_1, λ_2, одержуємо

$$\hat{L}(\hat{t}_0)+(\varphi_0'(\hat{t}_0)-\hat{x}'(\hat{t}_0))\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0)+(\psi_0'(\hat{t}_0)-\hat{y}'(\hat{t}_0))\hat{L}_{y'}(\hat{t})=0.$$

Аналогічним шляхом виводимо умову трансверсальності на правому кінці.

Приклад 7.5. Визначити найкоротшу відстань від точки $A(t_0,x_0,y_0)$ до прямої $x=at+b$, $y=pt+q$.

Розв'язок:

Задача зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$J(x(\cdot),y(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}\,dt$$

за умови, що правий кінець екстремалі лежить на прямій $x=at+b$, $y=pt+q$. Отже, $\varphi_1(t)=at+b$, $\psi_1(t)=pt+q$. Розв'язки рівнянь Ейлера мають вигляд $x=C_1t+C_2$, $y=C_3t+C_4$. З умов трансверсальності

$$\left[\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}+\frac{(a-x')x'}{\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}}+\frac{(p-y')y'}{\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}}\right]\Big|_{t=\hat{t}_1}=0$$

знаходимо рівняння $1+aC_1+pC_3=0$. Це умова перпендикулярності шуканої прямої до заданої. Щоб визначити невідомі C_1, C_2, C_3, C_4, $\hat{t}_1$, використовуємо той факт, що пряма проходить через точку $A(t_0,x_0,y_0)$ і перетинає задану пряму. Одержимо 5 рівнянь:

$$x_0 = C_1 t_0 + C_2, \quad y_0 = C_3 t_0 + C_4,$$
$$1 + aC_1 + pC_3 = 0,$$
$$C_1 \hat{t}_1 + C_2 = a\hat{t}_1 + b, \quad C_3 \hat{t}_1 + C_4 = p\hat{t}_1 + q,$$

з яких обчислюємо невідомі константи.

Відповідь: Найкоротша відстань дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з точки $A(t_0, x_0, y_0)$ на пряму:

$$h = J(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot)) =$$
$$= \left(t_0^2 + (x_0 - b)^2 + (y_0 - q)^2 - \frac{[t_0 + a(x_0 - b) + p(y_0 - q)]^2}{1 + a^2 + p^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наслідок 7.2. Нехай елемент $(\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{x}_0, \hat{x}_1)$ простору $C^1(\Delta, R) \times C^1(\Delta, R) \times R \times R$ дає локальний екстремум функціонала задачі Лагранжа:

$$J(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x))dx$$

за умови, що точка $A(x_0, y_0, z_0)$ рухається по поверхні $z = \varphi_0(x, y)$, а точка $B(x_1, y_1, z_1)$ рухається по поверхні $z = \varphi_1(x, y)$. Тоді функції $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot)$ задовольняють рівняння Ейлера й умови трансверсальності:

$$[\hat{L}_{y'} + \hat{L}_{z'} \hat{\varphi}'_{ky}]|_{x = \hat{x}_k} = 0,$$
$$[\hat{L} - \hat{L}_{y'} \hat{y}' + \hat{L}_{z'} + (\hat{\varphi}'_{kx} - \hat{z}')]|_{x = \hat{x}_k} = 0, \quad k = 0,1.$$

де $\hat{\varphi}'_{kx} = \varphi'_{kx}(x, \hat{y}(x))$, $\hat{\varphi}'_{ky} = \varphi'_{ky}(x, \hat{y}(x))$.

Доведення. Дійсно, цього разу

$$l = \lambda(z(x_0) - \varphi_0(x_0, y(x_0))) + \mu(z(x_1) - \varphi_1(x_1, y(x_1))),$$
$$l_{x_0} = -\lambda \varphi'_{0x}, \quad l_{x_1} = -\mu \varphi'_{1x},$$
$$l_{y(x_0)} = -\lambda \varphi'_{0y}, \quad l_{y(x_1)} = -\mu \varphi'_{1y}, \quad l_{z(x_0)} = \lambda, \quad l_{z(x_1)} = \mu.$$

Умови трансверсальності на лівому кінці мають вигляд:

$$\hat{L}_{y'}(\hat{x}_0) = \hat{l}_{y(x_0)} = -\lambda \hat{\varphi}'_{0y}, \quad \hat{L}_{z'}(\hat{x}_0) = \hat{l}_{z(x_0)} = \lambda,$$
$$\hat{L}(\hat{x}_0) - \lambda \hat{\varphi}'_{0x} - \lambda \hat{y}'(\hat{x}_0) + \lambda \hat{z}'(\hat{x}_0) = 0.$$

Виключаючи параметр λ, одержуємо умови трансверсальності в точці $\hat{x}_0$:

$$\hat{L}_{y'}(\hat{x}_0)+\hat{L}_{z'}(\hat{x}_0)\varphi'_{0y}(\hat{x}_0,\hat{y}(\hat{x}))=0,$$

$$\hat{L}(\hat{x}_0)-\hat{L}_{y'}(\hat{x}_0)\hat{y}'(\hat{x}_0)+\hat{L}_{z'}(\hat{x}_0)(\varphi'_{0x}(\hat{x}_0,\hat{y}(\hat{x}_0))-\hat{z}'(\hat{x}_0))=0.$$

Умови трансверсальності в точці $\hat{x}_1$ виводяться аналогічно.

Приклад 7.6. Визначити найкоротшу відстань від точки $A(1,1,1)$ до поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$J(y(\cdot),z(\cdot))=\int_1^{x_1}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$$

за умови, що $y(1)=1$, $z(1)=1$, а координати точки $B(x_1,y_1,z_1)$ задовольняють співвідношення $x^2+y^2+z^2=1$.

Розв'язок:

Використовуємо необхідні умови екстремуму.

1. Рівняння Ейлера задовольняють функції $y=C_1x+C_2$, $z=C_3x+C_4$. Точка $A(1,1,1)$ лежить на екстремалі. Тому невідомі C_1, C_2, C_3, C_4 задовольняють рівняння $C_1+C_2=1$, $C_3+C_4=1$.

2. Умови трансверсальності функціонала мають вигляд:

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}-\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]\Big|_{x=\hat{x}_1}=0$$

$$\left[\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}-\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}\right.$$

$$\left.-\left(z'+\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}\right]\Big|_{x=\hat{x}_1}=0.$$

Звідси виводимо рівняння $\hat{z}_1-C_3\hat{x}_1=0$, $C_1\hat{z}_1-C_3\hat{y}_1=0$. Оскільки точка $B(\hat{x}_1,\hat{y}_1,\hat{z}_1)$ лежить на екстремалі, то $\hat{z}_1=C_3\hat{x}_1+C_4$, $\hat{y}_1=C_1\hat{x}_1+C_2$. Враховуючи складені рівняння, обчислимо невідомі константи: $C_1=1$, $C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=0$.

Отже, рівняння екстремалі таке: $y=x$, $z=x$. Точка $B(\hat{x}_1,\hat{y}_1,\hat{z}_1)$ лежить на сфері, тому $\hat{x}_1^2+\hat{x}_1^2+\hat{x}_1^2=1$, $x_1=\pm1/\sqrt{3}$. Знайдені співвідношення задовольняють дві точки

$$B_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad B_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Відповідь: Екстремаль $y = x$, $z = x$, що з'єднує точку A з точкою B_1, дає мінімум функціонала: $S_{\min} = \sqrt{3} - 1$, а екстремаль $y = x$, $z = x$, що з'єднує точку A з точкою B_2, дає максимум функціонала. Δ

Приклад 7.7. Визначити умови трансверсальності підінтегральних функцій вигляду $L = f(x,y,z)\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}$ та поверхні $z = \varphi(x,y)$.

Розв'язок:

Умови трансверсальності можна записати так:

$$(1+\varphi_x' z')\,|_{x=\hat{x}_1} = 0, \quad (y' + \varphi_y' z')\,|_{x=\hat{x}_1} = 0\,,$$

або у вигляді

$$\frac{1}{\varphi_x'}\,|_{x=\hat{x}_1} = \frac{y'}{\varphi_y'}\,|_{x=\hat{x}_1} = \frac{z'}{-1}\,|_{x=\hat{x}_1}\,. \tag{7.10}$$

Це умови паралельності вектора $\vec{\tau} = (1, y', z')$, дотичного до екстремалі в точці $B(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$, і вектора $\vec{n} = (\varphi_x', \varphi_y', -1)$ нормалі до поверхні $z = \varphi(x,y)$ у точці $B(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$.

Відповідь: Умови трансверсальності функціоналів з підінтегральною функцією L зазначеного вигляду зводяться до умов ортогональності екстремалі та поверхні $z = \varphi(x,y)$. Δ

Приклад 7.8. Визначити найменшу відстань між поверхнями $z = \varphi(x,y)$, $z = \psi(x,y)$.

Розв'язок:

Задачу можна формалізувати так:

$$J(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx \to \min,$$

$$z_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad z_1 = \psi(x_1, y_1).$$

Екстремалями задачі будуть прямі лінії. Функція під інтегралом має вигляд, зазначений у прикладі 7.7. Тому умови трансверсальності як у точці (x_0, y_0, z_0), так і в точці (x_1, y_1, z_1) – це умови ортогональности (7.10).

Відповідь: Екстремум може досягатися лише на прямих, ортогональних як до поверхні $z = \varphi(x,y)$ у точці (x_0, y_0, z_0), так і до поверхні $z = \psi(x,y)$ у точці (x_1, y_1, z_1). Δ

Приклад 7.9. Відшукати екстремалі функціонала задачі

$$\begin{aligned} J(x(\cdot)) &= \int_0^1 x^2 (x')^2\,dt \to extr, \\ x(0) &= 0, \quad x(1) = 1. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Розв'язок:
Запишемо рівняння Ейлера:

$$2x(x')^2 - \frac{d}{dt}(2x^2x') = 0,$$

$$xx'' + (x')^2 = 0 = \frac{d}{dt}(xx'),$$

звідки $xx' = C_1$, $x^2 = 2C_1t + C_2$. Використавши граничні умови, одержимо $x^2 = t$.

Відповідь: Екстремаль функціонала (7.11), що з'єднує точки $(0,0)$ та $(1,1)$, це парабола $x^2 = t$. Δ

Зауваження. 1. Величину інтеграла

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt,$$

узятого вздовж лінії $x = x(t)$ від точки $A(t_0, x_0)$ до точки $B(t_1, x_1)$, називають J *-довжиною лінії* $x = x(t)$. Якщо $\hat{x} = \hat{x}(t)$ – екстремаль, то $J(\hat{x}(\cdot))$ називають *геодезичною відстанню* між точками A, B чи J*-відстанню*, а саму екстремаль називають J *-прямою.* Якщо відстань визначається функціоналом (7.11), то геодезична відстань $J(A,B)$ між точками $A(0,0)$, $B(1,1)$ дорівнює $1/4$.

2. Геодезичною відстанню від точки B до лінії L, що задається рівнянням $x = \varphi(t)$, називається геодезична відстань від точки B до точки $A \in L$ така, що функціонал $J(x(\cdot))$ обчислюється уздовж екстремалі, що з'єднує точки A і B, перетинаючи лінію L у точці A трансверсально. *Геодезичним колом* називають лінію, усі точки якої розташовані на однаковій геодезичній відстані від заданої точки. Аналогічно визначаються *геодезичний еліпс* і *геодезична гіпербола.*

Приклад 7.10. Визначити геодезичне коло із центром у точці $(0,0)$ радіуса R, якщо геодезичну відстань визначають за допомогою функціонала (7.11).

Розв'язок. Екстремалі функціонала (7.11) задовольняють співвідношення $x^2 = C_1t$, $2xx' = C_1$, $x' = \frac{x}{2t}$. З умови трансверсальності $x^2x'(2\varphi' - x') = 0$ випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до геодезичного кола задовольняє рівняння $\varphi' = x'/2$. Враховуючи, що $x' = x/2t$, складемо диференціальне рівняння геодезичного кола

$x' = x/4t.$ Отже, рівняння геодезичного кола таке: $x^4 = Ct.$ Щоб визначити величину C, використовуємо той факт, що на геодезичному колі лежить точка (C^3, C), а рівняння геодезичного радіуса (екстремалі), що проходить через цю точку, таке: $x^2 = t/C$. Звідки $xx' = \dfrac{1}{2C}$. Тому

$$R = \int_0^{C^3} (xx')^2 dt = \int_0^{C^3} (4C^2)^{-1} dt = C/4.$$

Отже, $C = 4R$ і геодезичне коло радіуса R із центром у початку координат описується рівнянням $x^4 = 4Rt.$ Δ

Зауваження. Введені вище поняття дозволяють говорити про неевклідову геометрію з диференціалом дуги $ds = L(t, x, x')dt.$ Якщо $L = \sqrt{1 + x^2}$, то геодезичні прямі перетворюються на звичайні.

Приклад 7.11. Визначити екстремаль функціонала

$$J(y(\cdot)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx,$$

що з'єднує точку $(0,0)$ та коло $(x - 9)^2 + y^2 = 9$ трансверсально.

Розв'язок:

Рівняння Ейлера зазначеного функціонала має вигляд

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} - y' \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1.$$

Після спрощень одержимо $y\sqrt{1 + y^2} = C_1^{-1} = C.$ Таке рівняння можна проінтегрувати підстановкою $y' = tg(u)$. Тоді $y = C\cos(u)$, $dx = dy/y' = -C\cos(u)du$, $x = -C\sin(u) + C_2.$ Параметричне рівняння $y = C\cos(u)$, $x = -C\sin(u) + C_2$ – це рівняння кола $(x - C_2)^2 + y^2 = C^2$ із центром на осі $OX.$ Шукана екстремаль проходить через точку $(0,0)$, тому $C_2 = C > 0.$ Невідому константу C визначимо з умови ортогональності дотичних до кіл $(x - 9)^2 + y^2 = 9$, $(x - C_2)^2 + y^2 = C^2$ у точці перетину.

Відповідь. Шукана экстремаль – це дуга кола $(x - 4)^2 + y^2 = 16.$ Δ

Зауваження. Відповідно до принципу Ферма траєкторія руху променя світла зі швидкістю $v(x, y)$ у неоднорідному двовимірному середовищі є екстремаллю функціонала

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x,y)} dx.$$

Якщо швидкість світла пропорційна лише координаті y, то екстремалі функціонала J – це дуги кіл, центри яких лежать на осі OX. Нехай задана крива $y = g(x)$. *Оптичною довжиною* кривої $y = g(x)$ називають час $T(g)$, за який промінь проходить цю криву зі швидкістю $v(x,y)$. Розглянемо верхню півплощину як середовище, у кожній точці якого швидкість світла дорівнює ординаті цієї точки $v = y$. Променями світла в цьому середовищі будуть півкола із центрами на осі OX. Можна показати, що дуга AD півкола $y = g(x)$, один із кінців якої лежить на осі OX, має нескінченну оптичну довжину, тому точки осі називають *нескінченно віддаленими.* Будемо вважати, що півкола із центрами на осі – прямі. Оптичні довжини дуг таких півкіл – їхні довжини, кути між такими прямими – кути між дотичними до півкіл у точці перетину. Прямими будемо називати і півпрямі у верхній півплощині, перпендикулярні осі OX. Такі півпрямі є виродженими півколами.

При такому визначенні точок і прямих виконуються всі аксіоми евклідової геометрії, крім аксіоми про паралельні прямі. Наприклад, через дві точки можна провести одну і тільки одну пряму (через дві точки у верхній півплощині можна провести тільки одне півколо із центром на осі OX). *Паралельними* вважаються дві прямі, що мають спільну нескінченно віддалену точку (тобто два півкола, що дотикаються в точці B, яка лежить на осі OX). Тоді через задану точку, що не лежить на прямій $y = g(x)$, можна провести дві прямі $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, паралельні прямій $y = g(x)$. Прямі, що проходять через точку A і лежать у вертикальних кутах I і III, перетинають пряму $y = g(x)$. Прямі, що лежать у вертикальних кутах II і IV, не перетинають пряму $y = g(x)$.

Це *модель Пуанкаре* геометрії Лобачевського на площині (рис. 7.1).

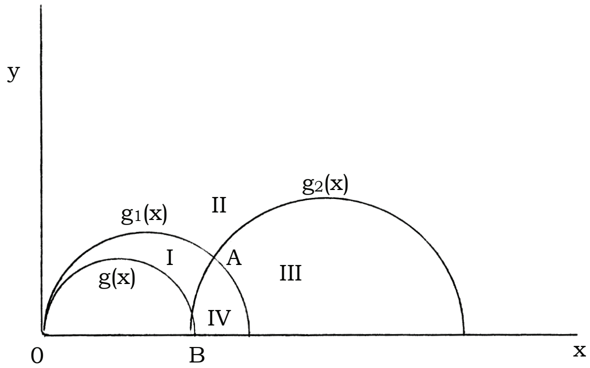

Рис. 7.1

Задачі

Дослідити на екстремум функціонали:

7.1. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 1$.

7.2. $\int_0^1 (x')^2 dt + \alpha x^2(1) \to extr$, $x(0) = 0$.

7.3. $\int_0^T (x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 0$, $T + x(T) + 1 = 0$.

7.4. $\int_0^T (x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 0$, $(T-1)x^2(T) + 2 = 0$.

7.5. $\int_0^T (x')^3 dt \to extr$, $x(0) = 0$, $T + x(T) = 1$.

7.6. $\int_0^1 ((x')^2 + x)dt \to extr$, $x(1) = 0$.

7.7. $\int_0^{T_0} (x - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$.

7.8. $\int_0^T ((x')^2 + x)dt \to extr$, $x(0) = 1$.

7.9. $\int_0^T ((x')^2 + x)dt \to extr$, $x(T) = T$.

7.10. $\int_0^T ((x')^2 + x)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(T) = \xi$.

7.11. $\int_0^T ((x')^2 + x)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(T) = T$.

7.12. $\int_0^T ((x')^2 + x + 2)dt \to extr$, $x(0) = 0$.

7.13. $\int\limits_0^{\pi/4} ((x')^2 - x^2)dt \to extr$, $x(0) = 1$.

7.14. $\int_0^{T_0} ((x')^2 - x^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$.

7.15. $\int_0^{\pi/4} ((x')^2 - x^2 + 4x\cos(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$.

7.16. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}((x')^2 - x^2 + 4x\sin(t))dt \to extr$, $x(\pi/2) = 0$.

7.17. $\int_0^1((x')^2 + x^2)dt \to extr$, $x(0) = 1$.

7.18. $\int_0^1((x')^2 + x^2 + 4xsh(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$.

7.19. $\int_0^1((x')^2 + x^2 + 4xch(t))dt \to extr$, $x(1) = 0$.

7.20. $\int_0^1((x')^2 + x^2)dt - x^2(1) \to extr$, $x(0) = 1$.

7.21. $\int_0^T((x')^2 + x^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(T) = 1$.

7.22 $\int\limits_1^e (t(x')^2 + 2x)dt \to extr$; $x(1) = 0$.

7.23 $\int\limits_1^e (t(x')^2 + 2x)dt \to extr$; $x(1) = x(e) = 0$.

7.24 $\int\limits_0^{T_0} ((x')^2 + x^2)dt \to extr$; $x(T_0) = \xi$.

7.25 $\int\limits_0^T ((x')^2 + x^2)dt \to extr$; $x(T) = \xi$.

7.26 $\int\limits_0^{T_0} ((x')^2 + x^2)dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x(T_0) = \xi$.

7.27 $\int\limits_0^T ((x')^2 + x^2)dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x(T) = \xi$.

7.28. $\int_0^T((x')^2 + x^2)dt \to extr$, $x(T) + T - 1 = 0$.

7.29. $\int_0^T((x')^2 + x^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $T + x(T) + 1 = 0$.

7.30. Відшукати найкоротшу відстань від точки $A(1,0)$ до еліпса

$4x^2 + 9y^2 = 36$.

7.31. Відшукати найкоротшу відстань від точки $A(-1,5)$ до параболи $y^2 = x$.

7.32. Відшукати найкоротшу відстань між колом $x^2 + y^2 = 1$ і прямою $x + y = 4$.

7.33. Відшукати найкоротшу відстань від точки $A(0,0,3)$ до поверхні $z = x^2 + y^2$.

7.34. Відшукати найкоротшу відстань між поверхнями

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

7.35. Відшукати геодезичну відстань від точки $A(0,1)$ до точки $B(1,1)$, якщо відстань визначається за допомогою функціонала

$$J(y(\cdot)) = \int (12xy + (y')^2)dx.$$

7.36. Відшукати геодезичне коло радіуса $R = 1$ із центром у точці $(0,0)$, якщо геодезична відстань визначається функціоналом

$$J(y(\cdot)) = \int (y')^3\, dx.$$

Відшукати допустимі екстремалі

7.37. $\int_0^T \sqrt{1 + (x')^2}\, dt \to extr$, $x(0) = 0$, $T^2 x(T) = 1$.

7.38 $\int_0^1 \sqrt{1 + (x')^2}\, x dt \to extr$; $x(1) = 1$.

7.39 $\int_0^1 \sqrt{1 + (x')^2}\, x dt \to extr$; $x(0) = x(1) = 1$.

7.40 $\int_0^T \sqrt{1 + (x')^2}\, x dt \to extr$; $x(0) = 1$, $2T + x(T) = 2$.

7.41. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x} dt \to extr$, $x(0) = 1$.

7.42. $\int_0^T \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x} dt \to extr$, $x(0) = 1$, $T - x(T) = 1$.

7.43. $\int_0^{T_0} x\sqrt{1 + (x')^2}\, dt \to extr$, $x(T_0) = \xi$.

7.44. $\int_0^1 (\frac{1}{2}((x_1')^2 + (x_2')^2) - x_1 x_2)dt \to extr$, $x_1(1) = x_2(1) = 1$.

7.45. $\int_0^1 (\frac{1}{2}((x_1')^2 + (x_2')^2) - x_1 x_2)dt \to extr$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

7.46 $\int_0^1 (((x_1')^2 + (x_2')^2)/2 + x_1 x_2)dt \to extr$; $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

7.47 $\int\limits_0^{\pi/2}((x_1')^2+(x_2')^2+2x_1x_2)dt \to extr$; $x_1(0)=x_2(0)=1$, $x_1(\pi/2)=1$, $x_2(\pi/2)=-1$.

7.48 $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $x(0)=x'(0)=0$, $x(1)=1$.

7.49 $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $x(0)=x'(1)=0$, $x'(0)=1$.

7.50 $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $x(0)=x'(0)=0$, $x'(1)=1$.

7.51 $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $x(0)=x(1)=0$, $x'(0)=-1$, $x'(1)=1$.

7.52 $\int\limits_0^1 ((x'')^2-48x)dt \to extr$; $x(0)=x(1)=0$.

7.53 $\int\limits_0^1 ((x'')^2-48x)dt \to extr$; $x(0)=x'(0)=x(1)=0$.

7.54 $\int\limits_0^1 ((x'')^2-48x)dt \to extr$; $x(0)=x'(0)=x(1)=x'(1)=0$.

7.55 $\int\limits_0^1 ((x'')^2+48x)dt \to extr$; $x(0)=0$, $x(1)=1$.

7.56 $\int\limits_1^e t(x'')^2\,dt \to extr$; $x(1)=e+1/2$, $x(e)=e^2/2$, $x'(1)=1$.

7.57 $\int\limits_1^e t(x'')^2\,dt \to extr$; $x(1)=0$, $x'(1)=1$, $x'(e)=2$.

7.58 $\int\limits_1^e t(x'')^2\,dt \to extr$; $x(1)=0$, $x'(1)=1$, $x(e)=e$, $x'(e)=2$.

7.59 $\int\limits_1^e t^2(x'')^2\,dt \to extr$; $x(1)=-1$, $x(e)=x'(1)=e$.

7.60 $\int_1^e t^2 (x'')^2 dt \to extr$; $x(1)=0$, $x'(1)=1$, $x'(e)=e^{-1}$.

7.61 $\int_1^e t^2 (x'')^2 dt \to extr$; $x(1)=0$, $x(e)=x'(1)=1$, $x'(e)=e^{-1}$.

7.62 $\int_1^e t^3 (x'')^2 dt \to extr$; $x(1)=e/2$, $x(e)=3/2$, $x'(e)=(2e)^{-1}$.

7.63 $\int_1^e t^3 (x'')^2 dt \to extr$; $x(1)=1$, $x'(1)=-1$, $x'(e)=e^{-2}$.

7.64 $\int_1^e t^3 (x'')^2 dt \to extr$; $x(1)=1$, $x'(1)=-1$, $x(e)=e^{-1}$, $x'(e)=-e^{-2}$.

7.65 $\int_0^\pi ((x'')^2 + 4x^2) dt \to extr$; $x(0)=x'(0)=0$, $x(\pi)=\mathrm{sh}(\pi)$.

7.66 $\int_0^\pi ((x'')^2 + 4x^2) dt \to extr$; $x(0)=x'(0)=x'(\pi)=0$, $x(\pi)=\mathrm{sh}(\pi)$.

7.67 $\int_0^{T_0} ((x'')^2 - x^2) dt \to extr$;

7.68 $\int_0^T ((x'')^2 - x^2) dt \to extr$;

7.69 $\int_0^{\pi/2} ((x'')^2 - x^2) dt \to extr$; $x(\pi/2)=1$.

7.70 $\int_0^\pi ((x'')^2 - x^2) dt \to extr$; $x(0)=1$.

7.71 $\int_0^\pi ((x'')^2 - x^2) dt \to extr$; $x'(0)=1$.

7.72 $\int_0^\pi ((x'')^2 - x^2) dt \to extr$; $x(\pi)=1$.

7.73 $\int_0^\pi ((x'')^2 - x^2) dt \to extr$; $x'(\pi)=1$.

7.74 $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

7.75 $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x'(0) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$.

7.76 $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x'(\pi) = 1$.

7.77 $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x'(0) = 0$, $x(\pi) = 1$.

7.78 $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = x(\pi) = 0$, $x'(0) = 1$.

7.79 $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = x(\pi) = 0$, $x'(\pi) = 1$.

7.80 $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = 1$, $x'(0) = x'(\pi) = 0$.

7.81 $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x'(0) = x'(\pi) = 0$, $x(\pi) = 1$.

7.82 $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = x'(\pi/2) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

7.83 $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(\pi/2) = 1$, $x(0) = x'(0) = x'(\pi/2) = 0$.

7.84 $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = x(\pi) = 0$, $x'(0) = 1$, $x'(\pi) = -1$.

7.85 $\int\limits_0^{1}((x'')^2 + x^2)dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x(1) = \mathrm{sh}(1)$, $x'(1) = \mathrm{ch}(1)$.

7.86 $\int\limits_0^{1}((x'')^2 + x^2)dt \to extr$; $x(0) = -\mathrm{sh}(1)$, $x'(0) = \mathrm{ch}(1)$, $x(1) = 0$.

7.87 $\int\limits_0^{1}((x'')^2 + x^2)dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = 0$, $x'(1) = \mathrm{sh}(1)$.

7.88 $\int_0^1((x'')^2 + x^2)dt \to extr$; $x'(0) = \mathrm{sh}(1)$, $x(1) = x'(1) = 0$.

7.89 $\int_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1 + \pi/2$, $x'(\pi/2) = 1$.

7.90 $\int_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

7.91 $\int_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x'(\pi/2) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

7.92 $\int_0^1(x''')^2 dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'(1) = 1$.

7.93 $\int_0^1(x''')^2 dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x''(0)$, $x(1) = 1$.

7.94 $\int_0^1(x''')^2 dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x(1) = 1$.

7.95 $\int_0^1(x''')^2 dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'(1) = 0$, $x(1) = 1$.

8. ЛАМАНІ ЕКСТРЕМАЛІ

8.1. Неособливі екстремалі

При виведенні рівняння Ейлера методом Лагранжа ми інтегрували частинами другий доданок у виразі

$$\delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_x(t)h(t) + \hat{L}_{x'}(t)h'(t))dt.$$

Ця операція обґрунтована якщо функція $\hat{L}_{x'}(t) = L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ неперервно диференційовна. Похідна $\dfrac{d}{dt} L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ містить другу похідну $\hat{x}''(t)$ функції $\hat{x}(t)$. Проте в найпростішій задачі варіаційного числення існування $\hat{x}''(t)$ не передбачалося. Отже, необхідна умова екстремуму (рівняння Ейлера) обґрунтована лише для функцій із класу $C^2[t_0, t_1]$. При виведенні рівняння Ейлера методом Дюбуа – Реймона доведені існування і неперервність функції $\dfrac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)$. Однак це не означає, що існує $\hat{x}''(t)$ і функцію $L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = \hat{L}_{x'}(t)$ можна диференціювати за правилом диференціювання складних функцій.

Означення 8.1. Екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ називається *неособливою екстремаллю*, якщо $\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \neq 0$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 8.1 (теорема Гільберта). *Неособлива екстремаль належить класу* $C^2[t_0, t_1]$.

Доведення. Нехай $\hat{x}(\cdot)$ – неособлива екстремаль. Вона задовольняє інтегральне рівняння Ейлера

$$L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - \int_{t_0}^{t} L_x(s, \hat{x}(s), \hat{x}'(s))ds = C.$$

Визначимо функцію $\Phi(t, z)$ за формулою

$$\Phi(t, z) = L_{x'}(t, \hat{x}(t), z) - \int_{t_0}^{t} L_x(s, \hat{x}(s), \hat{x}'(s))ds - C.$$

Рівняння $\Phi(t, z) = 0$ має розв'язки $z = \hat{x}'(t)$. Оскільки $\hat{x}(\cdot)$ – неособлива екстремаль, то

$$\Phi'_z(t, z)\big|_{z=\hat{x}'(t)} = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \neq 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

За теоремою про неявну функцію розв'язок $z = \hat{x}'(t)$ рівняння $\Phi(t,z) = 0$ має стільки похідних по t, скількох похідних має функція $\Phi(t,z)$ по змінних t, z. Тому екстремаль $\hat{x}'(t)$ неперервно диференційовна, якщо функція $L(t,x,x')$ неперервно диференційовна два рази за сукупністю всіх змінних.

Означення 8.2. Екстремаль $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0,t_1],R^n)$ функціонала $J(x(\cdot))$, що залежить від векторів-функцій, називається *неособливою*, якщо $\det(\hat{L}_{x_k' x_j'}(t)) \neq 0$ для всіх $t \in [t_0,t_1]$.

Теорема 8.2. *Неособлива екстремаль* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0,t_1],R^n)$ *належить класу* $C^2([t_0,t_1],R^n)$.

8.2. Ламані екстремалі. Умови Вейєрштрасса – Ердмана

Основна задача варіаційного числення досліджувалась у просторі $C^1[t_0,t_1]$ один раз неперервно диференційовних функцій. Однак у цьому просторі має розв'язки не кожна задача. Навіть за умови, що функція $L(t,x,x')$ під знаком інтеграла разом із похідними $L_x(t,x,x')$, $L_{x'}(t,x,x')$ неперервні за сукупністю змінних, не завжди існує розв'язок задачі у просторі $C^1[t_0,t_1]$.

Приклад 8.1 (Гільберта). Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 t^{\frac{2}{3}} (x')^2 dt \to \inf, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Розв'язок:

Рівняння Ейлера має інтеграл імпульсу $t^{\frac{2}{3}} x' = C$. Тому існує єдина екстремаль $\hat{x}(t) = t^{\frac{1}{3}}$. Ця екстремаль не належить простору $C^1[0,1]$. Разом із тим вона дає абсолютний мінімум задачі. Дійсно, нехай $h(\cdot)$ – будь-яка функція із класу $C^1[0,1]$, для якої інтеграл скінченний і $h(0) = h(1) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)) &= \int_0^1 t^{\frac{2}{3}}\left((x')^2(t)+2\hat{x}'(t)h'(t)+(h')^2(t)\right)dt \\ &= J(\hat{x}(\cdot))+\frac{2}{3}\int_0^1 h'(t)dt+J(h(\cdot)) \\ &= J(\hat{x}(\cdot))+J(h(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot)). \end{aligned}$$

Ми встановили, що розв'язок задачі існує, але не належить простору $C^1[t_0,t_1]$. Δ

Щоб запобігти подібним ускладненням, клас допустимих функцій доповнюють новими функціями і на цих функціях визначають функціонал $J(x(\cdot))$.

Поширимо основну задачу варіаційного числення на клас кусково-гладких функцій. Нагадаємо, що *кусково-гладкою функцією* називається неперервна функція $x(\cdot)$, що має похідну, неперервну в усіх точках відрізка $[t_0,t_1]$ за винятком скінченної кількості точок $t_0<\tau_1<\ldots<\tau_m<t_1$, а в точках τ_j похідна $x'(\cdot)$ має розриви першого роду. Сукупність усіх кусково-гладких функцій на $[t_0,t_1]$ позначимо $KC^1[t_0,t_1]$.

Розглянемо основну задачу варіаційного числення

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),x'(t))dt \to extr, \qquad x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1 \tag{8.1}$$

у просторі $KC^1[t_0,t_1]$. Інтегральний функціонал $J(x(\cdot))$ визначений на множині функцій $x(\cdot)\in KC^1[t_0,t_1]$, оскільки на множині таких функцій $x(\cdot)$ функція $L(t,x,x')$ кусково-неперервна і інтеграл існує.

У просторі $KC^1[t_0,t_1]$ природніше досліджувати функціонал $J(x(\cdot))$ на сильний, а не на слабкий екстремум. Якщо як ε-окіл елемента $\hat{x}(\cdot)$ простору $KC^1[t_0,t_1]$ розглядати функції $x(\cdot)$ такі, що $|x(t)-\hat{x}(t)|<\varepsilon$, $t\in[t_0,t_1]$, а також $|x'(t)-\hat{x}'(t)|<\varepsilon$, $t\in[t_0,t_1]$, то кусково-гладкі функції будуть лежати "далеко" від гладких функцій. Дійсно, якщо похідна $\hat{x}'(\cdot)$ має стрибок δ, то жодна із функцій $x(\cdot)\in C^1[t_0,t_1]$ не може задовольняти нерівності $|\hat{x}'(t)-x'(t)|<\delta/2$ для всіх t, за яких існує $\hat{x}'(t)$. Тому відстань у просторі $KC^1[t_0,t_1]$ природно визначати, порівнюючи лише значення самих функцій, а не їхніх похідних. Із цієї причини задача досліджується на сильний екстремум.

Означення 8.3. Функція $\hat{x}(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$ дає сильний мінімум (максимум) функціоналу задачі (8.1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожної $x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$, яка задовольняє граничні умови $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ та умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_0 = \sup_{t_0 \le t \le t_1} |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \qquad (8.2)$$

виконується нерівність $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot))$ ($J(x(\cdot)) \le J(\hat{x}(\cdot))$).

Лема 8.1 (про заокруглення кутів) [АТФ, с. 69]. *Якщо функція $L(t, x, x')$ неперервна за сукупністю аргументів, то*:

1)
$$\inf_{\substack{x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1] \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1}} J(x(\cdot)) = \inf_{\substack{x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1] \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1}} J(x(\cdot)); \qquad (8.3)$$

2) рівність (8.3) зберігається за тих $x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$, які задовольняють (8.2) із заданими $\hat{x}(\cdot)$, $\varepsilon > 0$;

3) твердження залишається справедливим після заміни $\inf$ *на* $\sup$.

Доведення. Оскільки $KC^1[t_0, t_1] \supset C^1[t_0, t_2]$, то ліва частина у (8.3) не більша правої. Потрібно довести протилежну нерівність. Застосуємо метод від супротивного. Якщо

$$\inf_{x(\cdot) \in KC^1} J(x(\cdot)) < \inf_{x(\cdot) \in C^1} J(x(\cdot)),$$

то існують такі функції $\tilde{x}(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$ і число $\eta > 0$, що

$$J(\tilde{x}(\cdot)) < \inf_{x(\cdot) \in C^1} J(x(\cdot)) - \eta.$$

Нехай τ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ – точки розриву похідної $\tilde{x}'(t)$, $\Delta_j = \tilde{x}'(\tau_j + 0) - \tilde{x}'(\tau_j - 0)$ – стрибки $\tilde{x}'(t)$ у цих точках. На замкнутій множині

$$K = \{(t, x, x') \mid t_0 \le t \le t_1, |x - \tilde{x}(t)| \le \max \frac{|\Delta_j| \delta_0}{4}, |x' - \tilde{x}'(t)| \le \max \frac{|\Delta_j|}{2}\}$$

неперервна функція $L(t, x, x')$ обмежена: $|L(t, x, x')| \le M$. Функція

$$a(t)=\begin{cases}\dfrac{(1-|t|)^2}{4}, & |t|\le 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

неперервна, а її похідна в точці $t=0$ має стрибок $\Delta=-1$. Функція $\delta a(\frac{t-\tau_j}{\delta})$ теж неперервна. Похідна такої функції неперервна в усіх точках, за винятком точки τ_j, де вона має стрибок $\Delta=-1$. Тому функція

$$x_\delta(t)=\tilde{x}(t)+\sum_{j=1}^{m}\Delta_j\delta a(\frac{t-\tau_j}{\delta})$$

неперервна разом з похідною на проміжку $[t_0,t_1]$, причому $x_\delta(t)=\tilde{x}(t)$ поза межами відрізка $[\tau_j-\delta,\tau_j-\delta]$. За досить малих δ ці відрізки не перекриваються, $x_\delta(t_k)=\tilde{x}(t_k)=x_k$, $k=0,1$, і, крім того, $|x_\delta(t)-\tilde{x}(t)|\le\max\frac{|\Delta_j|\delta}{4}$, $|x_\delta'(t)-\tilde{x}'(t)|\le\max\frac{|\Delta_j|}{2}$, оскільки $|a(t)|\le\frac{1}{4}$, $|a'(t)|\le\frac{1}{2}$. Тому при $\delta<\delta_0$

$$\begin{aligned}J(x_\delta(\cdot))-J(\tilde{x}(\cdot)) &=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x_\delta(t),x_\delta'(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}L(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t))dt\\ &=\sum_{j=1}^{m}\int_{\tau_j-\delta}^{\tau_j+\delta}(L(t,x_\delta(t),x_\delta'(t))-L(t,\tilde{x}(t),\tilde{x}'(t)))dt,\\ J(x_\delta(\cdot)) &\le J(\tilde{x}(\cdot))+4m\delta M\\ &<\inf_{x(\cdot)\in C'}J(x(\cdot))-\eta+4m\delta M<\inf_{x(\cdot)\in C'}J(x(\cdot)),\end{aligned}$$

при малих δ. Оскільки $x_\delta(\cdot)\in C^1[t_0,t_1]$, то ми прийшли до суперечності. При малих δ функція $x_\delta(\cdot)$ задовольняє нерівність (8.2), якщо $\tilde{x}(\cdot)$ його задовольняє. Це є друге твердження леми, третє твердження очевидне.

Наслідок 8.3. Якщо функція $\hat{x}(\cdot)\in C^1[t_0,t_1]$ дає абсолютний або сильний мінімум (максимум) функціоналу задачі (8.1) у просторі $C^1[t_0,t_1]$, то вона дає такий же екстремум і в просторі $KC^1[t_0,t_1]$.

Аналізуючи доведення рівняння Ейлера методом Дюбуа – Реймона в класі $C^1[t_0,t_1]$, можна переконатися, що неперервність функції використовувалася лише при переході від рівняння Ейлера в інтегральній формі до рівняння Ейлера в диференціальній формі. Перехід обґрунтований у всіх точках неперервності функції $\hat{x}'(t)$, тобто між точками зламу.

Теорема 8.3. *Нехай функція* $L(t,x,x')$ *та її частинні похідні* $L_x(t,x,x')$, $L_{x'}(t,x,x')$ *неперервні за сукупністю змінних. Якщо функція* $\hat{x}(\cdot)\in KC^1[t_0,t_1]$ *дає екстремум функціоналу* (8.1) *найпростішої задачі варіаційного числення, то*:

1) функція $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє інтегральні рівняння*:

$$\hat{L}_{x'}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{L}_x(s)ds+C_1,\quad t\in[t_0,t_1],$$
$$\hat{L}(t)-x'(t)\hat{L}_{x'}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{L}_t(s)ds+C,\quad t\in[t_0,t_1]; \tag{8.4}$$

2) на кожному проміжку неперервності функції $\hat{x}'(\cdot)$ *функція* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє диференціальні рівняння*:

$$\hat{L}_x(t)=\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t),$$
$$\hat{L}_t(t)=\frac{d}{dt}[\hat{L}(t)-x'(t)\hat{L}_{x'}(t)]; \tag{8.5}$$

3) у кожній точці τ_j, $j=\overline{1,m}$, *злому функції* $\hat{x}(\cdot)$ *виконується перша умова Вейєрштрасса – Ердмана*

$$\hat{L}_{x'}(t)\,|_{t=\tau_j-0}=\hat{L}_{x'}(t)\,|_{t=\tau_j+0},\quad j=\overline{1,m},$$

і друга умова Вейєрштрасса – Ердмана

$$(\hat{L}(t)-\hat{x}'(t)\hat{L}_{x'}(t))\,|_{t=\tau_j-0}=(\hat{L}(t)-\hat{x}'(t)\hat{L}_{x'}(t))\,|_{t=\tau_j+0},\quad j=\overline{1,m}.$$

Доведення. Перше інтегральне рівняння Ейлера (8.4) і відповідне диференціальне рівняння (8.5) – це наслідки леми Дюбуа – Реймона. Щоб вивести друге інтегральне рівняння (8.4) і відповідне диференціальне рівняння (8.5), запишемо рівняння функцій, що дають екстремум функціонала задачі, у параметричній формі $t=u$, $\hat{x}=\hat{x}(u)$, $t_0\le u\le t_1$. Ця крива дає екстремум функціоналу задачі в класі всіх кривих $t=\xi(u)$, $x=\eta(u)$, $u_1\le u\le u_2$, які мають неперервні похідні, задовольняють граничні умови і, крім того, $\xi'(u)>0$, $u\in[t_0,t_1]$. Функціонал $J(x(\cdot))$ у такому випадку матиме вид

$$J(\xi(\cdot),\eta(\cdot))=\int_{u_1}^{u_2}L(\xi(u),\eta(u),\eta'(u)\xi'(u))\xi'(u)du.$$

Скориставшись методом Дюбуа – Реймона, виводимо два рівняння Ейлера в параметричній формі. Одне з них таке:

$$L-\frac{\eta'}{\xi'}L_{x'}=\int_{u_1}^{u}L_t\xi' du+C.$$

Після переходу до змінних x, t рівняння набуває вигляду (8.4). Диференціюючи його, одержимо друге рівняння (8.5).

Щоб переконатися в справедливості умов Вейерштрасса – Ердмана, досить указати, що функції $L_t(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$, $L_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$ під знаком інтеграла в рівняннях (8.4) неперервно залежать від t. Тому праві частини цих рівнянь неперервні. Отже, і ліві частини неперервні в точках зламу.

Теорему доведено.

Сформулюємо теорему про необхідні умови екстремуму функціонала, що залежить від векторних функцій.

Теорема 8.4. *Нехай функція* $L=L(t,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')$ *та її частинні похідні* L_{x_k}, $L_{x_k'}$, $k=\overline{1,n}$ *неперервні. Якщо функція* $\hat{x}(\cdot)\in KC^1([t_0,t_1],R^n)$ *дає екстремум функціоналу* $J(x_1(\cdot),\ldots,x_n(\cdot))$, *то*:

1) функція $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє інтегральні рівняння*:

$$\begin{aligned}\hat{L}_{x_k'}(t) &= \int_{t_0}^{t}\hat{L}_{x_k}(s)ds+C_k, \quad t\in[t_0,t_1],\ k=\overline{1,n},\\ \hat{L}(t) &- \sum_{k=1}^{n}x_k'(t)\hat{L}_{x_k'}(t)=\int_{t_0}^{t}\hat{L}_t(s)ds+C, \quad t\in[t_0,t_1];\end{aligned} \tag{8.6}$$

2) на кожному проміжку неперервності функції $\hat{x}'(\cdot)$ *функція* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє диференціальні рівняння*:

$$\begin{aligned}\hat{L}_{x_k}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{L}_{x_k'}(t),\ k=\overline{1,n};\\ \hat{L}_t(t) &= \frac{d}{dt}[\hat{L}(t)-\sum_{k=1}^{n}x_k'(t)\hat{L}_{x_k'}(t)];\end{aligned} \tag{8.7}$$

3) у кожній точці τ_j, $j=\overline{1,m}$, *зламу функції* $\hat{x}(\cdot)$ *виконуються умови Вейєрштрасса – Ердмана*:

$$\hat{L}_{x_k'}(t)|_{t=\tau_j-0}=\hat{L}_{x_k'}(t)|_{t=\tau_j+0}, \qquad k=\overline{1,n},$$

$$(\hat{L}(t)-\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_k'(t)\hat{L}_{x_k'}(t))|_{t=\tau_j-0}^{t=\tau_j+0}=0, \qquad j=\overline{1,m}.$$

Доведення. Перше інтегральне (8.6) і відповідне диференціальне рівняння Ейлера – це наслідки леми Дюбуа – Реймона. Щоб вивести друге інтегральне рівняння (8.6), перейдемо до нових змінних u, $v_1,\ldots,v_n$ за формулами $t = u + \alpha v_1$, $x_k = v_k$, $k = \overline{1,n}$. Тоді функціонал $J(x(\cdot))$ матиме вид

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt$$

$$= \int_{u_0}^{u_1} L(u + \alpha v_1, v_1,\ldots,v_n, \frac{v_1'}{1+\alpha v_1'}\cdots, \frac{v_n'}{1+\alpha v_1'})(1+\alpha v_1')du.$$

Складемо інтегральне рівняння Ейлера за змінною v_1.

$$L_{v_1} = (\alpha L_t + L_{x_1})(1+\alpha v_1'),$$

$$L_{v_1'} = \alpha L + L_{x_1'} - \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k' L_{x_k'}.$$

Скориставшись рівнянням (8.6), одержимо інтегральне рівняння (8.7). Умови Вейєрштрасса – Ердмана є наслідок неперервності правих частин інтегральних рівнянь (8.7). Теорема доведена. □

Зауваження. Умови Вейєрштрасса – Ердмана набувають досить простого вигляду, якщо використовувати канонічні змінні $p = L_{x'}$, $H = -L + x'L_{x'}$. Тоді ці умови означають, що канонічні змінні неперервні в точках зламу екстремалі.

Відмітимо, що наведене розширення основної задачі не завжди достатнє. Задача Гільберта, наприклад, не має розв'язків і в просторі $KC^1[0,1]$. Природніше розширити задачу на клас $W_\infty^1[t_0,t_1]$ функцій, що задовольняють умову Ліпшиця. Проте і в такому просторі задача Гільберта не має розв'язків (функція $x(t) = t^{1/3}$ умову Ліпшиця не задовольняє). Це наводить на думку, що кожну задачу потрібно розв'язувати у своєму просторі.

Гладкі розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремалями. Кусково-гладкі розв'язки рівняння Ейлера, складені з екстремалей, називаються *ламаними екстремалями.* Умови Вейєрштрасса – Ердмана можна тлумачити як рівняння, за допомогою яких визначають точки, де можуть бути вершини ламаних екстремалей, а також нахили гладких дуг, що сходяться в цих вершинах.

Можлива така геометрична інтерпретація умов. У площині (q,u) побудуємо криву $u = L(t,x,q)$, що залежить від (t,x) як від параметра. Ця крива називається *індикатрисою* точки (t,x). У точках зламу $(\tau_j, \hat{x}(\tau_j))$ величини $\hat{x}'(\tau_j - 0)$, $\hat{x}'(\tau_j + 0)$ відповідають абсцисам двох точок, що лежать на індикатрисі. Із першої умови Вейєрштрасса – Ердмана випливає, що дотичні до індикатриси паралельні, а з другої умови випливає, що ці дотичні відтинають однакові відрізки на осі u. Тому дотичні до фігуратриси в точках з абсцисами $q_1 = \hat{x}'(\tau_j - 0)$, $q_2 = \hat{x}'(\tau_j + 0)$ збігаються.

Ми одержали наочну інтерпретацію умови $\hat{L}_{x'x'}(t) \neq 0$, що виключає можливість злому екстремалі. Якщо, наприклад, $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$, то індикатриса опукла й дотичні до неї, проведені у двох різних точках, не можуть збігатися, тому екстремаль не може мати злому.

Приклад 8.2. Відшукати ламані екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_0^2((x')^4 - 6(x')^2)dt, \quad x(0) = 0,\ x(2) = 0.$$

Розв'язок:

1. Відшукаємо екстремалі функціонала $J(x(\cdot))$. Функція під інтегралом залежить лише від x', тому екстремалями будуть прямі $x = C_1 t + C_2$.

2. Друга похідна $L_{x'x'} = 12(x')^2 - 12$ може перетворюватися в нуль, тому можливі ламані екстремалі. Нехай ламана екстремаль складається з відрізків прямих $x_- = at + b$, $0 \le t \le \tau$, $x_+ = ct + d$, $\tau \le t \le 2$. Із граничних умов $x(0) = 0$, $x(2) = 0$ випливає $b = 0$, $d = -2c$. Отже, $x_- = at$, $x_+ = c(t - 2)$. Щоб визначити невідомі коефіцієнти a, c і точку злому τ, використаємо умову неперервності екстремалі в точці τ та умову Вейєрштрасса – Ердмана. Обчислимо $L_{x'} = 4x'^3 - 12x'$, $L - x'L_{x'} = -3x'^4 + 6x'^2$, $x_-^{'} = a$, $x_+^{'} = c$. Складемо такі рівняння:

$$\begin{aligned} a\tau &= c(\tau - 2), \\ 4a^3 - 12a &= 4c^3 - 12c, \\ -3a^4 + 6a^2 &= -3c^4 + 6c^2. \end{aligned}$$

Допустимі розв'язки цієї системи рівнянь: а) $a = \sqrt{3}$, $c = -\sqrt{3}$, $\tau = 1$, б) $a = -\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$, $\tau = 1$.

Відповідь: Ламані екстремалі з однією точкою злому такі:

$$\hat{x}_1(t) = \begin{cases} \sqrt{3}t, & 0 \le t \le 1, \\ -\sqrt{3}(t-2), & 1 \le t \le 2, \end{cases} \qquad \hat{x}_2(t) = \begin{cases} -\sqrt{3}t, & 0 \le t \le 1, \\ \sqrt{3}(t-2), & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

$$J(\hat{x}_1(\cdot)) = J(\hat{x}_2(\cdot)) = -18.$$

Індикатриса $u = q^4 - 6q^2$ не залежить від точки (t, x), вона має спільну дотичну в точках з абсцисами $q = \pm\sqrt{3}$. Тому умови Вейєрштраса – Ердмана будуть виконані, якщо екстремаль будувати з прямих, що утворюють кут $\pm\pi/3$ з віссю OX. Δ

Приклад 8.3 (Больца). Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1((1-(x')^2) + x^2)dt \to \inf, \quad x(0) = 0, x(1) = 0.$$

Розв'язок:

Нижня грань функціонала дорівнює нулю. Щоб переконатися в цьому, досить розглянути мінімізуючу послідовність у просторі $KC^1[0,1]$:

$$x_n(t) = \int_0^t sign(\sin(2\pi n\tau))d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Функції $x_n(t)$ рівномірно прямують до нуля і $|x_n'(t)| = 1$, за винятком скінченної кількості точок. Тому $J(x_n(\cdot)) > 0$. Оскільки $J(x_0(\cdot)) = 1$, якщо $x_0(t) \equiv 0$, і

$$J(x(\cdot)) \ge \int_0^1 x^2(t)dt > 0,$$

якщо $x(t) \not\equiv 0$, то нижня границя не досягається на множині допустимих функцій. Річ у тому, що функціонал J не є напівнеперервним знизу. Напівнеперервний аналог функціонала має вид

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1((((x')^2-1)_+)^2 + x^2)dt,$$

де

$$((x')^2-1)_+ = \begin{cases} 0, & |x'| \le 1, \\ (x')^2 - 1, & |x'| > 1. \end{cases} \quad \Delta$$

Приклад 8.4. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}(f(x') + x^2)dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

де функція

$$f(u) = ((|u|-1)_+)^2 = \begin{cases} (u-1)^2, & u \ge 1, \\ 0, & |u| < 1, \\ (u+1)^2, & u \le -1, \end{cases}$$

неперервно диференційовна й опукла.

Розв'язок:

Графік цієї функції лежить не нижче кожної своєї дотичної і завжди $f(v) \ge f(u) + f'(u)(v-u)$. Тому для будь-яких функцій $x(\cdot)$,

$\hat{x}(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$, які задовольняють задані граничні умови $x(t_0) = \hat{x}(t_0) = x_0$, $x(t_1) = \hat{x}(t_1) = x_1$, виконується нерівність

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (f(x'(t)) - f(\hat{x}'(t)) + x^2(t) - \hat{x}^2(t))dt$$

$$\geq \int_{t_0}^{t_1} (f'(\hat{x}'(t))(x'(t) - \hat{x}'(t)) + 2\hat{x}(t)(x(t) - \hat{x}(t))$$

$$+ (x(t) - \hat{x}(t))^2)dt$$

$$\geq \int_{t_0}^{t_1} (f'(\hat{x}'(t))(x'(t) - \hat{x}'(t)) + 2\hat{x}(t)(x(t) - \hat{x}(t)))dt.$$

Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ у всіх точках диференційовності задовольняє рівняння Ейлера $\frac{d}{dt} f'(\hat{x}'(t)) = 2\hat{x}(t)$, то, інтегруючи частинами на кожному інтервалі неперервності $\hat{x}'(\cdot)$, одержимо

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (-\frac{d}{dt} f'(\hat{x}'(t)) + 2\hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))dt$$

$$+ \sum_j [f'(\hat{x}'(\tau_j + 0)) - f'(\hat{x}'(\tau_j - 0))](x(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j)) = 0,$$

якщо функція $p(t) = f'(\hat{x}'(t))$ неперервна. Таким чином, функція $\hat{x}(\cdot)$, яка задовольняє рівняння Ейлера, умову неперервності $p(\cdot)$ і граничні умови, є розв'язком задачі.

Наприклад, функція $\hat{x}(t) = e^{|t|}$ зі зламом у точці $t = 0$ буде розв'язком задачі при $t_0 = -1$, $t_1 = 1$, $x_0 = x_1 = e$. Тоді $|\hat{x}'(t)| \geq 1$. Отже, функція

$$p(t) = f'(\hat{x}'(t)) = \begin{cases} 2(e^{-t} - 1), & t \geq 0, \\ 2(e^{-t} + 1), & t < 0 \end{cases}$$

стрибка в точці $t = 0$ не має і

$$\frac{d}{dt} p(t) = 2e^{|t|} = 2\hat{x}(t),$$

тому рівняння Ейлера виконується. Δ

8.3. Задача про відбиття екстремалей

Визначити функцію, яка дає екстремум функціоналу

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_2} L(t, x(t), x'(t))dt,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_2) = x_2,$$

за умови, що крива $x(t)$ проходить із точки $A(t_0, x_0)$ в точку $B(t_2, x_2)$ лише після відбиття від заданої лінії $x = \varphi(t)$.

Вважатимемо, що в точці відбиття $C(t_1, x_1)$ шукана крива має злом $x'(t_1 - 0) \neq x'(t_1 + 0)$, а на інтервалах $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ похідна $x'(t)$ неперервна. Запишемо функціонал у вигляді

$$\begin{aligned} J(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt + \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), x'(t))dt \\ &= J_1(x(\cdot)) + J_2(x(\cdot)). \end{aligned}$$

Функція $\hat{x}(\cdot)$, що дає екстремум функціонала задачі, задовольняє рівняння Ейлера. Дійсно, якщо на одному з відрізків $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ розв'язок задачі визначено, і досліджувати задачу на іншому відрізку, то одержимо задачу Лагранжа на множині функцій з фіксованими кінцями, а розв'язок такої задачі задовольняє рівняння Ейлера. Обчислимо варіацію $\delta J(\hat{x}(\cdot))$ за умови, що $\hat{x}(\cdot)$ – екстремаль функціонала $J(x(\cdot)) = J_1(x(\cdot)) + J_2(x(\cdot))$. Точка (t_1, x_1) рухається по кривій $x = \varphi(t)$, а точки (t_0, x_0), (t_2, x_2) – фіксовані. Функціонал $J_1(x(\cdot))$ має фіксовану нижню і рухому верхню границі $x(t_0) = x_0$, $x = \varphi(t)$. Функціонал $J_2(x(\cdot))$ має фіксовану верхню і рухому нижню границі $x = \varphi(t)$, $x(t_2) = x_2$. Варіації $\delta J_1(\hat{x}(\cdot))$, $\delta J_2(\hat{x}(\cdot))$ обчислимо за формулами (7.6), (7.7). Одержимо

$$\begin{aligned} &\delta J_1(\hat{x}(\cdot)) + \delta J_2(\hat{x}(\cdot)) = \delta J(\hat{x}(\cdot)) \\ &= \tau_1[\hat{L}(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}'(t))\hat{L}_{x'}(t)]\,|_{t=t_1-0} \\ &-\tau_1[\hat{L}(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}'(t))\hat{L}_{x'}(t)]\,|_{t=t_1+0} = 0. \end{aligned}$$

Варіація τ_1 міняється довільно, тому в точці відбиття виконується умова

$$\begin{aligned} &[\hat{L}(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}'(t)) \quad \hat{L}_{x'}(t)]\,|_{t=t_1-0} \\ &= \quad [\hat{L}(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}'(t))\hat{L}_{x'}(t)]\,|_{t=t_1+0} \end{aligned}. \qquad (8.8)$$

Вона разом з граничними умовами $\hat{x}(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_2) = x_2$ та умовою $\hat{x}(t_1) = \varphi(t_1)$ дозволяє визначити координату точки відбиття і невідомі константи загального розв'язку рівняння Ейлера.

Приклад 8.5. Визначити точку відбиття променя світла, що йде з точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_2, y_2)$ зі швидкістю $v(x, y)$.

Розв'язок. Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$T = \int_{x_0}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2(x)}}{v(x,y)} dx.$$

Умова відбиття (8.8) у точці (x_1, y_1) має вигляд

$$\frac{1}{v(x_1,y_1)}[\sqrt{1+(y')^2} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1+(y')^2}}]|_{x=x_1-0}$$

$$= \frac{1}{v(x_1,y_1)}[\sqrt{1+(y')^2} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1+(y')^2}}]|_{x=x_1+0},$$

або

$$\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+(y')^2}}|_{x=x_1-0} = \frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+(y')^2}}|_{x=x_1+0}.$$

Позначимо кут між дотичною до кривою $y = \varphi(x)$ та віссю абсцис через α, а кути нахилу лівої й правої дотичної до екстремалі в точці (x_1, y_1) через β_1, β_2. Тоді $y'(x_1 - 0) = tg(\beta_1)$, $y'(x_1 + 0) = tg(\beta_2)$, $\varphi'(x_1) = tg(\alpha)$. Умова відбиття набуває вигляду

$$\frac{1 + tg(\alpha)tg(\beta_1)}{-\sec(\beta_1)} = \frac{1 + tg(\alpha)tg(\beta_2)}{\sec(\beta_2)},$$

а після спрощення $-\cos(\alpha - \beta_1) = \cos(\alpha - \beta_2)$. Це означає, що кут падіння дорівнює куту відбиття. Δ

8.4. Задача про заломлення екстремалей

Припустимо, що підінтегральна функція $L(t, x, x')$ має лінію розриву $x = \varphi(t)$ похідної $x'(t)$ і граничні точки $A(t_0, x_0)$, $B(t_2, x_2)$ лежать по різні боки від лінії розриву. Запишемо функціонал $J(x(\cdot))$ у вигляді

$$\begin{aligned} J(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L_1(t,x(t),x'(t))dt + \int_{t_1}^{t_2} L_2(t,x(t),x'(t))dt \\ &= J_1(x(\cdot)) + J_2(x(\cdot)), \end{aligned}$$

де $L_1(t,x,x') = L(t,x,x')$ з одного боку лінії розриву $x = \varphi(t)$ і $L_2(t,x,x') = L(t,x,x')$ з іншого боку лінії розриву. Якщо існує ламана екстремаль, то вона складається з екстремалей $\hat{x}_1(t)$, $t \in [t_0,t_1]$ і $\hat{x}_2(t)$, $t \in [t_1,t_2]$ функціоналів $J_1(x(\cdot))$ і $J_2(x(\cdot))$, що мають спільну точку на лінії розриву. Функціонали $J_1(x(\cdot))$ і $J_2(x(\cdot))$ мають одну фіксовану і одну рухому границю. Їхні варіації $\delta J_1(\hat{x}(\cdot))$, $\delta J_2(\hat{x}(\cdot))$ обчислимо за формулами (7.6), (7.7). Одержимо

$$\begin{aligned} \delta J(\hat{x}(\cdot)) &= \delta J_1(\hat{x}(\cdot)) + \delta J_2(\hat{x}(\cdot)) \\ &= \tau_1[\hat{L}_1(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}_1'(t))\hat{L}_{1x'}(t)]\,|_{t=t_1-0} \\ &\quad -\tau_1[\hat{L}_2(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}_2'(t))\hat{L}_{2x'}(t)]\,|_{t=t_1+0}\,. \end{aligned}$$

З необхідної умови екстремуму $\delta J(\hat{x}(\cdot)) = 0$ випливає така умова заломлення:

$$\begin{aligned} &[\hat{L}_1(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}_1'(t)) \quad \hat{L}_{1x'}(t)]\,|_{t=t_1-0} \\ &= \quad [\hat{L}_2(t) + (\varphi'(t) - \hat{x}_2'(t))\hat{L}_{2x'}(t)]\,|_{t=t_1+0}\,. \end{aligned} \qquad (8.9)$$

Ця умова разом із двома граничними умовами $\hat{x}_1(t_0) = x_0$, $\hat{x}_2(t_2) = x_2$ і умовами $\hat{x}_1(t_1) = \varphi(t_1)$, $\hat{x}_2(t_1) = \varphi(t_1)$ дозволяє визначити точку заломлення t_1 і невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 розв'язків $\hat{x}_1(\cdot)$, $\hat{x}_2(\cdot)$ рівнянь Ейлера:

$$\begin{aligned} L_{1x}(t) &= \frac{d}{dt}L_{1x'}(t), \quad t \in [t_0,t_1], \\ L_{2x}(t) &= \frac{d}{dt}L_{2x'}(t), \quad t \in [t_1,t_2]. \end{aligned}$$

Приклад 8.6 (задача про заломлення світла). У середовищі I швидкість поширення світла дорівнює $v_1(x,y)$, а в середовищі II швидкість поширення світла дорівнює $v_2(x,y)$. Середовища розділені кривою $y = \varphi(x)$. Знайти умову заломлення світла, що йде з точки $A(x_0,y_0)$ середовища I у точку $B(x_2,y_2)$ середовища II, знаючи, що промінь проходить шлях AB за найменший відрізок часу.

Розв'язок:

Задача зводиться до визначення екстремалей функціонала

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2(x)}}{v_1(x,y)}dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2(x)}}{v_2(x,y)}dx = T_1 + T_2,$$

де функціонали T_1, T_2 визначають час переміщення променя з точки A до лінії розділу і від лінії розділу до точки B. Умова заломлення (8.9) у такому випадку матиме вигляд

$$\frac{1}{v_1(x,y)}\left[\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+(y')^2(x)}}\right]\Bigg|_{x=x_1-0} = \frac{1}{v_2(x,y)}\left[\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+(y')^2(x)}}\right]\Bigg|_{x=x_1+0}.$$

Якщо позначимо $y'(x_1-0)=tg(\beta_1)$, $y'(x_1+0)=tg(\beta_2)$, $\varphi'(x_1)=tg(\alpha)$, то після спрощень одержимо

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)} = \frac{v_1(x,y)}{v_2(x,y)},$$

або

$$\frac{\sin[\pi/2-(\alpha-\beta_1)]}{\sin[\pi/2-(\alpha-\beta_2)]} = \frac{v_1(x,y)}{v_2(x,y)}. \ \Delta$$

Це співвідношення узагальнює відомий *закон заломлення світла*: відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює відношенню швидкостей у середовищах, на границі яких відбувається заломлення. Δ

8.5. Односторонні варіації

У деяких задачах на екстремум допустимі функції не можуть проходити через точки заданої області. Якщо розв'язок $x(\cdot)$ такої задачі не перетинає задану область, то наявність області не впливає на властивість функціонала та його варіації в околі функції $x(\cdot)$. У цьому випадку можна використовувати звичайні прийоми дослідження функціонала на екстремум. Якщо ж функція складається з частин екстремалей, що не потрапили в область заборони, і частини границі заданої області, то на границі області можливі лише односторонні варіації, оскільки в задану область функції не можуть попадати.

Дослідимо на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{8.10}$$

за умови, що

$$x - \varphi(t) \geq 0, \tag{8.11}$$

де $\varphi(t)$ – неперервно диференційовна функція.

Теорема 8.5. *Якщо функція* $\hat{x}(\cdot)$*, що дає екстремум функціонала* (*8.10*) *за умови* (*8.11*)*, складається із частин* $\hat{x}(t) = \hat{x}_k(t)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $\hat{x}(t) = \varphi(t)$, $t \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+2}]$, $k = \overline{0, m-1}$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_{m+1} = t_1$, *то*:

1) функції $\hat{x}_k(t)$ *на відрізках* $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ *задовольняють рівняння Ейлера*

$$L_x(t) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t) = 0;$$

2) у точках з'єднання τ_k, $k = \overline{1, m}$, *виконуються умови*

$$[L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - L(t, \varphi(t), \varphi'(t))$$
$$+(\varphi'(t) - \hat{x}'(t))L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))]\,|_{t=\tau_k} = 0;$$

3) $\varphi'(\tau_k) = \hat{x}'(\tau_k)$ *за умови* $L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \neq 0$ (*екстремаль* $\hat{x}(t)$ *дотикається кривої* $x = \varphi(t)$ *в точці* τ_k).

Доведення. Нехай функція $\hat{x}(\cdot)$, що дає екстремум функціонала задачі, складається із двох частин: $\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t)$, $t \in [t_0, \tau]$, $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [\tau, t_1]$. Запишемо функціонал $J(x(\cdot))$ у вигляді суми

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{\tau} L(t, x(t), x'(t))dt + \int_{\tau}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt$$
$$= J_1(x(\cdot)) + J_2(x(\cdot)).$$

Функціонал $J_1(x(\cdot))$ має рухому праву границю $x(\tau) = \varphi(\tau)$, тому $\hat{x}_1(t)$ задовольняє рівняння Ейлера на відрізку $[t_0, \tau]$, а варіація функціонала J_1 дорівнює $[\hat{L}(\tau) + (\varphi'(x) - \hat{x}'(\tau))\hat{L}_{x'}(\tau)]\tau_1$, де τ_1 – варіація точки τ. Функціонал J_2 також має рухому границю, але функція $\hat{x}(t) = \varphi(t)$, $t \in [\tau, t_1]$ не змінюється. Зі зміною τ змінюється лише нижня границя інтегрування, тому

$$\delta J_2(\hat{x}(\cdot)) = -L(\tau, \varphi(\tau), \varphi'(\tau))\tau_1.$$

Отже, варіація функціонала $J(\hat{x}(\cdot))$ в точці з'єднання τ екстремалі з кривої $x(t) = \varphi(t)$ дорівнює

$$[L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) - L(\tau, \varphi(\tau), \varphi'(\tau)) + (\varphi'(\tau) - \hat{x}'(\tau))L_{x'}(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau))]\tau_1.$$

Користаючись необхідною умовою екстремуму першого порядку, переконуємося в справедливості другого твердження теореми.

Щоб довести третє твердження, використаємо теорему про середнє, враховуючи, що $\hat{x}(\tau) = \varphi(\tau)$. Тоді

$$L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) - L(\tau, \varphi(\tau), \varphi'(\tau)) = (\varphi'(\tau) - \hat{x}'(\tau))L_{x'}(\tau, \hat{x}(\tau), q),$$

де q – середнє значення між $\varphi'(\tau)$ і $\hat{x}'(\tau)$. Умова з'єднання в точці τ матиме вигляд

$$L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) - L(\tau, \varphi(\tau), \varphi'(\tau)) = (\varphi'(\tau) - \hat{x}'(\tau))L_{x'}(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)).$$

Застосуємо ще раз теорему про середнє. Одержимо

$$(\hat{x}' - \varphi')(q - \hat{x}')L_{x'x'}(\tau, \hat{x}, p) = 0,$$

де p – середнє значення між $x'(\tau)$ і q. Якщо $L_{x'x'}(\tau, \hat{x}, p) \neq 0$, то $\varphi'(\tau) = \hat{x}'(\tau)$, а це означає, що функції $\varphi(t)$ і $\hat{x}'(t)$ мають спільну дотичну в точці τ. Третє твердження доведено.

Приклад 8.7. Визначити найкоротший шлях із точки $A(-2,3)$ в точку $B(2,3)$ в області $x \le t^2$.

Розв'язок:

Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (x')^2(t)}\,dt$$

за умов $x(-2) = 3$, $x(2) = 3$, $x \le t^2$. Екстремалями функціонала будуть прямі $x = c_1 + c_2 t$. Друга похідна $L_{x'x'} = [1 + x^2]^{\frac{-3}{2}} \neq 0$, тому шукана екстремаль буде складатися з відрізків AM, NB прямих, дотичних до параболи $x = t^2$, і частини MON параболи $x = t^2$. Позначимо абсциси точок дотику через $-\tau$, τ. У точках дотику ординати і кутові коефіцієнти прямої й дотичної до параболи однакові, тому $c_1 + c_2\tau = \tau^2$, $c_2 = 2\tau$. З іншого боку, дотична проходить через точку $B(2,3)$, тому $c_1 + 2c_2 = 3$. Із трьох рівнянь обчислимо $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $\tau = 1$.

Відповідь: Розв'язок задачі такий:

$$x(t) = \begin{cases} -2t - 1, & -2 \le t \le -1, \\ t^2, & -1 \le t \le 1, \\ 2t - 1, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Задачі

Відшукати ламані екстремалі функціоналів:

8.1. $\int_0^2 (x')^2(1-x')^2 dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(2)=1$.

8.2. $\int_0^4 (x'-1)^2(x'+1)^2 dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(4)=2$.

8.3. $\int_a^b ((x')^2+2tx-x^2)dt \to extr$, $x(a)=c$, $x(b)=d$.

8.4. $\int_{-1}^1 x^2(1-(x')^2)dt \to extr$, $x(-1)=0$, $x(1)=1$.

8.5. $\int_a^b ((x')^4-2(x')^2)dt \to extr$, $x(a)=c$, $x(b)=d$.

8.6. $\int_0^a \sin(x')dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=b$.

8.7. Відшукати функції, на яких може досягати екстремуму функціонал

$$J(x(\cdot))=\int_0^{10}(x')^3 dt, \quad x(0)=0, x(10)=0$$

за умови, що допустимі криві не можуть потрапити всередину кола $(t-5)^2+x^2=9$.

8.8. Серед кривих, що з'єднують точки $A(t_0,x_0)$, $B(t_1,x_1)$, визначити криву, що дає екстремум функціонала

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} x\sqrt{1-x^2(x')^2}\,dt$$

за умов $x\ge 0$, $1-x^2(x')^2\ge 0$.

9. УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

9.1. Друга варіація функціонала. Умова Лежандра

У попередніх розділах методом варіацій виведені необхідні умови екстремуму першого порядку. Ці умови базуються на дослідженні першої варіації функціонала. Нові необхідні умови екстремуму можна одержати, досліджуючи другу варіацію функціонала.

Розглянемо основну задачу варіаційного числення

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr, \qquad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{9.1}$$

за умови, що функція $L(t, x, x')$ два рази неперервно диференційовна за сукупністю аргументів.

Нехай $\hat{x}(\cdot)$ – функція, що дає мінімум функціонала $J(x(\cdot))$ задачі (9.1), а $h(\cdot)$ – допустима варіація аргументу функціонала $J(x(\cdot))$. Функція $h(\cdot)$ належить класу H_0 неперервно диференційовних на відрізку $[t_0, t_1]$ функцій з нульовими граничними умовами. Визначимо функцію $\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot))$ дійсної змінної λ. Тоді другу варіацію функціонала $J(x(\cdot))$ можна обчислити за формулою

$$\varphi''(0) = \delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)).$$

Якщо функція $L(t, x, x')$ неперервна і має неперервні другі похідні

$$L_{xx}(t, x, x'), \quad L_{xx'}(t, x, x'), \quad L_{x'x'}(t, x, x'),$$

то

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} [L_{xx}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))h^2(t) + 2L_{xx'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))h(t)h'(t) + L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))(h')^2(t)]dt,$$

або

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} W(t, h(t), h'(t))dt, \tag{9.2}$$

де

$$\begin{gathered} W(t, h(t), h'(t)) = \hat{L}_{xx}(t)h^2(t) + 2\hat{L}_{xx'}(t)h(t)h'(t) + \hat{L}_{x'x'}(t)(h')^2(t), \\ \hat{L}_{xx}(t) = L_{xx}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)), \qquad \hat{L}_{xx'}(t) = L_{xx'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)), \\ \hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)). \end{gathered} \tag{9.3}$$

Функціонал (9.2) унаслідок необхідної умови другого порядку мінімуму функціонала набуває невід'ємних значень при всіх допустимих варіаціях $h(\cdot) \in H_0$:

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0 \quad \forall h(\cdot) \in H_0. \qquad (9.4)$$

Із цієї нерівності можна вивести таку необхідну умову мінімуму основної задачі варіаційного числення (9.1).

Теорема 9.1 (про умову Лежандра). *Якщо* $\hat{x}(\cdot)$ *– функція, що дає слабкий локальний мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення* (9.1), *то виконується умова Лежандра*

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \qquad (9.5)$$

Доведення. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що теорема невірна і умова (9.5) порушується в деякій точці $\tau \in (t_0, t_1)$. Оскільки функція $L(t, x, x')$ неперервно диференційовна два рази, то функція $\hat{L}_{x'x'}(t)$ неперервна і можна вказати таке $\varepsilon > 0$, що інтервал $\Delta_\varepsilon = (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \subset [t_0, t_1]$ і $\hat{L}_{x'x'}(t) \leq d < 0$, $t \in \Delta_\varepsilon$. Покажемо, що це суперечить умові (9.4). Для цього побудуємо функцію $\tilde{h}(\cdot) \in H_0$:

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{\pi(t - \tau + \varepsilon)}{2\varepsilon}, & t \in \Delta_\varepsilon, \\ 0, & t \notin \Delta_\varepsilon. \end{cases}$$

Похідна такої функції

$$\tilde{h}'(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\varepsilon} \sin \dfrac{\pi(t - \tau + \varepsilon)}{\varepsilon}, & t \in \Delta_\varepsilon, \\ 0, & t \notin \Delta_\varepsilon. \end{cases}$$

Обчислимо $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), \tilde{h}(\cdot))$. Одержимо

$$\begin{aligned} \delta^2 J(\hat{x}(\cdot), \tilde{h}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} W(t, \tilde{h}(t), \tilde{h}'(t)) dt \\ &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} [\hat{L}_{xx}(t) \tilde{h}^2(t) + 2\hat{L}_{xx'}(t) \tilde{h}(t) \tilde{h}'(t) + \hat{L}_{x'x'}(t) (\tilde{h}')^2(t)] dt \\ &\leq a 2\varepsilon + 2b \frac{\pi}{2\varepsilon} 2\varepsilon + d (\frac{\pi}{2\varepsilon})^2 2\varepsilon, \end{aligned}$$

де

$$a = \max_{t \in \Delta_\varepsilon} | \hat{L}_{xx}(t) |, \quad b = \max_{t \in \Delta_\varepsilon} | \hat{L}_{xx'}(t) |.$$

Оскільки функції $\hat{L}_{xx}(t)$, $\hat{L}_{xx'}(t)$ неперервні, то величини a, b скінченні. Тому при $\varepsilon \to 0$ перший і другий доданки в останньому співвідношенні обмежені, а третій доданок прямує до мінус нескінченності, оскільки $d < 0$. Тому існує таке $\varepsilon > 0$, що для функцій $\tilde{h}(\cdot)$ буде виконуватися нерівність $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), \tilde{h}(\cdot)) < 0$, а це суперечить необхідній умові (9.4) мінімуму функціонала $J(x(\cdot))$.

9.2. Умова Якобі

Якщо $\hat{x}(\cdot)$ – функція, що дає мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення, то друга варіація набуває невід'ємних значень за всіх допустимих варіацій $h(\cdot)$:

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0 \quad \forall h(\cdot) \in H_0. \tag{9.6}$$

Означення 9.1. *Спряженою задачею* у варіаційному численні називається задача мінімізації функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$ в класі H_0:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, h(t), h'(t))dt \to \min, \quad h(t_0) = h(t_1) = 0, \tag{9.7}$$

де

$$W(t, h(t), h'(t)) = \hat{L}_{xx}(t)h^2(t) + 2\hat{L}_{xx'}(t)h(t)h'(t) + \hat{L}_{x'x'}(t)(h')^2(t). \tag{9.8}$$

Оскільки виконується умова (9.6) для всіх $h(\cdot)) \in H_0$, то спряжена задача завжди має тривіальний розв'язок: $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h_0(\cdot)) = 0$, $h_0(t) \equiv 0$.

Рівняння Ейлера

$$W_h^{'} - \frac{d}{dt} W'_{h'} = 0 \tag{9.9}$$

функціонала спряженої задачі на мінімум (9.7) називається *рівнянням Якобі* основної задачі варіаційного числення. Враховуючи (9.3), рівняння Якобі при $h(\cdot) \in C^2[t_0, t_1]$ можна записати у вигляді

$$a(t)h''(t) + b(t)h'(t) + c(t)h(t) = 0, \tag{9.10}$$

де

$$a(t) = \hat{L}_{x'x'}(t), \quad b(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t), \quad c(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t) - \hat{L}_{xx}(t).$$

Рівняння Якобі (9.10) – це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Щоб уникнути тривіального розв'язку цього рівняння, визначають такі розв'язки $h(\cdot)$, які задовольняють ненульові початкові умови:

$$h(t_0) = 0, \quad h'(t_0) = 1. \qquad (9.11)$$

Означення 9.2. Точка t^* називається *спряженою точкою* (з точкою t_0), якщо існує нетривіальний розв'язок $h(t)$ рівняння Якобі (9.10) з початковими умовами (9.11) такий, що $h(t_0) = h(t^*) = 0$.

Теорема 9.2 (про умову Якобі). *Якщо $\hat{x}(\cdot)$ – функція, що дає слабкий локальний мінімум функціонала $J(x(\cdot))$ основної задачі варіаційного числення і виконується посилена умова Лежандра*

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1], \qquad (9.12)$$

то на інтервалі (t_0, t_1) не існує точок, спряжених із точкою t_0.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай існує спряжена з точкою t_0 точка $t^* \in (t_0, t_1)$, нехай $h^*(t)$ – відповідний нетривіальний розв'язок рівняння Якобі (9.10), (9.11). Тоді $h^{*\prime}(t^* - 0) \neq 0$. Дійсно, якщо $h^{*\prime}(t^* - 0) = 0$, то за теоремою про існування і єдиність розв'язку лінійного диференціального рівняння одержимо тотожність $h^*(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Побудуємо функцію

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h^*(t), & t \in [t_0, t^*], \\ 0, & t \in [t^*, t_1]. \end{cases}$$

Вона задовольняє рівняння Якобі. Покажемо, що функція $\tilde{h}(\cdot)$ є розв'язком екстремальної задачі (9.7). Функція $W(t, h, h')$ однорідна (другого порядку) відносно змінних h, h'. Із формули Ейлера для однорідних функцій

$$2W(t, h, h') = hW'_h + h'W'_{h'}$$

і рівняння Ейлера (9.10) випливає, що

$$W(t, \tilde{h}, \tilde{h}') = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(W'_{h'})\tilde{h} + W'_{h'}\tilde{h}'\right).$$

Тому

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)) \quad = \int_{t_0}^{t_1} W(t,\tilde{h}(t),\tilde{h}'(t))dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt}(W'_{h'}h^*)dt = \frac{1}{2}W'_{h'}h^* |_{t_0}^{t^*} = 0,$$

оскільки $h^*(t_0) = h^*(t^*) = 0$. Отже, функція $\tilde{h}(\cdot)$ дає мінімум функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))$ спряженої задачі (9.7). Ця функція в точці $t = t^*$ має злом: $\tilde{h}'(t^* - 0) \neq \tilde{h}'(t^* + 0) = 0$. У точці t^* має виконуватись умова Вейєрштрасса – Ердмана

$$W'_{h'} |_{t=t^*-0} = W'_{h'} |_{t=t^*+0},$$

яка має вигляд

$$[2\hat{L}_{xx'}(t)\tilde{h}(t) + 2\hat{L}_{x'x'}(t)\tilde{h}'(t)] |_{t=t^*-0} =$$
$$= \quad [2\hat{L}_{xx'}(t)\tilde{h}(t) + 2\hat{L}_{x'x'}(t)\tilde{h}'(t)] |_{t=t^*+0} .$$

Оскільки $\tilde{h}(t^* - 0) = \tilde{h}(t^* + 0) = 0$, $\tilde{h}'(t^* + 0) = 0$, $\hat{L}_{x'x'}(t^*) > 0$, то з останньої рівності одержимо $\tilde{h}'(t^* - 0) = 0$. Це суперечить тому, що $h^*(\cdot)$ – нетривіальний розв'язок рівняння Якобі (9.10), (9.11). Теорему доведено.

Зауваження. Варіація $\tilde{h}(\cdot)$ на відміну від тих, що використовувалися раніше, нелокальна в тому розумінні, що вона відмінна від нуля на скінченному інтервалі (t_0, t^*). Відповідно, необхідна умова Якобі слабкого мінімуму – це нелокальна умова екстремуму.

9.3. Достатні умови слабкого екстремуму

Прості приклади показують, що жодна з умов (стаціонарності, Лежандра, Якобі) не є достатньою умовою екстремуму функціонала основної задачі варіаційного числення. Проте в сукупності ці умови близькі до достатніх. Сформулюємо систему умов, достатніх для того, щоб допустима функція $x(\cdot)$ давала слабкий екстремум функціонала основної задачі варіаційного числення

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \qquad (9.13)$$

Теорема 9.3 (достатні умови слабкого мінімуму). *Допустима функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення (9.13), якщо вона задовольняє:*

1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) = 0;$$

2) граничні умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1;$$

3) посилену умову Лежандра

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1];$$

4) посилену умова Якобі (на інтервалі $(t_0, t_1]$ не існує спряжених із точкою t_0 точок t^*).

Зауваження. Аналогічну теорему можна сформулювати і для слабкого максимуму, замінивши на протилежний знак нерівності в посиленій умові Лежандра.

Доведення. Розглянемо другу варіацію функціонала (9.13)

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [\hat{L}_{xx}(t)h^2(t) + 2\hat{L}_{xx'}(t)h(t)h'(t) + \hat{L}_{x'x'}(t)(h')^2(t)]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [[\hat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t)]h^2(t) + \hat{L}_{x'x'}(t)(h')^2(t)]dt.$$

Віднімемо від другої варіації вираз

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[\frac{u'(t)}{u(t)}\hat{L}_{x'x'}h^2(t)\right]dt = \frac{u'(t)}{u(t)}\hat{L}_{x'x'}h^2(t)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0,$$

де $u(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, $u(\cdot) \in C^2[t_0, t_1]$ – довільна функція. Одержимо

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{\left[\hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{u'}{u}\hat{L}_{x'x'}\right)\right]h^2(t)\right.$$

$$\left. - 2\left[\frac{u'}{u}\hat{L}_{x'x'}\right]hh' + [\hat{L}_{x'x'}](h')^2\right\}dt.$$

Виберемо тепер функцію $u(\cdot)$ так, щоб під інтегралом був повний квадрат відносно h, h'. Для цього необхідно, щоб виконувалася тотожність

$$[\frac{u'}{u}\hat{L}_{x'x'}]^2 = [\hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'} - \frac{d}{dt}(\frac{u'}{u}\hat{L}_{x'x'})][\hat{L}_{x'x'}]. \tag{9.14}$$

Оскільки

$$\frac{d}{dt}[\frac{u'}{u}\hat{L}_{x'x'}] = \frac{u''u-(u')^2}{u^2}\hat{L}_{x'x'} + \frac{u'}{u}\frac{d}{dt}[\hat{L}_{x'x'}],$$

то зазначена тотожність має вид

$$[u''\hat{L}_{x'x'} + u'\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'} - u(\hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'})]\hat{L}_{x'x'}u^{-1} = 0.$$

Враховуючи, що виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$, останнє рівняння можна записати так:

$$(a(t)u'' + b(t)u' + c(t)u)u^{-1} = 0.$$

За умови 4) рівняння Якобі

$$a(t)u'' + b(t)u' + c(t)u = 0 \qquad (9.15)$$

не має нетривіальних розв'язків $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для яких $u(t_0) = 0$, $u(t^*) = 0$, $t^* \in (t_0, t_1]$. Із компактності множини $[t_0, t_1]$ й неперервної залежності розв'язків диференціальних рівнянь від початкових умов випливає існування такого $\varepsilon > 0$, що розв'язок рівняння (9.15) з початковими умовами $u(t_0 - \varepsilon) = 0$, $u'(t_0 - \varepsilon) = 1$ додатний на $[t_0, t_1]$. Таким чином, функція $u(\cdot): u(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, $u(\cdot) \in C^2[t_0, t_1]$, що задовольняє тотожності (9.14), існує. Вона дозволяє записати функціонал $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$ у вигляді

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} [[\hat{L}_{x'x'}]^{\frac{1}{2}} h' - [\hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'} - \frac{d}{dt}(\hat{L}_{x'x'}u'u)]^{\frac{1}{2}} h]^2 dt.$$

Звідси $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0$ для всіх допустимих варіацій $h(\cdot)$. Якщо допустити, що $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = 0$ при $\tilde{h}(t) \not\equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$, то внаслідок рівності нулю виразу під інтегралом з умов $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, $\tilde{h}(t_0) = 0$ буде випливати рівність $\tilde{h}'(t_0) = 0$. Функція $\tilde{h}(\cdot)$ дає мінімум функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$. Тому вона має задовольняти рівняння Якобі, яке при $\tilde{h}(t_0) = \tilde{h}'(t_0) = 0$ має єдиний розв'язок $\tilde{h}(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Отримана суперечність показує, що $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) > 0$ при $h(t) \not\equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо функціонал

$$\Phi(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) - q\int_{t_0}^{t_1} (h')^2(t)dt, \quad q > 0.$$

Рівняння Ейлера має вигляд

$$(a(t)-q)h''(t)+b(t)h'(t)+c(t)h(t)=0. \tag{9.16}$$

Оскільки $a(t)=\hat{L}_{x'x'}(t)>0$, $t\in[t_0,t_1]$ і функція $\hat{L}_{x'x'}(t)$ неперервна, то існує таке $q>0$, що $a(t)-q>0$, $t\in[t_0,t_1]$. З умови 4) теореми випливає, що рівняння Якобі

$$a(t)h''(t)+b(t)h'(t)+c(t)h(t)=0$$

з початковими умовами $h(t_0)=0$, $h'(t_0)=1$ не перетворюється в нуль на відрізку $(t_0,t_1]$. Через неперервну залежність розв'язків диференціального рівняння від параметра такі ж властивості буде мати і розв'язок рівняння (9.16) з тими ж початковими умовами.

Функціонал $\Phi(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))$ задовольняє нерівності $\Phi(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))\geq 0$ для всіх допустимих варіацій $h(t)$, $[t_0,t_1]$. Отже, друга варіація $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))$ для всіх допустимих $h(\cdot)$ задовольняє умову

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))\geq q\int_{t_0}^{t_1}(h')^2(t)dt. \tag{9.17}$$

Оскільки $h(t)=\int_{t_0}^{t}h'(s)ds$, то, використавши нерівність Коші – Буняковського, одержимо

$$h^2(t)=(\int_{t_0}^{t}h'(s)ds)^2\leq (t-t_0)\int_{t_0}^{t}(h')^2(s)ds\leq (t-t_0)\int_{t_0}^{t_1}(h')^2(s)ds,$$

звідки

$$\int_{t_0}^{t_1}h^2(t)dt\leq\frac{(t_1-t_0)^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}(h')^2(t)dt.$$

За означенням другої варіації

$$J(\hat{x}(\cdot)+\lambda h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))$$
$$=\lambda\delta J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))+\frac{\lambda^2}{2}\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))+o(\lambda^2\|h\|^2).$$

Величину $o(\lambda^2\|h\|^2)$ можна записати у вигляді

$$o(\lambda^2\|h\|^2)=\lambda^2\int_{t_0}^{t_1}(\alpha_1 h^2(t)+\alpha_2 h(t)h'(t)+\alpha_3(h')^2(t))dt,$$

де $|\alpha_k(t)|\to 0$, $k=1,2,3$, при $\lambda\to 0$ рівномірно по $t\in[t_0,t_1]$. Проінтегруємо частинами другий доданок. Одержимо

$$o(\lambda^2\|h\|^2)=\lambda^2\int_{t_0}^{t_1}(\alpha h^2(t)+\beta(h')^2(t))dt,$$

де $|\alpha|=|\alpha(t)|\to 0$, $|\beta|=|\beta(t)|\to 0$ при $\lambda\to 0$ рівномірно по $t\in[t_0,t_1]$. Якщо $\|h(\cdot)\|_1\le a_0$, то існує таке $\lambda_0>0$, що при $0\le\lambda\le\lambda_0$ виконується нерівність $|\alpha|<\varepsilon$, $|\beta|<\varepsilon$, де $\varepsilon=q(4+2(t_1-t_0)^2)^{-1}$. Звідси

$$|o(\lambda^2\|h\|^2)|<\lambda^2\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}(h^2(t)+(h')^2(t))dt<\frac{\lambda^2 q}{4}\int_{t_0}^{t_1}(h')2(t)dt.$$

Тому

$$J(\hat{x}(\cdot)+\lambda h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))\ge\frac{\lambda^2 q}{4}\int_{t_0}^{t_1}(h')^2(t)dt>0.$$

Теорему доведено.

Приклад 9.1. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot))=\int_0^a((x')^2-x^2)dt\to extr,\quad x(0)=0,\quad x(a)=0.$$

Розв'язок:

1. Запишемо рівняння Ейлера: $x''+x=0$. Загальний розв'язок рівняння такий: $x(t)=C_1\sin(t)+C_2\cos(t)$. Із граничних умов одержимо $C_2=0$, $C_1\sin(a)=0$. Отже, екстремаллю задачі буде функція $\hat{x}(t)=C_1\sin(t)$, де C_1 визначається з умови $C_1\sin(a)=0$.

2. Рівняння Якобі $h''+h=0$ не залежить від виду екстремалі. Нетривіальний розв'язок рівняння, що задовольняє умову $h(0)=0$, має вигляд $h(t)=A\sin(t)$, $A\ne 0$. Отже, умова Якобі виконується, якщо $0<a\le\pi$, а при $0<a<\pi$ виконується посилена умова Якобі. Якщо $a>\pi$, то на відрізку $(0,a]$ існує спряжена з точкою t_0 точка t^*, тобто умова Якобі не виконується.

3. Оскільки $L_{x'x'}=2>0$, то кожна екстремаль неособлива і виконується посилена умова Лежандра.

Відповідь. Якщо $0<a<\pi$, то екстремаль $\hat{x}(t)=0$ дає слабкий мінімум функціонала задачі. Якщо $a>\pi$, то задача не має розв'язків. При $a=\pi$ допустимі екстремалі мають вигляд $\hat{x}(t)=C\sin(t)$, $J(\hat{x}(\cdot))=0$. Δ

9.4. Необхідні й достатні умови слабкого екстремуму функціонала, що залежить від вектор-функцій

Спряжену точку, умову Якобі, умову Лежандра можна визначити для функціоналів, що залежать від векторнозначних функцій. Нехай функціонал $J(\overline{x}(\cdot))$ має вигляд

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \overline{x}(t), \overline{x'}(t))dt \to extr, \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \overline{x}(t_1) = \overline{x}_1, \tag{9.18}$$

де $\overline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $\overline{x}'(t) = (x_{1'}(t), \ldots, x_{n'}(t))$. Функція $\overline{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, а функція $L : R \times R^n \times R^n \to R$ неперервна і має неперервні другі похідні:

$$L_{xx} = \{L_{x_k x_j}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}},$$

$$L_{xx'} = \{L_{x_k x_j'}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}},$$

$$L_{x'x'} = \{L_{x_k' x_j'}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Обчислимо другу варіацію функціонала $J(\overline{x}(\cdot))$ в тому випадку, коли допустима функція $\overline{h}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, $h(t_0) = h(t_1) = 0$:

$$\delta^2 J(\overline{x}(\cdot), \overline{h}(\cdot)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [\sum_{k,j=1}^{n} L_{x_k x_j} h_k h_j + 2 \sum_{k,j=1}^{n} L_{x_k x_j'} h_k h_j' + \sum_{k,j=1}^{n} L_{x_k' x_j'} h_k' h_j']dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [\langle L_{x'x'} h'; h' \rangle + 2\langle L_{xx'} h; h' \rangle + \langle L_{xx} h; h \rangle]dt.$$

Проінтегрувавши частинами другий доданок, одержимо такий квадратичний функціонал:

$$\delta^2 J(\overline{x}(\cdot), \overline{h}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} [\langle L_{x'x'} h'; h' \rangle + \langle (L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{xx'})h; h \rangle]dt.$$

Якщо $\hat{x}(\cdot)$ – допустима вектор-функція, що дає слабкий мінімум функціонала задачі (9.18), то необхідно, щоб $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0$ для всіх допустимих функцій $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, $h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Означення 9.3. Допустима функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ задовольняє *умову Лежандра*, якщо

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

тобто матриця $\hat{L}_{x'x'}(t)$ невід'ємно визначена:

$$\langle \hat{L}_{x'x'}(t)h(t); h(t)\rangle \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1]$$

для всіх допустимих функцій $h(\cdot)$.

Теорема 9.4 (про необхідну умову Лежандра). *Якщо функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ *дає слабкий мінімум функціонала задачі* (*9.18*), *то виконується умова Лежандра.*

Зауваження. Щоб записати необхідну умову слабкого максимуму, необхідно знак нерівності в умові Лежандра поміняти на протилежний.

Доведення. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий мінімум функціонала задачі (9.18), але умова Лежандра не виконується. Це означає, що існують точка $\tau \in [t_0, t_1]$ і вектор u_0 такі, що $\langle \hat{L}_{x'x'}(\tau)u_0; u_0\rangle < 0$. Через неперервність функції $\hat{L}_{x'x'}(t)$ існує такий окіл $\Delta_\varepsilon = (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \subset (t_0, t_1)$ точки τ, що

$$\langle \hat{L}_{x'x'}(t)u_0; u_0\rangle \leq d < 0$$

при $t \in \Delta_\varepsilon$. Побудуємо функцію:

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} u_0 \sin^2 \dfrac{\pi(t - \tau + \varepsilon)}{2\varepsilon}, & t \in \Delta_\varepsilon, \\ 0, & t \notin \Delta_\varepsilon. \end{cases}$$

$$\tilde{h}'(t) = \begin{cases} u_0 \dfrac{\pi}{2\varepsilon} \sin \dfrac{\pi(t - \tau + \varepsilon)}{2\varepsilon}, & t \in \Delta_\varepsilon, \\ 0, & t \notin \Delta_\varepsilon. \end{cases}$$

При такому виборі функції $\tilde{h}(\cdot)$ оцінимо функціонал

$$\begin{aligned} \delta^2 J(\hat{x}(\cdot), \tilde{h}(\cdot)) &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \langle L_{x'x'}(t)\tilde{h}'(t), \tilde{h}'(t)\rangle dt \\ &+ \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \langle (\hat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t))\tilde{h}(t); \tilde{h}(t)\rangle dt \\ &\leq \frac{\pi^2}{2\varepsilon} d + 2\varepsilon a, \end{aligned}$$

де

$$a = \sup_{t \in \Delta_\varepsilon} |\langle (\hat{L}_{xx}(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t))u_0; u_0\rangle|.$$

Оскільки матричні функції $\hat{L}_{xx}(t)$, $\frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t)$ неперервні, то величина a скінченна. При $\varepsilon \to 0$ другий доданок прямує до нуля, а перший – до $-\infty$, оскільки $d < 0$. Тому існує таке $\varepsilon > 0$, що для функцій $\tilde{h}(\cdot)$ буде виконуватися нерівність $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), \tilde{h}(\cdot)) < 0$, а це суперечить необхідній умові мінімуму функціонала $J(x(\cdot))$. Теорему доведено. □

Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ дає локальний мінімум функціонала задачі (9.18), то внаслідок необхідної умови другого порядку

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0$$

для всіх допустимих векторів-функцій $h(\cdot)$.

Означення 9.4. Задача на мінімум функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$ у класі допустимих функцій $h(\cdot)$ називається *спряженою задачею*. Рівняння Ейлера такого функціонала називається *рівнянням Якобі*. Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$A(t)h''(t) + B(t)h'(t) + C(t)h(t) = 0 \quad (9.19)$$

з матричними коефіцієнтами

$$A(t) = \hat{L}_{x'x'}(t), \quad B(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t), \quad C(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x}(t) - \hat{L}_{xx}(t).$$

Щоб уникнути тривіального розв'язку, визначають такі матричні розв'язки $H(t, t_0)$ рівняння (9.19), які задовольняють умови:

1) $H(t_0, t_0) = 0$,
2) $H'(t_0, t_0)$ – невироджена матриця.

Ці умови виконуються, якщо

$$H(t_0, t_0) = 0, \quad H'(t_0, t_0) = I, \qquad (9.20)$$

Означення 9.5. Точка t^* називається *спряженою точкою* (з точкою t_0), якщо існує такий нетривіальний розв'язок $H(t, t_0)$ рівняння Якобі (9.19) з початковими умовами (9.20), що матриця $H(t^*, t_0)$ вироджена.

Означення 9.6. Допустима функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ задовольняє *посилену умову Лежандра*, якщо для всіх допустимих варіацій $h(\cdot)$ функції $\hat{x}(\cdot)$

$$\langle \hat{L}_{x'x'}(t)h(t); h(t)\rangle > 0 \quad \forall \quad t \in [t_0, t_1].$$

Теорема 9.5 (про необхідну умову Якобі). *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі (9.18) і виконується посилена умова Лежандра, то на інтервалі (t_0, t_1) не існує спряжених із точкою t_0 точок.*

Доведення. Нехай існує спряжена точка $t^* \in (t_0, t_1)$ і $\det H(t^*, t_0) = 0$. Тоді існує лінійна комбінація $h^*(t)$ розв'язків – рядків матриці $H(t, t_0)$, що не дорівнює нулю тотожно і дорівнює нулю при $t = t^*$. Тому існує нетривіальний розв'язок $h^*(t)$ рівняння Якобі, що перетворюється в нуль при $t = t^*$. Побудуємо функцію

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h^*(t), & t \in [t_0, t^*], \\ 0, & t \in [t^*, t_1]. \end{cases}$$

Ця функція задовольняє рівняння Якобі

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{x'x'}h' + \hat{L}_{x'x}h) + \hat{L}_{xx'}h' + \hat{L}_{xx}h = 0.$$

Тому

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), \tilde{h}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle \hat{L}_{x'x'}h'; h'\rangle + 2\langle \hat{L}_{xx'}h'; h\rangle + \langle \hat{L}_{xx}h; h\rangle)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \langle -\frac{d}{dt}(\hat{L}_{x'x'}h' + \hat{L}_{x'x}h) + \hat{L}_{xx'}h' + \hat{L}_{xx}h; h\rangle dt = 0.$$

А це означає, що $\tilde{h}(\cdot)$ дає мінімум функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$ спряженої задачі. Функція $\tilde{h}(t)$ у точці $t = t^*$ має злом: $\tilde{h}'(t^* - 0) \neq \tilde{h}'(t^* + 0)$. У точці злому має виконуватися умова Вейєрштрасса – Ердмана:

$$(\hat{L}_{x'x'}(t)\tilde{h}'(t) + \hat{L}_{xx'}(t)\tilde{h}(t))\big|_{t=t^*-0} = (\hat{L}_{x'x'}(t)\tilde{h}'(t) + \hat{L}_{xx'}(t)\tilde{h}(t))\big|_{t=t^*+0}.$$

Оскільки $\tilde{h}(t^* - 0) = \tilde{h}(t^* + 0) = 0$, а матриця $\hat{L}_{x'x'}(t^*)$ має обернену, то $h'(t^* + 0) = \tilde{h}'(t^* - 0)$. Це суперечить тому, що $h^*(t)$ – нетривіальний розв'язок рівняння Якобі. Теорему доведено. □

Означення 9.7. Допустима функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє *посилену умову Якобі*, якщо на інтервалі $(t_o, t_1]$ не існує спряжених точок.

Теорема 9.6. (про достатні умови слабкого локального мінімуму). *Допустима функція дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі* (9.18), *якщо вона задовольняє*:

1) рівняння Ейлера;

2) граничні умови;

3) посилену умову Лежандра;

4) посилену умова Якобі.

Доведення. Нехай $W(t)$ – диференційовна самоспряжена матриця. Тоді

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\langle Wh;h\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1}\langle W'h;h\rangle dt + 2\int_{t_0}^{t_1}\langle Wh;h'\rangle dt$$

для будь-якої допустимої функції $h(\cdot)$, що задовольняє нульові граничні умови. Додамо такий вираз до другої варіації функціонала. Одержимо

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),\hat{h}(\cdot)) \quad = \int_{t_0}^{t_1}(\langle \hat{L}_{x'x'}h';h'\rangle + \langle(\hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'})h;h\rangle$$
$$+ 2\langle Wh;h'\rangle + \langle W'h;h\rangle)dt.$$

Підберемо матрицю $W(t)$ так, щоб вираз під інтегралом став повним квадратом. Для цього достатньо, щоб матриця $W(t)$ задовольняла рівняння

$$W' - W\hat{L}_{x'x'}^{-1}W + \hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'} = 0.$$

Дійсно, вираз під інтегралом можна подати у вигляді

$$\langle \hat{L}_{x'x'}h';h'\rangle + 2\langle Wh;h'\rangle + \langle W\hat{L}_{x'x'}^{-1}Wh;h\rangle,$$

тобто

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),\hat{h}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}\langle \hat{L}_{x'x'}^{\frac{1}{2}}h' + \hat{L}_{x'x'}^{-\frac{1}{2}}Wh;\hat{L}_{x'x'}^{\frac{1}{2}}h' + \hat{L}_{x'x'}^{-\frac{1}{2}}Wh\rangle dt.$$

Так само як і для скалярних функцій, можна показати, що

$$\hat{L}_{x'x'}^{\frac{1}{2}}h' + \hat{L}_{x'x'}^{-\frac{1}{2}}Wh$$

не може бути тотожним нулем, якщо $h \not\equiv 0$. Тому функціонал $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),\hat{h}(\cdot))$ додатно визначений. Якщо інтервал $(t_0,t_1]$ не містить спряжених точок, то в рівнянні

$$W' - W\hat{L}_{x'x'}^{-1}W + \hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'} = 0$$

можна зробити заміну $W = \hat{L}_{x'x'}V'V^{-1}$. Тоді

$$-(\hat{L}_{x'x'}V)' + (\hat{L}_{xx} - \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'})V = 0.$$

А це матрична форма рівняння Якобі. Якщо $V(t)$ – розв'язок рівняння з початковими умовами $V(t_0)=0$, $V'(t_0)=I$ і виконується посилена умова Якобі, то існує $V^{-1}(t)$, $t\in(t_0,t_1]$, і можна визначити матрицю $W(t)$, за допомогою якої вираз під знаком інтеграла в $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),\hat{h}(\cdot))$ перетворюється в суму квадратів. Це означає додатну визначеність функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),\hat{h}(\cdot))$. Завершується доведення теореми аналогічно відповідній теоремі для скалярних функцій. □

Зауваження. Достатні умови слабкого локального максимуму одержимо, якщо в умові Лежандра поміняємо знак нерівності на протилежний.

Приклад 9.2. Дослідити на екстремум функціонал:

$$\int_0^{T_0}((x_1')^2+(x_2')^2+2x_1x_2)dt\to extr,$$

$$x_i(0)=x_{i0},\quad x_i(T_0)=x_{i1},\quad i=1,2.$$

Розв'язок:

1. Система рівнянь Ейлера має вид $x_1''=x_2$, $x_2''=x_1$, звідки $x_1^{(4)}=x_1$, $x_2^{(4)}=x_2$. Загальний розв'язок системи рівнянь Ейлера такий:

$$x_1(t)=C_1(t)+C_2(t)+C_3\sin(t)+C_4\cos(t),$$

$$x_2(t)=C_1(t)+C_2(t)-C_3\sin(t)-C_4\cos(t).$$

Граничні умови дозволяють визначити невідомі C_1, C_2, C_3, C_4.

2. Умова Лежандра виконується внаслідок того, що матриця $A(t)=L_{x'x'}(t)=I$ одинична.

3. Система рівнянь Якобі збігається із системою рівнянь Ейлера. Побудуємо такий матричний розв'язок системи:

$$H(t,0)=\begin{bmatrix} sh(t) & \sin(t)\\ sh(t) & -\sin(t)\end{bmatrix},\quad \det H'(0,0)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\det H(t,0)=-2sh(t)\sin(t).$$

Отже, спряжені точки мають вигляд: $t^*=\pi k$, $k\in N$.

Відповідь. При $T_0<\pi$ існує єдина екстремаль, що дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі. При $T_0>\pi$ задача розв'язків не має. Якщо $T_0=\pi$, то необхідно додаткове дослідження. Δ

9.5. Умова Вейєрштрасса. Голкові варіації

Задачу на сильний екстремум у варіаційному численні вперше досліджував Вейєрштрасс. Щоб довести необхідну умова сильного мінімуму, він використовував спеціальні варіації допустимих функцій:

$$h_\lambda(t)=\begin{cases}\xi\lambda+(t-\tau)\xi, & t\in[\tau-\lambda,\tau],\\ \xi\lambda-(t-\tau)\sqrt{\lambda}\xi, & t\in[\tau,\tau+\sqrt{\lambda}],\\ 0, & t\notin[\tau-\lambda,\tau+\sqrt{\lambda}].\end{cases}\qquad(9.21)$$

Похідна варіації $h_\lambda(t)$ деякою мірою нагадує голку (рис. 9.1), тому такі варіації називають *голковими*.

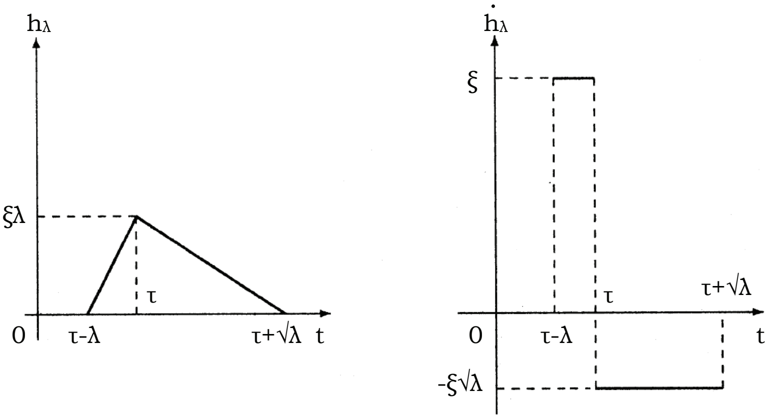

Рис. 9.1

Перейдемо до виведення необхідної умови Вейєрштрасса. Розглянемо основну задачу варіаційного числення:

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))dt\to extr,\quad x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1\qquad(9.22)$$

у класі $KC^1[t_0,t_1]$ кусково-гладких функцій. Нехай $\hat{x}(\cdot)$ – екстремаль, що досліджується на сильний мінімум. Будемо вважати, що функція $\hat{x}(\cdot)$ гладка. Відповідно до методу варіацій побудуємо функцію

$$\varphi(\lambda)=J(x_\lambda(\cdot))=J(\hat{x}(\cdot)+h_\lambda(\cdot)),$$

де $h_\lambda(\cdot)$ – функція, що задається формулами (9.21), τ – внутрішня точка відрізка $[t_0,t_1]$, ξ – довільне число. При досить малих $\lambda\ge 0$ функція $x_\lambda(\cdot)=\hat{x}(\cdot)+h_\lambda(\cdot)$ буде допустимою в задачі (9.22) і $x_\lambda(t_0)=x_0$,

$x_\lambda(t_1)=x_1$. Функція $\varphi(\lambda)$ визначена для невід'ємних λ. Покажемо, що вона диференційовна справа в точці $\lambda=0$:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)-\varphi(0)&=\int_{\tau-\lambda}^{\tau}[L(t,x_\lambda(t),\hat{x}'(t)+\xi)-L(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))]dt+\\ &+\int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}}[L(t,x_\lambda(t),x_\lambda'(t))-L(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))]dt=J_1+J_2.\end{aligned} \tag{9.23}$$

При $\lambda\to 0$ можна оцінити перший інтеграл у (9.23) так:

$$J_1=\lambda[L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)+\xi)-L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau))]+o(\lambda). \tag{9.24}$$

При оцінюванні ми використали теорему про середнє й умову $\|h_\lambda(\cdot)\|_0=O(\lambda)$. Для оцінки другого інтеграла J_2 різницю

$$\Delta=L(t,\hat{x}(t)+h_\lambda(t),\hat{x}'(t)+h_\lambda'(t))-L(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$$

запишемо у вигляді

$$\Delta=L_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))h_\lambda(t)+L_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))h_\lambda'(t)+o(\sqrt{\lambda}).$$

Тут також використали теорему про середнє й оцінку

$$|\,h_\lambda'(t)\,|=\xi\sqrt{\lambda}=O(\sqrt{\lambda}),\quad t\in[\tau,\tau+\sqrt{\lambda}].$$

Проінтегруємо частинами другий доданок під знаком інтеграла в J_2 і використаємо те, що $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера

$$L_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))=\frac{d}{dt}L_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)).$$

Тоді

$$\begin{aligned}J_2&=-\xi\lambda L_{x'}(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau))+\int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}}o(\sqrt{\lambda})dt=\\ &=-\xi\lambda L_{x'}(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau))+o(\lambda).\end{aligned} \tag{9.25}$$

Використовуючи (9.23)–(9.25), одержимо

$$\begin{aligned}\varphi'(+0)&=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda}=\\ &=L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)+\xi)-L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau))-\xi L_{x'}'(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)).\end{aligned}$$

Якщо $\hat{x}(\cdot)$ – функція, на якій досягає мінімуму функціонал $J(x(\cdot))$ задачі (9.22), то $J(x_\lambda(\cdot))\ge J(\hat{x}(\cdot))$, звідки

$$\varphi'(+0)=\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda}\ge 0,$$

тобто виконується *умова Вейерштрасса*:

$$\begin{aligned}&E(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)\hat{x}'(\tau)+\xi)=\\ &=\quad L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)+\xi)-L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau))-\xi L_{x'}(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau))\ge 0\end{aligned} \tag{9.26}$$

для всіх $\xi\in R$ і $\tau\in[t_0,t_1]$.

Означення 9.8. Функція

$$E(t,x,y,z)=L(t,x,z)-L(t,x,y)-(z-y)L_y(t,x,y)$$

називається *функцією Вейєрштрасса.*

Ми довели таку теорему.

Теорема 9.7 (про умову Вейєрштрасса сильного мінімуму). *Якщо $\hat{x}(\cdot)$ – функція, що дає сильний локальний мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення (9.22), то для всіх $\xi \in R$ і $\tau \in [t_0,t_1]$ виконується нерівність (9.26).*

Означення 9.9. Інтегрант $L=L(t,x,x')$ називається *квазірегулярним* (*регулярним*) в області $V \subset R^2$, якщо функція $x' \to L(t,x,x')$ опукла (строго опукла) для всіх $(t,x)\in V$.

Квазірегулярність (регулярність) інтегранта $L=L(t,x,x')$ в області V рівносильна тому, що функція Вейєрштрасса $E(t,x,x',u)\ge 0$ $(E(t,x,x',u)>0, x'\neq u)$ для всіх $(t,x)\in V$ та всіх $(u,x')\in R^2$.

Теорема 9.8 (про достатні умови сильного мінімуму основної задачі варіаційного числення). *Нехай $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1])$ – допустима екстремаль основної задачі варіаційного числення (9.22), інтегрант $L\in C^4(V\times R)$ – квазірегулярний в області V, де V – деякий окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t)) \mid t_0\le t\le t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє посилені умови Лежандра й Якобі, то $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний локальний мінімум основної задачі варіаційного числення.*

Зауваження. Достатні умови сильного максимуму одержимо, помінявши знак нерівності на протилежний в умовах Лежандра і Вейєрштрасса.

Приклад 9.3. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot))=\int_0^a (x')^3(t)dt \to extr,$$

$$x(0)=0, \quad x(a)=b, \quad a>0, \quad b>0.$$

Розв'язок:

1. Екстремалями функціонала є прямі лінії $\hat{x}(t)=C_1t+C_2$. Із граничних умов випливає, що екстремум може досягатися лише на прямій $\hat{x}(t)=pt$, $p=b/a$, де p – тангенс кута нахилу прямої до осі OX.

2. Перевіримо умову Якобі. Складемо рівняння Якобі

$$a(t)h''(t)+b(t)h'(t)+c(t)h(t)=0,$$

де

$$a(t) = \hat{L}_{x'x'}(t) = 6\hat{x}'(t) = 6p > 0,$$

$$b(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t) = 6\hat{x}''(t) = 0,$$

$$c(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t) - \hat{L}_{xx}(t) = 0.$$

Отже, рівняння Якобі має вигляд $6ph''(t) = 0$ або $h'' = 0$. Його загальний розв'язок $h(t) = At + B$. Нетривіальний розв'язок, що проходить через точку $(0,0)$, такий: $h(t) = At$, $A \neq 0$. Ця функція перетворюється в нуль у точці $t = 0$ і більше нулів не має, тому умова Якобі виконується для всіх $a > 0$, $b > 0$.

3. Посилена умова Лежандра виконується тому, що $\hat{L}_{x'x'}(t) = 6\hat{x}'(t)$ $= 6p > 0$. Отже, на екстремалі $\hat{x}(t) = pt$ досягається слабкий локальний мінімум функціонала задачі.

4. Обчислимо функцію Вейєрштрасса

$$E(t, \hat{x}, \hat{x}', \xi) = (p + \xi)^3 - p^3 - \xi 3p^2 = \xi^2(\xi + 3p).$$

Ця функція не зберігає знак для всіх $\xi \in R$. Умова Вейєрштрасса не виконується.

Відповідь: Екстремаль $\hat{x}(t) = pt$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі. Сильний мінімум не досягається. Δ

Приклад 9.4. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^a (6(x')^2(t) - (x')^4(t) + x(t)x'(t))dt \to extr,$$

$$x(0) = 0, \quad x(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Розв'язок:

1. Екстремалями функціонала є прямі лінії $x(t) = C_1 t + C_2$. Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x}(t) = pt$, де $p = b/a$.

2. Рівняння Якобі $12(1 - p^2)h'' = 0$ має нетривіальний розв'язок $h(t) = At$, $A \neq 0$, що проходить через точку $(0,0)$. Функція $h = At$ не дорівнює нулю при $t > 0$. Спряжених точок немає. Виконується посилена умова Якобі.

3. Перевіримо умову Лежандра. Оскільки $\hat{L}_{x'x'}(t) = 12(1 - p^2)$, то екстремаль $\hat{x}(t) = pt$ дає слабкий мінімум, якщо $p < 1$, а при $p > 1$ екстремаль дає слабкий максимум.

4. Обчислимо функцію Вейєрштрасса

$$E(t,\hat{x},\hat{x}',\xi) = 6(\xi+p)^2-(\xi+p)^4+p(\xi+p)t-6p^2+p^4$$
$$-p^2t-\xi(12p-4p^3+pt)$$
$$=-\xi^2((\xi+p)^2+2p(\xi+p)-(6-3p^2)).$$

Знак функції $E(t,\hat{x},\hat{x}',\xi)$ протилежний знаку останнього множника. При $6-2p^2\le 0$, чи $p\ge\sqrt{3}$ квадратичний вираз додатний для всіх $\xi\in R$. Тому при $p\ge\sqrt{3}$ досягається сильний максимум. Якщо ж $p<\sqrt{3}$, то квадратичний вираз може змінювати знак.

Відповідь. При куті нахилу прямої $\hat{x}(t)=pt$ від 0 до $\pi/4$ екстремаль $\hat{x}(t)=pt$ дає слабкий мінімум функціонала задачі. Якщо кут нахилу прямої від $\pi/4$ до $\pi/3$, то екстремаль $\hat{x}(t)=pt$ дає слабкий максимум функціонала, а при куті нахилу від $\pi/3$ до $\pi/2$ екстремаль $\hat{x}(t)=pt$ дає сильний максимум функціонала задачі. Δ

9.6. Умови другого порядку в задачі Больца

Дослідимо на екстремум функціонал задачі

$$B(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))dt+l(x(t_0),x(t_1))\to\inf \qquad (9.27)$$

у просторі $C^1([t_0,t_1],R^n)$.

Теорема 9.9 (про необхідні умови слабкого локального мінімуму в задачі Больца). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$ дає слабкий локальний мінімум у задачі Больца (9.27), інтегрант $L(t,x,x')\in C^3(U)$, де U – окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))\,|\,t_0\le t\le t_1\}\subset R^{2n+1}$, термінант $l(x_0,x_1)\in C^2(V)$, де V – окіл точки $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))\in R^{2n}$. Тоді виконуються:*

1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t)-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)=0;$$

2) умови трансверсальності

$$\hat{L}_{x'}(t_0)=\hat{l}_{x_0},\quad \hat{L}_{x'}(t_1)=-\hat{l}_{x_1};$$

3) умова Лежандра

$$\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

4) умова Якобі (на інтервалі (t_0, t_1) немає спряжених точок) за умови, що виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

5) квадратична форма $P+Q$ невід'ємна на R^{2n}, якщо виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$ і посилена умова Якобі (на інтервалі $(t_0, t_1]$ немає спряжених точок).

Тут

$$\begin{aligned} Q(h_0, h_1) &= l''(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))[(h_0, h_1); (h_0, h_1)], \\ P(h_0, h_1) &= \langle \hat{L}_{x'x'}(t_1)(H'_0(t_1)h_0 + H'_1(t_1)h_1), h_1 \rangle \\ &\quad - \langle \hat{L}_{x'x'}(t_0)(H'_0(t_0)h_0 + H'_1(t_0)h_1), h_0 \rangle \\ &\quad + \langle \hat{L}_{xx'}(t_1)h_1, h_1 \rangle - \langle \hat{L}_{xx'}(t_0)h_0, h_0 \rangle, \end{aligned}$$

$H_i(\cdot)$ – розв'язки рівняння Якобі з граничними умовами $H_i(t_j) = \delta_{ij} I$ (δ_{ij} – символ Кронекера; I – одинична матриця).

Доведення. Рівняння Ейлера та умови трансверсальності виконуються внаслідок теореми 5.7. Щоб переконатися в необхідності умов Лежандра і Якобі, досить указати, що функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий мінімум і в задачі Лагранжа

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to \inf, \quad x(t_0) = \hat{x}(t_0), \quad x(t_1) = \hat{x}(t_1).$$

Отже, відповідно до теорем 9.1 і 9.2 виконуються умови Лежандра і Якобі. Доведемо необхідність умови 5). Рівняння Якобі функціонала (9.27) має вигляд

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{x'x'}h' + \hat{L}_{x'x}h) + \hat{L}_{xx'}h' + \hat{L}_{xx}h = 0,$$

або

$$\hat{L}_{x'x'}h'' + \left(\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'} + \hat{L}_{x'x} - \hat{L}_{xx'}\right)h' + \left(\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x} - \hat{L}_{xx}\right)h = 0.$$

Це система n диференціальних рівнянь другого порядку, яку можна подати у вигляді системи $2n$ рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних. Для цього позначимо $h' = g$ і використаємо умову Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Тоді матриця $\hat{L}_{x'x'}$ має обернену і n рівнянь Якобі можна записати у вигляді

$$h' = g,$$
$$g' = \hat{L}_{x'x'}^{-1}(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'} - \hat{L}_{x'x} + \hat{L}_{xx'})g + \hat{L}_{x'x'}^{-1}(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x} + \hat{L}_{xx})h.$$

Відповідно до теореми про існування і єдиність розв'язку лінійних систем існує фундаментальна матриця розв'язків побудованої системи, яка перетворюється у фундаментальну матрицю $\Phi(\cdot,t_0)$ розв'язків рівняння Якобі. Ця матриця задовольняє рівняння Якобі й граничні умови $\Phi(t_0,t_0)=0$, $\Phi'(t_0,t_0)=I$. Фундаментальну матрицю розв'язків рівняння Якобі, що задовольняє граничні умови $\Psi(t_1,t_1)=0$, $\Psi'(t_1,t_1)=I$, позначимо через $\Psi(\cdot,t_1)$.

Нагадаємо, що точка τ *спряжена з точкою* t_0 тоді й тільки тоді, коли матриця $\Phi(\tau,t_0)$ вироджена. За умов теореми виконується посилена умова Якобі. Тому матриця $\Phi(t_1,t_0)$ невироджена. Нехай $H_0(t)=\Psi(t,t_1)\Psi^{-1}(t_0,t_1)$, $H_1(t)=\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t_1,t_0)$. Ясно, що $H_1(t_0)=0$, $H_1(t_1)=I$, $H_0(t_0)=I$, $H_0(t_1)=0$. Тоді функція $h(t;h_0,h_1)=H_0(t)h_0+H_1(t)h_1$ – це розв'язок рівняння Якобі з граничними умовами $h(t_0;h_0,h_1)=h_0$, $h(t_1;h_0,h_1)=h_1$.

Обчислимо значення $K(h(\cdot;h_0,h_1))$ квадратичного функціонала

$$K(h(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}(\langle\hat{L}_{x'x'}h',h'\rangle+2\langle\hat{L}_{xx'}h',h\rangle+\langle\hat{L}_{xx}h,h\rangle)dt.$$

Одержимо

$$K(h(\cdot;h_0,h_1)) = \int_{t_0}^{t_1}\langle\hat{L}_{x'x'}h'+\hat{L}_{x'x}h,h'\rangle dt+\int_{t_0}^{t_1}\langle\hat{L}_{xx'}h'+\hat{L}_{xx}h,h\rangle dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\langle-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{x'x'}h'+\hat{L}_{x'x}h)+\hat{L}_{xx'}h'+\hat{L}_{xx}h,h\rangle dt$$
$$+\langle\hat{L}_{x'x'}h'+\hat{L}_{x'x}h,h\rangle\Big|_{t_0}^{t_1}=P(h_0,h_1).$$

Оскільки функція $\hat{x}(\cdot)$ дає локальний мінімум функціонала $B(x(\cdot))$, то відповідно до необхідної умови другого порядку для всіх функцій $h(\cdot)\in C^1([t_0,t_1],R^n)$ виконується нерівність

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}B(x(\cdot)+\lambda h(\cdot))\big|_{\lambda=0} = K(h(\cdot))+Q(h(t_0),h(t_1))$$
$$=(P+Q)(h(t_0),h(t_1))\geq 0.$$

Підставимо замість $h(\cdot)$ побудовану функцію $h(\cdot;h_0,h_1)$ і переконаємося у справедливості умови 5). Теорему доведено. □

Теорема 9.10 (про достатні умови слабкого мінімуму в задачі Больца). *Нехай у задачі Больца (9.27), інтегрант* $L(t,x,x') \in C^3(U)$, *де* U *– окіл графіка* $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))\,|\,t_0 \le t \le t_1\} \subset R^{2n+1}$, *термінант* $l(x_0,x_1) \in C^2(V)$, *де* V *– окіл точки* $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)) \in R^{2n}$. *Якщо* $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0,t_1],R^n)$ *така, що виконуються*:

1) рівняння Ейлера;

2) умови трансверсальності;

3) посилена умова Лежандра;

4) посилена умова Якобі (*на інтервалі* $(t_0,t_1]$ *немає спряжених точок*);

5) квадратична форма $P+Q$ *додатно визначена*;

то функція $\hat{x}(\cdot)$ *дає слабкий локальний мінімум у задачі Больца.*

Наступна теорема є наслідком теорем 9.7 і 9.6.

Теорема 9.11 (про необхідні умови сильного локального мінімуму в задачі Больца). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0,t_1],R^n)$ *дає сильний локальний мінімум у задачі Больца* (9.27), *інтегрант* $L(t,x,x') \in C^3(U)$, *де* U *– окіл графіка* $\{(t,\hat{x}(t))\,|\,t_0 \le t \le t_1\} \subset R^{n+1}$, *термінант* $l(x_0,x_1) \in C^2(V)$, *де* V *– окіл точки* $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)) \in R^{2n}$. *Тоді виконуються*:

1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) = 0;$$

2) умови трансверсальності

$$\hat{L}_{x'}(t_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad \hat{L}_{x'}(t_1) = -\hat{l}_{x_1};$$

3) умова Лежандра

$$\hat{L}_{x'x'}(t) \ge 0, \quad t \in [t_0,t_1];$$

4) умова Якобі (*на інтервалі* (t_0,t_1) *немає спряжених точок*), *якщо виконується посилена умова Лежандра* $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0,\ t \in [t_0,t_1]$;

5) квадратична форма $P+Q$ *невід'ємна на* R^{2n}, *якщо виконується посилена умова Лежандра і посилена умова Якобі* (*на інтервалі* $(t_0,t_1]$ *немає спряжених точок*);

б) умова Вейєрштрасса $E(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),u)\geq 0,\quad u\in R^n,\quad t\in[t_0,t_1]$, *де* $E(t,x,x',u)=L(t,x,u)-L(t,x,x')-L_{x'}(t,x,x')(u-x')$ *– функція Вейерштрасса.*

Теорема 9.12 (про достатні умови сильного мінімуму в задачі Больца). *Нехай* $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$ *– допустима екстремаль у задачі Больца* (*9.27*), *квазірегулярний на* U *інтегрант* $L(t,x,x')\in C^3(U\times R^n)$, *де* U *– деякий окіл графіка* $\{(t,\hat{x}(t))\,|\,t_0\leq t\leq t_1\}\subset R^{n+1}$ *функції* $\hat{x}(\cdot)$, *термінант* $l(x_0,x_1)\in C^2(V)$, *де* V *– окіл точки* $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))\in R^{2n}$. *Якщо* $\hat{x}(\cdot)$ *така, що виконуються*:

1) рівняння Ейлера;

2) умови трансверсальності;

3) посилена умова Лежандра;

4) посилена умова Якобі (*на інтервалі* $(t_0,t_1]$ *немає спряжених точок*);

5) квадратична форма $P+Q$ *додатно визначена*;

то функція $\hat{x}(\cdot)$ *дає сильний локальний мінімум функціонала задачі Больца.*

Теорема 9.13. *Нехай у задачі Больца інтегрант* L *має вигляд*

$$L=\langle Ax',x'\rangle+2\langle Cx',x\rangle+\langle Bx,x\rangle,$$

де матриці $A(t)$, $C(t)$ *– неперервно диференційовні, а* $B(t)$ *неперервна, термінант* l *має вид*

$$l(x_0,x_1)=\langle\alpha x_0,x_0\rangle+2\langle\gamma x_0,x_1\rangle+\langle\beta x_1,x_1\rangle,$$

де α, β, γ *– матриці розмірності* $n\times n$. *Якщо виконується посилена умова Лежандра:* $A(t)>0$ *і в інтервалі* (t_0,t_1) *є спряжена точка, то значення задачі* $S_{\min}=-\infty$. *Якщо ж виконуються посилені умови Лежандра, Якобі і матриця* $P+Q$ *невід'ємно визначена, то допустима екстремаль* $\hat{x}(\cdot)\equiv 0$ *реалізує мінімум задачі.*

Правило дослідження функціонала задачі Больца на екстремум.

1. Відшукати допустимі екстремалі задачі, тобто розв'язки рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t)-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)=0,$$

які задовольняють умови трансверсальності:

$$\hat{L}_{x'}(t_0)=l_{x_0},\quad \hat{L}_{x'}(t_1)=-l_{x_1}.$$

2. Обчислити $\hat{L}_{x'x'}(t)$ і перевірити, чи виконується посилена умова Лежандра:

$$\hat{L}_{x'x'}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

3. Відшукати нетривіальні розв'язки $h(t)$ рівняння Якобі:

$$a(t)h''(t) + b(t)h'(t) + c(t)h(t) = 0,$$

$$a(t) = \hat{L}_{x'x'}(t), \quad b(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t)$$

$$c(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t) - \hat{L}_{xx}(t).$$

Визначити спряжені точки $t^* : h(t^*) = h(t_0) = 0$ і перевірити, чи належать ці точки інтервалу $(t_0, t_1]$.

4. Побудувати квадратичну форму $P + Q$ і дослідити її на додатну (невід'ємну) визначеність.

5. Переконатися в тому, що інтегрант $L(t, x, x')$ квазірегулярний.

6. Користуючись теоремами 9.9–9.13 показати, що допустима екстремаль дає слабкий (сильний) екстремум функціонала задачі.

Приклад 9.5. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{\pi/2}((x')^2(t) - x^2(t))dt + \alpha x^2(0) + \beta x^2(\pi/2) + 2\gamma x(0)x(\pi/2) \to \inf.$$

Розв'язок:

1. Рівняння Ейлера $x'' + x = 0$ має загальний розв'язок $x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$. Умови трансверсальності $x'(0) = \alpha x(0) + \gamma x(\pi/2)$, $x'(\pi/2) = -\beta x(\pi/2) - \gamma x(0)$ задовольняє екстремаль $\hat{x}(t) = 0$, якщо $(\gamma - 1)^2 - \alpha\beta \neq 0$, і множина екстремалей, що залежать від параметра, якщо $(\gamma - 1)^2 - \alpha\beta = 0$.

2. Посилена умова Лежандра виконана: $\hat{L}_{x'x'}(t) = 2 > 0$.

3. Рівняння Якобі $h'' + h = 0$ має розв'язок $h(t) = \sin(t)$, що задовольняє граничні умови $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. На відрізку $(0, \pi/2]$ спряжених точок немає. Посилена умова Якобі виконана.

4. Побудуємо квадратичну форму $P + Q$. Розв'язки рівняння Якобі, що задовольняють граничні умови $h_0(\pi/2) = 0$, $h_0(0) = 1$, $h_1(\pi/2) = 1$, $h_1(0) = 0$, такі: $h_0(t) = \cos(t)$, $h_1(t) = \sin(t)$. Отже, квадратична форма

$$P + Q = \begin{vmatrix} 2\alpha & 2\gamma - 2 \\ 2\gamma - 2 & 2\beta \end{vmatrix}.$$

Ця форма додатно визначена при $\alpha > 0$ і $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 > 0$, не є невід'ємно визначеною при $\alpha < 0$ чи $\alpha > 0$ і $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 < 0$.

5. Інтегрант $L = (x')^2 - x^2$ – квазірегулярний, оскільки

$$E(t, x, x', u) = (u - x')^2 \geq 0 \quad \forall u \in R \quad \forall x' \in R.$$

6. Аналізуючи отримані співвідношення і застосовуючи теореми 9.9–9.13, переконаємося у справедливості такого висновку.

Відповідь: Якщо $\alpha > 0$, $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 > 0$, то функція $\hat{x}(t) \equiv 0$ дає сильний мінімум задачі. Якщо $\alpha > 0$ і $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 < 0$ чи $\alpha < 0$, то $S_{\min} = -\infty$. Якщо $\alpha > 0$ і $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 = 0$ чи $\alpha < 0$ і $\alpha\beta - (\gamma - 1)^2 > 0$, то необхідно додаткове дослідження задачі. Δ

9.7. Умови екстремуму другого порядку в задачах зі старшими похідними

Розглянемо задачу зі старшими похідними

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \to \inf,$$
$$x^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad x^{(k)}(t_1)) = x_{1k}, \, k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9.28}$$

Вважатимемо, що функція $L(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ неперервно диференційовна $n+2$ разів. Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}([t_0, t_1], R)$ – екстремаль задачі. Вона задовольняє рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0.$$

Функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє умову Лежандра задачі (9.28), якщо

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) = L_{x^{(n)}x^{(n)}}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

і задовольняє посилену умова Лежандра, якщо

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Функціонал $J(x(\cdot))$ має другу похідну в точці $\hat{x}(\cdot)$. Нехай

$$K(h(\cdot)) = J''(\hat{x}(\cdot))(h(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i,j=0}^{n} \hat{L}_{x^{(i)}x^{(j)}}(t) h^{(i)}(t) h^{(j)}(t))dt.$$

Означення 9.10. Рівняння Ейлера – Пуассона функціонала $K(h(\cdot))$ називається *рівнянням Якобі* функціонала $J(x(\cdot))$ *на екстремалі* $\hat{x}(\cdot)$.

Означення 9.11. Точка t^* називається *спряженою з точкою* t_0, якщо існує нетривіальний розв'язок $h(\cdot)$ рівняння Якобі такий, що $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t^*) = 0$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Означення 9.12. Функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє умову Якобі (посилену умову Якобі), якщо на інтервалі (t_0,t_1) (на інтервалі $(t_0,t_1]$) немає спряжених із t_0 точок.

Рівняння Якобі – це лінійне диференціальне рівняння порядку $2n$. Якщо виконується посилена умова Лежандра, то його можна розв'язати відносно старшої похідної. Нехай $h_1(\cdot), h_2(\cdot)$, …, $h_n(\cdot)$ – розв'язки рівняння Якобі такі, що $H(t_0) = 0$, а матриця $H^{(n)}(t_0)$ невироджена. Тут

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & \cdots & h_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_n^{(n-1)}(t) & \cdots & h_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

$$H^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} h_1^{(n)}(t) & \cdots & h_n^{(n)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_1^{(2n-1)}(t) & \cdots & h_n^{(2n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Точка t^* спряжена з точкою t_0 тоді й тільки тоді, коли матриця $H(t^*)$ вироджена.

Означення 9.13. Інтегрант $L(t,x,x',\ldots,x^{(n)})$ називається *квазірегулярним* (*регулярним*) в області $V \subset R^{n+1}$, якщо функція $x^{(n)} \to L(t,x,x',\ldots,x^{(n)})$ опукла (строго опукла) для всіх $(t,x,x',\ \ldots,\ x^{(n-1)}) \in V$.

Функція Вейєрштрасса функціонала $J(x(\cdot))$ має вид

$$E(t,x,x',\ldots,x^{(n)},u) = L(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)},u)$$
$$-L(t,x,x',\ldots,x^{(n)}) - L_{x^{(n)}}(t,x,x',\ldots,x^{(n)})(u - x^{(n)}).$$

Квазірегулярність (регулярність) інтегранта L в області V рівносильна тому, що $E(t,x,x',\dots,x^{(n)},u)\ge 0$ ($E(t,x,x',\dots,x^{(n)},u)>0$, $x^{(n)}\ne u$) для всіх $(t,x,x',\dots,x^{(n-1)})\in V$ та всіх $(u,x^{(n)})\in R^2$.

Означення 9.14. Функція $\hat{x}(\cdot)\in KC^n[t_0,t_1]$ дає сильний мінімум задачі (9.28), якщо існує таке число $\varepsilon>0$, що для будь-якої допустимої функції $x(\cdot)\in KC^n[t_0,t_1]$, що задовольняє умову

$$\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{C^{n-1}[t_0,t_1]}<\varepsilon,$$

справджується нерівність $J(x(\cdot))\ge J(\hat{x}(\cdot))$.

Теорема 9.14 (про необхідні умови слабкого локального мінімуму). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot)\in C^{2n}[t_0,t_1]$ дає слабкий локальний мінімум у задачі зі старшими похідними (9.28), інтегрант $L(t,x,x',\dots,x^{(n)}))\in C^{(n+2)}(U)$, де U – окіл розширеного графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\dots,\hat{x}^{(n)}(t))\,|t_0\le t\le t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Тоді виконуються:*

1) рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\hat{L}_{x^{(k)}}(t)=0;$$

2) граничні умови

$$\hat{x}^{(k)}(t_0)=x_{0k},\hat{x}^{(k)}(t_1)=x_{1k},k=0,1,\dots,n-1;$$

3) умова Лежандра

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)\ge 0,\quad t\in[t_0,t_1];$$

4) умова Якобі, якщо виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)>0$, $t\in[t_0,t_1]$.

Доведення. Властивості 1)–3) доведено раніше. Переконатися в справедливості властивості 4) можна за допомогою методу від супротивного. Якщо припустити, що існує нетривіальний розв'язок $h(\cdot)$ рівняння Якобі, який перетворюється в нуль разом зі своїми похідними до порядку $n-1$ в точках t_0 і $t^*\in(t_0,t_1)$, то можна показати, що функція $\tilde{h}(t)$, яка дорівнює $h(t)$ при $t_0\le t\le t^*$ і $\tilde{h}(t)=0$ при $t^*\le t\le t_1$, є розв'язком задачі на екстремум

$$J''(\hat{x}(\cdot))(h(\cdot),h(\cdot))\to\inf,$$
$$h^{(k)}(t_i)=0,\quad j=0,1,\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Функція $\tilde{h}^{(n)}(t)$ в точці t^* одночасно має бути і неперервною і розривною. Ця суперечність доводить справедливість властивості 4). □

Теорема 9.15 (про достатні умови слабкого мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}[t_0, t_1]$ допустима функція задачі (9.28) зі старшими похідними, інтегрант $L \in C^{(n+2)}(U)$, де U – окіл розширеного графіка $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \dots, \hat{x}^{(n)}(t)) | t_0 \le t \le t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Якщо $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера – Пуассона, посилені умови Лежандра і Якобі, то функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі (9.28) зі старшими похідними.*

Теорема 9.16 (про необхідні умови сильного мінімуму). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}[t_0, t_1]$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі зі старшими похідними, інтегрант $L \in C^{(n+2)}(U)$, де U – окіл графіка $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \dots, \hat{x}^{(n-1)}(t)) | \ t_0 \le t \le t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Тоді функції $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє:*

1) рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0;$$

2) граничні умови

$$\hat{x}^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \hat{x}^{(k)}(t_1) = x_{1k}, k = 0, 1, \dots, n-1;$$

3) умова Лежандра

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) \ge 0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

4) умова Якобі (на інтервалі (t_0, t_1) немає спряжених точок), якщо виконується посилена умова Лежандра

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

5) умова Вейєрштрасса $E(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \dots, \hat{x}(n)(t), u) \ge 0$ для всіх $u \in R$,

$$t \in [t_0, t_1].$$

Теорема 9.17 (про достатні умови сильного мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}[t_0, t_1]$ – допустима екстремаль у задачі зі старшими похідними, інтегрант $L \in C^{n+2}(U \times R)$ і квазірегулярний на U, де U – деякий окіл графіка $\{(t, \hat{x}(t), \dots, \hat{x}^{(n-1)}(t) | \ t_0 \le t \le t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі зі старшими похідними.*

Теорема 9.18. *Нехай в задачі зі старшими похідними інтегрант L має вигляд*

$$L = \sum_{k=0}^{n} A_k(t)(x^{(k)}(t))^2$$

і виконується посилена умова Лежандра: $A_n(t) > 0,\ \ t \in [t_0, t_1]$. *Якщо виконується посилена умова Якобі, то допустима екстремаль існує, вона єдина і дає абсолютний мінімум функціоналу задачі. Якщо ж умова Якобі не виконується, то* $S_{\min} = -\infty$.

Правило дослідження на екстремум функціонала задачі зі старшими похідними.

1. Відшукати допустимі екстремалі задачі, тобто розв'язки рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0;$$

які задовольняють граничні умови:

$$x^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_{1k}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

2. Обчислити $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)$ і перевірити, чи виконується посилена умова Лежандра:

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

3. Відшукати нетривіальні розв'язки $h(t)$ рівняння Якобі. Визначити спряжені точки $t^* : h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t^*) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$ і перевірити, чи належать ці точки інтервалу $(t_0, t_1]$.

4. Переконатися в тому, що інтегрант $L(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ квазірегулярний.

5. Користуючись теоремами 9.14–9.18, показати, що допустима екстремаль дає слабкий (сильний) екстремум функціонала задачі.

Приклад 9.5. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{T_0} ((x'')^2(t) - (x')^2(t))dt \to extr,$$

$$x(0) = x'(0) = x(T_0) = x'(T_0) = 0.$$

Розв'язок:

1. Рівняння Ейлера – Пуассона $x^{(4)} + x^{(2)} = 0$ має загальний розв'язок

$$x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3 t + C_4.$$

Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x}(t) \equiv 0$.

2. Посилена умова Лежандра виконується: $L_{x''x''}(t) = 2 > 0$.

3. Рівняння Якобі $h^{(4)} + h^{(2)} = 0$ має нетривіальні розв'язки $h_1(t) = 1 - \cos(t)$, $h_2(0) = \sin(t) - t$. Побудуємо матричну функцію

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos(t) & \sin(t) - t \\ \sin(t) & \cos(t) - 1 \end{bmatrix},$$

$$H(0) = 0, \quad H'(0) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Спряжені точки одержимо, якщо розв'яжемо рівняння

$$\det H(t) = 2(\cos(t) - 1) + t\sin(t) = 0.$$

Найближча до нуля спряжена точка $t^* = 2\pi$.

4. Інтегрант $L = (x'')^2 - (x')^2$ – квазірегулярний, оскільки

$$E(t, x, x', x'', u) = (u - x'')^2 \geq 0 \quad \forall \quad u, x'' \in R.$$

5. Аналізуючи отримані співвідношення і застосовуючи теорему 9.18, переконуємося в справедливості такого висновку.

Відповідь: Екстремаль $\hat{x}(t) \equiv 0$ дає сильний мінімум задачі при $T_0 < 2\pi$. Якщо $T_0 > 2\pi$, то $S_{\min} = -\infty$. Можна показати, що при $T_0 = 2\pi$ допустимі екстремалі $\hat{x}(t) = C(1 - \cos(t))$ дають абсолютний мінімум функціоналу задачі Δ

Задачі

Розв'язати найпростіші задачі варіаційного числення:

9.1. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$.

9.2. $\int_0^a (x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.3. $\int_0^1 (x - (x')^2) dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.4. $\int_0^a ((x')^2 - x) dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.5. $\int_0^1 ((x')^2 + tx) dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.6. $\int\limits_0^1 (t^2 x - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.7. $\int\limits_0^a (x')^3 dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.8. $\int\limits_0^{3/2} ((x')^3 + 2x)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(3/2) = 1$.

9.9. $\int\limits_0^a ((x')^3 - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.10. $\int\limits_0^a ((x')^3 + (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.11. $\int\limits_1^e t(x')^2 dt \to extr$, $x(1) = 0$, $x(e) = 1$.

9.12. $\int\limits_0^1 (1+t)(x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

9.13. $\int\limits_1^e (t(x')^2 + 2x)dt \to extr$, $x(1) = 1$, $x(e) = 0$.

9.14. $\int\limits_1^e (x - t(x')^2)dt \to extr$, $x(1) = 1$, $x(e) = 2$.

9.15. $\int\limits_1^2 t^2 (x')^2 dt \to extr$, $x(1) = 3$, $x(2) = 1$.

9.16. $\int\limits_2^3 (t^2 - 1)(x')^2 dt \to extr$, $x(2) = 0$, $x(3) = 1$.

9.17. $\int\limits_1^e (2x - t^2 (x')^2)dt \to extr$, $x(1) = e$, $x(e) = 0$.

9.18. $\int\limits_0^1 x^2 (x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 1$, $x(1) = \sqrt{2}$.

9.19. $\int\limits_0^{4/3} (x/(x')^2)dt \to extr$, $x(0) = 1$, $x(4/3) = 1/9$.

9.20. $\int\limits_0^1 e^x (x')^2 dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = \ln(4)$.

9.21. $\int_0^1((x')^2 + xx' + 12tx)dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.22. $\int_1^e(t(x')^2 + xx')dt \to extr$, $x(1) = 0$, $x(e) = 1$.

9.23. $\int_0^1(t^2(x')^2 + 12x^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

9.24. $\int_{-1}^1((x')^2 + x^2)dt \to extr$, $x(-1) = x(1) = 1$.

9.25. $\int_{-1}^1((x')^2 + 4x^2)dt \to extr$, $x(-1) = -1$, $x(1) = 1$.

9.26. $\int_0^1((x')^2 + x^2 + 2x)dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.27. $\int_0^1((x')^2 + x^2 + tx)dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.28. $\int_0^1(4x\sin(t) - x^2 - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.29. $\int_0^1((x')^2 + x^2 + 6xsh(2t))dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.30. $\int_0^a((x')^2 + x^2 - 4x\sin(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.31. $\int_0^a((x')^2 + x^2 + 6xsh(2t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.32. $\int_0^1((x')^2 + x^2 + 4xsh(t))dt \to extr$, $x(0) = -1$, $x(1) = 0$.

9.33. $\int_0^a((x')^2 + x^2 + 4xsh(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.34. $\int_0^1((x')^2 + x^2 + 4xch(t))dt \to extr$, $x(0) = x(1) = 0$.

9.35. $\int_0^a((x')^2 + x^2 + 4xch(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.36. $\int\limits_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2)dt \to extr$, $x(0) = 1$, $x(\pi/2) = 0$.

9.37. $\int\limits_0^{\pi/4} (4x^2 - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = 1$, $x(\pi/4) = 0$.

9.38. $\int\limits_0^{\pi/4} ((x')^2 - 4x^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(\pi/4) = 1$.

9.39. $\int\limits_0^{3\pi/4} ((x')^2 - 4x^2)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(3\pi/4) = -1$.

9.40. $\int\limits_0^{\pi/2} (2x + x^2 - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

9.41. $\int\limits_0^{3\pi/2} ((x')^2 - x^2 - 2x)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(3\pi/2) = 0$.

9.42. $\int\limits_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2 - tx)dt \to extr$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

9.43. $\int\limits_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2 + 4xsh(t))dt \to extr$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

9.44. $\int\limits_0^{a} ((x')^2 - x^2 + 4xsh(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.45. $\int\limits_0^{\pi/2} (6x\sin(2t) + x^2 - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

9.46. $\int\limits_0^{a} ((x')^2 - x^2 - 6x\sin(2t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

9.47. $\int\limits_0^{\pi/2} (4x\sin(2t) + x^2 - (x')^2)dt \to extr$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

9.48. $\int\limits_0^{3\pi/2} ((x')^2 - x^2 - 4x\sin(t))dt \to extr$, $x(0) = x(3\pi/2) = 0$.

9.49. $\int\limits_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2 + 4x\cos(t))dt \to extr$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

9.50. $\int\limits_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2 + 4x\cos(t))dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = \pi/2$.

9.51. $\int_0^{3\pi/2}(x^2-(x')^2-4x\cos(t))dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(3\pi/2)=-3\pi/2$.

9.52. $\int_0^a((x')^2-x^2+4x\cos(t))dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=b$.

9.53. $\int_0^1((x')^2+3x^2)e^{2t}dt \to extr$, $x(0)=1$, $x(1)=e$.

9.54. $\int_0^1(x^2-(x')^2)e^{2t}dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(1)=e$.

9.55. $\int_0^a((x')^2-x^2)e^{2t}dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=b$.

9.56. $\int_0^1\sin(x')dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(1)=\pi/2$.

9.57. $\int_0^1\cos(x')dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(1)=\pi$.

9.58. $\int_0^a\sin(x')dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=b$.

9.59. $\int_0^a\cos(x')dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=b$.

9.60. $\int_0^a x'e^{x'}dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=b$.

9.61. $\int_0^a((x')^5+5x)dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=b$.

9.62. $\int_0^1(1-(x')^2)dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(1)=b$.

9.63. $\int_0^a((x')^2-x(x')^3)dt \to extr$, $x(0)=0$, $x(a)=0$.

9.64. $\int_0^1((x')^2-4x(x')^3+2t(x')^4)dt \to extr$, $x(0)=x(1)=0$.

9.65. $\int_0^{1/2}\frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}dt \to extr$, $x(0)=1$, $x(1/2)=\sqrt{3}/2$.

9.66. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x} dt \to extr$, $x(1/2) = \sqrt{3}/2$, $x(1) = 1$.

9.67. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x} dt \to extr$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

9.68. $\int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{1+(x')^2}\, dt \to extr$, $x(-a) = x(a) = b$.

9.69. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{x}} dt \to extr$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

9.70. $\int\limits_{0}^{a} \sqrt{x+h}\sqrt{1+(x')^2}\, dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(a) = b$.

Розв'язати задачі Больца:

9.71. $\int\limits_{0}^{1} (x')^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to extr$.

9.72. $\int\limits_{0}^{1} ((x')^2 + x^2) dt - 2x(1)sh(1) \to extr$.

9.73 $\int\limits_{0}^{\pi} ((x')^2 + x^2 - 4x\sin(t)) dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr$.

9.74. $\int\limits_{0}^{\pi/2} ((x')^2 - x^2) dt + x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi/2) + 4x(\pi/2) \to extr$

9.75. $\int\limits_{0}^{a} ((x')^2 + x^2) dt + \alpha x^2(a) \to extr$

Розв'язати задачі зі старшими похідними:

9.76. $\int\limits_{0}^{1} (x'')^2 dt \to extr$, $x(0) = x'(0) = x'(1) = 0$, $x(1) = 1$.

9.77. $\int\limits_{0}^{1} (x'')^2 dt \to \mathrm{extr}$, $x(0) = x(1) = x'(1) = 0$, $x'(0) = 1$.

9.78. $\int\limits_{0}^{1} ((x'')^2 - 48x) dt \to \mathrm{extr}$, $x(0) = 1$, $x(1) = x'(1) = 0$, $x'(0) = -4$.

9.79. $\int\limits_{0}^{1} (48x - (x'')^2) dt \to \mathrm{extr}$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 4$.

9.80. $\int_0^1 (24tx - (x'')^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = x(1) = 0$, $x'(1) = 1/10$.

9.81. $\int_0^1 ((x'')^2 - 24tx)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(1) = 1/5$, $x'(1) = 1$.

9.82. $\int_0^\pi ((x'')^2 - x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x(\pi) = sh(\pi)$, $x'(\pi) = ch(\pi)$.

9.83. $\int_0^\pi ((x'')^2 - x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(\pi) = ch(\pi) + 1$, $x'(\pi) = sh(\pi)$.

9.84. $\int_0^a ((x'')^2 - x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = x(a) = x'(a) = 0$.

9.85. $\int_0^\pi ((x'')^2 - x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(\pi) = sh(\pi)$, $x'(\pi) = ch(\pi) + 1$.

9.86. $\int_0^\pi ((x'')^2 + 4x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(a) = b_0$, $x'(a) = b_1$.

9.87. $\int_0^\pi ((x'')^2 + 4x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, $x(\pi) = ch(\pi)$, $x'(\pi) = sh(\pi)$.

9.88. $\int_0^\pi ((x'')^2 + 4x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = x(\pi) = 0$, $x'(\pi) = sh(\pi)$.

9.89. $\int_0^{\pi/2} ((x'')^2 - x^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x(\pi/2) = \pi/2$, $x'(\pi/2) = 0$.

9.90. $\int_0^\pi ((x'')^2 - (x')^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = x(\pi) = 0$, $x'(\pi) = 1$.

9.91. $\int_0^1 ((x'')^2 + (x')^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x(1) = ch(1)$, $x'(1) = sh(1)$.

9.92. $\int_0^1 ((x'')^2 + (x')^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x(1) = sh(1)$, $x'(1) = ch(1)$.

9.93. $\int_0^a ((x'')^2 + (x')^2)dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = x(a) = x'(a) = 0$.

9.94. $\int_0^1 e^{-t}(x'')^2 dt \to \text{extr}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x(1) = e$, $x'(1) = 2e$.

9.95. $\int_0^1 e^{-t}(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$, $x(1)=x'(1)=e$.

9.96. $\int_0^1 (t+1)(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(1)=2$.

9.97. $\int_0^1 (t+1)(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=0$, $x(1)=\ln(2)$, $x'(0)=1$, $x'(1)=1/2$.

9.98. $\int_1^e (t+1)t(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(1)=0$, $x'(1)=1$, $x(e)=e$, $x'(e)=2$.

9.99. $\int_0^1 (t+1)^3(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=1$, $x(1)=1/2$, $x'(0)=-1$, $x'(1)=-1/4$.

9.100. $\int_0^1 (x''')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(1)=3$, $x''(1)=6$.

9.101. $\int_0^1 (x''')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(1)=4$, $x''(1)=12$.

9.102. $\int_0^1 ((x''')^2+(x'')^2)dt \to extr$, $x(0)=x''(0)=0$, $x'(0)=1$, $x'(1)=ch(1)$, $x(1)=x''(1)=sh(1)$.

10. ІЗОПЕРИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Ізопериметричні задачі – це задачі про геометричні фігури заданого виду, які мають максимальну площу при фіксованому периметрі. Серед таких задач, відомих ще в стародавніх Єгипті і Греції, є і варіаційні задачі. Наприклад, задача про замкнуту криву заданої довжини, яка обмежує максимальну площу (задача Дідони). Якщо рівняння кривої записати в параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t)$, то задачу можна формалізувати так. Визначити максимум функціонала

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt, \qquad (10.1)$$
$$x(0) = x(T), \quad y(0) = y(T)$$

за умови

$$\int_0^T \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}\,dt = l. \qquad (10.2)$$

Це задача на умовний екстремум з інтегральною умовою (10.2).

Ізопериметричною задачею у варіаційному численні називається задача на умовний екстремум:

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), x'(t))dt \to extr, \qquad (10.3)$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), x'(t))dt = l_j, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (10.4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \qquad (10.5)$$

Умови (10.4) називаються *ізопериметричними умовами.* Як і в основній задачі варіаційного числення, вважається, що функції $f_j(t, x, x')$ та їхні похідні $f'_{jx}(t, x, x')$, $f'_{jx'}(t, x, x')$, $j = 0, 1, \ldots, m$ неперервні за сукупністю змінних.

Функції $x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$ називаються *допустимими* в ізопериметричній задачі (10.3)–(10.5), якщо вони задовольняють ізопериметричні умови (10.4) та граничні умови (10.5). Допустима функція $x(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум (максимум) функціонала ізопериметричної задачі (10.3)–(10.5) (записується $\hat{x}(\cdot) \in loc\min$ ($\hat{x}(\cdot) \in loc\max$)), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої допустимої функції $x(\cdot)$, що задовольняє співвідношення $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$, виконується нерівність

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot)) \quad (J_0(x(\cdot)) \leq J_0(\hat{x}(\cdot))).$$

Теорема 10.1 (про необхідні умови екстремуму функціонала ізопериметричної задачі). *Нехай функції* $f_j(t,x,x')$, $f'_{jx}(t,x,x')$, $f'_{jx'}(t,x,x')$, $j=0,1,\dots,m$, *неперервні. Якщо допустима функція* $\hat{x}(\cdot)$ *дає слабкий локальний екстремум функціонала ізопериметричного задачі (10.3)–(10.5), то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ *такі, що виконується рівняння Ейлера*

$$L_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\frac{d}{dt}L_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m), \qquad (10.6)$$

де $L(t,x,x',\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j f_j(t,x,x')$ *– функція Лагранжа задачі (10.3)–(10.5).*

Доведення. Доведемо теорему при $m=1$. Обчислимо перші варіації функціоналів J_0 і J_1:

$$\delta J_0(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}(\hat{f}_{0x}(t)h(t)+\hat{f}_{0x'}(t)h'(t))dt,$$

$$\delta J_1(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}(\hat{f}_{1x}(t)h(t)+\hat{f}_{1x'}(t)h'(t))dt,$$

де $\hat{f}_{jx}(t)=f'_{jx}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$, $\hat{f}_{jx'}(t)=f'_{jx'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$, $j=0,1$.

Нехай $\delta J_1(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=0$ для всіх $h(\cdot)\in C^1[t_0,t_1]$, $h(t_0)=h(t_1)=0$. Тоді, застосовуючи лему Лагранжа (або Дюбуа – Реймона), одержимо

$$\hat{f}_{1x}(t)=\frac{d}{dt}\hat{f}_{1x'}(t).$$

Це і є рівняння (10.6) при $\lambda_1=1$.

Нехай тепер $\delta J_1(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=0$ не для всіх $h(\cdot)\in H_0$. Тоді існує така функція $\tilde{h}(\cdot)\in C^1[t_0,t_1]$, $\tilde{h}(t_0)=\tilde{h}(t_1)=0$, що $\delta J_1(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot))\neq 0$. Побудуємо функції двох змінних

$$\varphi_j(\alpha,\beta)=J_i(\hat{x}(\cdot)+\alpha h(\cdot)+\beta\tilde{h}(\cdot)), \quad j=0,1.$$

Вони неперервно диференційовні в околі нуля і

$$\left.\frac{\partial\varphi_j(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = \delta J_j(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)), \quad j=0,1,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_j(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = \delta J_j(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot)), \quad j=0,1.$$

Лема 10.1. *Для будь-якої функції* $h(\cdot)\in C^1[t_0,t_1]$ *такої, що* $h(t_0) = h(t_1)=0$, *виконується рівність*

$$\left.\frac{\partial(\varphi_0,\varphi_1)(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} \end{vmatrix} \tag{10.7}$$
$$= \begin{vmatrix} \delta J_0(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)) & \delta J_0(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot)) \\ \delta J_1(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)) & \delta J_1(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot)) \end{vmatrix} = 0$$

Доведення леми. Якщо визначник (10.7) не дорівнює нулю, то відображення $(\alpha,\beta)\to(\varphi_0(\alpha,\beta),\varphi_1(\alpha,\beta))$ переводить деякий окіл точки $(0,0)$ у відповідний окіл точки $(\varphi_0(0,0),\varphi_1(0,0))$. Використаємо теорему про обернену функцію. Відповідно до цієї теореми існують такі α, β і допустима функція $\hat{x}(\cdot)+\alpha h(\cdot)+\beta\tilde{h}(\cdot)$, що $\varphi_0(\alpha,\beta)=J_0(\hat{x}(\cdot)+\alpha h(\cdot)+\beta\tilde{h}(\cdot))=J_0(\hat{x}(\cdot))-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $\varphi_1(\alpha,\beta)=\varphi_1(0,0)=J_1(\hat{x}(\cdot))=l_1$.

А це суперечить тому, що функція $\hat{x}(\cdot)$ дає мінімум функціонала (10.3) за умов (10.4), (10.5). Лему доведено. □

Із рівності (10.7) випливає, що

$$\delta J_0(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))-\frac{\delta J_0(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot))}{\delta J_1(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot))}\delta J_1(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=0.$$

Нехай $\lambda_0=1$, $\lambda_1=-\delta J_0(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot))/\delta J_1(\hat{x}(\cdot),\tilde{h}(\cdot))$. Тоді

$$\lambda_0\delta J_0(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))+\lambda_1\delta J_1(\hat{x}(\cdot),h(\cdot))=0$$

для будь-якої функції $h(\cdot)\in C^1[t_0,t_1]$, $h(t_0)=h(t_1)=0$. А це означає, що

$$\int_{t_0}^{t_1}((\lambda_0\hat{f}_{0x}(t)+\lambda_1\hat{f}_{1x}(t))h(t)+(\lambda_0\hat{f}_{0x'}(t)+\lambda_1\hat{f}_{1x'}(t))h'(t))dt=0$$

для всіх $h(\cdot)\in H_0$. Застосувавши основну лему варіаційного числення (або лему Дюбуа – Реймона), одержимо рівняння Ейлера (10.6). Теорему доведено. □

Наслідок 10.1. Рівняння Ейлера (10.6) визначає екстремалі задачі безумовного екстремуму функціонала

$$J^*(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t),\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=0}^{m}\lambda_j f_j(t,x(t),x'(t))dt.$$

Зауваження. Усі функції $f_j(t,x,x')$, $j=0,\ldots,m$ входять до $J^*(x(\cdot))$ симетрично. Тому екстремалі задачі (10.3), (10.4) і задачі

$$J_s(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_s(t,x(t),x'(t))dt \to extr$$

за умов

$$\int_{t_0}^{t_1} f_j(t,x(t),x'(t))dt = l_j, \quad j=0,\ldots,s-1,s+1,\ldots,m$$

однакові при будь-якому s. У цьому полягає *принцип взаємності.* Наприклад, задача про максимальну площі, яка обмежується кривою заданої довжини, і задача про мінімум довжини замкнутої кривої, яка обмежує задану площу, взаємні й мають спільні екстремалі.

Ми обґрунтували таке правило множників Лагранжа розв'язування ізопериметричних задач (10.3)–(10.5):

1. Скласти функцію Лагранжа

$$L(t,x,x',\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(t,x,x').$$

2. Записати необхідну умову екстремуму – рівняння Ейлера для Лагранжіана:

$$L_x(t,x(t),x'(t),\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \frac{d}{dt} L_{x'}(t,x(t),x'(t),\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m).$$

3. Відшукати допустимі екстремалі, тобто розв'язки рівняння Ейлера для функції Лагранжа, які задовольняють ізопериметричні умови (10.4) і граничні умови (10.5) за умови, що не всі множники Лагранжа $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ рівні нулю.

4. Відшукати розв'язок задачі серед допустимих екстремалей або довести, що розв'язків немає.

Зауважимо, що ізопериметричну задачу (10.3)–(10.5) уперше розв'язав Л. Эйлер у 1744 р. Він довів справедливість співвідношення (10.6) методом ламаних.

Приклад 10.1. Визначити екстремалі ізопериметричної задачі

$$\int_0^1 (x')^2(t)dt \to extr, \quad \int_0^1 x(t)dt = 0, \quad x(0)=0, x(1)=1.$$

Розв'язок:

1. Складемо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 (x')^2 + \lambda_1 x.$$

2. Запишемо рівняння Ейлера

$$L_x = \frac{d}{dt} L_{x'} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2\lambda_0 x''.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ – усі множники Лагранжа нулі. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. Рівняння Ейлера $x'' = \lambda_1$ має загальний розв'язок $x(t) = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3 визначаємо із граничних умов та ізопериметричної умови:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,$$

$$x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1,$$

$$\int_0^1 x(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 (C_1 t^2 + C_2 t)dt = 0 \Rightarrow C_1/3 + C_2/2 = 0.$$

Отже, $C_1 = 3$, $C_2 = -2$, $C_3 = 0$. Єдина допустима екстремаль має вигляд $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t$.

4. Покажемо, що екстремаль $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t$ дає абсолютний екстремум. Візьмемо допустиму функцію $x(\cdot)$. Тоді $x(\cdot) - \hat{x}(\cdot) = h(\cdot) \in C^1[0,1]$, $h(0) = h(1) = 0$, $\int_0^1 h(t)dt = 0$. Розглянемо

$$J(x(\cdot))) - J(\hat{x}(\cdot)) \quad = \int_0^1 (\hat{x}'(t) + h'(t))^2 dt - \int_0^1 (\hat{x}')^2(t)dt$$

$$= \int_0^1 2\hat{x}'(t)h'(t)dt + \int_0^1 (h')^2(t)dt \geq 2\int_0^1 \hat{x}'(t)h'(t)dt.$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$\int_0^1 \hat{x}'(t)h'(t)dt = \hat{x}'(t)h(t)\,|_0^1 - \int_0^1 \hat{x}''(t)h(t)dt = -6\int_0^1 h(t)dt = 0.$$

Таким чином, $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$ для будь-якої функції $x(\cdot)$. Крім того,

$$S_{\min} = \int_0^1 (\hat{x}')^2(t)dt = \int_0^1 (6t-2)^2 dt = 4.$$

Відповідь: Функція $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t$ дає абсолютний мінімум функціонала ізопериметричної задачі. Δ

Приклад 10.2 (задача Дідони з фіксованими кінцями). Визначити криву заданої довжини, яка проходить через точки $A(-a,0)$, $B(a,0)$ і разом із відрізком $[-a,a]$ обмежує максимальну площу.

Формалізація задачі. Відшукати функцію $x(\cdot)$, яка задовольняє граничні умови $x(-a) = 0$, $x(a) = 0$ і дає максимум функціонала

$$S(x(\cdot)) = \int_{-a}^{a} x(t)dt$$

за ізопериметричної умови

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (x')^2(t)}\,dt = l.$$

Розв'язок:

1. Складемо функцію Лагранжа

$$L=\lambda_0 x+\lambda_1\sqrt{1+(x')^2}.$$

2. Рівняння Ейлера має перший інтеграл $L-x'L_{x'}=C$ унаслідок того, що функція L явним чином не залежить від t. Тому рівняння Ейлера матиме вигляд

$$\lambda_0 x+\lambda_1\sqrt{1+(x')^2(t)}-\lambda_1(x')^2\sqrt{1+(x')^2(t)}=C.$$

3. Якщо $\lambda_0=0$, то розв'язком рівняння Ейлера буде функція $x=C_1t+C_2$. Визначимо константи C_1, C_2 із граничних умов. Одержимо єдину екстремаль. Це пряма, що проходить через точки A, B. Лише тоді, коли $l=2a$, ця екстремаль дає розв'язок задачі.

Нехай тепер $\lambda_0=1$. Рівняння Ейлера матиме вигляд

$$x-C=-\lambda_1\sqrt{1+(x')^2(t)}.$$

Зробимо заміну $x'=tg(u)$, де u – параметр. Тоді рівняння набуває вигляду

$$x-C=-\lambda_1\cos(u).$$

Використаємо співвідношення

$$dt=\frac{dx}{tg(u)}=\frac{\lambda_1\sin(u)du}{tg(u)}=\lambda_1\cos(u)du.$$

Інтегруючи це рівняння, одержимо $t=\lambda_1\sin(u)+C_1$. Отже, рівняння екстремалі в параметричній формі таке:

$$x=-\lambda_1\cos(u)+C,\quad t=\lambda_1\sin(u)+C_1.$$

Виключаючи параметр, одержимо рівняння кола

$$(t-C_1)^2+(x-C)^2=\lambda_1^2.$$

Константи C, C_1, λ_1 визначають із граничних умов та ізопериметричної умови.

Відповідь: Якщо $l=2a$, то екстремаль – це відрізок прямої, що сполучає точки A, B. Якщо $2a<l\le\pi a$, то єдина екстремаль – це дуга довжини l кола, що проходить через точки A, B із центром на осі $0X$. При $l<2a$ в задачі немає допустимих функцій. При $l>\pi a$ немає допустимих екстремалей (рис. 10.1). Δ

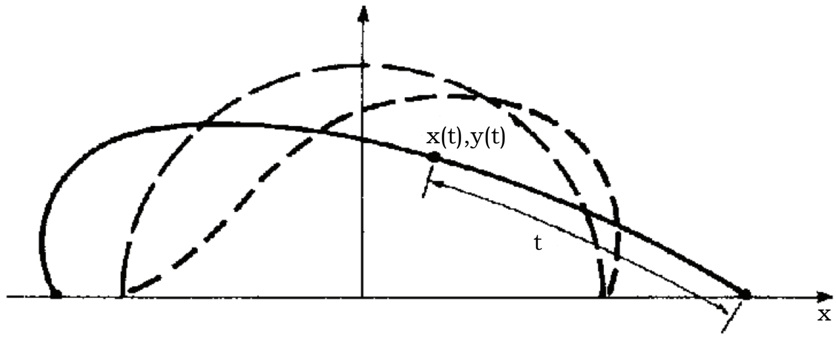

Рис. 10.1

Приклад 10.3 (задача Дідони в параметричній формі). Визначити максимум функціонала

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt,$$

$$x(0) = x(T), \quad y(0) = y(T)$$

за умови

$$\int_0^T \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}dt = l.$$

Розв'язок:

1. Складемо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0(xy' - yx') + \lambda_1\sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

2. Система рівнянь Ейлера має вигляд:

$$2\lambda_0 y = \frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_1, \quad 2\lambda_0 x = \frac{\lambda_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_2.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то рівняння будуть такими:

$$\frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_1 = 0, \quad \frac{\lambda_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_2 = 0.$$

Розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь такий: $x(t) = At + B$, $y(t) = Ct + D$. Ці функції не задовольняють граничні умови $x(0) = x(T)$, $y(0) = y(T)$. Нехай тепер $\lambda_0 = 1/2$. Система рівнянь Ейлера матиме такий вигляд:

$$y = \frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_1, \quad x = \frac{\lambda_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_2.$$

Піднесемо до квадрата і додамо. Одержимо рівняння кола

$$(y-C_1)^2+(x-C_2)^2=\lambda_1^2.$$

Відповідь. Максимальну площу при заданому периметрі обмежує коло. Δ

Приклад 10.4 (задача про положення рівноваги однорідної нитки під дією сили тяжіння). Серед плоских ліній довжини l, кінці яких закріплені в точках $A(t_0,x_0)$, $B(t_1,x_1)$, знайти ту, ордината центра тяжіння якої найменша.

Задача зводиться до дослідження на екстремум функціонала

$$P(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}x(t)\sqrt{1+(x')^2(t)}dt\to\min,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+(x')^2(t)}dt=l,$$

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1.$$

Це ізопериметрична задача.

Розв'язок:

1. Складаємо функцію Лагранжа

$$L=\lambda_0x\sqrt{1+(x')^2(t)}+\lambda_1\sqrt{1+(x')^2}.$$

2. Рівняння Ейлера для такої функції L має перший інтеграл

$$L-x'L_{x'}=C\Rightarrow(\lambda_0x+\lambda_1)\sqrt{1+(x')^2}-\frac{(\lambda_0x+\lambda_1)(x')^2}{\sqrt{1+(x')^2}}=C,$$

звідки $\lambda_0x+\lambda_1=C\sqrt{1+(x')^2}$.

3. Нехай $\lambda_0=0$. Тоді єдина екстремаль – це пряма $x=At+B$. Вона буде розв'язком задачі, якщо

$$l=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(t_1-t_0)^2}.$$

Нехай тепер $\lambda_0=1$. Рівняння Ейлера

$$x+\lambda_1=C\sqrt{1+(x')^2}$$

інтегрується заміною $x'=sh(u)$. Тоді

$$x+\lambda_1=Cch(u),\quad dt=\frac{dx}{x'},\quad Cdu\Rightarrow t=Cu+C_1.$$

Виключаючи параметр, одержимо рівняння екстремалі

$$x+\lambda_1=Cch\left(\frac{t-C_1}{C}\right).$$

Це рівняння *ланцюгової лінії*. Невідомі константи C, C_1, λ_1 визначаються з ізопериметричних і граничних умов.

Відповідь. Серед ліній довжини l найменшу ординату центра тяжіння мають ланцюгові лінії. Δ

Приклад 10.5 (задача Кельвіна). Нехай площина XOY покрита масою з неперервною густиною $\mu(x,y)$. Через точки A, B проведена крива C. Серед усіх кривих довжини l, які з'єднують точки A і B, відшукати ту, яка разом із кривою C обмежує область D з максимальною масою.

Визначимо функцію $v(x,y)=\int\mu(x,y)dx$. За формулою Гріна

$$\iint_D \mu(x,y)dxdy=\iint_D \frac{\partial v}{\partial x}dxdy=\oint_{\partial D} v dy,$$

де контур ∂D складається із кривих L і C. Інтеграл упродовж кривої C не змінюється. Якщо криву L задати в параметричному вигляді $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0\le t\le t_1$, то для того, щоб розв'язати задачу, досить відшукати максимум функціонала

$$J=\int_{t_0}^{t_1} v(x,y)y'dt$$

за умови

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(x')^2(t)+(y')^2(t)}\,dt=l.$$

Це ізопериметрична задача.

Розв'язок:

1. Складаємо функцію Лагранжа

$$L=v(x,y)y'+\lambda\sqrt{(x')^2+(y')^2}.$$

2. Використовуємо форму Вейєрштрасса рівняння Ейлера

$$\frac{1}{r}=\frac{L_{xy'}-L_{yx'}}{L_1\sqrt{((x')^2+(y')^2)^3}},$$

де r – радіус кривизни екстремалі,

$$L_1=\frac{L_{x'x'}}{(y')^2}=\frac{L_{y'y'}}{(x')^2}=\frac{L_{x'y'}}{-x'y'}.$$

У цій задачі

$$L_{xy'}=\frac{\partial v}{\partial x},\quad L_{yx'}=0,\quad L_1=\frac{L_{x'x'}}{(y')^2}=\frac{\lambda}{\sqrt{((x')^2+(y')^2)^3}}.$$

Тому рівняння Ейлера у формі Вейєрштрасса матиме вигляд

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial x},\ \text{або}\ \frac{1}{r}=\frac{\mu(x,y)}{\lambda}.$$

Відповідь: Екстремаль визначається рівнянням $\frac{1}{r}=\frac{\mu(x,y)}{\lambda}$. Якщо $\mu(x,y)=C$, то кривизна стала і екстремаль – це дуга кола. Δ

Задачі

Розв'язати ізопериметричні задачі:

10.1.Знайти криву, яка проходить через точку $A(0,b)$ на осі $0Y$ і точку на осі $0X$, обмежує разом з осями $0X$, $0Y$ задану площу S і утворює при обертанні навколо осі $0X$ поверхню найменшої площі.

10.2.Знайти криву довжини l, яка проходить через початок координат $A(0,0)$, точку $B(x,h)$ на прямій $y=h$ і обмежує разом із віссю $0X$ і ординатою точки $B(x,h)$ найбільшу площу.

10.3. Знайти форму важкої однорідної нитки довжини l, один кінець якої закріплений у точці $B(x_1,y_1)$, а другий розташований на осі $0Y$.

10.4. З'єднати кривою довжини l задану точку M_1 на стороні кута з вершиною в початку координат з невідомою точкою M_2 на іншій стороні кута так, щоб площа фігури, утвореної сторонами кута і кривою, була найбільшою.

10.5. На вертикальних прямих $x=a$, $x=b$ знайти такі дві точки M, N і криву MN, що з'єднує ці точки так, щоб площа $AMNB$, де $A(a,0)$, $B(b,0)$, була максимальною за умови, що сума довжин кривої MN і відрізків AM, BN фіксована.

10.6. $\int\limits_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int\limits_0^1 x dt = 0$, $x(0)=1$, $x(1)=0$.

10.7. $\int\limits_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int\limits_0^1 x dt = 3$, $x(0)=1$, $x(1)=6$.

10.8. $\int\limits_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int\limits_0^1 tx dt = 0$, $x(0)=0$, $x(1)=1$.

10.9. $\int\limits_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int\limits_0^1 tx dt = 0$, $x(0)=-4$, $x(1)=4$.

10.10. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x dt = 1$, $\int_0^1 tx dt = 0$, $x(0) = x(1) = 0$.

10.11. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x dt = -\frac{3}{2}$, $\int_0^1 tx dt = -2$, $x(0) = 2$, $x(1) = -14$.

10.12. $\int_0^\pi (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^\pi x\cos(t) dt = \pi/2$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$.

10.13. $\int_0^\pi (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^\pi x\sin(t) dt = 0$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = 1$.

10.14. $\int_0^\pi x\sin(t) dt \to extr$, $\int_0^\pi (x')^2 dt = 3\pi/2$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = \pi$.

10.15. $\int_0^\pi (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^\pi x\cos(t) dt = \pi/2$, $\int_0^\pi x\sin(t) dt = \pi + 2$,
$x(0) = 2$, $x(\pi) = 0$.

10.16. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{-t} dt = e$, $x(1) = 2$, $x(0) = 2e + 1$.

10.17. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{t} dt = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

10.18. $\int_0^1 ((x')^2 + x^2) dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{t} dt = e^2 + 14$, $x(0) = 0$, $x(1) = e$.

10.19. $\int_0^1 ((x')^2 + x^2) dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{-t} dt = 1 - 3e^{-2}4$, $x(0) = 0$, $x(1) = e^{-1}$.

10.20. $\int_1^2 t^2 (x')^2 dt \to extr$, $\int_1^2 tx dt = 73$, $x(1) = 1$, $x(2) = 2$.

10.21. $\int_1^2 t^3 (x')^2 dt \to extr$, $\int_1^2 x dt = 2$, $x(1) = 4$, $x(2) = 1$.

10.22. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x^2 dt = 2$, $x(0) = x(1) = 0$.

10.23. $\int_0^1 (x'')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 (x')^2 dt = 2$, $x(0) = x(1) = 0$.

10.24. $\int_0^1 (x'')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x^2 dt = 2$, $x(0) = x(1) = 0$.

Відшукати допустимі екстремалі:

10.25. $\int_{-1}^{0}(x')^3 dt \to extr$, $\int_{-1}^{0} tx'dt = -4/15$, $x(-1) = 0$, $x(0) = 2/3$.

10.26. $\int_{0}^{1} t^2 x dt \to extr$, $\int_{0}^{1} x^5 dt = 1$.

10.27. $\int_{0}^{1}(x)^3 dt \to extr$, $\int_{0}^{1} x dt = 2/3$, $\int_{0}^{1} tx dt = 2/5$.

10.28. $\int_{0}^{1}(x')^{4/3} dt \to extr$, $\int_{0}^{1} tx'dt = 5$, $x(0) = -5/4$, $x(1) = 5$.

10.29. $\int_{0}^{\pi}((x')^2 - x^2)dt \to extr$, $\int_{0}^{\pi} x\cos(t)dt = 1$, $x(0) = x(\pi) = 0$.

10.30. $\int_{0}^{\pi/2}((x')^2 - x^2)dt \to extr$, $\int_{0}^{\pi/2} x\sin(t)dt = 1$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

10.31. $\int_{0}^{1}(x')^2 dt \to extr$, $\int_{0}^{1}(x - (x')^2)dt = 1/12$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1/4$.

10.32. $\int_{0}^{1} x_1' x_2' dt \to extr$, $\int_{0}^{1} x_1 dt = 1$, $x_1(0) = x_1(1) = 0$, $\int_{0}^{1} x_2 dt = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

10.33. $\int_{0}^{1} x_1' x_2' dt \to extr$, $\int_{0}^{1} tx_1 dt = \int_{0}^{1} tx_2 dt = 0$, $x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

10.34. $\int_{0}^{1}(x_1 + x_2)dt \to extr$, $\int_{0}^{1} x_1' x_2' dt = 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -3$.

10.35. $\int_{0}^{1} t(x_1 - x_2)dt \to extr$, $\int_{0}^{1} x_1' x_2' dt = -\frac{4}{5}$, $x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$, $x_1(1) = 2$.

10.36. $\int_{0}^{1}((x_1')^2 + (x_2')^2 - 4tx_{2'} - 4x_2)dt \to extr$, $\int_{0}^{1}((x_1')^2 - tx_1' - (x_2')^2)dt = 2$, $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

10.37 $\int_{0}^{\pi}(x')^2 dt \to extr$; $\int_{0}^{\pi} x\cos(t)dt = \pi/2$, $\int_{0}^{\pi} x\sin(t)dt = -2$, $x(0) = 0$.

10.38 $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$; $\int_0^1 xe^t dt = 1$, $x(0) = 0$.

10.39 $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$; $\int_0^1 xe^t dt = 1$, $x(0) = x(1) = 0$.

10.40 $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$; $\int_0^1 x^2 dt = 1$.

10.41 $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$; $\int_0^1 x^2 dt = 1$, $\int_0^1 xdt = 0$.

10.42 $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$; $\int_0^1 x^2 dt = 1$, $x(0) = 0$.

10.43 $\int_0^1 xdt \to extr$; $\int_0^1 \sqrt{1+(x')^2}\, dt = \pi/2$, $x(1) = 0$.

10.44 $\int_{-1}^0 xdt \to extr$; $\int_{-1}^0 \sqrt{1+(x')^2}\, dt = \pi/2$, $x(-1) = 0$.

10.45. $\int_0^1 (x'')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 (x')^2 dt = 2$, $x(0) = x(1) = 0$.

10.46. $\int_0^1 (x'')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x^2 dt = 2$, $x(0) = x(1) = 0$.

10.47 $\int_0^1 xdt \to extr$; $\int_0^1 (x'')^2 dt = 1$, $x(0) = x(1) = 0$.

10.48 $\int_0^1 xdt \to extr$; $\int_0^1 (x'')^2 dt = 1$, $x(0) = x'(0) = x(1) = 0$.

10.49 $\int_0^1 xdt \to extr$; $\int_0^1 (x'')^2 dt = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(1) = x'(1) = 0$.

10.50 $\int_0^1 (x'')^2 dt \to extr$; $\int_0^1 xdt = 1$, $x(0) = 0$.

10.51 $\int_0^1 (x'')^2 dt \to extr$; $\int_0^1 xdt = 1$, $x(1) = x'(0) = 0$.

10.52 $\int_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $\int_0^1 x\,dt = 1$, $x(0) = x'(0) = x'(2) = 0$.

10.53 $\int_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $\int_0^1 x\,dt = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(1) = x'(1) = 0$.

10.54 $\int_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $\int_0^1 x^2\,dt = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.

10.55 $\int_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $\int_0^1 x^2\,dt = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(1) = x'(1) = 0$.

10.56 $\int_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $\int_0^1 x^2\,dt = 1$, $\int_0^1 x\,dt = \int_0^1 tx\,dt = 0$.

10.57 $\int_0^1 (x'')^2\,dt \to extr$; $\int_0^1 x^2\,dt = 1$, $\int_0^1 x\,dt = 0$, $x(0) = x(1)$, $x'(0) = x'(1)$.

10.58 $T \to extr$; $\int_0^T (x'')^2\,dt = 4$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x'(T) = -1$.

10.59 $T \to extr$; $\int_0^T (x'')^2\,dt = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x'(T) = 1$.

10.60 $T \to extr$; $\int_0^T (x'')^2\,dt = 1$, $x(0) = x'(0) = x(T) = 0$, $x'(T) = 1$.

10.61 $T \to extr$; $\int_0^T (x'')^2\,dt = 4$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(T) = 1$, $x'(T) = 2$.

10.62 $x'(1) \to extr$; $\int_0^1 (x'')^2\,dt = 4$, $x(0) = x'(0) = x(1) = 0$.

10.63 $x(1) \to extr$; $\int_0^1 (x'')^2\,dt = 12$, $x(0) = x'(0) = x(1) = 0$.

Відшукати допустимі екстремалі

10.64. $\int_{-1}^{0} (x')^3\,dt \to extr$, $\int_{-1}^{0} tx'\,dt = -4/15$, $x(-1) = 0$, $x(0) = 2/3$.

10.65. $\int_0^1 t^2 x dt \to extr$, $\int_0^1 x^5 dt = 1$.

10.66. $\int_0^1 (x)^3 dt \to extr$, $\int_0^1 x dt = 2/3$, $\int_0^1 tx dt = 2/5$.

10.67. $\int_0^1 (x')^{4/3} dt \to extr$, $\int_0^1 tx' dt = 5$, $x(0) = -5/4$, $x(1) = 5$.

10.68. $\int_0^{\pi} ((x')^2 - x^2) dt \to extr$, $\int_0^{\pi} x\cos(t) dt = 1$, $x(0) = x(\pi) = 0$.

10.69. $\int_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2) dt \to extr$, $\int_0^{\pi/2} x\sin(t) dt = 1$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$.

10.70. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 (x - (x')^2) dt = 1/12$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1/4$.

10.71. $\int_0^1 x_1' x_2' dt \to extr$, $\int_0^1 x_1 dt = 1$, $x_1(0) = x_1(1) = 0$, $\int_0^1 x_2 dt = 1$, $x_2(0) = 0$,

$x_2(1) = 1$.

10.72. $\int_0^1 x_1' x_2' dt \to extr$, $\int_0^1 tx_1 dt = \int_0^1 tx_2 dt = 0$, $x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$,

$x_2(1) = 1$.

10.73. $\int_0^1 (x_1 + x_2) dt \to extr$, $\int_0^1 x_1' x_2' dt = 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$,

$x_2(1) = -3$.

10.74. $\int_0^1 t(x_1 - x_2) dt \to extr$, $\int_0^1 x_1' x_2' dt = -\frac{4}{5}$, $x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$,

$x_1(1) = 2$.

10.75. $\int_0^1 ((x_1')^2 + (x_2')^2 - 4tx_{2'} - 4x_2) dt \to extr$, $\int_0^1 ((x_1')^2 - tx_1' - (x_2')^2) dt = 2$,

$x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

10.76 $\int_0^1 x_{1'} x_{2'} dt \to extr$; $\int_0^1 x_1 dt = \int_0^1 x_2 dt = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = 2$.

$x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

11. ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА

11.1. Задача Лагранжа з неголономними зв'язками

Жозеф Луї Лагранж у роботі "Аналітична механіка" (1788) сформулював таку задачу. Відшукати екстремум функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x'(t))dt \to extr \tag{11.1}$$

у класі векторних функцій, які задовольняють умови

$$\Phi_j(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1. \tag{11.2}$$

Задачу (11.1), (11.2) та різні її модифікації, пов'язані з додатковими обмеженнями (іншими граничними умовами, додатковими інтегральними співвідношеннями тощо), називають *задачею Лагранжа з неголономними зв'язками* на відміну від задачі з обмеженнями $\Phi_j(t, x(t)) = 0$, $j = 1, \dots, m$, де функції $\Phi_j(t, x)$ не залежать від x'. Такі обмеження у варіаційному численні називають *фазовими*. У механіці ці обмеження називають ще *голономними зв'язками.*

Задачу (11.1), (11.2) Лагранж розв'язав за допомогою методу невизначених множників. Цей метод базується на тому, що умовний екстремум у задачі (11.1), (11.2) досягається на кривих, які є екстремалями функціонала

$$£(x(\cdot), \lambda(\cdot), \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0)dt,$$

$$L(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0) = \lambda_0 f(t, x(t), x'(t)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\Phi_j(t, x(t), x'(t)).$$

Функція $£(x(\cdot), \lambda(\cdot), \lambda_0)$ називається *функцією Лагранжа.* Число λ_0 і функції $\lambda_j(t)$, $j = 1, \dots, m$ називаються *множниками Лагранжа.*

Теорема 11.1 (про принцип невизначених множників Лагранжа). *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ – розв'язок задачі (11.1), (11.2) на умовний екстремум, то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа λ_0, $\lambda_j(t)$, $j = 1, \dots, m$ такі, що функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера*

$$L_x(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0) = \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0). \tag{11.3}$$

Отже, щоб визначити невідомі функції $x_k(t)$, $k=1,\dots,n$, і $\lambda_j(t)$, $j=1,\dots,m$, потрібно розв'язати рівняння Ейлера (11.3) і рівняння (11.2).

Зауважимо, що рівняння (11.2) будуть рівняннями Ейлера функціонала $\pounds(x(\cdot),\lambda(\cdot),\lambda_0)$, якщо аргументами функціонала вважати не лише функцію $x(\cdot)$, а й функції $\lambda_j(t)$, $j=1,\dots,m$.

11.2. Задача Лагранжа у формі Понтрягіна

У класі задач на умовний екстремум виділимо таку задачу Лагранжа:

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt+\psi_0(x(t_0),x(t_1))\to extr, \tag{11.4}$$

$$x'(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),\quad t_0\le t\le t_1, \tag{11.5}$$

$$\psi_j(x(t_0),x(t_1))=0,\quad j=1,\dots,s. \tag{11.6}$$

Тут функції

$$f:R\times R^n\times R^r\to R,\quad \varphi:R\times R^n\times R^r\to R^n,\quad \psi:R^n\times R^n\to R^s.$$

Моменти часу t_0, t_1 вважатимемо фіксованими.

Обмеження $x'(t)=\varphi(t,x(t),u(t))$ називають *диференціальним зв'язком*, обмеження $\psi_j(x(t_0),x(t_1))=0$, $j=1,\dots,s$, – *граничними* або *крайовими* умовами. Усі функції $f(t,x,u)$, $\varphi(t,x,u)$, $\psi_j(x_0,x_1)$, $j=1,\dots,s$ неперервно диференційовні. Задача (11.4)–(11.6) досліджується в банаховому просторі $Z=C^1([t_0,t_1],R^n)\times C([t_0,t_1],R^r)$. Елементи z простору Z мають вигляд $z=(x(\cdot),u(\cdot))$, де $x(\cdot)$ – неперервно диференційовна n-вимірна вектор-функція, а $u(\cdot)$ – неперервна r-вимірна вектор-функція. Елемент $z=(x(\cdot),u(\cdot))$ простору Z називають *керованим процесом* задачі (11.4)–(11.6), якщо функції $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ задовольняють рівняння (11.5), та *допустимим керованим процесом*, якщо, крім того, функція $x(\cdot)$ задовольняє граничні умови (11.6).

Допустимий керований процес $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ називається *оптимальним керованим процесом*, якщо існує таке число $\varepsilon>0$, що для всіх допустимих керованих процесів $(x(\cdot),u(\cdot))$, які задовольняють умови $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{C^1}<\varepsilon$, $\|u(\cdot)-\hat{u}(\cdot)\|_C<\varepsilon$, виконується нерівність

$$J(x(\cdot),u(\cdot))\ge J(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)).$$

Отже, оптимальний керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ дає слабкий локальний мінімум задачі (11.4)–(11.6).

Побудуємо задачу на безумовний екстремум:

$$\pounds(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \mu, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), u(t), p(t), \lambda_0)dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to extr \quad (11.7)$$

де

$$L(t, x(t), x'(t), u(t), p(t), \lambda_0) = p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) + \lambda_0 f(x, x(t), u(t)), \quad (11.8)$$

$$l(x(t_0), x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \mu_j \psi_j (x(t_0), x(t_1)), \quad \lambda_0 = \mu_0. \quad (11.9)$$

Якщо функціонал $\pounds(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \mu, \lambda_0)$ побудовано, то відповідно до методу Лагранжа потрібно шукати екстремум цього функціонала, припускаючи, що змінні $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ – незалежні. Інакше кажучи, потрібно розв'язати задачу

$$\pounds(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \mu, \lambda_0) \to extr, \quad (11.10)$$

вважаючи, що множники Лагранжа фіксовані. Задача (11.10) – це задача Больца, досліджена в п. 5.7.

Теорема 11.2 (теорема Ейлера – Лагранжа). *Якщо* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ – *оптимальний керований процес задачі* (*11.4*)–(*11.6*), *то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* λ_0, μ_0 ($\lambda_0 = \mu_0 \geq 0$ *у задачі на мінімум,* $\lambda_0 = \mu_0 \leq 0$ *у задачі на максимум*), $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, $p(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ *такі, що виконуються*:

а) рівняння Ейлера – Лагранжа

$$L_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \hat{u}(t), p(t), \lambda_0) = \frac{d}{dt} L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \hat{u}(t), p(t), \lambda_0), \quad (11.11)$$

$$L_u(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \hat{u}(t), p(t), \lambda_0) = 0; \quad (11.12)$$

б) умови трансверсальності:

$$\begin{aligned} L_{x'}(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{x}'(t_0), \hat{u}(t_0), p(t_0), \lambda_0) &= \frac{\partial}{\partial x(t_0)} l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)), \\ L_{x'}(t_1, \hat{x}(t_1), \hat{x}'(t_1), \hat{u}(t_1), p(t_1), \lambda_0) &= -\frac{\partial}{\partial x(t_1)} l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Доведення. Оскільки функція L не залежить від похідної $u'(\cdot)$, а функція l не залежить від $u(\cdot)$, то рівняння Ейлера по $u(\cdot)$ має вигляд (11.12), а умов трансверсальності по $u(\cdot)$ зовсім немає. Покажемо, що до задачі (11.4)–(11.6) можна застосувати принцип невизначених множників Лагранжа в загальному вигляді, і запишемо необхідні умови екстремуму відповідно до теореми 4.6. Позначимо $Y = C([t_0, t_1], R^n)$. Визначимо функції $f_0 : Z \to R$, $F : Z \to Y$, $H : Z \to R^s$ за допомогою таких співвідношень:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= J(z) = J(x(\cdot), u(\cdot)), \\ F(z)(t) &= x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)), \\ H(z) &= \Psi(x(t_0), x(t_1)). \end{aligned}$$

Використавши таким чином визначені функції, задачу (11.4)–(11.6) можна записати як задачу на умовний екстремум

$$f_0(z) \to extr, \quad F(z) = 0, \quad H(z) = 0, \tag{11.14}$$

де

$$z = (x(\cdot), u(\cdot)) \in Z = C^1([t_0, t_1], R^n) \times C([t_0, t_1], R^r).$$

Перевіримо, чи виконуються умови теореми 4.6.

1. Диференційовність. Функція $f_0(z)$ диференційовна в околі точки $\hat{z} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. Якщо $w = (h(\cdot), v(\cdot))$, то

$$f_0'(\hat{z})w = \int_{t_0}^{t_1} [\langle a(t); h(t)\rangle + \langle b(t); v(t)\rangle] dt, \tag{11.15}$$

де $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ – скалярний добуток у просторі R^n

$$\begin{aligned} a(t) &= f_x'(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \{f_{x_k}'(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\}_{k=\overline{1,n}} \\ b(t) &= f_u'(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \{f_{u_j}'(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\}_{j=\overline{1,r}} \end{aligned} \tag{11.16}$$

Відображення F диференційовне і

$$F'(z)w(t) = h'(t) - A(t)h(t) - B(t)v(t), \tag{11.17}$$

де матричні функції $A(t)$, $B(t)$ визначаються так:

$$A(t) = \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_j(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \right\}_{j=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}}, \tag{11.18}$$

$$B(t) = \varphi_u(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \varphi_j(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \right\}_{j=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,r}}. \tag{11.19}$$

Відображення H теж диференційовне і

$$H'(\hat{z})w = \Gamma_0 h(t_0) + \Gamma_1 h(t_1), \tag{11.20}$$

де матричні функції

$$\Gamma_0 = \Psi_{x_0}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k(t_0)} \Psi_j(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \right\}_{j=\overline{1,s}}^{k=\overline{1,n}},$$

$$\Gamma_1 = \Psi_{x_1}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k(t_1)} \Psi_j(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \right\}_{j=\overline{1,s}}^{k=\overline{1,n}}.$$

2. Відображення $F(z)$ регулярне в точці $\hat{z}$, оскільки для будь-якої функції $y(\cdot) \in C([t_0, t_1], R^n)$ рівняння

$$F'(\hat{z})w(t) = h'(t) - A(t)h(t) - B(t)v(t) = y(t)$$

має розв'язок унаслідок неперервності функцій $A(t)$, $B(t)$, визначених співвідношеннями (11.18), (11.19). Таким чином, усі умови теореми Лагранжа виконуються і до задачі (11.14) можна застосувати метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа має вигляд

$$\tilde{\pounds}(z, y^*, \mu, \lambda_0) = \lambda_0 f_0(z) + \langle y^*, F(z) \rangle + \langle \mu; H(z) \rangle, \tag{11.21}$$

де $\lambda_0 \in R$, $y^* \in Y^*$, $\mu \in R^s$ – множники Лагранжа. Відповідно до теореми існують такі множники, що в точці $\hat{z} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ виконуються рівності

$$\tilde{\pounds}_x = 0, \quad \tilde{\pounds}_u = 0, \tag{11.22}$$

які рівносильні рівності $\tilde{\pounds}_z = 0$. Покажемо, що функціонали $\pounds$ та $\tilde{\pounds}$, визначені формулами (11.7)–(11.9), (11.21), збігаються й умови стаціонарності (11.22) достатні для виконання умов теореми. Відповідно до теореми Рісса про вигляд лінійного неперервного функціонала у просторі $C([t_0, t_1], R^n)$ функціонал $y^* \in Y^*$ можна зобразити так:

$$\langle y^*, y(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle y(t); d\nu(t) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} y_k(t) d\nu_k(t), \tag{11.23}$$

де $\nu_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ – неперервні справа функції обмеженої варіації. Підставивши (11.23) в (11.21), одержимо

$$\tilde{\pounds}(z, y^*, \mu, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)); d\nu(t) \rangle + \langle \mu; \Psi(x(t_0), x(t_1)) \rangle.$$

Із (11.15)–(11.20) виведемо

$$\tilde{\mathfrak{L}}_x(\hat{z})h(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1}\langle\lambda_0 a(t);h(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1}\langle h'(t) - A(t)h(t);d\nu(t)\rangle + \langle\mu;\Gamma_0 h(t_0)\rangle + \langle\mu;\Gamma_1 h(t_1)\rangle\rangle. \quad (11.24)$$

Проінтегруємо частинами доданки, що містять $h(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle\lambda_0 a(t);h(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1}\langle\int_t^{t_1}\lambda_0 a(\tau)d\tau;h'(t)\rangle dt + \langle\int_{t_0}^{t_1}\lambda_0 a(\tau)d\tau;h(t_0)\rangle,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\langle A(t)h(t);d\nu(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_1}\langle\int_t^{t_1}A^*(\tau)d\nu(\tau);h'(t)\rangle dt + \langle\int_{t_0}^{t_1}A^*(\tau)d\nu(\tau);h(t_0)\rangle.$$

Підставивши ці вирази у формулу (11.24), одержимо

$$L_x(\hat{z})h(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1}\langle h'(t);\int_t^{t_1}\lambda_0 a(\tau)d\tau - \int_t^{t_1}A^*(\tau)d\nu(\tau) + \Gamma_1^*\mu\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1}\langle h'(t);d\nu(t)\rangle + \langle h(t_0);\Gamma_0^*\mu + \Gamma_1^*\mu + \int_{t_0}^{t_1}\lambda_0 a(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t_1}A^*(\tau)d\nu(\tau)\rangle. \quad (11.25)$$

Права частина (11.25) є неперервним лінійним функціоналом у просторі $C^1([t_0,t_1],R^n)$. Його можна переписати у вигляді

$$L_x(\hat{z})h(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1}\langle h'(t);d\tilde{\nu}(t)\rangle + \langle a;h(t_0)\rangle, \quad (11.26)$$

де

$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) + \int_{t_0}^{t}\int_t^{t_1}\lambda_0 a(\tau)d\tau dt - \int_{t_0}^{t}\int_t^{t_1}A^*(\tau)d\nu(\tau)dt + \Gamma_1^*\mu t, \quad (11.27)$$

$$a = \Gamma_0^*\mu + \Gamma_1^*\mu + \int_{t_0}^{t_1}\lambda_0 a(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t_1}A^*(\tau)d\nu(\tau). \quad (11.28)$$

Використавши єдиність зображення лінійного неперервного функціонала у просторі $Y = C^1([t_0,t_1],R^n)$, із рівняння $\tilde{\mathfrak{L}}_x = 0$ одержимо

$$\tilde{\nu}(t) \equiv 0, \quad a = 0. \quad (11.29)$$

Із рівностей (11.26)–(11.29) випливає, що вектор-функція $\nu(t)$ абсолютно неперервна. Позначимо $p(t) = \nu'(t)$. Тоді відповідно до (11.26), (11.27), (11.29) функція $p(t)$ задовольняє рівняння

$$p(t) + \int_t^{t_1}\lambda_0 a(\tau)d\tau - \int_t^{t_1}A^*(\tau)p(\tau)d\tau + \Gamma_1^*\mu = 0. \quad (11.30)$$

Підставимо в (11.30) $t = t_0$ і врахуємо, що a має вигляд (11.28), тоді

$$p(t_0) = \Gamma_0^*\mu. \quad (11.31)$$

Якщо $t = t_1$, то

$$p(t_1) = -\Gamma_1^*\mu. \quad (11.32)$$

Продиференціювавши (11.30), одержимо

$$-p'(t) = A^*(t)p(t) - \lambda_0 a(t). \qquad (11.33)$$

Скористаємося тепер тим, що лінійний неперервний функціонал

$$\tilde{\mathcal{L}}_u(\hat{z})v(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \lambda_0 b(t) - B^*(t)p(t); v(t)\rangle dt$$

у просторі $C([t_0, t_1], R^r)$ дорівнює нулю відповідно до необхідної умови екстремуму першого порядку. Із теореми Рісса випливає, що

$$B^*(t)p(t) = \lambda_0 b(t). \qquad (11.34)$$

Завершуючи доведення теореми, визначимо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \langle p(t); x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t))\rangle.$$

Тоді рівняння (11.33) – це рівняння Ейлера по x (11.11):

$$\left(L_x - \frac{d}{dt} L_{x'}\right)\Big|_{(\hat{x}(t), \hat{u}(t))} = 0.$$

Рівняння (11.34) – це рівняння Ейлера по u (11.12):

$$L_u \big|_{(\hat{x}(t), \hat{u}(t))} = 0.$$

Рівняння (11.31) (11.32) – це умови трансверсальності (11.13):

$$L_{x'} \big|_{(\hat{x}(t_0), \hat{u}(t_0))} = l_{x(t_0)}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)),$$

$$L_{x'} \big|_{(\hat{x}(t_1), \hat{u}(t_1))} = -l_{x(t_1)}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)).$$

Отже, теорему доведено. □

Теорему 11.2 можна використовувати для виведення необхідних умов екстремуму в ізопериметричній задачі варіаційного числення.

Розглянемо таку ізопериметричну задачу:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), x'(t))dt \to \inf,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), x'(t))dt = l_j, \quad j = \overline{1, m}, \qquad (11.35)$$

$$\psi_k(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad k = \overline{1, s},$$

де функції $f_j : R \times R^n \times R^n \to R$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $\psi_k : R^n \times R^n \to R$, $k = 1, \ldots, s$ задовольняють необхідні умови гладкості.

Якщо визначити нові змінні $u_i = x_i^{'}$, $i = \overline{1, n}$, $x_{j+n}^{'} = f_j(t, x(t), u(t))$, $j = \overline{1, m}$, то одержимо таку задачу Лагранжа:

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_n(t))dt\to\inf,$$

$$x_i'(t)=u_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad t_0\le t\le t_1,$$

$$x_{n+j}'(t)=f_j(t,x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_n(t)),$$

$$j=\overline{1,m},\quad t_0\le t\le t_1,$$

$$\psi_k(t,x_1(t_0),\dots,x_n(t_0),x_1(t_1),\dots,x_n(t_1))=0,\quad k=\overline{1,s},$$

$$x_{n+j}(t_0)=0,\quad x_{n+j}(t_1)=l_j,\quad j=\overline{1,m}.$$

Застосовуючи теорему Ейлера – Лагранжа, переконуємося у справедливості такого твердження.

Теорема 11.3 (про необхідні умови екстремуму функціонала ізопериметричної задачі). *Якщо функція* $\hat{x}(\cdot)\in C([t_0,t_1],R^n)$ *дає слабкий локальний мінімум в ізопериметричній задачі (11.35), то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* $\lambda_j\in R,\ \ j=0,1,\dots,m,$ $\mu_k\in R,\ k=1,\dots,s,$ *такі, що для лагранжіана*

$$L(t,x,x',\lambda,\mu)=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j f_j(t,x(t),x'(t))$$

виконується рівняння Ейлера

$$\left(L_x-\frac{d}{dt}L_{x'}\right)\Big|_{\hat{x}(t)}=0$$

і граничні умови

$$L_{x'}\big|_{\hat{x}(t_0)}=l'_{x(t_0)}(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)),$$

$$L_{x'}\big|_{\hat{x}(t_1)}=-l'_{x(t_1)}(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)),$$

де

$$l(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))=\sum_{k=1}^{s}\mu_k\psi_k(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)).$$

11.3. Задача Лагранжа на множині функцій з вільними границями

У просторі $Z=C^1(\Delta,R^n)\times C(\Delta,R^r)\times R\times R$ дослідимо таку задачу на умовний екстремум:

$$J_0(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt+\psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to \inf, \quad (11.36)$$

$$x'(t)=\varphi(t,x(t),u(t)), \quad t_0\le t\le t_1, \quad (11.37)$$

$$J_j(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_j(t,x(t),u(t))dt+\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\le 0, \quad j=1,\ldots,m, \quad (11.38)$$

$$J_j(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_j(t,x(t),u(t))dt+\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=0, \quad j=m+1,\ldots,s. \quad (11.39)$$

Тут Δ – заданий скінченний відрізок числової прямої, функції

$$f_j: R\times R^n\times R^r\to R,$$

$$\psi_j: R\times R^n\times R\times R^n\to R, \quad j=0,1,\ldots,s,$$

$$\varphi: R\times R^n\times R^r\to R^n,$$

неперервно диференційовні.

Четвірку $(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)$ називають *керованим процесом* у задачі (11.36)–(11.39), якщо виконуються умови:

а) керування $u(\cdot)\in KC^1([t_0,t_1],R^r)$;

б) фазова траєкторія $x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1],R^n)$;

в) функція $x(\cdot)$ задовольняє диференціальне рівняння $x'(t)=\varphi(t,\ x(t),\ u(t))$ для всіх $t\in[t_0,t_1]$ за винятком точок розриву керування $u(\cdot)$.

Керований процес називається *допустимим*, якщо виконуються умови (11.38), (11.39). Допустимий керований процес $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\ \hat{t}_0,\hat{t}_1)$ називають *локально оптимальним керованим процесом*, якщо існує таке $\varepsilon>0$, що для будь-якого керованого процесу $(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)$, що задовольняє умови $|x(t)-\hat{x}(t)|<\varepsilon$, $|x'(t)-\hat{x}'(t)|<\varepsilon$, $|u(t)-\hat{u}(t)|<\varepsilon$, $t\in[t_0,t_1]\cap[\hat{t}_0,\hat{t}_1]$, виконується нерівність

$$J_0(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)\ge J_0(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1).$$

Теорема 11.4 (теорема Ейлера – Лагранжа). *Нехай* $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\ \hat{t}_0,\hat{t}_1)$ *– оптимальний керований процес задачі (11.36)–(11.39), функції* $f_j(t,x,u)$, $j=0,1,\ldots,s$ *та їхні частинні похідні по* x *та* u *неперервні, функція* $\varphi(t,x,u)$ *та її частинна похідна по* x *неперервні, функції*

$\psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, $j = \overline{0, s}$ – *неперервно диференційовні. Тоді існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_s) \in R^{s+1}$ *і вектор-функція* $p(\cdot) \in C^1(\Delta, R^n)$ *такі, що для функції Лагранжа*

$$\pounds(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t))$$
$$+ p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)))] dt + l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

де

$$f(t, x(t), u(t)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)),$$

$$l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

виконуються умови:

1) стаціонарності по x *рівняння Ейлера для лагранжіана*

$$L(t, x(t), x'(t), u(t)) = f(t, x(t), u(t)) + p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t))):$$

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) \Leftrightarrow p'(t) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{f}_{jx}(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t), \quad \hat{t}_0 \le t \le \hat{t}_1,$$

де $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$;

2) трансверсальності по x:

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_0) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{\psi}_{jx(t_0)},$$

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{\psi}_{jx(t_1)},$$

де

$$\hat{l} = l(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \psi_j(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1));$$

3) стаціонарності по u:

$$\hat{L}_u(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{f}_{ju}(t) - p(t)\hat{\varphi}_u(t) = 0, \quad \hat{t}_0 \le t \le \hat{t}_1;$$

4) стаціонарності по t_0, t_1:

$$L_{t_0} = 0 \quad \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)} + \hat{x}'(\hat{t}_0) = 0,$$

$$L_{t_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)} + \hat{x}'(\hat{t}_1) = 0;$$

5) доповнюючої нежорсткості:

$$\lambda_j J_j(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0, \quad j = 1, \dots, m;$$

6) невід'ємності $\lambda_j \ge 0$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Доведення. Покажемо, що до задачі (11.36)–(11.39) можна застосувати принцип невизначених множників Лагранжа в задачах з обмеженнями-нерівностями (теорема 4.10). Визначимо функцію $F: Z \to C(\Delta, R^n) = Y$ за допомогою співвідношення

$F(z)(t) = x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t))$.

Використавши так визначену функцію, задачу (11.36)–(11.39) можна записати як задачу на умовний екстремум у банаховому просторі $Z = C^1(\Delta, R^n) \times C(\Delta, R^r) \times R \times R$:

$$J_0(z) \to \inf, \quad F(z) = 0, \quad J_j(z) \le 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$J_j(z) = 0, \quad j = m+1, \dots, s.$$

Відображення F, J_j, $j = 0, 1, \dots, s$ – диференційовні. Якщо $w = (h(\cdot), v(\cdot), \tau_0, \tau_1)$, то

$$\begin{aligned} J_j'(\hat{z})w &= \int_{t_0}^{t_1} (\hat{f}_{jx} h + \hat{f}_{ju} v) dt + \hat{f}_j(\hat{t}_1)\tau_1 - \hat{f}_j(\hat{t}_0)\tau_0 \\ &+ (\hat{\psi}_{jt_0} + \hat{\psi}_{jx(t_0)} \hat{x}'(\hat{t}_0))\tau_0 + (\hat{\psi}_{jt_1} + \hat{\psi}_{jx(t_1)} \hat{x}'(\hat{t}_1))\tau_1 \\ &+ \hat{\psi}_{jx(t_0)} h(\tau_0) + \hat{\psi}_{jx(t_1)} h(\tau_1), \quad j = 0, 1, \dots, s, \\ F'(\hat{z})w &= h'(t) - \hat{\varphi}_x(t) h(t) - \hat{\varphi}_u(t) v(t). \end{aligned}$$

Образ відображення $F'(\hat{z})$ замкнутий в Y унаслідок того, що образ $F'(\hat{z})Z = Y$. Дійсно, для будь-якого $y(\cdot) \in Y = C(\Delta, R^n)$ візьмемо $v(\cdot) \equiv 0$, $\tau_0 = \tau_1 = 0$. Рівняння $F'(\hat{z})(h(\cdot), 0, 0, 0) = y(\cdot)$ еквівалентно системі лінійних диференціальних рівнянь

$$h'(t) - \hat{\varphi}_x(t) h(t) = y(t)$$

з неперервними коефіцієнтами. Таке рівняння має розв'язок $h(\cdot) \in C^1(\Delta, R^n)$ відповідно до теореми існування для лінійних систем. Множина BA, де $B = (J_{m+1}'(\hat{z}), \dots, J_s'(\hat{z}))$, $A = F'(\hat{z})$, замкнута в R^{s-m} як підпростір скінченновимірного простору. Таким чином, усі умови теореми 4.10 виконуються. Отже, існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$, $y^* \in Y^*$ такі, що для функції Лагранжа

$$\begin{aligned}\tilde{\pounds}(z,y^*,\lambda) &= \tilde{\pounds}(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1,y^*,\lambda)\\ &= \int_{t_0}^{t_1}(\sum_{j=0}^{s}\lambda_j f_j(t,x(t),u(t)))dt\\ &\quad + \sum_{j=0}^{s}\lambda_j\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) + \langle y^*, x'(\cdot)-\varphi(\cdot,x(\cdot),u(\cdot))\rangle\end{aligned}$$

виконуються умови стаціонарності $\tilde{\pounds}_x = 0$, $\tilde{\pounds}_u = 0$, $\tilde{\pounds}_{t_0} = 0$, $\tilde{\pounds}_{t_1} = 0$, доповнюючої нежорсткості й невід'ємності.

Для доведення теореми досить показати, що рівність $\tilde{\pounds}_x = 0$ еквівалентна умовам 1), 2), рівність $\tilde{\pounds}_u = 0$ еквівалентна умові 3), а з рівностей $\tilde{\pounds}_{t_0} = 0$, $\tilde{\pounds}_{t_1} = 0$ можна вивести умову 4).

Як і при доведенні теореми 11.2 з умови стаціонарності по x

$$\begin{aligned}\tilde{\pounds}_x(\hat{z})(h(\cdot),0,0,0) &= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}(\sum_{j=0}^{s}\lambda_j\hat{f}_{jx}(t))h(t)dt + \hat{l}_{x(t_0)}h(\hat{t}_0)\\ &\quad + \hat{l}_{x(t_1)}h(\hat{t}_1) + \langle y^*, h'(\cdot)-\hat{\varphi}_x(\cdot)h(\cdot)\rangle = 0\end{aligned}$$

випливає, що для лінійного неперервного функціонала $y^* \in Y^*$ існує функція $p(t)$, для якої

$$\begin{aligned}\langle y^*, y(\cdot)\rangle &= \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} p(t)y(t)dt,\\ \hat{l}_{x(t_0)} &= p(\hat{t}_0), \quad \hat{l}_{x(t_1)} = -p(\hat{t}_1).\end{aligned}$$

Отже $\pounds = \tilde{\pounds}$, тому виконуються всі умови теореми. Теорему доведено. □

11.4. Задача Лагранжа на множині функцій з рухомими границями

У просторі $Z = C^1(\Delta, R^n)\times R\times R$ дослідимо таку задачу на умовний екстремум:

$$\begin{gathered}J_0(x(\cdot),t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),x'(t))dt + \psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) \to extr,\\ \psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) = 0, \quad j = 1,\ldots,m,\end{gathered} \tag{11.40}$$

де Δ – заданий скінченний відрізок, $t_0, t_1 \in \Delta$.

Теорема 11.5 (про необхідні умови екстремуму функціонала на множині функцій з рухомими границями). *Нехай функція* $L(t,x,x')$ *та її частинні похідні по* x *і* x' *неперервні, функції* ψ_j, $j=0,1,\ldots,m$ *– неперервно диференційовні. Якщо* $(\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0;\hat{t}_1)$ *– розв'язок задачі* (*11.40*) *з рухомими границями, то існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *такі, що для функції Лагранжа*

$$£(x(\cdot),t_0,t_1,\lambda)=\int_{t_0}^{t_1}\lambda_0 L(t,x(t),x'(t))dt+l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),$$

де

$$l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),$$

виконуються умови:

а) стаціонарності по x *(рівняння Ейлера для інтегранта* $\lambda_0 L(t,x,x')$*):*

$$\lambda_0\hat{L}_x(t)=\frac{d}{dt}\lambda_0\hat{L}_{x'}(t),\quad t\in[\hat{t}_0,\hat{t}_1];$$

б) трансверсальності по x *:*

$$\lambda_0\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0)=\hat{l}_{x(t_0)},\quad \lambda_0\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1)=-\hat{l}_{x(t_1)};$$

в) стаціонарності по t_0,t_1*:*

$$£_{t_0}=0\quad\Leftrightarrow -\lambda_0\hat{L}(\hat{t}_0)+\hat{l}_{t_0}+\hat{l}_{x(t_0)}\hat{x}'(\hat{t}_0)=0,$$

$$£_{t_1}=0\quad\Leftrightarrow \lambda_0\hat{L}(\hat{t}_1)+\hat{l}_{t_1}+\hat{l}_{x(t_1)}\hat{x}'(\hat{t}_1)=0.$$

Зауважимо, що умови стаціонарності по t_0,t_1 записуються тільки для задач на множині функцій з рухомими границями.

Ця теорема є наслідком теореми 11.4.

11.5. Правило невизначених множників Лагранжа

Правило невизначених множників розв'язування задач Лагранжа таке:

1. Подати задачу у вигляді (11.36)–(11.39).
2. Скласти функцію Лагранжа

$$£=\int_{t_0}^{t_1}(f(t,x(t),u(t))+p(t)(x'(t)-\varphi(t,x(t),u(t)))dt+l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),$$

де

$$f(t,x(t),u(t)) = \sum_{j=0}^{s}\lambda_j f_j(t,x(t),u(t)),$$

$$l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s}\lambda_j\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)).$$

3. Записати необхідні умови оптимальності керованого процесу $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),t_0,t_1)$:

а) стаціонарності по x – рівняння Ейлера:

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) \Leftrightarrow p'(t) = \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t);$$

б) трансверсальності по x:

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},$$

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)};$$

в) стаціонарності по u – рівняння Ейлера:

$$\hat{L}_u(t) = 0 \Leftrightarrow \hat{f}_u(t) - p(t)\hat{\varphi}_u(t) = 0;$$

г) стаціонарності по t_0, t_1:

$$\pounds_{t_0} = 0 \quad \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\hat{x}'(\hat{t}_0) = 0,$$

$$\pounds_{t_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\hat{x}'(\hat{t}_1) = 0;$$

д) доповнюючої нежорсткості:

$$\lambda_j J_j(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1) = 0, \quad j = 1,\ldots,m;$$

е) невід'ємності $\lambda_j \geq 0$, $j = 0,1,\ldots,m$.

4. Відшукати допустимі керовані процеси, які задовольняють умови п. 3 з одночасно не рівними нулю множниками Лагранжа.

5. Відшукати розв'язок задачі серед допустимих керованих процесів, визначених у п. 4, або довести, що розв'язків немає.

Приклад 11.1. Розв'язати задачу:

$$\int_0^{\pi/2} u^2(t)dt \to extr, \quad x'' + x = u, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1.$$

Розв'язок:

1. Запишемо задачу у вигляді задачі Лагранжа, зробивши заміну $x_1 = x$, $x_2 = x'$:

$$\int_0^{\pi/2} u^2(t)dt \to extr,$$

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = u - x_1,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(\pi/2) = 1.$$

2. Складемо функцію Лагранжа:

$$£ = \int_0^{\pi/2} (\lambda_0 u^2(t) + p_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + p_2(t)(x_2'(t) + x_1(t) - u(t)))dt$$
$$+ \mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0) + \mu_3 x_1(\pi/2).$$

3. Запишемо необхідні умови оптимальності:

а) рівняння Ейлера для функції Лагранжа

$$L = \lambda_0 u^2 + p_1(x'_1 - x_2) + p_2(x'_2 + x_1 - u):$$

$$L_{x_1} = \frac{d}{dt} L_{x_1'} \Leftrightarrow p_1' = p_2,$$

$$L_{x_2} = \frac{d}{dt} L_{x_2'} \Leftrightarrow p_2' = -p_1,$$

$$L_u = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u - p_2 = 0;$$

б) трансверсальності для термінанта

$$l = \mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0) + \mu_3 x_1(\pi/2):$$

$$p_1(0) = \mu_1, \quad p_2(0) = \mu_2, \quad p_2(\pi/2) = 0, \quad p_1(\pi/2) = -\mu_3.$$

4. Нехай $\lambda_0 = 0$, тоді $p_1(t) = p_2(t) \equiv 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Усі множники Лагранжа – нулі. Це суперечить теоремі 11.4. Тому при $\lambda_0 = 0$ допустимих екстремалей немає.

5. Візьмемо $\lambda_0 = 1/2$. Із системи рівнянь Ейлера одержимо рівняння

$$p_2'' + p_2 = 0.$$

Загальний розв'язок такого диференціального рівняння:

$$p_2 = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t).$$

Оскільки $p_2(\pi/2) = 0$, то $p_2 = C\cos(t)$, тому $u(t) = C\cos(t)$. Підставляючи таку функцію $u(t)$ в диференціальне рівняння $x'' + x = u$, одержуємо $x'' + x = C\cos(t)$. Загальний розв'язок цього рівняння $x(t) = (C_1 + C_2 t)\sin(t) + C_3 \cos(t)$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3 визначаються із граничних умов. Єдиний допустимий керований процес

$$(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = (\frac{2}{\pi} t \sin(t), \frac{4}{\pi} \cos(t)).$$

5. Покажемо, що екстремаль $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) \in abs\min$. Щоб пара $(\hat{x}(\cdot)+x(\cdot),\hat{u}(\cdot)+u(\cdot))$ була допустимим керованим процесом, потрібно взяти функцію $x(\cdot)\in C^2[0,\pi/2]$, $x(0)=x'(0)=x(\pi/2)=0$ та керування $u=x''+x$. Тоді

$$J(\hat{x}(\cdot)+x(\cdot),\hat{u}(\cdot)+u(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\hat{u}(t)u(t)dt+\int_0^{\pi/2}u^2(t)dt \ge 2\int_0^{\pi/2}\hat{u}(t)(x''(t)+x(t))dt.$$

Інтегруючи частинами та враховуючи граничні умови, одержимо

$$\int_0^{\pi/2}\hat{u}(t)(x''(t)+x(t))dt$$
$$=\hat{u}(t)x'(t)\,|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\hat{u}(t)x(t)dt-\int_0^{\pi/2}\hat{u}'(t)x'(t)dt$$
$$=-x(t)\hat{u}'(t)\,|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(\hat{u}(t)+\hat{u}''(t))x(t)dt=0.$$

Отже, $J(\hat{x}(\cdot)+x(\cdot),\hat{u}(\cdot)+u(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$, тому $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) \in abs\min$.

Відповідь: $(\frac{2}{\pi}t\sin(t),\frac{4}{\pi}\cos(t)) \in abs\min$. Δ

Приклад 11.2 (задача Чаплигіна.) Визначити замкнуту криву, по якій має рухатися літак, щоб за час T облетіти найбільшу площу, якщо швидкість вітру дорівнює q. Швидкість літака стала за величиною і дорівнює v.

Розв'язок:

1. Формалізація задачі. Хай $\alpha(t)$ – кут, який визначає положення вектора швидкості літака відносно напрямку, протилежного до напрямку вітру. Тоді задачу можна формалізувати так:

$$S(x(\cdot),y(\cdot))=\frac{1}{2}\int_0^T(x(t)y'(t)-y(t)x'(t))dt \to \max,$$
$$x'(t)=v\cos(\alpha(t))-q, y'(t)=-v\sin(\alpha(t)),$$
$$x(0)=x(T), y(0)=y(T).$$

Застосуємо метод невизначених множників Лагранжа. У задачі функція керування $u(t)=\alpha(t)$.

2. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x(\cdot),y(\cdot),\alpha(\cdot),p_1(\cdot),p_2(\cdot),\lambda_0,\mu_1,\mu_2)$$
$$=\int_0^T[\frac{\lambda_0}{2}(x(t)y'(t)-y(t)x'(t))+p_1(t)(x'(t)-v\cos(\alpha(t))+q)$$
$$+p_2(t)(y'(t)+v\sin(\alpha(t))]dt+\mu_1(x(0)-x(T))+\mu_2(y(0)-y(T)).$$

3. Запишемо необхідні умови оптимальності:
рівняння Ейлера – Лагранжа:

$$\frac{\lambda_0}{2}y' - \frac{d}{dt}(-\frac{\lambda_0}{2}y + p_1) = 0,$$

$$-\frac{\lambda_0}{2}x' - \frac{d}{dt}(\frac{\lambda_0}{2}x + p_2) = 0,$$

$$p_1 v\sin(\alpha(t)) + p_2 v\cos(\alpha(t)) = 0;$$

умови трансверсальності:

$$L_{x'}(t_0) = (-\frac{\lambda_0}{2}y(t) + p_1(t))|_{t=0} = \mu_1,$$

$$L_{x'}(t_1) = (-\frac{\lambda_0}{2}y(t) + p_1(t))|_{t=T} = \mu_1,$$

$$L_{y'}(t_0) = (\frac{\lambda_0}{2}x(t) + p_2(t))|_{t=0} = \mu_2,$$

$$L_{y'}(t_1) = (\frac{\lambda_0}{2}x(t) + p_2(t))|_{t=T} = \mu_2.$$

Перші два рівняння – це рівняння Ейлера за змінними $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, а третє – рівняння Ейлера за змінною $\alpha(\cdot)$.

4. Нехай $\lambda_0 = 0$. Тоді із перших двох рівнянь одержимо $p_1(t) = C_1$, $p_2(t) = C_2$. Якщо $C_1 = C_2 = 0$, то всі множники Лагранжа дорівнюють нулю, а це суперечить принципу Лагранжа. Отже, C_1, C_2 не дорівнюють нулю одночасно. Підставимо значення $p_1(t) = C_1$, $p_2(t) = C_2$ у третє рівняння, одержимо $C_1 v\sin(\alpha(t)) + C_2 v\cos(\alpha(t)) = 0$. Із цього співвідношення випливає, що швидкість літака повинна мати сталий напрямок, який перпендикулярний вектору (C_1, C_2). Це означає, що задача не має розв'язку.

Нехай тепер $\lambda_0 = 1$. Тоді із перших двох рівнянь Ейлера одержимо $p_1(t) = y(t) + C_1$, $p_2(t) = -x(t) + C_2$. Константи C_1, C_2 можна вибрати нулями за рахунок перенесення початку системи координат. Підставивши $p_1(t) = y(t)$, $p_2(t) = -x(t)$ у третє рівняння Ейлера, одержимо

$$y(t)\sin(\alpha(t)) - x(t)\cos(\alpha(t)) = 0.$$

Якщо визначимо $y(t) = r(t)\cos(\alpha(t))$, $x(t) = r(t)\sin(\alpha(t))$, то з останнього рівняння випливає

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q}{v}\frac{dy}{dt}.$$

Інтегруючи це рівняння, одержимо

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{yq}{v} + C.$$

Це рівняння еліпса (за умови, що $v > q$). Його можна подати у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{11.41}$$

де

$$a = \frac{vC}{\sqrt{v^2 - q^2}}, \quad b = \frac{v^2 C}{v^2 - q^2}, \quad y_0 = \frac{vqC}{v^2 - q^2}.$$

Невідома константа C визначається з граничних умов, якщо задано T.

Відповідь:

1. Якщо швидкість літака більше швидкості вітру, то оптимальна траєкторія польоту – еліпс, який описується рівнянням (11.41).

2. Якщо швидкість літака менше швидкості вітру, то він не зможе повернутися в початкову точку. Рівняння (11.41) описує гіперболу. Задача розв'язку не має.

3. Якщо швидкість вітру $q = 0$, то задача Чаплигіна трансформується в задачу Дідони, оптимальна траєкторія польоту – коло. Δ

Приклад 11.3. Скласти рівняння лінії, яка лежить на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$, з'єднує дві точки $A(x_0, y_0, z_0)$ і $B(x_1, y_1, z_1)$ і має найменшу довжину. Така лінія називається *геодезичною лінією*.

Розв'язок:

1. Формалізація задачі. Довжина лінії $(y(x), z(x))$, яка з'єднує точки A і B, обчислюється за формулою

$$l(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx.$$

Потрібно відшукати мінімум функціонала l за умови $\varphi(x, y, z) = 0$ (лінія лежить на заданій поверхні).

Отже, формалізована задача має такий вигляд:

$$l(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx \to \inf,$$

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1.$$

2. Складемо функцію Лагранжа:

$l^* = \int_{x_0}^{x_1}[\sqrt{1+(y')^2+(z')^2} + \lambda(x)\varphi(x,y,z)]dx.$

3. Запишемо рівняння Ейлера:

$$\lambda(x)\varphi_y' = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}, \qquad (11.42)$$

$$\lambda(x)\varphi_z' = \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}, \qquad (11.43)$$

та рівняння $\varphi(x,y,z)=0$. Із цих трьох рівнянь визначають $\lambda(x)$ і функції $y(x)$, $z(x)$, які описують допустиму екстремаль.

Щоб описати геометричні властивості геодезичних ліній, продиференціюємо рівняння $\varphi(x,y,z)=0$ за змінною x. Одержимо

$$\varphi_x' + \varphi_y' y' + \varphi_z' z' = 0.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на $\lambda(x)$ і підставивши замість $\lambda(x)\varphi_y'$ та $\lambda(x)\varphi_z'$ їхні вирази з рівнянь Ейлера, одержимо рівняння, аналогічне рівнянням Ейлера:

$$\lambda(x)\varphi_x' = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}.$$

Вирази, що стоять під знаком похідної, дорівнюють направляючим косинусам дотичної до шуканої геодезичної кривої. Тому рівняння можна переписати так:

$$\frac{d\cos(\alpha)}{dx} = \lambda\varphi_x', \quad \frac{d\cos(\beta)}{dx} = \lambda\varphi_y', \frac{d\cos(\gamma)}{dx} = \lambda\varphi_z'.$$

Користуючись формулою $\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha)$, одержимо

$$\frac{d\cos(\alpha)}{ds} = \mu\varphi_x', \quad \frac{d\cos(\beta)}{ds} = \mu\varphi_y', \frac{d\cos(\gamma)}{ds} = \mu\varphi_z',$$

де $\mu = \lambda\cos(\alpha)$.

Ліві частини цих рівнянь пропорційні направляючим косинусам головної нормалі до кривої, а праві – направляючим косинусам нормалі до поверхні. Отже, уздовж геодезичної лінії головна нормаль до лінії буде нормаллю до поверхні.

Визначимо, наприклад, рівняння найкоротшої лінії, яка лежить на поверхні $15x-7y+z-22=0$ і з'єднує точки $A(1,-1,0)$, $B(2,1,-1)$. Рівняння Ейлера (11.42), (11.43) мають вигляд:

$$\lambda(x)\cdot(-7) = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}},$$

$$\lambda(x)\cdot 1 = \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}.$$

Шукані функції $y=y(x)$, $z=z(x)$ задовольняють рівняння $15x-7y+z-22=0$ і граничні умови $y(1)=-1$, $y(2)=1$, $z(1)=0$, $z(2)=-1$. Додамо друге рівняння Ейлера, помножене на 7, до першого. Одержимо

$$\frac{d}{dx}\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0,$$

звідки

$$\frac{(y'+7z')}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=C.$$

Підставимо в це рівняння $z'=7y'-15$, одержимо $y(x)=C_1x+C_2$. Граничні умови дають $C_1=2$, $C_2=-3$, тому $y(x)=2x-3$, $z(x)=1-x$.

Отже, найкоротша лінія визначається рівняннями $y(x)=2x-3$, $z(x)=1-x$. Δ

Приклад 11.4 (задача про брахістохрону в середовищі з опором). Серед ліній, які з'єднують дві точки A і B, відшукати лінію, рухаючись по якій випущена вниз із початковою швидкістю v_0 матеріальна точка пройде весь шлях за найменший відрізок часу в середовищі, опір якого описується функцією $R(v)$.

Розв'язок:

1. Формалізація задачia. Нехай $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$ – задані точки. Зміна кінетичної енергії точки при русі вздовж кривої відбуватиметься за рахунок додатної роботи сили тяжіння і від'ємної роботи сили опору середовища:

$$d\frac{v^2}{2}=gdy-R(v)ds, \text{ де } ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Нехай x – незалежна змінна. Тоді рівняння має вигляд

$$vv'-gy'+R(v)\sqrt{1+(y')^2}=0. \tag{11.44}$$

Задача зводиться до дослідження на екстремум функціонала

$$J(y(\cdot))=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\upsilon}dx \qquad (11.45)$$

з граничними умовами $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, $\upsilon(x_0)=\upsilon_0$, $\upsilon(x_1)=\upsilon_1$ і неголономним зв'язком (11.44).

2. Складемо лагранжіан задачі (11.44), (11.45)

$$L=\sqrt{1+(y')^2}H+\lambda(x)\upsilon\upsilon'-\lambda(x)gy',$$

де $H=\upsilon^{-1}+\lambda(x)R(\upsilon)$.

Рівняння Ейлера по y має перший інтеграл $L_{y'}=C$ або

$$H\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=C+\lambda(x)g. \qquad (11.46)$$

Рівняння Ейлера по $\upsilon(x)$ має вигляд

$$\sqrt{1+(y')^2}H_\upsilon+\lambda(x)\upsilon'-\frac{d}{dx}(\lambda(x)\upsilon)=0$$

або

$$\upsilon\lambda'(x)\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}=H_\upsilon. \qquad (11.47)$$

Система трьох рівнянь (11.44), (11.46), (11.47) достатня для визначення невідомих функцій $y(x)$, $\upsilon(x)$, $\lambda(x)$. Можна переконатися в справедливості формули

$$H^2-(C+g\lambda)^2=a^2, \qquad (11.48)$$

де a – деяка константа. Із записаних рівнянь можна визначити λ як функцію від υ: $\lambda=\lambda(\upsilon)$. Розділимо (11.46) на (11.47), одержимо

$$dy=\frac{(C+g\lambda)\upsilon d\lambda}{HH_\upsilon}. \qquad (11.49)$$

Враховуючи (11.46), (11.48), запишемо $y'=\dfrac{C+g\lambda}{a}$, звідки

$$dx=\frac{a\upsilon d\lambda}{HH_\upsilon}. \qquad (11.50)$$

Підставимо в (11.49), (11.50) $\lambda=\lambda(\upsilon)$. Проінтегрувавши, одержимо

$$x=d+\varphi(\upsilon,a,c), \quad y=b+\psi(\upsilon,a,c), \qquad (11.51)$$

де d, b – невідомі константи.

Відповідь. Отже, рівняння (11.51) задають параметричну форму шуканої брахістохрони, параметром є швидкість, невідомі константи a, b, c, d визначаються із чотирьох граничних умов. Якщо швидкість v у точці $B(x_1, y_1)$ не задана, то граничну умову $v(x_1) = v_1$ потрібно замінити умовою $\lambda(x_1) = 0$. Δ

Задачі

Розв'язати задачі Лагранжа:

11.1. $\int_0^1 u^2 dt \to extr$, $x'' - x = u$, $x(0) = 1$.

11.2. $\int_0^1 u^2 dt \to extr$, $x'' - x = u$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

11.3. $\int_0^1 u^2 dt \to extr$, $x'' - x = u$, $x(0) = 0$, $x(1) = sh(1)$, $x'(1) = ch(1) + sh(1)$.

11.4. $\int_0^1 u^2 dt \to extr$, $x'' - x = u$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(1) = sh(1)$, $x'(1) = ch(1) + sh(1)$.

11.5. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \to extr$, $x'' + x = u$, $x'(0) = 1$.

11.6. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \to extr$, $x'' + x = u$, $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

11.7. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \to extr$, $x'' + x = u$, $x(0) = x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = -\pi/2$.

11.8. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt \to extr$, $x'' + x = u$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \pi/2$, $x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$.

11.9. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \to extr$, $x'' + x = u$.

11.10. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \to extr$, $x'' + x = u$, $x(\pi/2) = 1$.

11.11. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \to extr$, $x'' + x = u$, $x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$.

11.12. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \to extr$, $x'' + x = u$, $x(\pi/2) = x'(0) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$.

11.13. $\int_0^1 u^2 dt + (x')^2(0) \to extr$, $x'' - x = u$.

11.14. $\int_0^1 u^2 dt + (x')^2(0) \to extr$, $x'' - x = u$, $x(0) = 1$.

11.15. $\int_0^1 u^2 dt + (x')^2(0) \to extr$, $x'' - x = u$, $x(0) = x(1) = 0$, $x'(1) = 1$.

11.16. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x^2(0) \to extr$, $x'' + x = u$, $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

11.17. $\int_0^1 (x^2 + u^2) dt \to extr$, $x' = x + u$, $x(1) = 1$.

11.18. $\int_0^1 (x^2 + 2u^2)dt \to extr$, $x' = x/\sqrt{2} + u$, $x(0) = 1$.

Знайти допустимі екстремалі:

11.19. $\int_0^1 (x^2 + u^2)dt \to extr$, $x'' + \sqrt{2}x' = u$, $x(0) = 1$.

11.20. $\int_0^1 (x^2 + u^2)dt \to extr$, $x'' - \sqrt{2}x' = u$, $x(0) = 1$.

11.21. $\int_0^T u^2 dt + x^2(T) \to extr$, $x'' + x = u$, $x(0) = 1$.

11.22. $\int_0^{\pi/2} u^2 dt + x'(0) \to extr$, $x'' + x = u$, $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

11.23. $\int_0^1 ((x')^2 + (y')^2)dt \to extr$, $x'y - y'x = 1$, $x(0) = 0$, $x(1) = \sin(1)$, $y(0) = 1$, $y(1) = \cos(1)$.

12. ПОЛЕ ЕКСТРЕМАЛЕЙ. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ

12.1. Поле екстремалей. Побудова центрального поля

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення – задачу Лагранжа на множині функцій з фіксованими кінцями

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to \inf, \qquad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{12.1}$$

Нехай $\hat{x}(\cdot)$ – деяка екстремаль функціонала $J(x(\cdot))$ із множини екстремалей $\{x(\cdot,\lambda)\}$, $x(\cdot,\lambda) \in C^1([t_0,t_1],R^n)$, що залежать від параметра $\lambda \in \Lambda \subset R^n$.

Екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ оточена *полем екстремалей* $x(t,\lambda)$, якщо можна вказати такий окіл G графіка функції $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t,\hat{x}(t)) : t \in [t_0,t_1]\}$, що для будь-якої точки $(\tau,\xi) \in G$ існує єдина екстремаль множини, яка проходить через цю точку. Тобто існує функція $\lambda : G \to R^n$, $\lambda = \lambda(\tau,\xi)$ із класу $C^1(G)$ така, що

$$x(\tau,\lambda) = \xi \Leftrightarrow \lambda = \lambda(\tau,\xi).$$

Функція

$$u : G \to R^n, \quad u(\tau,\xi) = \frac{d}{dt} x(t,\lambda(\tau,\xi))|_{t=\tau}$$

називається *функцією нахилу поля.*

Якщо існує точка (t_*,x_*) така, що $x(t_*,\lambda) = x_*$ для всіх $\lambda \in \Lambda$, то екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ оточена *центральним полем екстремалей.* Точка (t_*,x_*) називається *центром поля*, а множина $x(t,\lambda)$ – *центральним полем екстремалей.*

Приклад 12.1. Побудувати поле екстремалей функціонала

$$J(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^{T_0}((x')^2 - x^2)dt \to \inf.$$

Розв'язок:

Екстремалями цього функціонала є функції $x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$. Множина екстремалей $x(t,\lambda) = \lambda \sin(t)$ утворює центральне поле екстремалей із центром у точці $(0,0)$, яке покриває смугу $0 < t < \pi$. Обчислимо функцію нахилу поля $u(\tau,\xi)$, $0 < \tau < \pi$. Через точку (τ,ξ) проходить екстремаль $x(t,\lambda(\tau,\xi)) = \xi\sin(t)/\sin(\tau)$. Похідна цієї екстремалі в точці $t = \tau$ дорівнює $u(\tau,\xi) = \xi ctg(\tau)$.

Відповідь: Множина $x(t,\lambda) = \lambda\sin(t)$ утворює центральне поле екстремалей із центром у точці $(0,0)$ при $T_0 < \pi$. Δ

Теорема 12.1. *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0,t_1])$ – екстремаль найпростішої задачі варіаційного числення (12.1), інтегрант $L \in C^3(U)$, де U – окіл розширеного графіка екстремалі $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) : t \in [t_0,t_1]\}$. Якщо $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то $\hat{x}(\cdot)$ можна оточити центральним полем екстремалей.*

Доведення. Запишемо рівняння Ейлера

$$L_x(t,x,x') - \frac{d}{dt}L_{x'}(t,x,x') = 0 \Leftrightarrow$$

$$L_{x'x'}(t,x,x')x'' + L_{xx'}(t,x,x')x' + L_{tx'}(t,x,x') - L_x(t,x,x') = 0.$$

Оскільки виконується посилена умова Лежандра ($\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$ для всіх $t \in [t_0,t_1]$), то внаслідок неперервності функції $L_{x'x'}(t,x,x')$ (нагадаємо, що $L \in C^3(U)$) існує такий окіл $U_1 \subset U$, що

$$L_{x'x'}(t,x,x') > 0 \quad \forall \quad (t,x,x') \in U_1.$$

Тому рівняння Ейлера в області U_1 рівносильне системі рівнянь

$$x' = y, \quad y' = \Phi(t,x,y),$$

де

$$\Phi(t,x,y) = L^{-1}_{x'x'}(t,x,y)\left[L_x(t,x,y) - L_{tx'}(t,x,y) - L_{xx'}(t,x,x')y\right].$$

Функція $\Phi(t,x,y)$ неперервно диференційовна двічі. Тому за теоремою про існування і неперервну залежність розв’язку від початкових даних існують такі $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, що:

а) розв’язок можна продовжити на відрізок $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$;

б) для будь-якого $\lambda \in R^n$, $|\lambda| < \delta$ на відрізку $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$ визначено розв’язок $x(\cdot,\lambda)$ рівняння Ейлера з початковими умовами $x(t_*) = \hat{x}(t_*)$, $x'(t_*) = \hat{x}'(t_*) + \lambda$, де t_* – деяка точка з інтервалу $(t_0 - \varepsilon, t_0)$.

За теоремою про диференційовну залежність від початкових даних функція

$$(t,\lambda) \to x(t,\lambda) = (x_1(t,\lambda_1,\dots,\lambda_n),\dots,x_n(t,\lambda_1,\dots,\lambda_n)).$$

неперервно диференційовна. Покажемо, що екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ оточена центральним полем екстремалей $\{x(\cdot,\lambda)\}$. Позначимо через

$$H(t,t_*) = x_\lambda(t,\lambda)|_{\lambda=0}, \quad H_{ij}(t,t_*) = \left.\frac{\partial x_i(t,\lambda)}{\partial\lambda_j}\right|_{\lambda=0}, \quad i,j=1,\ldots,n.$$

Оскільки $x(t,\lambda)$ – це екстремаль для будь-якого λ, $|\lambda|<\delta$, то

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(L_x(t,x(t,\lambda),x'(t,\lambda)) - \frac{d}{dt}L_{x'}(t,x(t,\lambda),x'(t,\lambda))\right)\Bigg|_{\lambda=0},$$

звідки

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{x'x'}(t)H'(t,t_*) + \hat{L}_{x'x}(t)H(t,t_*)) +$$
$$+\hat{L}_{xx'}(t)H'(t,t_*) + \hat{L}_{xx}(t)H(t,t_*) = 0.$$

Тобто матриця $H(t,t_*)$ задовольняє рівняння Якобі й виконуються такі початкові умови:

$$H(t_*,t_*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}x(t_*,\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{x}(t_*) = 0,$$
$$H'(t_*,t_*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}x'(t_*,\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\hat{x}'(t_*)+\lambda) = I.$$

Нехай $H(t,t_0)$ – матричний розв'язок рівняння Якобі з початковими умовами $H(t_0,t_0)=0$, $H'(t_0,t_0)=I$. Посилена умова Якобі рівносильно тому, що матриця $H(t,t_0)$ невироджена при будь-якому $t\in(t_0,t_1]$. Унаслідок глобальної теореми про існування і неперервну залежність розв'язку від початкових даних рівняння Якобі при достатній близькості t_* до t_0 матриця $H(t,t_*)$ буде невиродженою для будь-якого $t\in(t_0,t_1]$.

Розглянемо відображення $w(t,\lambda)=(t,x(t,\lambda))$ у деякій точці $(\bar{t},0)$, $\bar{t}\in(t_0,t_1]$. Оскільки

$$\det w'(\bar{t},0) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_t(\bar{t},0) & x_\lambda(\bar{t},0)\end{bmatrix} = \det H(\bar{t},t_*) \neq 0,$$

то за теоремою про обернену функцію можна вказати таке $\delta=\delta(\bar{t})>0$, що при $|\bar{t}-\tau|<\delta$, $|\xi-\hat{x}(t)|<\delta$ існує єдине $\lambda=\lambda(\tau,\xi)$, для якого

$$w(\tau,\lambda(\tau,\xi)) = (\tau,\xi) \Leftrightarrow x(\tau,\lambda(\tau,\xi)) = \xi.$$

Унаслідок компактності графіка $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$ можна визначити таке δ_0, що для будь-якої точки (τ, ξ), $|\xi - \hat{x}(\tau)| < \delta_0$, існує єдине $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$, для якого $x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi$. При цьому гладкість $\lambda(\tau, \xi)$ така ж, як і гладкість $x(\cdot)$, тобто $\lambda \in C^2$. Побудову центрального поля, що оточує екстремаль, завершено. □

Дамо геометричну інтерпретацію *спряженої точки* при $n = 1$. Нехай екстремаль $x(\cdot)$ оточена полем екстремалей $\{x(\cdot, \lambda)\}$, $x(t) = x(t, 0)$ і точка (t_0, x_0) належить екстремалі: $x(t_0) = x_0$. Спряжена із точкою (t_0, x_0) точка екстремалі має координати $(\hat{t}, x(\hat{t}, 0))$. Нетривіальний розв'язок рівняння Якобі задовольняє граничні умови $h(\hat{t}, t_0) = x_\lambda(\hat{t}, 0)$. Таким чином, координати спряженої точки на екстремалі $x(t)$ визначаються системою рівнянь $x = x(t, 0)$, $x_\lambda(t, 0) = 0$. Разом із тим ця система рівнянь визначає так звані *характеристичні точки* на кривих поля екстремалей $\{x(t, \lambda)\}$. Геометричне місце характеристичних точок називається *обвідною* множини кривих $\{x(t, \lambda)\}$.

Отже, спряжена з (t_0, x_0) точка на екстремалі $x = x(t, 0)$ – це характеристична точка цієї екстремалі, якщо $\{x(t, \lambda)\}$ – центральне поле екстремалей з центром у точці t_0.

Можна сформулювати таке правило. Щоб визначити спряжену з (t_0, x_0) точку, потрібно побудувати обвідну центрального поля екстремалей з центром у точці t_0 і взяти на екстремалі точку дотику цієї екстремалі та обвідної.

Приклад 12.2. Побудувати обвідну поля екстремалей функціонала задачі Лагранжа

$$J(x(\cdot)) = \int_0^a \sqrt{(x(t) + h)}\sqrt{1 + (x'(t))^2}\, dt \to \inf$$

$$x(0) = 0, \quad x(a) = b > -h, \quad h > 0.$$

Розв'язок рівняння Ейлера можна зобразити у вигляді

$$(t - A)^2 = 4C^2(x + h - C^2).$$

Побудуємо центральне поле екстремалей з центром у точці $(0, 0)$ і параметром $\lambda = x'(0)$. Екстремалі $x(t, \lambda)$ матимуть вигляд $x(t, \lambda) = \lambda t + t^2(1 + \lambda^2)/4h$. Визначимо обвідну цієї множини парабол. Оскільки $x_\lambda'(t, \lambda) = t + \lambda t^2 / 2h = 0$, то, виключаючи параметр λ з рівнянь

$$x = \lambda t + t^2 \frac{1+\lambda^2}{4h}, \quad t + \frac{\lambda t^2}{2h} = 0,$$

знайдемо рівняння обвідної $x = -h + t^2/4h$.

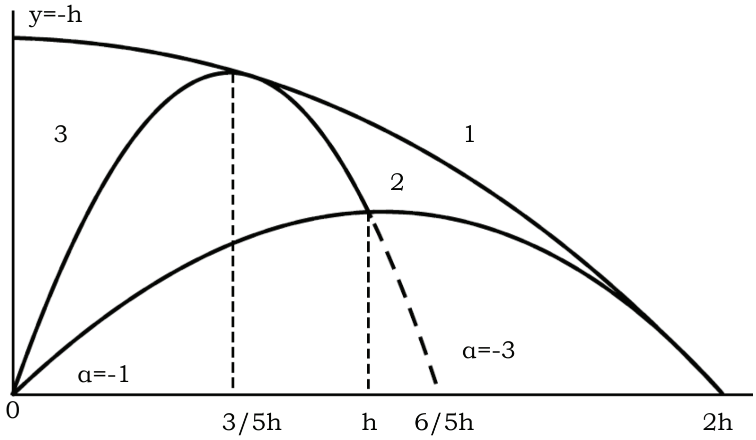

Рис. 12.1

Отже, обвідна – це парабола, яку в балістиці називають *параболою безпеки*. Якщо точка (a,b) лежить за межами цієї параболи, то не існує екстремалей, які сполучають точку (a,b) з початком координат. Якщо точка (a,b) лежить на параболі, то допустима екстремаль одна. Якщо ж точка (a,b) лежить усередині параболи безпеки, то існують дві допустимі екстремалі, які сполучають її з початком координат. Верхня називається *навісною*, а нижня – *настильною*. Навісна парабола мінімуму не дає, вона дотикається до обвідної й має спряжену точку. Настильна парабола дає сильний мінімум задачі. Δ

12.2. S-функція та її диференціал

Нехай $x(\cdot,\lambda)$ – центральне поле з центром t_*, яке оточує екстремаль $\hat{x}(\cdot) \in C^2$ функціонала $J(x(\cdot))$ найпростішої задачі варіаційного числення. Функція

$$S(\tau,\xi) = \int_{t_*}^{\tau} L(t, x(t,\lambda(\tau,\xi)), x'(t,\lambda(\tau,\xi)))dt$$

називається S-*функцією центрального поля* $x(\cdot,\lambda)$. Обчислимо її диференціал. За визначенням

$$x(\tau,\lambda(\tau,\xi)) = \xi; \tag{12.2}$$

$$x'(\tau,\lambda(\tau,\xi)) = u(\tau,\xi). \tag{12.3}$$

Вважатимемо, що інтегрант L неперервно диференційовний в деякому околі графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) : t\in[t_0,t_1]\}$. Візьмемо похідну під знаком інтеграла, використовуючи те, що $x_\lambda{}'$ – неперервна функція. Тоді

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \xi} &= \int_{t_*}^{\tau}\langle L_x(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),x'(t,\lambda(\tau,\xi)));x_\lambda(t,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)\rangle dt\\ &+\int_{t_*}^{\tau}\langle L_{x'}(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),x'(t,\lambda(\tau,\xi)));x_\lambda{}'(t,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)\rangle dt.\end{aligned}$$

Проінтегруємо другий доданок частинами та скористаємося тим, що виконуються співвідношення (12.3) і рівність $x_\lambda(t_*,\lambda(\tau,\xi))=0$. Одержимо

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi}=\langle L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi));x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)\rangle.$$

Але із (12.2) випливає рівність $x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi)=I$. Тому

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi}=L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\overset{\text{def}}{=}p(\tau,\xi).$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \tau} &= L(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\\ &+\int_{t_*}^{\tau}(\langle L_x(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),x'(t,\lambda(\tau,\xi));x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi)\rangle\\ &+\langle L_{x'}(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),x'(t,\lambda(\tau,\xi)));x_\lambda{}'(t,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi)\rangle)dt\\ &= L(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-\langle L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi));u(\tau,\xi)\rangle\overset{\text{def}}{=}-H(\tau,\xi).\end{aligned}$$

Тут після інтегрування частинами з урахуванням (12.3) використали тотожність

$$x_\tau{}'(\tau,\lambda(\tau,\xi))+x_\lambda{}'(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi)=0.$$

Отже,

$$\begin{aligned}dS(\tau,\xi) &= (L(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-\langle L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi));u(\tau,\xi)\rangle)d\tau\\ &+\langle L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi));d\xi\rangle.\end{aligned}$$

Цю формулу можна записати у вигляді

$$dS(\tau,\xi)=\langle p(\tau,\xi);d\xi\rangle-H(\tau,\xi)d\tau.$$

12.3. Основна формула Вейєрштрасса

Нехай U_2 – однозв'язний окіл графіка екстремалі $\hat{x}(\cdot)$, покритий центральним полем екстремалей $x(\cdot,\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, нехай $x(\cdot) \in KC^1([t_0,t_1],R^n)$ – допустима функція, графік якої лежить в U_2 і $x(t_0)=\hat{x}(t_0)$, $x(t_1)=\hat{x}(t_1)$. Тоді

$$
\begin{aligned}
S(t_1,x_1) \quad - S(t_0,x_0) &= \int_{t_0}^{t_1} dS(t,x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} dS(t,\hat{x}(t)) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}(t) - \langle \hat{L}_{x'}(t);\hat{x}'(t)\rangle)dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \hat{L}_{x'}(t); d\hat{x}'(t)\rangle \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}(t)dt = J(\hat{x}(\cdot)).
\end{aligned}
$$

Тому

$$
\begin{aligned}
J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) \quad &= \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),x'(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} dS(t,x(t)) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} (L(t,x(t),x'(t)) - L(t,x(t),u(t,x(t))) \\
&\quad - \langle L_{x'}(t,x(t),u(t,x(t))); x'(t) - u(t,x(t))\rangle)dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} E(t,x(t),u(t,x(t)),x'(t))dt.
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Цю формулу називають *основною формулою Вейєрштрасса.*

12.4. Достатні умови екстремуму функціонала найпростішої задачі варіаційного числення

Теорема 12.2 (про достатні умови сильного мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0,t_1],R^n)$ – допустима екстремаль найпростішої задачі варіаційного числення (12.1), що задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, квазірегулярний на U інтегрант $L \in C^3(U \times R^n)$, де U – окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t) : t \in [t_0,t_1]\}$. Тоді $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний мінімум функціонала найпростішої задачі варіаційного числення.*

Доведення. Із квазірегулярності інтегранта випливає, що $E(t,x,u,x') \geq 0$ для всіх $(t,x) \in U$ і для всіх $(u,x') \in R^n \times R^n$. Якщо вибрати

$U_2 \subset U$, то із формули Вейєрштрасса одержимо $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$ для будь-якої функції, графік якої лежить в U_2. Отже, $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний мінімум функціонала задачі. Теорему доведено. □

Теорема 12.3 (про достатні умови слабкого мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], R^n)$ – допустима екстремаль найпростішої задачі варіаційного числення (12.1), що задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, інтегрант $L \in C^4(U)$, де U – окіл розширеного графіка $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t) : t \in [t_0, t_1]\}$ екстремалі $\hat{x}(\cdot)$. Тоді $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала найпростішої задачі варіаційного числення.*

Доведення. Відповідно до теореми 12.1 екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ можна оточити центральним полем екстремалей. Розглянемо квадратичну форму $\langle L_{x'x'}(t, x, z)h, h\rangle$ і відшукаємо її мінімум на одиничній сфері $\|h\| = 1$. Нехай

$$\min_{\|h\|=1} \langle L_{x'x'}(t, x, z)h, h\rangle = w(t, x, z).$$

Припустимо, що $(t, x, z) \in K$, де K – деякий компакт. Можна переконатися, що $w(t, x, z)$ – неперервна на K. Умова Лежандра означає, що $w(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \geq w > 0$. Нехай $x(\cdot)$ – допустима гладка функція з околу екстремалі $\hat{x}(\cdot)$. При досить малих δ із нерівностей $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_C < \delta$, $\|x'(\cdot) - \hat{x}'(\cdot)\|_C < \delta$ випливають $\|u(t, x(t)) - u(t, \hat{x}(t))\| < \varepsilon$ і $\|u(t, x(t)) - x'(t)\| < \varepsilon$. Унаслідок неперервності при досить малих ε із нерівності $w(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \geq w$ одержуємо

$$w(t, x(t), \theta x'(t) + (1-\theta)u(t, x(t)) > w/2, \quad t \in [t_0, t_1], \theta \in (0,1).$$

Використаємо форму Лагранжа залишкового члена у формулі Тейлора і запишемо

$$\begin{aligned} E(t, x, p, q) &= L(t, x, q) - L(t, x, p) - \langle L_{x'}(t, x, p), q - p\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle L_{x'x'}(t, x, \theta q + (1-\theta)p, q - p\rangle. \end{aligned}$$

Підставимо в цю формулу $p = u(t, x(t)), q = x'(t)$. Тоді

$$\begin{aligned} &E(t, x(t), u(t, x(t)), x'(t)) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u(t, x(t)) - x'(t)\|^2 \, w(t, x(t), \theta x'(t) + (1-\theta)u(t, x(t))) \\ &\geq \frac{1}{4} w \|u - x'\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Використавши тепер основну формулу Вейєрштрасса, одержимо

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} E(t, x(t), u(t, x(t), x'(t))dt \ge 0.$$

Ми показали, що існує такий окіл екстремалі $\hat{x}(\cdot)$ у просторі $C^1([t_0, t_1], R^n)$, що для будь-якої функції $x(\cdot)$ із цього околу виконується нерівність $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot))$. Теорему доведено. □

Дослідимо на екстремум задачу

$$K(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle Ax', x'\rangle + 2\langle Cx', x\rangle + \langle Bx, x\rangle)dt \to extr, \qquad (12.5)$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Теорема 12.4. *Нехай матриці A, C – неперервно диференційовні, матриця B неперервна і виконується посилена умова Лежандра: $A(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Якщо виконується посилена умова Якобі, то допустима екстремаль існує, єдина і дає абсолютний мінімум задачі (12.5). Якщо умова Якобі не виконується і на інтервалі (t_0, t_1) є спряжені точки, то нижня границя задачі $S_{\min} = -\infty$.*

Доведення. Нехай умова Якобі не виконується. Відповідно до теореми про необхідні умови екстремуму і леми про заокруглення кутів існує функція $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, $x(t_0) = 0$, $x(t_1) = 0$ така, що $K(x(\cdot)) < 0$. Тоді $K(\alpha x(\cdot)) \to -\infty$ при $\alpha \to +\infty$. Отже, $S_{\min} = -\infty$.

Нехай виконується посилена умова Якобі й нехай $H(t, t_0)$ $H(t, t_1)$ – матричні розв'язки рівняння Ейлера задачі $K(x(\cdot)) \to \inf$, $x(t_0) = x(t_1) = 0$, які задовольняють граничні умови $H(t_0, t_0) = 0$, $H'(t_0, t_0) = I$, $H(t_1, t_1) = 0$, $H'(t_1, t_1) = I$. Згідно з посиленою умовою Якобі матриці $H(t, t_0)$ і $H(t, t_1)$ невироджені при $t \in (t_0, t_1]$, $t \in [t_0, t_1)$ відповідно. Візьмемо $H_1(t) = H(t, t_0) \times H^{-1}(t_1, t_0)$, $H_0(t) = H(t, t_1)H^{-1}(t_0, t_1)$. Тоді $H_i(t_j) = \delta_{ij} I$, $i, j = 0,1$. Тому $\hat{x}(t) = H_0(t)x_0 + H_1(t)x_1$ – допустима екстремаль задачі (12.5). Якщо $\overline{x}(\cdot)$ – інша допустима екстремаль, то функція $y(\cdot) = \hat{x}(\cdot) - \overline{x}(\cdot)$ буде нетривіальним розв'язком рівняння Якобі з граничними умовами $y(t_0) = y(t_1)$, що суперечить посиленій умові Якобі. Тому екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ – єдина.

Нехай $x(\cdot)$ – будь-яка функція із простору $KC^1([t_0, t_1], R^n)$, що задовольняє граничні умови $x(t_0) = x(t_1) = 0$. Оскільки $\hat{x}(\cdot)$ – екстремаль, то

$$K(\hat{x}(\cdot)+x(\cdot)) = K(\hat{x}(\cdot)) + K(x(\cdot)).$$

Множина функцій $x(\cdot,\lambda) = H(\cdot,t_*)\lambda$, де $t_* < t_0$ і t_* настільки близьке до t_0, що матриця $H(t,t_*)$ невироджена при $t_0 \le t \le t_1$, утворює поле екстремалей, яке покриває всю смугу $t_0 \le t \le t_1$. Функція нахилу поля дорівнює $u(t,x) = H'(t,t_*)H^{-1}(t,t_*)x.$ За формулою Вейєрштрасса

$$K(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}\langle A(t)(x' - H'(t,t_*)H^{-1}(t,t_*)x); x' - H'(t,t_*)H^{-1}(t,t_*)x\rangle dt \ge 0,$$

оскільки $A(t) > 0.$ Отже, $K(\hat{x}(\cdot)+x(\cdot)) \ge K(\hat{x}(\cdot)).$

Теорему доведено. □

12.5. Достатні умови екстремуму функціонала задачі зі старшими похідними

Дослідимо на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)))dt \to \inf, \tag{12.6}$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_{k0}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_{k1}, \quad k = 0,\ldots,n-1 \tag{12.7}$$

у просторі $C^n[t_0,t_1]).$

Теорема 12.5. *Нехай* $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}([t_0,t_1])$ *– екстремаль функціонала* $J(x(\cdot))$ *задачі зі старшими похідними* (*12.6*)–(*12.7*), *інтегрант* $L \in C^{n+2}(U)$, *де* U *– окіл розширеного графіка* $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\ldots,\hat{x}^{(n)}(t)) : t \in [t_0,t_2]\}$ *екстремалі. Якщо* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то* $\hat{x}(\cdot)$ *можна оточити центральним полем екстремалей.*

Доведення. Запишемо рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} L_{x^{(k)}}(t,x,x',\ldots,x^{(n)}) = 0$$

у розгорнутій формі. Посилена умова Лежандра дає можливість розв'язати це рівняння відносно старшої похідної та побудувати n-параметричну множину функцій, що задовольняють рівняння Ейлера – Пуассона і граничні умови

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t_*,\lambda) &= x^{(k)}(t_*), \quad k = 0,\ldots,n-1, \\ x^{(k)}(t_*,\lambda) &= \hat{x}^{(k)}(t_*) + \lambda_{k-n+1}, \quad k = n,\ldots,2n-1. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Продиференціюємо функцію $\lambda \to x(t,\lambda)$ за параметром λ у точці $\lambda = 0$ і позначимо

$$\begin{aligned} h(t,t_*) &= x_\lambda(t,\lambda)\,|_{\lambda=0}, \quad h = (h_1,\ldots,h_n) \\ h_m(t,t_*) &= \left.\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial \lambda_m}\right|_{\lambda=0}, \quad m = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Нехай

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t,t_*) & \cdots & h_n(t,t_*) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_1^{(n-1)}(t,t_*) & \cdots & h_n^{(n-1)}(t,t_*) \end{bmatrix}.$$

Із граничних умов (12.8) випливає, що $H(t_*) = 0$, $H^{(n)}(t_*) = I$. Відповідно до посиленої умови Якобі матриця $H(t)$ невироджена для всіх $t \in [t_0, t_1]$ при t_* близьких до t_0, $t_* < t_0$. Це дозволяє визначити екстремаль, яка задовольняє умови $x(k)(t,\lambda) = \xi_k$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, причому значення (τ,ξ), $\xi = (\xi_0,\ldots,\xi_{n-1})$, де $|\xi_k - \hat{x}(k)(\tau)| < \delta$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ визначають величину $\lambda = \lambda(\tau,\xi)$ однозначно. Поле екстремалей побудовано. Нахил поля

$$u(\tau,\xi) = \frac{d^n}{dt^n} x(t,\lambda(\tau,\xi))\,|_{t=\tau}.$$

Теорему доведено. □

Визначимо S-функцію за формулою

$$S(\tau,\xi) = \int_{t_0}^{\tau} L(t, x(t,\lambda(\tau,\xi)), x'(t,\lambda(\tau,\xi)),\ldots, x^{(n)}(t,\lambda(\tau,\xi)))dt.$$

Продиференціюємо під знаком інтеграла

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(t,\xi)}{\partial \xi_k} &= p_k(\tau,\xi), \quad k = 0,1,\ldots,n-1, \\ \frac{\partial S(t,\xi)}{\partial \tau} &= -H(\tau,\xi), \end{aligned}$$

де

$$p_k(\tau,\xi) = L_{x^{(k)}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - \frac{d}{dt}L_{x^{(k+1)}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,|_{t=\tau} +$$

$$\cdots + (-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}L_{x^{(n)}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,|_{t=\tau}, -H(\tau,\xi)$$

$$= L(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\tau,\xi)\xi_k.$$

Нехай U_2 – однозв'язний окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t),\ldots,\hat{x}^{(n-1)}(t)):\ t\in[t_0,t_1]\}$ екстремалі $\hat{x}(\cdot)$, покритий центральним полем екстремалей, $x(\cdot)\in KC^n([t_0,t_1])$ – будь-яка допустима функція, графік якої лежить в U_2, і $x^{(k)}(t_j)=\hat{x}^{(k)}(t_j)$, $k=0,\ldots,n-1$, $j=0,1$. Запишемо основну формулу Вейєрштрасса. Вона має вигляд

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} E(t,x(t),x'(t),\ldots,x^{(n-1)}(t),u(t,x(t),\ldots,x^{(n-1)}(t)),x^{(n)}(t))dt,$$

де $E(t,\overline{x},u,x') = L(t,\overline{x},x') - L(t,\overline{x},u) - (x'-u)L_{x^{(n)}}(t,\overline{x},u)$; $\overline{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$.

Теорема 12.6 (про достатні умови сильного мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot)\in C^{2n}([t_0,t_1])$ – допустима екстремаль задачі із старшими похідними (12.6) –(12.7), яка задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, квазірегулярний на U інтегрант $L\in C^{n+2}(U\times R)$, де U – окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t),\ldots,x^{(n-1)}(t)), t\in[t_0,t_1]\}$. Тоді $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний локальний мінімум функціонала $J(x(\cdot))$ задачі із старшими похідними.*

Доведення. Відповідно до теореми 12.5 допустиму екстремаль можна оточити центральним полем екстремалей. Тоді справедлива основна формула Вейєрштрасса. Із квазірегулярності інтегранта L випливає, що функція E під знаком інтеграла невід'ємна. Тому $J(x(\cdot))\ge J(\hat{x}(\cdot))$ для будь-якої допустимої функції $x(\cdot)\in C^n([t_0,t_1])$, графік якої лежить в U_2. Теорему доведено. □

Теорема 12.7 (про достатні умови слабкого мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot)\in C^{2n}([t_0,t_1])$ – допустима екстремаль задачі зі старшими похідними (12.6)–(12.7), яка задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, інтегрант $L\in C^{n+2}(U)$, де U – окіл розширеного графіка*

$\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\ldots,\hat{x}^{(n)}(t)) : t\in[t_0,t_2]\}$ *екстремалі* $\hat{x}(\cdot)$. *Тоді* $\hat{x}(\cdot)$ *дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі із старшими похідними.*

12.6. Достатні умови екстремуму функціонала задачі Больца

Дослідимо на екстремум функціонал задачі Больца

$$B(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))dt+l(x(t_0),x(t_1))\to\inf, \tag{12.9}$$

де $L:R\times R^n\times R^n\to R$, $l:R^n\times R^n\to R$.

Теорема 12.8 (про достатні умови сильного мінімуму). *Нехай* $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$ *– допустима екстремаль задачі Больца* (*12.9*), *квазірегулярний на* U *інтегрант* $L\in C^4(U\times R)$, *термінант* $l\in C^2(V)$, *де* U *– окіл графіка* $\{(t,\hat{x}(t)):t\in[t_0,t_1]\}$ *екстремалі* $\hat{x}(\cdot)$, V *– окіл точки* $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))\in R^{2n}$. *Якщо* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє рівняння Ейлера, умови трансверсальності, посилені умови Лежандра і Якобі й квадратична форма* $P+Q$ *додатно визначена, то* $\hat{x}(\cdot)$ *дає сильний локальний мінімум функціонала задачі Больца* (*12.9*). *Тут*

$$\begin{aligned}
Q(x_0,x_1)\quad &= l''(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))[(x_0,x_1),(x_0,x_1)],\\
P(x_0,x_1)\quad &= \langle A(t_1)(H_0'(t_1)x_0+H_1'(t_1)x_1),x_1\rangle\\
&\quad-\langle A(t_0)(H_0'(t_0)x_0+H_1'(t_0)x_1),x_0\rangle\\
&\quad+\langle C(t_1)x_1,x_1\rangle-\langle C(t_0)x_0,x_0\rangle,\\
A(t)\quad &= \hat{L}_{x'x'}(t),\quad 2C(t)=\hat{L}^*_{x'x}(t)+\hat{L}_{xx'}(t).
\end{aligned}$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 12.1, можна показати, що існують околи V_0, V_1 точок $\hat{x}(t_0)$, $\hat{x}(t_1)$ такі, що для будь-яких $\xi_0\in V_0$, $\xi_1\in V_1$ існує єдиний розв'язок $x(\cdot,\xi_0,\xi_1)$ рівняння Ейлера, який задовольняє умови $x(t_j,\xi_0,\xi_1)=\xi_j$, $j=0,1$. Якщо графік функції $x(\cdot)$ лежить у малому околі графіка функції $\hat{x}(\cdot)$, то

$$\begin{aligned}
B(x(\cdot))&=J(x(\cdot))+l(x(t_0),x(t_1))\\
&=J(x(\cdot))-J(x(\cdot,x(t_0),x(t_1)))+J(x(\cdot,x(t_0),x(t_1)))+l(x(t_0),x(t_1))\\
&=J(x(\cdot))-J(x(\cdot,x(t_0),x(t_1)))+\Phi(x(t_0),x(t_1)),
\end{aligned}$$

де

$$\Phi(\xi_0,\xi_1)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t,\xi_0,\xi_1),x'(t,\xi_0,\xi_1))dt+l(\xi_0,\xi_1).$$

Продиференціюємо під знаком інтеграла. Потім проінтегруємо частинами, враховуючи, що $x(\cdot,\xi_0,\xi_1)$ – це розв'язок рівняння Ейлера. Продиференціюємо ще один раз. Одержимо

$$\Phi''(0,0)[x_0,x_1]=(P+Q)[x_0,x_1].$$

Використавши основну формулу Вейєрштрасса і квазірегулярність інтегранта L, одержимо

$$J(x(\cdot))-J(x(\cdot,x(t_0),x(t_1)))=\int_{t_0}^{t_1}E\,dt\geq 0.$$

За умовою теореми квадратична форма $P+Q$ додатно визначена. Якщо $(x(t_0),x(t_1))$ лежить у малому околі точки $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))$, то $\Phi(x(t_0),x(t_1))\geq\Phi(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))$. Тому існує таке число $\delta>0$, що при

$$\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1],R^n)}<\delta$$

виконується нерівність $B(x(\cdot))\geq B(\hat{x}(\cdot))$.

Теорему доведено. □

Теорема 12.9 (про достатні умови слабкого мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$ – допустима екстремаль задачі Больца (12.9), інтегрант $L\in C^4(U)$, термінант $l\in C^2(V)$, де U – окіл розширеного графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)):\ t\in[t_0,t_1]\}$ екстремалі $\hat{x}(\cdot)$, V – окіл точки $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))\in R^{2n}$. Якщо $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера, умови трансверсальності, посилені умови Лежандра і Якобі й квадратична форма $P+Q$ додатно визначена, то $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі Больца (12.9).*

12.7. Достатні умови екстремуму функціонала ізопериметричної задачі

Дослідимо на екстремум функціонал ізопериметричної задачі

$$J_0(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x(t),x'(t))dt\quad\to\inf,\tag{12.10}$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), x'(t))dt \quad = a_i, \quad i = 1,\dots,m; \qquad (12.11)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \quad = x_1. \qquad (12.12)$$

Теорема 12.10. *Нехай* $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$ *– допустима екстремаль ізопериметричної задачі* (*12.10*)–(*12.12*), $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_m)$ *– множники Лагранжа, інтегрант* $L = f_0 + \sum_{i=1}^n \hat{\mu} f_i \in C^4(U)$, *де* U *– деякий окіл розширеного графіка* $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$ *функції* $\hat{x}(\cdot)$. *Якщо виконується умова регулярності й* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то екстремаль* $\hat{x}(\cdot)$ *можна оточити центральним полем екстремалей.*

Доведення. Запишемо рівняння Ейлера лангранжіана

$$L(t, x, x', \mu) = f_0(t, x, x') + \sum_{i=1}^n \mu_i f_i(t, x, x')$$

у вигляді системи:

$$\begin{gathered} L_x(t, x, x', \mu) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x, x', \mu) = 0 \\ \Leftrightarrow x' = y, \quad y' = \Phi(t, x, y, \mu), \end{gathered} \qquad (12.13)$$

де

$$\Phi(t, x, y, \mu) \quad = L_{x'x'}^{-1}(t, x, y, \mu)[L_x(t, x, y, \mu) - L_{tx'}(t, x, y, \mu) - y \cdot L_{xx'}(t, x, y, \mu)]$$

у деякому околі $U_1 \subset U$ розширеного графіка екстремалі $\hat{x}(\cdot)$. Функція Φ неперервно диференційовна. Тому за теоремою про існування і неперервну залежність розв'язку від початкових даних і параметра існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-яких λ, μ, які задовольняють умови $|\lambda| < \varepsilon$, $\|\mu - \hat{\mu}\| < \varepsilon$, розв'язок системи рівнянь (12.13) з початковими умовами $x(t_*, \lambda, \mu) = \hat{x}(t_*)$, $x'(t_*, \lambda, \mu) = \hat{x}'(t_*) + \lambda$ буде визначений на $[t_0, t_1]$ при t_*, близькому до t_0, $t_* < t_0$. Нехай

$$y(\tau, \lambda, \mu) = (y_1(\tau, \lambda, \mu), \dots, y_m(\tau, \lambda, \mu)),$$

$$y_i(\tau, \lambda, \mu) = \int_{t_*}^{\tau} f_i(t, x(t, \lambda, \mu), x'(t, \lambda, \mu))dt, \quad i = 1,\dots,m.$$

Унаслідок посиленої умови Якобі існує таке $\delta > 0$, що при $\tau \in [t_0, t_1]$, $|\xi - \hat{x}(\tau)| < \delta$, $|\eta - \hat{y}(\tau)| < \delta$ можна одночасно визначити $\lambda = \lambda(\tau, \xi, \eta)$, $\mu = \mu(\tau, \xi, \eta)$, які задовольняють умови $x(\tau, \lambda(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta)) = \xi$, $y(\tau, \lambda(\tau, \xi, \eta), \mu(\tau, \xi, \eta)) = \nu$. При цьому функції $\lambda(\tau, \xi, \mu)$, $\mu(\tau, \xi, \mu)$ стільки разів неперервно диференційовні, скільки разів неперервно диференційовна функція x. Центральне поле екстремалей побудовано. Функція

$$u(\tau,\xi,\eta)=\frac{d}{dt}x(t,\lambda(\tau,\xi,\eta),\mu(\tau,\xi,\eta))\,|_{t=\tau}$$

називається нахилом поля $x(\cdot,\lambda,\mu)$.

Нехай $x(\cdot,\lambda,\mu)$ – центральне поле з центром t_*, яке оточує екстремаль $\hat{x}(\cdot)\in C^2[t_0,t_1]$ ізопериметричної задачі (12.10)–(12.12). Функція

$$S(\tau,\xi,\eta)\quad=\int_{t_*}^{\tau}f_0(t,x(t,\lambda,\mu),x'(t,\lambda,\mu))dt,$$

$$\lambda=\lambda(\tau,\xi,\eta),\quad \mu=\mu(\tau,\xi,\eta)$$

називається S-*функцією* центрального поля $x(\cdot,\lambda,\mu)$. Обчислимо її диференціал. За означенням

$$S(\tau,\xi,\eta)+\langle\mu(\tau,\xi,\eta);\eta\rangle=\int_{t_*}^{\tau}L(t,x(t,\lambda,\mu),x'(t,\lambda,\mu),\mu)dt,$$

$$\lambda=\lambda(\tau,\xi,\eta),\quad \mu=\mu(\tau,\xi,\eta).$$

Тоді

$$\frac{\partial S(\tau,\xi,\eta)}{\partial\xi}+\langle\frac{\partial\mu(\tau,\xi,\eta)}{\partial\xi};\eta\rangle$$

$$=L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi,\eta),\mu(\tau,\xi,\eta))+\langle\frac{\partial\mu(\tau,\xi,\eta)}{\partial\xi};\eta\rangle,$$

звідки

$$\frac{\partial S(\tau,\xi,\eta)}{\partial\xi}=L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi,\eta),\mu(\tau,\xi,\eta)).$$

Аналогічно

$$\frac{\partial S(\tau,\xi,\eta)}{\partial\tau}\quad=L(\tau,\xi,u(\tau,\xi,\eta),\mu(\tau,\xi,\eta))$$

$$-L_{x'}(\tau,\xi,u(\tau,\xi,\eta),\mu(\tau,\xi,\eta))u(\tau,\xi,\eta).$$

Також

$$\frac{\partial S(\tau,\xi,\eta)}{\partial\eta}=-\mu(\tau,\xi,\eta).$$

Тоді

$$dS=L_{x'}d\xi+(L-L_{x'}\cdot u)d\tau-\langle\mu;d\eta\rangle.$$

Нехай U_2 – однозв'язний окіл графіка екстремалі $\hat{x}(\cdot)$, покритий центральним полем екстремалей $x(\cdot,\lambda,\mu)$, $x(\cdot)\in KC^1([t_0,t_1])$ – допустима функція, графік якої лежить в U_2. Якщо $y_i(t_i)=a_i$, $i=1,\ldots,m$, $x(t_j)=x_j$, $j=0,1$, де $a=(a_1,\ldots,a_m)$,

$$y_i(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(s, x(s), x'(s))ds,$$

то

$$S(t_1, x_1, a) - S(t_0, x_0, 0) = \int_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t), y(t)),$$

звідки випливає основна формула Вейєрштрасса

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} E(t, x(t), y(t), u(t, x(t), y(t)), x'(t))dt,$$

де

$$\begin{aligned} E(t, x, y, u, x') &= L(t, x, x', \mu(t, x, y)) - L(t, x, u, \mu(t, x, y)) \\ &\quad - (x' - u)L_{x'}(t, x, x', \mu(t, x, y)); \\ L(t, x, x', \mu) &= f_0(t, x, x') + \langle \mu, f(t, x, x') \rangle. \end{aligned}$$

Теорему доведено. □

Теорема 12.11 (про достатні умови сильного мінімуму). *Нехай* $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$ *– допустима екстремаль ізопериметричної задачі* (*12.10*)–(*12.12*), μ_i, $i = \overline{1, m}$ *– множники Лагранжа, квазірегулярний на* U *інтегрант*

$$L = f_0 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i \in C^4(U \times R),$$

де U *– деякий окіл графіка* $\{(t, \hat{x}(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$ *функції* $\hat{x}(\cdot)$*. Якщо виконується умова регулярності й* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то екстремаль* $\hat{x}(\cdot)$ *дає сильний локальний мінімум функціонала ізопериметричної задачі.*

Теорема 12.12 (про достатні умови слабкого мінімуму). *Нехай* $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$ *– допустима екстремаль ізопериметричної задачі* (*12.10*)–(*12.12*), μ_i, $i = \overline{1, m}$ *– множники Лагранжа, інтегрант* $L \in C^4(U)$, *де* U *– деякий окіл розширеного графіка* $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$ *екстремалі* $\hat{x}(\cdot)$*. Якщо* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то екстремаль дає слабкий локальний мінімум функціонала ізопериметричної задачі.*

Розділ III

Оптимальне керування

13. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА

13.1. Деякі задачі оптимального керування

13.1.1. Задача про оптимальну швидкодію.

Нехай візок рухається прямолінійно без тертя по горизонтальних рейках під дією зовнішньої сили, яку можна змінювати в заданих границях. Потрібно зупинити візок у заданому місці за найкоротший відрізок часу. Ця задача називається *найпростішою задачею про оптимальну швидкодію.*

Формалізуємо задачу. Нехай маса візка дорівнює m, початкова координата дорівнює x_0, початкова швидкість дорівнює v_0. Зовнішню силу (силу тяги) позначимо через u. Відповідно до закону Ньютона рівняння руху – це диференціальне рівняння

$$mx''(t) = u(t).$$

Обмеження на величину тяги запишемо так: $u_1 \le u(t) \le u_2$. Тоді формалізована задача має вигляд

$$T \to \inf, \quad mx''(t) = u(t), \quad u(t) \in [u_1, u_2],$$
$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0, \quad x(T) = x'(T) = 0.$$

Ця задача буде розв'язана в п. 13.4.

13.1.2. Навігаційна задача керування кораблем.

Нехай корабель рухається зі сталою за модулем швидкістю відносно течії, швидкість якої стала за модулем і напрямком. Необхідно скласти програму керування рулем, яка забезпечить переміщення корабля в задану точку з початкової точки за найкоротший відрізок часу.

Позначимо через $(x(t), y(t))$ положення корабля в момент часу t в прямокутній системі координат такій, що вісь OX паралельна вектору швидкості течії $\vec{s}$. Положення рулів корабля в момент часу t визначатиме кут $\alpha(t)$ між вектором швидкості корабля $\vec{v}$ та вектором швидкості течії $\vec{s}$. Позначимо $v = |\vec{v}|$, $s = |\vec{s}|$. Тоді складові вектора швидкості корабля $\vec{v}$ по осі OX і по осі OY дорівнюють $s + v\cos(\alpha)$, $v\sin(\alpha)$ відповідно. Рух корабля можна описати системою диференціальних рівнянь

$$x'(t) = s + v\cos(\alpha(t)), \quad y'(t) = v\sin(\alpha(t)),$$

враховуючи, що $\sin^2(\alpha(t)) + \cos^2(\alpha(t)) = 1$ при всіх значеннях t. Нехай $u_1(t) = \cos(\alpha(t))$, $u_2(t) = \sin(\alpha(t))$, початковий момент часу t_0. Необхідно визначити керуючий вектор

$$\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t)),\ t \in [t_0, t_1],\ |\vec{u}(t)|^2 = u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1$$

такий, що розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$x'(t) = s + vu_1(t), \quad y'(t) = vu_2(t)$$

задовольняє граничні умови $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, де (x_0, y_0) – координати початкового положення корабля, (x_1, y_1) – координати точки, в яку має приплисти корабель. Різниця $t_1 - t_0$ повинна бути мінімальною. Отже, задача оптимального керування має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&T = t_1 - t_0 \to \inf, \\
&x'(t) = s + vu_1(t), \quad y'(t) = vu_2(t), \\
&u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1, \quad t_0 \le t \le t_1, \\
&x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1.
\end{aligned}$$

13.1.3. Задача про найбільшу дальність польоту ракети з обмеженим прискоренням.

Потрібно визначити таке керування тягою двигуна ракети, яке максимізує дальність польоту ракети за умови, що значення тяги не може перевищувати деякої заданої величини. Вважатимемо, що прискорення вільного падіння не змінюється, аеродинамічні властивості ракети такі, що опір повітря й інші ефекти малі й ними можна знехтувати.

Нехай траєкторія польоту ракети лежить в одній площині. Позначимо через $(x(t), y(t))$ декартові координати ракети, через $v_1(t)$, $v_2(t)$ – компоненти вектора швидкості ракети ($v_1(t) = x'(t)$, $v_2(t) = y'(t)$), $m(t)$ – масу ракети, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – компоненти одиничного вектора, колінеарного вектору тяги, g – прискорення вільного падіння, $u_3(t)$ – швидкість зменшення маси ракети двигуна ($u_3(t) = -m'(t)$). Положення ракети в момент t описується вектором $(x(t), y(t), v_1(t), v_2(t), m(t))$. Керуючий процес у кожний момент часу t – це вектор тяги двигуна $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. Нехай модуль тяги пропорційний з коефіцієнтом C швидкості зменшення маси $u_3(t)$. Тоді горизонтальна складова сили, яка діє на ракету, дорівнює $Cu_3(t)u_1(t)$, а вертикальна складова сили дорівнює $Cu_3(t)u_2(t) - m(t)g$.

Система диференціальних рівнянь, які описують зміну вектора положення ракети, має вигляд:

$$x'(t) = v_1(t), \quad y'(t) = v_2(t),$$

$$v_1'(t) = \frac{C}{m} u_3(t)u_1(t), \quad v_2'(t) = \frac{C}{m} u_3(t)u_2(t) - g, \quad m'(t) = -u_3(t).$$

Компоненти вектора керування $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ задовольняють обмеження, обумовлені тим, що вектор $(u_1(t), u_2(t))$ має одиничну довжину, а тяга двигуна не перевищує максимального значення $Cu_3^{\max}$: $0 \le Cu_3(t) \le Cu_3^{\max}$. Тому множина U допустимих значень вектора (u_1, u_2, u_3) у просторі R^3 визначається співвідношенням

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1, \quad 0 \le u_3(t) \le u_3^{\max}.$$

Ракету потрібно перевести з відомого початкового положення в деяке положення на висоті y_1, використавши задану кількість пального M так, щоб горизонтальна дальність польоту була максимальною. Отже, потрібно визначити керування $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \in U$, $t_0 \le t \le t_1$, яке переведе ракету з положення $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ у положення $y(t_1) = y_1$, $m(t_1) = m_1 = m_0 - M$ так, щоб функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} v_1(t)dt$$

досяг максимального значення.

13.1.4. Задача виведення штучного супутника Землі на кругову орбіту.

Вважатимемо, що носій ракети рухається в одній площині з фіксованою системою координат. Як і в попередній задачі можна записати рівняння руху ракети:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \upsilon_1(t), \quad y'(t) = \upsilon_2(t), \\ \upsilon_1'(t) &= \frac{\varphi_1(t) + u_1(t)\cos(u_2(t))}{m(t)}, \\ \upsilon_2'(t) &= \frac{\varphi_2(t) + u_1(t)\sin(u_2(t))}{m(t)}, \\ m'(t) &= -F(u_1(t)), \end{aligned}$$

де $x(t), y(t)$ – координати положення ракети, $\upsilon_1(t)$, $\upsilon_2(t)$ – компоненти вектора швидкості ракети, $m(t)$ – маса ракети, $u_1(t)$ – тяга двигуна ракети, $u_2(t)$ – кут між напрямком тяги та осі OX, $F(u_1)$ – швидкість зменшення маси ракети, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – проекції на осі OX, OY інших сил, які діють на ракету (сила тяжіння, опору повітря і т. п.). Вважатимемо, що відоме початкове положення ракети $(x_0, y_0, \upsilon_{10}, \upsilon_{20}, m_0)$ в момент t_0. Позначимо через t_1 момент виходу ракети-носія на кругову орбіту радіуса R. У цей момент повинні виконуватися умови:

$$\begin{aligned} x^2(t_1) + y^2(t_1) &= R^2, \\ \upsilon_1(t_1)x(t_1) + \upsilon_2(t_1)y(t_1) &= 0, \\ \upsilon_1^2(t_1) + \upsilon_2^2(t_1) &= \upsilon_R^2, \end{aligned} \tag{13.1}$$

де υ_R^2 – швидкість руху супутника по орбіті радіуса R. Перша умова означає, що ракета в момент t_1 знаходиться на колі радіуса R. Друга умова означає, що вектор швидкості ракети $\vec{\upsilon}(t) = (\upsilon_1(t), \upsilon_2(t))$ і вектор положення ракети $(x(t_1), y(t_1))$ в момент t_1 ортогональні. Тобто швидкість ракети направлена по дотичній до орбіти. Третя умова означає, що при виключенні ракети-носія в момент t_1 рух продовжуватиметься по орбіті радіуса R.

Вектор керування $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ має задовольняти обмеження

$$0 \le u_1(t) \le u_1^{\max}, \quad 0 \le u_2(t) \le 2\pi, \tag{13.2}$$

де $u_1^{\max}$ – найбільша можлива тяга, яку може розвинути двигун ракети-носія. Витрати пального за проміжок часу $t_1 - t_0$ визначатимуться інтегралом

$$J(\vec{u}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(u_1(t))dt. \tag{13.3}$$

Таким чином, мета керування запуском супутника – перевести ракету-носій з початкового положення $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ в положення (13.1) так, щоб вектор керування $\vec{u}(t)$ задовольняв умови (13.2) і інтеграл (13.3) набував найменшого значення.

13.1.5. Задача про м'яку посадку космічного апарата на поверхню Місяця з мінімальними витратами пального. Для спрощення математичної моделі простежимо лише за вертикальними компонентами вектора положення і швидкості космічного апарата, вважаючи, що в початковий момент він був недалеко від поверхні Місяця і можна вважати гравітаційне прискорення Місяця g_L сталим під час спуску. Положення апарату в момент часу t визначається вектором $(h(t), v(t), m(t))$, де $h(t)$ – висота, $v(t)$ – швидкість, $m(t)$ – маса апарата. Керування $u(t)$ – це вертикальна складова тяги двигуна, яка направлена до поверхні Місяця і зменшує вертикальну швидкість апарата. Рівняння руху мають вигляд:

$$h'(t) = v(t), \quad v'(t) = -g_L + u(t)m^{-1}(t), \quad m'(t) = -Cu(t).$$

Вважатимемо, що зменшення маси апарата пропорційні значенню тяги з коефіцієнтом C.

Якщо h_0, v_0 – початкові висота і швидкість апарата в момент t_0, F – початковий запас пального, M – маса апарата без пального, t_1 – момент посадки, то граничні умови мають такий вигляд:

$$h(t_0) = h_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad m(t_0) = F + M, \tag{13.4}$$

$$h(t_1) = 0, \quad v(t_1) = 0. \tag{13.5}$$

Запис (13.5) є умови "м'якості" посадки. За цих умов апарат досягає поверхні Місяця з нульовою вертикальною швидкістю. Якщо $u^{\max}$ – найбільша можлива тяга, то керуюча величина $u(t)$ на проміжку $t_0 \le t \le t_1$ повинна задовольняти умову

$$0 \le u(t) \le u^{\max}. \tag{13.6}$$

Отже, задача зводиться до визначення керування $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, що задовольняє обмеження (13.6), яке забезпечує м'яку посадку на поверхню Місяця в момент t_1 і величина $m(t_1)$ набуває максимального значення.

13.2. Формалізація задача оптимального керування

Основним елементом будь-якої задачі оптимального керування є *керований об'єкт* (*керована система*). Його положення в момент t описується вектором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$. Змінні $x_1, \dots, x_n$ називаються *фазовими змінними*, вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ – *фазовим вектором* або *положенням об'єкта*. Множина всіх можливих фазових векторів в R^n називається *фазовим простором*. Керований об'єкт має керуючі пристрої, положення яких у кожний момент часу t визначається вектором $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, який називається *вектором керування об'єкта*. Множина всіх можливих значень вектора керування в реальних об'єктах – це власна підмножина простору R^r. Як правило, множина U замкнута й обмежена, оскільки в реальних об'єктах керування $u(t)$ не можуть набувати будь-яких значень, але можуть набувати своїх "крайніх" значень.

При математичному описі задач керування необхідно задавати допустимий характер зміни керуючого вектора. Дослідження найпростіших задач свідчить, що вимагати неперервності керування недоцільно. Природніше вважати керуючий процес кусково-неперервним, тобто керування $u(t)$ може мати розриви першого роду в скінченному числі точок.

Закон руху об'єкта задається диференціальним рівнянням

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{13.7}$$

де $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$.

Векторнозначна функція $\varphi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)$ неперервна і має неперервні похідні за змінними $t, x_1, \dots, x_n$. Виконання цих умов забезпечує існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння (13.7) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ при вибраному допустимому керуванні $u(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$. Тобто еволюція $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, об'єкта однозначно визначається вибором допустимого керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Розв'язок $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ рівняння (13.7) називається *фазовою траєкторією керованого об'єкта*, а пара $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ (де $x(t)$ – траєкторія, яка відповідає $u(t)$), називається *керованим процесом*. Керований процес $(x(t), u(t))$ називається *допустимим*, якщо задовольняє граничні умови.

Мета керування – перевести керований об'єкт із початкового положення $x(t_0) \in S_0 \subset R^n$ у деяку множину $S_1 \subset R^n$ в момент $t_1 : x(t_1) \in S_1$. Як правило, існує багато керувань $u(t)$ реальними керованими об'єктами. Тому виникає питання про вибір якнайкращого, або оптимального керування. Для цього необхідно визначити критерій якості, або оптимальності керування, який дозволяє порівнювати різні способи керування і вибрати якнайкращий (оптимальний).

Критерій оптимальності $J(x(\cdot), u(\cdot))$ – це функціонал, визначений на множині допустимих керованих процесів $(x(t), u(t))$, де $u(t)$ – допустиме керування, а $x(t)$ – відповідна траєкторія. Оскільки функціонал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ набуває числових значень, то кожному керованому процесу $(x(t), u(t))$ відповідає число, за яким і судять про якість керування. Задача оптимального керування полягає в тому, щоб визначити допустиме керування $\hat{u}(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$, при якому фазова траєкторія задовольняє граничні умови $\hat{x}(t_0) \in S_0$, $\hat{x}(t_1) \in S_1$ і критерій оптимальності досягає на керованому процесі $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, екстремального значення. Залежно від виду критерію оптимальності й граничних умов розрізняються такі задачі оптимального керування.

Задача Лагранжа. Критерій оптимальності має вигляд

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \inf.$$

Функція $f : R^1 \times R^n \times R^r \to R^1$ називається *інтегрантом*. Вважається, що вона неперервна і неперервно диференційовна за змінними t, x.

Задача Майєра. Функціонал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ має вигляд

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \Psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf.$$

Такий функціонал називається *термінальним*. Функція $\Psi : R^1 \times R^n \times R^1 \times R^n \to R^1$ неперервна і неперервно диференційовна за всіма змінними.

Задача Больца. Функціонал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ має термінальну й інтегральну частини

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt+\Psi(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to \inf.$$

Функції $f(t,x,u)$, $\Psi(t_0,x_0,t_1,x_1)$ мають такі ж властивості, як і в задачах Лагранжа і Майєра.

Якщо в задачі Больца покласти $f\equiv 0$, то одержимо задачу Майєра, а якщо покласти $\Psi\equiv 0$ – то одержимо задачу Лагранжа.

Якщо в задачі Лагранжа $f=1$, то критерій оптимальності – це час t_1-t_0 переходу об'єкта з початкового положення в кінцеве. Оптимальне керування забезпечує мінімізацію часу, витраченого на перехід. Така задача називається *задачею оптимальної швидкодії.*

Якщо множини S_0, S_1 початкових і кінцевих положень керованого об'єкта не залежать від моментів часу t_0, t_1 і мають лише одну точку $S_0=\{x_0\}$, $S_1=\{x_1\}$, то задача оптимального керування називається *задачею з фіксованими*, або *закріпленими кінцями траєкторії.*

Якщо множина S_0 (множина S_1) збігається з усім простором R^n, то маємо задачу з *вільним* лівим (правим) кінцем траєкторії.

Якщо множина S_0 (або S_1) – це деякий підпростір простору R^n розмірності меншої, ніж n, то лівий (правий) кінець траєкторії називається *рухомим.*

У задачах оптимального керування можуть зустрічатися ситуації, коли моменти часу t_0, t_1 не фіксовані. Тоді інтервал $[t_0,t_1]$ необхідно включити у визначення допустимого керованого процесу і розглядати керовані процеси $(x(t),u(t),t_0,t_1)$.

Допустимий *керований процес* $(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ називається *оптимальним,* якщо існує таке число $\varepsilon>0$, що для будь-якого іншого допустимого керованого процесу $(x(t),u(t),t_0,t_1)$, що задовольняє умови $|t_0-\hat{t}_0|<\varepsilon$, $|t_1-\hat{t}_1|<\varepsilon$, $\|\hat{x}(t)-x(t)\|<\varepsilon$, $t\in[t_0,t_1]\cap[\hat{t}_0,\hat{t}_1]$, виконується нерівність $J(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)\le J(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)$. Порівняно із задачею Лагранжа тут не вимагається близькість похідних $x'(t)$, $\hat{x}'(t)$. У класичному варіаційному численні це відповідає переходу від слабкого до сильного екстремуму.

Задача оптимального керування (у формі Понтрягіна) – це екстремальна задача у просторі $KC^1(\Delta,R^n)\times KC(\Delta,R^r)\times R^2$ такого вигляду:

$$B(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt+\Psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to \inf; \qquad (13.8)$$

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t \in T; \tag{13.9}$$

$$B_j(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), u(t))dt + \Psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \le 0, \quad j = \overline{1, m}; \tag{13.10}$$

$$B_j(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), u(t))dt + \Psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad j = \overline{m+1, s}; \tag{13.11}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in \Delta, \tag{13.12}$$

де $T \subset \Delta$ множина точок неперервності керування $u(t)$, Δ – заданий відрізок числової прямої R^1, $x(\cdot) \in KC^1(\Delta, R^n)$, $u(\cdot) \in KC(\Delta, R^r)$, $t_0, t_1 \in \operatorname{int}\Delta$, $f_j : R \times R^n \times R^r \to R$ функції $n + r + 1$ змінних, $\Psi_j : R \times R^n \times R \times R^n \to R$ функції $2n + 2$ змінних, $\varphi : R \times R^n \times R^r \to R^n$ вектор-функція $n + r + 1$ змінних U – задана підмножина простору R^r. Вектор-функція $x(\cdot)$ – це *фазова змінна* (або *траєкторія*), $u(\cdot)$ – *керування*. Рівняння (13.9) називається *диференціальним зв'язком*. Це рівняння має справджуватися в усіх точках неперервності $T \subset \Delta$ керування $u(t)$. Елемент $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ простору $KC^1(\Delta, R^n) \times KC(\Delta, R^r) \times R^2$, що задовольняє всі умови й обмеження задачі, називається *допустимим керованим процесом.*

Допустимий керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ називається (локально) *оптимальним*, якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого допустимого керованого процесу $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, що задовольняє умови

$$\left\| (x(\cdot), t_0, t_1) - (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \right\|_{C(\Delta, R^n) \times R^2} < \varepsilon,$$

виконується нерівність $B(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \ge B(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$.

Функцією Лагранжа екстремальної задачі (13.8)–(13.12) називається така функція:

$$\pounds(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), u(t))dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \tag{3.13}$$

де $\lambda_0 \in R^1$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in R^s$,

$$L = L(t, x(t), x'(t), u(t)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)) + p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t))), \tag{13.14}$$

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \Psi_j(t_0, x(t_0), x_1, x(t_1)). \tag{13.15}$$

Функція $p(\cdot):[t_0, t_1] \to R^n$ неперервна: $p(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], R^n)$. Числа λ_i, $i = 0, 1, \ldots, s$ і функція $p(\cdot)$ називаються *множниками Лагранжа* задачі (13.8)–(13.12), функція $L = L(t, x(t), x'(t), u(t))$ (13.14) – *лагранжіаном,* а функція $l = l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ (13.15) – *термінантом*. Функцію

$$H(t, x, u, p) = p(t)\varphi(t, x(t), u(t)) - \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)). \tag{13.16}$$

називають *функцією Понтрягіна.* Надалі користуватимемося такими позначеннями:

$$\hat{L}_x(t) = L_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \hat{u}(t)), \quad \hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)),$$

$$\hat{f}_x(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad \hat{l}_{x_k} = l_{x_k}(\hat{t}_0, \hat{x}(t_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \quad k = 0, 1.$$

Теорема 13.1 (про принцип максимуму Понтрягіна). *Нехай* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *– оптимальний керований процес у задачі оптимального керування (13.8)–(13.12), функції* $\varphi(t, x, u)$, $f_j(t, x, u), j = 0, 1, \ldots, s$ *та їхні частинні похідні за* x *– неперервні на множині* $V \times U$, *де* V *– деякий окіл множини* $\{(t, \hat{x}(t)) : t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]\}$, *а функції* $\Psi_j(t_0, x_0, t_1, x_1)$, $j = 0, \ldots, s$ *– неперервно диференційовні в околі точки* $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$ *(умова гладкості). Тоді існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа* $\lambda_0 \in R^1$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in R^s$, $p(\cdot) \in KC^1([\hat{t}_0, \hat{t}_1], R^n)$, *що задовольняють умови:*

а) стаціонарності по x *– рівняння Ейлера лагранжіана* L:

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) \Leftrightarrow p'(t) = \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t),$$

де

$$f(t, x, u) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x, u);$$

б) трансверсальності по x:

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0} \Leftrightarrow p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0},$$

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1} \Leftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1};$$

в) оптимальності по u *– принцип мінімуму в лагранжевій формі:*

$$\min_{u\in U}\hat{L}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),u) \quad = \hat{L}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\hat{u}(t))$$
$$\Leftrightarrow \min_{u\in U}[f(t,\hat{x}(t),u)-p(t)\varphi(t,\hat{x}(t),u)]$$
$$=[f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))-p(t)\varphi(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))] \quad \forall t\in T$$

або принцип максимуму у формі Гамільтона (Понтрягіна):

$$\max_{u\in U}H(t,\hat{x}(t),u,p(t))=H(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),p(t))$$
$$\Leftrightarrow \max_{u\in U}[p(t)\varphi(t,\hat{x}(t),u)-f(t,\hat{x}(t),u)]$$
$$= p(t)\varphi(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))-f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) \quad \forall t\in T,$$

де $H(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),p(t))$ *– функція Понтрягіна* (*13.16*);

г) стаціонарності по t_0,t_1 *(тільки тоді, коли границі* t_0,t_1 *інтервалу* $[t_0,t_1]$ *рухомі)*:

$$£_{t_0}=0 \quad \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0)+\hat{l}_{t_0}+\hat{l}_{x_0}\hat{x}'(\hat{t}_0)=0,$$
$$£_{t_1}=0 \quad \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1)+\hat{l}_{t_1}+\hat{l}_{x_1}\hat{x}'(\hat{t}_1)=0;$$

д) доповнюючої нежорсткості $\lambda_i B_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{T}_1)=0,\ i=\overline{1,m}$;

е) невід'ємності $\lambda_j\ge 0, j=\overline{0,m}$.

Це твердження не суперечить основному принципу Лагранжа. Дійсно, функція Лагранжа $£(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1,p(\cdot),\lambda,\lambda_0)$ (13.13) залежить від трьох аргументів $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, (t_0,t_1). Тому необхідно розглядати три задачі:

1) $£(x(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1,p(\cdot),\lambda,\lambda_0)\to extr$ (за змінною $(x(\cdot))$;

2) $£(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),t_0,t_1,p(\cdot),\lambda,\lambda_0)\to extr$ (за змінними $\hat{t}_0,\hat{t}_1$);

3) $£(\hat{x}(\cdot),u(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1,p(\cdot),\lambda,\lambda_0)\to extr$ (за змінною $(u(\cdot))$.

Перша – це задача Больца варіаційного числення й умови стаціонарності 1), 2), записані в повній відповідності до умов теореми класичного варіаційного числення.

Друга задача елементарна і умови стаціонарності 4) – це наслідок теореми Ферма.

Третю задачу можна зобразити у вигляді

$$\int_{t_0}^{t_1}g(t,u(t))dt\to \inf, \quad u(\cdot)\in KC([\hat{t}_0,\hat{t}_1],U),$$

де $g(t,u)=\lambda_0 f(t,\hat{x}(t),u)-p(t)\varphi(t,\hat{x}(t),u)$.

Необхідна і достатня умова екстремуму в цій задачі така. Функція $\hat{u}(\cdot) \in KC([\hat{t}_0, \hat{t}_1], U)$ дає мінімум задачі тоді й тільки тоді, коли скрізь, за винятком точок розриву керування $\hat{u}(\cdot)$, виконується співвідношення:

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \hat{u}(t)),$$

яке рівносильне співвідношенню

$$\max_{u \in U} H(t, \hat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)).$$

13.3. Доведення принципу максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування на множині функцій з вільним кінцем

Розглянемо задачу оптимального керування, в якій термінальна частина функціонала відсутня ($\Psi_0 = 0$), один кінець зафіксований, а інший вільний:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \quad = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \inf; \tag{13.17}$$

$$x'(t) \quad = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0; \tag{13.18}$$

$$u \quad \in U. \tag{13.19}$$

Теорема 13.2. *Нехай* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *– оптимальний керований процес у задачі оптимального керування (13.17)–(13.19), функції* $f(t, x, u)$, $\varphi(t, x, u)$, $\varphi'_x(t, x, u)$, $f'_x(t, x, u)$ *– неперервні на множині* $V \times U$, *де* V *– деякий окіл множини* $\{(t, \hat{x}(t)) : t \in [t_0, t_1]\}$. *Тоді розв'язок* $p(\cdot)$ *рівняння*

$$p'(t) + p(t)\hat{\varphi}_x(t) = \hat{f}_x(t) \qquad (13.20)$$

з граничною умовою

$$p(t_1) = 0 \tag{13.21}$$

у точках неперервності керування $\hat{u}(\cdot)$ *задовольняє принцип максимуму*

$$\begin{aligned} &\max_{u \in U}[p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u) - f(t, \hat{x}(t), u)] \\ &= p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)). \end{aligned} \tag{13.22}$$

Доведення. Для доведення теореми скористаємося методом варіацій. Почнемо з визначення елементарної варіації (варіації Вейєрштраса). Фіксуємо точку $\tau \in T$, елемент $\upsilon \in U$ і число $\lambda > 0$ таке, що $[\tau - \lambda, \lambda] \subset [t_0, t_1]$. Керування

$$u_\lambda(t) = u_\lambda(t, \tau, \lambda) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \notin [\tau - \lambda, \tau), \\ \upsilon, & t \in [\tau - \lambda, \tau) \end{cases}$$

називають *елементарною варіацією керування* $\hat{u}(\cdot)$. Нехай $x_\lambda(t)$ – розв'язок рівняння $x' = \varphi(t, x, u_\lambda(t))$ з початковими умовами $x_\lambda(t_0) = \hat{x}(t_0) = x_0$. Назвемо $x_\lambda(t)$ *елементарною варіацією траєкторії*, а пару $(x_\lambda(t), u_\lambda(t))$ – *елементарною варіацією керованого процесу* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$.

Лема 13.1 (про властивості елементарної варіації). *Нехай пара* (τ, v) *фіксована. Тоді існує таке число* $\lambda_0 > 0$, *що* $[\tau - \lambda_0, \tau] \subset T$ *і для всіх* $\lambda \in [0, \lambda_0]$ *виконуються умови*:

а) траєкторія $x_\lambda(\cdot)$ *визначена на всьому відрізку* $[t_0, t_1]$ *і при* $\lambda \downarrow 0$ $x_\lambda(t) \to \hat{x}(t)$ *рівномірно на* $[t_0, \tau]$;

б) при $t \geq \tau$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ *існує і неперервна по* λ *похідна*

$$\frac{d}{d\lambda} x_\lambda(t, \tau, v) = z_\lambda(t, \tau, v),$$

яка при $\lambda = 0$ *визначена як похідна справа;*

в) функція $t \to y(t) = z_0(t, \tau, v)$ *на відрізку* $[\tau, t_1]$ *задовольняє диференціальне рівняння*

$$y' = \hat{\varphi}_x(t) y \tag{13.23}$$

з початковою умовою

$$y(\tau) = \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) = \Delta\varphi(\tau, v). \tag{13.24}$$

Доведення леми базується на двох теоремах теорії звичайних диференціальних рівнянь: локальній теоремі існування і теоремі про неперервну диференційовність розв'язків за початковими даними.

Нехай функція $\hat{u}(t)$ неперервна. Розглянемо диференціальні рівняння

$$x' = \varphi(t, x, u_\lambda(t)); \quad x' = \varphi(t, x, \hat{u}(t))$$

з початковими умовами $x_\lambda(t_0) = \hat{x}(t_0) = x_0$. Оскільки $\hat{u}(t) = u_\lambda(t)$ при $t_0 \leq t \leq \tau - \lambda$, то $x_\lambda(t) = \hat{x}(t)$ при $t < \tau - \lambda$ і внаслідок неперервності $x_\lambda(\tau - \lambda) = \hat{x}(\tau - \lambda)$. Дослідимо на відрізку $[\tau - \lambda, \tau]$ диференціальне рівняння $x' = \varphi(t, x, v)$ з початковою умовою $x(\tau - \lambda) = \hat{x}(\tau - \lambda)$. Відповідно до локальної теореми існування і єдиності розв'язку можна підібрати такі $\lambda_1 > 0$ і $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, $|\hat{x}(\tau - \lambda) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon_1$ розв'язок $x_\lambda(t)$ рівняння визначений і неперервно диференційовний по λ за теоремою про неперервно диференційовну залежність розв'язків від початкових даних.

Оскільки функція $\hat{u}(t)$ неперервна в точці τ, то вона неперервна в деякому її λ околі. Тому $\hat{x}'(t)$ неперервна в цьому околі

$$\begin{aligned}\hat{x}(\tau) &= \hat{x}(\tau-\lambda)+\lambda\hat{x}'(\tau-\lambda)+o(\lambda)\\ &= \hat{x}(\tau-\lambda)+\lambda\varphi(\tau-\lambda,\hat{x}(\tau-\lambda),\hat{u}(\tau-\lambda))+o(\lambda),\\ x_\lambda(\tau) &= \hat{x}(\tau-\lambda)+\lambda\varphi(\tau-\lambda,\hat{x}(\tau-\lambda),\upsilon)+o(\lambda)\end{aligned}$$

Звідси

$$y(\tau)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{x_\lambda(\tau)-\hat{x}(\tau)}{\lambda}=\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\upsilon)-\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau)).$$

А це є гранична умова (13.24).

Властивість а) леми виконується, оскільки на відрізку $[t_0,\lambda]$ $x_\lambda(t)=\hat{x}(t)$ і можна підібрати таке $\lambda_1>0$, що при $0\le\lambda\le\lambda_1$ і $\tau-\lambda\le t\le\tau$ виконуються нерівності $|\hat{x}(\tau)-\hat{x}(t)|<\varepsilon/2$, $|x_\lambda(t)-\hat{x}(\tau)|<\varepsilon/2$. Тому на відрізку $[\tau-\lambda,\tau]$ виконується нерівність $|x_\lambda(t)-\hat{x}(\tau)|<\varepsilon$ для заданого $\varepsilon>0$.

Розглянемо тепер поведінку $x_\lambda(t)$ на відрізку $[\tau,t_1]$. Для будь-якого $\varepsilon_2>0$ можна визначити таке $\lambda_2>0$, що при $\lambda<\lambda_2$ виконується нерівність $|x_\lambda(\tau)-\hat{x}(\tau)|<\varepsilon_2$. Відповідно до теореми про існування і єдиність розв'язку можна відшукати таке $\varepsilon_2>0$, що розв'язок рівняння $x'=\varphi(t,x,\hat{u}(t))$ з початковою умовою $x_\lambda(\tau)$ існує при $\tau\le t\le t_1$ і неперервно диференційовний по λ. Отже, при $t\in[\tau,t_1]$ існує

$$y(t)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{x_\lambda(t)-\hat{x}(t)}{\lambda}.$$

При $t\ge\tau$

$$\begin{aligned}x_\lambda(t) &= x_\lambda(\tau)+\int_\tau^t\varphi(s,x_\lambda(s),\hat{u}(s))ds,\\ \hat{x}(t) &= \hat{x}(\tau)+\int_\tau^t\varphi(s,\hat{x}(s),\hat{u}(s))ds.\end{aligned}$$

Тому

$$\frac{x_\lambda(t)-\hat{x}(t)}{\lambda}=\frac{x_\lambda(\tau)-\hat{x}(\tau)}{\lambda}+\int_\tau^t\frac{\varphi(s,x_\lambda(s),\hat{u}(s))-\varphi(s,\hat{x}(s),\hat{u}(s))}{\lambda}ds.$$

Перейдемо до границі при $\lambda\to 0$. Одержимо

$$y(t)=y(\tau)+\int_\tau^t\varphi_{x'}(s,\hat{x}(s),\hat{u}(s))ds.$$

Це інтегральне рівняння еквівалентне диференціальному рівнянню

$$y'(t)=\varphi_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))y(t)$$

з початковою умовою (13.24).□

Лема 13.2 (про приріст функціонала). *Функція* $F(\lambda) = J(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot))$ *диференційовна справа в точці* $\lambda = 0$ і $F'(+0) = a(\tau,\upsilon)$,

де

$$a(\tau,\upsilon) = f(\tau,\hat{x}(\tau),\upsilon) - f(\tau,\hat{x}(\tau)\hat{u}(\tau) - p(\tau)[\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\upsilon) - \varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))].$$

Функція $p(t)$ *– це розв'язок рівняння* (13.20) *з граничною умовою* (13.21).

Доведення. Обчислимо похідну функції

$$F'(+0) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}(F(\lambda) - F(0)) =$$

$$= \lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\tau-\lambda}^{\tau}(f(t,x_\lambda(t),\upsilon) - f(t,\hat{x}(t),\hat{x}(t)))dt$$

$$+\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\tau}^{t_1}(f(t,x_\lambda(t),\hat{u}(t)) - f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)))dt$$

$$= f(\tau,\hat{x}(\tau),\upsilon) - f(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau)) + \int_{\tau}^{t_1} f_x(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))y(t)dt$$

Ми користувалися такими властивостями функції $x_\lambda(t)$, як диференційовність по λ та збіжність $x_\lambda(\tau)$ до $\hat{x}(\tau)$ при $\lambda \to 0$. Нехай функція $p(t)$ задовольняє рівняння (13.20), а функція $y(t)$ – рівняння (13.23). При $t \ge \tau$

$$\frac{d}{dt}(p(t)y(t)) = p'(t)y(t) + p(t)y'(t)$$

$$= -p(t)\hat{\varphi}_x(t)y(t) + \hat{f}_x(t)y(t) + p(t)\hat{\varphi}_x(t)y(t) = \hat{f}_x(t)y(t).$$

Проінтегруємо останню рівність від τ до t_1 та використовуємо граничні умови (13.21) (13.24). Тоді

$$\int_{\tau}^{t_1}\hat{f}_x(t)y(t)dt = \int_{\tau}^{t_1}\frac{d}{dt}(p(t)y(t))dt = p(t)y(t)\Big|_{\tau}^{t_1}$$

$$= -p(\tau)[\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\upsilon) - \varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))].$$

Лему доведено. □

Доведення теореми. Якщо правий кінець траєкторії вільний, то відповідно до леми 13.1 будь-яка елементарна варіація допустима (при достатньо малих λ). Якщо $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ – оптимальний процес, то при малих λ виконується нерівність $J(x_\lambda(\cdot),u_\lambda(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$. Ця нерівність еквівалентна нерівності $F'(+0) \ge 0$. Тому відповідно до леми 13.2 умова $a(\tau,\upsilon) \ge 0$ є необхідною умовою оптимальності $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ для довільних значень (τ,υ), $\tau \in T$, $\upsilon \in U$. Ми показали, що для будь-якої точки $\tau \in T$ і для будь-якого $\upsilon \in U$ виконується нерівність

$$p(\tau)\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),v)-f(\tau,\hat{x}(\tau),v)\le p(\tau)\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))-f(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau)).$$

Отже,

$$\max_{u\in U}[p(\tau)\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),u)-f(\tau,\hat{x}(\tau),u)$$
$$=p(\tau)\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))-f(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau)).$$

А це і є принцип максимуму (13.22). Теорему доведено. □

13.4. Розв'язок задач оптимального керування

Приклад 13.1. Дослідити на екстремум функціонал задачі про оптимальну швидкодію

$$T\to\inf,\quad mx''=u,\quad u\in[u_1,u_2],\quad x(0)=x_0,\quad x'(0)=v_0,$$
$$x(T)=0,\quad x'(T)=0.$$

Розв'язок:

За допомогою заміни $x=Ay+B(t-T)^2$ задачу можна подати у вигляді

$$T\to\inf,\quad y''=u,\quad |u|\le 1,\quad y(0)=y_0,\quad y'(0)=v_0,$$
$$y(T)=0,\quad y'(T)=0.$$

Це задача оптимального керування

$$T=\int_0^T 1dt\to\inf,\quad x_1^{'}=x_2,\quad x_2^{'}=u,\quad u\in[-1,1],$$
$$x_1(0)=x_0,\quad x_2(0)=v_0,\quad x_1(T)=x_2(T)=0,$$

де $x_1=y$, $x_2=x_1^{'}=y'$, $x_0=y_0$.

Застосуємо принцип максимуму Понтрягіна.

1. Побудуємо функцію Лагранжа

$$£=\int_0^T(p_1(t)(x_1^{'}(t)-x_2(t))+p_2(t)(x_2^{'}(t)-u(t)))dt+\lambda_0 T$$
$$+\lambda_1(x_1(0)-x_0)+\lambda_2(x_2(0)-v_0)+\lambda_3 x_1(T)+\lambda_4 x_2(T).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера лагранжіана

$$L=p_1(x_1^{'}-x_2)+p_2(x_2^{'}-u)$$

$$L_{x_i}=\frac{d}{dt}L_{x_i^{'}},\quad i=1,2\Leftrightarrow p_1^{'}=0,\quad p_2^{'}=-p_1\Rightarrow p_2(t)=Ct+C_1;$$

б) трансверсальності по x:

$$p_1(0)=\lambda_1,\quad p_2(0)=\lambda_2,\quad p_1(T)=-\lambda_3,\quad p_2(T)=-\lambda_4;$$

в) оптимальності по u (доданки, які не залежать від (u), не виписуємо):

$$\min_{u\in[-1,1]}[-p_2(t)u]=-p_2(t)\hat{u}(t)\Rightarrow \hat{u}(t)=sign(p_2(t))$$

при $p_2(t)\neq 0$;

г) стаціонарності по T:

$$£_T=0\Leftrightarrow \lambda_0+\lambda_3 x_1'(T)+\lambda_4 x_2'(T)=0.$$

Враховуючи, що $x_2'(T)=0$, $\lambda_4=-p_2(T)$, $p_2(T)\hat{u}(T)=|\,p_2(T)|$, одержимо

$$L_T=0\Leftrightarrow \lambda_0=|\,p_2(T)|.$$

3. Нехай $\lambda_0=0$. Тоді з умови стаціонарності г) випливає, що $p_2(T)=0$. Функція $p_2(t)$ не може бути тотожним нулем, оскільки всі множники Лагранжа були б нулями. Отже, з умови а) виводимо $p_2=C(t-T)$, а з умови в) отримаємо $\hat{u}(t)=1$ або $\hat{u}(t)=-1$. Якщо $\hat{u}(t)=1$, то $x_2(t)=t-T$, $x_1(t)=(t-T)^2/2$, $\upsilon_0^2/2=x_0$. Таким чином, за допомогою керування $\hat{u}(t)=1$ в точку $(0,0)$ можна переміститися лише з початкових точок, які задовольняють співвідношення $x_0=\upsilon_0^2/2$, $\upsilon_0<0$, а за допомогою керування $\hat{u}(t)=-1$ в точку $(0,0)$ можна переміститися лише з початкових точок (x_0,υ_0) таких, що $x_0=-\upsilon_0^2/2$, $\upsilon_0>0$.

Нехай тепер $\lambda_0=1$. Тоді з умови г) одержимо $|\,p_2(T)|=1$. Отже, умову задовольняють дві функції:

$$p_2^+(t)=C(t-T)+1,\quad p_2^-(t)=C(t-T)-1.$$

Відповідні керування мають вигляд:

$$\hat{u}^+(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t\le\tau,\\ +1, & \tau\le t\le T,\end{cases}\quad \hat{u}^-(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le\tau,\\ -1, & \tau\le t\le T.\end{cases}$$

Зобразимо траєкторію руху у фазовій площині (x_1,x_2) (рис. 13.1). За тих значень t, за яких $\hat{u}(t)=1$, виконується

$$x_2'=1\Rightarrow x_1'=x_2=t+C'\Rightarrow x_1=t^2/2+C't+C''=x_2^2/2+C.$$

Фазова траєкторія, яка відповідає таким значенням – це частина параболи $x_1=x_2^2/2+C$. Напрямок руху по ній визначається з умови зростання x_2, оскільки $x_2'=1$. Аналогічно значенням t таким, що $\hat{u}(t)=-1$

у фазовій площині відповідає парабола $x_1 = -x_2^2/2 + C$, а напрямок руху визначається з умови спадання x_2, оскільки $x_2' = -1$.

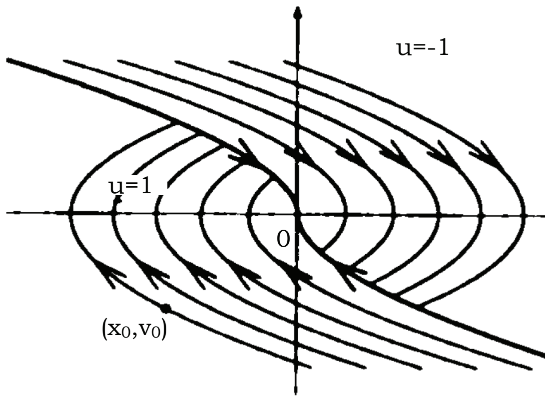

Рис. 13.1

Отже, фазові траєкторії руху в площині (x_1, x_2) – це частини парабол $x_1 = \pm x_2^2/2 + C$. Лінія $x_1 = -x_2 \mid x_2 \mid /2$ розділяє площину на дві частини. Якщо початкова точка (x_0, v_0) лежить ліворуч від цієї лінії, то за допомогою керування $\hat{u}(t) = 1$, $0 \le t \le \tau$ точка переміститься по параболі $x_1 = x_2^2/2 + C$ до перетину з параболою $x_1 = -x_2^2/2$ у момент $t = \tau$. У цей момент відбувається зміна керування $\hat{u} = +1$ на $\hat{u} = -1$. Далі точка рухається по параболі $x_1 = -x_2^2/2$ в точку $(0,0)$. Точка, яка лежить праворуч від лінії $x_1 = -x_2 \mid x_2 \mid /2$, під дією керування $\hat{u}(t) = -1$, $0 \le t \le \tau$ рухається по параболі $x_1 = -x_2^2/2 + C$ до перетину з лінією в момент τ, а потім – по параболі $x_1 = x_2^2/2$ під дією керування $\hat{u}(t) = +1$.

Відповідь: Оптимальний керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ визначається співвідношеннями:

$$\hat{u}^+(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le \tau, \\ +1, & \tau \le t \le T, \end{cases} \quad \hat{x}^+(t) = \begin{cases} -t^2/2 + C_1 t + C_2, & 0 \le t \le \tau, \\ (t-T)^2/2, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

$$\hat{u}^-(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \tau, \\ -1, & \tau \le t \le T, \end{cases} \quad \hat{x}^-(t) = \begin{cases} t^2/2 + C_1 t + C_2, & 0 \le t \le \tau, \\ -(t-T)^2/2, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

де τ, C_1, C_2 визначаються значеннями x_0, v_0. Δ

Приклад 13.2. Дослідимо на екстремум функціонал задачі про м'яку посадку на поверхню Місяця:

$$F + M - m(T) \to \inf, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = -g_L + u/m, \quad m' = -u,$$

$$x_1(0) = h_0, \quad x_2(0) = v_0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad 0 \le u \le U,$$

де $t_0 = 0$ – початок спуску, T – кінець спуску (момент посадки).

Розв'язок:

Це задача оптимального керування (задача Майєра). Застосуємо принцип максимуму Понтрягіна.

1. Побудуємо функцію Лагранжа:

$$£ = \int_0^T [p_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + p_2(t)(x_2'(t) + g_L - u(t)/m(t))$$

$$+ p_3(t)(m'(t) + u(t))]dt + \lambda_0(F + M - m(T)) + \mu_1 x_1(T) + \mu_2 x_2(T).$$

Тут немає граничних умов на лівому кінці, оскільки вони не впливають на розв'язок задачі.

2. Запишемо необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера:

$$-p_1' = 0, \quad -p_2' - p_1 = 0, \quad -p_3' + p_2 u/m^2 = 0;$$

б) трансверсальності по x:

$$p_1(T) = -\mu_1, \quad p_2(T) = -\mu_2, \quad p_3(T) = \lambda_0;$$

в) оптимальності по u:

$$\min_{0 \le u \le U} [p_3(t)u - p_2(t)u/m(t)] = p_3(t)\hat{u}(t) - p_2(t)\hat{u}(t)/m(t);$$

г) стаціонарності по T:

$$-\lambda_0 m'(T) + \mu_1 x_1'(T) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{u}(T) + p_2(T)(g_L - \hat{u}(T)/m(T)) = 0.$$

З умови а) одержимо, що $p_1(t) = P$, $P =$ const, $p_2(t) = -Pt + Q$, $Q = \text{const}$. Позначимо $\Psi(t) = -p_3(t) + p_2(t)/m(t)$. Тоді з умови а) випливає, що $\Psi'(t) = -P/m(t)$.

З умови стаціонарності по T одержуємо $\Psi(T)\hat{u}(T) = p_2(T)g_L$, а з умови оптимальності по (u) одержимо

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \Psi(t) < 0, \\ U, & \Psi(t) \ge 0. \end{cases}$$

3. Якщо $P = 0$, то $\Psi = \Psi_0 =$ const, де $\Psi_0 \ne 0$. Інакше $p_2 = 0$ і всі множники Лагранжа стають нулями. Тому $\hat{u}(t) \equiv 0$ або $\hat{u}(t) \equiv U$. Якщо ж $P \ne 0$, то функція Ψ строго монотонна і має перемикання з $\hat{u} = U$ на

$\hat{u} = 0$ або, навпаки, з $\hat{u} = 0$ на $\hat{u} = U$. Перший випадок неможливий з технічних причин. Залишаються дві можливості: або рухатися з керуванням $\hat{u}(t) \equiv U$, або робити перемикання з нуля на U. Нехай τ – момент перемикання. Рух апарата при $t \le \tau$ описується рівнянням вільного падіння

$$x_1 = h_0 + v_0 t - g_L t^2/2, \quad x_2 = v_0 - g_L t, m(t) \equiv m_0.$$

У фазовій площині (x_1, x_2) ці співвідношення визначають параболу

$$x_1 = h_0 + v_0(v_0 - x_2)/g_L - (v_0 - x_2)^2/2g_L.$$

Рух апарата на відрізку часу $[\tau, T]$ визначається рівнянням

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -g_L + u/m, \quad m' = -U$$

з початковими умовами

$$x_1(\tau) = h_1, \quad x_2(\tau) = v_1, \quad m(\tau) = F + M = m_0.$$

Розв'язок відповідної задачі Коші має вигляд ($\tau + s = t$):

$$x_1(\tau + s) \quad = h_1 + v_1 s - \frac{g_L s^2}{2} + s - m_0 U(1 - \frac{Us}{m_0})\ln(1 - \frac{Us}{m_0}),$$

$$x_2(\tau + s) \quad = v_1 - g_L s - \ln\left(1 - \frac{Us}{m_0}\right), \quad m = m_0 - Us.$$

Множина точок (h_1, v_1), з яких можна перейти в початок координат за час роботи двигуна на повну потужність, задається в параметричній формі рівняннями $x_1(s) = x_2(s) = 0$. Виключаючи параметр, одержимо криву $\Psi(h_0, v_0)$.

Відповідь: Оптимальне керування

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau, \\ U, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

де τ – перший додатний корінь рівняння

$$\Psi(h_0 + v_0\tau - \frac{g_L s^2}{2}; v_0 - g_L\tau) = 0. \tag{13.25}$$

На проміжку часу $[0, \tau]$ апарат рухається в режимі вільного падіння, а на проміжку $[\tau, T]$ двигун працює на повну потужність. Якщо при заданих (h_0, v_0) рівняння (13.25) не має розв'язків, то м'яка посадка неможлива. Δ

Приклад 13.3. Дослідимо на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^4((x')^2 + x)dt \to \inf, \quad |x'| \le 1,\ x(0) = 0.$$

Розв'язок:

1. Приведемо задачу до задачі оптимального керування у формі Понтрягіна:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^4(u^2 + x)dt \to \inf, \quad x' = u, u \in [-1,1], \quad x(0) = 0.$$

2. Складемо функцію Лагранжа:

$$£ = \int_0^4[\lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u)]dt + \lambda x(0).$$

3. Запишемо необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера лагранжіана:

$$L = \lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u): \quad p' = \lambda_0,$$

б) трансверсальності по x:

$$L_{x'}(t_k) = (-1)^k l_{x(t_k)}, \quad k = 0,1 \Leftrightarrow p(0) = \lambda, \quad p(4) = 0,$$

в) оптимальності по u:

$$\min_{-1 \le u \le 1}[\lambda_0 u^2 - p(t)u] = \lambda_0 \hat{u}^2(t) - p(t)\hat{u}(t).$$

4. Нехай $\lambda_0 = 0$. Тоді з умови а) випливає, що $p' = 0$, а з умови б) випливає, що $p = \lambda = 0$. Усі множники Лагранжа стали нулями, що суперечить принципу максимуму. Нехай тепер $\lambda_0 = 1$. Тоді рівняння Ейлера має вигляд $p' = 1$. Таке рівняння й умови трансверсальності задовольняє функція $p = t - 4$. З умови оптимальності по u одержуємо

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} sign(p(t)), & |p(t)/2| > 1; \\ p(t)/2, & |p(t)/2| \le 1. \end{cases}$$

Отже,

$$\hat{x}'(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2; \\ (t-4)/2, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

Користуючись початковою умовою, визначаємо неперервну функцію

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2; \\ t^2/4 - 2t + 1, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

5. Покажемо, що функція $\hat{x}(t)$ дає абсолютний мінімум. Нехай функція $h(\cdot) \in KC^1([0,4])$ така, що $\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)$ – допустима функція. Інтегруючи

частинами і враховуючи, що $\hat{x}(0)=0$, $\hat{x}'(t)=(t-4)/2$ при $2\le t\le 4$, одержуємо

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))=\int_0^4((\hat{x}'+h')^2+\hat{x}+h)dt-\int_0^4((\hat{x}')^2+\hat{x})dt$$

$$=\int_0^4 2\hat{x}'h'dt+\int_0^4 hdt+\int_0^4(h')^2dt\ge 2\int_0^4\hat{x}'dh$$

$$+\int_0^4 hdt=2\hat{x}'h\,|_0^4+\int_0^4(-2\hat{x}''+1)hdt=\int_0^2 hdt\ge 0$$

унаслідок того, що $h(t)\ge 0$ при $t\in[0,2]$, оскільки $h(0)=0$ і $h'(t)>0$ при $t\in[0,2]$.

Відповідь: Оптимальний керований процес $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ визначається співвідношеннями:

$$\hat{x}(\cdot)=\begin{cases}-t, & 0\le t\le 2,\\ t^2/4-2t+1, & 2\le t\le 4;\end{cases}\qquad \hat{u}(\cdot)=\begin{cases}-1, & 0\le t\le 2,\\ (t-4)/2, & 2\le t\le 4.\end{cases}$$

Приклад 13.4. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{T_0}|x'(t)|dt\to\inf,\quad x'(t)\ge A,\quad x(0)=0,\quad x(T_0)=b,\quad A<0.$$

Розв'язок:

1. Приведемо задачу до задачі оптимального керування у формі Понтрягіна:

$$\int_0^{T_0}|u(t)|dt\to\inf,\quad x'=u,\quad u\ge A,\quad x(0)=0,\quad x(T_0)=b.$$

2. Складемо функцію Лагранжа:

$$\pounds=\int_0^{T_0}(\lambda_0\,|u(t)|+p(t)(x'(t)-u(t))dt+\mu_1x(0)+\mu_2(x(T_0)-b).$$

3. Запишемо необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера лагранжіана $L=\lambda_0u+p(x'-u)$:

$$p'=0\Rightarrow p(t)=p_0=\text{const};$$

б) трансверсальності по x:

$$p(0)=\mu_1,\quad p(T_0)=-\mu_2;$$

в) оптимальності по u:

$$\min_{u\ge A}[\lambda_0\,|u|-p(t)u]=\lambda_0\,|\hat{u}(t)|-p(\hat{t})u(t).$$

4. Якщо $\lambda_0=0$, то $p_0\ne 0$ (інакше всі множники Лагранжа – нулі). Нехай $p_0>0$. Тоді $\min_{u\ge A}(-p_0u)=-\infty$ і умова оптимальності по u не виконується. Якщо $p_0<0$, то з умови трансверсальності б) випливає $u\equiv A$, $x(t)=At$. Допустима екстремаль можлива лише при $b=AT_0$. Ві-

зьмемо $\lambda_0 = 1$. Умова оптимальності по u не виконується при $p_0 > 1$, а при $p_0 = 1$ ця умова виконується за будь-якої невід'ємної функції $\hat{u}(\cdot)$. Якщо $-1 < p_0 < 1$, то $\hat{u} \equiv 0$, якщо $p_0 = -1$, то $\hat{u}(\cdot)$ – будь-яка функція, що задовольняє нерівність $A \le \hat{u}(t) \le 0$, якщо $p_0 < 1$, то $\hat{u} = A$.

5. Із співвідношення

$$\int_0^{T_0} x'(t)dt = b$$

виводимо

$$| b | \le \int_0^{T_0} | x'(t) | dt.$$

Тут рівність досягається на будь-якій допустимій екстремалі. Це означає, що будь-яка допустима екстремаль дає абсолютний мінімум задачі.

Відповідь: Якщо $b < AT_0$, то допустимих функцій немає. Якщо $b = AT_0$, то є одна допустима функція – екстремаль $\hat{x}(t) = At$. Якщо $AT_0 < b < 0$, то допустима екстремаль – будь-яка монотонно спадна допустима функція. Якщо $b = 0$, то єдина допустима екстремаль $\hat{x} \equiv 0$. Якщо $b > 0$, то будь-яка монотонно зростаюча функція є допустима екстремаль. Будь-яка допустима екстремаль дає абсолютний мінімум задачі. Δ

Задачі

Розв'язати задачі оптимального керування:

13.1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(t)dt \to extr$; $| x' | \le 1$, $x(-\pi) = x(\pi) = 0$.

13.2. $\int\limits_{0}^{7\pi/4} x\sin(t)dt \to extr$, $| x' | \le 1$, $x(0) = 0$.

13.3. $\int\limits_{0}^{4} ((x')^2 + x)dt \to extr$, $| x' | \le 1$, $x(4) = 0$.

13.4. $\int\limits_{0}^{T_0} ((x')^2 + x)dt \to extr$, $| x' | \le 1$, $x(0) = 0$.

13.5. $\int\limits_{0}^{T_0} ((x')^2 + x)dt \to extr$, $| x' | \le 1$, $x(0) = \xi$.

13.6. $\int\limits_{0}^{T} ((x')^2 + x)dt \to extr$, $| x' | \le 1$, $x(0) = \xi$.

13.7. $\int_0^{T_0}((x')^2 + x)dt \to extr$, $|x'| \le 1$, $x(T_0) = \xi$.

13.8. $\int_0^{T_0}((x')^2 + x)dt \to extr$, $|x'| \le 1$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = 0$.

13.9. $\int_0^{T}((x')^2 + x)dt \to extr$, $|x'| \le 1$, $x(0) = 0$, $x(T) = \xi$.

13.10. $\int_0^{T_0}((x')^2 + x^2)dt \to extr$, $|x'| \le 1$, $x(0) = \xi$.

13.11. $\int_0^1 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) = x'(0) = 0$.

13.12. $\int_0^1 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(1) = x'(1) = 0$.

13.13. $\int_0^1 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) = x'(1) = 0$.

13.14. $\int_0^2 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) + x(2) = 0$, $x'(2) = 0$.

13.15. $\int_0^2 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) + x(2) = 0$, $x'(0) = 0$.

13.16. $\int_0^1 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) + x(1) = 0$, $x'(0) + x'(1) = 0$.

13.17. $\int_0^2 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) = x'(0) = x(2) = 0$.

13.18. $\int_0^2 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) = x'(2) = x(2) = 0$.

13.19. $\int_0^2 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) = x'(0) = x'(2) = 0$.

13.20. $\int_0^4 xdt \to extr$, $|x''| \le 2$, $x(0) + x(4) = 0$, $x'(0) = x'(4) = 0$.

13.21. $T \to \inf$, $|x''| \le 2$, $x(-1) = 1$, $x(T) = -1$, $x'(-1) = x'(T) = 0$.

13.22. $T \to \inf$, $|x''| \le 2$, $x(-1) = -1$, $x(T) = 1$, $x'(-1) = x'(T) = 0$.

13.23. $T \to \inf$, $|x''| \le 2$, $x'(0) = x'(T) = 0$, $x(0) = 1$, $x(T) = 3$.

13.24. $T \to \inf$, $-1 \le x'' \le 3$, $x(0)=1$, $x'(0)=x'(T)=0$, $x(T)=-1$.

13.25. $T \to \inf$, $-3 \le x'' \le 1$, $x(0)=3$, $x'(0)=x'(T)=0$, $x(T)=-5$.

13.26. $T \to \inf$, $|x''| \le 1$, $x(0)=\xi_1$, $x'(0)=\xi_2$, $x'(T)=0$.

13.27. $T \to \inf$, $|x''| \le 1$, $x(0)=\xi_1$, $x'(0)=\xi_2$, $x(T)=0$.

13.28. $\int_0^2 |x''|dt \to \inf$, $x'' \ge -2$, $x(0)=0$, $x(2)=-1$, $x'(2)=-2$.

13.29. $\int_0^2 |x''|dt \to \inf$, $x'' \ge -2$, $x(0)=x'(0)=0$, $x(2)=-3$.

13.30. $\int_0^2 |x''|dt \to \inf$, $x'' \ge -2$, $x(0)=x'(2)=0$, $x(2)=3$.

13.31. $\int_0^2 |x''|dt \to \inf$, $x'' \le -2$, $x(0)=0$, $x(2)=1$, $x'(2)=2$.

13.32. $\int_0^2 |x''|dt \to \inf$, $x'' \le -2$, $x(0)=1$, $x'(0)=-2$, $x(2)=0$.

13.33. $\int_0^1 (x'')^2 dt \to \inf$, $x'' \le 24$, $x(0)=11$, $x(1)=x'(1)=0$.

13.34. $\int_0^2 (x'')^2 dt \to \inf$, $x'' \ge 6$, $x(0)=x'(0)=0$, $x(2)=17$.

13.35. $\int_0^1 (x'')^2 dt \to \inf$, $|x''| \le 1$, $x(0)=x'(0)=0$, $x(1)=-11/24$.

13.36. $x(2) \to extr$; $|x'| \le 2$, $\int_0^2 (x')^2 dt = 2$, $x(0)=0$.

13.37. $x(T_0) \to extr$; $\int_0^{T_0} (x')^2 dt = 2$, $|x'| \le 1$, $x(0)=0$.

13.38. $\int_0^1 ((x^2+(x')^2)/2 + |x'|)dt \to extr$; $x(1)=\xi$.

13.39. $\int_0^{T_0} (xy' - xy')dt \to \sup$, $(x')^2+(y')^2 \le 1$, $x(0)=x(T_0)=0$, $y(0)=y(T_0)$.

13.40. $\int_0^{T_0} (xy' - yx')dt \to \sup$, $(x'-\xi)^2+y^2 \le 1$, $x(0)=x(T_0)$, $y(0)=y(T_0)$.

13.41. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')dt \to \sup$, $(x')^2/a^2 + (y')^2/b^2 \le 1$, $x(0) = x(T_0)$, $y(0) = y(T_0)$.

13.42. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')dt \to \sup$, $|x'| \le 1$, $|y'| \le 1$, $x(0) = x(T_0) = 0$, $y(0) = y(T_0)$.

13.43. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')dt \to \sup$, $|x'| + |y'| \le 1$, $x(0) = x(T_0) = 0$, $y(0) = y(T_0)$.

13.44. $\int\limits_0^{T_0} \frac{t}{1+(x')^2}dt \to \inf$, $x' \ge 0$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = \xi$.

13.45. $\int\limits_0^1 x^2 dt \to \sup$, $|x'| \le 1$, $x(0) = 0$.

14. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ І НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ В ЗАДАЧАХ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Покажемо, що необхідні умови екстремуму в задачах варіаційного числення (рівняння Ейлера, умови Лежандра, Веєрштрасса, Якобі) є наслідком принципу максимуму.

14.1. Необхідні умови екстремуму в найпростішій задачі варіаційного числення

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення – задачу Лагранжа на множині вектор-функцій з фіксованими кінцями

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to \inf; \tag{14.1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{14.2}$$

де $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ – вектор-функція, інтегрант $L(t, x, x')$ неперервний разом із похідними $L_{x_k}(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$, $k = \overline{1, n}$, точки x_0, x_1, t_0, t_1 фіксовані.

Нагадаємо, що функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, $\hat{x}(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_1) = x_1$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі (14.1), (14.2), якщо вона дає локальний мінімум функціонала у просторі $C^1([t_0, t_1], R^n)$. Це означає, що існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої функції $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, що задовольняє умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1], R^n)} < \varepsilon,$$

виконується нерівність $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot))$. Тут

$$\|x(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1], R^n)} = \max\{\max_{t_0 \le t \le t_1} \|x(t)\|_{R^n}, \max_{t_0 \le t \le t_1} \|x'(t)\|_{R^n}\}.$$

Функціонал $J(x(\cdot))$ задачі (14.1), (14.2) досліджується як на слабкий, так і на сильний екстремум. Функція $\hat{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], R^n)$

$(\hat{x}(\cdot) \in W^1_\infty([t_0,t_1],R^n))$, $\hat{x}(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_1) = x_1$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі (14.1), (14.2), якщо вона дає локальний мінімум функціонала у просторі $C([t_0,t_1],R^n)$, тобто існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої функції $x(\cdot) \in KC^1([t_0,t_1],R^n)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, що задовольняє умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1],R^n)} < \varepsilon,$$

виконується нерівність $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot))$.

Множина функцій, відносно яких функція $\hat{x}(\cdot)$ надає сильний екстремум функціонала $J(x(\cdot))$, містить більше функцій, ніж множина функцій, відносно яких $\hat{x}(\cdot)$ надає слабкий екстремум функціоналу. Тому функція, яка надає функціоналу сильний екстремум, надає і слабкий екстремум. Отже, необхідні умови слабкого екстремуму будуть і необхідними умовами сильного екстремуму, а достатні умови сильного екстремуму будуть достатніми умовами слабкого екстремуму.

Теорема 14.1. *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0,t_1],R^n)$ *дає сильний локальний мінімум задачі (14.1), (14.2), інтегрант* $L \in C^1(U)$, *де* U *– деякий окіл графіка* $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) : t_0 \le t \le t_1\}$. *Тоді функція* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє*:

а) рівняння Ейлера:

$$\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) = 0,$$

б) умову Вейєрштрасса:

$$E(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),u) \ge 0, \quad \forall u \in R^n, \quad t \in [t_0,t_1],$$

де $E(t,x,x',u) = L(t,x,u) - L(t,x,x') - (u - x')L_{x'}(t,x,x')$ *– функція Вейєрштрасса*;

в) умову Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) \ge 0$, $t \in [t_0,t_1]$ *(якщо існує* $\hat{L}_{x'x'}(t)$, $t \in [t_0,t_1]$*)*.

Доведення. Розглянемо задачу (14.1), (14.2), як задачу оптимального керування

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,u)dt \to \inf, \quad x' = u, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1. \quad (14.3)$$

Обмежень на керування u немає. Тому можна брати $U = R^n$. Функція $\hat{x}(t)$ дає сильний мінімум функціоналу задачі (14.1), (14.2) тоді й тільки тоді, коли пара $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$, де $\hat{u}(\cdot) = \hat{x}'(\cdot)$, є оптимальним керованим процесом задачі оптимального керування (14.3). Відповідно до принципу максимуму Понтрягіна існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа λ_0, λ_1, λ_2, $p(\cdot)\in KC^1([t_0,t_1],R^n)$ такі, що функція Лагранжа задачі (14.3)

$$£ = \int_0^T(\lambda_0 L(t,x(t),u(t)) + p(t)(x'(t)-u(t)))dt + \lambda_1 x(t_0) + \lambda_2 x(t_1)$$

задовольняє умови:

а) стаціонарності по x – рівняння Ейлера:

$$p'(t) = \lambda_0 \hat{L}_x(t), \quad t\in[t_0,t_1];$$

б) трансверсальності по x:

$$p(t_0)=\lambda_1, \quad p(t_1) = -\lambda_2;$$

в) оптимальності по u:

$$\min_{u\in R^n}[\lambda_0 L(t,\hat{x}(t),u) - p(t)u] = \lambda_0 L(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) - p(t)\hat{u}(t),$$

$$\forall t\in[t_0,t_1].$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то з умови в) одержуємо $p(t)\equiv 0$. Тоді з умови б) випливає, що всі множники Лагранжа дорівнюють нулю. Це суперечить принципу максимуму. Отже, $\lambda_0 \neq 0$. Візьмемо $\lambda_0 = 1$. З умови в) одержимо $\hat{L}_{x'}(t) = p(t)$ і $\hat{L}_{x'x'}(t)\geq 0$, $t\in[t_0,t_1]$ (необхідні умови мінімуму функцій n дійсних змінних). Друга умова – це умова Лежандра. Підставимо $p(t)=\hat{L}_{x'}(t)$ в умову стаціонарності по x. Одержимо рівняння Ейлера. Умова оптимальності по u при $\lambda_0 = 1$, $p(t)=\hat{L}_{x'}(t)$ є умова Вейєрштрасса. Теорему доведено. □

Теорема 14.2 (про необхідні умови слабкого мінімуму). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$ *дає слабкий локальний мінімум функціоналу задачі* (*14.1*), (*14.2*) *й інтегрант* $L\in C^3(U)$. *Тоді функція* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє*:

а) рівняння Ейлера:

$$\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) = 0, \quad x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1;$$

б) умову Лежандра:

$\hat{L}_{x'x'}(t)\geq 0$, $t\in[t_0,t_1]$;

в) умову Якобі (*якщо виконується посилена умова Лежандра*).

Доведення. Оскільки функція $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі (14.1), (14.2), то для будь-якої функції $h(\cdot)\in C^1([t_0,t_1],R^n)$, $h(t_0)=h(t_1)=0$ функція дійсної змінної

$\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot))$ має локальний мінімум у точці $\lambda = 0$. Відповідно до необхідних умов мінімуму функції однієї змінної виконуються умови $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) \geq 0$. Умова $\varphi'(0) = 0$ еквівалентна рівнянню Ейлера, а умова $\varphi''(0) \geq 0$ означає, що виконується нерівність

$$J''(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot), h(\cdot)] = K(h(\cdot)) \geq 0$$

$$\forall h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n), \quad h(t_0) = h(t_1) = 0,$$

де

$$K(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} W(t, h(t), h'(t))dt,$$

$$W(t, h(t), h'(t)) = \langle \hat{L}_{x'x'} h'; h' \rangle + 2\langle \hat{L}_{xx'} h'; h \rangle + \langle \hat{L}_{xx} h; h \rangle.$$

Функція $h(t) \equiv 0$ дає абсолютний слабкий мінімум функціонала задачі

$$K(h(\cdot)) \to \inf, \quad h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n). \qquad (14.4)$$

Відповідно до леми про заокруглення кутів функція $h(t) \equiv 0$ дає і сильний мінімум функціонала задачі (14.4). Тоді відповідно до пункту в) теореми 14.1 функція $h(\cdot)$ задовольняє умову Лежандра $W_{h'h'}(t) \geq 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$. Але $W_{h'h'}(t) = \hat{L}_{x'x'}(t)$. Отже, умова Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$ виконується.

Покажемо, що виконується умова Якобі. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що умова Якобі не виконується. Тоді існує нетривіальний розв'язок $h(\cdot)$ рівняння Якобі такий, що $h(t_0) = h(\tau) = 0$ і точка $\tau \in (t_0, t_1)$. Оскільки розв'язок $h(\cdot)$ нетривіальний, то $h'(\tau) \neq 0$. Побудуємо функцію

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), & t_0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Функція $\tilde{h}(\cdot)$ задовольняє рівняння Якобі. Тому після інтегрування частинами

$$K(\tilde{h}(\cdot)) = \int_{t_0}^{\tau} (\langle \hat{L}_{x'x'} h'; h' \rangle + 2\langle \hat{L}_{xx'} h'; h \rangle + \langle \hat{L}_{xx} h; h \rangle)dt$$

$$= \int_{t_0}^{\tau} \langle (-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{x'x'} h' + \hat{L}_{x'x} h) + \hat{L}_{xx'} h' + \hat{L}_{xx} h); h \rangle dt = 0.$$

Отже, $K(\tilde{h}(\cdot)) = 0$. Це означає, що функція $\tilde{h}(\cdot)$ дає сильний мінімум функціонала задачі (14.4). Застосуємо до задачі (14.4) принцип максимуму аналогічно тому, як це зроблено в теоремі 14.1. Відповідно до принципу максимуму існує функція $\tilde{p}(\cdot)\in KC^1([t_0,t_1],R^n)$ така, що

$$\tilde{p}(t)=W_{h'}(t,\tilde{h}(t),\tilde{h}'(t))=2(\hat{L}_{x'x'}(t)h'(t)+\hat{L}_{x'x}(t)\tilde{h}'(t)).$$

Функція $\tilde{p}(t)$ неперервна на $[t_0,t_1]$. Оскільки $\tilde{h}(t)=0$ при $t\ge\tau$, то $\tilde{p}(t)=0$, $t\ge\tau$ і $p(\tau+0)=0$ унаслідок неперервності $p(t)$. З іншого боку,

$$0=p(\tau-0)=2\hat{L}_{x'x'}(\tau-0)\tilde{h}'(\tau-0)=2\hat{L}_{x'x'}(\tau)\tilde{h}'(\tau)=0,$$

звідки $\tilde{h}'(\tau)=0$, оскільки виконується посилена умова Лежандра і матриця $\hat{L}_{x'x'}(\tau)$ невироджена. Ми прийшли до суперечності з умовою $\tilde{h}'(\tau)\ne 0$. Отже, умова Якобі виконується. Теорему доведено. □

Зауваження. За яких умов гладкості можна довести вказані твердження? Рівняння Ейлера й умову Вейєрштрасса можна вивести, якщо функції $L(t,x,x')$, $L_x(t,x,x')$ неперервні в U, умови Лежандра і Якобі – коли $L\in C^2(U)$; $\hat{L}_{x'x'}(\cdot)$, $\hat{L}_{xx'}(\cdot)$, $\hat{L}_{xx}(\cdot)\in C^1([t_0,t_1],R^n)$. Усі умови виконуються, якщо $L\in C^3(U)$, $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$.

Теорема 14.3 (про необхідні умови сильного мінімуму). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],R^n)$ дає сильний мінімум функціонала задачі (14.1), (14.2) й інтегрант $L\in C^3(U)$, де U – окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) : t_0\le t\le t_1\}$. Тоді функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє:*

а) рівняння Ейлера:

$$\hat{L}_x(t)-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)=0;$$

б) умову Лежандра:

$\hat{L}_{x'x'}(t)\ge 0$ $t\in[t_0,t_1]$;

в) умову Якобі (якщо виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t)>0$, $t\in[t_0,t_1]$);

г) умову Вейєрштрасса:

$E(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),u)\ge 0$ $\forall u\in R^n$ $t\in[t_0,t_1]$.

Доведення. Ця теорема є наслідком теорем 14.1, 14.2. □

Зауваження. Необхідні умови максимуму одержимо, якщо в умовах Лежандра і Вейєрштрасса поміняємо знаки нерівностей на протилежні.

14.2. Необхідні умови екстремуму в задачі зі старшими похідними

Дослідимо на екстремум функціонал задачі Лагранжа зі старшими похідними:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t))dt \to \inf; \qquad (14.5)$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_{k0}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_{k1}, \quad k = \overline{0, n-1} \qquad (14.6)$$

у просторі $C^n([t_0, t_1])$ за умови, що функція $n+2$ змінних $L(t, x, x', \dots, x^{(n)})$ неперервна разом зі своїми частинними похідними $L_{x^{(k)}}(t, x, x', \dots, x^{(n)})$, $k = 0, 1, \dots, n$. Функції $\hat{x}(\cdot)$ називаються допустимими в задачі (14.5), (14.6), якщо вони належать простору $C^n([t_0, t_1])$ і задовольняють граничні умови (14.6).

Допустима функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум (максимум) функціоналу $J(x(\cdot))$ задачі (14.5), (14.6) у просторі $C^n([t_0, t_1])$, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої допустимої функції $x(\cdot) \in C^n([t_0, t_1])$, що задовольняє умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^n([t_0, t_1])} < \varepsilon,$$

виконується нерівність $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot))$ ($J(x(\cdot)) \le J(\hat{x}(\cdot))$).

Функція $\hat{x}(\cdot) \in KC^n([t_0, t_1])$ дає сильний локальний мінімум (максимум) функціоналу $J(x(\cdot))$ задачі (14.5), (14.6), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої допустимої функції $x(\cdot) \in KC^n([t_0, t_1])$, що задовольняє умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^{n-1}([t_0, t_1])} < \varepsilon,$$

виконується нерівність $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot))$ ($J(x(\cdot)) \le J(\hat{x}(\cdot))$).

Теорема 14.4. *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}([t_0, t_1])$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі (14.5), (14.6), інтегрант $L \in C^{n+2}(U)$, де U – деякий окіл графіка $\{t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \dots, x^{(n)}(t)) : t_0 \le t \le t_1\}$. Тоді функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє:*

а) рівняння Ейлера – Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0;$$

б) умову Вейєрштрасса:

$$E(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\ldots,\hat{x}^{(n)}(t),u) \geq 0, \quad \forall u \in R, \quad t \in [t_0,t_1],$$

де

$$E(t,x,x',\ldots,x^{(n)},u) \quad = L(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)},u) -$$
$$-L(t,x,x'\ldots,x^{(n-1)},x^{(n)}) - L'_{x^{(n)}}(t,x,\ldots,x^{(n)})(u-x^{(n)}))$$

– *функція Вейєрштрасса*;

в) умову Лежандра $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0,t_1]$ (*якщо існує* $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)$, $t \in [t_0,t_1]$).

Доведення. Запишемо задачу (14.5), (14.6) як задачу оптимального керування

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,u)dt \to \inf, \quad x_1' = x_2,\ldots,x_{n-1}' = x_n, x_n' = u,$$

$$x_{k+1}(t_0) = x_{k0}, \quad x_{k+1}(t_1) = x_{k1}, \quad k = \overline{0,n-1}.$$

Відповідно до принципу максимуму існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа λ_0, μ_{k0}, μ_{k1}, $k = \overline{1,n}$, $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ такі, що для функції Лагранжа

$$£ = \int_{t_0}^{t_1}(\lambda_0 f(t,x_1,\ldots,x_n,u) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(t)(x_i' - x_{i+1})$$

$$+p_n(t)(x_n' - u))dt + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}\mu_{kj}x_k(t_j)$$

виконуються умови:

а) стаціонарності по x:

$$p_1' = \lambda_0 f_{x_1}', \quad p_k' + p_{k-1} = \lambda_0 f_{x_k}', \quad k = \overline{2,n},$$

де $k = \overline{1,n}$;

б) трансверсальності по x:

$$p_k(t_j) = (-1)^j \mu_{kj}, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = 0,1;$$

в) оптимальності по u:

$$\min_{u \in R}[\lambda_0 L(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\ldots,\hat{x}^{(n-1)}(t),u) - p_n(t)u]$$

$$= \lambda_0 L(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\ldots,\hat{x}^{(n-1)}(t),\hat{x}^{(n)}(t)) - p_n(t)\hat{x}^{(n)}(t), \quad t \in [t_0,t_1].$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то з умови в) випливає $p_n(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Тоді з умови б) одержуємо, що всі множники Лагранжа нулі. Це суперечить принципу максимуму. Отже, $\lambda_0 \neq 0$. Нехай $\lambda_0 = 1$. Необхідні умови оптимальності по u (умови мінімуму функції багатьох змінних) мають такий вигляд:

$$p_n(t) = \hat{L}_{x^{(n)}}(t), \quad \hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Друга умова – це умова Лежандра. Підставимо $p_n(t) = \hat{L}_{x^{(n)}}(t)$ в умову стаціонарності по x. Одержимо систему рівнянь:

$$p_{k-1} = -p_k'(t) + \hat{L}_{x^{(k-1)}}(t), \qquad k = \overline{2,n},$$

$$p_n(t) = \hat{L}_{x^{(n)}}(t),$$

які можна записати у вигляді

$$-\frac{d}{dt}(\cdots(-\frac{d}{dt}(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x^{(n)}}(t) + \hat{L}_{x^{(n-1)}}(t)) + \hat{L}_{x^{(n-2)}}(t))\cdots) + \hat{L}_x(t) = 0 .$$

Із цього рівняння одержимо рівняння Ейлера – Пуассона за умов $\hat{L}_{x^{(k)}}(\cdot) \in C^k([t_0, t_1])$, $k = 0, \ldots, n$. Умова оптимальності по u при $p_n(t) = \hat{L}_{x^{(n)}}(t)$ має вигляд

$$L(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(n-1)}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), \hat{x}^{(n)}(t))$$
$$-\hat{L}_{x^{(n)}}(t)(u - \hat{x}^{(n)}(t)) = E(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t), u) \geq 0,$$

а це є умова Вейєрштрасса. Теорему доведено. □

Теорема 14.5 (про необхідні умови слабкого мінімуму функціонала задачі зі старшими похідними). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}([t_0, t_1])$ *дає слабкий локальний мінімум функціоналу* $J(x(\cdot))$ *задачі зі старшими похідними* (*14.5*), (*14.6*), *інтегрант* $L \in C^{n+2}(U)$, *де* U *– деякий окіл графіка* $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)) : t_0 \leq t \leq t_1\}$. *Тоді функція* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє*:

а) рівняння Ейлера – Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0;$$

б) умову Лежандра:

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}} \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

в) умову Якобі (якщо виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0,\ t \in [t_0, t_1]$).

Доведення. Оскільки функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум функціоналу задачі (14.5), (14.6), то для будь-якої функції $h(\cdot) \in C_0^n([t_0, t_1])$ (нагадаємо, що $C_0^n([t_0, t_1])$ – це підпростір простору $C^n([t_0, t_1])$ функцій з нульовими граничними умовами $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0,\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$) функція $\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot))$ має локальний мінімум у точці $\lambda = 0$. Відповідно до необхідних умов локального мінімуму функції однієї змінної виконуються умови $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) \geq 0$. З умови $\varphi'(0) = 0$ одержуємо рівняння Ейлера – Пуассона, а умова $\varphi''(0) \geq 0$ еквівалентна нерівності

$$J''(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot), h(\cdot)] = K(h(\cdot)) \geq 0, \quad \forall h(\cdot) \in C_0^n([t_0, t_1]),$$

де

$$K(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} W(t, h(t), h'(t), \ldots, h^{(n)}(t))dt,$$

$$W = \sum_{i,j=0}^{n} \hat{L}_{x^{(i)}x^{(j)}}(t) h^{(i)}(t) h^{(j)}(t).$$

Функція $\overline{h}(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$ дає абсолютний слабкий мінімум функціоналу задачі

$$K(h(\cdot)) \to \inf, \quad h(\cdot) \in C_0^n([t_0, t_1]). \tag{14.7}$$

Відповідно до леми про заокруглення кутів функція $\overline{h}(t) \equiv 0$ дає і сильний мінімум задачі (14.7). Тоді відповідно до пункту в) теореми 14.4 функція $\overline{h}(t) \equiv 0$ задовольняє умову Лежандра $W''_{h^{(n)}h^{(n)}}(t) \geq 0$ $t \in [t_0, t_1]$. Але $W''_{h^{(n)}h^{(n)}}(t) = \hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)$. Отже, умова Лежандра $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) \geq 0$, $t \in [t_0, t_1]$ виконується.

Доведемо необхідність умови Якобі. Використовуємо метод від супротивного. Припустимо, що умова Якобі не виконується. Тоді існує нетривіальний розв'язок $\tilde{h}(\cdot)$ рівняння Якобі (рівняння Ейлера – Пуассона задачі (14.7)) такий, що $\tilde{h}^{(k)}(t_0) = \tilde{h}^{(k)}(\tau) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$ і точка $\tau \in (t_0, t_1)$. Функція $h(t)$, що рівна $\tilde{h}(t)$ при $t \leq \tau$ і нулю при $t \geq \tau$, дає сильний мінімум функціоналу задачі (14.7). Застосуємо принцип максимуму до задачі (14.7) аналогічно тому, як це зроблено в теоремі 14.4. Приведемо задачу до вигляду задачі оптимального керування:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t,h_1,h_2,\dots,h_n,u)dt \to inf,$$

$$h_1' = h_2,\dots,h_{n-1}' = h_n, \quad h_n' = u,$$

$$h_k(t_0) = h_k(t_1) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Відповідно до принципу максимуму існують множники Лагранжа λ_0, μ_{kj}, $k = \overline{1,n}$, $j = 0,1$, $q_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ такі, що функція Лагранжа

$$£ = \int_{t_0}^{t_1}[\lambda_0 f(t,h_1,\dots,h_n,u) + \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t)(h_i' - h_{i+1}) + q_n(t)(h_n' - u)]dt + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}\mu_{kj}h_k(t_j)$$

задовольняє умови:

а) стаціонарності по h:

$$q_1' = \lambda_0 f_{h_1}', \quad q_k' + q_{k-1} = \lambda_0 f_{h_k}', \quad k = \overline{2,n},$$

де $f_{h_k}' = W_{h^{(k-1)}}$, $k = \overline{1,n}$;

б) трансверсальності по h:

$$q_k(t_j) = (-1)^j \mu_{kj}, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = 0,1;$$

в) оптимальності по u:

$$\min_{u \in R}[\lambda_0 W(t,\tilde{h}(t),\dots,\tilde{h}^{(n-1)}(t),u) - q_n(t)u]$$
$$= \lambda_0 W(t,\tilde{h}(t),\dots,\tilde{h}^{(n-1)}(t),\tilde{h}^{(n)}(t))) - q_n(t)\tilde{h}^{(n)}(t).$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то всі множники Лагранжа нулі. Це суперечить принципу максимуму. Отже, $\lambda_0 \neq 0$. Нехай $\lambda_0 = 1$. З умови оптимальності по u випливає, що $q_n(t)$ задовольняє рівняння

$$q_n(t) = W_{h^{(n)}}(t,\tilde{h}(t),\dots,\tilde{h}^{(n)}(t) = 2\sum_{k=0}^{n}\hat{L}_{x^{(n)}x^{(k)}}(t)h^{(k)}(t).$$

Функція $q_n(t)$ неперервна на $[t_0,t_1]$. Вона неперервна і в точці τ. Оскільки $\tilde{h}(t) = 0$ при $t \geq \tau$, то $q_n(t) = 0$ при $t \geq \tau$ і $q_n(\tau) = q_n(\tau - 0) = 0$. З іншого боку,

$$q_n(\tau - 0) = 2\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(\tau - 0)\tilde{h}^{(n)}(\tau - 0) = 2\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(\tau)\tilde{h}^{(n)}(\tau).$$

Тому $\tilde{h}^{(n)}(\tau)=0$, оскільки виконується посилена умова Лежандра і $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(\tau)\neq 0$. Отже, $\tilde{h}^{(k)}(\tau)=0$, $k=\overline{0,n}$. А такі умови визначають лише тривіальний розв'язок рівняння Якобі. Ми прийшли до суперечності. Отже, умова Якобі виконується. Теорему доведено. □

Теорема 14.6 (про необхідні умови сильного мінімуму функціонала задачі зі старшими похідними). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot)\in C^{2n}([t_0,t_1])$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі* (14.5), (14.6), *інтегрант $L\in C^{n+2}(U)$, де U – окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\ldots,\hat{x}^{(n)}(t)) : t_0\le t\le t_1\}$. Тоді функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє*:

а) рівняння Ейлера – Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\hat{L}_{x^{(k)}}(t)=0;$$

б) умову Лежандра:

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}\ge 0,\quad t\in[t_0,t_1];$$

в) умову Якобі (*якщо виконується посилена умова Лежандра*

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)>0,\ \ t\in[t_0,t_1]);$$

г) умову Вейєрштраса:

$$E(t,\hat{x}(t),\ldots,\hat{x}^{(n)}(t),u)\ge 0\quad \forall u\in R,\ t\in[t_0,t_1].$$

Доведення. Ця теорема є наслідком теорем 14.4, 14.5. □

14.3. Необхідні умови екстремуму ізопериметричної задачі

Дослідимо на екстремум функціонал ізопериметричної задачі:

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),x'(t))dt \to \inf; \tag{14.8}$$

$$\begin{aligned} J_i(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),x'(t))dt = a_i;\quad i=\overline{1,m},\\ x(t_0) &= x_0,\quad x(t_1)=x_1, \end{aligned} \tag{14.9}$$

Нехай $x(\cdot)\in C^2([t_0,t_1])$ – екстремаль задачі (14.8), (14.9) при $\lambda_0=1$. Функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера інтегранта

$$L(t,x(t),x'(t)) = f_0 + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(t,x(t),x'(t))$$

із множниками Лагранжа $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. За визначенням екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє умову Лежандра (посилену умову Лежандра), якщо $\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0$ ($\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$) $\forall t \in [t_0, t_1]$. Функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),x'(t))dt$$

має другу варіацію в точці $\hat{x}(\cdot)$. Ця варіація така:

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot),h(\cdot)) = J''(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot),h(\cdot)] = K(h(\cdot)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}[\hat{L}_{x'x'}(t)(h'(t))^2 + 2\hat{L}_{xx'}(t)h(t)h'(t) + \hat{L}_{xx}(t)h^2(t)]dt.$$

Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ дає локальний мінімум функціонала задачі (14.8), (14.9), то відповідно до необхідної умови другого порядку в задачах з рівностями функція $\overline{h}(t) \equiv 0$ дає абсолютний мінімум функціонала задачі на умовний екстремум:

$$J''(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot),h(\cdot)] \to \inf, \quad J_i^{'}(\hat{x}(\cdot))[h(\cdot)] = 0, i = \overline{1,m};$$
$$h(t_0) = h(t_1) = 0.$$

Застосувавши до цього задача правило множників Лагранжа, одержимо рівняння

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}h + \hat{L}_{xx'}h + \hat{L}_{xx'}h' + \hat{L}_{xx}h + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i = 0, \qquad (14.10)$$

де

$$g_i(t) = -\frac{d}{dt}\hat{f}_{ix'}(t) + \hat{f}_{ix}(t).$$

Це рівняння називається (неоднорідним) рівнянням Якобі екстремалі $\hat{x}(\cdot)$ задачі (14.8) (14.9).

Нехай екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє посилену умову Лежандра. Точка τ називається *спряженою* з точкою t_0, якщо існує нетривіальний розв'язок $h(t)$ рівняння Якобі, для якого

$$\int_0^{\tau} g_i(t)h(t)dt = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad h(t_0) = h(\tau) = 0.$$

Екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє умову Якобі (посилену умову Якобі), якщо в інтервалі (t_0, t_1) (напівінтервалі $(t_0, t_1]$) немає точок спряжених з точкою t_0.

Нехай функції g_i, $i=\overline{1,m}$ – лінійно незалежні на відрізках $[\tau_0,\tau_1]$, $t_0\le\tau_0\le\tau_1\le t_1$. Позначимо через $h_0(\cdot)$ розв'язок однорідного рівняння Якобі ($\mu_i=0$, $i=\overline{1,m}$) з граничними умовами $h_0(t_0)=0$, $h_{0'}(t_0)=1$, а через $h_j(\cdot)$ – розв'язок неоднорідного рівняння Якобі при $\mu_j=1$, $\mu_i=0$ $i\ne j$, з граничними умовами $h_j(t_0)=h_{j'}(t_0)=0$, $j=\overline{1,m}$. Точка τ буде спряженою з точкою t_0 тоді й тільки тоді, коли матриця

$$H(\tau)=\begin{bmatrix} h_0(\tau) & \cdots & h_m(\tau) \\ \int_{t_0}^{\tau} h_0 g_1\,dt & \cdots & \int_{t_0}^{\tau} h_m g_1\,dt \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{t_0}^{\tau} h_0 g_m\,dt & \cdots & \int_{t_0}^{\tau} h_m g_m\,dt \end{bmatrix}$$

невироджена.

Теорема 14.7. *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1])$ *дає сильний локальний мінімум функціонала* $J_0(x(\cdot))$ *ізопериметричної задачі* (14.8), (14.9), *інтегранти* f_i, $i=0,\dots,m$ *якої задовольняють умови гладкості* $f_i\in C^3(U)$, *де* U *– деякий окіл графіка* $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) : t_0\le t\le t_1\}$, *та умову регулярності: на відрізках* $[t_0,\tau]$, $[\tau,t_1]$ *при будь-яких* τ *функції*

$$g_i(t)=-\frac{d}{dt}\hat{f}_{ix'}(t)+\hat{f}_{ix}(t), \quad i=1,\dots,m$$

лінійно незалежні. Тоді функція $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє*:

а) рівняння Ейлера:

$$\hat{L}_x(t)-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)=0;$$

б) умову Вейєрштрасса:

$$E(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),u)\ge 0 \quad \forall u\in R,\ t\in[t_0,t_1],$$

де $E(t,x,x',u)=L(t,x,u)-L(t,x,x')-L_{x'}(t,x,x')(u-x')$ *– функція Вейєрштрасса*;

в) умову Лежандра:

$$\hat{L}_{x'x'}(t)\ge 0, \quad t\in[t_0,t_1].$$

Доведення. Зведемо задачу (14.8), (14.9) до задачі оптимального керування:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,u)dt \to \inf,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x,u)dt = a_i \quad i=\overline{1,m}, \qquad (14.11)$$

$$x' = u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Функція Лагранжа такої задачі має вигляд

$$£ = \int_{t_0}^{t_1} (L(t,x,u) + p(t)(x'-u))dt + \nu_0 x(t_0) + \nu_1 x(t_1).$$

Застосуємо теорему 13.1 до задачі (14.11). Відповідно до принципу максимуму Понтрягіна виконуватимуться умови:

а) стаціонарності по x:

$$p'(t) = \hat{L}_x(t); \qquad (14.12)$$

б) трансверсальності по x:

$$p(t_0) = \nu_0, \quad p(t_1) = -\nu_1; \qquad (14.13)$$

в) оптимальності по u:

$$\min_{u\in R}[L(t,\hat{x}(t),u) - p(t)u] = L(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) - p(t)\hat{x}'(t). \qquad (14.14)$$

Із співвідношення (14.14) і теореми Ферма випливає

$$p(t) = \hat{L}_{x'}(t). \qquad (14.15)$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то з (14.12), (14.15) одержуємо

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (-\frac{d}{dt}\hat{f}_{ix'}(t) + \hat{f}_{ix}(t)) = 0,$$

тобто лінійну залежність функцій $g_i(t)$. Це суперечить умовам теореми. Отже, $\lambda_i = 0$, $i=\overline{1,m}$. Тому $p(t)=0$, $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 0$. Усі множники Лагранжа – нулі, що суперечить принципу максимуму. Отже, $\lambda_0 \neq 0$. Нехай $\lambda_0 = 1$. Тоді (14.15) разом з (14.12) дають рівняння Ейлера, а (14.15) разом з (14.14) – умову Вейєрштрасса. Необхідна умова другого порядку мінімуму по u в (14.14) дає умову Лежандра. Теорему доведено. □

Теорема 14.8 (про необхідні умови слабкого мінімуму функціонала ізопериметричної задачі). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0,t_1])$ *дає слабкий локальний мінімум функціоналу ізопериметричної задачі* (14.8), (14.9), *інтегранти* f_i, $i=0,\ldots,m$ *задовольняють умови гладкості* $f_i \in C^3(U)$ *й умову регулярності. Тоді функція* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє*:

а) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) = 0;$$

б) умову Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0, \ \ t \in [t_0, t_1]$.

в) умову Якобі (*якщо виконується посилена умова Лежандра*).

Доведення. Застосуємо теорему про необхідні умови першого і другого порядку в задачах з рівностями до задачі (14.8), (14.9). Якщо $\hat{x}(\cdot)$ дає локальний мінімум у задачі (14.8), (14.9), то за теоремою Ейлера – Лагранжа функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера для інтегранта L. Крім того, абсолютний мінімум у задачі

$$K(h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1}(\hat{L}_{x'x'}(t)(h'(t))^2 + 2\hat{L}_{xx'}(t)h'(t)h(t) + \hat{L}_{xx}(t)h^2(t))dt \to \inf; \tag{14.16}$$

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1}(\hat{f}_{ix'}(t)h'(t) + \hat{f}_{ix}(t)h(t))dt = 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ h(t_0) = h(t_1) = 0\end{gathered} \tag{14.17}$$

дорівнює нулю.

Функція $\overline{h}(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, дає мінімум функціоналу квадратичної задачі (14.16), (14.17) як у просторі $C^1([t_0, t_1])$, так і у просторі $KC^1([t_0, t_1])$. Відповідно до теореми 14.7 на екстремалі $\overline{h}(t) = 0$ виконується умова Лежандра, яка має вигляд $\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0$, $t \in [t_0, t_1]$. А це й є умова Лежандра екстремалі $\hat{x}(\cdot)$ задачі (14.8), (14.9).

Припустимо тепер, що існують точка $\tau \in (t_0, t_1)$, числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$ і функція $\overline{h}(\cdot)$, що задовольняє рівняння Якобі (14.10) і умови

$$\int_{t_0}^{t_1}(\hat{f}_{ix'}(t)h'(t) + \hat{f}_{ix}(t)h(t))dt = 0, \quad i = \overline{1,m},$$

$$h(t_0) = h(t_1) = 0.$$

Тоді функція $\tilde{h}(t)$, рівна $\overline{h}(t)$ при $t \leq \tau$ і нулю при $t \geq \tau$, дає мінімум функціонала задачі (14.16), (14.17) і при цьому $K(\tilde{h}(\cdot) = 0$. Застосуємо принцип максимуму до задачі (14.16), (14.17) і екстремалі $\tilde{h}(\cdot)$. Відповідно до принципу максимуму існують числа α_i, $i = \overline{1,m}$, і функція $p(\cdot) \in KC^1$ такі, що

$$-p' + 2\hat{L}_{xx'}\tilde{h}' + 2\hat{L}_{xx}\tilde{h} + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\hat{f}_{ix} = 0,$$

$$p = 2\hat{L}_{x'x'}\tilde{h}' + 2\hat{L}_{xx'}\tilde{h} + 2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\hat{f}_{ix'}.$$

Із цих рівнянь випливає, що на відрізку $[\tau, t_1]$ виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(-\frac{d}{dt}\hat{f}_{ix'}(t) + \hat{f}_{ix}(t)) = 0.$$

Унаслідок вимоги теореми про регулярність усі $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,m}$. Отже, неперервна функція $p(t)$ та $\tilde{h}(t)$ задовольняють рівняння

$$p(t) = 2\hat{L}_{x'x'}(t)\tilde{h}'(t) + 2\hat{L}_{xx'}\tilde{h}(t).$$

У точці τ виконується рівність $p(\tau) = 2\hat{L}_{x'x'}(\tau)\tilde{h}'(\tau)$. Тому функція $\tilde{h}'(t)$ в точці τ має бути неперервною. А це суперечить тому, що $\overline{h}(t)$ – нетривіальний розв'язок рівняння Якобі. Умова Якобі виконується. Теорему доведено. □

Теорема 14.9 (про необхідні умови сильного мінімуму функціонала ізопериметричної задачі). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$ *дає сильний локальний мінімум функціонала ізопериметричної задачі* (14.8), (14.9), *інтегранти* f_i, $i = 0,\ldots,m$ *задовольняють умови гладкості* $f_i \in C^3(U)$ *й умову регулярності. Тоді функція* $\hat{x}(\cdot)$ *задовольняє*:

а) рівняння Ейлера:

$$\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) = 0;$$

б) умову Лежандра: $\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1]$;

в) умову Якобі (*якщо виконується посилена умова Лежандра*).

г) умову Вейєрштрасса:

$$E(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), u) \geq 0 \quad \forall\, u \in R,\ t \in [t_0, t_1].$$

Доведення. Ця теорема є наслідком теорем 14.7, 14.8. □

15. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ І ЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА

15.1. Динамічна модель виробництва Леонтьєва

У моделі виробництва Леонтьєва (модель "затраты–выпуск") розглядається економіка, що складається з n галузей. Кожна галузь виробляє лише один продукт, а різні галузі – різні продукти. Вважатимемо, що виробничий процес не зупиняється. Нехай в момент часу t для виробництва одиниці продукції в j-й галузі за одиницю часу вимагається $a_{ij}(t)$ одиниць і-го продукту. Коефіцієнти $a_{ij}(t)$ називають *коефіцієнтами прямих витрат*, а складену з цих коефіцієнтів матрицю $A(t)=\{a_{ij}(t)\}$ називають *матрицею прямих витрат*. Зміна $a_{ij}(t)$ з часом враховує зміни технологій, пов'язаних з технічним прогресом. Вважатимемо, що $a_{ij}(t)$ – кусково-неперервні монотонно спадаючі функції часу. Через $x_i(t)$ позначатимемо швидкість випуску і-го продукту (далі – просто випуск) в момент часу t. Мають виконуватися балансові рівняння:

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+y_i(t),\quad i=1,\ldots,n, \tag{15.1}$$

де $y_i(t)$ – попит на і-й продукт. Якщо позначити через $x(t)$ вектор-стовпець з компонентами $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)$, а через $y(t)$ – вектор-стовпець з компонентами $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$, то рівняння (15.1) можна записати в матричному вигляді:

$$x(t)=A(t)x(t)+y(t). \tag{15.2}$$

Якщо для будь-якого кінцевого попиту $y(t)\geq 0$ матричне рівняння (15.2) має розв'язок $x(t)\geq 0$, то матриця $A(t)$ називається продуктивною. Це означає, що матриця $(E-A)^{-1}$ невід'ємна і її можна подати у вигляді суми ряду Неймана:

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots \tag{15.3}$$

Матриця A називається *нерозкладною*, якщо перестановкою рядків і стовпців її не можна привести до вигляду

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця A неразкладна і продуктивна, то матриця $(E-A)^{-1}$ додатна.

У статичній моделі кінцевий попит $y(t)$ є "зовнішньою" величиною. Щоб перейти до динамічної моделі, необхідно $y(t)$ зробити "внутрішньою" величиною, тобто вказати в межах моделі, як формується попит. Залежно від того, яким способом це робити, одержуватимемо різні динамічні моделі. Опишемо спершу просту динамічну модель Леонтьєва.

Позначимо вектор виробничих потужностей через $V(t)$. Очевидно, що $0 \le x(t) \le V(t)$. Приріст виробничих потужностей за одиницю часу є $V'(t)$. Вважатимемо, що потужності можуть тільки зростати: $V'(t) \ge 0$. Нехай $b_{ij}(t)$ – витрати і-го продукту на збільшення на одиницю виробничих потужностей в j-й галузі за одиницю часу. Величини $b_{ij}(t)$ називаються *коефіцієнтами фондоємності*. Матриця $B(t)=\{b_{ij}(t)\}$ називається *матрицею фондоємностей*. Оскільки не всі продукти утворюють фонди, то матриця $B(t)$ може мати нульові рядки. Вектор витрат продуктів на приріст потужностей дорівнює $B(t)V'(t)$. Для функціонування економіки необхідна праця. Для простоти вважатимемо працю однорідною: вона може бути однаково застосована в будь-якій галузі виробництва. Припускатимемо, що трудові ресурси обмежені $a_0(t)x(t) \le \pi(t)$, де $a_0(t)$ є вектор-рядок прямих витрат праці на виробництво одиничного набору продуктів. Функції $a_0(t), \pi(t)$ кусково-неперервні монотонно незростаючі функції часу.

Позначимо через $c(t)$ споживання населення. Споживання не повинно опускатися нижче заданого рівня: $c(t) \ge c_0(t)$, де $c_0(t)$ – кусково-неперервна функція.

Задамо тепер вектор кінцевого попиту:

$$y(t) = B(t)V'(t) + c(t). \tag{15.4}$$

Період планування вважатимемо скінченним і рівним T. Вважатимемо, що при $t=0$ задана структура виробничих потужностей $V(0)=V_0$. При $t=T$ можна задавати різні умови. Візьмемо обмеження найбільш загального вигляду. Нехай вектор $V(T)$ належить деякому багатограннику в R^n:

$$G_1V(T) \le a_1, \quad G_2V(T) = a_2,$$

де G_1 і G_2 – матриці відповідної розмірності. Вважатимемо, що мета виробництва полягає в максимізації лінійного функціонала

$$J(c(\cdot)) = \int_0^T p_0(t)c(t)dt,$$

де $p_0(t)$ – деяка відома функція. Функціонал $J(c(\cdot))$ можна трактувати як лінійну функцію корисності.

Сформулюємо тепер задачу, що характеризує динамічну модель виробництва Леонтьєва.

Задача Л1. Знайти максимум лінійного функціонала

$$J(c(\cdot)) = \int_0^T p_0(t)c(t)dt \tag{15.5}$$

при обмеженнях

$$x(t) = A(t)x(t) + B(t)V'(t) + c(t), \tag{15.6}$$

$$0 \le x(t) \le V(t), \quad c(t) \ge c_0(t), \quad a_0(t)x(t) \le \pi(t), \tag{15.7}$$

$$V'(t) \ge 0, \quad V(0) = V_0, \quad G_1V(T) \le a_1, \quad G_2V(T) = a_2. \tag{15.8}$$

Щоб привести задачу до стандартної задачі оптимального керування, покладемо

$$V'(t) = u(t), \quad c(t) = c_0(t) + w(t). \tag{15.9}$$

Через обмеження (15.7) (15.8) маємо

$$u(t) \ge 0, \quad w(t) \ge 0. \tag{15.10}$$

Будемо розглядати $u(t), w(t)$ як керування і вибирати їх із простору $L_n^\infty[0,T]$. Введемо позначення $\tilde{A}(t) = [E - A(t)]^{-1}$. Тоді рівняння (15.6) можна розв'язати відносно $x(t)$:

$$x(t) = \tilde{A}(t)B(t)u(t) + \tilde{A}(t)w(t) + \tilde{A}(t)c_0(t). \tag{15.11}$$

Обмеження (15.7), (15.8) перепишуться тепер у такому вигляді:

$$-V(t) + \tilde{A}(t)B(t)u(t) + \tilde{A}(t)w(t) \le -\tilde{A}(t)c_0(t), \tag{15.12}$$

$$a_0(t)\tilde{A}(t)B(t)u(t) + a_0(t)\tilde{A}(t)w(t) \le \pi(t) - a_0(t)\tilde{A}(t)c_0(t), \tag{15.13}$$

$$V(0) = V_0, \quad G_1V(T) \le a_1, \quad G_2V(T) = a_2. \tag{15.14}$$

Якщо ввести позначення

$$(u(t), w(t)) = u^*(t), \quad (0, p_0(t)) = b(t), \quad (E, 0) = \tilde{B}, \quad V_0 = \alpha^*, \tag{15.15}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{C}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}B & \tilde{A} \\ a_0\tilde{A}B & a_0\tilde{A} \end{pmatrix} = \tilde{D}, \quad \begin{pmatrix} -\tilde{A}c_0 \\ \pi - a_0\tilde{A}c_0 \end{pmatrix} = b^*, \tag{15.16}$$

то задача набуде такого вигляду:

Задача Л2. Знайти максимум лінійного функціонала

$$\int_0^T b(t)u^*(t)dt \to \max \tag{15.17}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} V'(t) = \tilde{B}(t)u^*(t), \quad V(0) = \alpha^*, \\ -\tilde{C}(t)V(t) + \tilde{D}u^*(t) \le b^*(t), \\ G_1 V(T) \le a_1, \quad G_2 V(T) = a_2. \end{cases} \tag{15.18}$$

15.2. Двоїста задача та її економічна інтерпретація

Запишемо двоїсту задачу:

Задача Λ2*. Знайти мінімум лінійного функціонала

$$\psi = q(0)\alpha^* + \xi a_1 + \eta a_2 + \int_0^T \upsilon(t) b^*(t) dt \tag{15.19}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} q'(t) = \upsilon(t)\tilde{C}(t), \quad \upsilon(t) \ge 0, \quad \xi \ge 0, \\ \upsilon(t) \in L_r^1[0,T], \quad \xi \in R^{a_1}, \quad \eta \in R^{a_2}, \\ -q(t)\tilde{B}(t) + \upsilon(t)\tilde{D}(t) \ge b(t), \\ q(T) = -\xi G_1 - \eta G_2. \end{cases} \tag{15.20}$$

Якщо пригадати позначення (15.15), (15.16), то двоїсту задачу можна переписати у такому вигляді:

Задача Λ1*. Знайти керування $r(t) \in L_n^1[0,T]$, $s(t) \in L^1[0,T]$, $\xi \in R^{a_1}, \eta \in R^{a_2}$, які дають мінімум лінійного функціонала

$$\begin{aligned} \psi = {} & q(0)\alpha^* + \xi a_1 + \eta a_2 + \\ & + \int_0^T s(t)\pi(t) dt - \int_0^T [r(t)\tilde{A}(t) + s(t) a_0(t)\tilde{A}(t)] c_0(t) dt, \end{aligned} \tag{15.21}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -q'(t) = r(t), \quad r(t) \ge 0, \quad s(t) \ge 0, \quad \xi \ge 0, \\ -q(t) + [r(t)\tilde{A}(t) + s(t)a_0(t)\tilde{A}(t)]B(t) \ge 0, \\ r(t)\tilde{A}(t) + s(t)a_0(t)\tilde{A}(t) \ge p_0(t), \\ q(T) = -\xi G_1 - \eta G_2. \end{cases} \tag{15.22}$$

Покладемо

$$p(t) = r(t)\tilde{A}(t) + s(t)a_0(t)\tilde{A}(t). \qquad (15.23)$$

Тоді $p(t)$ задовольняє рівняння

$$p(t) = p(t)A(t) + r(t) + s(t)a_0(t), \qquad (15.24)$$

і задача Λ1* може бути записана в такому вигляді:

Задача Λ1*. Знайти керування $r(t) \in L_n^1[0,T]$, $s(t) \in L^1[0,T]$, $\xi \in R^{a_1}, \eta \in R^{a_2}$, які дають мінімум лінійному функціоналу

$$\psi = q(0)V_0 + \xi a_1 + \eta a_2 + \int_0^T s(t)\pi(t)dt - \int_0^T p(t)c_0(t)dt \qquad (15.25)$$

при обмеженнях:

$$p(t) = p(t)A(t) + r(t) + s(t)a_0(t), \quad -q'(t) = r(t), \qquad (15.26)$$

$$p(t)B(t) \geq q(t), \quad p(t) \geq p_0(t), \qquad (15.27)$$

$$q(T) = -\xi G_1 - \eta G_2, \quad r(t) \geq 0, \quad s(t) \geq 0, \quad \xi \geq 0. \qquad (15.28)$$

Одна з можливих інтерпретацій двоїстої задачі може бути такою. Нехай

$$p(t) = (p_1(t),\ldots,p_n(t)), \quad r(t) = (r_1(t),\ldots,r_n(t)). \qquad (15.29)$$

Функції $p_i(t)$ назвемо цінами продуктів відповідних галузей. Функція $s(t)$ – це ціна праці (заробітна плата). Розписуючи рівняння (15.26) за координатами, одержуємо

$$r_i(t) = p_i(t) - \sum_{j=1}^{n} p_j(t)a_{ji}(t) - s(t)a_{0i}(t). \qquad (15.30)$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{n} p_j(t)a_{ji}(t)$ – це вартість технологічних витрат на виробництво одиниці продукту і-ї галузі, то $r_i(t)$ – це додана вартість або прибуток за одиницю часу на одиницю продукту в і-й галузі. Функцію $q_i(t)$ називатимемо ціною виробничої потужності в і-й галузі. Тоді із (15.26) і (15.28) одержимо

$$q_i(t) = \int_t^T r_i(t)dt + q_i(T), \quad q_i(T) = -(\xi G_1 + \eta G_2)_i. \qquad (15.31)$$

Із цього співвідношення одержуємо, що ціна і-ї виробничої потужності є сума ціни $q_i(T)$ в момент часу T і прибутку, який можна одержати з одиниці цієї потужності (при повному її завантаженні) за період $[t,T]$. Якщо немає граничних обмежень на потужності (15.18), то ціни $q_i(T)$ потужностей рівні нулю. Якщо маємо граничні обмеження на потужності (15.18), то ціни виробничих потужностей задаються формулами (15.31).

Першу з нерівностей (15.27) можна інтерпретувати таким чином. Розписуючи нерівність у координатах, одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t) b_{ji}(t) \ge q_i(t). \qquad (15.32)$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{n} p_j(t) b_{ji}(t)$ є вартість витрат на будівництво одиничної виробничої потужності в і-й галузі в момент часу t, то нерівність (15.32) означає, що ціна цієї потужності не може перевищувати витрат на її будівництво.

Функції $p_{0j}(t)$ назвемо споживчими цінами. Ці функції є деяка кількісна характеристика задоволення населення від споживання одиниці продукту галузі. Споживчі ціни мають бути встановлені на підставі вивчення споживчого попиту. Друга з нерівностей (15.27) означає, що ціни $p_j(t)$ продуктів галузей повинні бути не нижче за їхні споживчі ціни.

Дамо тепер інтерпретацію лінійного функціонала ψ. Враховуючи (15.25) і (15.31), запишемо його в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \psi &= q(0)V_0 - q(T)V(T) + \xi(a_1 - G_1 V(T)) + \\ &+ \int_0^T s(t)\pi(t)dt - \int_0^T p(t)c_0(t)dt. \end{aligned} \qquad (15.33)$$

Величину $q(0)V_0 - q(T)V(T)$ можна інтерпретувати як падіння вартості фондів,

$$\int_0^T s(t)\pi(t)dt$$

можна інтерпретувати як дохід населення в умовах повної зайнятості, а

$$\int_0^T p(t)c_0(t)dt$$

можна інтерпретувати як витрати населення на споживання на мінімальному рівні за період $[0, T]$. Доданок $\xi(a_1 - G_1 V(T))$ при достатньо слабких припущеннях перетворюється на нуль на оптимальному рішенні. Тому його можна не брати до уваги.

15.3. Умови оптимальності. Економічна інтерпретація

Повернемося до формулювання (15.5)–(15.8) задачі Л1. Обмежимося випадком, коли на кінці інтервалу є лише одне обмеження $G_1V(T) \le a_1$. Зробимо такі припущення:

Припущення 1. Задача

$$x_0(t) = A(t)x_0(t) + c_0(t),$$
$$0 \le x_0(t) \le V_0 - \varepsilon e, \quad \varepsilon > 0, \quad e = (1,\ldots,1),$$
$$a_0(t)x_0(t) \le \pi(t) - \varepsilon, \quad 0 \le t \le T$$

має розв'язок. Це припущення означає, що початкові потужності V_0 можуть забезпечити споживання на мінімальному рівні впродовж планового періоду при недозавантаженні потужності й неповній зайнятості.

Припущення 2. Існують такі програми будівництва потужностей $\tilde{u}(t)$ і споживання $\tilde{w}(t)$, що

$$\dot{\tilde{V}}(t) = \tilde{u}(t), \quad \tilde{u}(t) \in L_n^\infty[0,T], \quad \tilde{u}(t) \ge 0, \upsilon\tilde{V}(0) = V_0,$$
$$\tilde{c}(t) = c_0(t) + \tilde{w}(t), \quad \tilde{w}(t) \in L_n^\infty[0,T], \quad \tilde{w}(t) \ge 0,$$
$$\tilde{x}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t) + \tilde{c}(t),$$
$$0 \le \tilde{x}(t) \le \tilde{V}(t), \quad a_0(t)\tilde{x}(t) \le \pi(t),$$
$$G_1V(T) \le a_1 - \varepsilon e, \quad \varepsilon > 0.$$

Припущення 2 означає, що обмеження на потужності $G_1V(T) \le a_1$ не є дуже жорстким.

Припущення 3. Матриця $G_1 \le 0$.

Припущення 3, наприклад, завжди виконано, якщо обмеження в точці $t = T$ має вигляд $V(T) \ge V_T$.

Задача Леонтьєва була зведена до стандартної задачі оптимального керування (15.17)–(15.18). Припущення 1 означає, що для цієї задачі керування $u_0^*(t) = 0$ є допустимим при обмеженні

$$-\tilde{C}(t)V(t) + \tilde{D}u^*(t) \le b^*(t).$$

Припущення 2 означає, що керування $\tilde{u}^*(t)$ допустиме при обмеженні $G_1V(T) \le a_1$. Тому мають виконуватися необхідні умови оптимальності:

$$[-q(t)\tilde{B}(t)+\upsilon(t)\tilde{D}(t)-b(t)]u^*(t)=\quad 0,$$
$$\upsilon(t)[-\tilde{c}(t)V(t)+\tilde{D}(t)u^*(t)-b^*(t)]=\quad 0,$$
$$\xi[G_1V(T)-a_1]=\quad 0.$$

або відповідно до (15.15), (15.16)

$$\Big(-q(t)+[r(t)\tilde{A}(t)+s(t)a_0(t)\tilde{A}(t)]B(t)\Big)u(t)=\quad 0,$$
$$w(t)=\quad 0,$$
$$r(t)[-V(t)+\tilde{A}(t)B(t)u(t)+\tilde{A}(t)w(t)+\tilde{A}(t)c_0(t)]=\quad 0,$$
$$s(t)[a_0(t)\tilde{A}(t)B(t)u(t)+a_0(t)\tilde{A}(t)B(t)w(t)+$$
$$+a_0(t)\tilde{A}(t)B(t)c_0(t)-\pi(t)]=\quad 0,$$
$$\xi[G_1V(T)-a_1]=\quad 0$$

майже скрізь на $[0,T]$. Через рівність (15.23) і (15.11) одержуємо (майже скрізь):

$$\begin{aligned}&[p(t)B(t)-q(t)]\dot{V}(t)=\quad 0,\\ &c(t)-c_0(t)]=\quad 0,\\ &r(t)[V(t)-x(t)]=\quad 0,\\ &s(t)[-a_0(t)x(t)+\pi(t)]=\quad 0,\\ &\xi[G_1V(T)-a_1]=\quad 0.\end{aligned} \tag{15.34}$$

Ці рівності можна переписати у вигляді:

$$\left[\sum_{j=1}^{n}p_j(t)b_{ji}(t)-q_i(t)\right]\dot{V}_j(t)=\quad 0, \tag{15.35}$$

$$c_i(t)-c_{0i}(t)]=\quad 0, \tag{15.36}$$

$$r_i(t)[V_i(t)-x_i(t)]=0,\quad \xi_i[G_1V(T)-a_1]_i=0, \tag{15.37}$$

$$s(t)\left[\pi(t)-\sum_{i=1}^{n}a_{0i}(t)x_i(t)\right]=\quad 0. \tag{15.38}$$

Надалі умови (15.35)–(15.38) називатимемо умовами оптимальності задач Λ і Λ*. Ми можемо дати таку економічну інтерпретацію умов оптимальності.

Якщо в заданий момент часу t виробнича потужність у галузі строго зростає, то її ціна збігається із вартістю всіх витрат на будівництво одиниці потужності. Якщо ж ціна виробничої потужності менше витрат на будівництво одиничної потужності, то потужність у заданий момент часу t не будується. $\dot{V}_i = 0$ Якщо ціна і-го продукту $p_i(t)$ вища за його споживчу ціну, то споживання цього продукту перебуває на мінімальному рівні $c_i(t) = c_{0i}(t)$. Якщо споживання і-го продукту вище за мінімальний рівень, то ціна цього продукту збігається із споживчою ціною на цей продукт. Якщо при заданому t галузь прибуткова, то вона працює на повну потужність. Якщо потужності галузі недозагружені, то галузь дає нульовий прибуток. Якщо заробітна плата $s(t) \neq 0$, то в даний момент часу t має місце повна зайнятість. Якщо в даний момент немає повної зайнятості, то $s(t) = 0$.

Вважатимемо, що носієм вартості є гроші й що існує деякий фінансовий орган (банк), який керує грошовими потоками, що виникають (разом із продуктовими потоками) між галузями. Щоб виробити одиницю продукту за одиницю часу і-та галузь має витратити на технологічні потреби і на оплату праці

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t) a_{ji}(t) + s(t) a_{0i}(t)$$

грошових одиниць, яку вона одержує в кредит від банку. Після реалізації продукції галузь вносить у банк суму

$$r_i(t) + K_i(t).$$

Величину $r_i(t)$, яку ми називали прибутком галузі на одиницю продукту, тепер можемо вважати відсотками за кредит. Іноді $r_i(t)$ називають платою галузі за дефіцитні фонди. Потужність $V_i(t)$ називається дефіцитною, якщо вона в момент часу t завантажена повністю $V_i(t) = x_i(t)$. Із (15.37) випливає, якщо оплата галузі за фонди відмінна від нуля, то потужність V_i дефіцитна. Знову-таки, згідно з (15.37) плата за одиницю фондів збігається з прибутком на одиницю випуску галузі.

Якщо $x(t), V(t), c(t)$ допустимі, тобто задовольняють обмеження (15.6)–(15.8), і $p(t), q(t), r(t), s(t)$ допустимі, тобто задовольняють обмеження (15.26)–(15.28), і якщо, крім того, виконано умови (15.34), то $x(t)$, $V(t)$, $c(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $s(t)$ оптимальні.

Зауважимо, що оптимальні ціни визначаються неоднозначно. Помножимо споживчі ціни на сталий множник $\rho > 0$. Від цього функціонала (15.5) також помножиться на цей множник, а екстремалі задачі Λ1 залишаться тими самими. Якщо тепер $p(t), q(t), r(t), s(t), \xi, \eta$ помножити на ρ, то співвідношення (15.26)–(15.28) залишаться в силі й умови оптимальності (15.34) також будуть виконуватися. Отже, оптимальні ціни допускають множення на сталий множник. Цим сталим множником можна розпорядитися для нормування цін. Наприклад, можна прийняти середню за період $[0,T]$ ціну деякого еталонного продукту (золото) рівну одиниці.

Відзначимо, що вектор

$$a_0(t)\tilde{A}(t) = a_0(t)[E - A(t)]^{-1} -$$

це вектор сумарних витрат праці на виробництво одиничного набору продуктів. Із формули (15.23) випливає, що ціна лінійно залежить від сумарних затрат праці на виробництво одиниці продукту, що не суперечить трудовій теорії вартості. При бажанні можна вважати $s(t)$ не дійсною заробітною платнею, а перевищенням заробітною платою деякого нижнього рівня $s_0(t)$. Таке ж зауваження стосується і плати за фонди.

Дамо тепер економічне тлумачення функцій Понтрягіна задач Λ і Λ*. Використовуючи формули (15.15), (15.16), (15.24), одержуємо:

$$H(q,u,c) = qu + p_0 c, \qquad (15.39)$$

$$\tilde{H}(V,p,s,r) = s\pi(t) + rV + pc_0(t), \qquad (15.40)$$

$$p = pA(t) + r + su_0(t).$$

Нехай виконано припущення 1, 2, 3. Тоді на екстремалі мають виконуватися умови (15.34), еквівалентні принципу максимуму Понтрягіна

$$\max_{u,c} H(q(t),u,c) = H(q(t),u(t),c(t)), \qquad (15.41)$$

де максимум береться при обмеженнях:

$$x = A(t)x + B(t)u + c,$$

$$0 \le x \le V(t), \quad u \ge 0, \quad c \ge c_0(t), \quad a_0(t)x \le \pi(t). \qquad (15.42)$$

Крім того,

$$\min_{p,s,r} \tilde{H}(V(t),p,s,r) = \tilde{H}(V(t),p(t),s(t),r(t)), \qquad (15.43)$$

де мінімум береться при обмеженнях:

$$p = pA(t) + r + sa_0(t), \quad r \ge 0, \quad s \ge 0,$$

$$pB(t) \ge q(t), \quad p \ge p_0(t). \qquad (15.44)$$

Якщо скористатися умовами доповнюючої нежорсткості (15.34), то матимемо

$$H(q(t),u(t),c(t)) = q(t)V'(t) + p_0(t)c(t) =$$

$$= p(t)B(t)V'(t) + p(t)c(t) = p(t)[x(t) - A(t)x(t)] = E(t),$$

$$\tilde{H}(V(t), p(t), s(t), r(t)) = s(t)\pi(t) + r(t)V(t) - p(t)c_0(t) =$$
$$= s(t)a_0(t)x(t) + r(t)x(t) - p(t)c(t) = [p(t) - p(t)A(t)]x(t) - p(t)c(t) =$$
$$= p(t)[x(t) - A(t)x(t) - c(t)] = I(t).$$

Функція $E(t)$ – це національний дохід, а $I(t)$ – загальна сума капіталовкладень в економіку в момент часу t.

Щоб керувати економікою, необхідно в кожен момент часу t задавати приріст потужностей u і споживання c, які задовольняють обмеження (15.42). При цьому функція Понтрягіна (15.39) є сума вартості потужності u в оптимальних цінах і споживання c у споживчих цінах. Максимум цієї функції при обмеженнях (15.42) є національний дохід в оптимальних цінах. Можна керувати економікою, задаючи в кожен момент часу заробітну плату s і плату за фонди $r_1, \ldots, r_n$. Тоді функція $\tilde{H}$ є сума заробітної плати (в умовах повної зайнятості), вартості споживання на нижньому рівні (узятої зі знаком мінус) і сумарної плати за фонди. Мінімум цієї функції при обмеженнях (15.44) дорівнює загальній сумі капіталовкладень в оптимальних цінах.

16. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

16.1. Принцип оптимальності

Метод динамічного програмування – це один із загальноприйнятих методів розв’язування задач на екстремум. В його основі лежить спеціальний принцип оптимальності Р. Беллмана. Відповідно до цього принципу оптимальне керування в будь-який момент часу не залежить від траєкторії руху об'єкта в минулому і визначається лише положенням об'єкта в даний момент часу і метою керування.

Покажемо детальніше, що означає принцип оптимальності динамічного програмування в задачі оптимального керування:

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt + \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{16.1}$$

$$x'(t) = \varphi(t,x(t),u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{16.2}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{16.3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{16.4}$$

Нехай $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – оптимальний керований процес задачі (16.1)–(16.4). Фіксуємо момент часу $\tau \in (t_0,t_1)$ і розділимо керований процес $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$ на дві частини: $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le \tau$, та $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $\tau \le t \le t_1$. Побудуємо задачу оптимального керування:

$$J_\tau(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_{\tau}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt + \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{16.5}$$

$$x'(t) = \varphi(t,x(t),u(t)), \quad \tau \le t \le t_1; \tag{16.6}$$

$$u(t) \in U, \quad \tau \le t \le t_1, \tag{16.7}$$

$$x(\tau) = \hat{x}(\tau) = y. \tag{16.8}$$

Ця задача відрізняється від задачі (16.1)–(16.4) початковим моментом часу τ і початковим положенням $x(\tau) = \hat{x}(\tau) = y$.

Принцип оптимальності Р. Беллмана означає, що частина $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $\tau \le t \le t_1$ оптимального керованого процесу задачі (16.1)–(16.4) буде оптимальним керованим процесом задачі (16.5)–(16.8).

Обґрунтувати це твердження можна за допомогою методу від супротивного. Припустимо, що функціонал $J_\tau(x(\cdot),u(\cdot))$, який визначає критерій оптимальності в задачі (16.5)–(16.8), досягає мінімуму не на керованому процесі $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $\tau \le t \le t_1$, а на іншому керованому процесі $(x^*(t),u^*(t))$, $\tau \le t \le t_1$. Тоді виконується нерівність

$$J_\tau(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))=\int_\tau^{t_1} f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt+\Psi(\hat{x}(t_1))>J_\tau(x^*(\cdot),u^*(\cdot)) \\ =\int_\tau^{t_1} f(t,x^*(t),u^*(t))dt+\Psi(x^*(t_1)) . \qquad (16.9)$$

Побудуємо процес керування на проміжку $[t_0,t_1]$ так, щоб на проміжку $[t_0,\tau]$ об'єкт рухався по траєкторії $\hat{x}(t)$, $t_0\le t\le\tau$, а на проміжку $[\tau,t_1]$ – по траєкторії $x^*(t)$, $\tau\le t\le t_1$. Із нерівності (16.9) випливає, що керований процес

$$(x(\cdot),u(\cdot))=\begin{cases}(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)), & t_0\le t\le\tau;\\ (x^*(\cdot),u^*(\cdot)), & \tau\le t\le t_1\end{cases}$$

дає критерію оптимальності $J(x(\cdot),u(\cdot))$ задачі (16.1)–(16.4) менше значення, ніж керований процес $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0\le t\le t_1$. Це суперечить тому, що $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0\le t\le t_1$ – оптимальний керований процес задачі (16.1)–(16.4).

Підкреслимо, що принцип оптимальності динамічного програмування означає, що властивість оптимальності зберігає лише завершальна частина траєкторії, а не її довільна частина.

16.2. Метод динамічного програмування в задачі оптимальної швидкодії

Нехай траєкторія руху керованого об'єкта описується диференціальним рівнянням

$$x'(t)=\varphi(x(t),u(t))\Leftrightarrow$$
$$x'_k(t)=\varphi_k(x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_r(t)),\quad k=\overline{1,n},$$

де функція $\varphi(x,u)$ неперервна і неперервно диференційовна за змінними $x_1,\ldots,x_n$. Задача оптимальної швидкодії полягає в тому, щоб визначити керування $u(t)\in U\subset R^r$, яке переводить керований об'єкт із початкового положення x у момент часу t_0 в положення x_1 за найменший відрізок часу.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) для будь-якої точки x фазового простору існує оптимальний керований процес $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, який переводить керований об'єкт із положення x у положення x_1 за мінімальний час $B(x)$;

2) функція Беллмана $B(x)$ – неперервно диференційовна.

Нехай керований об'єкт, який був у положенні x в початковий момент часу t_0, починає рухатися під дією керування $u = \text{const}$. Позначимо через $x(t)$ фазову траєкторію, яка описується рівнянням

$$x'(t) = \varphi(x(t), u) \Leftrightarrow x_k'(t) = \varphi_k(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1, \dots, u_r), \quad k = \overline{1, n},$$

У момент часу t об'єкт перебуватиме в положенні $x(t)$. Припустимо, що, починаючи з моменту часу t, об'єкт рухається по оптимальній траєкторії й досягає положення x_1. Тоді об'єкт перейде з положення x в положення x_1 за час $B(x(t)) + t - t_0$. Оскільки мінімальний час переходу об'єкта з положення x в положення x_1 дорівнює $B(x) = B(x(t_0))$, то виконується нерівність

$$B(x(t)) + t - t_0 \ge B(x(t_0)).$$

Поділивши обидві частини нерівності на $t - t_0$, одержимо

$$\frac{B(x(t)) - B(x(t_0))}{t - t_0} \ge -1.$$

Перейдемо в цій нерівності до границі при $t \to t_0$. Отримаємо

$$\frac{d}{dt} B(x) = \langle B'(x); x' \rangle = \sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x) \varphi_k(x, u) \ge -1. \qquad (16.10)$$

Нехай $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ – оптимальний керований процес, який переводить об'єкт з положення x у положення x_1. Рухаючись по оптимальній траєкторії, об'єкт досягає положення $\hat{x}(t)$ у момент часу t, витративши $t - t_0$ часу. Відповідно до принципу оптимальності динамічного програмування частина оптимального керованого процесу $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$, $t \le \tau \le t_1$ буде оптимальним керованим процесом у задачі оптимальної швидкодії з початковим положенням $\hat{x}(t)$. Тому

$$B(\hat{x}(t)) + t - t_0 = B(\hat{x}(t_0)) = B(x),$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(\hat{x}(t_0)) \varphi_k(\hat{x}(t_0), (\hat{u}(t_0)) = -1. \qquad (16.11)$$

Враховуючи, що $\hat{x}(t_0) = x$, одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x) \varphi_k(x, (\hat{u}(t_0)) = -1.$$

Зіставляючи (16.10), (16.11), переконуємося, що справедливо таке твердження.

Теорема 16.1. *Нехай виконуються умови 1), 2). Функція Беллмана* $B(x)$ *задачі оптимальної швидкодії задовольняє рівняння*

$$\min_{u\in U}[\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x)\varphi_k(x,u)] = \sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x)\varphi_k(x,\hat{u}(t)) = -1. \qquad (16.12)$$

Це рівняння називається *рівнянням Беллмана* задачі оптимальної швидкодії.

Приклад 16.1. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії

$$T \to \inf, \quad x'(t) = ax(t) + u(t), \quad a > 0,$$

$$|u(t)| \le 1, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0.$$

Розв'язок. Складемо рівняння Беллмана

$$\min_{|u|\le 1}[B'(x)(ax+u)] = B'(x)(ax+\hat{u}(t)) = -1, \quad B(0) = 0.$$

Оскільки

$$\min_{-1\le u\le 1}[B'(x)u] = -|B'(x)|,$$

то його можна записати у вигляді

$$axB'(x) - |B'(x)| = -1, \quad B(0) = 0.$$

Оптимальне керування визначається співвідношенням

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & B'(x) < 0, \\ -1, & B'(x) > 0. \end{cases}$$

Оскільки функція Беллмана $B(x)$ – це мінімальний час переходу з точки x у точку 0, то функція $B(x) > 0$, $x \ne 0$. Вона монотонно зростає при $x > 0$ і монотонно спадає при $x < 0$. Тому $B'(x) > 0$ при $x > 0$ і $B'(x) < 0$ при $x < 0$. Враховуючи ці властивості, рівняння Беллмана можна записати так:

$$B'(x)[ax-1] = -1, \quad x > 0;$$

$$B'(x)[ax+1] = -1, \quad x < 0,$$

звідки

$$B(x) = -(1/a)\ln(1 - a|x|), \quad |x| < 1/a;$$

$$u(t) = -sign(x(t)), \quad 0 \le t \le T.$$

Оптимальну траєкторію визначаємо з рівняння

$$x'(t) = ax(t) - sign(x(t)), \quad 0 \le t \le T.$$

Час T, витрачений на переміщення об'єкта з точки x_0 у точку 0, дорівнює $B(x_0) = -(1/a)\ln(1 - a|x_0|)$. Δ

16.3. Метод динамічного програмування в задачах Майєра, Лагранжа, Больца

Задача Больца. Розглянемо задачу оптимального керування Больца:

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt+\Psi(x(t_1))\to\inf, \qquad (16.13)$$

$$x'(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),\quad t_0\le t\le t_1, \qquad (16.14)$$

$$u(t)\in U,\quad t_0\le t\le t_1, \qquad (16.15)$$

$$x(t_0)=x_0, \qquad (16.16)$$

де $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$, $u(t)=(u_1(t),\dots,u_r(t))$, функції $f(t,x,u)$, $\varphi(t,x,u)$, $\Psi(x)$ – неперервні за всіма змінним і неперервно диференційовні за змінними x_k, $k=\overline{1,n}$, U – замкнута опукла множина у просторі керувань, моменти часу t_0, t_1 фіксовані й правий кінець траєкторії вільний.

Згідно з принципом оптимальності динамічного програмування побудуємо задачу:

$$J_t(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t}^{t_1} f(\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau+\Psi(x(t_1))\to\inf, \qquad (16.17)$$

$$x'(\tau)=\varphi(\tau,x(\tau),u(\tau)),\quad t\le\tau\le t_1, \qquad (16.18)$$

$$u(\tau)\in U,\quad t\le\tau\le t_1, \qquad (16.19)$$

$$x(t)\quad = x. \qquad (16.20)$$

Припустимо, що виконуються умови:

1) для всіх значень параметрів $t\in[t_0,t_1]$, $x\in R^n$ задача (16.17)–(16.20) має розв'язок $(\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))$, $t\le\tau\le t_1$, $J_t(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))=B(x,t)$;

2) функція Беллмана $B(x,t)$ неперервно диференційовна за всіма змінними.

Покажемо, що функція $B(x,t)$ задовольняє диференціальне рівняння спеціального вигляду, яке називається *рівнянням Беллмана* задачі (16.13)–(16.16). Візьмемо довільний вектор $u\in U$. За час Δt керування u переведе об'єкт із положення $x(t)$ у положення $x(t+\Delta t,u)$. Побудуємо керування $u^*(\tau)$ на проміжку $[t,t_1]$ відповідно до формули

$$u^*(\tau)=\begin{cases} u, & t\le\tau\le t+\Delta t; \\ v^*(\tau), & t+\Delta t\le\tau\le t_1, \end{cases}$$

де $v^*(\tau)$ – таке керування, що

$$B(x(t+\Delta t,u),t+\Delta t)=J_{t+\Delta t}(x(t+\Delta t,u),u),v^*(\cdot)).$$

Тоді виконується нерівність

$$B(x(t),t) \le J_t(x,u^*(\cdot)) = B(x(t+\Delta t,u),t+\Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} f(\tau,x(\tau),u)d\tau.$$

Оптимальне керування $\hat{u}(\tau)$, $t \le \tau \le t_1$, задовольняє рівняння

$$B(x(t),t) = B(x(t+\Delta t,\hat{u}),t+\Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} f(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))d\tau.$$

Розділимо ці співвідношення на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Одержимо:

$$f(t,x,u) + \frac{d}{dt}B(x(t,u),t) \quad \ge 0,$$

$$f(t,x,\hat{u}) + \frac{d}{dt}B(x(t,\hat{u}),t) \quad = 0.$$

Враховуючи рівняння руху і початкові умови, одержимо:

$$f(t,x,u) + B_x'(x,t)\varphi(t,x,u) + B_t'(x,t) \ge 0,$$

$$f(t,x,\hat{u}) + B_x'(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + B_t'(x,t) = 0.$$

Оскільки множина U замкнута, то ці співвідношення можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}&\min_{u\in U}[B_t'(x,t) + B_x'(x,t)\varphi(t,x,u) + f(t,x,u)]\\ &= B_t'(x,t) + B_x'(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + f(t,x,\hat{u}(t)) = 0, \quad t_0 \le t \le t_1,\end{aligned} \tag{16.21}$$

$$B(x,t_1) = \Psi(x). \tag{16.22}$$

Гранична умова $B(x,t_1) = \Psi(x)$ є наслідком визначення функції Беллмана. Рівняння (16.21)–(16.22) називається *рівнянням Беллмана задачі Больца* (16.13)–(16.16).

Теорема 16.2. *Нехай для всіх значень $t \in [t_0,t_1], x \in R^n$ існує оптимальний розв'язок $(\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))$ задачі (16.17)–(16.20). Функція Беллмана $B(x,t) = J_t(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ задачі оптимального керування (16.13)–(16.16) задовольняє рівняння в частинних похідних*

$$\begin{aligned}&\min_{u\in U}[B_t'(x,t) + B_x'(x,t)\varphi(t,x,u) + f(t,x,u)]\\ &= [B_t'(x,t) + B_x'(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + f(t,x,\hat{u}(t))] = 0\end{aligned} \tag{16.23}$$

з граничною умовою $B(x,t_1) = \Psi(x)$.

Задача Майєра. Розглянемо задачу Майєра:

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \quad = \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{16.24}$$

$$x'(t) \quad = \varphi(t,x(t),u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{16.25}$$

$$u(t) \quad \in U, \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{16.26}$$

$$x(t_0) \quad = x_0. \tag{16.27}$$

Побудуємо допоміжну задачу оптимального керування

$$J_t(x(\cdot),u(\cdot)) \quad = \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{16.28}$$

$$x'(\tau) \quad = \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad t \le \tau \le t_1, \tag{16.29}$$

$$u(\tau) \quad \in U, \quad t \le \tau \le t_1, \tag{16.30}$$

$$x(t) \quad = x. \tag{16.31}$$

Теорема 16.3. *Нехай для всіх значень* $x \in [t_0, t_1], t \in R^n$ *існує оптимальний розв'язок* $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$ *задачі* (16.28)–(16.31). *Функція Беллмана* $B(x,t) = J_t(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *задачі оптимального керування* (*16.24*)–(*16.27*) *задовольняє рівняння в частинних похідних*

$$\begin{gathered}\min_{u \in U}[B_t^{'}(x,t) + B_x^{'}(x,t)\varphi(t,x,u)] = \\ B_t^{'}(x,t) + B_x^{'}(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) = 0\end{gathered} \tag{16.32}$$

з граничною умовою $B(x,t_1) = \Psi(x)$.

Задача Лагранжа. Застосуємо метод динамічного програмування до задачі Лагранжа:

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \inf, \tag{16.33}$$

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{16.34}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{16.35}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{16.36}$$

Побудуємо допоміжну задачу оптимального керування:

$$J_t(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_t^{t_1} f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau \to \inf, \tag{16.37}$$

$$x'(\tau) = \varphi(t, x(\tau), u(\tau)), \quad t \le \tau \le t_1, \tag{16.38}$$

$$u(\tau) \in U, \quad t \le \tau \le t_1, \tag{16.39}$$

$$x(t) = x. \tag{16.40}$$

Теорема 16.4. *Нехай для всіх значень* $x \in [t_0, t_1], t \in R^n$ *існує оптимальний розв'язок* $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$ *задачі* (*16.37*)–(*16.40*). *Функція Беллмана* $B(x,t) = J_t(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *задачі оптимального керування* (*16.33*)–(*16.36*) *задовольняє рівняння в частинних похідних*

$$\begin{gathered}\min_{u \in U}[B_t^{'}(x,t) + B_x^{'}(x,t)\varphi(t,x,u) + f(t,x,u)] \\ = [B_t^{'}(x,t) + B_x^{'}(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + f(t,x,\hat{u}(t))] = 0\end{gathered} \tag{16.41}$$

з граничною умовою $B(x,t_1)=0$.

Приклад 16.2. Користуючись методом динамічного програмування, розв'язати задачу

$$J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^T u^2(t)dt+\lambda x^2(T),\quad \lambda>0,$$

$$x'(t)=u(t),\quad x(0)=x_0,\quad 0\le t\le T,$$

де $u(t)$ – кусково-неперервна функція.

Розв'язок:

Складемо рівняння Беллмана. Воно має вигляд

$$\min_{u\in R^1}[B_x^{'}(x,t)u+B_t^{'}(x,t)+u^2]=0,$$

$$B(x,T)=\lambda x^2,\quad x\in R^1,\quad 0\le t\le T.$$

Мінімум у лівій частині рівняння Беллмана досягається при $u=-B_{x'}/2$. Рівняння можна записати у вигляді

$$B_t^{'}(x,t)-\frac{1}{4}[B_x^{'}(x,t)]^2=0.$$

Будемо шукати функцію $B(x,t)$ у вигляді полінома

$$B(x,t)=b_0(t)+b_1(t)x+b_2(t)x^2.$$

Підставимо його в рівняння і граничні умови. Одержимо такі співвідношення:

$$b_0^{'}(t)+b_1^{'}(t)x+b_2^{'}(t)x^2-\frac{1}{4}(b_1(t)+2b_2(t)x)^2=0,$$

$$b_0(T)+b_1(T)x+b_2(T)x^2=\lambda x^2,\quad x\in R^1, 0\le t\le T.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь

$$b_0^{'}(t)-\frac{1}{4}b_1^2(t)=0,\quad b_1^{'}(t)-b_1(t)b_2(t)=0,$$

$$b_2^{'}(t)-b_2^2(t)=0,\quad b_0(T)=b_1(T)=0,\quad b_2(T)=\lambda.$$

З останнього рівняння випливає, що

$$\frac{db_2(t)}{b_2^2(t)}=dt,\quad b_2(T)=\lambda,$$

звідки

$$b_2(t)=\frac{\lambda}{1-\lambda(t-T)},\quad 0\le t\le T.$$

Із другого рівняння одержуємо

$$\frac{db_1(t)}{b_1(t)} = b_2(t)dt, \quad b_1(T) = 0,$$

звідки $b_1(t) = 0$. Із першого рівняння одержимо $b_0(t) = 0$. Отже, функція Беллмана

$$B(x,t) = \frac{\lambda x^2}{1 - \lambda(t - T)},$$

а оптимальне керування

$$\hat{u}(x,t) = \frac{\lambda x}{\lambda(t - T) - 1}.$$

Оптимальна траєкторія

$$\hat{x}(t) = -\frac{x_0}{1 + \lambda T}[\lambda(t - T) - 1], \quad 0 \le t \le T.$$

Отже, оптимальний керований процес визначено. Δ

16.4. Обґрунтування принципу максимуму методом динамічного програмування

Користуючись принципом оптимальності динамічного програмування в задачах оптимального керування, можна обґрунтувати необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму.

А. Нехай $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $0 \le t \le T$, оптимальний керований процес задачі оптимальної швидкодії:

$$T \quad \to \inf, \tag{16.42}$$

$$x' = \varphi(x,u) \Leftrightarrow x_k' = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r), \quad k = \overline{1,n}; \tag{16.43}$$

$$u(t) \quad \in U \subset R^r, \tag{16.44}$$

$$x(0) \quad = x, \quad x(T) = \hat{x}_1, \tag{16.45}$$

де функція $\varphi(x,u)$ неперервна за всіма аргументами і неперервно диференційовна за $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Оптимальне керування $\hat{u}(t)$, $0 \le t \le T$, переводить об'єкт із початкового положення x у момент часу $t = 0$ в положення $\hat{x}_1$ за мінімальний відрізок часу.

Припустимо, що для будь-якої точки x фазового простору існує оптимальний керований процес $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $0 \le t \le T$, у задачі (16.42)–

(16.45), який переводить керований об'єкт з положення x у положення $\hat{x}_1$ за мінімальний час $B(x)$ і функція Беллмана $B(x)$, неперервно диференційовна двічі при $x \neq \hat{x}_1$.

Фіксуємо момент часу $t \in [0, T]$ і розглянемо функцію

$$h(x, \hat{u}(t)) = -B_x'(x)\varphi(x, \hat{u}(t)) = -\sum_{k=1}^{n} B_{x_k}'(x)\varphi_k(x, \hat{u}(t)).$$

Ця функція має неперервні частинні похідні по $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при всіх $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq \hat{x}_1$

$$h_{x_j}'(x, \hat{u}(t)) = -\sum_{k=1}^{n} B_{x_k x_j}''(x)\varphi(x, \hat{u}(t)) - \sum_{k=1}^{n} B_{x_k}'(x)\varphi_{kx_j}(x, \hat{u}(t)). \qquad (16.46)$$

Якщо $\hat{x}(t)$ – оптимальна траєкторія, яка відповідає керуванню $\hat{u}(t)$, то згідно із (16.12) функція $h(x, \hat{u}(t))$ досягає в точці $x = \hat{x}(t)$ максимуму. За необхідною умовою екстремуму першого порядку

$$h_{x_j}'(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \forall\, t \in [0, T). \qquad (16.47)$$

Оскільки

$$\frac{d}{dt} B_{x_j}'(\hat{x}(t)) = \sum_{k=1}^{n} B_{x_k x_j}''(\hat{x}(t))\hat{x}_k'(t) = \sum_{k=1}^{n} B_{x_k x_j}''(\hat{x}(t))\varphi_k(\hat{x}(t), \hat{u}(t)),$$

то з рівнянь (16.46), (16.47) одержимо

$$\frac{d}{dt} B_{x_j}'(\hat{x}(t)) = -\sum_{k=1}^{n} B_{x_k}'(\hat{x}(t)\varphi_{kx_j}'(\hat{x}(t), \hat{u}(t)). \qquad (16.48)$$

Позначимо через $p(t)$ векторну функцію

$$p(t) = \{p_k(t)\}_{k=\overline{1,n}} = \{-B_{x_k}'(\hat{x}(t))\}_{k=\overline{1,n}}, \qquad (16.49)$$

а через $H(p, x, u)$ – функцію

$$H(p, x, u) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\varphi_k(x(t), u(t)) = h(x(t), u(t)). \qquad (16.50)$$

За теоремою 16.1 для всіх $t \in [0, T]$ виконуються співвідношення

$$H(p(t), \hat{x}(t), u) \leq 1 \quad \forall\, u \in U, \quad H(p(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 1$$

або

$$\max_{u \in U} H(p(t), \hat{x}(t), u) = H(p(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall\, t \in [0, T]. \qquad (16.51)$$

Враховуючи (16.49) і (16.50), рівність (16.48) можна записати у вигляді

$$p_j'(t) = -H_{x_j}(p(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad j = \overline{1, n}. \qquad (16.52)$$

Отже, правильним є таке твердження.

Теорема 16.5. *Нехай траєкторія руху керованого об'єкта в задачі оптимальної швидкодії* (16.42)–(16.45) *описується рівнянням* $x' = \varphi(x,u)$, *де функція* $\varphi(x,u)$ *неперервна за всіма аргументами і неперервно диференційовна за* $x = (x_1,\ldots,x_n)$. *Якщо для будь-якої точки* $x \neq \hat{x}_1$ *фазового простору існує оптимальний керований процес* $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$, *який переводить керований об'єкт з положення* x *у положення* $\hat{x}_1$ *за мінімальний час* $B(x)$ *і функція Беллмана* $B(x)$ *неперервно диференційовна двічі при* $x \neq \hat{x}_1$, *то існує векторна функція* $p(t) = \{p_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$, *яка задовольняє диференціальне рівняння* (*16.52*) *і співвідношення* (*16.51*).

Функція H називається *функцією Гамільтона – Понтрягіна*, змінні $p_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ називаються *спряженими змінним*, а рівняння (16.52) – *спряженим рівнянням.*

B. Нехай $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, оптимальний керований процес задачі оптимального керування Больца (16.13)–(16.16), функції $f(t,x,u)$, $\varphi(t,x,u)$, $\psi(x)$ – неперервні за всіма змінними і неперервно диференційовні за змінними $x_1,\ldots,x_n$. Припустимо, що для всіх значень параметрів $x \in R^n$, $t \in [t_0,t_1]$ задача (16.17)–(16.20) має розв'язок $(\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))$, $t \le \tau \le t_1$ і функція Беллмана $B(x,t)$ неперервно диференційовна двічі за всіма змінними. За теоремою 16.2 функція $B(x,t)$ задовольняє рівняння Беллмана (16.23). Тому оптимальний керований процес $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, задачі Больца (16.13)–(16.16) задовольняє рівняння

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(\hat{x}(t),t)\varphi_k(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) + B'_t(\hat{x}(t),t) + f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) = 0, \quad (16.53)$$

і для будь-якої фазової координати x виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x,t)\varphi_k(t,x,\hat{u}(t)) + B'_t(x,t) + f(t,x,\hat{u}(t)) \ge 0. \quad (16.54)$$

Із співвідношень (16.53), (16.54) випливає, що функція

$$g(x,t) = p_0 \sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x,t)\varphi_k(t,x,\hat{u}(t)) + B_{t'}(x,t)$$

$$+ f(t,x,\hat{u}(t)), \quad p_0 \in R^1,\ p_0 > 0$$

досягає мінімуму за змінною x при $x = \hat{x}(t)$. Тому її частинна похідна по x дорівнює нулю:

$$g'_{x_j}(\hat{x}(t),t) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Отже,

$$p_0[\sum_{k=1}^{n} B''_{x_k x_j}(\hat{x}(t),t)\varphi_k(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) + \sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(\hat{x}(t),t)\varphi'_{kx_j}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) + B''_{x_k t}(\hat{x}(t),t) + f'_{x_j}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))] = 0. \quad (16.55)$$

Визначимо вектор-функцію спряжених змінних $p(t)=\{p_j(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ і функцію Гамільтона – Понтрягіна за формулами:

$$p_j(t) = -p_0 B'_{x_j}(\hat{x}(t),t), \quad j=\overline{1,n}; \quad (16.56)$$

$$H(x(t),u(t),p(t),p_o) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\varphi_j(t,x(t),u(t)) - p_0 f(t,x(t),u(t)). \quad (16.57)$$

Враховуючи (16.55), одержимо

$$p'_j(t) = -\frac{d}{dt}(p_0 B'_{x_j}(\hat{x}(t),t)) = -H'_{x_j}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),p(t),p_0),\ j=\overline{1,n}. \quad (16.58)$$

Із рівняння Беллмана (16.23) випливає

$$\max_{u\in U} H(\hat{x}(t),u,p(t),p_0) = H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),p(t),p_o), \quad (16.59)$$

а із граничної умови рівняння Беллмана (16.23) одержимо

$$p_j(t_1) = -\Psi'_{x_j}(\hat{x}(t_1)), \quad j=\overline{1,n}. \quad (16.60)$$

Зіставляючи (16.56)–(16.60), переконуємося, що справедливе таке твердження.

Теорема 16.6. *Нехай* $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, *оптимальний керований процес задачі оптимального керування Больца* (*16.13*)–(*16.16*), *функції* $f(t,x,u)$, $\varphi(t,x,u)$, $\psi(x)$ *– неперервні за всіма змінними і неперервно диференційовні за змінними* $x_1,\ldots,x_n$. *Якщо для всіх значень параметрів* $x\in R^n$, $t\in[t_0,t_1]$ *задача* (*16.17*)–(*16.20*) *має розв'язок* $(\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau)), t\le\tau\le t_1$, *і функція Беллмана* $B(x,t)$ *неперервно диференційовна двічі за всіма змінними, то існує число* p_0 *і векторна функція* $p(t)=\{p_j(t)\}_{k=\overline{1,n}}$, *яка задовольняє диференціальне рівняння*

$$p'_j(t) = -H'_{x_j}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),p(t),p_0), \quad j=\overline{1,n},$$

граничні умови $\quad p_j(t_1) = -\Psi'_{x_j}(\hat{x}(t_1)), \quad j=\overline{1,n}$

і співвідношення

$$\max_{u\in U} H(\hat{x}(t),u,p(t),p_0) = H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),p(t),p_o).$$

Це і є принцип максимуму Понтрягіна задачі Больца.

С. Розглянемо задачу Майєра з фіксованим лівим і вільним правим кінцями траєкторії (16.24)–(16.27). Нехай $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, оптимальний керований процес задачі Майєра (16.24)–(16.27), функція $\varphi(t,x,u)$ неперервна за всіма змінними і неперервно диференційовна за змінними $x_1,\ldots,x_n$, а функція $\psi(x)$ неперервно диференційовна. Припустимо, що для всіх значень параметрів $x \in R^n$, $t \in [t_0,t_1]$ задача (16.28)–(16.30) має розв'язок $(\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))$, $t \le \tau \le t_1$, і функція Беллмана $B(x,t)$ неперервно диференційовна двічі за всіма змінними.

За теоремою 16.3 функція $B(x,t)$ задовольняє рівняння Беллмана (16.32). Тому оптимальний керований процес $(\hat{x}(t),\hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, задачі Майєра (16.24)–(16.27) задовольняє рівняння

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(\hat{x}(t),t)\varphi_k(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) = -B'_t(\hat{x}(t),t), \tag{16.61}$$

і для будь-якої фазової координати x виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x,t)\varphi_k(t,x,\hat{u}(t)) + B'_t(x,t) \ge 0. \tag{16.62}$$

Із співвідношень (16.61), (16.62) випливає, що функція

$$g(x,t) = \sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x,t)\varphi_k(t,x,\hat{u}(t)) + B'_t(x,t)$$

досягає мінімуму за змінною x при $x = \hat{x}(t)$. Тому її частинна похідна по x дорівнює нулю: $g'_{x_j}(\hat{x}(t),t) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} B''_{x_k x_j}(\hat{x}(t),t)\varphi_k(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))$$
$$+\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(\hat{x}(t),t)\varphi'_{kx_j}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) + B''_{tx_j}(\hat{x}(t),t) = 0.$$

Визначимо вектор-функцію спряжених змінних $p(t) = \{p_j(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ і функцію Гамільтона – Понтрягіна за формулами:

$$p_j(t) = -B'_{x_j}(\hat{x}(t),t), \quad j = \overline{1,n}; \tag{16.63}$$

$$H(x(t),u(t),p(t),p_o) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\varphi_j(t,x(t),u(t)). \tag{16.64}$$

Враховуючи (16.61), одержимо

$$p'_j(t) = -\frac{d}{dt}(B'_{x_j}(\hat{x}(t),t)) = -H'_{x_j}(\hat{x}(t),\hat{u}(t),p(t)),\ j = \overline{1,n}. \tag{16.65}$$

Із рівняння Беллмана (16.32) випливає

$$\max_{u\in U} H(\hat{x}(t), u, p(t)) = H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)), \tag{16.66}$$

а з граничної умови рівняння Беллмана (16.32) одержимо

$$p_j(t_2) = -\Psi_{x_j}{}'(\hat{x}(t_1)), \quad j = \overline{1,n}. \tag{16.67}$$

Зіставляючи (16.63)–(16.67), переконуємося, що справедливо таке твердження.

Теорема 16.7. *Нехай* $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ $t_0 \le t \le t_1$, *оптимальний керований процес у задачі оптимального керування Майєра* (*16.24*)–(*16.27*), *функція* $\varphi(t, x, u)$ *неперервна за всіма змінними і неперервно диференційовна за змінними* $x_1, \ldots, x_n$, *функція* $\psi(x)$ *неперервно диференційовна. Якщо для всіх значень параметрів* $x \in R^n$, $t \in [t_0, t_1]$ *задача* (*16.28*)–(*16.31*) *має розв'язок* $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$, $t \le \tau \le t_1$, *і функція Беллмана* $B(x,t)$ *неперервно диференційовна двічі за всіма змінними, то існує векторна функція* $p(t) = \{p_j(t)\}_{k=\overline{1,n}}$, *яка задовольняє диференціальне рівняння*

$$p_j'(t) = -H_{x_j}'(\hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)), \quad j = \overline{1,n},$$

граничні умови

$$p_j(t_1) = -\Psi_{x_j}'(\hat{x}(t_1)), \quad j = \overline{1,n}$$

і співвідношення

$$\max_{u\in U} H(\hat{x}(t), u, p(t)) = H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)).$$

Це принцип максимуму Понтрягіна для задачі Майєра.

Зауваження. Наведені теореми показують, що за допомогою методу динамічного програмування можна досить просто (порівняно з методом доведення теореми 13.2) обґрунтувати необхідні умови оптимальності в задачах оптимального керування, таких як задача оптимальної швидкодії, задачі Больца, Майєра. Цей метод, однак, має істотні недоліки. Теореми доведені за умов, які обмежують їхнє застосування. Основне обмеження полягає в тому, що функція Беллмана двічі неперервно диференційовна за змінною x. Перевірити цю умову на практиці досить важко. Проте це не зменшує цінності методу динамічного програмування як методу дослідження систем керування.

Задачі

Виразити оптимальне керування через функцію Беллмана і записати рівняння Беллмана у вигляді, що не залежить від керування:

16.1. $T \to \inf$, $x''(t) = u(t)$, $|u(t)| \le 1$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = \upsilon_0$, $x(T) = x'(T) = 0$.

16.2. $T \to \inf$, $x''(t) = u(t)$, $\int_0^T u^2(t)dt = 1$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = \upsilon_0$, $x(T) = x'(T) = 0$.

16.3. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$, $x'(t) = -ax(t) + bu(t)$, $x(0) = x_0$.

16.4. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$,

$x''(t) = -\omega^2 x(t) + u(t)$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = \upsilon_0$.

16.5. $J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))dt \to \inf$,

$x_1'(t) = u(t)x_1(t) + x_2(t)$, $x_2'(t) = u^2(t)$, $x_1(t_0) = x_0$, $x_2(t_0) = x_1$.

16.6. $J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))dt \to \inf$, $x_1'(t) = u(t)x_1(t) + x_2(t)$,

$x_2'(t) = u^2(t)$, $|u_1(t)| \le 1$, $|u_2(t) \le 1$, $x_1(t_0) = x_0$, $x_2(t_0) = x_1$.

16.7. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = -\int_{t_0}^{t_1} ((x(t) - c)^2 + u^2(t))dt \to \sup$,

$x'(t) = ax(t) + bu(t)$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Відшукати функцію Беллмана у вигляді

$B(x,t) = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)x^2$

і визначити оптимальний керований процес у задачах:

16.8. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (x(t) - u(t))dt \to \sup$, $x'(t) = \sqrt{u(t)}$,

$x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $0 \le u \le x$.

16.9. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_1^T (tx^2(t) + t^{-1}u^2(t))dt \to \inf$, $x'(t) = u(t)$, $x(1) = x_0$.

16.10. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{\pi/4}^{\pi/3} ((x(t)(t) + u(t)(t))dt \to \inf$, $x'(t) = u(t)$, $x(\pi/4) = 3\sqrt{2}$.

Відповіді, вказівки, розв'язки

3.1. $f'(x)[h] = Ah$.

3.2. $f(x+h) - f(x) = A(x+h) - Ax = Ah \Rightarrow f'(x)[h] = Ah$.

3.3. $f'(x)[h] = Ah$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.5. $f'(x)[h] = 2\langle x, h\rangle = 2\sum_{i=1}^{n} x_i h_i$.

3.6. $f'(x)[h] = \langle a, h\rangle$.

3.7. $f'(x)[h] = e^{\langle x,x\rangle} 2\langle x, h\rangle$.

3.8. $f = \varphi \circ g$, $g : H \to R$, $g(x) = \langle x, x\rangle$, $\varphi : R_+ \to R$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$,

$f'(x)[h] = \varphi'(g(x))[g'(x)[h]] = \dfrac{1}{2\sqrt{\langle x, x\rangle}} 2\langle x, h\rangle = \langle \dfrac{x}{\|x\|}, h\rangle$, $x \neq 0$.

3.9. $f'(x)[h] = 2\langle Ax, h\rangle$.

3.10. $f'(x)[h] = \dfrac{h}{\|x\|} - \dfrac{x\langle x, h\rangle}{\|x\|^3}$.

3.11. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int_0^1 y(t)h(t)dt$.

3.12. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 3\int_0^1 x^2(t)h(t)dt$.

3.13. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 2\left(\int_0^1 x(t)dt\right)\left(\int_0^1 h(t)dt\right)$.

3.14. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 6\left(\int_0^1 x^2(t)dt\right)^2 \int_0^1 x(t)h(t)dt$.

3.15. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = h(0)$.

3.16. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 2x(1)h(1)$.

3.17. $f(x(\cdot) + h(\cdot)) - f(x(\cdot)) = (x(0) + h(0))(x(1) + h(1)) - x(0)x(1) =$
$h(0)x(1) + x(0)h(1) + r(h(\cdot))$, $r(h(\cdot)) = h(0)h(1) = o(\|h(\cdot)\|_{C[0,1]})$
$\Rightarrow f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = h(0)x(1) + x(0)h(1)$.

3.18. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = h(0)sign(x(0))$, $x(0) \neq 0$; $f \notin D(x(\cdot))$, $x(0) = 0$.

3.19. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = h(0)e^{x(0)}$.

3.20. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = h(1)\cos(x(1))$.

3.21. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int\limits_0^1 h(t)sign(x(t))dt$.

3.22. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = -h(\cdot)\sin(x(\cdot))$.

3.23. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = h'(\cdot)x'(\cdot)/\sqrt{1+(x'(\cdot))^2}$.

3.24. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \varphi_x(t, x(t))h(t)$.

3.25. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int\limits_0^1 \varphi'(x(t))h(t)dt$.

3.26. $f = \varphi \circ g$, $g : C[t_0, t_1] \to R^2$, $g(x(\cdot)) = (x(t_0), x(t_1))$,
$f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \varphi'(g(x))[g'(x(\cdot))[h(\cdot)]]$
$= \varphi_{x(t_0)}(x(t_0), x(t_1))h(t_0) + \varphi_{x(t_1)}(x(t_0), x(t_1))h(t_1)$.

3.27. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} (L_x(t, x(t), x'(t))h(t) + L_{x'}(t, x(t), x'(t))h'(t))dt$.

3.29. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = -\frac{1}{2}\int_a^b \left(2 + t^2 - \sin(x'(t))\right)^{-\frac{1}{2}} \cos(x'(t))h'(t)dt$.

3.31. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int_a^b \left[2t^2 x(t)h(t) + e^{x'(t)}h'(t)\right]dt$.

3.33. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 2\left(\int_a^b \left[t^2 x(t) + 2x'(t)\right]dt\right)\left(\int_a^b [1 + x'(t)]h'(t)dt\right)$
$+\left(\int_a^b \left[t^2 h(t) + 2h'(t)\right]dt\right)\left(\int_a^b [1 + x'(t)]^2 dt\right)$.

3.38. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \int_a^b (L_x(t, x(t), x'(t), x''(t))h(t) +$
$L_{x'}(t, x(t), x'(t), x''(t))h'(t) + L_{x''}(t, x(t), x'(t), x''(t))h''(t))dt$.

3.39. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = 2\iint_D \left(x'_{t_1}h'_{t_1} + x'_{t_2}h'_{t_2}\right)dt_1 dt_2$.

3.40. $f'(x(\cdot))[h(\cdot)] = \iint\limits_D \frac{x'_{t_1}h'_{t_1} + x'_{t_2}h'_{t_2}}{\sqrt{1+(x'_{t_1})^2+(x'_{t_2})^2}} dt_1 dt_2$.

4.1. $(1,1)$, $(-1,-1) \in abs\min$.

4.2. $(\ln(a+\sqrt{ab}), \ln(b+\sqrt{ab})) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

4.3. $((2a-b)/3, (2b-a)/3) \in loc\min$, $a + b < 0$;

$((2a-b)/3,(2b-a)/3) \in loc\max$, $a+b>0$; $(a,-a) \notin loc\min$, $a+b=0$.

4.4. $(0,0) \notin locextr$.

4.5. Стаціонарні точки: (x,y), де $x=(-1)^{k+1}\pi/12+(k+m)\pi/2$, $y=(-1)^{k+1}\pi/12+(k-m)\pi/2, k,m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Точки $(x,y)\in loc\min$, якщо k парне, а m непарне. Точки $(x,y)\in loc\max$, якщо k непарне, а m парне. Точки $(x,y)\notin locextr$, якщо $k+m$ парне.

4.6. $(0,2k\pi)\in loc\min$, $(-2,(2k+1)\pi)\notin locextr$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4.7. $(0,0)\in abs\min$, $\{(x,y): x^2+y^2=1\}\in loc\max$.

4.8. $(\pm(2e)^{-1/2},\pm(2e)^{-1/2})\in loc\min$, $S_{\min}=-1/2e$, $(\pm(2e)^{-1/2},\mp(2e)^{-1/2})\in loc\max$, $S_{\max}=1/2e$; $(0,\pm1)\notin locextr$, $(\pm1,0)\notin locextr$.

4.9. $(1,1)$ – сідлова точка.

4.10. $(2\pi/3,2\pi/3)\in loc\min$, $S_{\min}=-3\sqrt{3}/8$, $(\pi/3,\pi/3)\in loc\max$, $S_{\max}=3\sqrt{3}/8$.

4.11. $(\pi/3,\pi/6)\in loc\max$, $S_{\max}=3\sqrt{3}/2$.

4.12. $(1,2)\in loc\min$, $S_{\min}=7-10\ln2$.

4.13. $(-1/26,-3/26)\in loc\min$, $S_{\min}=-26e^{-1/52}$, $(1,3)\in loc\max$, $S_{\max}=e^{-13}$.

4.14. $(1,-2)$ – сідлова точка.

4.15. $(0,0)\in loc\min$, $S_{\min}=0$; $(-1/4,-1/2)$ – сідлова точка.

4.16. $(0,0)\in loc\max$, $S_{\max}=1$.

4.17. $(a/c,b/c)\in loc\min$, $c<0$; $(a/c,b/c)\in loc\max$, $c>0$, $S_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $S_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; екстремуму немає, якщо $c=0$, $a^2+b^2\neq0$.

4.18. $(\pm a/\sqrt{3},\mp b/\sqrt{3})\in loc\min$, $(\pm a/\sqrt{3},\pm b/\sqrt{3})\in loc\max$, $S_{\min}=-ab/3\sqrt{3}$, $S_{\max}=-ab/3\sqrt{3}$.

4.19. $(\pm1/2,\pm1)\in loc\min$, $(0,0)\in loc\max$, $S_{\min}=-9/8$, $S_{\max}=0$; $(0,\pm1)$ $(\pm1/2,0)$ – сідлові точки.

4.20. $(1,0)\in abs\min$, $S_{\min}=-1$, $S_{\max}=+\infty$.

4.21. $(5,2) \in loc\min$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

4.22. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, $(2,3) \notin locextr$.

4.23. $(-4,14) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

4.24. $(8,-10) \notin locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

4.25. $(1,1) \in loc\max$, $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0) \notin locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

4.26. $(-2/3,-1/3,1) \in abs\min$, $S_{\min} = -4/3$, $S_{\max} = +\infty$.

4.27. $(2,2,1) \in abs\min$, $S_{\min} = -1$.

4.28. $(a/7,a/7,a/7) \in loc\max$, $S_{\max} = a^7/7^7$.

4.29. $(24,-144,-1) \in abs\min$, $S_{\min} = -6913$.

4.30. $(1/2,1,1) \in abs\min$, $S_{\min} = 4$.

4.31. $(-1,-2,3) \in abs\min$, $S_{\min} = -14$.

4.32. $(2^{1/3},4^{1/3}) \in loc\max$, $(0,0) \notin ocextr$.

4.33. $a \neq b$, $(a^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}, b^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}) \in loc\min$,
$(a^{1/2}(a^{3/2}-b^{3/2})^{-1}, b^{1/2}(b^{3/2}-a^{3/2})^{-1}) \in loc\max$;
$a = b$, $(a^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}, b^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}) \in abs\min$.

4.34. $0 < a < 2$, $(0,-a^{1/2}) \in abs\min$, $(0,a^{1/2}) \in abs\max$;
$a > 2$, $(-b,-b^{-1}) \in loc\min$, $(b^{-1},b) \in loc\min$,
$(b,b^{-1}) \in loc\max$, $(-b^{-1},-b) \in loc\max$; $a = 2$, $(\pm 1,\pm 1) \notin ocextr$.

4.35. $(-1,\pi/3+2k\pi) \in abs\min$, $(1,-\pi/3+2k\pi) \in abs\min$,
$(1,\pi/3+2k\pi) \in abs\max$, $(-1,-\pi/3+2k\pi) \in abs\max$.

4.36. $(-b(sign(ab))/\sqrt{a^2+b^2}, -a(sign(ab))/\sqrt{a^2+b^2}) \in abs\min$,
$(b(sign(ab))/\sqrt{a^2+b^2}, a(sign(ab))/\sqrt{a^2+b^2}) \in abs\max$,
$S_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2}/|ab|$, $S_{\max} = \sqrt{a^2+b^2}/|ab|$.

4.37. $(ab^2/(a^2+b^2), a^2b/(a^2+b^2)) \in abs\min$, $S_{\min} = a^2b^2/(a^2+b^2)$.

4.38. $S_{\min} = \lambda_1$, $S_{\max} = \lambda_2$, $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2 = 0$.

4.39. $(\pm 2,\mp 3) \in abs\min$, $(\pm 3/2,\pm 4) \in abs\max$, $S_{\min} = -50$, $S_{\max} = 106{,}25$.

4.40. $(\pi/8+k\pi/2, -\pi/8+k\pi/2) \in loc\min$, $k = 2n+1$, $S_{\min} = 1+(-1)^k/\sqrt{2}$;

$(\pi/8 + k\pi/2, -\pi/8 + k\pi/2) \in loc\max$, $k = 2n$, $S_{\max} = 1 + (-1)^k/\sqrt{2}$.

4.41. $(8/13, 12/13) \in abs\min$, $S_{\min} = 36/13$, $S_{\max} = +\infty$.

4.42. $(3/25, 4/25) \in abs\min$, $S_{\min} = 1/25$, $S_{\max} = +\infty$.

4.43. $(1/2, 1/2) \in abs\min$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = e^{1/4}$.

4.44. $(-1/2, 3/2) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

4.45. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

4.46. $(1/6, 1/3, 1/2) \in loc\max$; $(t, 0, 1-t) \in loc\max, t > 1$, $t < 0$; $(t, 0, 1-t) \in loc\min, t \in (0,1)$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

4.47. $\{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}), (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})\} \in abs\min$, $S_{\min} = -1/3\sqrt{6}$; $\{(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$, $(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$, $(2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\} \in abs\max$, $S_{\max} = 1/3\sqrt{6}$.

4.48. $\{(0,0,\pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0)\} \in abs\min$, $S_{\min} = 0$; $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2}) \in abs\max$, $S_{\max} = (a-c)^2/4$; $(0, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) \notin locextr$, $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0) \notin locextr$.

4.49. $(1/2, 1/2, 1/2) \in loc\min$; $\{(x,y,z) : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 2,$ $x + y + z = -1/2\} \in abs\min$.

4.50. $(-1/3, 2/3, -2/3) \in abs\min$; $S_{\min} = -3$; $(1/3, -2/3, 2/3) \in abs\max$; $S_{\max} = 3$.

4.51. $S_{\max} = a^{m+n+p} m^m n^n p^p / (m+n+p)^{m+n+p}$, $x/m = y/n = z/p = a/(m+n+p)$.

4.52. $(0, 0, \pm c) \in abs\min$; $S_{\min} = c^2$; $(\pm a, 0, 0) \in abs\max$; $S_{\max} = a^2$.

4.53. $(a/6, a/6, a/6) \in abs\max$; $S_{\max} = (a/6)^6$.

4.54. $(1,1,1) \in abs\max$; $S_{\max} = 2$.

4.55. $(\pi/6, \pi/6, \pi/6) \in abs\max$; $S_{\max} = 1/8$.

4.56. $(0,1) \in abs\min$, $S_{\min} = 1/e - 1$; $(1,0) \in abs\max$, $S_{\max} = e - 1$.

4.61. $\{(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\} \in abs\min$, $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\} \in abs\max$, $S_{\min} = -1/3\sqrt{3}$, $S_{\max} = 1/3\sqrt{3}$.

4.62. $(-2,0,7)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

4.63. $(0,0,0)\in abs\min$, $S_{\min}=0$; $(0,12,0)\in abs\max$, $S_{\max}=576$.

4.64. $(0,1,0)\in abs\min$, $S_{\min}=0$, $S_{\max}=+\infty$.

4.65. $(2/7,174/35,-24/5)\in loc\min$, $S_{\min}=-\infty$; $(1,0,3)\in loc\max$, $S_{\max}=+\infty$.

4.77. Одне число дорівнює $4-4/\sqrt{3}$, інше $4+4/\sqrt{3}$.

4.78. Рівносторонній трикутник.

4.79. Точка E – середина відрізка BC.

4.80. Центр ваги фіксованої грані.

4.81. $t^2-1/3\in abs\min$.

4.82. $t^3-3t/5\in abs\min$.

4.83. $\hat{p}=(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_n)\in abs\max$, $\hat{p}_1=\ldots=\hat{p}_n=1/n$.

4.84. Квадрат.

4.85. Правильний трикутник.

4.86. Висота циліндра дорівнює $2/\sqrt{3}$.

4.87. Висота конуса дорівнює $4/3$.

4.88. Висота конуса дорівнює $4/3$.

4.89. Куб.

4.90. Правильний тетраедр.

4.91. Правильний трикутник.

4.92. Правильний многогранник.

4.93. Правильний многогранник.

4.94. Якщо $0\le a\le 1/\sqrt{2}$, то $\hat{z}=a^2$, тобто $\hat{\varphi}=\pi/2$. Якщо $1/\sqrt{2}\le a\le 1$, то $\hat{z}=1/2$, тобто $\hat{\varphi}=\arcsin(a\sqrt{2})-1$.

4.95. Центр вписаного кола.

4.96. Правильний трикутник.

4.97. Пряма, проведена так, що її відрізок між сторонами кута ділиться заданою точкою на дві рівні частини.

4.98. Через точку провести коло (більшого радіуса), яке дотикається сторін кута, і відрізок, дотичний до кола.

4.99. Чотирикутник, вписаний в круг.

4.100. Найбільший об'єм має півкуля.

4.101. Якщо точки A, B лежать по різні сторони від прямої l, то C – точка перетину прямих AB і l. Нехай точки A, B лежать по одну сторону від прямої l. Знайдемо точку A', симетричну точці A відносно прямої l. Перетин прямих $A'B$ і l визначає точку C.

4.102, 4.103. Вершина тетраедра проектується в центр кола, вписаного в основу.

4.104. Правильний тетраедр.

4.105. $x_0 = (x_1 + x_2 + x_3)/3$.

4.106. $x_0 = (\sum_{i=1}^{N} m_i x_i)/\sum_{i=1}^{N} m_i$.

4.107. Нехай

$$\hat{x} = (\sum_{i=1}^{N} m_i x_i)/\sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Якщо $|\hat{x}| \le 1$, то $x_0 = \hat{x}$; якщо $|\hat{x}| > 1$, то $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$.

4.108. Нехай

$$\hat{x} = (\sum_{i=1}^{N} m_i x_i)/\sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Якщо $|\hat{x}| = 0$, то x_0 довільне; якщо $|\hat{x}| \ne 0$, то $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$.

4.109. Із точки (ξ_1, ξ_2) до еліпса $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$, $a_1 > a_2$ можна провести чотири нормалі, якщо ця точка лежить усередині астроїди

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 - a_2^2)^{2/3};$$

три нормалі, якщо вона лежить на астроїді (за винятком вершин). З інших точок можна провести дві нормалі (див. [11], с. 29).

4.110. Із точки (ξ_1, ξ_2) до параболи $y = ax^2$, $a > 0$ можна провести три нормалі, якщо точка розташована вище кривої

$$\xi_2 = 3 \cdot 2^{-4/3} a^{-1/3} \xi_1^{2/3} + 2^{-1} a^{-1};$$

дві нормалі, якщо вона лежить на цій кривій (за винятком точки $(0, 2^{-1}a^{-1})$). З інших точок можна провести одну нормаль.

4.111. Із точки (ξ_1, ξ_2) можна провести три нормалі до ближньої гілки гіперболи й одну до дальньої, якщо

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} - (\xi_2 a_2)^{2/3} > (a_1^2 + a_2^2)^{2/3};$$

дві нормалі до ближньої й одну до дальньої, якщо

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} - (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 + a_2^2)^{2/3};$$

(за винятком точок $(0, (a_1^2 + a_2^2)/a_1)$). З інших точок можна провести по одній нормалі до кожної гілки.

4.112. Відстань від точки $\hat{x}=(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)$ до гіперплощини $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ дорівнює $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i - b| / (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2}$.

4.113. Відстань дорівнює $|\langle a, x_0\rangle - b)| / \|a\|$.

4.114. Відстань від точки $\hat{x}$ до прямої $at+b$, a, $b \in R^n$ дорівнює

$$(\|\hat{x}-b\|^2 - (\langle \hat{x}-b, a\rangle / \|a\|^2)^{1/2}.$$

4.115. $\hat{x} = -a/\|a\| \in abs\min$, $l(\hat{x}) = \|a\|$.

4.116. Сторони прямокутника: $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b$.

4.117. Сторони паралелепіпеда: $2a/\sqrt{3}, 2b/\sqrt{3}, 2c/\sqrt{3}$.

4.118. *Розв'язок.* Дослідимо на екстремум задачу

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \to \sup; \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = a^q, \quad 1 < p < q, a > 0.$$

1. Множина допустимих елементів компактна, функціонал неперервний. За теоремою Вейєрштраса розв'язок задачі існує.

2. Складемо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \lambda(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q - a^q).$$

3. Запишемо необхідну умову екстремуму

$$L_{x_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 p |\hat{x}_i|^{p-1} sign(\hat{x}) + \lambda q |\hat{x}_i|^{q-1} sign(\hat{x}_i) = 0, i = 1,\dots,n.$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\hat{x} = 0$ не буде допустимим елементом задачі. Нехай $\lambda_0 = -1$. Тоді $\hat{x}_i = 0$ або $|\hat{x}_i| = (\lambda q/p)^{1/(p-q)}$.

5. Максимуму функціонал досягає в критичній точці. Нехай критична точка має рівно k відмінних від нуля координат. Ці координати такі: $|\hat{x}_i| = ak^{-1/q}$. Отже,

$$S_{\max}(a) = a^p \max_{1\le k\le n} k^{1-p/q} = a^p n^{1-p/q}.$$

Скориставшись розв'язком задачі, доведемо нерівність. Нехай $p > 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^q = a^q$. Тоді

$$(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p} = n^{-1/p}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p} \le n^{-1/p}(S_{\max}(a))^{1/p}$$

$$= n^{-1/p}an^{1/p-1/q} = an^{-1/q} = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q/n)^{1/q}.$$

Якщо $p=1$, то переконатися у справедливості нерівності можна, перейшовши до границі в нерівності з $p>1$.

Нехай $0<p<1$ і $y_i=|x_i|^p$. Тоді

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n)^{1/p} = (\sum_{i=1}^{n}|y_i|/n)^{1/p}$$

$$\le ((\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{q/p}/n)^{p/q})^{1/q} = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q/n)^{1/q}.$$

Якщо $p<q<0$, то $-q<-p$ і можна використовувати доведені нерівності

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n)^{1/p} = (\sum_{i=1}^{n}|x_i^{-1}|^{-p}/n)^{-(-1/p)}$$

$$\le (\sum_{i=1}^{n}|x_i^{-1}|^{-q}/n)^{-(-1/q)} = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q/n)^{1/q}.$$

Нехай $p<0<q$. Тоді

$$\lim_{p\to 0}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n)^{1/p} = (\prod_{i=1}^{n}|x_i|)^{1/n},$$

$$(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p/n)^{1/p} \le (\prod_{i=1}^{n}|x_i|)^{1/n} \le (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q/n)^{1/q}.$$

4.119. Нерівність доводиться так само, як і в задачі 4.118.

4.120. Розв'язок такий, як і в задачі 4.118.

4.121. *Розв'язок.* Дослідимо на екстремум задачу

$$\sum_{i=1}^{n}x_ia_i \to \sup; \quad \sum_{i=1}^{n}|x_i|^p = b^p, \quad p>1, b>0.$$

1. Множина допустимих елементів компактна, функціонал неперервний. За теоремою Вейєрштрасса розв'язок задачі існує.

2. Складемо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0\sum_{i=1}^{n}x_ia_i + \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p.$$

3. Запишемо необхідну умову екстремуму

$$L_{x_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 a_i + \lambda p|\hat{x}_i|^{p-1}\,sign(\hat{x}_i) = 0, i=1,\ldots,n.$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$ і $\lambda \neq 0$, то $\hat{x} = 0$ не буде допустимим елементом задачі. Нехай $\lambda_0 = -1$. Тоді

$$\hat{x}_i = \mu \, | a_i |^{p'-1} \, sign(a_i), \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n} | x_i |^p = b^p$, то $\mu = (\sum\limits_{i=1}^{n} | a_i |^{p'})^{-1/p}$.

5. Критична точка одна. Тому $\hat{x} \in abs\max$.

$$S_{\max}(b) = b(\sum_{i=1}^{n} | a_i |^{p'})^{-1/p'}.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq S_{\max}((\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{1/p}) = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^{p'})^{1/p'}.$$

4.122. *Указівка.* Дослідити на екстремум задачу

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i + y_i |^p \to \sup; \ \sum_{i=1}^{n} | x_i |^p = a^p, \ \sum_{i=1}^{n} | y_i |^p = b^p, \ p > 1, a > 0, b > 0.$$

5.1. Інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Варіаційна задача не має сенсу.

5.2. $\hat{x} = \cos(t) + C\sin(t)$.

5.3. $\hat{x} = sh(t)/sh(1)$.

5.4. $\hat{x} = 2ch(t)$.

5.5. $\hat{x} = t\cos(t)$.

5.6. $\hat{x} = e^{2(1-t)}$.

5.7. $\hat{x} = \sqrt{1-t^2}$.

5.8. $\hat{x} = e^t - e^{-3t}$.

5.9. $\hat{x}_1 = t$, $\hat{x}_2 = sh(t-1)/sh(1)$.

5.10. $\hat{x}_1 = C\sin(t) - \frac{t}{\pi}\cos(t)$, $\hat{x}_2 = C\sin(t) + (2\sin(t) - t\cos(t))/\pi$.

5.11. $\hat{x}_1 = \sin(2t)$, $\hat{x}_2 = -t^2/2 + (32 + \pi^2)t/8\pi$.

5.12. $\hat{x}_1 = -(t^3 + 5t - 6)/6$, $\hat{x}_2 = t$.

5.13. $\hat{x}_1 = t^2/2 + 1$, $\hat{x}_2 = t$.

5.14. $\hat{x}_1 = (B-1)\cos(t) + (t/4 + D)\sin(t) + At + C$,

$\hat{x}_2 = B\cos(t) + (t/4 + D)\sin(t)$.

5.15. $\hat{x}_1 = sh(t)$, $\hat{x}_2 = -sh(t)$.

5.16. $\hat{x}_1 = sh(t)$, $\hat{x}_2 = sh(t)$.

5.17. $\hat{x}_1 = e^t$, $\hat{x}_2 = e^{-t}$.

5.18. $\hat{x}_1 = \sin(t)$, $\hat{x}_2 = -\sin(t)$.

5.19. $\hat{x}_1 = t^4$, $\hat{x}_2 = t^3$.

5.20. $\hat{x}_1 = t + \cos(t)$, $\hat{x}_2 = -\cos(t)$, $\hat{x}_3 = \cos(t) - t$.

5.21. $\hat{x} = (1-t)sh(t)$.

5.22. $\hat{x} = -(t^3 + 6t + 1)t^3/6$.

5.23. Варіаційна задача не має сенсу, оскільки під знаком інтеграла стоїть повний диференціал.

5.24. $\hat{x} = 1 - \cos(t)$.

5.25. $\hat{x} = t - \sin(t)$.

5.26. $\hat{x} = sh(t) - \sin(t)$.

5.27. $\hat{z}(x,y) = y$.

5.28. $\hat{x} = (t/2 - \pi/4)\cos(t) - (1/2 + \pi/4)\sin(t)$.

5.29. $\hat{x} = \cos(t)$.

5.30. $\hat{x} = e^t$.

5.31. $\hat{x} = \ln(t) + 1$.

5.32. $\hat{x} = (1/2)\sqrt{t+1}$.

5.33. $\hat{x} = 2\ln(t+1)$.

5.34. $\hat{x} = -e^t / (e^3 + 1)$.

5.35. $\hat{x} = \ln(t+1) - 1$.

5.36. $\hat{x} = 1/t + 1/2$.

5.37. $\hat{x} = \cos(t) - 1$.

6.1. $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\dfrac{p}{3tx}}, \quad \dfrac{dp}{dt} = \pm\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{p^3}{3tx^3}}$.

6.2. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2x^2}{4p^2}, \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{t^2}{2p}$.

6.3. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{p}{2tx}, \quad \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{p^2}{4tx^2}$.

6.4. $\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{p_1}{2}, \quad \dfrac{dp_1}{dt} = 0, \quad \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{p_2}{2}, \quad \dfrac{dp_2}{dt} = 2x_2$.

6.5. $\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{p_1}{2x_1}$, $\dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{p_2}{2x_2}$; $\dfrac{dp_1}{dt}=\dfrac{p_1^2}{4x_1^2}$, $\dfrac{dp_2}{dt}=\dfrac{p_2^2}{4x_2^2}$.

6.6. $\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{p_1}{2}$, $\dfrac{dx_2}{dt}=-\sqrt{p_2}$, $\dfrac{dp_1}{dt}=2t$, $\dfrac{dp_2}{dt}=0$.;

$\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{p_1}{2}$, $\dfrac{dx_2}{dt}=\sqrt{p_2}$, $\dfrac{dp_1}{dt}=2t$, $\dfrac{dp_2}{dt}=0$.

Указівка. У задачах 6.7–6.11 розв'язок рівняння Гамільтона – Якобі слід шукати у вигляді $g(t)+f(x)$.

6.7. $x=C_1+C_2t$.

6.8. $x=C_1sh(t)+C_2ch(t)$.

6.9. $x=C_1\sin(t)+C_2\cos(t)$.

6.10. $t=\sqrt{C_1^2+(x-C_2)^2}$.

6.11. $t-\alpha\int_{x_0}^{x}\dfrac{du}{\sqrt{u^{2p}-\alpha^2}}=\beta$.

6.12. Ланцюгова лінія.

6.13. *Указівка.* Інтеграл дії

$$J=\int\sqrt{k/\rho^4+2h}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$$

6.14. $\dfrac{x^2}{C}+\dfrac{2y^2}{2h-C}-\dfrac{2\cos(\beta)}{\sqrt{C(2h-C)}}xy=\dfrac{\sin^2(\beta)}{k}$.

7.1. $\hat{x}=1\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

7.2. $\alpha>-1\Rightarrow\hat{x}=0\in abs\min$, $\alpha=-1\Rightarrow\hat{x}=Ct\in abs\min$, $S_{\min}=0$; $\alpha<-1\Rightarrow S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.

7.3. $\hat{T}=1$, $\hat{x}=-2t\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

7.4. $\hat{T}=1/2$, $\hat{x}=\pm4t\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

7.5. $\hat{x}=0\notin locextr$, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.

7.6. $\hat{x}=(t^2-1)/4\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

7.7. *Розв'язок.* 1. Складемо функцію Лагранжа

$$£=\int_0^{T_0}\lambda_0(x-(x')^2)dt+\lambda x(0).$$

2. Запишемо необхідні умови: а) рівняння Ейлера $2\lambda_0x''+\lambda_0=0$, б) трансверсальності $-2\lambda_0x'(0)=\lambda$, $\lambda_0x'(T_0)=0$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1$. Загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x = -t^2/4 + C_1 t + C_2.$$

Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = t(2T_0 - t)/4$.

4. Перевіримо, що $\hat{x} \in abs\max$. Дійсно, якщо $h(\cdot) \in C^1([0, T_0])$, $h(0) = 0$, то

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^{T_0} h\,dt - \int_0^{T_0} 2\hat{x}' h'\,dt - \int_0^{T_0} (h')^2\,dt =$$

$$= \int_0^{T_0} (2\hat{x}'' + 1)h\,dt - 2\hat{x}' h \Big|_0^{T_0} - \int_0^{T_0} (h')^2\,dt = -\int_0^{T_0} (h')^2\,dt \le 0.$$

$S_{\min} = -\infty.$

7.8. $\hat{T} = 2$, $\hat{x} = t^2/4 - t + 1 \notin locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $x_n(t) = 1 - t$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

7.9. $\hat{T} = 8$, $\hat{x} = t^2/4 - 8 \notin locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $x_n(t) = (t^2 - n^2)/4 + n$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

7.10. $\hat{T} = 2\sqrt{\xi}$, $\hat{x} = t^2/4 \notin locextr$, $S_{\min} = -\infty$,

$$x_n = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 1, \\ -1, & 1 \le t \le n-1, T_n = n, \\ (\xi + 1)(t - p + 1) - 1, & n - 1 \le t \le n, \end{cases}$$

$S_{\max} = +\infty$.

7.11. $\hat{x} = t^2/4 - (1 + \sqrt{5})t, (\hat{T} = 8 + 4\sqrt{5}) \notin locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $x_n = (t^2 - nt)/4 + t$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

7.12. $\hat{T} = 2\sqrt{2}$, $\hat{x} = t^2/4 - t\sqrt{2} \notin locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $x_n(t) = -t$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

7.13. $\hat{x} = \cos(t) + \sin(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

7.14. $S_{\max} = +\infty$, $T_0 < \pi/2 \Rightarrow \hat{x} = 0 \in abs\min$,
$T_0 = \pi/2 \Rightarrow \hat{x} = A\sin(t) \in abs\min$,
$S_{\min} = 0$, $T_0 > \pi/2 \Rightarrow S_{\min} = -\infty$.

7.15. $\hat{x} = (t - \pi/4 - 1)\sin(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

7.16. $\hat{x} = (t - \pi/4 + 1)\cos(t) \in abs\min$, $S_{\min} = -\infty$.

7.17. $\hat{x} = ch(t-1)/ch(1) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

7.18. $\hat{x} = tch(t-1) - sh(t)(sh(1) + ch(1))/ch(1) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

7.19. $\hat{x} = tsh(t) - th(t)ch(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

7.20. *Розв'язок.* 1. Складемо функцію Лагранжа

$$£ = \int_0^1 \lambda_0((x')^2 + x^2)dt - \lambda_0 x^2(1) + \lambda(x(0) - 1).$$

2. Запишемо необхідні умови: а) рівняння Ейлера $2\lambda_0(x'' - x) = 0$, б) трансверсальності $2\lambda_0 x'(0) = \lambda$, $\lambda_0 x'(1) = \lambda_0 x(1)$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1$. Загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x = C_1 sh(t) + C_2 ch(t).$$

Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = sh(t) + ch(t) = e^t$.

4. Перевіримо, що $\hat{x} \in abs\min$. Дійсно,

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) = J(\hat{x}(\cdot)) + J(h(\cdot)) \; \forall h(\cdot) \in C^1([0,1]), h(0) = 0.$$

Формула Вейєрштрасса дає тотожність

$$\int_0^1 (x'^2 + h^2)dt = \int_0^1 (x' + hcth(t))^2 dt + cth(1)h^2(1)$$

$$\forall\, h(\cdot) \in C^1([0,1]), h(0) = 0,$$

звідки $J(h(\cdot)) \geq 0 \; \forall h(\cdot) \in C^1([0,1])$, $h(0) = 0$. Тому $J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$, $S_{\max} = +\infty$.

7.21. Допустимих екстремалей немає.

7.22. $\hat{x} = 2sh(\hat{T})ch(t)$, $\hat{T}$ – розв'язок рівняння $sh(2T) + T = 1$.

7.23. $\hat{x} = -2ch(\hat{T})sh(t)$, $\hat{T}$ – розв'язок рівняння $sh(2T) + T = -1$.

7.24. $\hat{x} = t/\sqrt{2}$, $\hat{T} = 2^{1/6}$.

7.25. $\hat{x} = (2 - (t-1)^2)^{1/2}$.

7.26. $\hat{x} = (2 - (t-1)^2)^{1/2}$, $\hat{T} = 2$.

7.27. Екстремалі задача – ланцюгові лінії $x = cth(t/C)$. Нехай α визначається з рівнянь $\alpha = sh(\tau)$, $\tau = cth(\tau)$. Тоді при $|\xi| < \alpha T_0$ екстремалей немає. Якщо $|\xi| = \alpha T_0$, то екстремаль одна, а при $|\xi| > \alpha T_0$ є дві екстремалі.

7.28. $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\cos(t)/\cos(1), \cos(t)/\cos(1))$.

7.29. $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\cos(t) + tg(1)\sin(t), \cos(t) + tg(1)\sin(t))$.

7.30. $4/\sqrt{5}$.

7.31. $\sqrt{20}$.

7.32. $2\sqrt{2} - 1$.

7.33. $\sqrt{11}/2$.

7.34. 1.

7.35. 26/5.

7.36. $y = 2x^{2/3}$.

8.1. $\hat{x}_1 = \begin{cases} t, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in [1,2] \end{cases}$; $\hat{x}_2 = \begin{cases} 0, & t \in [0,1], \\ t-1, & t \in [1,2]. \end{cases}$

8.2. $\hat{x}_1 = \begin{cases} -t, & t \in [0,1], \\ t-2, & t \in [1,4] \end{cases}$; $\hat{x}_2 = \begin{cases} t, & t \in [0,3], \\ -t+6, & t \in [3,4]. \end{cases}$

8.3. Не існує.

8.4. $\hat{x} = \begin{cases} 0, & t \in [-1,0], \\ t, & t \in [0,1]. \end{cases}$

8.5. Ламані екстремалі складені з відрізків прямих, паралельних бісектрисам координатних кутів.

8.6. Ламані екстремалі складені з відрізків прямих, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють $(4n-1)\pi/2$, $n \in Z$.

$$8.7.\ x = \begin{cases} \pm 3t/4, & t \in [0,16/5], \\ \pm\sqrt{9-(t-5)^2}, & t \in [16/5,34/5], \\ \pm(3(t-10)/4, & t \in [34/5,10]. \end{cases}$$

8.8. Екстремалі – еліпси $(t+C_1)^2/C_2^4 + x^2/C_2^2 = 1$ з центрами на осі OX. Границя допустимої області визначається рівняннями $x=0$, $x^2 = \pm 2(t-C_3)$. Параметри C_1, C_2 вибираються так, щоб еліпс проходив через точки A і B. Якщо шлях із точки A в точку B вибирати по дугах двох парабол і по прямій, то одержимо розривний розв'язок.

9.1. $\hat{x} = (1-t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.2. $\hat{x} = tb/a \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.3. $\hat{x} = (t-t^2)/4 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.4. $\hat{x} = -t^2/4 + (b/a + a/4)t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.5. $\hat{x} = (t^3 - t)/12 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.6. $\hat{x} = (t - t^4)/24 \in abs\min$, $S_{\min} = -\infty$.

9.7. $\hat{x} = tb/a$ – єдина екстремаль, $b > 0 \Rightarrow \hat{x} \in loc\min$, $b < 0 \Rightarrow \hat{x} \in loc\max$, $b = 0 \Rightarrow \hat{x} \notin locextr$, $\forall b\hat{x}$ – не сильний $locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

9.8. $\hat{x} = (2t/3)^{3/2}$ – єдина екстремаль, $\hat{x} \in loc\min$, $\hat{x}$ – не сильний $locextr$, $S_{\max} = +\infty$.

9.9. $\hat{x} = tb/a$ – єдина екстремаль, $b > a/3 \Rightarrow \hat{x} \in loc\min$, $b < a/3 \Rightarrow \hat{x} \in loc\max$, $b = a/3 \Rightarrow \hat{x} \notin locextr$, $\forall b\hat{x}$ – не сильний $locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

9.10. $\hat{x} = tb/a$ – єдина екстремаль, $b > -a/3 \Rightarrow \hat{x} \in loc\min$, $b < -a/3 \Rightarrow \hat{x} \in loc\max$, $b = -a/3 \Rightarrow \hat{x} \notin locextr$, $\hat{x}$ – не сильний $locextr$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

9.11. $\hat{x} = \ln(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.12. $\hat{x} = (\ln(1+t))/\ln(2) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.13. $\hat{x} = t - e\ln(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.14. $\hat{x} = (1+e)2^{-1}\ln(t) + (3-t)/2 \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.15. $\hat{x} = 4/t - 1 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.16. $\hat{x} = (\ln(3(t-1)/(t+1)))/\ln(3/2) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.17. $\hat{x} = e/t - \ln(t) \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.18. $\hat{x} = \sqrt{1+t} \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.19. *Розв'язок.* 1. $L = x/(x')^2$.

2. Рівняння Ейлера $x/(x')^2 = C$.

3. Загальний розв'язок рівняння $x = (C_1 t + C_2)^2$. Граничні умови задовольняють екстремалі $\hat{x}_1 = (t-1)^2, \hat{x}_2 = (t-2)^2/4$.

4. Друга екстремаль оточена полем. Тому вона дає сильний локальний мінімум. Перша екстремаль не задовольняє умову Якобі. Отже $\hat{x}_1 \notin locextr$.

9.20. $\hat{x} = 2\ln(1+t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.21. $\hat{x} = t^3 - t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.22. $\hat{x} = \ln(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.23. $\hat{x} = t^3 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.24. $\hat{x} = cth(t)/cth(1) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.25. $\hat{x} = sh(2t)/sh(2) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.26. $\hat{x} = (e^t + e^{1-t})/(1+e) - 1 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.27. $\hat{x} = (sh(t))/(2sh(1)) - t/2 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.28. $\hat{x} = \sin(t) - \sin(1)sh(t)/sh(1) \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.29. $\hat{x} = sh(2t) - sh(2)sh(t)/sh(1) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.30. $\hat{x} = \sin(t) + (b - \sin(a))sh(t)/sh(a) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.31. $\hat{x} = sh(2t) + (b - sh(2a))sh(t)/sh(a) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.32. $\hat{x} = (t-1)ch(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.33. $\hat{x} = tch(t) + (b - ach(a))sh(t)/sh(a) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.34. $\hat{x} = (t-1)sh(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.35. $\hat{x} = ((b/sh(a)) - a + t)sh(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.36. $\hat{x} = \cos(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.37. $\hat{x} = \cos(2t) \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.38. $\hat{x} = \sin(2t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.39. $S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty$, $\pi/2$ – спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = \sin(2t) \notin locextr$.

9.40. $\hat{x} = \cos(t) + \sin(t) - 1 \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.41. $S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty$, π – спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = \cos(t) - \sin(t) - 1 \notin locextr$.

9.42. $\hat{x} = (\pi\sin(t) - 2t)/4 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.43. $\hat{x} = sh(t) - sh(\pi/2)\sin(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.44. $0 < a < \pi \Rightarrow \hat{x} = sh(t) + \sin(t)(b - sh(a))/\sin(a) \in abs\min$, π – спряжена точка. При $b > \pi$ умова Якобі не виконується. Допустимі екстремалі $\hat{x} \notin locextr$. Якщо $a = \pi$, то при $b = sh(\pi)$ екстремаль $\hat{x} = (t) + C\sin(t) \in abs\min \forall C \in R$, при $b \neq sh(\pi)$ допустимих екстремалей немає і $S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty$.

9.45. $\hat{x} = \sin(2t) \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.46.Якщо $0 < a < \pi$, то $\hat{x} = (b/\sin(a) - 2\cos(a))\sin(t) + 2\sin(t) \in abs\min$, π – спряжена точка. Отже, при $a > \pi$ умова Якобі не виконується. Допустимі екстремалі $\hat{x} \notin locextr$. Якщо $a = \pi$, то при $b = 0$ екстремаль $\hat{x} = \sin(2t) + C\sin(t) \in abs\min$, а при $b \neq 0$ допустимих екстремалей немає і $S_{\min} = -\infty, S_{\max} = +\infty$

9.47. $\hat{x} = t\cos(t) \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.48. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, π – спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = t\cos(t) \notin locextr$.

9.49. $\hat{x} = t\sin(t) - (\pi/2)\sin(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.50. $\hat{x} = t\sin(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.51. π – спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = t\sin(t) \notin locextr$. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

9.52. Якщо $0 < a < \pi$, то $\hat{x} = (b/\sin(a) - a)\sin(t) + t\sin(t) \in abs\min$, π – спряжена точка. Умова Якобі не виконується при $a > \pi$. Допустимі екстремалі $\hat{x} \notin locextr$. Якщо $a = \pi$, то при $b = 0$ екстремаль $\hat{x} = (t + C)\sin(t) \in abs\min$, $\forall C \in R$, $S_{\min} = -\pi$; при $b \neq 0$ $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

9.53. $\hat{x} = e^t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.54. $\hat{x} = te^{2-t} \in abs\max$, $S_{\min} = -\infty$.

9.55. $\hat{x} = tbe^{t-a}/a \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.56. $\hat{x} = \pi t/2 \in abs\max$, $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +1$.

9.57. $\hat{x} = \pi t \in abs\min$, $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +1$.

9.58. $S_{\min} = -a$, $S_{\max} = +a$, $2\pi k < b/a < \pi + 2\pi k$,

$$k = 0,1,\ldots \Rightarrow \hat{x} = bt/a \in loc\max;\ -\pi + 2\pi k < b/a < 2\pi k,$$

$$k = 1,2,\ldots \Rightarrow \hat{x} \in loc\min;$$

не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже, $\hat{x}$ – несильний $locextr$. Якщо $a = \pi k$, $k = 1,2,\ldots$, то необхідно додаткове дослідження.

9.59. $S_{\min} = -a$, $S_{\max} = +a$, $\pi/2 + 2\pi k < b/a < 3\pi/2 + 2\pi k$,

$$k = 0,1,\ldots \Rightarrow \hat{x} = bt/a \in loc\min;\ -\pi/2 + 2\pi k < b/a < \pi/2 + 2\pi k,$$

$$k = 0,1,\ldots \Rightarrow \hat{x} \in loc\max.$$

Не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже $\hat{x}$ – несильний $locextr$. Якщо $a = \pi/2 + \pi k$, то необхідно додаткове дослідження.

9.60. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, $a > -b/2 \Rightarrow \hat{x} = bt/a \in loc\min$;

$$a < -b/2 \Rightarrow \hat{x} \in loc\max.$$

Не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже $\hat{x}$ – несильний $locextr$. Якщо $a = -b/2$, то необхідно додаткове дослідження.

9.61. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$;

$$b \geq 4a^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_1 = 4((t + c)^{5/4} - c^{5/4})/5 \in loc\min;$$

$$b \leq -4a^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_2 = 4(c^{5/4} - t + c)^{5/4}/5 \in loc\max,$$

де c визначається з рівняння $4((a+c)^{5/4}-c^{5/4})=5|b|$. Не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже, $\hat{x}$ – несильний $locextr$. При $|b|<4a^{5/4}/5$ допустимих екстремалей немає.

9.62. Якщо $|b|<1/\sqrt{3}$, то екстремаль $\hat{x}=bt\in loc\max$. При $|b|>1/\sqrt{3}$ екстремаль $\hat{x}=bt\in loc\min$, а при $|b|<1$ ця екстремаль не дає сильного мінімуму, оскільки не виконується умова Вейєрштрасса.

9.63. Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x}\equiv 0$. Але вона не є розв'язком задачі. $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.

9.64. Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x}\equiv 0$. Вона задовольняє необхідні умови сильного мінімуму. Але сильного мінімуму не дає. Щоб переконатися в цьому, досить побудувати ламану $x(t,k,h)=kt/h$ $0\le t\le h$ і $k(1-t)/(1-h)$ при $h\le t\le 1$ і для будь-якого $k>0$ підібрати $h>0$ так, щоб $J(x(\cdot,k,h))<0$.

9.65. $\hat{x}=\sqrt{1-t^2}\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.66. $\hat{x}=\sqrt{2t-t^2}\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.67. Допустима екстремаль – дуга кола з центром на осі, яка проходить через точки (t_0,x_0), (t_1,x_1). Вона дає $abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.68. Екстремалі задача – ланцюгові лінії $x=Cch((t+D)/C)$.

9.69. Допустиму екстремаль $x=a^2(1-\cos(\tau))/2$, $t=(\tau-\sin(\tau))a^2/2+C$ можна оточити полем екстремалей. Інтегрант квазірегулярний. Допустима екстремаль дає $abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.70. Екстремаль, яка задовольняє початкову умову $x(0)=0$, має вигляд $x(t,\alpha)=\alpha t+(1+\alpha^2)t^2/4h$. Рівняння обвідної $x=-h+t^2/4h$. Якщо точка (a,b) лежить за межами цієї кривої, то допустимих екстремалей немає. Якщо точка лежить на кривій, то допустима екстремаль одна. Якщо точка лежить під кривою, то допустимих екстремалей дві. Верхня екстремаль має спряжену точку на інтервалі $(0,a)$ і не дає сильного екстремуму. Нижня дає сильний мінімум.

9.71. $\hat{x}\equiv 0$ – єдина екстремаль $S_{\min}=-\infty$ $(x_n\equiv n)$, $S_{\max}=+\infty$.

9.72. $\hat{x}=cth(t)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.73. $\hat{x}=e^t+\sin(t)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.74. $\hat{x}=\sin(t)+\cos(t)\notin locextr$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n\equiv n)$, $S_{\max}=+\infty$.

9.75. *Розв'язок*: 1. Складемо лагранжіан $L=(x')^2+x^2$, $l=\alpha x^2(a)$.

2. Запишемо необхідні умови: а) рівняння Ейлера $x''-x=0$; б) трансверсальності $x'(0)=0$, $x'(a)=-\alpha x(a)$.

3. Загальний розв'язок рівняння Ейлера $x=C_1 ch(t)+C_2 sh(t)$. Допустимі екстремалі $\hat{x}_1\equiv 0\forall\alpha$, $\hat{x}_2=Cch(t)$ при $\alpha=-th(a)$.

4. Перевіримо умови другого порядку. Умова Лежандра виконується ($\hat{L}_{x'x'}=2>0$). Інтегрант L регулярний. Умова Якобі теж виконується. Побудуємо квадратичну форму $P+Q$. Оскільки $h_1=sh(t)/sh(a)$, $h_0=sh(a-t)/sh(a)$, то матриця $P+Q$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2cth(a) & -2/sh(a) \\ -2/sh(a) & 2\alpha+2cth(a) \end{vmatrix}.$$

За критерієм Сильвестра матриця $P+Q$ додатно визначена при $\alpha>-th(a)$, невідємно визначена $\alpha=-th(a)$ і невизначена $\alpha<-th(a)$

Відповідь. Якщо $\alpha>-th(a)$, то $\hat{x}\equiv 0\in abs\min$, $S_{\min}=0$. Якщо $\alpha=-th(a)$, то $\hat{x}=Cch(t)\in abs\min\forall C\in R$. При $\alpha<-th(a)$ екстремаль $\hat{x}\equiv 0\notin loc\min$, $S_{\min}=-\infty$ $(x_n=n(t))$; $S_{\max}=+\infty\forall\alpha$.

9.76. $\hat{x}=3t^2-2t^3\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.77. $\hat{x}=t(t-1)^2\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.78. $\hat{x}=t^4-4t^3+6t^2-4t+1\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.79. $\hat{x}=t^4\in abs\max$, $S_{\min}=-\infty$.

9.80. $\hat{x}=t^2(t^3-2t+1)/10\in abs\max$, $S_{\min}=-\infty$.

9.81. $\hat{x}=(t^5+3t^3-2t^2)/10\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.82. $\hat{x}=sh(t)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.83. $\hat{x}=ch(t)-\cos(t)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

9.84. *Розв'язок*: 1. $L=(x'')^2-x^2$.

2. Складемо рівняння Ейлера – Пуассона $x^{(4)}-x=0$.

3. Загальний розв'язок рівняння

$$x=C_1\sin(t)+C_2\cos(t)+C_3 sh(t)+C_4 ch(t).$$

Якщо $ch(a)\cos(a)\neq 1$, то єдина допустима екстремаль $\hat{x}\equiv 0$.

Якщо $ch(a)\cos(a)=1$, то $\hat{x}_2=C((sh(a)\sin(a))(ch(t)-\cos(t))-(ch(a)-\cos(a))(sh(t)-\sin(t)))$.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму. Умова Лежандра виконується $\hat{L}_{x'x'} = 2 > 0$. Інтегрант L регулярний. Перевіримо умову Якобі. Рівняння Якобі має розв'язок $h_1 = ch(t) - \cos(t)$, $h_2 = sh(t) - \sin(t)$. Нехай

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_{1'} & h_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cth(t) - \cos(t) & sh(t) - \sin(t) \\ sh(t) + \sin(t) & cth(t - \cos(t)) \end{bmatrix}.$$

Тоді $H(0) = 0$, а матриця $H''(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ невироджена. Спряжені точки визначаються за допомогою співвідношення

$$\det H(t) = 0 \Leftrightarrow (cth(t) - \cos(t))^2 - (sh2(t) - \sin 2(t)) = 0 \Leftrightarrow \quad \cos(t)ch(t) = 1.$$

Відповідь. Якщо $a < t^*$, то $\hat{x} \equiv 0 \in abs\min$. Якщо $a > t^*$, то $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

9.85. $\hat{x} = sh(t) - \sin(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.86. $\hat{x} = C_1 sh(t)\sin(t) + C_2(ch(t)\sin(t)sh(t)\cos(t)) \in abs\min$,

$C_1 = (2b_0 sh(a)\sin(a)\sqrt{2}b_1(ch(a)\sin(a) - sh(a)\cos(a)))(sh^2(a) - \sin^2(a))^{-1}$,

$C_2 = (b_1 sh(a)\sin(a) - b_0(ch(a)\sin(a) - sh(a)\cos(a)))(sh^2(a) - \sin^2(a))^{-1}$.

9.87. $\hat{x} = -ch(t)\cos(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.88. $\hat{x} = -\sin(t)sh(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.89. $\hat{x} = t + \cos(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.90. $\hat{x} = (1 - \cos(t))/2 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.91. $\hat{x} = ch(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.92. $\hat{x} = sh(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.93. $\hat{x} \equiv 0 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.94. $\hat{x} = te^t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.95. $\hat{x} = e^t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.96. $\hat{x} = t^2 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.97. $\hat{x} = \ln(t+1) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.98. $\hat{x} = t\ln(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.99. $\hat{x} = 1/(1+t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.100. $\hat{x} = t^3 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.101. $\hat{x} = t^4 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

9.102. $\hat{x} = sh(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.1. $\hat{x} = 3t^2 - 4t + 1 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.2. $\hat{x} = 3t^2 + 2t + 1 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.3. $\hat{x} = (5t^3 - 3t)/2 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.4. $\hat{x} = 5t^3 + 3t - 4 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.5. $\hat{x} = 60t^3 - 96t^2 + 36t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.6. $\hat{x} = -10t^3 - 12t^2 + 6t + 2 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.7. $\hat{x} = \cos(t) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.8. $\hat{x} = (t - 2\sin(t))/\pi \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.9. $\hat{x} = t + \sin(t) \in abs\max$, $t - \sin(t) \in abs\min$.

10.10. $\hat{x} = 2\sin(t) + \cos(t) + 1 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.11. $\hat{x} = 2e^{1-t} + 1 - t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.12. $\hat{x} = 2(1 - e^t)/(e^2 - 4e + 3) + (e-1)t/(e-3) \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.13. *Розв'язок*: 1. Складемо лагранжіан
$L = \lambda_0((x')^2 + x^2) + \lambda x e^t$.

2. Запишемо рівняння Ейлера $2\lambda_0(-x'' + x) + \lambda e^t = 0$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$ і всі множники Лагранжа – нулі. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. Рівняння Ейлера $x'' - x = \lambda e^t$ має загальний розв'язок $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 t e^t$. Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = te^t$.

10.14. $\hat{x} = te^{-t}$, $\hat{x} \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.15. *Розв'язки*: 1. Складемо лагранжіан
$L = \lambda_0 t^2 (x')^2 + \lambda t x.$

2. Запишемо рівняння Ейлера

$$-\frac{d}{dt}(2\lambda_0 t^2 x') + \lambda t = 0.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$ і всі множники Лагранжа – нулі. Нехай $\lambda_0 = 1$. Рівняння Ейлера $x' = \lambda/2 + C/t^2$ має загальний розв'язок $x = C_1 t + C_2/t + C_3$. Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = t$.

4. Безпосередня перевірка показує, що $\hat{x} = t \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.16. $\hat{x} = 4/t^2 \in abs\min$, $S_{\max} = +\infty$.

10.17. *Розв'язок*: 1. Складемо лагранжіан

$$L = \lambda_0 (x')^2 + \lambda x^2.$$

2. Запишемо рівняння Ейлера $\lambda_0 x'' - \lambda x$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$ і всі множники Лагранжа – нулі. Нехай $\lambda_0 = 1$. Рівняння Ейлера $x'' = \lambda x$ має загальний розв'язок:

а) $\lambda > 0 \Rightarrow x = C_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} t}$,

б) $\lambda = 0 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$,

в) $\lambda < 0 \Rightarrow x = C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} t) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda} t)$.

При $\lambda > 0$ і $\lambda = 0$ допустимих екстремалей немає. При $\lambda < 0$ екстремалі мають вигляд

$$\hat{x} = \sqrt{2} \sin(\pi k t), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4. Абсолютний мінімум дає функція $\hat{x} = \pm\sqrt{2} \sin(\pi t)$, оскільки

$$\int_0^1 ((x')^2 - \pi^2 x^2) dt = \int_0^1 (x' - \pi ctg(\pi t) x)^2 dt \quad \forall x(\cdot) \in C^1([0,1]),$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad S_{\min} = \pi^2, S_{\max} = +\infty.$$

10.18. $\hat{x} = \pm\sqrt{2} \sin(\pi t)$.

10.19. $\hat{x} = \pm\sqrt{2} \sin(\pi t)$.

10.20. $\hat{x} = \dfrac{2}{3}(t+1)^{3/2}$.

10.21. $\hat{x} = (7/2)^{1/5} \sqrt{t}$.

10.23. $\hat{x} = (5t^4 - 1)5/4$.

10.24. $\hat{x} = \frac{4}{\pi} t \sin(t) + C \sin(t)$, $C \in R$.

10.25. $\hat{x} = \frac{8}{\pi} t \cos(t)$.

10.26. $\hat{x} = (2t - t^2)/4$.

10.27. $\hat{x}_1 = -6t^2 + 6t$, $\hat{x}_2 = 3t^2 - 2t$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

10.28. $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = 5t^3/2 - 3t/2$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

10.29. $\hat{x}^1 = (3t^2 - 2t, 3t^2 - 6t)$, $\hat{x}^2 = (-3t^2 + 4t, -3t^2)$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

10.30. $\hat{x}^1 = (3t - t^3, t^3 - t)$, $\hat{x}^2 = (t^3 + t, -t^3 + t)$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

10.31. $\hat{x} = ((7t - 5t^2)/2, t)$.

10.32. Пряма $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, ab=2S$.

10.33. Коло $(x-R)^2+y^2=R^2$.

10.34. Ланцюгова лінія $y+\lambda=Cch(x/C)$.

10.35. Дуга кола, що перетинає під прямим кутом сторону кута, який проходить через точку M_2.

10.36. Півколо радіуса $(b-a)/2$ побудовано на діаметрі, паралельному осі $0X$.

11.1. $(\hat{x},\hat{u})=(ch(t)+Csh(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.2. $(\hat{x},\hat{u})=(ch(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.3. $(\hat{x},\hat{u})=(tch(t),2sh(t))\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.4. $(\hat{x},\hat{u})=(tsh(t),2ch(t))\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.5. $(\hat{x},\hat{u})=(\sin(t)+C\cos(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.6. $(\hat{x},\hat{u})=(\sin(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.7. $(\hat{x},\hat{u})=(t\cos(t),-2\sin(t))\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.8. $(\hat{x},\hat{u})=((t-\pi/2)\sin(t),2\cos(t))\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.9. $(\hat{x},\hat{u})=(C\sin(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.10. $(\hat{x},\hat{u})=(\sin(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.11. $(\hat{x},\hat{u})=(\frac{-2(t+2)\cos(t)}{4+\pi},\frac{4\sin(t)}{4+\pi})\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.12. $(\hat{x},\hat{u})=\left(\frac{-(2\pi t+4\pi)\cos(t)+(4t-2\pi)\sin(t)}{4-4\pi-\pi^2},\frac{8\cos(t)-4\pi\sin(t)}{4-4\pi-\pi^2}\right)$,

$(\hat{x},\hat{u})\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.13. $(\hat{x},\hat{u})=(Cch(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.14. $(\hat{x},\hat{u})=(ch(t),0)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.15. $\hat{x}=\frac{3tsh(1)ch(t)+(tsh(1)-tch(1)-sh(1)-2ch(1))sh(t)}{sh(2)+sh^2(1)-3}$,

$$\hat{u}=\frac{6sh(1)sh(t)+2(sh(1)-ch(1))ch(t)}{sh(2)+sh^2(1)-3},$$

$(\hat{x},\hat{u})\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.16. $(\hat{x},\hat{u})=\left(\frac{(4+2t)\sin(t)}{4+\pi},\frac{4\cos(t)}{4+\pi}\right)\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.17. $(\hat{x},\hat{u})=\left(\dfrac{\sqrt{2ch}(\sqrt{2}t)+sh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}ch(\sqrt{2})+sh(\sqrt{2})},\dfrac{sh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}ch(\sqrt{2})+sh(\sqrt{2})}\right)$, $(\hat{x},\hat{u})\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.18. $(\hat{x},\hat{u})=\left(\dfrac{\sqrt{2}ch(t-1)+sh(t-1)}{\sqrt{2}ch(1)-sh(1)},\dfrac{sh(t-1)}{\sqrt{2}ch(1)-\sqrt{2}sh(1)}\right)$, $(\hat{x},\hat{u})\in abs\min$, $S_{\max}=+\infty$.

11.19. $(\hat{x},\hat{u})\in abs\min$, $\hat{x}=(C_1t+C_2)ch(t)+(C_3t+C_4)sh(t)$, $\hat{u}=\hat{x}''+\sqrt{2}(x')$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 визначаються умовами $x(0)=1$, $\hat{u}(0)=\hat{u}(1)=\hat{u}'(1)=0$; $S_{\max}=+\infty$.

11.20. $(\hat{x},\hat{u})\in abs\min$, $\hat{x}=(C_1t+C_2)ch(t)+(C_3t+C_4)sh(t)$, $\hat{u}=\hat{x}'-\sqrt{2}\hat{x}'$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 визначаються умовами $x(0)=1$, $\hat{u}(0)=\hat{u}(1)=\hat{u}'(1)=0$; $S_{\max}=+\infty$.

11.21. $(\hat{x},\hat{u})=(\cos(t)-ctg(\hat{T})\sin(t),0)\in abs\min$, $\forall\hat{T}\neq k\pi, k=1,2,\ldots$, $S_{\min}=0$, $S_{\max}=+\infty$.

11.22. $(\hat{x},\hat{u})=((t/4+1-\pi/8)\sin(t),\cos(t/2))$.

11.23. *Розв'язок*:1. Перейдемо до полярних координат $x=r\sin(\varphi)$, $y=r\cos(\varphi)$. Тоді $x'=r'\sin(\varphi)+r\varphi'\cos(\varphi)$, $y'=r'\cos(\varphi)-r\varphi'\sin(\varphi)$. Тому

$$x'y-y'x \quad = r^2\varphi'=1,$$
$$(x')^2+(y')^2 \quad =(r')^2+r^2(\varphi')^2=(r')^2+\varphi'.$$

Отже, одержимо таку задачу Лагранжа:

$$\int_0^1 u^2(t)dt\to extr,$$
$$\varphi'=r^{-2},\quad r'=u,\quad r(0)=r(1)=1,\quad \varphi(1)=1.$$

2. Складемо функцію Лагранжа:

$$£=\int_0^1(\lambda_0u^2+p_1(\varphi'-r^{-2})+p_2(r'-u))dt+\lambda_1r(0)$$
$$+\lambda_2r(1)+\lambda_3\varphi(0)+\lambda_4\varphi(1).$$

3. Запишемо необхідні умови: а) систему рівнянь Ейлера:

$$L_r-\frac{d}{dt}L_{r'}=0, L_\varphi-\frac{d}{dt}L_{\varphi'}=0\Rightarrow -p_2'+2p_1r^{-3}=0, p_1'=0;$$

б) трансверсальності по r і φ:

$$p_1(0)=\lambda_3;\quad p_1(1)=-\lambda_4,\quad p_2(0)=\lambda_1,\quad p_2(1)=-\lambda_2;$$

в) стаціонарності по u: $2\lambda_0 u - p_2 = 0$.

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то всі множники Лагранжа нулі. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. З умови стаціонарності по u і рівняння Ейлера одержимо таке диференціальне рівняння:

$$r'' - C/r^3 = 0 \Rightarrow r''r' - Cr'/r^3 = 0 \Rightarrow (r')^2 + C/r^2 = C'.$$

Але $r''r' - C/r^2 = 0$. Тому $(r^2/2)'' = (r')^2 + r''r = C'$ і $r^2 = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. Із початкових умов випливає, що $r^2 = A(1-t)t + 1$. Тому $\varphi' = (1 + At(1-t))^{-1}$. Оскільки

$$\varphi(1) = \int_0^1 (1 + At(1-t))^{-1} dt = 1,$$

то $A = 0$. Отже, $\hat{r}(t) = 1$, $\hat{\varphi}(t) = t$.

Відповідь. Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = \sin(t)$, $\hat{y} = \cos(t)$.

13.1. $\hat{x} = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \le t \le -\pi/2, \\ -t, & -\pi/2 \le t \le \pi/2, \\ t - \pi, & \pi/2 \le t \le \pi, \end{cases}$

$\hat{x} \in abs\min$, $-\hat{x} \in abs\max$.

13.2. $\hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le \pi/4, \\ t - \pi/2, & \pi/4 \le t \le 7\pi/4, \end{cases}$

$\hat{x} \in abs\min$, $-\hat{x} \in abs\max$.

13.3. $\hat{x} = \begin{cases} t^2/4 - 3, & 0 \le t \le 2, \\ t - 4, & 2 \le t \le 4, \end{cases}$

$\hat{x} \in abs\min$, $4 - t \in abs\max$.

13.4. $T_0 \le 2 \Rightarrow t^2/4 - tT_0/2 \in abs\min$;

$$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le T_0 - 2, \\ (t - T_0)^2/4 + 1 - T_0, & T_0 - 2 \le t \le T_0, \end{cases}$$

$\hat{x} \in abs\min$, $t \in abs\max$.

13.5. $T_0 \le 2 \Rightarrow \hat{x} = (t - T_0)^2/4 + \xi - T_0^2/4 \in abs\min$;

$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t + \xi, & 0 \le t \le T_0 - 2, \\ (t - T_0)^2/4 + 1 + \xi - T_0, & T_0 - 2 \le t \le T_0, \end{cases}$

$\hat{x} \in abs\min$, $t + \xi \in abs\max$.

13.6. $\xi \le 0 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$; $0 < \xi \le 1 \Rightarrow \hat{T} = 2\sqrt{\xi}$, $\hat{x} = t^2/4 - \sqrt{\xi}t + \xi$;

$\xi > 1 \Rightarrow \hat{T} = 1 + \xi$, $\hat{x}_{\min} = \begin{cases} -t + \xi, & 0 \le t \le \xi - 1, \\ (t - \xi - 1)^2/4, & \xi - 1 \le t \le 1 + \xi, \end{cases}$

$S_{\min} = -\infty$ $(T_n = n$, $x_n = \xi - t)$, $S_{\max} = +\infty$ $(T_n = n$, $x_n = \xi + t)$.

13.7. $T_0 \le 2 \Rightarrow \hat{x} = t^2/4 + \xi - T_0^2/4 \in abs\min$;

$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} t^2/4 + 1 + \xi - T_0, & 0 \le t \le 2, \\ t + \xi - T_0, & 2 \le t \le T_0, \end{cases}$

$\hat{x} \in abs\min$, $-t + T_0 + \xi \in abs\max$.

13.8. $T_0 \le 4 \Rightarrow \hat{x} = t(t - T_0)/4 \in abs\min$; $T_0 > 4 \Rightarrow$

$\hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le T_0/2 - 2, \\ (t - T_0/2)^2/4 + 1 - T_0/2, & T_0/2 - 2 \le t \le T_0/2 + 2, \\ t - T_0, & T_0/2 + 2 \le t \le T_0, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$;

$\hat{x} = \begin{cases} t, & 0 \le t \le T_0/2, \\ T_0 - t, & T_0/2 \le t \le T_0, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\max$.

13.9. $\xi \le 0 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$; $0 < \xi \le 1 \Rightarrow \hat{T} = 2\sqrt{\xi}$, $\hat{x} = t^2/4$;

$\xi > 1 \Rightarrow \hat{x}_{\min} = \begin{cases} t^2/4, & 0 \le t \le 2, \\ t - 1, & 2 \le t \le \hat{T}, \end{cases}$ $\hat{T} = 1 + \xi$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

13.10. $|\xi| \le cth(T_0) \Rightarrow \hat{x} = \xi ch(t - T_0)/ch(T_0) \in abs\min$,

$|\xi| > cth(T_0) \Rightarrow \quad \hat{x} = \begin{cases} \xi - tsign(\xi), & 0 \le t \le |\xi| - \sqrt{1 + C^2}, \\ Cch(t - T_0)sign(\xi), & |\xi| - \sqrt{1 + C^2} \le t \le T_0, \end{cases}$

$Csh(|\xi| - \sqrt{1 + C^2} - T_0) = -1$, $\hat{x} \in abs\min$, $\xi + t \in abs\max$.

13.11. $\hat{x} = -t^2 \in abs\min$, $\hat{x} = t^2 \in abs\max$.

13.12. $\hat{x} = -(t-1)^2 \in abs\min$, $\hat{x} = (t-1)^2 \in abs\max$.

13.13. $\hat{x} = t^2 - 2t \in abs\min$, $\hat{x} = 2t - t^2 \in abs\max$.

13.14. $\hat{x} = (t-2)^2 - 2 \in abs\min$, $\hat{x} = 2 - (t-2)^2 \in abs\max$.

13.15. $\hat{x} = t^2 - 2 \in abs\min$, $\hat{x} = 2 - t^2 \in abs\max$.

13.16. $\hat{x} = t^2 - t \in abs\min$, $\hat{x} = t - t^2 \in abs\max$.

13.17. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 2 - \sqrt{2}, \\ t^2 - (8 - 4\sqrt{2})t + 12 - 8\sqrt{2}, & 2 - \sqrt{2} \le t \le 2, \end{cases}$

$\hat{x} \in abs\min$, $-\hat{x} \in abs\max$.

13.18. $\hat{x} = \begin{cases} t^2 - 2, & 0 \le t \le 1, \\ -(t-2)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$, $-\hat{x} \in abs\max$.

13.19. *Розв'язок*: 1. Приведемо задача до вигляду

$$\int_0^2 x_1\, dt \to \inf,$$

$$x_1' = x_2, \quad x_2 = u, \quad |u| \le 2, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_2(2) = 0.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$£ = \int_0^2 (\lambda_0 x_1 + p_1(x_1' - x_2) + p_2(x_2' - u))dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2).$$

3. Запишемо необхідні умови: а) систему рівнянь Ейлера $-p_{2'} - p_1 = 0$;

б) трансверсальності по x: $p_1(0) = \lambda_1$; $p_1(2) = 0$, $p_2(0) = \lambda_2$, $p_2(2) = -\lambda_3$;

в) оптимальності по u: $\min\limits_{|u|\le 2}(-p_2 u) = -p_2 \hat{u}.$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $p_1(t) \equiv 0 \Rightarrow p_2'(t) = 0 \Rightarrow p_2(t) = C \ne 0 \Rightarrow \hat{u}(t) \equiv \pm 2$ $\Rightarrow \hat{x} = \pm t^2 + C_1 + C_2$. Із граничних умов випливає, що допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1$. Тоді $p_1 = t - 2 \Rightarrow p_2 = -(t-2)^2/2 + C$. З умови оптимальності по u випливає, що $\hat{u} = 2sign(p_2)$. Оскільки при $\hat{u} \equiv C$ допустимих екстремалей немає, то потрібно досліджувати керування, яке має перемикання в точці τ на відрізку $[0,2]$. Це може відбуватися лише тоді, коли функція $p_2(t)$ змінює знак у точці τ з мінуса на плюс. Отже,

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t \le \tau, \\ 2, & \tau \le t \le 2. \end{cases}$$

Тоді

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2 + C_1 t + C_2, & 0 \le t \le \tau, \\ t^2 + C_3 t + C_4 2, & \tau \le t \le 2. \end{cases} \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ (t-2)^2 - 2, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Невідомі константи і точку τ визначаємо з умови неперервності x і x' у точці τ і граничних умов.

5. Покажемо, що $\hat{x} \in abs\min$. Нехай функція $h(\cdot)$ така, що $\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)$ допустима. Інтегруючи частинами і користуючись співвідношеннями

$p'(2)=0$, $p''=-1$, $h(0)=h'(0)=h'(2)=0$, $p=p_2=1/2-(t-2)^2/2$, одержимо

$$\int_0^2(-ph'')dt=-ph'\,|_0^2+p'h\,|_0^2-\int_0^2 p''h\,dt=\int_0^2 h\,dt,$$

звідки

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))=\int_0^2(-ph'')dt\geq 0.$$

Оскільки $p(t)\leq 0$, $h''(t)\geq 0$ при $t\in[0,1]$ і $p(t)\geq 0$, $h''(t)\leq 0$ при $t\in[1,2]$.

13.20. $\hat{x}=\begin{cases}-t^2, & 0\leq t\leq 1,\\ (t-2)^2-2, & 1\leq t\leq 3,\\ -(t-4)^2, & 3\leq t\leq 4\end{cases}$ $\hat{x}\in abs\min$, $-\hat{x}\in abs\max$.

13.21. $\hat{T}=1$, $\hat{x}=\begin{cases}-t^2-2t, & -1\leq t\leq 0,\\ t^2-2t, & 0\leq t\leq 1,\end{cases}$ $\hat{x}\in abs\min$.

13.22. $\hat{T}=1$, $\hat{x}=\begin{cases}t^2+2t, & -1\leq t\leq 0,\\ -t^2+2t, & 0\leq t\leq 1,\end{cases}$ $\hat{x}\in abs\min$.

13.23. $\hat{T}=2$, $\hat{x}=\begin{cases}t^2+1, & 0\leq t\leq 1,\\ -t^2+4t-1, & 1\leq t\leq 2,\end{cases}$ $\hat{x}\in abs\min$.

13.24. $\hat{T}=4/\sqrt{3}$, $\hat{x}=\begin{cases}-t^2/2+1, & 0\leq t\leq \sqrt{3},\\ (\sqrt{3}t-4)^2/2-1, & \sqrt{3}\leq t\leq \hat{T},\end{cases}$ $\hat{x}\in abs\min$.

13.25. $\hat{T}=8/\sqrt{3}$, $\hat{x}=\begin{cases}-3t^2/2+3, & 0\leq t\leq 2/\sqrt{3},\\ (t-8\sqrt{3}t)^2/2-5, & 2/\sqrt{3}\leq t\leq 8/\sqrt{3},\end{cases}$ $\hat{x}\in abs\min$.

13.26. $\xi_2\geq 0\Rightarrow \hat{T}=\xi_2$, $\hat{x}=-t^2/2+\xi_2 t+\xi_1\in abs\min$,

$\xi_2<0\Rightarrow \hat{T}=-\xi_2$, $\hat{x}=t^2/2+\xi_2 t+\xi_1\in abs\min$.

13.27. $\xi_1>0\Rightarrow \hat{T}=\xi_2+\sqrt{\xi_2^2+2\xi_1}$, $\hat{x}=-t^2/2+\xi_2 t+\xi_1\in abs\min$,

$\xi_1<0\Rightarrow \hat{T}=-\xi_2+\sqrt{\xi_2^2-2\xi_1}$, $\hat{x}=t^2/2+\xi_2 t+\xi_1\in abs\min$,

$\xi_1=0\Rightarrow \hat{T}=0$.

13.28. $\hat{x}=\begin{cases}0, & 0\leq t\leq 1,\\ -(t-1)^2, & 1\leq t\leq 2,\end{cases}$ $\hat{x}\in abs\min$.

13.29. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ -2t+1, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$.

13.30. $\hat{x} = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 3-(t-2)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$.

13.31. $\hat{x} = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$.

13.32. $\hat{x} = \begin{cases} (t-1)^2, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$.

13.33. $\hat{x} = \begin{cases} 8t^3 - 18t + 11, & 0 \le t \le 1/2, \\ 12(t-1)^2, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$.

13.34. $\hat{x} = \begin{cases} -t^3 + 6t^2, & 0 \le t \le 1, \\ 3t^2 + 3t - 1, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$.

13.35. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2/2, & 0 \le t \le 1/2, \\ t^3/3 - t^2 + t/4 - 1/24, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$ $\hat{x} \in abs\min$.

13.36. $\hat{x} = t \in abs\max$, $\hat{x} = -t \in abs\min$.

13.37. $T_0 < 2 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$, $T_0 \ge 2 \Rightarrow \hat{x} = t\sqrt{2/T_0}$, $\hat{x} \in abs\max$, $-\hat{x} \in abs\min$.

13.38. *Розв'язок*: 1. Приведемо задачу до вигляду

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2 + u^2}{2} + |u| \right) dt \to extr, \quad x' = u, \quad x(1) = \xi.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$£ = \int_0^1 \left(\lambda_0 \left(\frac{x^2 + u^2}{2} + |u| \right) + p(x' - u)\right) dt + \lambda x(1).$$

3. Запишемо необхідні умови: а) рівняння Ейлера $-p' + \lambda_0 x = 0$;

б) трансверсальності по x: $p(0) = 0$; $p(1) = -\lambda$;

в) оптимальності по u:

$$\min_{u \in R} (\lambda_0 (u^2/2 + |u|) - pu) = \lambda_0 ((\hat{u})^2/2 + |\hat{u}|) - p\hat{u}.$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $p \equiv 0$ $\lambda = 0$. Усі множники Лагранжа – нулі. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1$ у задачі на мінімум. Тоді

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & |p| < 1, \\ p-1, & p \geq 1, \\ p+1, & p \leq -1. \end{cases}$$

Оскільки $p(0) = 0$, то $\hat{u}(t) = 0$ при малих t. Отже, $\hat{x}(t) = C$. За умов а), б) $p(t) = Ct$ при таких t. При $t = 1/|C|$ модуль $p(t)$ дорівнює 1. Це точка перемикання керування. Нехай $|p| \geq 1$. Тоді $\hat{u}' = p' \Rightarrow x'' - x = 0$. Із неперервності $\hat{u} = x'$ одержуємо, що $x = Cch(t-1)/|C|)$. Константа C визначається з умови $x(1) = \xi$.

5. Допустима екстремаль: $|\xi| \leq 1 \Rightarrow \hat{x}_{\min} = \xi$;

$$|\xi| > 1 \Rightarrow \hat{x}_{\min} = \begin{cases} C, & 0 \leq t \leq 1/|C|, \\ C(t - 1/|C|), & 1/|C| \leq t \leq 1, \end{cases}$$

де C визначається з рівняння $Cch(t - 1/|C|) = \xi$. Унаслідок опуклості задачі $\hat{x}_{\min} \in abs\min$.

13.39. Оптимальна траєкторія – коло радіуса $T_0/2\pi$.

13.40. Оптимальна траєкторія – еліпс $\sqrt{x^2 + y^2} - \xi y = C$.

13.41. Оптимальна траєкторія – еліпс $(x/b)^2 + (y/a)^2 = R^2$.

13.42. Оптимальна траєкторія – квадрат $|x| + |y| = C$.

13.43. Оптимальна траєкторія – квадрат $|x| = C_1, |y| = C$.

13.44. $\hat{x} = -\dfrac{p}{2}(-\ln(u) + u^2 + 3u^4/4) + 7\dfrac{p}{2}$, $t = -\dfrac{p}{2}(1/u + 2u + u^2)$, $p < 0$.

13.45. Допустимі екстремалі

$$\hat{x}_n(t) = \int_0^t sign(\cos((2n+1)(\pi/2)\tau))d\tau, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \quad \hat{x} \in abs\max.$$

Додаток

Список рекомендованої літератури

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Алексеев В.М., Галеев Э. М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.

2. [АТФ] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.

3. *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960.

4. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

5. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.

6. [КФ] *Колмогоров А.М., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004.

7. *Моклячук М.П.* Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: Либідь, 1994.

8. *Моклячук М.П.* Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: ТВіМС, 2004.

9. *Моклячук М.П.* Основи опуклого аналізу. – К.: ТВіМС, 2004.

10. *Моклячук М.П.* Негладкий аналіз та оптимізація. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008.

11. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., МищенкоЕ.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

12. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума – М.: Наука, 1982.

13. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики : В 6 т. – М.: Наука, 1974. – Т. 4, ч. 1.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н.И.* Вариационное исчисление. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1981.
2. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.
3. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: ИЛ, 1950.
4. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.
5. *Букреєв Б.Я.* Вступ до варіаційного числення. – Харків–Київ: Держтехвидав, 1931.
6. *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы оптимизации. – Минск: Изд-во БГУ, 1981.
8. *Галеев Э.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Едиториал УРСС, 2002.
9. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961.
10. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления – М.; Л.: ГИТТЛ, 1941.
11. *Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О.* Сборник задач по высшей математике : В 3 т. – М.: Гостехиздат, 1947.
12. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973.
13. *Коша А.В.* Вариационное исчисление. – М.: Высш. шк., 1981.
14. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. – Л.: ГИТТЛ, 1950.
15. *Ланцош Л.С.* Вариационные принципы механики. – М.: Наука, 1959.
16. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972.
17. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2000.
18. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970.
19. *Моклячук М.П.* Методы оптимизации. – К.: УМК ВО, 1990.

20. *Пономаренко А.И., Моклячук М.П.* Задачи и упражнения по курсу "Методы оптимизации''. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1978.

21. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980.

22. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.

23. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации – М.: Наука, 1986.

24. *Тер-Крикоров Ф.М.* Оптимальное управление и математическая экономика – М.: Наука, 1977.

25. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1966.

26. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965.

27. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974.

Предметний покажчик

Зміст