Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

М.П. Моклячук

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ТА МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ

Навчальний посібник

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
«Київський університет»
2014

УДК 517.97(075.8)
ББК 22.16 Укр.я73
М74

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України О. А. Бойчук,
д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України П. С. Кнопов

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
(протокол № 8 від 16 вересня 2013 року)

Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
29 листопада 2013 року

Моклячук М.П.

М74 Збірник задач із варіаційного числення та методів оптимізації: навч. посіб. / М. П. Моклячук. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2014. – 256с.

??????????-???

РВЦ «Київський університет»

УДК 517.97(075.8)
ББК 22.16 Укр.я73

Викладено методи розв'язування задач варіаційного числення. Показано як розв'язуються класичні задачі Лагранжа, Больца, ізопериметричні задачі. Наведено основні положення теорії оптимального керування, в основу якої покладений принцип максимуму Понтрягина, узагальнюючий принцип невизначених множників Лагранжа. Користуючись принципом максимуму і методом динамічного програмування розв'язані задачі Майєра, Лагранжа, Больца. Близько 500 задач запропоновано для самостійного розв'язання.

Зміст

Передмова

Цей збірник задач є доповненням до підручника “Варіаційне числення. Екстремальні задачі” з теорії варіаційного числення і методів оптимального керування, що розрахований на студентів університетів, які вивчають дисципліну “Варіаційне числення і методи оптимізації”. У перших двох розділах збірника задач викладено методи знаходження екстремумів функцій багатьох змінних, досліджено задачі на безумовний та умовний екстремуми (задачі з обмеженнями-рівностями і задачі з обмеженнями-нерівностями). Описано необхідні й достатні умови екстремуму функціоналів, метод невизначених множників Лагранжа.

У розділах 3 – 8 досліджуються як класичні задачі варіаційного числення, так і їхні узагальнення. Аналізуються рівняння Ейлера, Ейлера – Пуассона, Ейлера – Остроградського, варіаційні задачі з рухомими границями, ламані екстремалі, ізопериметричні задачі. Викладено необхідні й достатні умови екстремуму в задачах варіаційного числення. У цих розділах розв’язано багато екстремальних задач, які мають практичне значення.

Розділи 9 та 10 присвячено задачам оптимального керування. Описано два підходи до розв’язування таких задач: принцип максимуму Понтрягіна та метод динамічного програмування Беллмана. Розв’язано задачі Майєра, Лагранжа, Больца. Наведено приклади розв’язування екстремальних задач. Серед них, зокрема, задачі про посадку космічного апарата на поверхню Місяця, запуск штучного супутника Землі.

Близько 500 задач запропоновано для самостійного розв’язування. До задач надано вказівки та відповіді.

1. Екстремуми функцій однієї та багатьох змінних

1.1. Основні поняття, пов'язані з екстремальними задачами

Слово *максимум* (від латинського maximum) означає найбільше, а слово *мінімум* (від латинського minimum) — найменше. Ці два поняття об'єднуються терміном *екстремум* (від латинського extremum), що означає крайнє. Користуються ще терміном оптимальний (від латинського optimus), що означає найкращий. Задачі визначення найбільших та найменших величин називають *задачами на екстремум* або екстремальними задачами. Такі задачі виникають у різних областях діяльності людини і тому для їх опису вживаються різні терміни. Щоб користуватися теорією екстремальних задач, необхідно описати задачу мовою математики. Цей процес називається формалізацією задачі.

Формалізована задача складається з таких елементів.

1. Функціонала якості $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$.
2. Області X визначення функціонала f.
3. Обмеження: $C \subset X$.

Тут $\overline{\mathbb{R}}$ — розширена числова пряма, тобто множина всіх дійсних чисел, доповнена значеннями $+\infty$ та $-\infty$; C — підмножина області визначення функціонала f. Таким чином формалізувати екстремальну задачу — це чітко визначити та описати елементи f, C, X. Формалізовану задачу записують у вигляді

$$f(x) \to \inf \ (\sup), \quad x \in C. \tag{1.1}$$

Точки множини C називаються *допустимими точками* задачі (1.1). Якщо $C = X$, то допустимими будуть усі точки області визначення функціонала. Задача (1.1) у такому разі називається *задачею без обмежень.*

Задачу на максимум завжди можна звести до задачі на мінімум, замінивши функціонал f на функціонал $g(x) = -f(x)$.

І навпаки задачу на мінімум таким самим чином можна звести до задачі на максимум. Якщо необхідні умови екстремуму в задачах на мінімум та максимум різні, то виписуємо їх тільки для задачі на мінімум. Якщо необхідно дослідити обидві задачі, то записують

$$f(x) \to \mathrm{extr}, \quad x \in C.$$

Допустима точка $\hat{x}$ є точкою *абсолютного* або *глобального мінімуму* (максимуму) екстремальної задачі, якщо для будь-якого $x \in C$ виконується нерівність

$$f(x) \geq f(\hat{x}) \quad \big(f(x) \leq f(\hat{x})\big).$$

Тоді пишемо $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$ (absmax). Точка абсолютного мінімуму (максимуму) називається *розв'язком задачі*. Величина $f(\hat{x})$, де $\hat{x}$ — розв'язок задачі, називається *числовим значенням* задачі. Цю величину позначають $S_{\min}$ ($S_{\max}$).

Крім глобальних, вивчають і локальні екстремуми. Нехай X — нормований простір. У точці $\hat{x}$ досягається *локальний мінімум* (*максимум*) задачі, $\hat{x} \in \mathrm{locmin}$ ($\hat{x} \in \mathrm{locmax}$), якщо $\hat{x} \in C$ та існує таке число $\delta > 0$, що для будь-якої допустимої точки $x \in C$, яка задовольняє умову $\|x - \hat{x}\| < \delta$, виконується нерівність

$$f(x) \geq f(\hat{x}) \quad \Bigg(f(x) \leq f(\hat{x})\Bigg).$$

Інакше кажучи, якщо $\hat{x} \in \mathrm{locmin}$ (locmax), то існує окіл $O_{\hat{x}}$ точки $\hat{x}$ такий, що

$$\hat{x} \in \mathrm{absmin} \ \big(\mathrm{absmax}\big)$$

у задачі

$$f(x) \to \inf \ \big(\sup\big), \quad x \in C \cap O_{\hat{x}}.$$

Теорія екстремальних задач дає загальні правила розв'язання екстремальних задач. Теорія необхідних умов екстремуму більше розвинута ніж теорія достатніх умов екстремуму. Необхідні умови екстремуму дозволяють виділити множину точок, серед яких міститься розв'язок задачі. Така множина називається *критичною*, а самі точки — *критичними*. Як правило, критична множина містить не дуже багато точок і розв'язок задачі можна знайти, користуючись тим чи іншим методом.

1.2. Екстремуми функції однієї змінної

Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція однієї змінної.

Означення 1.1. Функція f називається *напівнеперервною знизу* (*напівнеперервною зверху*) у точці $\hat{x}$, якщо для всіх $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ справджується нерівність

$$f(x) > f(\hat{x}) - \varepsilon \quad \Big(f(x) < f(\hat{x}) + \varepsilon\Big).$$

Означення 1.2 (еквівалентне)**.** Функція f називається напівнеперервною знизу (зверху) у точці $\hat{x}$, якщо для всіх $a \in R$, $a < f(\hat{x})$ $(a > f(\hat{x}))$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ справджується нерівність

$$f(x) > a \quad \Big(f(x) < a\Big).$$

Якщо функція набуває значень у $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, то означення 1.2 має сенс тоді, коли $f(\hat{x}) = +\infty$ $(f(\hat{x}) = -\infty)$. Якщо ж $f(\hat{x}) = -\infty$ $(f(\hat{x}) = +\infty)$, то функція вважається напівнеперервною знизу (зверху) за домовленістю.

Наведемо такі приклади.

1. Функція $y = [x]$ (ціла частина від x) напівнеперервна зверху в точках розриву.

2. Функція $y = \{x\}$ (дробова частина від x) напівнеперервна знизу в точках розриву.

3. Функція Діріхле, що дорівнює 0 в раціональних точках та 1 в ірраціональних точках, напівнеперервна знизу в кожній раціональній точці і напівнеперервна зверху в кожній ірраціональній точці.

4. Якщо функція $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ має локальний мінімум (максимум) у точці $\hat{x}$, то вона напівнеперервна знизу (зверху) у точці $\hat{x}$.

5. Функція $f(x) = \frac{1}{|x|}$ при $x \neq 0$, $f(0) = +\infty$, напівнеперервна знизу в точці 0. Якщо визначити функцію в точці 0 як $f(0) = b$ або $f(0) = -\infty$, то вона залишиться напівнеперервною знизу.

Теорема 1.1. *Нехай f, g — напівнеперервні знизу функції. Тоді маємо таке:*
1) функція $f+g$ напівнеперервна знизу;
2) функція αf напівнеперервна знизу при $\alpha \geq 0$ і напівнеперервна зверху при $\alpha \leq 0$;
3) функція $f \cdot g$ напівнеперервна знизу, якщо $f \geq 0$, $g \geq 0$;
4) функція $1/f$ напівнеперервна зверху, якщо $f > 0$;
5) функції $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ напівнеперервні знизу;
6) функції $\sup\{f_i\}$ $\Big(\inf\{f_i\}\Big)$ напівнеперервні знизу (зверху), якщо f_i напівнеперервні знизу (зверху).

Теорема 1.2 (теорема Вейєрштрасса). *Напівнеперервна знизу (зверху) на відрізку $[a, b]$ функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обмежена знизу (зверху) на $[a, b]$ і досягає найменшого (найбільшого) значення.*

Теорема 1.3 (теорема Ферма). *Якщо $\hat{x}$ — точка локального екстремуму диференційовної в точці $\hat{x}$ функції $f(x)$, то похідна $f'(\hat{x}) = 0$.*

Теорема Ферма дає необхідну умову першого порядку існування локального екстремуму функції $f(x)$ у точці $\hat{x}$. Наступні теореми дають необхідні та достатні умови екстремуму другого порядку.

Теорема 1.4 (необхідні умови другого порядку). *Якщо $\hat{x}$ — точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$, що має в точці $\hat{x}$ другу похідну, то*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) \geq 0 \quad \Big(f''(\hat{x}) \leq 0\Big).$$

Теорема 1.5 (достатні умови другого порядку). *Якщо функція $f(x)$ має в точці $\hat{x}$ другу похідну і*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) > 0 \quad \Big(f''(\hat{x}) < 0\Big),$$

то $\hat{x}$ — точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$.

Необхідні та достатні умови вищого порядку існування екстремуму функції $f(x)$ наведені в наступних теоремах.

Теорема 1.6 (необхідні умови вищого порядку). *Якщо $\hat{x}$ — точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$, яка має в цій точці $\hat{x}$ похідну порядку n, то або*

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0,$$

або

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0,$$
$$f^{(2m)}(\hat{x}) > 0 \quad \left(f^{(2m)}(\hat{x}) < 0\right)$$

при деякому $m \geq 1$, $2m \leq n$.

Теорема 1.7 (достатні умови вищого порядку). *Якщо функція $f(x)$ має в точці $\hat{x}$ похідну порядку n і*

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0,$$
$$f^{(2m)}(\hat{x}) > 0 \quad \left(f^{(2m)}(\hat{x}) < 0\right)$$

при деякому $m \geq 1$, $2m \leq n$, то функція $f(x)$ досягає в точці $\hat{x}$ локального мінімуму (максимуму).

1.3. Екстремуми функцій n змінних

Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — функція n дійсних змінних.

Означення 1.3. Функція f називається *напівнеперервною знизу* (*напівнеперервною зверху*) у точці $\hat{x}$, якщо існує δ-окіл

$$O_{\hat{x}} = \{x\colon \|x - \hat{x}\| < \delta\}, \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

точки x такий, що для всіх $x \in O_{\hat{x}}$ виконується нерівність

$$f(x) > f(\hat{x}) - \varepsilon \quad \left(f(x) < f(\hat{x}) + \varepsilon\right).$$

Теорема 1.8. *Функція* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *є неперервною знизу на* $\mathbb{R}^n$ *тоді і тільки тоді, коли для кожного* $a \in \mathbb{R}$ *множина* $f^{-1}((a, +\infty])$ *відкрита або доповнювальна множина* $f^{-1}((-\infty, a])$ *замкнута.*

Теорема 1.9 (теорема Вейєрштрасса). *Напівнеперервна знизу (зверху) функція на непорожній обмеженій замкнутій підмножині простору* $\mathbb{R}^n$ *обмежена знизу (зверху) і досягає найменшого (найбільшого) значення.*

Теорема 1.10 (теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція* f *напівнеперервна знизу і для деякого числа* a *множина* $\{x\colon f(x) \le \le a\}$ *непорожня та обмежена, то функція* $f(x)$ *досягає свого абсолютного мінімуму.*

Наслідок 1.1. *Якщо функція* f *напівнеперервна знизу (зверху) на* $\mathbb{R}^n$ *і справджується співвідношення*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = -\infty\right),$$

то f *досягає свого мінімуму (максимуму) на кожній замкнутій підмножині простору* $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.11 (необхідні умови першого порядку). *Якщо* $\hat{x}$ *— точка локального екстремуму функції* $f(x)$, *диференційовної в точці* $\hat{x}$, *то всі частинні похідні функції* f *дорівнюють нулю в точці* $\hat{x}$:

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0.$$

Теорема 1.12 (необхідні умови другого порядку). *Якщо* $\hat{x}$ *— точка локального мінімуму функції* $f(x)$ *і ця функція диференційовна два рази в точці* $\hat{x}$, *то виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} h_k h_j \ge 0 \quad \forall\ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ця умова означає, що матриця

$$f''(\hat{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} \right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$$

невід'ємно визначена.

Теорема 1.13 (достатні умови другого порядку). *Нехай функція* $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *диференційовна два рази в точці* $\hat{x}$ *і виконуються умови:*

$$1)\quad \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0;$$

$$2)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} h_k h_j > 0 \quad \forall\ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0.$$

Тоді $\hat{x}$ *— точка локального мінімуму задачі на екстремум*

$$f(x) \to \inf, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Умова 2) теореми означає, що матриця

$$f''(\hat{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} \right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$$

додатно визначена.

Теорема 1.14 (критерій Сільвестра). *Матриця* A *додатно визначена тоді і тільки тоді, коли її головні мінори додатні. Матриця* A *від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли* $(-1)^k \det A_k > 0$,

$$A_k = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{1,k}}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Запишемо ряд головних мінорів матриці A

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тоді можливі такі варіанти:

1) матриця A додатно визначена, якщо

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0;$$

2) матриця A від'ємно визначена, якщо

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0;$$

3) матриця A невід'ємно (недодатно) визначена, якщо

$$\Delta_1 \geq 0,\ \Delta_2 \geq 0, \ldots, \Delta_n \geq 0 \quad \left(\Delta_1 \leq 0,\ \Delta_2 \geq 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n \geq 0\right)$$

та існує таке j, що $\Delta_j = 0$;
4) матриця A невизначена.

Приклад 1.1. Дослідити на екстремум функцію двох змінних

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \to \operatorname{extr}.$$

Розв'язання. Функція неперервна. Очевидно, що $S_{\max} = +\infty$. Згідно з наслідком 1.1 із теореми Вейєрштрасса мінімум досягається. Необхідні умови першого порядку

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_2} = 0$$

мають вигляд

$$3x_1^2 - 3x_2 = 0, \quad 3x_2^2 - 3x_1 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, визначаємо критичні точки $(0,0)$, $(1,1)$. Щоб скористатися з умов другого порядку, обчислимо матриці, складені з других похідних:

$$A(\hat{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_k \partial x_j} \right\}_{k,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 6\hat{x}_1 & -3 \\ -3 & 6\hat{x}_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = A(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця A_1 не є невід'ємно визначеною. Тому точка $(0,0)$ не задовольняє необхідні умови максимуму другого порядку. Точка не може бути розв'язком задачі, $(0,0) \notin \operatorname{locextr} f$.

Матриця A_2 додатно визначена, отже, згідно з теоремою 1.13 у точці $(1,1)$ досягається локальний мінімум задачі.

Відповідь. $(0,0) \notin \operatorname{locextr}$; $(1,1) \in \operatorname{locmin}$.

1.4. Задачі на умовний екстремум. Метод невизначених множників Лагранжа

1.4.1. Задачі з обмеженнями-рівностями

Нехай $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, — диференційовні функції n дійсних змінних. *Задачею на умовний екстремум (з обмеженнями-рівностями) називається задача*

$$f_0(x) \to \text{extr}, \quad f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0. \tag{1.2}$$

Точки $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, які задовольняють рівняння $f_k(\hat{x}) = 0$, $k = \overline{1, m}$, називаються *допустимими* в задачі (1.2). Допустима точка $\hat{x}$ дає локальний мінімум (максимум) задачі (1.2), якщо існує таке число $\delta > 0$, що для всіх допустимих $x \in R^n$, які задовольняють умову $f_k(x) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\|x - \hat{x}\| < \delta$, виконується нерівність

$$f(x) \geq f(\hat{x}) \quad \Big(f(x) \leq f(\hat{x})\Big).$$

Основним методом розв'язування задач на умовний екстремум є *метод невизначених множників Лагранжа.* Він базується на тому, що умовний екстремум у задачі (1.2) досягається в точках, які є критичними у задачі на *безумовний екстремум*:

$$L(x, \lambda, \lambda_0) \to \text{extr},$$

де $L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x)$ — *функція Лагранжа*; $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ — *множники Лагранжа.*

Теорема 1.15 (теорема Лагранжа). *Нехай $\hat{x}$ — точка локального екстремуму задачі (1.2), а функції $f_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, неперервно диференційовні в деякому околі U точки $\hat{x}$. Тоді існують одночасно не рівні нулю такі множники Лагранжа $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$, що виконується умова стаціонарності по x функції Лагранжа:*

$$L_x(\hat{x}, \lambda, \lambda_0) = 0 \iff \frac{\partial L(\hat{x}, \lambda, \lambda_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Для того, щоб множник Лагранжа $\lambda_0 \neq 0$, достатньо, щоб вектори з частинних похідних $f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})$ були лінійно незалежними.

Таким чином, для визначення $m+n+1$ невідомих $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ та $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ дістали $n+m$ рівнянь

$$f_1(\hat{x}) = \cdots = f_m(\hat{x}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(\hat{x})\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Варто врахувати, що множники Лагранжа визначені з точністю до пропорційності. Якщо відомо, що $\lambda_0 \neq 0$, то можна вибрати $\lambda_0 = 1$. Тоді кількість рівнянь і кількість невідомих однакова.

Лінійна незалежність векторів частинних похідних $f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})$ є тією умовою регулярності, яка гарантує, що множник Лагранжа $\lambda_0 \neq 0$. Однак перевірити цю умову значно складніше, ніж безпосередньо переконатися в тому, що множник Лагранжа λ_0 не може дорівнювати нулю. Зауважимо, що з часів Лагранжа, майже ціле століття, правило множників використовувалося з $\lambda_0 = 1$, не дивлячись на те, що в загальному випадку воно невірне.

Як і у випадку безумовної задачі оптимізації, стаціонарні точки задачі на умовний екстремум не обовязково є її розв'язками. Тут також існують необхідні і достатні умови оптимальності в термінах других похідних. Позначимо через

$$L''_{xx}(x, \lambda, \lambda_0) = \left\{ \frac{\partial^2 L(x, \lambda, \lambda_0)}{\partial x_k \partial x_j} \right\}_{j=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,n}$$

матрицю других похідних функції Лагранжа $L(x, \lambda, \lambda_0)$.

Теорема 1.16 (необхідні умови другого порядку). *Нехай функції $f_i(x), i = 0, 1, \ldots, m$, двічі диференційовні в точці $\hat{x}$ і неперервно диференційовні в деякому околі U точки $\hat{x}$, причому градієнти $f_i'(\hat{x}), i = 1, \ldots, m$, лінійно незалежні. Якщо $\hat{x}$ – локальний мінімум задачі* (1.2), *то*

$$\langle L''_{xx}(\hat{x}, \lambda_0, \lambda) h, h \rangle \geq 0$$

при всіх λ, λ_0, що задовольняють умову

$$L'_x(\hat{x}, \lambda, \lambda_0) = 0,$$

і всіх $h \in \mathbb{R}^n$ *таких, що*

$$\langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Теорема 1.17 (достатні умови другого порядку). *Нехай функції* $f_i(x), i = 0, 1, \ldots, m$, *двічі диференційовні в точці* $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, *яка задовольняє умови*

$$f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Припустимо, що при деяких λ, λ_0 *виконується умова*

$$L_x'(\hat{x}, \lambda, \lambda_0) = 0,$$

і, крім того,

$$\langle L_{xx}''(\hat{x}, \lambda, \lambda_0)h, h \rangle > 0$$

при всіх ненульових $h \in \mathbb{R}^n$, *що задовольняють умову*

$$\langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тоді $\hat{x}$ *– локальний розв'язок задачі* (1.2).

Правило невизначених множників Лагранжа розв'язування задач на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями таке.

1. Скласти функцію Лагранжа
$$L(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x).$$

2. Записати необхідні умови екстремуму функції $L(x, \lambda, \lambda_0)$ — рівняння
$$\frac{\partial}{\partial x_j} L(x, \lambda, \lambda_0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

3. Знайти стаціонарні точки, тобто розв'язки цих рівнянь за умови, що не всі множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ дорівнюють нулю.

4. Знайти розв'язок задачі серед стаціонарних точок або довести, що задача не має розв'язків.

1.4.2. Задача з рівностями та нерівностями

Нехай $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — диференційовні функції n дійсних змінних. Задачею *на умовний екстремум із рівностями та нерівностями* називається така задача:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\to \inf, \\ f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ f_{m+k}(x) &= 0, \quad k = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Сформулюємо необхідні умови мінімуму для задачі (1.3).

Теорема 1.18 (про невизначені множники Лагранжа). *Нехай $\hat{x}$ — точка локального мінімуму задачі* (1.3), *а функції $f_i(x)$, $i = 0, \ldots, m + s$, неперервно диференційовні в деякому околі U точки $\hat{x}$. Тоді існують одночасно не рівні нулю множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+s}$ такі, що для функції Лагранжа*

$$L(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_{m+s}) = \sum_{i=0}^{m+s} \lambda_i f_i(x)$$

виконуються умови:
1) стаціонарності по x

$$L_x(\hat{x}, \lambda) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial L(\hat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

2) доповнювальної нежорсткості

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

3) невід'ємності

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Правило невизначених множників Лагранжа розв'язування задач на умовний екстремум з рівностями та нерівностями таке.

1. Скласти функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m+s} \lambda_i f_i(x).$$

2. Записати необхідні умови:

(a) стаціонарності

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

(b) доповнювальної нежорсткості

$$\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

(c) невід'ємності

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, m.$$

3. Знайти критичні точки, тобто всі допустимі точки, що задовольняють необхідні умови з множником Лагранжа $\lambda_0 = 0$ та $\lambda_0 \neq 0$.

4. Знайти розв'язок задачі серед усіх критичних точок або показати, що розв'язків немає.

Зауваження 1.1. Користуючись правилом невизначених множників Лагранжа розв'язування задач на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями, можна вибирати число λ_0 як додатне, так і від'ємне. Для задач, де є обмеження рівності та нерівності, знак λ_0 істотний.

Приклад 1.2. Розв'язати задачу на умовний екстремум

$$x_1 \to \inf, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Розв'язання. Єдиним очевидним розв'язком цієї задачі є точка $\hat{x} = (0, 0)$.

Розв'яжемо задачу методом Лагранжа.

1. Складемо функцію Лагранжа $L = \lambda_0 x_1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2)$.

2. Запишемо рівняння стаціонарності

$$L'_{x_1} = 0 \iff 2\lambda x_1 + \lambda_0 = 0,$$
$$L'_{x_2} = 0 \iff 2\lambda x_1 = 0.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 1$, то дістанемо рівняння

$$2\lambda x_1 + 1 = 0, \quad 2\lambda x_2 = 0.$$

Перше рівняння несумісне з умовою $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Тому система рівнянь

$$\begin{aligned} 2\lambda x_1 + 1 &= 0, \\ 2\lambda x_2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

розв'язків не має. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ — розв'язок системи рівнянь.

Відповідь. $(0,0) \in \operatorname{absmin}$.

Цей приклад показує, що складаючи функцію Лагранжа, не завжди можна брати $\lambda_0 = 1$.

Приклад 1.3. Розв'язати екстремальну задачу

$$\frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 \to \min, \quad x_1^3 + x_2^3 = 1,$$

де $a > 0$ і $b > 0$ – задані числа.

Розв'язання.

1. Випишемо (регулярну) функцію Лагранжа (указана в теоремі 1.15 умова регулярності тут виконана):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - 1).$$

2. Оскільки

$$L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = ax_1 + 3\lambda x_1^2, \quad L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = bx_2 + 3\lambda x_2^2,$$

то система рівнянь для визначення x_1, x_2, λ така:

$$\begin{aligned} 2ax_1 + 3\lambda x_1^2 &= 0, \\ bx_2 + 3\lambda x_2^2 &= 0, \\ x_1^3 + x_2^3 &= 1. \end{aligned}$$

3. Ця система рівнянь має три розв'язки:

$$\left(0, 1, -\frac{b}{3}\right), \left(1, 0, -\frac{a}{3}\right),$$

$$\left(\frac{a}{(a^3+b^3)^{1/3}}, \frac{b}{(a^3+b^3)^{1/3}}, -\frac{(a^3+b^3)^{1/3}}{3}\right).$$

4. Далі знаходимо

$$L''_{xx}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} a + 6\lambda x_1 & 0 \\ 0 & b + 6\lambda x_2 \end{bmatrix}.$$

Для зазначених розв'язків ця матриця набуває відповідно вигляду

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Умова $\langle f_i'(\hat{x}), h \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m$, у цьому прикладі така:

$$3x_1^2 h_1 + 3x_2^2 h_2 = 0.$$

Для перших двох розв'язків це означає, що $h_2 = 0$ і $h_1 = 0$ відповідно. Звідси зрозуміло, що матриці A_1 і A_2 задовольняють умову теореми 1.17 (хоча вони не є додатно визначеними). Тому точки $(0, 1)$, $(1, 0)$ — строгі локальні розв'язки задачі. Для матриці A_3 умова теореми 1.17 не виконується. Тому точка

$$\left(\frac{a}{(a^3+b^3)^{1/3}}, \frac{b}{(a^3+b^3)^{1/3}}\right)$$

не може бути розв'язком задачі на мінімум. Ця точка є строгим локальним розв'язком задачі максимізації тієї самої функції при тих самих обмеженнях.

Відповідь. $\hat{x}_1 = (0, 1) \in \text{locmin}$, $\hat{x}_2 = (1, 0) \in \text{locmin}$,
$\hat{x}_3 = \big(a/(a^3+b^3)^{1/3}, b/(a^3+b^3)^{1/3}\big) \in \text{locmax}$.

Приклад 1.4. Розв'язати екстремальну задачу

$$\begin{gathered} x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \inf; \\ 2x_1-x_2+x_3 \le 5, \\ x_1+x_2+x_3=3. \end{gathered}$$

Розв'язання.

1. Складемо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\lambda_1(2x_1-x_2+x_3-5)+\lambda_2(x_1+x_2+x_3-3).$$

2. Запишемо необхідні умови:

(a) стаціонарності

$$\begin{aligned} L'_{x_1}=0 &\iff 2\lambda_0 x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0, \\ L'_{x_2}=0 &\iff 2\lambda_0 x_2+\lambda_2-\lambda_1=0, \\ L'_{x_3}=0 &\iff 2\lambda_0 x_3+\lambda_2+\lambda_1=0; \end{aligned}$$

(b) доповнювальної нежорсткості

$$\lambda_1(2x_1-x_2+x_3-5)=0;$$

(c) невід'ємності $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то згідно з умовою стаціонарності $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Тоді всі множники Лагранжа — нулі. Це суперечить умові теореми. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. Якщо $\lambda_1 \ne 0$, то за умови доповнювальної нежорсткості $2x_1-x_2+x_3-5=0$. Виразимо x_1, x_2, x_3 через λ_1, λ_2 і підставимо в рівняння

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1-x_2+x_3=5. \end{gathered}$$

Дістанемо $\lambda_1 = -9/14 < 0$. А це суперечить умові невід'ємності. Нехай $\lambda_1 = 0$, тоді $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ — критична точка.

4. Функція $f(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. За наслідком з теореми Вейєрштрасса розв'язок задачі існує. Оскільки критична точка єдина, то розв'язком задачі може бути лише вона.
Відповідь. $\hat{x} = (1,1,1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 3$.

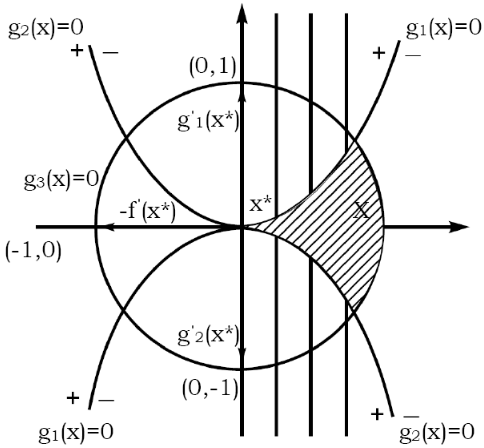


Рис. 1: Приклад 1.5

Приклад 1.5 (*приклад нерегулярної задачі*). Розглянемо екстремальну задачу

$$
\begin{gathered}
f(x_1, x_2) = x_1 \to \min, \\
g_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 \leq 0, \\
g_2(x_1, x_2) = -x_1^3 - x_2 \leq 0, \\
g_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0.
\end{gathered}
$$

На рис. 1 зображені допустима множина задачі й лінії рівня цільової функції. Розв'язком задачі є точка $\hat{x} = (0, 0)$. Активними в цій точці є перше і друге обмеження. При цьому

$$
f'(\hat{x}) = f'(0,0) = (1,0), \quad g_1'(\hat{x}) = g_1'(0,0) = (0,1),
$$

$$
g_2'(\hat{x}) = g_2'(0,0) = (0,-1).
$$

Вектор $f'(\hat{x}) = f'(0,0) = (1,0)$ не можна записати у вигляді лінійної комбінації векторів $g_1'(\hat{x}) = g_1'(0,0) = (0,1)$, $g_2'(\hat{x}) = g_2'(0,0) = (0,-1)$. Співвідношення

$$
\lambda_0 f'(\hat{x}) + \lambda_1 g_1'(\hat{x}) + \lambda_2 g_2'(\hat{x}) + \lambda_3 g_3'(\hat{x}) = 0
$$

в точці $\hat{x} = (0, 0)$ може виконуватися лише при

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\lambda, \lambda_3 = 0.$$

Градієнти $g_1'(\hat{x}) = g_1'(0,0) = (0,1)$, $g_2'(\hat{x}) = g_2'(0,0) = (0,-1)$ у даному випадку лінійно залежні.

Відповідь. $\hat{x} = (0,0) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = 0$.

Приклад 1.6. Розв'язати екстремальну задачу

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_2 \to \min, \\ g_1(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ g_2(x_1, x_2) &= -x_1 + x_2^2 \le 0, \\ g_3(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Умова Слейтера виконується. Тому запишемо регулярну функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(-x_1 + x_2^2) + \lambda_3(-x_1 - x_2).$$

Необхідні умови екстремуму (стаціонарності, доповнювальної нежорсткості, невід'ємності) дають таку систему співвідношень для визначення стаціонарних точок:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, &\quad 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 \ge 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, &\quad \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2 \ge 0, \quad -x_1 + x_2^2 \le 0, &\quad \lambda_2(-x_1 + x_2^2) = 0, \\ \lambda_3 \ge 0, \quad x_1 + x_2 \ge 0, &\quad \lambda_3(x_1 + x_2) = 0. \end{aligned}$$

На рис. 2 зображені допустима множина задачі й лінії рівня цільової функції. Точка $x = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ є розв'язком системи. У цій точці перше і третє співвідношення активні: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, а друге – пасивне: $-x_1 + x_2^2 < 0$. Тому тут $\lambda_2 = 0$. У результаті одержимо таку систему для визначення λ_1 и λ_3:

$$\sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad 1 - \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0.$$

Ця система має розв'язок $\lambda_1 = \sqrt{2}/4$, $\lambda_3 = 1/2$. Точка $x = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ є розв'язком задачі. Переконайтеся в тому, що інших стаціонарних точок і, отже, розв'язків задачі немає.

Відповідь. $\hat{x} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = -\sqrt{2}/2$.

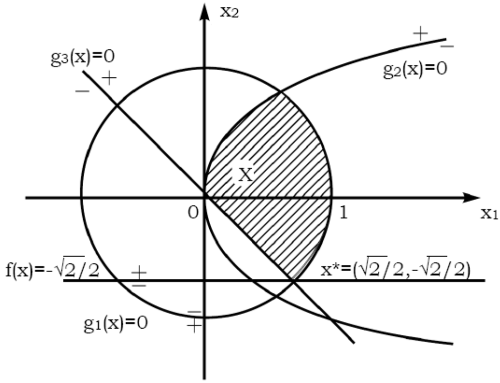


Рис. 2: Приклад 1.6

Приклад 1.7. Нехай числа $a > 0$, $b > 0$, причому $a < b$. Знайти точки локального мінімуму і максимуму функції

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2$$

на множині розв'язків системи

$$x_1^3 + x_2^3 \le 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \ge 1.$$

Позначимо цю множину через X. Випишемо функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 \left(\frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2\right) + \lambda_1 \left(x_1^3 + x_2^3 - 1\right) + \lambda_2 \left(-x_1^2 - x_2^2 + 1\right).$$

Система для визначення стаціонарних точок має вигляд

$$a\lambda_0 x_1 + 3\lambda_1 x_1^2 - 2\lambda_2 x_1 = 0,$$

$$b\lambda_0 x_2 + 3\lambda_1 x_2^2 - 2\lambda_2 x_2 = 0,$$

$$\lambda_1 \ge 0, \quad x_1^3 + x_2^3 \le 1, \quad \lambda_1 \left(x_1^3 + x_2^3 - 1\right) = 0,$$

$$\lambda_2 \ge 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \ge 1, \quad \lambda_2 \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) = 0,$$

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \ne 0.$$

Нехай $x_1 = 0$. Тоді з цієї системи випливає, що $x_2 \leq 1, x_2^2 \geq 1$. Це можливо при $x_2 = 1$ або $x_2 \leq -1$. Інакше $\lambda_1 = 0$. Якщо при цьому $x_2 < -1$, то $\lambda_2 = 0$. Але тоді $\lambda_1 = 0$, що суперечить умовам задачі. Тепер легко знаходимо перші дві групи розв'язків системи:
1) $x_1 = 0, x_2 = 1, b\lambda_0 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$;
2) $x_1 = 0, x_2 = -1, b\lambda_0 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$.
Аналогічно, вважаючи $x_2 = 0$, знаходимо ще дві групи розв'язків системи:
3) $x_1 = 1, x_2 = 0, a\lambda_0 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, (\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$;
4) $x_1 = -1, x_2 = 0, a\lambda_0 - 2\lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$.

Припустимо тепер, що $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. Тоді рівняння системи можна записати так:

$$a\lambda_0 + 3\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad b\lambda_0 + 3\lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 = 0.$$

Якщо тут $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0 = 0$, оскільки $a \neq b$. Але тоді $\lambda_2 = 0$, що суперечить системі умов. Залишається припустити, що $\lambda_1 > 0$. Тоді $x_1^3 + x_2^3 = 1$. Враховуючи, що $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, одержуємо $x_1^2 + x_2^2 > 1$, і тому $\lambda_2 = 0$. Тепер отримуємо ще одну групу розв'язків системи:
5) $x_1 = a/\sqrt[3]{a^3 + b^3}, x_2 = b/\sqrt[3]{a^3 + b^3}$, $\lambda_0 < 0$, $\lambda_1 = -\lambda_0 \sqrt[3]{a^3 + b^3}/3$, $\lambda_2 = 0$.

Відмітимо, що в 1) і 3) множник λ_0 може набувати як додатних, так і від'ємних значень, у 2) і 4) – лише додатних, а у 5) – лише від'ємних. Тому $(0, 1)$ та $(1, 0)$ – стаціонарні точки як у задачі мінімізації, так і в задачі максимізації, точки $(0, -1)$ та $(-1, 0)$ – лише в задачі мінімізації, а точка із 5) – лише в задачі максимізації.

Тепер проведемо дослідження стаціонарних точок на оптимальність. Функція f сильно опукла в $\mathbb{R}^2$. Тому вона досягає глобального мінімуму на будь-якій замкнутій множині X. Обчислимо значення f у стаціонарних точках задачі мінімізації:
$f(0, 1) = f(0, -1) = b/2, \ f(1, 0) = f(-1, 0) = a/2$.
Оскільки $a < b$, то звідси випливає, що $(1, 0)$ і $(-1, 0)$ – точки глобального мінімуму функції f на X.

Зобразимо функцію f у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2}a\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2}(b - a)x_2^2.$$

Якщо рухатимемось із точок $(0,1)$ та $(0,-1)$, залишаючись на колі $x_1^2+x_2^2=1$, а значить і в області X, то значення функції f буде зменшуватися. Отже, ці точки не є точками локального мінімуму функції f на множині X. Водночас при будь-якому $\varepsilon>0$ точка $(\varepsilon,1)$ належить множині X та $f(0,1)<f(-\varepsilon,1)$. Тому точка $(0,1)$ не є точкою локального максимуму функції f на множині X. Отже, стаціонарні точки $(0,1)$ та $(0,-1)$ виявилися "сторонніми".

Дослідимо тепер матрицю других похідних функції Лагранжа:

$$L''_{xx}=\begin{bmatrix} a\lambda_0+6\lambda_1x_1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & b\lambda_0+6\lambda_1x_1-\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

При значеннях параметрів із 5) матриця має вигляд

$$L''_{xx}=\begin{bmatrix} -a\lambda_0 & 0 \\ 0 & -b\lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\lambda_0<0$, то ця матриця додатно визначена. Тому виконуються достатні умови екстремуму і $(a/\sqrt{3}a^3+b^3, b/\sqrt{3}a^3+b^3)$ – точка строгого локального максимуму функції f на множині X.

Відповідь. $(1,0)\in\text{absmin}$, $(-1,0)\in\text{absmin}$,
$\hat{x}=(a/\sqrt[3]{a^3+b^3}, b/\sqrt[3]{a^3+b^3})\in\text{locmax}$.

1.5. Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі на екстремум.

1.1. $f(x,y)=x^4+y^4-4xy\to\text{extr}$.

1.2. $f(x,y)=ae^{-x}+be^{-y}+\ln(e^x+e^y)\to\text{extr}$.

1.3. $f(x,y)=(x+y)(x-a)(y-b)\to\text{extr}$.

1.4. $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5\to\text{extr}$.

1.5. $f(x,y)=x+y+4\sin(x)\sin(y)\to\text{extr}$.

1.6. $f(x,y)=xe^x-(1+e^x)\cos(y)\to\text{extr}$.

1.7. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\to\text{extr}$.

1.8. $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)\to\text{extr}$.

1.9. $f(x,y)=x-2y+\ln(\sqrt{x^2+y^2})+3\text{arctg}(y/x)\to\text{extr}$.

1.10. $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)\to\text{extr}$,
$0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi$.

1.11. $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y) + \cos(x-y) \to \text{extr}$,
$0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/2$.
1.12. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln(x) - 10\ln(y) \to \text{extr}$.
1.13. $f(x,y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+y^2+xy)} \to \text{extr}$.
1.14. $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y) \to \text{extr}$.
1.15. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) \to \text{extr}$.
1.16. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \to \text{extr}$.
1.17. $f(x,y) = (ax + by + c)/\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \to \text{extr}$.
1.18. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2} \to \text{extr}$.
1.19. $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2 \to \text{extr}$.
1.20. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to \text{extr}$.
1.21. $f(x,y) = xy + 50/x + 20/y \to \text{extr}$.
1.22. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y \to \text{extr}$.
1.23. $f(x,y) = 5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \to \text{extr}$.
1.24. $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to \text{extr}$.
1.25. $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2 \to \text{extr}$.
1.26. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to \text{extr}$.
1.27. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 2z \to \text{extr}$.
1.28. $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) \to \text{extr}, a > 0$.
1.29. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \to \text{extr}, x > 0, y > 0, z > 0$.
1.30. $f(x,y,z) = x + y^2/4x + z^2/y + 2/z \to \text{extr}$.
1.31. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z \to \text{extr}$.
1.32. $f(x,y) = y \to \text{extr}, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
1.33. $f(x,y) = x^3 + y^3 \to \text{extr}, \quad ax + by = 1, a > 0, b > 0$.
1.34. $f(x,y) = x^3/3 + y \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 = a, a > 0$.
1.35. $f(x,y) = x\sin(y) \to \text{extr}, \quad 3x^2 - 4\cos(y) = 1$.
1.36. $f(x,y) = x/a + y/b \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 = 1$.
1.37. $f(x,y) = x^2 + y^2 \to \text{extr}, \quad x/a + y/b = 1$.
1.38. $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 = 1$.
1.39. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2 \to \text{extr}, \quad 4x^2 + y^2 = 25$.
1.40. $f(x,y) = \cos^2(x) + \cos^2(y) \to \text{extr}, \quad x - y = \pi/4$.
1.41. $f(x,y) = x/2 + y/3 \to \text{extr}, \quad x^2 + y^2 = 1$.
1.42. $f(x,y) = x^2 + y^2 \to \text{extr}, \quad 3x + 4y = 1$.
1.43. $f(x,y) = e^{xy} \to \text{extr}, \quad x + y = 1$.
1.44. $f(x,y) = 5x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}, \quad x + y = 1$.
1.45. $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + y^2 \to \text{extr}, \quad x + y = 1$.

1.46. $f(x,y,z) = xy^2z^3 \to \text{extr}, \quad x+y+z=1.$
1.47. $f(x,y,z) = xyz \to \text{extr}, \quad x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0.$
1.48. $f(x,y,z) = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(ax^2+by^2+cz^2)^2 \to \text{extr},$
$x^2+y^2+z^2=1, a>b>c>0.$
1.49. $f(x,y,z) = x+y+z^2+2(xy+yz+zx) \to \text{extr},\ x^2+y^2+z=1.$
1.50. $f(x,y,z) = x-2y+2z \to \text{extr}, \quad x^2+y^2+z^2=1.$
1.51. $f(x,y,z) = x^m y^n z^p \to \text{extr},\ x+y+z=a,$
$m>0, n>0, p>0, a>0.$
1.52. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \to \text{extr},\ x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,$
$a>b>c>0.$
1.53. $f(x,y,z) = xy^2z^3 \to \text{extr}, \quad x+2y+3z=a,$
$x>0, y>0, z>0, a>0.$
1.54. $f(x,y,z) = xy+yz \to \text{extr},\ x^2+y^2=2,\ y+z=2,$
$x>0, y>0, z>0.$
1.55. $f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z) \to \text{extr}, \quad x+y+z=\pi/2.$
1.56. $f(x,y) = e^{x-y}-x-y \to \text{extr},\ x+y \le 1, x \ge 0,\ y \ge 0.$
1.57. $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y \to \text{extr},$
$2x+3y-6 \le 0,\ x+4y-5 \le 0.$
1.58. $f(x,y) = 2xy-x^2-2y^2 \to \text{extr},\ x-y+1 \ge 0,\ 2x+3y+6 \le 0.$
1.59. $f(x,y) = x^2+y^2 \to \text{extr},\ -5x+4y \le 0,\ -x+4y+3 \le 0.$
1.60. $f(x,y) = x^2+y^2-2x \to \text{extr},\ x-2y+2 \le 0,\ 2x-y \ge 0.$
1.61. $f(x,y,z) = xyz \to \text{extr}, \quad x^2+y^2+z^2 \le 1.$
1.62. $f(x,y,z) = 2x^2+2x+4y-3z \to \text{extr},$
$8x-3y+3z \le 40, -2x+y-z=-3,\ y \ge 0.$
1.63. $f(x,y,z) = x^2+4y^2+z^2 \to \text{extr},\ x+y+z \le 12,$
$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$
1.64. $f(x,y,z) = 3y^2-11x-3y-z \to \text{extr},\ x-7y+3z+7 \le 0,$
$5x+2y-z \le 2,\ z \ge 0.$
1.65. $f(x,y,z) = xz-2y \to \text{extr},\ 2x-y-3z \le 10,\ 3x+2y+z=6,$
$y \ge 0.$
1.66. $f(x,y,z) = -4x-y+z^2 \to \text{extr},\ x^2+y^2+xz-1 \le 0,$
$x^2+y^2-2y \le 0,\ 5-x+y+z \le 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0.$
1.67. $\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \to \max, \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j^{\beta_j} = b,$
$b>0, x_j \ge 0, \alpha_j>0, \beta_j>0, a_j>0, j=1,2,\ldots,n.$
1.68. $\sum_{j=1}^n c_j x_j^{\alpha_j} \to \min, \quad \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j} = b,$
$b>0, x_j \ge 0, c_j>0, \alpha_j>0, \beta_j>0, j=1,2,\ldots,n.$

1.69. $\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{x_j^{\alpha_j}} \to \min, \quad \prod_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j} = b,$
$b > 0, x_j > 0, c_j > 0, \alpha_j > 0, \beta_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n.$

1.70. $\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{x_j^{\alpha}} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$
$b > 0, \alpha > 0, x_j > 0, c_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n.$

1.71. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$
$b > 0, 0 < \alpha < 1, x_j > 0, c_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n.$

1.72. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$
$c_j > 0, a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0, \alpha = 2m, m \in N.$

1.73. $\sum_{j=1}^{n} c_j |x_j|^{\alpha} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$
$c_j > 0, a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0, \alpha > 1, b > 0.$

1.74. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{\alpha} = b,$
$b > 0, a_j > 0, c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0, \alpha = 2m, m \in N.$

1.75. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \quad \sum_{j=1}^{n} a_j |x_j|^{\alpha} = b,$
$b > 0, a_j > 0, c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0, \alpha > 1.$

1.76. $\sum_{j=1}^{n} |c_j + x_j|^{\alpha} \to \max(\min), \quad \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\alpha} = b,$
$b > 0, c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0, \alpha > 1.$

1.77. Розділити число 8 на дві частини так, щоб добуток їх добутку на різницю був максимальним (задача Тартальї).

1.78. Визначити прямокутний трикутник найбільшої площі за умови, що сума довжин його катетів дорівнює заданому числу (задача Ферма).

1.79. На стороні BC трикутника ABC визначити точку E таку, що паралелограм $ADEK$, у якого точки D та K лежать відповідно на сторонах AB та AC, мав найбільшу площу (задача Евкліда).

1.80. На заданій грані тетраедра беруть точку, через яку проводять площини паралельні трьом іншим граням. Вибрати точку так, щоб об'єм паралелепіпеда був максимальним (узагальнена задача Евкліда).

1.81. Визначити поліном другого степеня $t^2 + x_1 t + x_2$ такий, що інтеграл

$$\int_{-1}^{1} (t^2 + x_1 t + x_2)^2 \, dt$$

набуває найменшого значення (задача про поліном Лежандра другого степеня).

1.82. Визначити поліном третього степеня $t^3 + x_1t^2 + x_2t + x_3$ такий, що інтеграл

$$\int_{-1}^{1} (t^3 + x_1t^2 + x_2t + x_3)^2 \, dt$$

набуває найменшого значення (задача про поліном Лежандра третього степеня).

1.83. Серед усіх дискретних випадкових величин, що набувають n значень, визначити випадкову величину з найбільшою ентропією. (Ентропією послідовності додатних чисел $p_1, \dots, p_n$, що дорівнюють у сумі одиниці, називається число $H = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$.)

1.84. Вписати в коло прямокутник максимальної площі.

1.85. Вписати в коло трикутник максимальної площі.

1.86. Вписати в кулю циліндр із максимальним об'ємом (задача Кеплера).

1.87. Вписати в кулю конус із максимальним об'ємом.

1.88. Серед конусів, вписаних у кулю, визначити конус із максимальною площею бічної поверхні.

1.89. Вписати в кулю з простору $\mathbb{R}^n$ прямокутний паралелепіпед із найбільшим об'ємом.

1.90. Вписати в кулю тетераедр із найбільшим об'ємом.

1.91. Серед трикутників, що мають заданий периметр, визначити трикутник найбільшої площі.

1.92. Серед усіх n-кутників заданого периметра визначити n-кутник найбільшої площі (задача Зенона).

1.93. Вписати в коло n-кутник максимальної площі.

1.94. На діаметрі AB кола одиничного радіуса взята точка E, через яку провели хорду CD. Визначити положення хорди, за якого площа чотирикутника $ABCD$ максимальна.

1.95. Визначити в трикутнику таку точку, щоб сума відношень довжин сторін і відстаней від точки до відповідних сторін була мінімальною.

1.96. Вписати в коло трикутник із найбільшою сумою квадратів сторін.

1.97. Через задану точку всередині кута провести відрізок із кінцями на сторонах кута так, щоб площа утвореного трикутника була найменша.

1.98. Через точку всередині кута провести відрізок із кінцями на сторонах кута так, щоб периметр утвореного трикутника був найменшим.

1.99. Визначити чотирикутник із заданими сторонами найбільшої площі.

1.100. Серед сегментів кулі, що мають задану площу бічної поверхні, знайти сегмент із найбільшим об'ємом (задача Архімеда).

1.101. Визначити на прямій точку C таку, щоб сума відстаней від точки C до заданих точок A і B була мінімальною.

1.102. Серед усіх тетраедрів із заданими основою і висотою знайти тетраедр з найменшою бічною поверхнею.

1.103. Серед усіх тетраедрів із заданими основою та площею бічної поверхні знайти тетраедр із найбільшим об'ємом.

1.104. Серед усіх тетраедрів, що мають задану площу поверхні, знайти тетраедр, який має найбільший об'єм.

1.105. На площині задані три точки x_1, x_2, x_3. Визначити таку точку x_0, щоб сума квадратів відстаней від точки x_0 до точок x_1, x_2, x_3 була найменшою.

1.106. У просторі $\mathbb{R}^n$ задано N точок $x_1, \ldots, x_N$ і N додатних чисел $m_1, \ldots, m_N$. Визначити таку точку x_0, щоб сума з коефіцієнтами m_i квадратів відстаней від точки x_0 до $x_1, \ldots, x_N$ була найменшою.

1.107. Розв'язати задачу 1.106 за умови, що точка x_0 лежить на сфері одиничного радіуса.

1.108. Розв'язати задачу 1.106 за умови, що точка x_0 належить кулі одиничного радіуса.

1.109. Знайти відстань від точки до еліпса. Скільки нормалей можна провести з точки до еліпса (задача Аполлонія)?

1.110. Знайти відстань від точки до параболи.

1.111. Знайти відстань від точки до гіперболи.

1.112. Знайти відстань від точки x_0 у просторі $\mathbb{R}^n$ до гіперплощини $H = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle = \beta\}$.

1.113. Знайти відстань від точки до гіперплощини в гільбертовому просторі.

1.114. Знайти відстань від точки x_0 у просторі $\mathbb{R}^n$ до прямої.

1.115. Знайти мінімум лінійного функціонала у просторі $\mathbb{R}^n$ на одиничній кулі.

1.116. В еліпс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ вписати прямокутник найбільшої площі зі сторонами, паралельними осям координат.

1.117. В еліпсоїд $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму з ребрами, паралельними осям координат.

1.118. Довести нерівність між середніми степеневими

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ -\infty < p \le q \le \infty,\ p \ne 0,\ q \ne 0.$$

1.119. Довести нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ 0 < p \le q \le \infty.$$

1.120. Довести нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним:

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \text{для всіх } x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

1.121. Довести нерівність Гельдера

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i a_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,\ q > 1,\ p \ge 1.$$

Переконатися, що при $a = (a_1, \ldots, a_n) \ne 0$ рівність справедлива лише при $|x_i| = \lambda|a_i|$, $i = 1, \ldots, n$.

1.122. Довести нерівність Мінковського

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p > 1.$$

Переконатися, що при $y = (y_1, \ldots, y_n) \ne 0$ рівність справедлива лише при $x_i = \lambda y_i$, $\lambda > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Задачі математичного програмування

2.1. Умови оптимальності в термінах напрямків

Розглянемо задачу мінімізації в загальній постановці:

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Означення 2.1. Вектор $h \in \mathbb{R}^n$ задає *можливий напрямок* відносно множини X у точці $\hat{x} \in X$, якщо $\hat{x} + \alpha h \in X$ при всіх достатньо малих $\alpha > 0$. Множину всіх таких h позначимо через $V(\hat{x}, X)$. Ця множина є конусом.

Означення 2.2. Вектор h задає напрямок спадання функції f у точці $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, якщо $f(\hat{x} + \alpha h) < f(\hat{x})$ при всіх достатньо малих $\alpha > 0$. Множину всіх таких h позначимо через $U(\hat{x}, f)$.

Лема 2.1. *Нехай функція f диференційовна в точці $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Тоді 1) якщо вектор h задовольняє умову*

$$\langle f'(\hat{x}), h \rangle < 0, \tag{2.2}$$

то $h \in U(\hat{x}, f)$;
2) якщо $h \in U(\hat{x}, f)$, то $\langle f'(\hat{x}), h \rangle \le 0$.

Визначимо множину $U_0(\hat{x}, f) = \{h \in \mathbb{R}^n \colon \langle f'(\hat{x}), h \rangle < 0\}$. Нижче наводиться умова локальної оптимальності в задачі (2.1), яка не потребує жодних припущень щодо множини X та функції f.

Теорема 2.1. *Якщо $\hat{x}$ – локальний розв'язок задачі (2.1), то*

$$U(\hat{x}, f) \cap V(\hat{x}, X) = \emptyset.$$

Наслідок 2.1. *Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $\hat{x}$, яка є розв'язком задачі (2.1), то*

$$U_0(\hat{x}, f) \cap V(\hat{x}, X) = \emptyset.$$

2.2. Диференціальні умови оптимальності

Теорема 2.2. *Нехай у задачі (2.1) множина X опукла, функція f диференційовна в точці $\hat{x} \in X$. Тоді маємо таке:*
1) якщо $\hat{x}$ – локальний розв'язок задачі (2.1), то

$$\langle f'(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \geq 0 \quad \textit{для всіх} \quad x \in X; \tag{2.3}$$

2) якщо функція f опукла на X і виконується умова (2.3), то $\hat{x}$ – (глобальний) розв'язок задачі (2.1).

Отже, співвідношення (2.3) є необхідною умовою локального екстремуму в задачі мінімізації диференційовної функції на опуклій множині. Якщо при цьому функція f опукла на X – то співвідношення (2.3) є і достатньою умовою глобального мінімуму.

Геометрично умова (2.3) означає, що градієнт $f'(\hat{x})$ (якщо він відмінний від нуля) складає нетупий кут із вектором, що виходить із точки $\hat{x}$ у будь-якому напрямку $x \in X$.

Конкретизуємо умову (2.3) у деяких спеціальних випадках.

Лема 2.2. *Якщо $\hat{x} \in int X$, то умова (2.3) еквівалентна умові:*

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad \textit{тобто} \quad \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Отже, для задачі безумовної оптимізації ($X = \mathbb{R}^n$) теорема 2.2 не дає нічого нового порівняно зі знайомими результатами.

Лема 2.3. *Нехай множина X має вигляд*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \ldots, n\}, \tag{2.5}$$

де $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty, j = 1, \ldots, n$ (якщо $a_j = -\infty$ або $b_j = +\infty$, то відповідний знак нерівності в (2.5) слід розуміти як строгий). Тоді умова (2.3) еквівалентна умові

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} \begin{cases} = 0, \textit{ якщо } a_j < \hat{x}_j < b_j; \\ \geq 0, \textit{ якщо } \hat{x}_j = a_j \neq -\infty; \\ \leq 0, \textit{ якщо } \hat{x}_j = b_j \neq +\infty \end{cases} \tag{2.6}$$

для будь-якого $j = 1, \ldots, n$.

Виділимо окремий випадок цього твердження.

Лема 2.4. *Нехай множина X має вигляд*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \geq 0,\, j = 1, \ldots, s\},$$

де $0 \leq s \leq n$ ($s = 0$ відповідає $X = \mathbb{R}^n$). Тоді умова (2.3) еквівалентна сукупності умов:

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} \geq 0; \quad \hat{x}_j \cdot \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s; \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = s+1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Лема 2.5. *Нехай X – афінна множина і $L = X - \hat{x}$ – паралельний їй підпростір. Тоді умова (2.3) еквівалентна такій умові:*

$$\langle f'(\hat{x}), h \rangle = 0 \quad \forall h \in L,$$

тобто $f'(\hat{x})$ лежить в ортогональному доповненні до L.

У найпростіших випадках отримані результати дозволяють явно розв'язати задачу (2.1).

Приклад 2.1. Нехай необхідно знайти всі (локальні та глобальні) розв'язки задачі:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \to \min, \qquad -1 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 2. \tag{2.9}$$

Згідно з лемою 2.3 у точці мінімуму виконуються умови:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 \begin{cases} = 0, \text{ якщо } -1 < x_1 < 1; \\ \geq 0, \text{ якщо } x_1 = -1; \\ \leq 0, \text{ якщо } x_1 = 1, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 \begin{cases} = 0, \text{ якщо } x_2 > 2; \\ \geq 0, \text{ якщо } x_2 = 2. \end{cases} \tag{2.11}$$

Тепер, взагалі кажучи, необхідно скласти шість систем співвідношень попарно комбінуючи співвідношення (2.10), (2.11). Наприклад, перші дві системи мають такий вигляд:

$$4x_1 + x_2 = 0,\ -1 < x_1 < 1,\ x_1 + 2x_2 = 0,\ x_2 > 2; \tag{2.12}$$

$$4x_1 + x_2 = 0,\ -1 < x_1 < 1,\ x_1 + 2x_2 \geq 0,\ x_2 = 2. \qquad (2.13)$$

Після цього необхідно знайти розв'язки кожної такої системи й дослідити їх на оптимальність. Однак, перед цим корисно провести якісний аналіз задачі.

Функція f є квадратичною. Використовуючи критерій Сільвестра, можна переконатися, що матриця других похідних функції f додатно визначена. Отже функція f сильно опукла на $\mathbb{R}^2$. Тому локальний і глобальний розв'язки задачі (2.9) однакові. Задача має єдиний розв'язок, і лише цей розв'язок може задовольняти умови (2.10), (2.11). Отже, ще не розв'язуючи зазначені шість систем, ми знаємо, що лише одна з них матиме розв'язок, причому єдиний, і він є розв'язком задачі (2.9).

Розглянемо тепер систему (2.12). Вона несумісна. Перейдемо до системи (2.13). Її розв'язок $x_1 = -1/2, x_2 = 2$. Це і є єдиний розв'язок задачі (2.9). Досліджувати інші чотири системи не потрібно. Згідно зі сказаним вище вони не можуть мати розв'язку.

2.3. Субдиференціальна умова оптимальності

За теоремою 2.2 співвідношення (2.3) є необхідною й достатньою умовою оптимальності в опуклій задачі мінімізації з диференційовною функцією. У наступній теоремі сформульовано більш загальний результат, що охоплює і випадок недиференційовної функції.

Теорема 2.3. *Нехай у задачі (2.1) множина X опукла, функція f опукла на відносно відкритій множині U, що містить X. Точка $\hat{x} \in X$ є розв'язком задачі (2.1) тоді і тільки тоді, коли існує вектор $a \in \partial f(\hat{x})$ такий, що*

$$\langle a, x - \hat{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X. \qquad (2.14)$$

Тут $\partial f(\hat{x})$ – субдиференціал функції $f(x)$, яка розглядається на множині U. Інакше кажучи, запис $a \in \partial f(\hat{x})$ означає, що

$$f(x) - f(\hat{x}) \geq \langle a, x - \hat{x} \rangle \quad \forall x \in U. \qquad (2.15)$$

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $\hat{x}$, то маємо $\partial f(\hat{x}) = \{f'(\hat{x})\}$ і співвідношення (2.14) переходить у співвідношення (2.3).

Зауваження 2.1. В умовах теореми можна було б вважати, що функція $f(x)$ визначена лише на множині X і, відповідно, у (2.15) замість U поставити X. Але в цьому випадку теорема стає тривіальною: завжди підходить $a = 0$. У зазначеному вигляді теорема дозволяє залучити теорію субдиференціалів до дослідження задач математичного програмування.

Зазначимо, що леми 2.1–2.4 можна переформулювати, враховуючи співвідношення (2.14). Зокрема, якщо $\hat{x} \in \operatorname{int} X$, то умова (2.14) еквівалентна умові $a = 0$. Інакше кажучи, у припущеннях теореми 2.3 точка $\hat{x} \in \operatorname{int} X$ є розв'язком задачі (2.1) лише у тому випадку, коли $0 \in \partial f(\hat{x})$. Згідно із зауваженням 2.1, цей факт сам по собі тривіальний, однак і він може бути корисним, якщо ми можемо обчислити субдиференціал $\partial f(\hat{x})$.

Приклад 2.2. Знайти всі розв'язки задачі

$$f(x) = \|x\| - \langle c, x\rangle \to \min,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

де c – вектор із $\mathbb{R}^n$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ опукла на $\mathbb{R}^n$. Її субдиференціал у точці $x = 0$ має вигляд $\partial f(0) = B_1(0) - c$. В усіх інших точках вона диференційовна і $f'(x) = x/\|x\| - c$. Включення $0 \in \partial f(0)$ означає, що $c \in B_1(0)$, тобто $\|c\| \le 1$. Рівняння $f'(x) = 0$ має розв'язок лише в тому випадку, коли $\|c\| \le 1$. При цьому, якщо $\|c\| = 1$, то його розв'язком є будь-яка точка $\hat{x} = \lambda \cdot c$, де $\lambda > 0$.

Отже, відповідь така: якщо $\|c\| < 1$, то $\hat{x} = 0$ – єдиний розв'язок цієї задачі; якщо $\|c\| = 1$, то розв'язком буде будь-яка точка $\hat{x} = \lambda \cdot c$, де $\lambda > 0$; якщо $\|c\| > 1$, то розв'язків немає.

Приклад 2.3. Розв'язати задачу

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 - 2| \to \min.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = f(x_1, x_2)$ опукла, як сума двох опуклих функцій. Справді, функція $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

опукла, бо матриця її других похідних

$$g''(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2_{i,j=1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

додатно визначена та не залежить від x. Функція $h(x_1, x_2) = |x_1 + x_2 - 2|$ також опукла, як максимум двох лінійних функцій. Необхідна й достатня умова екстремуму опуклої задачі без обмежень має вигляд

$$0 \in \partial f(\hat{x}) = \partial g(\hat{x}) + 3\partial h(\hat{x}).$$

Оскільки функція $g(x)$ диференційовна, то її субдиференціал

$$\partial g(x) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2).$$

Субдиференціал функції $h(x_1, x_2) = |x_1 + x_2 - 2|$ обчислюється за формулою

$$\partial h(x_1, x_2) = \begin{cases} (1, 1), & x_1 + x_2 - 2 > 0; \\ (\alpha, \alpha), |\alpha| \leq 1, & x_1 + x_2 - 2 = 0; \\ (-1, -1), & x_1 + x_2 - 2 < 0. \end{cases}$$

Тому

$$\partial f(x_1, x_2) = \begin{cases} (2x_1 + x_2 + 3, x_1 + 2x_2 + 3), & x_1 + x_2 - 2 > 0; \\ (2x_1 + x_2 + 3\alpha, x_1 + 2x_2 + 3\alpha), & x_1 + x_2 - 2 = 0; \\ (2x_1 + x_2 - 3, x_1 + 2x_2 - 3), & x_1 + x_2 - 2 < 0. \end{cases}$$

Отже, умова екстремуму $0 \in \partial f(x)$ матиме вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3\alpha = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3\alpha = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 < 0. \end{cases}$$

У першому та третьому випадках критичних точок немає, оскільки системи умов несумісні. У другому випадку отримаємо розв'язок $x_1 = 1, x_2 = 1, \alpha = -1$.

Отже, відповідь така: $S_{\min} = 3$, $(x_1, x_2) = (1, 1)$.

2.4. Принцип невизначених множників Лагранжа

Розглянемо задачу математичного програмування

$$\begin{aligned} & f(x) \to \min, \\ & g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, k; \\ & g_i(x) = 0, \quad i = k+1, \dots, m; \\ & x \in P \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Таку задачу можна звести до задачі (2.1), якщо визначити допустиму множину X таким чином:

$$X = \{x \in P \,| g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, k;\, g_i(x) = 0,\ i = k+1, \dots, m\}\,. \tag{2.17}$$

Визначимо також множину

$$Q = \{y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid y_i \ge 0, i = 1, \dots, k\}\,, \tag{2.18}$$

що складається з усіх m-вимірних векторів, у яких перші k координат невід'ємні. Зокрема, $Q = \mathbb{R}^m$, якщо обмеження-нерівності відсутні ($k = 0$), та $Q = \mathbb{R}^m_+$, якщо обмеження-рівності відсутні ($k = m$). Визначимо *функцію Лагранжа* задачі (2.16):

$$L(x, y_0, y) = y_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x),$$

де $x \in P, y_0 \ge 0, y = (y_1, \dots, y_m) \in Q$. Ця функція має такий самий вигляд, як і у випадку класичної задачі на умовний екстремум. Будемо надалі використовувати позначення

$$L'_x(x, y_0, y) = y_0 f'(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g'_i(x) \tag{2.19}$$

для вектора, складеного з частинних похідних функції Лагранжа за координатами вектора x, тобто з величин

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, y_0, y) = y_0 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 2.4 (принцип невизначених множників Лагранжа). *Нехай у задачі (2.16) множина P опукла, функції $f, g_1, \ldots, g_k$ диференційовні в точці $\hat{x} \in X$, функції $g_{k+1}, \ldots, g_m$ диференційовні в деякому околі точки $\hat{x}$. Якщо $\hat{x}$ – локальний розв'язок задачі (2.16), то існують число $\hat{y}_0 \geq 0$ і вектор $\hat{y} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m) \in Q$, що не рівні нулю одночасно й такі, що*

$$\langle L'_x(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}), x - \hat{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in P, \tag{2.20}$$

$$\hat{y}_i g_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.21}$$

Зауваження 2.2. Зробимо ряд зауважень із приводу цієї теореми та методу невизначених множників Лагранжа.

1. Будь-яка точка $\hat{x} \in X$, що задовольняє умови (2.20), (2.21) при деяких $\hat{y}_0 \geq 0$, $\hat{y} \in Q$, $(\hat{y}_0, \hat{y}) \neq 0$, називається *стаціонарною точкою* задачі (2.16). Згідно з принципом Лагранжа стверджуємо, що при зазначених припущеннях будь-який локальний розв'язок задачі (2.16) є стаціонарною точкою. Достатність умов (2.20), (2.21) гарантується лише при тих чи інших додаткових припущеннях (див. теореми 2.5, 2.9).

2. Числа $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m$ називаються *множниками Лагранжа*. Згідно з означенням множини Q, множники $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_k$, які відповідають обмеженням-нерівностям, невід'ємні, а множники $\hat{y}_{k+1}, \ldots, \hat{y}_m$, які відповідають обмеженням-рівностям, можуть бути як від'ємні, так і додатні. Множники Лагранжа визначені з точністю до додатної константи, тобто якщо пара $(\hat{y}_0, \hat{y})$ задовольняє умови (2.20), (2.21), то для будь-якого $\lambda > 0$ пара $(\lambda\hat{y}_0, \lambda\hat{y})$ теж задовольняє умови (2.20), (2.21). Це дозволяє розглядати в теоремі 2.4 лише два випадки: $\hat{y}_0 = 0$ або $\hat{y}_0 = 1$. Додаткові припущення, які забезпечують випадок $\hat{y}_0 = 1$, прийнято називати *умовами регулярності*. При цьому саму задачу називають *регулярною*. Для

такої задачі достатньо розглянути лише функцію Лагранжа вигляду

$$L(x,y) = L(x,1,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x), \tag{2.22}$$

яку теж називають *регулярною.* Для регулярної задачі опуклого програмування співвідношення (2.20), (2.21) є не лише необхідними, але й достатніми умовами оптимальності.

Теорема 2.5. *Нехай у задачі (2.16) множина P опукла, функції $f, g_1, \ldots, g_k$ опуклі на P і диференційовні в точці $\hat{x} \in X$, функції $g_{k+1}, \ldots, g_m$ лінійні. Якщо при $\hat{y}_0 = 1$ і деякому $\hat{y} \in Q$ виконуються умови (2.20), (2.21), то $\hat{x}$ – глобальний розв'язок задачі (2.16).*

Враховуючи леми 2.2–2.4, конкретизуємо умову (2.20) у деяких спеціальних випадках.

Лема 2.6. *Нехай виконуються умови теореми 2.4. Тоді*
1) якщо $\hat{x} \in \operatorname{int} P$, то умова (2.20) еквівалентна умові

$$L'_x(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}) = 0, \quad \textit{тобто} \quad \frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}) = 0, \ j = 1, \ldots, n; \tag{2.23}$$

2) якщо P має вигляд

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|a_j \le x_j \le b_j, \ j = 1, \ldots, n\},$$

де $-\infty \le a_j < b_j \le +\infty, \ j = 1, \ldots, n$, то умова (2.20) еквівалентна такій умові: для кожного $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}) \begin{cases} = 0, & \textit{якщо} \quad a_j < \hat{x}_j < b_j, \\ \ge 0, & \textit{якщо} \quad \hat{x}_j = a_j \ne -\infty, \\ \le 0, & \textit{якщо} \quad \hat{x}_j = b_j \ne +\infty; \end{cases}$$

3) якщо P має вигляд

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|x_j \ge 0, \, j = 1, \ldots, s\}, \tag{2.24}$$

де $0 \le s \le n$, *то умова (2.20) еквівалентна умові*

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}) \ge 0, \quad \hat{x}_j \frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}) = 0, \quad j = 1, \ldots, s,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}) = 0, \qquad j = s+1, \ldots, n.$$

Для будь-якої точки $\hat{x} \in X$ визначимо множини

$$I(\hat{x}) = \{\, i \mid g_i(\hat{x}) = 0, \;\; 1 \le i \le k \,\},$$

$$S(\hat{x}) = I(\hat{x}) \cup \{k+1, \ldots, m\} = \{\, i \mid g_i(\hat{x}) = 0, \;\; 1 \le i \le m \,\}.$$

Обмеження-нерівності з індексами $i \in I(\hat{x})$ називаються *активними* в точці $\hat{x}$, а інші – *пасивними*. Умова (2.21), яку називають *умовою доповнювальної нежорсткості*, означає, що множники Лагранжа, які відповідають пасивним обмеженням-нерівностям, повинні дорівнювати нулю, тобто $\hat{y}_i = 0$ для всіх $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus I(\hat{x})$. З умов (2.20), (2.21), ураховуючи (2.19), отримаємо

$$\left\langle \hat{y}_0 f'(\hat{x}) + \sum_{i \in S(\hat{x})} \hat{y}_i g_i'(\hat{x}), x - \hat{x} \right\rangle \ge 0 \quad \forall x \in P. \tag{2.25}$$

Навпаки, маючи (2.25), завжди можна прийти до (2.20), (2.21), якщо покласти $\hat{y}_i = 0$ при $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus I(\hat{x})$. Пояснимо геометричний зміст принципу Лагранжа у тому випадку, коли обмеження-рівності й обмеження $x \in P$ відсутні ($k = m, P = \mathbb{R}^n$). Умова (2.25) тоді має вигляд

$$\hat{y}_0 f'(\hat{x}) + \sum_{i \in S(\hat{x})} \hat{y}_i g_i'(\hat{x}) = 0. \tag{2.26}$$

При $\hat{y}_0 = 1$ це означає, що антиградієнт цільової функції є невід'ємною лінійною комбінацією градієнтів функцій, що складають активні обмеження в точці $\hat{x}$.

2.5. Диференціальна форма теореми Куна – Таккера

Нагадаємо, що умовою регулярності називається будь-яке додаткове припущення щодо задачі (2.16), при якому в теоремі 2.4 забезпечується рівність $\hat{y}_0 = 1$. Найпростішим прикладом цієї умови є вимога лінійної незалежності градієнтів $g_1'(\hat{x}), \dots, g_m'(\hat{x})$ у класичній задачі на умовний екстремум. Умовою регулярності в задачі (2.16) при $\hat{x} \in \operatorname{int} P$ виступає лінійна незалежність градієнтів $g_i'(\hat{x}), i \in S(\hat{x})$. При $\hat{x} \in \operatorname{int} P$ формулу (2.25) можна записати у вигляді

$$\hat{y}_0 f'(\hat{x}) + \sum_{i \in S(\hat{x})} \hat{y}_i g_i'(\hat{x}) = 0,$$

де числа $\hat{y}_0, \hat{y}_i, i \in S(\hat{x})$, не рівні нулю одночасно. Випадок $\hat{y}_0 = 0$ тут неможливий у силу лінійної незалежності $g_i'(\hat{x}), i \in S(\hat{x})$.

На жаль, умови регулярності такого типу важко перевірити, тому що вони сформульовані в термінах самої точки мінімуму $\hat{x}$, яку потрібно знайти. Більш зручні умови регулярності вдається отримати для задач з опуклими обмеженнями й лінійними обмеженнями-рівностями. У наступній теоремі наводиться група таких умов.

Теорема 2.6. *Нехай у задачі (2.16) множина P опукла, функції $f, g_1, \dots, g_k$ диференційовні в точці $\hat{x} \in X$, функції $g_1, \dots, g_k$ опуклі на P, функції $g_{k+1}, \dots, g_m$ лінійні. Припустимо, що додатково виконується принаймні одна з таких умов:*
1) обмеження-рівності відсутні та існує точка $\overline{x} \in P$ така, що $g_i(\overline{x}) < 0,\ i = 1, \dots, m$;
2) множина P – поліедр, функції $g_1, \dots, g_k$ лінійні;
3) множина P – поліедр, функції $g_{l+1}, \dots, g_k,\ 0 < l \le k$, лінійні, та існує точка $\overline{x} \in X$ така, що $g_i(\overline{x}) < 0$ для всіх $i = 1, \dots, l$;
4) функції $g_{l+1}, \dots, g_k$, $0 < l \le k$, лінійні, та існує така точка $\overline{x} \in ri\, P \cap X$, що $g_i(\overline{x}) < 0\ \forall i = 1, \dots, l$.

Якщо $\hat{x}$ – локальний розв'язок задачі (2.16), то існує вектор $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m) \in Q$ такий, що при $\hat{y}_0 = 1$ виконуються умови (2.20), (2.21).

Із теорем 2.5 і 2.6 безпосередньо випливає один із найважливіших фактів теорії опуклого програмування.

Теорема 2.7 (теорема Куна – Таккера в диференціальній формі). *Нехай виконуються умови теореми 2.6 і нехай функція f опукла на P. Точка $\hat{x}$ є розв'язком задачі (2.16) тоді і лише тоді, коли існує вектор $\hat{y} \in Q$ такий, що при $\hat{y}_0 = 1$ виконуються умови (2.20), (2.21).*

Зауваження 2.3. Умова 1) у теоремі 2.6 (і в теоремі 2.7) називається *умовою Слейтера.* Ця умова регулярності найбільш проста і часто використовується. Умова 2) називається *умовою лінійності.* Зазначимо, що вона автоматично виконується для задач лінійного та квадратичного програмування. Умови 3) і 4) називаються *модифікованими умовами Слейтера.* Спільним їх моментом є вимога типу умови Слейтера лише до нелінійних обмежень-нерівностей. Різниця полягає в розташуванні точки $\overline{x}$. В умові 3) – це просто точка з допустимої множини X. В умові 4) вимагається, крім того, щоб точка $\overline{x}$ була відносно внутрішньою точкою множини прямих обмежень P. Таким чином, припущення "P – поліедр" та "$\overline{x} \in \operatorname{ri} P \cap X$" тут начебто заміняють одне одного. Зазначимо, що при $P = \mathbb{R}^n$ умови 3) і 4) зливаються в одну.

2.6. Умови оптимальності другого порядку

Позначимо через

$$L''_{xx}(x, y_0, y) = y_0 f''(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g''_i(\hat{x})$$

матрицю, що складена з других частинних похідних функції Лагранжа. Для точки $\hat{x} \in P$ визначимо множину

$$V(\hat{x}) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n \,|\, h = \lambda(x - \hat{x}),\, \lambda > 0,\, x \in P \right\}.$$

Зрозуміло, що $V(\hat{x}) = \mathbb{R}^n$, якщо $\hat{x} \in \operatorname{int} P$.

Позначимо через $H(\hat{x})$ множину векторів $h \in \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\langle f'(\hat{x}), h \rangle \leq 0, \tag{2.27}$$

$$\langle g_i'(\hat{x}), h\rangle \le 0, \quad i \in I(\hat{x}), \tag{2.28}$$

$$\langle g_i'(\hat{x}), h\rangle = 0, \quad i = k+1, \ldots, m. \tag{2.29}$$

Сформулюємо теорему про достатні умови оптимальності в (не обов'язково опуклій та регулярній) задачі математичного програмування.

Теорема 2.8. *Нехай у задачі (2.16) функції $f, g_1, \ldots, g_m$ двічі диференційовні в точці $\hat{x} \in X$. Припустимо, що існують число $\hat{y}_0 \ge 0$ та вектор $\hat{y} \in Q$ такі, що виконуються умови (2.20), (2.21) і, крім того,*

$$\langle L''_{xx}(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y})h, h\rangle > 0 \tag{2.30}$$

при всіх ненульових $h \in \overline{V(\hat{x})} \cap H(\hat{x})$. Тоді $\hat{x}$ – строгий локальний розв'язок задачі (2.16), тобто $f(\hat{x}) < f(x)$ для всіх $x \in X$ близьких до $\hat{x}$, але відмінних від $\hat{x}$.

Зауваження 2.4. Для будь-яких $\hat{y}_0 \ge 0$ та $\hat{y} \in Q$, що задовольняють (2.20), (2.21) за умови $h \in \overline{V(\hat{x})} \cap H(\hat{x})$ маємо

$$\langle L'_x(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}), h\rangle = 0, \tag{2.31}$$

$$\hat{y}_0 \langle f'(\hat{x}), h\rangle = 0, \tag{2.32}$$

$$\hat{y}_i \langle g_i'(\hat{x}), h\rangle = 0, \quad i \in I(\hat{x}). \tag{2.33}$$

Справді, з умови (2.20) та умови $h \in \overline{V(\hat{x})}$ випливає, що $\langle L'_x(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}), h\rangle \ge 0$. Із (2.21) та умови $h \in H(\hat{x})$ отримаємо протилежну нерівність

$$\langle L'_x(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y}), h\rangle = \langle \hat{y}_0 f'(\hat{x}) + \sum_{i \in S(\hat{x})} \hat{y}_i g_i'(\hat{x}), h\rangle =$$

$$= \hat{y}_0 \langle f'(\hat{x}), h\rangle + \sum_{i \in S(\hat{x})} \hat{y}_i \langle g_i'(\hat{x}), h\rangle \le 0.$$

Це можливо лише в тому випадку, коли виконуються співвідношення (2.31)–(2.33).

Теорема 2.8 допускає деякі модифікації. Розглянемо одну з них, яка іноді виявляється більш зручною в застосуванні.

Наслідок 2.1. *Нехай у задачі (2.16) функції $f, g_1, \ldots, g_m$ двічі диференційовні в точці $\hat{x} \in X$. Припустимо, що існують $\hat{y}_0 \geq 0$ та $\hat{y} \in Q$ такі, що виконуються умови (2.20), (2.21) та (2.30) для всіх ненульових $h \in \overline{V(\hat{x})}$, що задовольняють (2.28), (2.29), (2.33). Тоді $\hat{x}$ – строгий локальний розв'язок задачі (2.16).*

Із теореми 2.8 можна отримати також (більш грубу) достатню умову оптимальності з використанням лише перших похідних.

Наслідок 2.2. *Нехай у задачі (2.16) функції $f, g_1, \ldots, g_m$ диференційовні в точці $\hat{x} \in X$. Якщо $\overline{V(\hat{x})} \cap H(\hat{x}) = \{0\}$, то $\hat{x}$ – строгий локальний розв'язок задачі (2.16).*

Зауваження 2.5. Для задачі опуклого програмування теорема 2.8 та її наслідки вказують на достатні умови єдиності (глобального) розв'язку.

Наведемо тепер теорему про необхідну умову оптимальності другого порядку, обмежившись випадком $\hat{x} \in \operatorname{int} P$.

Теорема 2.9. *Нехай у задачі (2.16) множина P опукла, функції $f, g_1, \ldots, g_m$ двічі диференційовні у точці $\hat{x} \in \operatorname{int} P \cap X$. Нехай, крім того, функції $g_i(\hat{x}), i \in S(\hat{x})$, лінійно незалежні. Якщо $\hat{x}$ – строгий локальний розв'язок задачі (2.16), то*

$$\langle L''_{xx}(\hat{x}, \hat{y}_0, \hat{y})h, h\rangle \geq 0 \tag{2.34}$$

для будь-яких $\hat{y}_0 \geq 0$ та $\hat{y} \in Q$, що задовольняють (2.21), (2.23), і всіх $h \in H(\hat{x})$.

2.7. Двоїсті задачі опуклого програмування

Розглянемо задачу математичного програмування

$$\begin{aligned} & f(x) \to \min, \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, k; \\ & g_i(x) = 0, \quad i = k+1, \ldots, m; \\ & x \in P \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Позначимо через

$$X = \{x \in P \,|g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, k;\ \ g_i(x) = 0,\, i = k+1, \dots, m\}$$

допустиму множину задачі (2.35). Позначимо через

$$Q = \{y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid y_i \ge 0, i = 1, \dots, k\}$$

множину векторів із $\mathbb{R}^m$, у яких перші k координат невід'ємні. Нехай

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$$

– регулярна функція Лагранжа задачі (2.35).

Припустимо, що $X \neq \emptyset$. Позначимо через $\hat{f}$ точну нижню грань цільової функції задачі (2.35) на її допустимій множині:

$$\hat{f} = \inf_{x \in X} f(x).$$

Будемо називати $\hat{f}$ значенням задачі (2.35). Зрозуміло, що точка $\hat{x} \in X$ є (глобальним) розв'язком задачі (2.35) тільки тоді, коли $f(\hat{x}) = \hat{f}$. Однак може статися і так, що задача (2.35) не має розв'язку, тобто $f(x) > \hat{f} \ge -\infty$ при всіх $x \in X$.

2.8. Вектор Куна – Таккера

Означення 2.3. Вектор $y \in Q$ називається *вектором Куна – Таккера* задачі (2.35), якщо

$$\hat{f} \le f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x) = L(x, y) \quad \text{при всіх} \quad x \in P. \tag{2.36}$$

Задачі, для яких такий вектор існує, мають ряд властивостей, які відсутні в загальному випадку. Виявляється, що вектор Куна – Таккера існує для достатньо широкого класу задач опуклого програмування. Перш ніж сформулювати відповідний результат, наведемо більш слабке твердження, що відображає одну характерну властивість задач опуклого програмування.

Теорема 2.10. *Нехай у задачі (2.35) множина P опукла, функції $f, g_1, \ldots, g_k$ опуклі на P, функції $g_{k+1}, \ldots, g_m$ лінійні, множина X непорожня. Тоді існує число $\hat{y}_0 \geq 0$ та вектор $\hat{y} \in Q$, які не дорівнюють нулю одночасно й такі, що*

$$\hat{y}_0 \hat{f} \leq \hat{y}_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i g_i(x) = L(x, \hat{y}_0, \hat{y}) \quad \text{при всіх} \quad x \in P. \quad (2.37)$$

Теорема 2.11. *Нехай у задачі (2.35) множина P опукла, функції $f, g_1, \ldots, g_k$ опуклі на P, функції $g_{k+1}, \ldots, g_m$ лінійні. Припустимо, що додатково виконується принаймні одна з таких умов:*
1) обмежень-рівностей немає ($k = m$) та існує точка $\overline{x} \in P$ така, що $g_i(\overline{x}) < 0$ при всіх $i = 1, \ldots, m$;
2) множина P – поліедр, функції $g_1, \ldots, g_k$ – лінійні, множина X непорожня;
3) множина P – поліедр, функції $f, g_1, \ldots, g_l$, $0 \leq l \leq k$, опуклі на відносно відкритій опуклій множині U, що містить P, функції $g_{l+1}, \ldots, g_k$ лінійні, та існує точка $\overline{x} \in X$ така, що $g_i(\overline{x}) < 0$ для всіх $i = 1, \ldots, l$;
4) функції $g_{l+1}, \ldots, g_k$, $0 < l \leq k$, лінійні та існує така точка $\overline{x} \in ri\, P \cap X$, що $g_i(\overline{x}) < 0$ для всіх $i = 1, \ldots, l$.

Тоді вектор Куна – Таккера задачі (2.35) існує.

Зауваження 2.6. Умови 1), 4) теореми 2.11 відповідно збігаються з умовами 1), 4) теореми 2.6. Нагадаємо, що умова 1) називається умовою Слейтера, а умова 4) – модифікованою умовою Слейтера. В умовах 2), 3) теореми 2.11 вимагається трохи більше, ніж в умовах 2), 3) теореми 2.6. І це істотно. Так, для задачі опуклого програмування вигляду

$$f(x) = -\sqrt{x_1 x_2} \to \min, \quad x_1 \leq 0, \quad x \in P = \mathbb{R}^2_+, \quad (2.38)$$

співвідношення (2.37) виконується лише тоді, коли $\hat{y}_0 = 0$. Жодна з вимог 1)– 4) не виконується, причому вимога 2) – у силу того, що функція f нелінійна, а вимога 3) – у силу того, що f опукла тільки на P. Зазначимо, що для цієї задачі не можна застосувати теорему 2.6, оскільки в точці $\hat{x} = 0$, що є розв'язком, функція f не диференційовна.

Кожній задачі математичного програмування можна поставити у відповідність двоїсту (спряжену) задачу оптимізації.

Означення 2.4. Двоїстою до задачі (2.35) називається задача

$$\varphi(y) \to \max, \quad y \in Y, \tag{2.39}$$

де

$$\varphi(y) = \inf_{x \in P} L(x, y) = \inf_{x \in P} \left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x) \right),$$

$$Y = \{y \in Q | \varphi(y) > -\infty\}.$$

При цьому задача (2.35) називається прямою. Припускаючи, що $Y \neq \emptyset$, позначимо через

$$\hat{\varphi} = \sup_{y \in Y} \varphi(y)$$

значення задачі (2.39).

Зауваження 2.7. Двоїсту задачу (2.39) можна записувати просто у вигляді

$$\varphi(y) \to \max, \quad y \in Q,$$

допускаючи тим самим нескінченні значення функції $\varphi(y)$. У той же час пряму задачу (2.35) можна записати у вигляді

$$\psi(x) \to \min, \quad x \in P,$$

де

$$\psi(x) = \sup_{y \in Q} L(x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad x \in X, \\ +\infty, & \text{якщо} \quad x \in P \backslash X. \end{cases}$$

Вважатимемо, що $\hat{f} = +\infty$, якщо $X = \emptyset$, тобто $\sup\limits_{y \in Q} L(x, y) = +\infty$ при всіх $x \in P$; $\hat{\varphi} = -\infty$, якщо $Y = \emptyset$, тобто $\inf\limits_{x \in P} L(x, y) = -\infty$ при всіх $y \in Q$. Тоді можемо записати

$$\hat{f} = \inf_{x \in P} \sup_{y \in Q} L(x, y), \quad \hat{\varphi} = \sup_{y \in Q} \inf_{x \in P} L(x, y). \tag{2.40}$$

Таким чином, пряма та двоїста задачі визначаються симетрично відносно функції Лагранжа $L(x, y)$ прямої задачі: щоб отримати двоїсту задачу досить переставити операції $\inf_x$ та $\sup_y$ над цією функцією. Покажемо, що двоїста задача до кожної задачі математичного програмування є завжди опуклою, якщо розглядати її як задачу мінімізації.

Теорема 2.12. *У задачі (2.39) множина Y опукла, функція φ угнута на Y.*

Наступна теорема вказує на взаємозв'язки між задачею математичного програмування та двоїстою до неї задачею.

Теорема 2.13. *1. Для довільних $x \in X$, $y \in Q$ справедлива нерівність*

$$f(x) \geq \varphi(y). \tag{2.41}$$

2. Якщо $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, то

$$\hat{f} \geq \hat{\varphi}, \tag{2.42}$$

тобто значення прямої задачі (на мінімум) завжди не менше за значення двоїстої задачі (на максимум).

У нерівності (2.42) можливий випадок $\hat{f} > \hat{\varphi}$. Проте центральною проблемою теорії двоїстості є пошук умов, при яких значення прямої та двоїстої задач ідентичні, тобто $\hat{f} = \hat{\varphi}$, або, ураховуючи (2.40),

$$\inf_{x \in P} \sup_{y \in Q} L(x, y) = \sup_{y \in Q} \inf_{x \in P} L(x, y).$$

Із цієї рівності, яка називається *відношенням двоїстості*, випливає ряд важливих наслідків. Зокрема, це відношення дає змогу звести пошук прямої задачі до відшукання розв'язків двоїстої, яка іноді є простішою.

Сформулюємо основний результат теорії двоїстості.

Теорема 2.14 (теорема двоїстості). *Нехай виконуються припущення теореми 2.11. Якщо значення прямої задачі (2.35) скінченне ($\hat{f} > -\infty$), то множина розв'язків двоїстої задачі (2.39)* *непорожня та дорівнює множині векторів Куна – Таккера задачі (2.35). При цьому справедливе відношення двоїстості*

$$\hat{f} = \hat{\varphi}. \tag{2.43}$$

Із теореми 2.14 випливає інше важливе твердження.

Теорема 2.15. *Нехай виконуються припущення теореми 2.11. Якщо допустима множина Y двоїстої задачі (2.39) непорожня, то вона має розв'язок. Якщо ж $Y = \emptyset$, то значення прямої задачі (2.35) нескінченне ($\hat{f} = -\infty$).*

Наведемо іншу теорему про зв'язок між прямою і двоїстою задачами.

Теорема 2.16. *Нехай у задачі (2.35) множина P замкнута й опукла, функції $f, g_1, \ldots, g_k$ неперервні й опуклі на P, функції $g_{k+1}, \ldots, g_m$ лінійні, множина розв'язків цієї задачі непорожня й обмежена. Тоді $Y \neq \emptyset$ і $\hat{f} = \hat{\varphi}$.*

Вкажемо одну достатню умову того, що множина розв'язків задачі (2.35) непорожня.

Теорема 2.17. *Нехай у задачі (2.35) множина P замкнута й опукла, функції $f, g_1, \ldots, g_k$ неперервні й опуклі на P, функції $g_{k+1}, \ldots, g_m$ лінійні та множина X не порожня. Припустимо, що при деякому $y \in Y$ множина $P(y)$ всіх точок із P таких, що $\varphi(y) = \inf\limits_{x \in P} L(x, y)$, тобто*

$$P(y) = \left\{ x^0 \in P \,\middle|\, L\left(x^0, y\right) = \min_{x \in P} L\left(x, y\right) \right\},$$

непорожня й обмежена. Тоді множина розв'язків задачі (2.35) непорожня й обмежена.

2.9. Теорема Куна – Таккера для недиференційовних функцій

У попередніх розділах наведені теореми, що встановлюють необхідні й достатні умови оптимальності в задачі опуклого програмування для диференційовних функцій. Нижче подані теореми, які вже не використовують похідних і не вимагають диференційовності функцій.

Теорема 2.18 (теорема Куна – Таккера у формі двоїстості). *Нехай виконуються припущення теореми 2.11. Точка $\hat{x} \in X$ є розв'язком задачі (2.35) тоді і тільки тоді, коли існує вектор $\hat{y} \in Q$ такий, що справедливе співвідношення двоїстості*

$$f(\hat{x}) = \varphi(\hat{y}), \tag{2.44}$$

яке рівносильне умовам

$$L(\hat{x}, \hat{y}) \leq \min_{x \in P} L(x, \hat{y}), \tag{2.45}$$

$$\hat{y}_i g_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.46}$$

Множина векторів $\hat{y} \in Q$, які задовольняють (2.44), дорівнює множині розв'язків двоїстої задачі (2.39) або ж (див. теорему 2.14) множині векторів Куна – Таккера прямої задачі (2.35).

Зауваження 2.8. У тому випадку, коли функції $f, g_1, \ldots, g_k$ диференційовні в точці $\hat{x}$, умова (2.45) рівносильна умові (2.20) при $\hat{y}_0 = 1$ (теорема 2.2). У той же час умова (2.46) – це та сама умова (2.21). Отже, теорема 2.18 є узагальненням теореми 2.7 на випадок недиференційовних функцій. У зв'язку з цим важливо підкреслити, що саме поняття вектора Куна – Таккера є узагальненням поняття вектора множників Лагранжа (тобто вектора $\hat{y} \in Q$, що задовольняє умови (2.20), (2.21) при $\hat{y}_0 = 1$). Із попереднього зрозуміло, що в межах теореми 2.7 ці два поняття, а також поняття розв'язку двоїстої задачі, еквівалентні.

Застосування теореми 2.18 виявляється особливо ефективним у тих випадках, коли яким-небудь чином вдається заздалегідь знайти розв'язок $\hat{y}$ двоїстої задачі. Тоді пошук розв'язків вихідної задачі зводиться до знаходження розв'язків рівняння (2.44) або системи (2.45), (2.46) на множині X.

Приклад 2.4. Розв'яжемо задачу на умовний екстремум

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 0, \tag{2.47}$$

де $a_1, \ldots, a_n$ – задані числа. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| + y \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$. Перевіряємо, що

$$\inf_{x_j \in \mathbb{R}} (|x_j - a_j| + y x_j) = \begin{cases} y a_j, & |y| \le 1, \\ -\infty, & |y| > 1. \end{cases}$$

Отже,

$$\varphi(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y) = \begin{cases} yA, & |y| \le 1, \\ -\infty, & |y| > 1. \end{cases}$$

де $A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$. Двоїста задача має вигляд

$$\varphi(y) = yA \to \max, \quad -1 \le y \le 1.$$

Її розв'язком є $\hat{y} = \operatorname{sign} A$. При цьому $\varphi(\hat{y}) = |A|$. Згідно з теоремою 2.18 розв'язки задачі (2.47) ідентичні розв'язкам рівняння (2.44) на множині X, тобто системи

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| = |A|, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 0. \tag{2.48}$$

Якщо $A = 0$, то $x = (a_1, \ldots, a_n)$ – єдиний розв'язок цієї системи. Нехай $A \ne 0$. Будемо шукати розв'язки у вигляді

$$x_j = a_j - \lambda_j A, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.49}$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – деякі числа. Підставляючи (2.49) у (2.48), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Звідси $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_n \ge 0$. Тепер зрозуміло, що всі розв'язки системи (2.48), а відповідно, і розв'язки задачі (2.47), описуються формулою (2.49), де $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_n \ge 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Із наведеного прикладу видно, що для знаходження розв'язків задачі (2.35), рівняння (2.44) або систему (2.45), (2.46) слід розв'язувати саме на множині X, а не на множині P. Вкажемо важливий окремий випадок, коли умову $\hat{x} \in X$ можна не враховувати, оскільки вона виконується автоматично.

Теорема 2.19. *Нехай виконуються припущення теореми 2.11, $\hat{y}$ – розв'язок задачі (2.39), та нехай задача (2.35) має розв'язок. Якщо $\hat{x}$ – єдина точка множини P, що задовольняє одній з умов (2.44)–(2.46), то $\hat{x}$ – єдиний розв'язок задачі (2.35).*

Теорему 2.18 можна сформулювати у більш привабливій формі, якщо скористатись поняттям сідлової точки.

Означення 2.5. Пара $(\hat{x}, \hat{y}) \in P \times Q$ називається *сідловою точкою* функції $L(x, y)$ на $P \times Q$, якщо виконуються співвідношення

$$L(\hat{x}, \hat{y}) = \min_{x \in P} L(x, \hat{y}), \tag{2.50}$$

$$L(\hat{x}, \hat{y}) = \max_{y \in Q} L(\hat{x}, y), \tag{2.51}$$

тобто, якщо

$$L(x, \hat{y}) \geq L(\hat{x}, \hat{y}) \geq L(\hat{x}, y)$$

при всіх $x \in P, y \in Q$.

Наступна теорема – це теорема Куна – Таккера як твердження про сідлову точку.

Теорема 2.20. *Нехай виконуються припущення теореми 2.11. Точка $\hat{x} \in P$ є розв'язком задачі (2.35) тоді й лише тоді, коли існує вектор $\hat{y} \in Q$ такий, що пара $(\hat{x}, \hat{y})$ є сідловою точкою функції Лагранжа $L(x, y)$ на $P \times Q$.*

Іноді теореми 2.18 та 2.20 зручніше використовувати як твердження про умови одночасної оптимальності даних точок у прямій та двоїстій задачах.

Теорема 2.21. *Нехай виконуються припущення теореми 2.11. Тоді маємо таке:*
1) точки $\hat{x} \in X$ і $\hat{y} \in Y$ є розв'язками задач (2.35) і (2.39) відповідно тоді і тільки тоді, коли справедливе співвідношення двоїстості (2.44), яке рівносильне умовам (2.45) і (2.46);
2) точки $\hat{x} \in P$ і $\hat{y} \in Q$ є розв'язками задач (2.45) і (2.46) відповідно тоді і тільки тоді, коли пара $(\hat{x}, \hat{y})$ є сідловою точкою функції Лагранжа $L(x, y)$ на $P \times Q$.

Відмітимо, що у твердженні 1) можна було б поставити $\hat{y} \in \in Q$, оскільки з умови (2.44) випливає, що $\hat{y} \in Q$. Відмінність між твердженнями 1) і 2) полягає в тому, що в 1) зразу припускається умова допустимості $\hat{x} \in X$, а в 2) – ні.

Наведемо ще одну форму необхідних і достатніх умов оптимальності, яка вимагає вже більш сильних припущень щодо задачі (2.35). Це теорема Куна – Таккера в субдиференціальній формі.

Теорема 2.22 (теорема Куна – Таккера). *Нехай виконуються припущення теореми 2.11 і, крім того, функції f, $g_1, \ldots, g_k$ опуклі на відкритій опуклій множині U, яка включає P. Будемо вважати, що лінійні функції $g_{k+1}, \ldots, g_m$ мають вигляд $g_i(x) = \langle a_i, x \rangle + b_i$, $i = k+1, \ldots, m$. Точка $\hat{x} \in X$ є розв'язком задачі (2.35) тоді й лише тоді, коли існують вектори $\hat{y} \in Q$, $a_0 \in \partial f(\hat{x})$, $a_i \in \partial g_i(\hat{x})$, $i = 1, \ldots, k$, такі, що*

$$\left\langle a_0 + \sum_{i=1}^{m} y_i a_i,\ x - \hat{x} \right\rangle \geq 0 \quad \textit{при всіх} \quad x \in P, \tag{2.52}$$

$$\hat{y}_i g_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

2.10. Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі на екстремум.

2.1. $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 \to \min,$
$4 \leq x_1 \leq 8,\ -1 \leq x_2 \leq 2.$

2.2. $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2 \to \min,\ -1 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 1,$
$a > 0, 4ac > b^2.$

2.3. $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \to \min,\ 2 \leq x_1 \leq 3,$

$3 \le x_2 \le 4$, $a \in \mathbb{R}$.

2.4. $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c, x\rangle \to \min, \quad x \ge 0.$

2.5. $f(x) = \|x\| - \langle c, x\rangle \to \min, \quad x \ge 0.$

2.6. $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \|x - c\| \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n.$

2.7. Вказати значення числа $a \in \mathbb{R}$, при яких точка $(0, 0)$ є розв'язком задачі

$$f(x_1, x_2) = e^{a^2 x_1} + e^{a^2 x_2} + 2a x_1 - x_2 \to \min, 0 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 0.$$

2.8. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + |x_1 - x_2 - 2| \to \min.$

2.9. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4 \max\{x_1, x_2\} \to \min.$

2.10. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \to \min.$

2.11. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + a|x_1 + x_2 - 1| \to \min.$

2.12. Нехай у задачі (2.1) множина X опукла, функція f має похідну за будь-яким напрямком $h \in V(\hat{x}, X)$ в точці $\hat{x} \in X$, тобто величина

$$f'(\hat{x}, h) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(\hat{x} + \alpha h) - f(\hat{x})}{\alpha}$$

існує та скінченна. Показати, що $\langle f'(\hat{x}), h\rangle \ge 0$ при всіх $h \in V(\hat{x}, X)$, якщо $\hat{x}$ – локальний розв'язок задачі (2.1).

Задачі до підрозділу 2.4.

2.13. Навести приклад задачі, для якої в умовах (2.21) обидва множники перетворюються на нуль.

2.14. Показати, що в теоремі 2.4 множники Лагранжа $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m$ можна вибрати таким чином, що не більше $n + 1$ із них будуть відмінні від нуля.

2.15. Впевнитися, що в теоремі 2.5 функції $g_i, k + 1 \le i \le m$, можна вважати опуклими, якщо $\hat{y}_i \ge 0$, та угнутими, якщо $\hat{y}_i \le 0$.

2.16. Показати, що в умові 2) теореми 2.6 функції $g_1, \ldots, g_k$ можна вважати угнутими на P.

2.17. Показати таке: якщо виконуються умови теореми 2.9 при $\hat{y}_0 = 0$, то $\hat{x}$ – ізольована точка множини X. Перевірити, що саме такий випадок справджується у задачі

$$f(x_1, x_2) = x_1 \to \min, \; x_1^2 + x_2^2 \le 1, \; x_1^3 + x_2^3 = 1.$$

2.18. На прикладі задачі

$$f(x_1, x_2) = x_1 \to \min,\ x_1^2 + x_2^2 \geq 1,\ x_1^3 + x_2^3 = 1,$$

впевнитися, що в теоремі 2.9 умова лінійної незалежності градієнтів $g_i'(\hat{x}),\ i \in S(\hat{x})$, суттєва.

2.19. Висуваючи з геометричних міркувань гіпотезу, а потім перевіряючи її, знайти розв'язки таких задач:

а) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min, \quad x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4,$
$2x_1^2 + x_2 \geq 2,\ x_1 \geq 2x_2;$

б) $f(x_1, x_2) = x_1 \to \max, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geq 1,$
$x_1 + x_2 \leq 1;$

в) $f(x_1, x_2) = 10(x_1 - 3,5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 \to \min,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1,$
$x_1 + x_2 \leq 6,\ x_1 - x_2 \leq 1,\ 2x_1 + x_2 \geq 6,\ 0,5x_1 - x_2 \geq -4;$

г) $f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$
$x_1 + x_2 \geq 2,\ x_1 - x_2 \geq -2,\ x_1 + x_2 \leq 6,\ x_1 - 3x_2 \leq 2.$

2.20. Запропонувати метод розв'язання задачі

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2 \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

2.21. Розв'язати задачі:

а) $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \sqrt{x_j} \to \max, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \leq 1, \quad x_i \geq 0,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n;$

б) $\prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j} \to \max, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j \leq 1,\ x_i \geq 0,\ \lambda_i > 0,\ p_i > 0,$
$i = 1, \ldots, n;$

в) $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2 \to \min, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 0.$

2.22. Розв'язати задачу

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \to \min, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 1,$$

при всіх можливих значеннях a, b і c. Звернути увагу на те, як спрощує розв'язування припущення про опуклість цільової функції: $a \geq 0, c \geq 0, 4ac \geq b^2$.

2.23. Впевнитися, що $(-1,-1)$ – стаціонарна точка задачі

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{3}x_1^3+x_2\to\min,\quad x_1^2+x_2^2\le 2,$$

що потрапляє у "щілину" між теоремами 2.8 і 2.9. З'ясувати, чи є ця точка розв'язком задачі.

Задачі до підрозділу 2.7.

2.24. Переконатися, що множина $\hat{Y}$ векторів Куна – Таккера задачі (2.35) завжди опукла й замкнута.

2.25. Нехай в задачі (2.35) виконується умова 1) теореми 2.11 (умова Слейтера). Показати, що множина $\hat{Y}$ обмежена. Чи буде множина $\hat{Y}$ обмеженою при виконанні умов 2), 3) або 4) цієї теореми 2.11?

2.26. Перевірити, що задача опуклого програмування

$$f(x)=x\to\min,\quad x^2+\varepsilon|x|\le 0,\quad x\in\mathbb{R},$$

де $\varepsilon>0$, не задовольняє жодну з умов 1)–4) теореми 2.11, проте має вектор Куна – Таккера.

2.27. Встановити зв'язок між векторами Куна – Таккера задачі

$$f(x)\to\min,\ \ g_i(x)\le 0,\ \ i=1,\dots,m,\ \ x\in P,$$

та еквівалентної задачі

$$f(x)\to\min,\quad \max_{i=1,\dots,m} g_i(x)\le 0,\ \ x\in P.$$

2.28. Перевірити, що співвідношення двоїстості $(\hat{f}=\hat{\varphi})$ порушується для таких задач:

а) $f(x)=x-1\to\min,\ \ x^2-1=0,\ \ x\in\mathbb{R}_+$;

б) $f(x)\to\min,\ \ x^2\le 0,\ \ x\in\mathbb{R}_+$, де $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

Для кожної задачі з'ясувати причини цього явища.

2.29. (Загальна схема двоїстості.) Нехай P і Q – довільні множини з $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ відповідно, $L(x,y)$ – довільна числова функція на $P\times Q$. Покладемо

$$f(x)=\sup_{y\in Q}L(x,y),\quad \varphi(y)=\inf_{x\in P}L(x,y).$$

Задача

$$f(x) \to \min, \quad x \in P,$$

називається прямою, а задача

$$\varphi(y) \to \max, \quad y \in Q,$$

– двоїстою задачею. (Тут допускаються нескінченні значення цільових функцій.) Нехай

$$\hat{f} = \inf_{x \in P} f(x), \quad \hat{\varphi} = \sup_{y \in Q} \varphi(y)$$

– значення цих задач, а

$$\hat{X} = \{\hat{x} \in P | f(\hat{x}) = \hat{f}\}, \quad \hat{Y} = \{\hat{y} \in Q | \varphi(\hat{y}) = \hat{\varphi}\}$$

– множини їхніх розв'язків. Довести такі твердження:

а) $f(x) \geq \varphi(y)$ при всіх $x \in P$, $y \in Q$ та $\hat{f} \geq \hat{\varphi}$;

б) якщо $\hat{x} \in P$ та $f(\hat{x}) = \hat{\varphi}$, то $\hat{x} \in \hat{X}$;

в) якщо $\hat{y} \in Q$ та $\varphi(\hat{y}) = \hat{f}$, то $\hat{y} \in \hat{Y}$;

г) якщо $\hat{x} \in P$, $\hat{y} \in Q$ та $f(\hat{x}) = \varphi(\hat{y})$, то $\hat{x} \in \hat{X}$, $\hat{y} \in \hat{Y}$;

д) при даних $\hat{x} \in P$ та $\hat{y} \in Q$ рівність $f(\hat{x}) = \varphi(\hat{y})$ рівносильна тому, що $(\hat{x}, \hat{y})$ – сідлова точка функції $L(x, y)$ на $P \times Q$.

2.30. Нехай за умов попередньої задачі множини P та Q опуклі, функція $L(x, y)$ опукла по x на P при кожному $y \in Q$ і угнута по y на Q для всіх $x \in P$. Нехай також множина P (чи Q) замкнута, множина $\hat{X}$ (множина $\hat{Y}$) непорожня й обмежена, функція $L(x, y)$ неперервна по x на P при кожному $y \in Q$ (по y на Q при кожному $x \in P$). Довести, що $\hat{f} = \hat{\varphi}$.

2.31. Застосовуючи схему міркувань із прикладу 2.4, розв'язати такі задачі ($a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ – задані числа):

а) $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \to \min, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} b_j x_j = 0;$

б) $\sum\limits_{j=1}^{n} \max(x_j - a_j; 0) \to \min, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} b_j x_j \leq 0;$

в) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \to \min, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} b_j |x_j| \leq 1 \quad (b_j > 0, j = 1, \ldots, n);$

г) $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \to \min, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1.$

3. Задачі варіаційного числення

3.1. Задача про брахістохрону

У 1696 р. І. Бернуллі сформулював таку задачу. Нехай у вертикальній площині задані дві точки A, B (рис. 3). Визначити шлях, рухаючись по якому під дією сили власної ваги, тіло переміститься з точки A в точку B за найкоротший відрізок часу. Виберемо у площині систему координат (x, y) так, щоб вісь X була горизонтальною, а вісь Y — спрямована вниз. Вважатимемо, що точка A збігається з початком координат, а точка B має координати (x_1, y_1), $x_1 > 0$, $y_1 > 0$. Нехай $y(x)$ — функція, яка задає

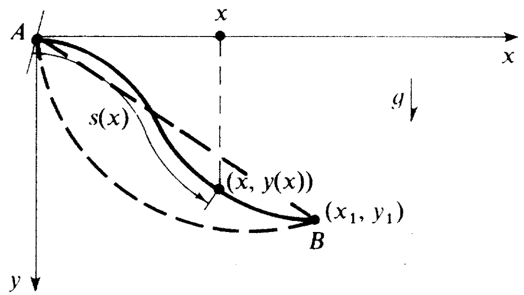


Рис. 3: Задача про брахістохрону

рівняння кривої, що з'єднує точки A і B. Відповідно до закону Галілея швидкість тіла у точці $(x, y(x))$ залежить не від форми кривої $y(x)$, а від самої ординати $y(x)$. Ця швидкість дорівнює $\sqrt{2gy(x)}$, де g — прискорення вільного падіння. Тому час, за який тіло переміститься з точки $(x, y(x))$ в точку $(x + dx, y(x) + dy)$ по кривій довжиною $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$, дорівнює $ds/\sqrt{2gy(x)}$. Звідси виникає така формалізація задачі про брахістохрону:

$$J(y(\cdot)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx \to \inf, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{3.1}$$

Задача про брахістохрону звелась до задачі визначення такої неперервної функції $y = y(x)$ на відрізку $[0, x_1]$, яка набуває заданих значень на кінцях відрізка: $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$, і на якій досягає мінімального значення функціонал $J(y(\cdot))$, заданий формулою (3.1).

Головна відмінність цієї задачі від задачі дослідження на екстремум функції однієї чи багатьох змінних полягає в тому, що функціонал $J(y(\cdot))$ визначений на множині всіх кривих, що з'єднують дві точки, а множина всіх таких кривих має нескінченну розмірність. Тобто задача про брахістохрону — це задача на екстремум функції нескінченної кількості змінних.

3.2. Найпростіша задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера

Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа на множині функцій із закріпленими кінцями) — це задача визначення екстремуму інтегрального функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr} \tag{3.2}$$

на множині функцій із простору $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ неперервно диференційовних скалярних функцій на відрізку $[t_0, t_1]$, що задовольняють граничні умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{3.3}$$

Простір $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ є банаховим, тобто повним нормованим простором відносно норми

$$\|x(\cdot)\|_1 = \max\{\max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t)|, \quad \max_{t_0 \le t \le t_1} |x'(t)|\}.$$

Функція $L(t, x, x')$, яка задає функціонал $J(x(\cdot))$, називається *інтегрантом* або *лагранжіаном* задачі. Будемо вважати, що функція $L(t, x, x')$ неперервна за всіма змінними разом зі своїми частинними похідними $L_x(t, x, x')$, $L_{x'}(t, x, x')$.

Функції $x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, називаються *допустимими* в задачі (3.2), (3.3), якщо вони належать простору $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ і задовольняють граничні умови (3.3).

Функціонал $J(x(\cdot))$ досягає на допустимій функції $\hat{x}(\cdot)$ *сильного локального мінімуму* (*сильного локального максимуму*), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для всіх допустимих функцій $x(\cdot)$, які задовольняють умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_0 = \max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t) - \hat{x}'(t)| \le \varepsilon,$$

виконується нерівність $J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot)) \quad (J(x(\cdot)) \le J(\hat{x}(\cdot)))$.

Функціонал $J(x(\cdot))$ досягає на допустимій функції $\hat{x}(\cdot)$ *слабкого локального мінімуму* (*слабкого локального максимуму*), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для всіх допустимих функцій $x(\cdot)$, які задовольняють умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 = \max\left(\max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t) - \hat{x}(t)|, \max_{t_0 \le t \le t_1} |x'(t) - \hat{x}'(t)|\right) < \varepsilon,$$

виконується нерівність

$$J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot)), \quad \Big(J(x(\cdot)) \le J(\hat{x}(\cdot))\Big).$$

При визначенні сильного мінімуму (максимуму) порівнюються значення функціонала $J(x(\cdot))$ на допустимих функціях $x(\cdot)$, значення яких близькі до значень функції $\hat{x}(\cdot)$, тобто таких, що задовольняють умову $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

При визначенні слабкого мінімуму (максимуму) порівнюються значення функціонала $J(x(\cdot))$ на допустимих функціях $x(\cdot)$, значення яких близькі до значень $\hat{x}(\cdot)$, і значення похідної $x'(\cdot)$ близькі до значень похідної $\hat{x}'(\cdot)$, тобто

$$\begin{aligned} |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon \quad &\text{для всіх } t \in [t_0, t_1], \\ |x'(t) - \hat{x}'(t)| < \varepsilon \quad &\text{для всіх } t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Якщо на функції $\hat{x}(\cdot)$ досягається сильний екстремум, то досягається і слабкий екстремум. Тому необхідні умови слабкого екстремуму будуть необхідними умовами сильного екстремуму, а достатні умови сильного екстремуму будуть достатніми умовами слабкого екстремуму.

Теорема 3.1 (необхідна умова екстремуму). *Нехай функція* $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ *— розв'язок задачі (3.2), (3.3). Тоді вона задовольняє рівняння*

$$L'_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - \frac{d}{dt} L'_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = 0. \tag{3.4}$$

Рівняння (3.4) називають *рівнянням Ейлера*. Допустима функція, що задовольняє це рівняння, називається *екстремаллю*. Таким чином, локальні екстремуми задачі – це екстремалі.

Рівняння Ейлера в інтегральній формі має вигляд

$$L'_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = \int_{t_0}^{t} L'_x(u, \hat{x}(u), \hat{x}'(u))\, du + C. \tag{3.5}$$

За припущенням функція $L'_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ неперервна, а функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$. Тому обидві частини рівняння можна диференціювати й одержати рівняння Ейлера в диференціальній формі. Його можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} L'_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - L''_{x't}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - L''_{x'x}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))\hat{x}'(t) \\ - L'_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))\hat{x}''(t) = 0. \end{aligned}$$

Це нелінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно шуканої функції $\hat{x}(\cdot)$. Загальний розв'язок рівняння залежить від двох невідомих констант. Ці константи визначають, використовуючи граничні умови (3.3).

Приклад 3.1. Знайти екстремалі задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((x')^2(t) - x^2(t)\big)\, dt \to \text{extr},$$

$$x(0) = 0, \quad x\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1.$$

Розв'язання. Маємо

$$L(t, x, x') = (x')^2 - x^2,$$

$$L'_x = -2x, \quad L'_{x'} = 2x', \quad \frac{d}{dt} L'_{x'} = 2x''.$$

Рівняння Ейлера має вигляд $x'' + x = 0$. Його загальний розв'язок

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Із граничних умов обчислимо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Відповідь. Функція $x(t) = \sin t$ — єдина допустима екстремаль.

У цьому прикладі рівняння Ейлера легко інтегрується. Проте це можливо не завжди.

3.3. Інтеграли рівняння Ейлера

Опишемо класи задач, в яких рівняння Ейлера інтегрується.

1. Функція L не залежить від x': $L = L(t, x)$. Рівняння Ейлера має вигляд $L'_x(t, x(t)) = 0$. Це взагалі не диференціальне рівняння. Розв'язки рівняння не містять невідомих констант і можуть не проходити через граничні точки (t_0, x_0), (t_1, x_1). Лише тоді, коли розв'язок рівняння $L'_x(t, x(t)) = 0$ проходить через ці точки, існує функція, що може давати екстремум функціонала.

Приклад 3.2. Знайти екстремалі задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} x^2(t)\, dt \to \text{extr},$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера має вигляд $x(t) = 0$. Екстремаль $x(t) = 0$ проходить через граничні точки лише тоді, коли $x_0 = 0$, $x_1 = 0$. Якщо ця умова не виконується, то екстремуму функціонал на неперервних функціях не досягає.

Відповідь. Якщо $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, то $x(t) = 0$ — єдина екстремаль. Якщо $x_0 \neq 0$ або $x_1 \neq 0$, то допустимих екстремалей не існує.

2. Функція L лінійно залежить від x':

$$L(t,x,x') = M(t,x) + x'N(t,x).$$

Рівняння Ейлера має вигляд $M'_x(t,x(t)) - N'_t(t,x(t)) = 0$. Це також не диференціальне рівняння і в загальному випадку його розв'язки не задовольняють граничні умови. Якщо ж $M'_x - N'_t \equiv 0$, то $M dt + N dx$ є точним диференціалом і

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(M + N\frac{d}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} (M\,dt + N\,dx)$$

не залежить від шляху інтегрування. Тоді варіаційна задача не має змісту.

Приклад 3.3. Знайти екстремалі задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \big(x^2(t) + t^2 x'(t)\big)\,dt \to \operatorname{extr},$$
$$x(0) = 0, \quad x(1) = a.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера має вигляд $x(t) = t$. Перша гранична умова задовольняється, а друга — лише за умови, що $a = 1$. Якщо ж $a \neq 1$, то екстремалі, яка задовольняє граничні умови, не існує.

Відповідь. Якщо $a = 1$, то $\hat{x}(t) = t$ — єдина екстремаль. Якщо $a \neq 1$, то допустимих екстремалей не існує.

Приклад 3.4. Знайти екстремалі задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(x(t) + t x'(t)\big)\,dt \to \operatorname{extr},$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера для цієї задачі перетворюється на тотожність $1 = 1$. Вираз під знаком інтеграла є точним диференціалом. Тому інтеграл не залежить від шляху інтегрування

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (x\,dt + t\,dx) = \int_{t_0}^{t_1} d(tx) = t_1 x_1 - t_0 x_0.$$

Відповідь. Варіаційна задача не має змісту.

3. Функція L залежить лише від x'. Рівняння Ейлера має вигляд $L''_{x'x'}(x')x'' = 0$. Розв'язками такого рівняння будуть лише функції $x(t) = C_1 t + C_2$. Тому екстремалями задачі будуть лише прямі лінії.

Приклад 3.5. Серед усіх кривих, що з'єднують точки $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$, визначити таку, яка має найменшу довжину.

Розв'язання. Довжина дуги кривої, яка з'єднує точки $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$ обчислюється за формулою

$$l(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (x')^2(t)}\, dt, \quad x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1.$$

Функціонал $l(x(\cdot))$ залежить лише від $x'(\cdot)$. Отже, він може досягати екстремуму лише на відрізках прямих ліній. *Відповідь.* Серед усіх кривих, що з'єднують точки $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$, найменшу довжину має відрізок прямої лінії.

4. Функція L залежить лише від t, x': $L = L(t, x')$. Рівняння Ейлера має вигляд $\frac{d}{dt} L'_{x'}(t, x') = 0$ або $L'_{x'}(t, x') = C$. Це так званий *інтеграл імпульсу*. Якщо рівняння не розв'язується відносно x', то його можна визначити методом уведення параметра.

Приклад 3.6. Знайти екстремалі задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + (x')^2(t)}}{t}\, dt \to \mathrm{extr},$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера $L'_{x'}(t, x(t)) = C$ для цієї задачі має вигляд

$$\frac{x'}{t\sqrt{1 + (x')^2}} = C.$$

Це рівняння можна інтегрувати, якщо ввести параметр. Нехай $x' = \tan(u)$. Тоді з рівняння Ейлера знаходимо

$$t = x' C^{-1} (1 + (x')^2)^{-\frac{1}{2}} = C_1 \sin(u),$$

де $C_1 = 1/C$. Щоб знайти вираз x через u, використаємо рівність $x' = \frac{dx}{dt} = \tan(u)$. Тоді

$$dx = x'\, dt = \tan(u) \cdot C_1 \cos(u)\, du = C_1 \sin(u)\, du.$$

Інтегруючи це рівняння, дістанемо $x = -C_1 \cos(u) + C_2$. Тепер ми маємо залежність змінних x, t від параметра u:

$$x = -C_1 \cos(u) + C_2, \quad t = C_1 \sin(u).$$

Якщо вилучити параметр, то дістанемо $t^2 + (x - C_2)^2 = C_1^2$. Це рівняння кола. Невідомі константи C_1, C_2 визначаємо з граничних умов.

Відповідь. Допустимі екстремалі задачі задаються рівнянням у параметричный формы $x = -C_1 \cos(u) + C_2$, $t = C_1 \sin(u)$ або рівнянням $t^2 + (x - C_2)^2 = C_1^2$.

5. Функція L залежить лише від x, x'. У цьому разі рівняння Ейлера має перший інтеграл (*інтеграл енергії*)

$$L(\hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - \hat{x}'(t) L'_{x'}(\hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = C.$$

Щоб переконатись у цьому, обчислимо

$$\frac{d}{dt}(L - x' L'_{x'}) = L'_x x' + L'_{x'} x'' - x'' L'_{x'} - L''_{x'x}(x')^2 - L''_{x'x} x' x'' =$$
$$= x' \left(L'_x - \frac{d}{dt} L'_{x'} \right).$$

Рівняння $L - x' L'_{x'} = C$ можна інтегрувати методом введення параметра.

Приклад 3.7 (*задача про найменшу поверхню обертання*). Визначити криву, яка проходить через точки $A(a, a_1)$, $B(b, b_1)$ і від обертання якої навколо осі утворюється поверхня мінімальної площі (рис. 4).

1. Формалізація задачі. Площу *поверхні обертання* обчислюють за формулою

$$S(y(\cdot)) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y')^2(x)}\, dx.$$

Отже, формалізована задача записується так:

$$S(y(\cdot)) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y')^2(x)}\, dx \to \inf,$$

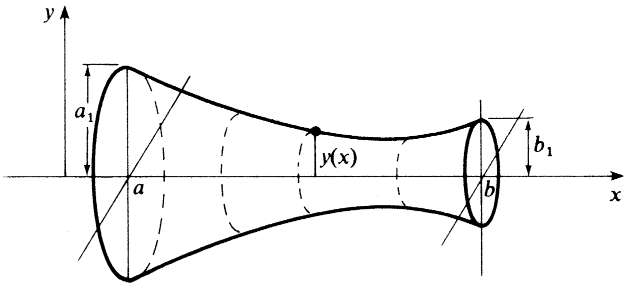


Рис. 4: Поверхня обертання

$$y(a) = a_1,\ y(b) = b_1.$$

2. Складемо рівняння Ейлера. Підінтегральна функція залежить лише від y, y'. Тому рівняння Ейлера має вигляд

$$y\sqrt{1+(y')^2} - \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

або $y\big(1+(y')^2\big)^{-\frac{1}{2}} = C$. Це рівняння можна інтегрувати, якщо ввести параметр. Нехай $y' = \sinh(u)$. Тоді $y = C\cosh(u)$,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C\sinh(u)\,du}{\sinh(u)} = C\,du.$$

Звідси $x = Cu + C_1$. Отже, мінімальна *поверхня обертання* утворюється кривою, рівняння якої в параметричній формі має вигляд $y = C\cosh(u)$, $x = Cu + C_1$. Вилучаючи параметр, дістаємо

$$y(x) = C\cosh\left(\frac{x - C_1}{C}\right).$$

Це рівняння *ланцюгових ліній*, від обертання яких утворюються поверхні, що називаються *катеноїдами*.

Відповідь. Найменша поверхня обертання утворюється кривою $y(x) = C\cosh\left(\frac{x-C_1}{C}\right)$.

Приклад 3.8 (*задача про брахістохрону*).

$$J(x(\cdot)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\, dt \to \inf, \quad y(0)=0,\, y(x_1)=y_1.$$

Розв'язання. Функція L під знаком інтеграла залежить лише від y, y'. Тому рівняння Ейлера має перший інтеграл $L - y'L'_{y'} = C$. Це рівняння має вигляд

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2(x)}} = C.$$

Після спрощення отримуємо рівняння $y\big(1+(y')^2(x)\big) = C_1$. Уведемо параметр за допомогою підстановки $y = \cot(u)$, тоді

$$\begin{aligned}
y &= \frac{C_1}{1+\cot^2(u)} = C_1 \sin^2(u) = \frac{C_1}{2}(1-\cos(2u)),\\
dx &= \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin(u)\cos(u)}{\cot(u)} = 2C_1 \sin^2(u)\, du = C_1(1-\cos(2u))\, du,\\
x &= C_1\left(u - \frac{\sin(u)}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2u - \sin(2u)) + C_2.
\end{aligned}$$

У параметричній формі рівняння шуканої кривої має вигляд

$$x = \frac{C_1}{2}(2u - \sin(2u)) + C_2, \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos(2u)).$$

Якщо покладемо $2u = v$ та приймемо до уваги, що $C_2 = 0$ через $y(0) = 0$, то дістанемо рівняння *сім'ї циклоїд*

$$x = \frac{C_1}{2}(v - \sin(v)), \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos(v)),$$

де $C_1/2$ — радіус круга, що котиться. Цей радіус визначається з умови проходження циклоїди через точку $B(x_1, y_1)$.

Відповідь. Брахістрона — це циклоїда (рис. 5).

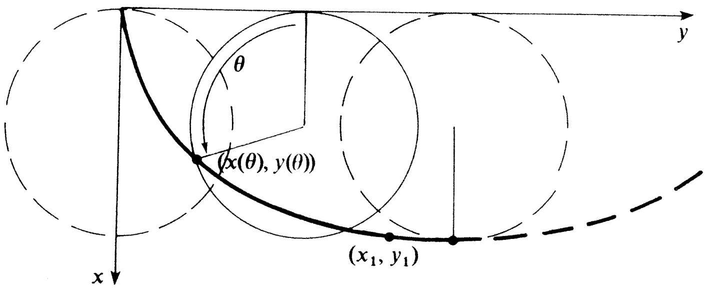


Рис. 5: Циклоїда

3.4. Задача Лагранжа на множині векторнозначних функцій

Розглянемо задачу на екстремум функціонала

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{3.6}$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \quad \overline{x}(t_1) = \overline{x}_1 \tag{3.7}$$

у класі функцій $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ із простору $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ неперервно диференційовних функцій на відрізку $[t_0, t_1]$. Вважається, що функція $L\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ під знаком інтеграла неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку за всіма $2n + 1$ змінними. Як і в найпростішій задачі варіаційного числення, функції $\bar{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ будемо називати допустимими в задачі (3.6)–(3.7), якщо вони належать простору $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ і задовольняють граничні умови $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$, $\overline{x}(t_1) = \overline{x}_1$. Позначимо через H_0 підпростір у просторі $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, який породжений функціями, що задовольняють нульові граничні умови $\overline{h}(t_0) = \overline{h}(t_1) = 0$. Зауважимо, що функції $\overline{x}(\cdot)$ та $\overline{x}(\cdot) + \overline{h}(\cdot)$, $\overline{h}(\cdot) \in H_0$, одночасно допустимі чи недопустимі в задачі (3.6)–(3.7).

Теорема 3.2. *Нехай функція $\hat{\bar{x}}(\cdot) = (\hat{x}_1(\cdot), \ldots, \hat{x}_n(\cdot))$ дає локальний екстремум задачі (3.6)–(3.7). Тоді вона задовольняє систему рівнянь Ейлера*

$$L'_{x_k}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) = \frac{d}{dt} L'_{x'_k}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)), \quad k = \overline{1, n}.$$

Приклад 3.9. Знайти екстремалі задачі

$$J(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((x')^2(t) + (y')^2(t) + 2x(t)y(t)\big)\, dt \to \text{extr},$$
$$x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Розв'язання. 1. Складемо систему диференціальних рівнянь Ейлера. Вона має вигляд

$$x'' - y = 0, \quad y'' - x = 0.$$

Вилучаючи одну зі змінних, наприклад y, дістанемо рівняння $x^{(4)} - x = 0$. Інтегруючи його, отримаємо загальний розв'язок системи рівнянь

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos(t) + C_4 \sin(t),$$
$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos(t) - C_4 \sin(t).$$

2. Використаємо граничні умови і дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 1$.

Відповідь. Функції $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = -\sin(t)$ — екстремалі задачі.

Приклад 3.10. Скласти диференціальне рівняння лінії поширення світла в оптично неоднорідному середовищі зі швидкістю $v(x, y, z)$.

Розв'язання. 1. Формалізація. Згідно з принципом Ферма світло проходить із точки $A(x_0, y_0, z_0)$ у точку $B(x_1, y_1, z_1)$ по лінії, вздовж якої час T проходження буде мінімальним. Якщо рівняння лінії $y = y(x)$, $z = z(x)$, то

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{(1 + (y')^2(x) + (z')^2(x))}}{v(x, y, z)}\, dx.$$

Отже, формалізована задача така:

$$T(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{(1 + (y')^2(x) + (z')^2(x))}}{v(x, y, z)}\, dx \to \min,$$
$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1.$$

2. Система рівнянь Ейлера для такого функціонала має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}{v^2(x, y, z)} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{v(x, y, z)} \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0, \quad (3.8)$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}{v^2(x, y, z)} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{v(x, y, z)} \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0. \quad (3.9)$$

Відповідь. Диференціальні рівняння (3.8), (3.9) визначають лінії поширення світла в оптично неоднорідному середовищі.

Приклад 3.11 (*задача про геодезичні лінії*). Скласти рівняння лінії найменшої довжини, що лежить на даній поверхні і з'єднує дві точки. Такая лінія називається *геодезичною.*

Розв'язання. 1. Формалізація. Нехай поверхня задана рівнянням $r = r(u, v)$, а лінія на поверхні визначена рівнянням $u = u(t)$, $v = v(t)$. Довжина її відрізка між точками, що відповідають значенням t_0, t_1 параметра t, обчислюється за формулою

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt,$$

де E, F, G — коефіцієнти першої квадратичної форми

$$E = \left(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u}\right), \quad F = \left(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}\right), \quad G = \left(\frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

Отже, формалізована задача така:

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt \to \min,$$
$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad u(t_1) = u_1, \quad v(t_1) = v_1.$$

2. Рівняння Ейлера такої задачі мають вигляд

$$\frac{E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}} = \frac{2(Eu' + Fv')}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}}; \quad (3.10)$$

$$\frac{E_v(u')^2 + 2F_v u'v' + G_v(v')^2}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}} = \frac{2(Fu' + Gv')}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}}. \quad (3.11)$$

Відповідь. Диференціальні рівняння (3.10), (3.11) визначають *рівняння геодезичної лінії* на поверхні.

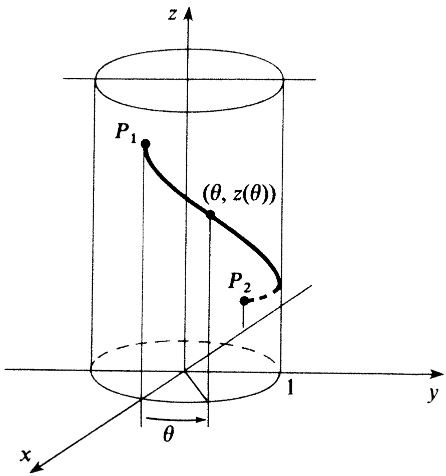


Рис. 6: Геодезичні лінії на циліндрі

Приклад 3.12 (*задача про геодезичні лінії на циліндрі*). Скласти рівняння лінії найменшої довжини, що лежить на циліндрі і з'єднує дві точки.

Розв'язання. Нехай $r = (a\cos(\theta), a\sin(\theta), z)$ — рівняння циліндра. Роль параметрів u, v відіграють змінні θ, z. Перша квадратична форма має такі коефіцієнти: $E = a$, $F = 0$, $G = 1$. Рівняння геодезичних для такої поверхні будуть мати вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{a^2\theta'}{\sqrt{a^2(\theta')^2 + (z')^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{z'}{\sqrt{a^2(\theta')^2 + (z')^2}} = 0,$$

звідки $\frac{dz}{d\theta} = C$, $z = C\theta + A$.

Отже, геодезичні на циліндрі — це *гвинтові лінії* (рис. 6).

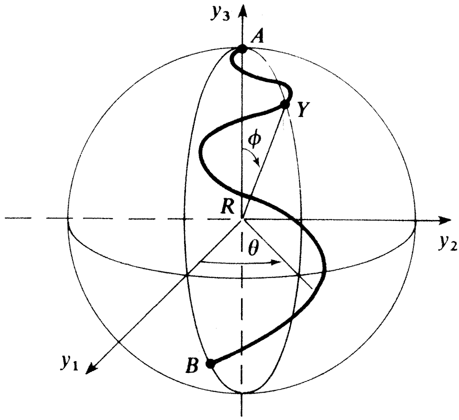


Рис. 7: Геодезичні лінії на сфері

Приклад 3.13 (*задача про геодезичні лінії на сфері*). Скласти рівняння лінії найменшої довжини, що лежить на сфері і з'єднує дві точки (рис. 7).

Розв'язання. Запишемо рівняння сфери у вигляді

$$r = r(\phi, \theta) = (R\cos(\phi)\sin(\theta), R\sin(\phi)\sin(\theta), R\cos(\theta)).$$

Тоді $E = R^2\sin^2(\theta)$, $F = 0$, $G = R^2$ і рівняння Ейлера мають вигляд

$$\phi'\sin^2(\theta) = C\big(1 + \sin^2(\theta)(\phi')^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

звідки

$$\theta' = \frac{-Cd(\cot(\phi))}{\sqrt{(1-C^2) - C^2\cot^2(\phi)}},$$

$$\theta(\phi) = \arccos(C_1\cot(\phi)) + C_2, \quad C_1 = C/\sqrt{(1-C^2)},$$

$$R\cos(\phi) = AR\cos(\theta)\sin(\phi) + BR\sin(\theta)\sin(\phi),$$

$$A = \frac{\cos(C_2)}{C_1}, \quad B = \frac{\sin(C_2)}{C_1}.$$

У декартових координатах це означає, що екстремаль лежить на сфері і задовольняє рівняння $z = Ax + By$. Це рівняння площини, що проходить через центр сфери і перетинає сферу по великому колу. Отже, геодезична лінія на сфері — це *дуга великого кола.*

3.5. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку

Розглянемо задачу дослідження на екстремум функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))\,dt \to \text{extr}, \tag{3.12}$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad x^{(k)}(t_1) = x_{1k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3.13}$$

у просторі $C^n([t_0, t_1], \mathbb{R})$ n раз неперервно диференційовних функцій. Вважатимемо, що функція $L(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх аргументах. Функції $x(\cdot)$ із простору $C^n([t_0, t_1], R)$ називатимемо *допустимими* в задачі (3.12), якщо вони задовольняють граничні умови (3.13). Позначимо через H_0^n підпростір $C^n([t_0, t_1], \mathbb{R})$ функцій, що задовольняють граничні умови $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Якщо $x(\cdot)$ — допустима функція в задачі (3.12), (3.13), то такими самими будуть і функції $x(\cdot) + h(\cdot)$, $h(\cdot) \in H_0^n$.

Теорема 3.3. *Нехай допустима функція $\hat{x}(\cdot) \in C^n([t_0, t_1], \mathbb{R})$ дає локальний екстремум функціонала задачі (3.12), (3.13). Тоді вона задовольняє рівняння Ейлера – Пуассона*

$$L'_x - \frac{d}{dt}L'_{x'} + \frac{d^2}{dt^2}L'_{x''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}L'_{x^{(n)}} = 0. \tag{3.14}$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{d^k}{dt^k} L'_{x^{(k)}}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)) = 0.$$

Приклад 3.14. Знайти екстремаль функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 \big(1 + (x'')^2(t)\big)\, dt \to \text{extr},$$
$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad x'(1) = 1.$$

Розв'язання. 1. Рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд

$$\frac{d^2}{dt^2}(2x'') = 0$$

або $x^{(4)} = 0$. Загальний розв'язок цього рівняння такий:

$$x(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4.$$

2. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 обчислимо за граничними умовами. Дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$.

Відповідь. Єдина допустима екстремаль функціонала задачі — пряма $x = t$.

Приклад 3.15. Знайти екстремаль функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((x'')^2(t) + x^2(t) + t^2\big)\, dt \to \text{extr},$$
$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = -1.$$

Розв'язання. 1. Рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд

$$x^{(4)} - x = 0.$$

Його загальний розв'язок такий:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos(t) + C_4 \sin(t).$$

2. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 обчислимо за граничними умовами, дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$.

Відповідь. Єдина допустима екстремаль функціонала задачі – функція $x(t) = \cos(t)$.

Приклад 3.16. Визначити екстремаль функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{2}\mu (y'')^2 + \rho y \right) dx \to \text{extr},$$
$$y(-l) = 0, \quad y'(-l) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

До цієї варіаційної задачі зводиться задача про визначення осі вигнутої пружної циліндричної балки, закріпленої на кінцях.

Розв'язання. 1. Якщо балка однорідна, то ρ, μ — сталі, і рівняння Ейлера – Пуассона має вигляд

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2}(\mu y'') = 0 \quad \text{або} \quad y^{(4)} = -\frac{\rho}{\mu}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння такий:

$$y = -\frac{\rho}{24\mu} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

2. Використовуючи граничні умови, дістанемо

$$y = -\frac{\rho}{24\mu} \left(x^2 - l^2 \right)^2.$$

Відповідь. Єдина допустима екстремаль функціонала задачі — крива $y = -\frac{\rho}{24\mu}\left(x^2 - l^2\right)^2$.

3.6. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку векторних функцій

Розглянемо задачу зі старшими похідними на множині векторних функцій

$$J(x_1(\cdot), \ldots, x_m(\cdot)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), \ldots, x_1^{(n_1)}(t), x_2(t), \ldots, x_m^{(n_m)}(t))\, dt \to \text{extr}, \quad (3.15)$$

$$x_k^{(j)}(t_0) = x_{0kj}, \quad x_k^{(j)}(t_1) = x_{1kj}, \quad k = \overline{1, m},\ j = \overline{0, n_k - 1}, \quad (3.16)$$

де $x_k(\cdot) \in C^{n_k}[t_0, t_1], \mathbb{R})$, $k = \overline{1, m}$.

Теорема 3.4. *Нехай* $\hat{x}_k(\cdot)$, $k = \overline{1,m}$ *— розв'язок екстремальної задачі (3.15)–(3.16). Тоді функції* $\hat{x}_k(\cdot)$ *задовольняють систему рівнянь Ейлера – Пуассона*

$$\sum_{i=0}^{n_k}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} L'_{x_k^{(j)}}(t, \hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_1^{(n_1)}(t), \ldots, \hat{x}_m^{(n_m)}(t)) = 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{3.17}$$

Розв'язки цієї системи диференціальних рівнянь, які задовольняють граничні умови, будуть екстремалями задачі (3.15)–(3.16).

3.7. Задача Лагранжа на множині функцій багатьох змінних

Нехай G — замкнута обмежена область у просторі $\mathbb{R}^2$ із гладкою границею ∂G. Розглянемо екстремальну задачу вигляду

$$J(z(\cdot)) = \iint\limits_G L\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial}{\partial x}z(x,y), \frac{\partial}{\partial y}z(x,y)\right) dx\, dy \to \mathrm{extr} \tag{3.18}$$

у класі допустимих функцій із простору $C^1(G)$ один раз неперервно диференційовних за всіма змінними функцій $z(x,y)$, що набувають на границі ∂G області G заданих значень $z(x,t) = v(x,y)$, $(x,y) \in \partial G$. Простір $C^1(G)$ є лінійним нормованим простором із нормою

$$\|z(\cdot)\|_1 = \max\left\{\max_{(x,y)\in G}|z(x,y)|, \max_{(x,y)\in G}\left|\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)\right|, \max_{(x,y)\in G}\left|\frac{\partial}{\partial y}z(x,y)\right|\right\}.$$

Обчислимо першу варіацію Лагранжа функціонала $J(z(\cdot))$. Дістанемо

$$\delta J(z(\cdot), h(\cdot)) = \iint\limits_G \left[L'_z h(x,y) + L'_p \frac{\partial}{\partial x}h(x,y) + L'_q \frac{\partial}{\partial y}h(x,y)\right] dx\, dy,$$

де

$$p = \frac{\partial}{\partial x}z(x,y), \quad q = \frac{\partial}{\partial y}z(x,y), \quad L = L(x,y,z,p,q).$$

Теорема 3.5. *Нехай $\hat{z}(\cdot)$ — розв'язок екстремальної задачі (3.18). Тоді функція $\hat{z}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера – Остроградського*

$$L'_z - \frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q\} = 0 \tag{3.19}$$

із граничними умовами $z(x,y) = v(x,y)$, $(x,y) \in \partial G$.

Приклад 3.17. Визначити екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot)) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \to \text{extr},$$
$$z(x,y) = v(x,y), \quad (x,y) \in \partial G.$$

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Це рівняння матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{або} \quad \Delta z = 0.$$

Рівняння Ейлера – Остроградського цієї задачі перетворюється на рівняння Лапласа. Щоб знайти екстремалі функціонала, потрібно визначити неперервну функцію $z(x,y)$, яка задовольняє рівняння Лапласа на границі області G і набуває заданих значень $v(x,y)$. Це одна з основних задач математичної фізики — *задача Діріхле.*

Отже, екстремалі цієї задачі варіаційного числення – це розв'язки задачі Діріхле.

Приклад 3.18. Визначити екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot)) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2zf(x,y)\right] dx\,dy \to \text{extr},$$
$$z(x,y) = v(x,y), \quad (x,y) \in \partial G.$$

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y) \quad \text{або} \quad \Delta z = f(x,y).$$

Рівняння Ейлера – Остроградського цієї задачі перетворюється на рівняння Пуассона.

Отже, екстремаль функціонала — це неперервна функція $z(x, y)$, яка задовольняє рівняння Пуассона і набуває заданих значень $v(x, y)$ на границі області G.

Приклад 3.19. Визначити поверхню мінімальної площі, що натягнута на заданий просторовий контур C.

Розв'язання. Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$S(z(\cdot)) = \iint\limits_G \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\, dy.$$

Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{q}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} = 0$$

або

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0.$$

Отже, поверхня мінімальної площі має нульову середню кривизну в кожній точці. Фізичною реалізацією мінімальних поверхонь є мильні плівки, що натягнуті на заданий контур C.

Нехай G — замкнута обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ із гладкою границею ∂G. Розглянемо задачу на екстремум у класі функцій $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n змінних із простору $C^1(G)$, що набувають на границі ∂G області G фіксованих значень:

$$J(z(\cdot)) = \int\limits_G \cdots \int L(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\, dx_1 \ldots dx_n \to \text{extr}, \tag{3.20}$$

$$z(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \partial G,$$

де $p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема 3.6. *Нехай $\hat{z}(\cdot)$ — розв'язок задачі (3.20). Тоді функція $\hat{z}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера – Остроградського*

$$L'_z - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\{L'_{p_k}\} = 0. \tag{3.21}$$

Якщо функція L під інтегралом залежить від похідних більш високого порядку, то, застосовуючи перетворення такі, як при виведенні рівняння Ейлера – Остроградського, дістанемо рівняння, аналогічне рівнянням Ейлера – Пуассона.

Функція $\hat{z}(x, y)$, що дає екстремум функціонала

$$J(z(\cdot)) = \iint\limits_G L\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dx\, dy,$$

задовольняє рівняння четвертого порядку в частинних похідних

$$L'_x - \frac{\partial}{\partial x}\{L'_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{L'_q\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{L'_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\{L'_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{L'_t\} = 0,$$

де

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Приклад 3.20. Функція $z(x, y)$, що дає екстремум функціонала

$$I(z(\cdot)) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

задовольняє так зване *бігармонічне рівняння*

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0,$$

яке коротко записується так: $\Delta\Delta z = 0$.

Функція $\hat{z}(x, y)$, що дає екстремум функціонала

$$J(z(\cdot)) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2zf(x, y)\right] dx\, dy,$$

задовольняє рівняння $\Delta\Delta z = f(x, y)$.

До бігармонічного рівняння приведуть також задачі на екстремум функціонала

$$J(z(\cdot)) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 dx\, dy$$

та функціонала більш загального вигляду

$$J(z(\cdot)) = \iint\limits_G \left\{ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx\, dy,$$

де μ — параметр.

3.8. Задача Больца. Умови трансверсальності

Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа на множині функцій із закріпленими кінцями) — це задача з обмеженнями. Граничні умови $x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1$ утворюють два обмеження типу рівності.

Задача Больца — задача дослідження на екстремум функціонала

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \mathrm{extr} \qquad (3.22)$$

у просторі $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ – це задача без обмежень. Вважається, що функція $L(t, x, x')$ задовольняє такі самі умови, як і в найпростішій задачі, тобто вона неперервна і неперервно диференційовна за кожною із двох змінних x, x', а функція $l(x_0, x_1)$ неперервно диференційовна за кожною із двох змінних.

Теорема 3.7 (необхідні умови екстремуму в задачі Больца). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ — розв'язок задачі (3.22). Тоді вона задовольняє рівняння Ейлера*

$$L'_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = \frac{d}{dt} L'_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \qquad (3.23)$$

та умови трансверсальності:

$$L'_{x'}(t_0, \hat{x}(t_0), \hat{x}'(t_0)) = \frac{\partial}{\partial x_0} l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)),$$
$$L'_{x'}(t_1, \hat{x}(t_1), \hat{x}'(t_1)) = -\frac{\partial}{\partial x_1} l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)).$$

Як і в задачі Лагранжа, ми маємо диференціальне рівняння другого порядку та дві граничні умови — умови трансверсальності. Цими умовами користуються щоб визначити дві невідомі константи, які входять у загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку. У тому випадку, коли функція $l(x_0, x_1) = 0$, задача Больца перетворюється на задачу Лагранжа на множині функцій із вільними (незакріпленими) кінцями. Тому із теореми випливає такий наслідок.

Теорема 3.8. *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ — розв'язок задачі Лагранжа на множині функцій із вільними (незакріпленими) кінцями*

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \mathrm{extr},$$

то $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера (3.23) та граничні умови

$$L'_{x'}(t_k, \hat{x}(t_k), \hat{x}'(t_k)) = 0, \quad k = 0, 1.$$

3.9. Задача Больца для векторних функцій

Необхідні умови екстремуму у векторній задачі Больца

$$B(\overline{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t))\, dt + \\ + l(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) \to \mathrm{extr} \quad (3.24)$$

мають такий самий вигляд, як і в скалярній задачі.

Теорема 3.9. *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — розв'язок задачі Больца (3.24). Тоді компоненти $\hat{x}_k(\cdot)$, $k = \overline{1, n}$, функції*

$\hat{x}(\cdot)$ задовольняють систему рівнянь Ейлера

$$L'_{x_j}(t, \hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_n(t), \hat{x}'_1(t), \ldots, \hat{x}'_n(t)) =$$
$$= \frac{d}{dt} L'_{x'_j}(t, \hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_n(t), \hat{x}'_1(t), \ldots, \hat{x}'_n(t)),\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad (3.25)$$

та умови трансверсальності

$$L'_{x'_j}(t, \hat{x}_1(t_k), \ldots, \hat{x}_n(t_k), \hat{x}'_1(t_k), \ldots, \hat{x}'_n(t_k)) =$$
$$= (-1)^k \frac{\partial}{\partial x_j(t_k)} l(\hat{x}_1(t_0), \ldots, \hat{x}_n(t_0), \hat{x}'_1(t_1), \ldots, \hat{x}'_n(t_1)),$$

$k = 0, 1; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Теорема 3.10. *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — розв'язок задачі Лагранжа на множині векторних функцій із вільними (незакріпленими) кінцями*

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x'_1(t), \ldots, x'_n(t))\, dt \to \mathrm{extr},$$

то $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє систему рівнянь Ейлера (3.25) та граничні умови

$$L'_{x'_j}(t_k, \hat{x}_1(t_k), \ldots, \hat{x}_n(t_k), \hat{x}'_1(t_k), \ldots, \hat{x}'_n(t_k)) = 0,\ k = 0, 1.$$

Приклад 3.21. Розв'язати задачу

$$B(x(\cdot)) = \int_0^1 ((x')^2(t) - x(t))\, dt + x^2(1) \to \mathrm{extr}\,.$$

Розв'язання. 1. Складемо рівняння Ейлера

$$L'_x = -1, \quad L'_{x'} = 2x', \quad \frac{d}{dt} L'_{x'} = 2x'',$$
$$L'_x = \frac{d}{dt} L'_{x'} \Longleftrightarrow 2x'' = -1.$$

Загальний розв'язок рівняння Ейлера має вигляд

$$x(t) = -t^2/4 + C_1 t + C_2.$$

2. Запишемо умови трансверсальності

$$\hat{L}'_{x'}(0) = \hat{l}'_{x_0} \Longleftrightarrow \hat{x}'(0) = 0;$$
$$\hat{L}'_{x'}(1) = -\hat{l}'_{x_1} \Longleftrightarrow \hat{x}'(1) = -\hat{x}(1).$$

3. Визначимо допустимі екстремалі. З умов трансверсальності дістанемо такі значення невідомих констант: $C_1 = 0$, $C_2 = 3/4$.

Отже, задача має одну допустиму екстремаль: $\hat{x}(t) = (3-t^2)/4$.
4. Покажемо, що ця екстремаль дає абсолютний мінімум задачі. Дійсно, для будь-якої функції $h(\cdot) \in C^1([0,1], \mathbb{R})$

$$B(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - B(\hat{x}(\cdot)) =$$
$$= \int_0^1 2\hat{x}'h'\,dt + \int_0^1 (h')^2\,dt - \int_0^1 h\,dt + 2\hat{x}(1)h(1) + h^2(1).$$

Інтегруємо частинами і врахуємо, що $\hat{x}(t) = (3-t^2)/4$, тоді

$$B(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - B(\hat{x}(\cdot)) = 2\hat{x}'h\Big|_0^1 - \int_0^1 (2\hat{x}'' + 1)h\,dt +$$
$$+ \int_0^1 (h')^2\,dt + 2\hat{x}(1)h(1) + h^2(1) =$$
$$= \int_0^1 (h')^2\,dt + h^2(1) \geq 0.$$

Відповідь. $\hat{x}(t) = (3-t^2)/4 \in \operatorname{absmin}$.

Приклад 3.22. Визначити екстремалі функціонала

$$B(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_0^1 (x_1'(t)x_2'(t) + x_1(t)x_2(t))\,dt +$$
$$+ x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) \to \operatorname{extr}.$$

Розв'язання. 1. Складемо систему рівнянь Ейлера

$$L'_{x_1} = x_2, \quad L'_{x_1'} = x_2', \quad \frac{d}{dt}L'_{x_1'} = x_2'',$$
$$L'_{x_2} = x_1, \quad L'_{x_2'} = x_1', \quad \frac{d}{dt}L'_{x_2'} = x_1''.$$

Отже, $x_2'' = x_2$, $x_1'' = x_1$.

Загальний розв'язок цих рівнянь такий:

$$\hat{x}_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}, \quad \hat{x}_2(t) = A_1e^t + A_2e^{-t}.$$

2. Щоб скласти умови трансверсальності, обчислимо

$$\begin{aligned}
&\hat{L}'_{x_1'}(0) = \hat{x}_2'(0) = A_1 - A_2, \quad \hat{l}'_{x_1(0)} = \hat{x}_2(1) = A_1e + A_2e^{-1},\\
&\hat{L}_{x_1'}(1) = \hat{x}_2'(1) = A_1e - A_2e^{-1}, \quad \hat{l}'_{x_1(1)} = \hat{x}_2(0) = A_1 + A_2,\\
&\hat{L}'_{x_2'}(0) = \hat{x}_1'(0) = C_1 - C_2, \quad \hat{l}'_{x_2(0)} = \hat{x}_1(1) = C_1e + C_2e^{-1},\\
&\hat{L}'_{x_2'}(1) = \hat{x}_1'(1) = C_1e + C_2e^{-1}, \quad \hat{l}'_{x_2(1)} = \hat{x}_1(0) = C_1 + C_2.
\end{aligned}$$

Умови трансверсальності мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\hat{L}'_{x_1'}(0) = \hat{l}'_{x_1(0)} \Longleftrightarrow A_1 - A_2 = A_1e + A_2e^{-1},\\
&\hat{L}_{x_1'}(1) = -\hat{l}'_{x_1(1)} \Longleftrightarrow A_1e - A_2e^{-1} = -A_1 - A_2,\\
&\hat{L}'_{x_2'}(0) = \hat{l}'_{x_2(0)} \Longleftrightarrow C_1 - C_2 = C_1e + C_2e^{-1},\\
&\hat{L}'_{x_2'}(1) = -\hat{l}'_{x_2(1)} \Longleftrightarrow C_1e - C_2e^{-1} = -C_1 - C_2.
\end{aligned}$$

Отримали систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&A_1(1-e) - A_2\big(1+e^{-1}\big) = 0, \quad A_1(1+e) + A_2\big(1-e^{-1}\big) = 0,\\
&C_1(1-e) - C_2\big(1+e^{-1}\big) = 0, \quad C_1(1+e) + C_2\big(1-e^{-1}\big) = 0,
\end{aligned}$$

з яких випливає, що $C_1 = C_2 = A_1 = A_2 = 0$.

Відповідь. Допустимі екстремалі задачі: $\hat{x}_1(t) \equiv 0$, $\hat{x}_2(t) \equiv 0$.

3.10. Задача Больца на множині функцій багатьох змінних

Дослідимо на екстремум функціонал

$$B(z(\cdot)) = \iint\limits_G L(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy + \int_{\partial G} F(s, z, z_s)\,ds \qquad (3.26)$$

у класі $C^1(G)$ один раз неперервно диференційовних в області G функцій $z(x, y)$, $(x, y) \in G$. Функція $L(x, y, z, z_x, z_y)$, як і функція $F(s, z, z_s)$, неперервно диференційовна.

Теорема 3.11. *Якщо функція $\hat{z}(\cdot) \in C^1(G)$ — розв'язок задачі (3.26), то вона задовольняє рівняння Ейлера — Остроградського (3.19) та граничні умови*

$$L'_{z_x}\frac{dy}{ds} - L'_{z_y}\frac{dx}{ds} + F'_z - \frac{d}{ds}F'_{z_s} = 0, \quad (x, y) \in \partial G.$$

Теорема 3.12. *Якщо функція $\hat{z}(x, y) \in C^1(G)$ — розв'язок задачі Лагранжа на множині функцій із вільними (незакріпленими) граничними значеннями*

$$J(z(\cdot)) = \iint\limits_G L(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy \to \mathrm{extr},$$

то функція $\hat{z}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера – Остроградського (3.19) та граничні умови

$$L'_{z_x}\frac{dy}{ds} - L'_{z_y}\frac{dx}{ds} = 0, \quad (x, y) \in \partial G.$$

Приклад 3.23. Визначити екстремалі функціонала

$$B(z(\cdot)) = \iint\limits_G (z_x^2 + z_y^2)\, dx\, dy + \iint\limits_{\partial G} \sigma z^2\, ds \to \mathrm{extr}\,.$$

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера — Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Отже, екстремалі функціонала — це розв'язки задачі Діріхле з граничними умовами

$$\frac{\partial z}{\partial n} + \sigma z = 0, \quad (x, y) \in \partial G,$$

де через $\frac{\partial z}{\partial n}$ позначена операція диференціювання по зовнішній нормалі до кривої $\hat{z}(\cdot)$.

3.11. Задачі для самостійного розв'язування

Знайти допустимі екстремалі функціоналів.

3.1. $\int\limits_a^b (2tx + (t^2 + e^x)x')\,dt \to \text{extr}, \quad x(a) = c,\ x(b) = d.$

3.2. $\int\limits_0^\pi \big((x')^2 - x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(\pi) = -1.$

3.3. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

3.4. $\int\limits_0^{\pi/2} \big(x^2 - (x')^2 - 8x\cosh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 2,$
$x(\pi/2) = 2\cosh(\pi/2).$

3.5. $\int\limits_0^{3\pi/2} \big((x')^2 - x^2 - 4x\sin(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(3\pi/2) = 0.$

3.6. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + 4x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = e^2,\ x(1) = 1.$

3.7. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(1/2) = \sqrt{3/2}.$

3.8. $\int\limits_0^{\ln(2)} \big((x')^2 + 3x^2\big)e^{2t}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(\ln(2)) = 15/8.$

3.9. $\int\limits_1^2 \big((x_1')^2 + x_2^2 + (x_2')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1(1) = 1,\ x_1(2) = 2,$
$x_2(1) = 0,\ x_2(2) = 1.$

3.10. $\int\limits_0^\pi \big(2x_1x_2 - 2x_1^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1(0) = 0,$
$x_1(\pi) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2(\pi) = -1.$

3.11. $\int\limits_0^{\pi/4} \big(2x_2 - 4x_1^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2\big)\,dt \to \text{extr},\ x_1(0) = 0,$
$x_1(\pi/4) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2(\pi/4) = 1.$

3.12. $\int\limits_{-1}^1 \big(2tx_1 - (x_1')^2 + (x_2')^3/3\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1(1) = 0,$
$x_1(-1) = 2,\ x_2(1) = 1,\ x_2(-1) = -1.$

3.13. $\int\limits_0^1 \big((x_1')^2 + (x_2')^2 + 2x_1\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1(0) = 1,\ x_1(1) = 3/2,$

$x_2(0) = 0,\ x_2(1) = 1.$

3.14. $\int\limits_a^b \bigl(2x_1\cos(t) + 2x_2^2 + 2x_1'x_2' + (x_1')^2 - (x_2')^2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}.$

3.15. $\int\limits_0^1 \bigl((x_1')^2 + (x_2')^2 - 2x_1x_2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x_1(0) = 0,$
$x_1(1) = \sinh(1),\ x_2(0) = 0,\ x_2(1) = -\sinh(1).$

3.16. $\int\limits_0^1 \bigl(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1'x_2'\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = x_2(1) = \sinh(1).$

3.17. $\int\limits_0^1 \bigl(x_1'x_2' + x_1x_2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 1,\ x_1(1) = e,$
$x_2(1) = 1/e.$

3.18. $\int\limits_0^{\pi/2} \bigl(x_1'x_2' - x_1x_2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(\pi/2) = 1,\ x_2(\pi/2) = -1.$

3.19. $\int\limits_0^1 \bigl(x_1'x_2' + 6tx_1 + 12t^2x_2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = x_2(1) = 1.$

3.20. $\int\limits_0^{\pi/2} \bigl((x_1')^2 + (x_3')^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3\bigr)\,dt \to \operatorname{extr},\ x_1(0) = 1,$
$x_3(0) = 1,\ x_2(0) = -1,\ x_1(\pi/2) = \pi/2,\ x_2(\pi/2) = 0,$
$x_3(\pi/2) = -\pi/2.$

3.21. $\int\limits_0^1 \bigl(x^2 + 2(x')^2 + (x'')^2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0,$
$x'(0) = 1,\ x'(1) = -\sinh(1).$

3.22. $\int\limits_{-1}^0 \bigl(240x - (x''')^2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x(-1) = 1,\ x(0) = 0,$
$x'(-1) = -9/2,\ x'(0) = 0,\ x''(-1) = 16,\ x''(0) = 0.$

3.23. $\int\limits_a^b \bigl((x')^2 + xx''\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x(a) = A_1,\ x'(A) = A_2,$
$x(b) = B_1,\ x'(b) = B_2.$

3.24. $\int\limits_0^{\pi/2} \bigl((x''')^2 - (x'')^2\bigr)\,dt \to \operatorname{extr}, \quad x(0) = x'(0) = x''(\pi/2) = 0,$
$x(\pi/2) = x'(\pi/2) = x''(0) = 1.$

3.25. $\int\limits_0^{\pi}\big((x''')^2-(x'')^2\big)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0,$
$x''(\pi)=0,\ x(\pi)=\pi,\ x'(\pi)=2.$

3.26. $\int\limits_0^{\pi}\big((x''')^2-(x')^2\big)\,dt \to \mathrm{extr},\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0,$
$x'''(0)=0,\ x(\pi)=x''(\pi)=\sinh(\pi),\ x'(\pi)=\cosh(\pi)+1.$

3.27. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 e^{z'_y}\sin(z'_y)\,dx\,dy \to \mathrm{extr}, \quad z(x,0)=0,\ z(x,1)=1.$

3.28. $\int\limits_0^{\pi}\big((x')^2-x^2-2x\sin(t)\big)\,dt+x^2(0)+x^2(\pi)\to \mathrm{extr}\,.$

3.29. $\int\limits_0^{\pi/2}\big((x')^2-x^2\big)\,dt-x^2(\pi/2)+2x(\pi/2)\to \mathrm{extr}\,.$

3.30. $\int\limits_0^{\ln(2)}\big((x')^2+2x^2\big)e^t\,dt+(x(0)-9)x(\ln(2))\to \mathrm{extr}\,.$

3.31. $\int\limits_1^{e}2x'(tx'+x)\,dt+3x^2(1)-x^2(e)-4x(e)\to \mathrm{extr}\,.$

3.32. $\int\limits_0^{3}4x^2(x')^2\,dt+x^4(0)-x(3)\to \mathrm{extr}\,.$

3.33. $\int\limits_0^{1}e^x(x')^2\,dt+4e^{x(0)}+32e^{-x(1)}\to \mathrm{extr}\,.$

3.34. $\int\limits_0^{1}e^{t+1}\big((x')^2+2x^2\big)\,dt+2x(1)(x(0)+1)\to \mathrm{extr}\,.$

3.35. $\int\limits_0^{e-1}(t+1)(x')^2\,dt+2x(0)(x(e-1)+1)\to \mathrm{extr}\,.$

3.36. $\int\limits_1^{2}t^2(x')^2\,dt-2x(1)+x^2(2)\to \mathrm{extr}\,.$

3.37 $\int\limits_0^{\pi/2}\big((x')^2-x^2-2x\big)\,dt-2x^2(0)+x^2(\pi/2)\to \mathrm{extr}\,.$

4. Варіаційні задачі з рухомими границями

4.1. Задачі Больца та Лагранжа

Нехай Δ — скінченний замкнутий відрізок дійсної прямої. У просторі $C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, що складається з елементів $(x(\cdot), t_0, t_1)$, розглянемо задачу Больца

$$B(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \text{extr}, \tag{4.1}$$

де точки t_0, t_1 не фіксовані. Відомо лише, що t_0, $t_1 \in \Delta$.

Допустимий елемент $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ дає *слабкий локальний мінімум* (*слабкий локальний максимум*) функціонала задачі (4.1), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якого іншого допустимого елемента $(x(\cdot), t_0, t_1) \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, який задовольняє умови $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon$, $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1(\Delta, \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$, виконується нерівність

$$B\big(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1\big) \le B(x(\cdot), t_0, t_1) \quad \Big(B\big(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1\big) \ge B(x(\cdot), t_0, t_1)\Big).$$

Для того, щоб знайти екстремалі функціонала (4.1), використаємо необхідну умову екстремуму першого порядку. Нехай функції $L = L(t, x, x')$, $l = l(t_0, x_0, t_1, x_1)$ та їхні частинні похідні L_x, $L_{x'}$, l_{t_j}, l_{x_j}, $j = 0, 1$, неперервні.

Необхідні умови екстремуму в задачі Больца на множині функцій із вільними границями наведені в теоремі 4.1.

Теорема 4.1 (**необхідні умови екстремуму задачі Больца**). *Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дає слабкий локальний екстремум функціонала задачі Больца (4.1), то $\hat{x}(t)$, $\hat{t}_0 \le t \le \hat{t}_1$, задовольняє:*
1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t), \quad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1];$$

2) умови трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}(t_j) = (-1)^j \hat{l}_{x_j}, \quad j = 0, 1;$$

3) умови стаціонарності по t

$$(-1)^{j+1}\hat{L}(\hat{t}_j) + \hat{l}_{t_j} + \hat{l}_{x_j}\hat{x}'(\hat{t}_j) = 0, \quad j = 0, 1.$$

Зауваження 4.1. Умови стаціонарності по t записуються лише тоді, коли задача досліджується на множині функцій із вільними границями.

Необхідні умови екстремуму в задачі Лагранжа на множині функцій із вільними границями наведені в теоремі 4.2.

Теорема 4.2 (необхідні умови в задачі Лагранжа). *Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дає локальний екстремум функціонала задачі Лагранжа*

$$J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr}, \qquad (4.2)$$

то $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ задовольняє:
1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t);$$

2) умови трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = 0, \quad \hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = 0;$$

3) умови стаціонарності по t_0, t_1

$$\hat{L}(\hat{t}_0) = 0, \quad \hat{L}(\hat{t}_1) = 0.$$

Зауваження 4.2. Граничні умови в задачі Лагранжа (4.2) відсутні. Тому вона і називається задачею Лагранжа на множині функцій із вільними границями. Умови стаціонарності по t записуються тільки для таких задач.

Приклад 4.1. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot), T) = \int_0^T \big((x')^2 - x + 1\big)\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$$

Розв'язання. Це задача Лагранжа на множині функцій із фіксованим лівим кінцем та вільним правим кінцем, тому умова трансверсальності та умова стаціонарності по T записуються тільки на правому кінці. Скористаємось необхідними умовами екстремуму.

1. Складемо рівняння Ейлера для інтегранта $L = (x')^2 - x + 1$. Рівняння має вигляд

$$\hat{L}_x = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'} \Longleftrightarrow 2x'' = -1, \quad x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$$

Загальний розв'язок рівняння $x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$. Із граничної умови $x(0) = 0$ випливає, що $C_2 = 0$.

2. Для визначення невідомих $C_1, \hat{T}$ використаємо умову трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}\big|_{t=\hat{T}} = 0, \quad 2x'(\hat{T}) = 0 \Longleftrightarrow -\hat{T} + 2C_1 = 0, \quad \hat{T} = 2C_1$$

та умову стаціонарності по T

$$L(\hat{T}) = 0 \Longleftrightarrow (x')^2(\hat{T}) - x(\hat{T}) + 1 = 0,$$
$$(2C_1 - \hat{T})^2 - (4c_1\hat{T} - \hat{T}^2) + 4 = 0,$$
$$\hat{T}^2 = 4, \quad \hat{T} = 2, \quad C_1 = 1.$$

Отже, існує одна екстремаль $\hat{x} = t - t^2/4$ на відрізку $[0, 2]$.

3. Покажемо, що вона не дає локального екстремуму. Дійсно, для $\hat{x} = t - t^2/4$ маємо

$$J(\hat{x}(\cdot), T) = \int_0^T \big((\hat{x}')^2 - \hat{x} + 1\big)\, dt =$$
$$= \int_0^T \big((1 - t/2)^2 - (t - t^2/4) + 1\big)\, dt = \frac{(T-2)^3}{6} + \frac{4}{3}.$$

При T близьких до $\hat{T} = 2$ значення функціонала $J(\hat{x}(\cdot), T)$ можуть бути як менші, так і більші $J(\hat{x}, \hat{T})$. Крім того, для послідовності пар $x_n(t) = t, T_n = n$ маємо $J(x_n(\cdot), T_n) \to -\infty$. Отже, $S_{\min} = -\infty$, аналогічно показуємо, що $S_{\max} = +\infty$.

Відповідь. Екстремаль $\hat{x} = t - t^2/4$ задовольняє необхідні умови екстремуму функціонала, але $\hat{x} \notin \operatorname{locextr}$.

4.2. Задача Лагранжа із рухомими границями

Розглянемо у просторі $C^1(\Delta, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ задачу на екстремум функціонала

$$J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{4.3}$$

із двома рухомими границями

$$x(t_0) = \varphi_0(t_1), \quad x(t_1) = \varphi_1(t_1). \tag{4.4}$$

У цій задачі точки $t_0, t_1 \in \Delta$ не фіксовані, Δ — заданий відрізок числової прямої.

Необхідні умови екстремуму в задачі Лагранжа на множині функцій із рухомими границями сформульовані в теоремі 4.3.

Теорема 4.3 (необхідні умови в задачі Лагранжа). *Нехай функція $L(t, x, x')$ та її частинні похідні $L_x(t, x, x')$, $L_{x'}(t, x, x')$ неперервні, а функції $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ неперервно диференційовні. Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot), t_0, t_1)$ простору $C^1(\Delta, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такий, що $\hat{x}(t_0) = \varphi_0(\hat{t}_0)$, $\hat{x}(t_1) = \varphi_1(\hat{t}_1)$ дає локальний екстремум функціонала задачі (4.3), (4.4), то $(\hat{x}(\cdot), t_0, t_1)$ задовольняє:*
1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t), \quad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1];$$

2) умови трансверсальності

$$\hat{L}(\hat{t}_j) = \hat{L}_{x'}(\hat{t}_j)(\hat{x}'(\hat{t}_j) - \varphi_j'(\hat{t}_j)), \quad j = 0, 1.$$

Зауваження 4.3. 1. Нехай точка t_j фіксована, а гранична умова у цій точці відсутня. Це означає, що гранична точка рухається по вертикальній прямій, тоді умова трансверсальності має вигляд $\hat{L}_{x'}(t_j) = 0$.

2. Нехай точка t_j не фіксована, а гранична умова має вигляд $x(t_j) = a$. Це означає, що гранична точка рухається по горизонтальній прямій. Цього разу умова трансверсальності така:

$$\hat{L}(\hat{t}_j) - \hat{x}'(\hat{t}_j)\hat{L}_{x'}(\hat{t}_j) = 0.$$

Приклад 4.2. Записати умову трансверсальності для функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,x)e^{\arctan(x')}\sqrt{1+(x')^2}\,dt, \quad f(t,x)\neq 0.$$

Розв'язання. Нехай лівий кінець екстремалі фіксований, $x(t_0) = x_0$, а правий кінець рухається по кривій $x = \psi(t)$. Оскільки

$$L_{x'} = f(t,x)e^{\arctan(x')}(1+x')\frac{1}{\sqrt{1+(x')^2}},$$

то умова трансверсальності

$$\left[L - (\psi' - x')L_{x'}\right]\Big|_{t=t_1} = 0$$

має вигляд

$$\Bigg[f(t,x)e^{\arctan(x')}\sqrt{1+(x')^2}+$$
$$+(\psi'-x')f(t,x)e^{\arctan(x')}\frac{1+x'}{\sqrt{1+(x')^2}}\Bigg]\Bigg|_{t=t_1} = 0.$$

Оскільки $f(t,x)\neq 0$, то матинемо $\frac{\psi'-x'}{1-\psi'x'} = -1$.
Відповідь. Умова трансверсальності в точці (t_1, x_1) така:

$$\frac{\psi'(t_1) - x'(t_1)}{1-\psi'(t_1)x'(t_1)} = -1.$$

А це означає, що екстремалі $\hat{x} = x(t)$ перетинають криву $x = \psi(t)$ під кутом $\pi/4$.

Приклад 4.3. Визначити відстань між параболою $x = t^2$ і прямою $x = t - 5$.
Розв'язання. Щоб розв'язати задачу, потрібно дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+(x')^2}\,dt$$

на множині функцій із рухомими границями $\varphi_0(t) = t^2$, $\varphi_1(t) = t - 5$. Це задача Лагранжа на множині функцій із рухомими границями. Використаємо необхідні умови екстремуму.

1. Рівняння Ейлера

$$\sqrt{1+(x')^2} - \frac{(x')^2}{\sqrt{1+(x')^2}} = C$$

має розв'язки $x(t) = C_1 t + C_2$.

2. Умови трансверсальності

$$\left[\sqrt{1+(x')^2} + (2t - x')\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}}\right]\Bigg|_{t=t_0} = 0,$$
$$\left[\sqrt{1+(x')^2} + (1 - x')\frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}}\right]\Bigg|_{t=t_1} = 0.$$

3. Граничні умови $x(t_0) = t_0^2,\ \ x(t_1) = t_1 - 5$.

Маємо рівняння $C_1 t_0 + C_2 = t_0^2$, $C_1 t_1 + C_2 = t_1 - 5$. Отже, ми знайшли систему чотирьох рівнянь для визначення невідомих C_1, C_2, $\hat{t}_0$, $\hat{t}_1$:

$$\sqrt{1+C_1^2} + (2t_0 - C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0,$$
$$\sqrt{1+C_1^2} + (1 - C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0,$$
$$C_1 t_0 + C_2 = t_0^2, \quad C_1 t_1 + C_2 = t_1 - 5.$$

Розв'язавши цю систему, матимемо $C_1 = -1$, $C_2 = 3/4$, $\hat{t}_0 = 1/2$, $\hat{t}_1 = 23/8$.
Відповідь. Рівняння екстремалі $\hat{x} = -t + 3/4$. Відстань між параболою і прямою дорівнює $(19\sqrt{2})/8$.

Приклад 4.4. Дослідити на екстремум функціонал задачі про брахістохрону

$$J(y(\cdot)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\, dx, \quad y(0) = 0,$$

коли відсутня гранична умова $y(x_1) = y_1$.

Розв'язання. У цій задачі лівий кінець траєкторії фіксований, а правий рухається по вертикальній прямій. Екстремалями функціонала є *циклоїди*, рівняння яких, враховуючи умову $y(0) = 0$, мають вигляд

$$x = C_1(t - \sin(t)), \quad y = C_1(t - \cos(t)).$$

Для визначення невідомої константи C_1 використаємо умову трансверсальності $\hat{L}_{y'}(\hat{x}_1) = 0$ у вигляді

$$\frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2}} = 0,$$

звідки $y' = 0$. Отже, шукана циклоїда повинна перетинати вертикальну пряму під прямим кутом, тому точка $x = x_1$, $y = y_1$ має бути вершиною циклоїди. Оскільки вершині відповідає значення $t = \pi$, то $x_1 = C_1\pi$, $C_1 = x_1/\pi$.

Відповідь. Екстремаль функціонала задачі про брахістохрону на множині функцій таких, що їхній лівий кінець фіксований, а правий рухається по вертикальній прямій, визначається рівняннями

$$x = \frac{x_1}{\pi}(t - \sin(t)), \quad y = \frac{x_1}{\pi}(1 - \cos(t)).$$

Це рівняння циклоїди.

4.3. Задачі Больца із рухомими границями

У просторі $C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дослідити на екстремум функціонал задачі Больца

$$B(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt + \Psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \text{extr} \tag{4.5}$$

за умов

$$\Psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.6}$$

де точки t_0, $t_1 \in \Delta$ не фіксовані, Δ — заданий відрізок числової прямої. Використовуючи метод множників Лагранжа, можна вивести необхідні умови екстремуму в задачі Больца на множині функцій із рухомими границями

Теорема 4.4 (необхідні умови екстремуму в задачі Больца). *Нехай функція $L(t,x,x')$ та її частинні похідні $L_x(t,x,x')$, $L_{x'}(t,x,x')$ неперервні, а функції Ψ_j, $j=0,1,\ldots,m$, неперервно диференційовні. Якщо елемент $(\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta,\mathbb{R}^n)\times$ $\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ дає локальний екстремум функціонала задачі Больца (4.5), (4.6), то існують множники Лагранжа $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{R}$, які одночасно не дорівнюють нулю, і такі, що для функції Лагранжа*

$$\mathcal{L}(x(\cdot),t_0,t_1,\lambda)=\int_{t_0}^{t_1}\lambda_0 L(t,x(t),x'(t))\,dt+l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),$$

де

$$l=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j\Psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),$$

виконуються умови:
1) стаціонарності по x — рівняння Ейлера

$$\lambda_0\hat{L}_x(t)=\frac{d}{dt}\lambda_0\hat{L}_{x'}(t);$$

2) трансверсальності по x

$$\lambda_0\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0)=l_{x(t_0)},\quad \lambda_0\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1)=-l_{x(t_1)};$$

3) стаціонарності по t_0, t_1 (тільки на множині функцій із рухомими кінцями)

$$\hat{\mathcal{L}}_{t_0}=0\Longleftrightarrow-\lambda_0\hat{L}(\hat{t}_0)=\hat{l}_{t_0}+\hat{l}_{x(t_0)}\hat{x}'(\hat{t}_0)=0,$$
$$\hat{\mathcal{L}}_{t_1}=0\Longleftrightarrow\lambda_0\hat{L}(\hat{t}_1)=\hat{l}_{t_1}+\hat{l}_{x(t_1)}\hat{x}'(\hat{t}_1)=0.$$

Наслідок 4.1. *Нехай елемент $(\hat{x}(\cdot),\hat{y}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ простору $C^1(\Delta,\mathbb{R})\times C^1(\Delta,\mathbb{R})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ дає локальний екстремум функціонала задачі Лагранжа у тривимірному просторі*

$$J(x(\cdot),y(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),y(t),x'(t),y'(t))\,dt,$$

коли точка $A(t_0, x_0, y_0)$ *рухається по кривій* $x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$, *а точка* $B(t_1, x_1, y_1)$ *— по кривій* $x = \varphi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$. *Тоді функції* $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{y}(\cdot)$ *задовольняють рівняння Ейлера*

$$L_x(t) - \frac{d}{dt}L_{x'} = 0, \quad L_y(t) - \frac{d}{dt}L_{y'} = 0$$

та умови трансверсальності

$$\left[\hat{L}(t)+(\varphi_k'(t)-\hat{x}'(t))\hat{L}_{x'}(t)+(\psi_k'(t)-\hat{y}'(t))\hat{L}_{y'}(t)\right]\Big|_{t=\hat{t}_k} = 0, \quad k = 0, 1.$$

Приклад 4.5. Визначити найкоротшу відстань від точки $A(t_0, x_0, y_0)$ до прямої $x = at + b$, $y = pt + q$.

Розв'язання. Задача зводиться до визначення мінімуму функціонала

$$J(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2}\, dt$$

за умови, що правий кінець екстремалі лежить на прямій $x = at+b$, $y = pt+q$, отже, $\varphi_1(t) = at+b$, $\psi_1(t) = pt+q$. Розв'язки рівнянь Ейлера мають вигляд $x = C_1t + C_2$, $y = C_3t + C_4$. З умов трансверсальності

$$\left[\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} + \frac{(a - x')x'}{\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2}} + \frac{(p - y')y'}{\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2}}\right]\Bigg|_{t=\hat{t}_1} = 0$$

виводимо рівняння $1 + aC_1 + pC_3 = 0$. Це умова перпендикулярності шуканої прямої до заданої. Щоб визначити невідомі C_1, C_2, C_3, C_4, $\hat{t}_1$ врахуємо те, що пряма проходить через точку $A(t_0, x_0, y_0)$ і перетинає задану пряму. Дістанемо 5 рівнянь:

$$x_0 = C_1t_0 + C_2, \quad y_0 = C_3t_0 + C_4,$$
$$1 + aC_1 + pC_3 = 0,$$
$$C_1\hat{t}_1 + C_2 = a\hat{t}_1 + b, \quad C_3\hat{t}_1 + C_4 = p\hat{t}_1 + q,$$

з яких обчислюємо невідомі константи.

Відповідь. Найкоротша відстань дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з точки $A(t_0, x_0, y_0)$ на пряму:

$$h = J(\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot)) =$$
$$= \left(t_0^2 + (x_0 - b)^2 + (y_0 - q)^2 - \frac{\left[t_0 + a(x_0 - b) + p(y_0 - q)\right]^2}{1 + a^2 + p^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наслідок 4.2. *Нехай елемент* $(\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{x}_0, \hat{x}_1)$ *простору* $C^1(\Delta, \mathbb{R}) \times C^1(\Delta, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *дає локальний екстремум функціонала задачі Лагранжа*

$$J(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x))\, dx,$$

коли точка $A(x_0, y_0, z_0)$ *рухається по поверхні* $z = \varphi_0(x, y)$, *а точка* $B(x_1, y_1, z_1)$ *рухається по поверхні* $z = \varphi_1(x, y)$. *Тоді функції* $\hat{y}(\cdot)$, $\hat{z}(\cdot)$ *задовольняють рівняння Ейлера та умови трансверсальності*

$$\left[\hat{L}_{y'} + \hat{L}_{z'}\hat{\varphi}'_{ky}\right]\Big|_{x=\hat{x}_k} = 0,$$
$$\left[\hat{L} - \hat{L}_{y'}\hat{y}' + \hat{L}_{z'} + (\hat{\varphi}'_{kx} - \hat{z}')\right]\Big|_{x=\hat{x}_k} = 0, \quad k = 0, 1;$$

де $\hat{\varphi}'_{kx} = \varphi'_{kx}(x, \hat{y}(x))$, $\hat{\varphi}'_{ky} = \varphi'_{ky}(x, \hat{y}(x))$.

Приклад 4.6. Визначити найкоротшу відстань від точки $A(1, 1, 1)$ до поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$J(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_1^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx$$

за умови, що $y(1) = 1$, $z(1) = 1$, а координати точки $B(x_1, y_1, z_1)$ задовольняють співвідношення $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Розв'язання. Використаємо необхідні умови екстремуму.

1. Рівняння Ейлера задовольняють функції

$$y = C_1 x + C_2, \quad z = C_3 x + C_4.$$

Точка $A(1, 1, 1)$ лежить на екстремалі, тому невідомі C_1, C_2, C_3, C_4 задовольняють рівняння $C_1 + C_2 = 1$, $C_3 + C_4 = 1$.

2. Умови трансверсальності функціонала мають вигляд

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} - \frac{z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right]\Bigg|_{x=\hat{x}_1} = 0;$$

$$\Bigg[\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} -$$
$$- \left(z' + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right) \frac{z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}\Bigg]\Bigg|_{x=\hat{x}_1} = 0.$$

Звідси виводимо рівняння $\hat{z}_1 - C_3\hat{x}_1 = 0$, $C_1\hat{z}_1 - C_3\hat{y}_1 = 0$. Оскільки точка $B(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$ належить екстремалі, то $\hat{z}_1 = C_3\hat{x}_1 + C_4$, $\hat{y}_1 = C_1\hat{x}_1 + C_2$. Враховуючи складені рівняння, обчислимо невідомі константи: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$.

Отже, рівняння екстремалі таке: $y = x$, $z = x$. Точка $B(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$ лежить на сфері, тому $\hat{x}_1^2 + \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1^2 = 1$, $x_1 = \pm 1/\sqrt{3}$. Визначені співвідношення задовольняють дві точки

$$B_1\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \quad B_2\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Відповідь. Екстремаль $y = x$, $z = x$, що з'єднує точку A з точкою B_1, дає мінімум функціонала: $S_{\min} = \sqrt{3} - 1$, а екстремаль $y = x$, $z = x$, що з'єднує точку A з точкою B_2, дає максимум функціонала.

Приклад 4.7. Визначити умови трансверсальності підінтегральних функцій, що мають вигляд $L = f(x, y, z)\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}$, та поверхні $z = \varphi(x, y)$.
Розв'язання. Умови трансверсальності можна записати так:

$$\big(1 + \varphi'_x z'\big)\big|_{x=\hat{x}_1} = 0, \quad \big(y' + \varphi'_y z'\big)\big|_{x=\hat{x}_1} = 0$$

або у вигляді

$$\frac{1}{\varphi'_x}\bigg|_{x=\hat{x}_1} = \frac{y'}{\varphi'_y}\bigg|_{x=\hat{x}_1} = \frac{z'}{-1}\bigg|_{x=\hat{x}_1}. \tag{4.7}$$

Це умови паралельності вектора $\vec{\tau}(1, y', z')$, дотичного до екстремалі в точці $B(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$, із вектором $\vec{n}(\varphi'_x, \varphi'_y, -1)$ нормалі до поверхні $z = \varphi(x, y)$ у точці $B(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$.
Відповідь. Умови трансверсальності функціоналів із функцією L вказаного вигляду зводяться до умов ортогональності екстремалі та поверхні $z = \varphi(x, y)$.

Приклад 4.8. Визначити найменшу відстань між поверхнями $z = \varphi(x, y)$, $z = \psi(x, y)$.
Розв'язання. Задачу можна формалізувати так:

$$J(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx \to \min,$$
$$z_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad z_1 = \psi(x_1, y_1).$$

Екстремалями задачі будуть прямі лінії. Функція під інтегралом має вигляд, наведений у попередньому прикладі, тому умови трансверсальності як у точці (x_0, y_0, z_0), так і в точці (x_1, y_1, z_1) — це умови ортогональності (4.7).
Відповідь. Екстремум може досягатися лише на прямих, які ортогональні як до поверхні $z = \varphi(x, y)$ у точці (x_0, y_0, z_0), так і до поверхні $z = \psi(x, y)$ у точці (x_1, y_1, z_1).

Приклад 4.9. Знайти екстремалі функціонала задачі

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 x^2(x')^2\, dt \to \text{extr}, \qquad (4.8)$$
$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння Ейлера

$$2x(x')^2 - \frac{d}{dt}(2x^2x') = 0,$$
$$xx'' + (x')^2 = 0 = \frac{d}{dt}(xx'),$$

звідки $xx' = C_1$, $x^2 = 2C_1t + C_2$. Використавши граничні умови, дістанемо $x^2 = t$.
Відповідь. Екстремаль функціонала (4.8), що з'єднує точки $(0, 0)$, $(1, 1)$, це парабола $x^2 = t$.

Зауваження 4.4. 1. Величину інтеграла

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt,$$

взятого вздовж лінії $x = x(t)$ від точки $A(t_0, x_0)$ до точки $B(t_1, x_1)$, називають J-*довжиною* лінії $x = x(t)$. Якщо $\hat{x} = \hat{x}(t)$ — екстремаль, то $J(\hat{x}(\cdot))$ називають *геодезичною відстанню* між точками A, B або J-*відстанню*, а саму екстремаль називають J-*прямою*. Якщо відстань визначається функціоналом (4.8), то геодезична відстань $J(A, B)$ між точками $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ дорівнює $1/4$.

2. Геодезичною відстанню точки B до лінії $\mathcal{L}$, яка задається рівнянням $x = \varphi(t)$, називають геодезичну відстань від точки B до точки $A \in \mathcal{L}$ таку, що функціонал $J(x(\cdot))$ обчислюється вздовж

екстремалі, яка з'єднує точки A і B, перетинаючи лінію $\mathcal{L}$ у точці A трансверсально. *Геодезичним колом* називають лінію, усі точки якої перебувають на однаковій геодезичній відстані від заданої точки. Аналогічно визначаються *геодезичний еліпс* та *геодезична гіпербола.*

Приклад 4.10. Знайти геодезичне коло з центром у точці $(0,0)$ радіуса R, якщо геодезичну відстань визначають за допомогою функціонала (4.8).

Розв'язання. Екстремалі функціонала (4.8) задовольняють співвідношення $x^2 = C_1 t$, $2xx' = C_1$, $x' = \frac{x}{2t}$. З умови трансверсальності $x^2x'(2\varphi' - x') = 0$ випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до геодезичного кола задовольняє рівняння $\varphi' = x'/2$. Враховуючи, що $x' = x/2t$, складемо диференціальне рівняння геодезичного кола $x' = x/4t$. Отже, рівняння геодезичного кола таке: $x^4 = Ct$. Щоб визначити величину C, використаємо те, що точка (C^3, C) лежить на геодезичному колі, а рівняння геодезичного радіуса (екстремалі), що проходить через цю точку, таке: $x^2 = t/C$, звідки $xx' = \frac{1}{2C}$, тому

$$R = \int_0^{C^3} (xx')^2\, dt = \int_0^{C^3} (4C^2)^{-1}\, dt = C/4.$$

Отже, $C = 4R$.

Відповідь. Геодезичне коло радіуса R із центром у початку координат описується рівнянням $x^4 = 4Rt$.

Зауваження 4.5. Уведені поняття дозволяють говорити про неевклідову геометрію з диференціалом дуги $ds = L(t,x,x')\, dt$. Якщо $L = \sqrt{1+x^2}$, то геодезичні прямі перетворюються на звичайні.

Приклад 4.11. Визначити екстремаль функціонала

$$J(y(\cdot)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\, dx,$$

що з'єднує точку $(0,0)$ та коло $(x-9)^2 + y^2 = 9$ трансверсально.

Розв'язання. Рівняння Ейлера вказаного функціонала має вигляд

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} - y' \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Після спрощень $y\sqrt{1+(y')^2} = C_1^{-1} = C$. Таке рівняння можна зінтегрувати підстановкою $y' = \tan(u)$, тоді

$$y = C\cos(u), \quad dx = dy/y' = -C\cos(u)\,du, \quad x = -C\sin(u) + C_2.$$

Параметричне рівняння $y = C\cos(u)$, $x = -C\sin(u) + C_2$ — це рівняння кола $(x - C_2)^2 + y^2 = C^2$ із центром на осі OX. Шукана екстремаль проходить через точку $(0, 0)$, тому $C_2 = C > 0$. Невідому константу C визначимо з умови ортогональності дотичних до кіл $(x-9)^2 + y^2 = 9$, $(x - C_2)^2 + y^2 = C^2$ у точці перетину.
Відповідь. Шукана екстремаль — це дуга кола $(x - 4)^2 + y^2 = 16$.

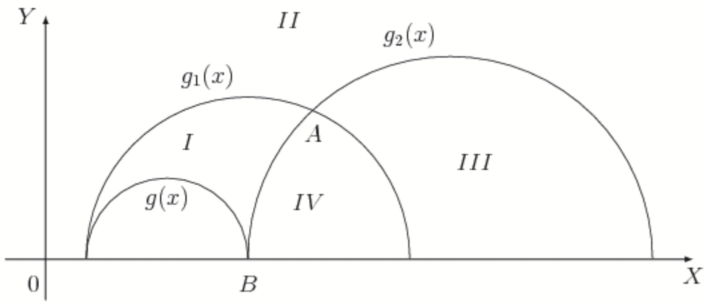


Рис. 8: Модель Пуанкаре

Зауваження 4.6. Згідно з принципом Ферма траєкторія руху променя світла в неоднорідному двовимірному середовищі зі швидкістю $v(x, y)$ є екстремаллю функціонала

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v(x,y)}\,dx.$$

Якщо швидкість світла пропорційна лише координаті y, то екстремалі функціонала J — це дуги кіл, центри яких лежать на осі OX. Нехай задана крива $y = g(x)$. *Оптичною довжиною* кривої $y = g(x)$ називають час $T(g)$, за який промінь проходить цю криву зі швидкістю $v(x, y)$. Розглянемо верхню півплощину як середовище, в кожній точці якого швидкість світла дорівнює ординаті цієї точки $v = y$. Променями світла у цьому середовищі будуть півкола з центрами на осі OX. Можна показати, що дуга півкола $y = g(x)$, один з кінців якої лежить на осі OX, має нескінченну оптичну довжину, тому точки осі називають *нескінченно віддаленими*. Будемо вважати, що півкола з центрами на осі — прямі, оптичні довжини дуг таких півкіл — їхні довжини, кути між такими прямими — кути між дотичними до півкіл у точці перетину. Прямими будемо називати й півпрямі у верхній півплощині перпендикулярні осі OX. Ці півпрямі є виродженими півколами.

За таких означень точок і прямих виконуються всі аксіоми евклідової геометрії, крім аксіоми про паралельні прямі. Наприклад, через дві точки можна провести одну і тільки одну пряму (через дві точки у верхній півплощині можна провести тільки одне півколо з центром на осі OX). *Паралельними* вважаються дві прямі, що мають спільну нескінченно віддалену точку (тобто два півкола, що дотикаються одне одного в точці B, яка лежить на осі OX). Тоді через задану точку A, що не лежить на прямій $y = g(x)$, можна провести дві прямі $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, паралельні прямій $y = g(x)$. Прямі, які проходять через точку A і лежать у вертикальних кутах I і III, перетинають пряму $y = g(x)$. Прямі, які лежать у вертикальних кутах II і IV, не перетинають пряму $y = g(x)$ (рис. 8).

Це *модель Пуанкаре* геометрії Лобачевського на площині.

4.4. Задачі для самостійного розв'язування

Дослідити на екстремум функціонали.

4.1. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1.$

4.2. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt + \alpha x^2(1) \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

4.3. $\int\limits_0^T (x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ T + x(T) + 1 = 0.$

4.4. $\int\limits_0^T (x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ (T-1)x^2(T) + 2 = 0.$

4.5. $\int\limits_0^T (x')^3\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ T + x(T) = 1.$

4.6. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 0.$

4.7. $\int\limits_0^{T_0} \big(x - (x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

4.8. $\int\limits_0^T \big((x')^2 + x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1.$

4.9. $\int\limits_0^T \big((x')^2 + x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(T) = T.$

4.10. $\int\limits_0^T \big((x')^2 + x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(T) = \xi.$

4.11. $\int\limits_0^T \big((x')^2 + x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(T) = T.$

4.12. $\int\limits_0^T \big((x')^2 + x + 2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

4.13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \big((x')^2 - x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1.$

4.14. $\int\limits_0^{T_0} \big((x')^2 - x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

4.15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \big((x')^2 - x^2 + 4x\cos(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

4.16. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \big((x')^2 - x^2 + 4x\sin(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(\pi/2) = 0.$

4.17. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1.$

4.18. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2 + 4x\sinh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

4.19. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2 + 4x\cosh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 0.$

4.20. $\int\limits_0^1 \left((x')^2 + x^2\right) dt - x^2(1) \to \text{extr}, \quad x(0) = 1.$

4.21. $\int\limits_0^T \left((x')^2 + x^2\right) dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(T) = 1.$

4.22. $\int\limits_1^e (t(x')^2 + 2x)\, dt \to \text{extr}; \quad x(1) = 0.$

4.23. $\int\limits_1^e (t(x')^2 + 2x)\, dt \to \text{extr}; \quad x(1) = x(e) = 0.$

4.24. $\int\limits_0^{T_0} ((x')^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(T_0) = \xi.$

4.25. $\int\limits_0^T ((x')^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(T) = \xi.$

4.26. $\int\limits_0^{T_0} ((x')^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi.$

4.27. $\int\limits_0^T ((x')^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0,\ x(T) = \xi.$

4.28. $\int\limits_0^T \left((x')^2 + x^2\right) dt \to \text{extr}, \quad x(T) + T - 1 = 0.$

4.29. $\int\limits_0^T \left((x')^2 + x^2\right) dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ T + x(T) + 1 = 0.$

4.30. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1, 0)$ до еліпса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

4.31. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1, 5)$ до параболи $y^2 = x$.

4.32. Знайти найкоротшу відстань між колом $x^2 + y^2 = 1$ і прямою $x + y = 4$.

4.33. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(0, 0, 3)$ до поверхні $z = x^2 + y^2$.

4.34. Знайти найкоротшу відстань між поверхнями

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

4.35. Знайти геодезичну відстань між точками $(0, 1)$ та $(1, 1)$, якщо геодезична відстань визначається функціоналом

$$J(y(\cdot)) = \int \left(12xy + (y')^2\right) dx.$$

4.36. Знайти геодезичне коло радіуса $R = 1$ з центром у точці $(0, 0)$, якщо геодезична відстань визначається функціоналом

$$J(y(\cdot)) = \int (y')^3\,dx.$$

4.37. $\int\limits_0^T \sqrt{1+(x')^2}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ T^2 x(T) = 1.$

4.38. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x(1) = 1.$

4.39. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x(0) = x(1) = 1.$

4.40. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x(0) = 1,\ 2T + x(T) = 2.$

4.41. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1.$

4.42 $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1,\ T - x(T) = 1.$

4.43. $\int\limits_0^{T_0} x\sqrt{1+(x')^2}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(T_0) = \xi.$

4.44. $\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{2}\big((x_1')^2 + (x_2')^2\big) - x_1 x_2\Big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1.$

4.45. $\int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{2}\big((x_1')^2 + (x_2')^2\big) - x_1 x_2\Big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 1.$

4.46. $\int\limits_0^1 (((x_1')^2 + (x_2')^2)/2 + x_1 x_2)\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x_1(0) = x_2(0) = 1.$

4.47. $\int\limits_0^{\pi/2} ((x_1')^2 + (x_2')^2 + 2x_1 x_2)\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$

$x_1(\pi/2) = 1, \quad x_2(\pi/2) = -1.$

4.48. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x(0) = x'(0) = 0,\ x(1) = 1.$

4.49. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x(0) = x'(1) = 0,\ x'(0) = 1.$

4.50. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}; \quad x(0) = x'(0) = 0,\ x'(1) = 1.$

4.51. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = x(1) = 0,\ x'(0) = -1,\ x'(1) = 1.$

4.52. $\int\limits_0^1 ((x'')^2 - 48x)\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = x(1) = 0.$

4.53. $\int\limits_0^1 ((x'')^2 - 48x)\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = x'(0) = x(1) = 0.$

4.54. $\int\limits_0^1 ((x'')^2 - 48x)\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0.$

4.55. $\int\limits_0^1 ((x'')^2 + 48x)\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

4.56. $\int\limits_1^e t(x'')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1) = e + 1/2,\ x(e) = e^2/2,\ x'(1) = 1.$

4.57. $\int\limits_1^e t(x'')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1) = 0,\ x'(1) = 1,\ x'(e) = 2.$

4.58. $\int\limits_1^e t(x'')^2\,dt \to \text{extr};\ x(1) = 0,\ x'(1) = 1,\ x(e) = e,\ x'(e) = 2.$

4.59. $\int\limits_1^e t^2(x'')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1) = -1,\ x(e) = x'(1) = e.$

4.60. $\int\limits_1^e t^2(x'')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1) = 0,\ x'(1) = 1,\ x'(e) = e^{-1}.$

4.61. $\int\limits_1^e t^2(x'')^2\,dt \to \text{extr};\ x(1) = 0,\ x(e) = x'(1) = 1,\ x'(e) = \frac{e}{1}.$

4.62. $\int\limits_1^e t^3(x'')^2\,dt \to \text{extr};\ x(1) = e/2,\ x(e) = 3/2,\ x'(e) = (2e)^{-1}.$

4.63. $\int\limits_1^e t^3(x'')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1) = 1,\ x'(1) = -1,\ x'(e) = e^{-2}.$

4.64. $\int\limits_1^e t^3(x'')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(1) = 1,\ x'(1) = -1,\ x(e) = e^{-1},$
$x'(e) = -e^{-2}.$

4.65. $\int\limits_0^\pi ((x'')^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0) = x'(0) = 0,\ x(\pi) = \sinh(\pi).$

4.66. $\int\limits_0^\pi ((x'')^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0) = x'(0) = x'(\pi) = 0,$
$x(\pi) = \sinh(\pi).$

4.67. $\int\limits_0^{T_0}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}.$

4.68. $\int\limits_0^{T}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}.$

4.69. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(\pi/2) = 1.$

4.70. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1.$

4.71. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x'(0) = 1.$

4.72. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(\pi) = 1.$

4.73. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x'(\pi) = 1.$

4.74. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

4.75. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x'(0) = 0,\ x'(\pi/2) = 1.$

4.76. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0,\ x'(\pi) = 1.$

4.77. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x'(0) = 0,\ x(\pi) = 1.$

4.78. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = x(\pi) = 0,\ x'(0) = 1.$

4.79. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = x(\pi) = 0,\ x'(\pi) = 1.$

4.80. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 1,\ x'(0) = x'(\pi) = 0.$

4.81. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x'(0) = x'(\pi) = 0,\ x(\pi) = 1.$

4.82. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; \quad x(0) = x'(\pi/2) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

4.83. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}; x(\frac{\pi}{2}) = 1, x(0) = x'(0) = 0, x'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

4.84. $\int\limits_0^{\pi}((x'')^2-x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=x(\pi)=0,\ x'(0)=1,\ x'(\pi)=-1.$

4.85. $\int\limits_0^{1}((x'')^2+x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=0,\ x(1)=\sinh(1),$
$x'(1)=\cosh(1).$

4.86. $\int\limits_0^{1}((x'')^2+x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=-\sinh(1),\ x'(0)=\cosh(1),$
$x(1)=0.$

4.87. $\int\limits_0^{1}((x'')^2+x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x'(0)=0,\ x'(1)=\sinh(1).$

4.88. $\int\limits_0^{1}((x'')^2+x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x'(0)=\sinh(1),\ x(1)=x'(1)=0.$

4.89. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2-x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=0,\ x(\pi/2)=1+\pi/2,$
$x'(\pi/2)=1.$

4.90. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2-x^2)\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x'(0)=0,\ x(\pi/2)=1.$

4.91. $\int\limits_0^{\pi/2}((x'')^2-x^2)\,dt \to \text{extr};\ x(0)=x'(0)=x'(\pi/2)=0,$
$x(\pi/2)=1.$

4.92. $\int\limits_0^{1}(x''')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ x'(1)=1.$

4.93. $\int\limits_0^{1}(x''')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x'(0)=x''(0),\ x(1)=1.$

4.94. $\int\limits_0^{1}(x''')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ x(1)=1.$

4.95. $\int\limits_0^{1}(x''')^2\,dt \to \text{extr};\ x(0)=x'(0)=x''(0)=x'(1)=0,\ x(1)=1.$

4.96. $\int\limits_0^{1}(x''')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0,$
$x'(1)=x''(1)=0,\ x(1)=1.$

4.97. $\int\limits_0^{1}(x''')^2\,dt \to \text{extr};\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x(1)=0,$
$x'(1)=0,\ x''(1)=2.$

5. Ламані екстремалі

5.1. Неособливі екстремалі

При виведенні рівняння Ейлера методом Лагранжа ми інтегрували частинами другий доданок у виразі

$$\delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\hat{L}_x(t)h(t) + \hat{L}_{x'}(t), h'(t)\right] dt.$$

Ця операція обґрунтована, якщо функція $\hat{L}_{x'}(t) = L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ неперервно диференційовна. Похідна $\frac{d}{dx} L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ містить другу похідну $\hat{x}''(t)$ функції $\hat{x}(t)$, проте в найпростішій задачі варіаційного числення існування $\hat{x}''(t)$ не передбачалось. Отже, необхідна умова екстремуму (рівняння Ейлера) обґрунтована лише для функцій із класу $C^2[t_0, t_1]$. При виведенні рівняння Ейлера методом Дюбуа – Реймона доведено існування і неперервність функції $\frac{d}{dx}\hat{L}_{x'}(t)$. Однак це не означає, що існує $\hat{x}''(t)$ і функцію $L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = \hat{L}_{x'}(t)$ можна диференціювати за правилом диференціювання складних функцій.

Означення 5.1. Екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ називається *неособливою*, якщо

$$L_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \neq 0, \quad \text{для всіх}\, t \in [t_0, t_1].$$

Теорема 5.1 (теорема Гільберта). *Неособлива екстремаль належить класу $C^2[t_0, t_1]$.*

Означення 5.2. Екстремаль $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ функціонала $J(x(\cdot))$, що залежить від вектор-функцій, називається *неособливою*, якщо

$$\det\left(\hat{L}_{x'_k x'_j}(t)\right) \neq 0$$

для всіх $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 5.2. *Неособлива екстремаль $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ належить класу $C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.*

5.2. Умови Вейєрштрасса – Ердмана

Основна задача варіаційного числення досліджувалась у просторі $C^1[t_0, t_1]$ один раз неперервно диференційовних функцій. Однак у цьому просторі розв'язується не кожна задача, навіть за умови, що функція $L(t, x, x')$ під знаком інтеграла разом із похідними $L_x(t, x, x')$, $L_{x'}(t, x, x')$ неперервна по сукупності змінних, не завжди існує розв'язок задачі в просторі $C^1[t_0, t_1]$.

Приклад 5.1 (*приклад Гільберта*). Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 t^{\frac{2}{3}} (x')^2 \, dt \to \inf, \quad x(0) = 0, \ x(1) = 1.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера має інтеграл імпульсу $t^{\frac{2}{3}} x' = C$. Отже існує єдина екстремаль $\hat{x}(t) = t^{\frac{1}{3}}$. Ця екстремаль не належить простору $C^1[t_0, t_1]$. Разом із тим вона дає абсолютний мінімум у задачі. Дійсно, нехай $h(\cdot)$ — будь-яка функція з класу $C^1[t_0, t_1]$, для якої інтеграл скінченний та $h(0) = h(1) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) &= \int_0^1 t^{\frac{2}{3}} \big((x')^2(t) + 2\hat{x}'(t) h'(t) + (h')^2(t) \big) \, dt \\ &= J(\hat{x}(\cdot)) + \frac{2}{3} \int_0^1 h'(t) \, dt + J(h(\cdot)) \\ &= J(\hat{x}(\cdot)) + J(h(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot)). \end{aligned}$$

Відповідь. Розв'язок задачі існує. Проте екстремаль $\hat{x}(t) = t^{\frac{1}{3}}$ не належить простору $C^1[t_0, t_1]$.

Для того, щоб уникнути подібних ускладнень, клас допустимих функцій доповнюють новими функціями і на них визначають функціонал $J(x(\cdot))$.

Визначимо основну задачу варіаційного числення для кусково-гладких функцій. Нагадаємо, що *кусково-гладкою функцією* називається неперервна функція $x(\cdot)$, яка має неперервну на $[t_0, t_1]$ похідну, за винятком скінченного числа точок $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < t_1$, і в цих точках τ_j похідна $x'(\cdot)$ має розриви першого роду. Сукупність усіх кусково-гладких функцій на $[t_0, t_1]$ позначимо $KC^1[t_0, t_1]$.

Розглянемо основну задачу варіаційного числення

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{5.1}$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

у просторі $KC^1[t_0, t_1]$. Інтегральний функціонал $J(x(\cdot))$ визначений на множині функцій $x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$, оскільки на множині таких функцій $x(\cdot)$ функція $L(t, x, x')$ кусково-неперервна, отже інтеграл існує. У просторі $KC^1[t_0, t_1]$ більш природно досліджувати функціонал $J(x(\cdot))$ на сильний, а не на слабкий екстремум. Якщо в ε–окіл елемента $\hat{x}(\cdot)$ простору $KC^1[t_0, t_1]$ ввести функції $x(\cdot)$ такі, що малі різниці $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1]$, а також їхні похідні $|x'(t) - \hat{x}'(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1]$, то кусково-гладкі функції будуть лежати "далеко" від гладких функцій. Дійсно, якщо похідна $\hat{x}'(\cdot)$ має стрибок δ, то жодна з функцій $x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$ не може задовольнити нерівність $|\hat{x}'(t) - x'(t)| < \delta/2$ для всіх t, за яких існує $\hat{x}'(t)$. Тому відстань у просторі $KC^1[t_0, t_1]$ природно визначати, порівнюючи лише значення самих функцій, а не їх похідних. Це обумовлює дослідження задачі на сильний екстремум.

Означення 5.3. Функція $\hat{x}(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$ дає сильний мінімум (максимум) функціонала задачі (5.1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожної функції $x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$, яка задовольняє граничні умови $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ та умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_0 = \sup_{t_0 \le t \le t_1} |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon, \tag{5.2}$$

виконується нерівність

$$J(x(\cdot)) \ge J(\hat{x}(\cdot)) \quad \Big(J(x(\cdot)) \le J(\hat{x}(\cdot))\Big).$$

Лема 5.1 (лема про заокруглення кутів). *Якщо функція $L(t, x, x')$ неперервна по сукупності аргументів, то*
1)

$$\inf_{\substack{x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1}} J(x(\cdot)) = \inf_{\substack{x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1}} J(x(\cdot)); \tag{5.3}$$

2) рівність (5.3) зберігається при тих $x(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$, які задовольняють (5.2) із заданими $\hat{x}(\cdot)$, $\varepsilon > 0$;
3) твердження дійсне після заміни $\inf$ *на* $\sup$.

Наслідок 5.1. *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$ дає абсолютний або сильний мінімум (максимум) функціонала задачі (5.1) у просторі $C^1[t_0, t_1]$, то вона дає такий самий екстремум і в просторі $KC^1[t_0, t_1]$.*

Аналізуючи виведення рівняння Ейлера методом Дюбуа – Реймона в класі $C^1[t_0, t_1]$, можна переконатись, що неперервність функції використовувалась лише при переході від рівняння Ейлера в інтегральній формі до рівняння Ейлера в диференціальній формі. Перехід обґрунтований в усіх точках неперервності функції $\hat{x}'(t)$, тобто між точками зламу.

Теорема 5.3. *Нехай функція $L(t, x, x')$ та її частинні похідні $L_x(t, x, x')$, $L_{x'}(t, x, x')$ неперервні по сукупності змінних. Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$ дає екстремум функціонала (5.1) найпростішої задачі варіаційного числення, то*
1) функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє інтегральні рівняння

$$\hat{L}_{x'}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_x(s)\, ds + C_1, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{5.4}$$

$$\hat{L}(t) - x'(t)\hat{L}_{x'}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_t(s)\, ds + C, \quad t \in [t_0, t_1]; \tag{5.5}$$

2) на кожному проміжку неперервності функції $\hat{x}'(\cdot)$ функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє диференціальні рівняння

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t), \tag{5.6}$$

$$\hat{L}_t(t) = \frac{d}{dt}\big[\hat{L}(t) - x'(t)\hat{L}_{x'}(t)\big]; \tag{5.7}$$

3) у кожній точці τ_j, $j = \overline{1, m}$, зламу функції $\hat{x}(\cdot)$ виконуються перша умова Вейєрштрасса – Ердмана

$$\hat{L}_{x'}(t)\big|_{t=\tau_j - 0} = \hat{L}_{x'}(t)\big|_{t=\tau_j + 0}, \quad j = \overline{1, m},$$

та друга умова Вейєрштрасса – Ердмана

$$\big(\hat{L}(t) - \hat{x}'(t)\hat{L}_{x'}(t)\big)\big|_{t=\tau_j-0} = \big(\hat{L}(t) - \hat{x}'(t)\hat{L}_{x'}(t)\big)\big|_{t=\tau_j+0}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Сформулюємо теорему про необхідні умови екстремуму функціонала, що залежить від векторних функцій.

Теорема 5.4. *Нехай функція $L = L(t, x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n')$ та її частинні похідні L_{x_k}, $L_{x_k'}$, $k = 1, \dots, n$, неперервні. Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ дає екстремум функціонала $J(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$, то*
1) функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє інтегральні рівняння

$$\hat{L}_{x_k'}(t) = \int_{t_0}^{t} \hat{L}_{x_k}(s)\,ds + C_k, \quad t \in [t_0, t_1],\ k = \overline{1,n}, \tag{5.8}$$

$$\hat{L}(t) - \sum_{k=1}^{n} x_k'(t)\hat{L}_{x_k'}(t) = \int_{t_0}^{t} \hat{L}_t(s)\,ds + C, \quad t \in [t_0, t_1]; \tag{5.9}$$

2) на кожному проміжку неперервності функції $\hat{x}'(\cdot)$ функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє диференціальні рівняння

$$\hat{L}_{x_k}(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x_k'}(t),\ k = \overline{1,n}, \tag{5.10}$$

$$\hat{L}_t(t) = \frac{d}{dt}\left[\hat{L}(t) - \sum_{k=1}^{n} x_k'(t)\hat{L}_{x_k'}(t)\right]; \tag{5.11}$$

3) у кожній точці τ_j, $j = \overline{1,m}$, зламу функції $\hat{x}(\cdot)$ виконуються умови Вейєрштрасса – Ердмана

$$\hat{L}_{x_k'}(t)\big|_{t=\tau_j-0} = \hat{L}_{x_k'}(t)\big|_{t=\tau_j+0}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$\left(\hat{L}(t) - \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k'(t)\hat{L}_{x_k'}(t)\right)\Bigg|_{t=\tau_j-0}^{t=\tau_j+0} = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Зауваження 5.1. Умови Вейєрштрасса – Ердмана набувають досить простого вигляду, якщо використати канонічні змінні

$$p = L_{x'}, \quad H = -L + x'L_{x'}.$$

Тоді ці умови означають, що канонічні змінні неперервні в точках зламу екстремалі.

Зауваження 5.2. Зауважимо, що наведене розширення основної задачі не завжди достатнє. Задача Гільберта, наприклад, не має розв'язку і в просторі $KC^1[0,1]$. Більш природно розширити задачу на клас $W^1_\infty[t_0, t_1]$ функцій, що задовольняють умову Ліпшиця. Проте і в такому просторі задача Гільберта не має розв'язку (функція $x(t) = t^{\frac{1}{3}}$ умову Ліпшиця не задовольняє). Це наводить на думку, що кожну задачу потрібно розв'язувати у своєму просторі.

Гладкі розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремалями. Кусково–гладкі розв'язки, складені з екстремалей, називаються *ламаними екстремалями.* Умови Вейєрштрасса – Ердмана можна тлумачити як рівняння, за допомогою яких визначають точки, де можуть бути вершини ламаних екстремалей, а також нахили гладких дуг, що сходяться у цих вершинах.

Приклад 5.2. Знайти ламані екстремалі функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_0^2 \big((x')^4 - 6(x')^2\big)\,dt, \quad x(0) = 0,\ x(2) = 0.$$

Розв'язання. 1. Функція під інтегралом залежить лише від x', тому екстремалями функціонала $J(x(\cdot))$ будуть прямі $x = C_1 t + C_2$.

2. Друга похідна $L_{x'x'} = 12(x')^2 - 12$ може перетворюватись на нуль, тому можливі ламані екстремалі. Нехай ламана екстремаль складається з відрізків прямих

$$x_- = at + b, \quad 0 \le t \le \tau, \quad x_+ = ct + d, \quad \tau \le t \le 2.$$

Із граничних умов $x(0) = 0$, $x(2) = 0$ випливає $b = 0$, $d = -2c$. Отже, $x_- = at$, $x_+ = c(t-2)$. Щоб визначити невідомі коефіцієнти a, c та точку зламу τ, використаємо умову неперервності екстремалі в точці τ та умову Вейєрштрасса – Ердмана. Обчислимо $L_{x'} = 4x'^3 - 12x'$, $L - x'L_{x'} = -3x'^4 + 6x'^2$, $x'_- = a$, $x'_+ = c$. Складемо такі рівняння:

$$\begin{gathered} a\tau = c(\tau - 2), \\ 4a^3 - 12a = 4c^3 - 12c, \\ -3a^4 + 6a^2 = -3c^4 + 6c^2. \end{gathered}$$

Допустимі розв'язки цієї системи рівнянь:
а) $a = \sqrt{3}$, $c = -\sqrt{3}$, $\tau = 1$; б) $a = -\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$, $\tau = 1$.

Відповідь. Ламані екстремалі з однією точкою зламу такі:

$$\hat{x}_1(t) = \begin{cases} \sqrt{3}t, & 0 \le t \le 1, \\ -\sqrt{3}(t-2), & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

$$\hat{x}_2(t) = \begin{cases} -\sqrt{3}t, & 0 \le t \le 1, \\ \sqrt{3}(t-2), & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

$$J\big(\hat{x}_1(\cdot)\big) = J\big(\hat{x}_2(\cdot)\big) = -18.$$

Індикатриса $u = q^4 - 6q^2$ не залежить від точки (t, x), вона має спільну дотичну в точках з абсцисами $q = \pm\sqrt{3}$. Тому умови Вейєрштрасса – Ердмана будуть виконані, якщо екстремалі будувати з прямих, які утворюють кут $\pm\pi/3$ з віссю OX.

Приклад 5.3. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(f(x') + x^2\big)\, dt \to \inf, \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,$$

де функція

$$f(u) = \big((|u| - 1)_+\big)^2 = \begin{cases} (u-1)^2, & u \ge 1, \\ 0, & |u| < 1, \\ (u+1)^2, & u \le -1, \end{cases}$$

неперервно диференційовна та опукла.

Розв'язання. Графік цієї функції лежить не нижче кожної своєї дотичної і завжди $f(v) \ge f(u) + f'(u)(v-u)$. Тому для будь-яких функцій $x(\cdot)$, $\hat{x}(\cdot) \in KC^1[t_0, t_2]$, що задовольняють задані граничні умови $x(t_0) = \hat{x}(t_0) = x_0$, $x(t_1) = \hat{x}(t_1) = x_1$, виконується

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(f(x'(t)) - f(\hat{x}'(t)) + x^2(t) - \hat{x}^2(t)\big)\, dt \ge$$
$$\ge \int_{t_0}^{t_1} \big(f'(\hat{x}'(t))(x'(t) - \hat{x}'(t)) + 2\hat{x}(t)(x(t) - \hat{x}(t)) +$$
$$+ (x(t) - \hat{x}(t))^2\big)\, dt \ge$$
$$\ge \int_{t_0}^{t_1} \big(f'(\hat{x}'(t))(x'(t) - \hat{x}'(t)) + 2\hat{x}(t)(x(t) - \hat{x}(t))\big)\, dt.$$

Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ в усіх точках диференційовності задовольняє рівняння Ейлера $\frac{d}{dt}f'(\hat{x}'(t)) = 2\hat{x}(t)$, то, інтегруючи частинами на кожному інтервалі неперервності $\hat{x}'(\cdot)$, дістанемо

$$J(x(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt} f'(\hat{x}'(t)) + 2\hat{x}(t)(x(t) - \hat{x}(t)) \right) dt +$$
$$+ \sum_j \big[f'\big(\hat{x}'(\tau_j + 0)\big) - f'\big(\hat{x}'(\tau_j - 0)\big)\big](x(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j)) = 0,$$

якщо функція $p(t) = f'\big(\hat{x}'(t)\big)$ неперервна. Таким чином, функція $\hat{x}(\cdot)$, що задовольняє рівняння Ейлера, умову неперервності $p(\cdot)$ та граничні умови, є розв'язком задачі.

Наприклад, функція $\hat{x}(t) = e^{|t|}$ зі зламом у точці $t = 0$ буде розв'язком задачі при $t_0 = -1$, $t_1 = 1$, $x_0 = x_1 = e$. Тоді $|\hat{x}'(t)| \geq 1$. Отже, функція

$$p(t) = f'\big(\hat{x}'(t)\big) = \begin{cases} 2\big(e^{-t} - 1\big), & t \geq 0, \\ 2\big(e^{-t} + 1\big), & t < 0 \end{cases}$$

стрибка в точці $t = 0$ не має і

$$\frac{d}{dt} p(t) = 2e^{|t|} = 2\hat{x}(t),$$

тому рівняння Ейлера виконується.

5.3. Задача про відбиття екстремалей

Визначити функцію, що дає екстремум функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_2} L(t, x(t), x'(t))\, dt,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_2) = x_2,$$

за умови, що крива $a(t)$ проходить із точки $A(t_0, x_0)$ у точку $B(t_2, x_2)$ лише після відбиття від заданої лінії $x = \varphi(t)$.

Будемо вважати, що в точці відбиття $C(t_1, x_1)$ шукана крива має злам $x'(t_1-0) \neq x'(t_1+0)$, а на інтервалах $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ похідна $x'(t)$ неперервна. Запишемо функціонал у вигляді

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt + \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), x'(t))\, dt = \\ = J_1(x(\cdot)) + J_2(x(\cdot)).$$

Функція $\hat{x}(\cdot)$, що дає екстремум функціонала задачі, задовольняє рівняння Ейлера. Дійсно, якщо на одному з відрізків $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ розв'язок задачі визначений і досліджувати задачу на іншому відрізку, то дістанемо задачу Лагранжа на множині функцій із фіксованими кінцями, а розв'язок такої задачі задовольняє рівняння Ейлера.

У точці відбиття виконується умова

$$\big[\hat{L}(t) + \big(\varphi'(t) - \hat{x}'(t)\big)\hat{L}_{x'}(t)\big]\big|_{t=t_1-0} = \\ = \big[\hat{L}(t) + \big(\varphi'(t) - \hat{x}'(t)\big)\hat{L}_{x'}(t)\big]\big|_{t=t_1+0}. \quad (5.12)$$

Вона разом із граничними умовами $\hat{x}(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_2) = x_2$ та умовою $\hat{x}(t_1) = \varphi(t_1)$ дозволяє визначити координату точки відбиття та невідомі константи загального розв'язку рівняння Ейлера.

Приклад 5.4. Визначити точку відбиття від заданої лінії $x = \varphi(t)$ променя світла, що йде з точки $A(x_0, y_0)$ у точку $B(x_2, y_2)$ зі швидкістю $v(x, y)$.

Розв'язання. Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$T = \int_{x_0}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2(x)}}{v(x, y)}\, dx.$$

Умова відбиття (5.12) у точці (x_1, y_1) має вигляд

$$\frac{1}{v(x_1, y_1)}\left[\sqrt{1 + (y')^2(x)} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1 + (y')^2(x)}}\right]\Bigg|_{x=x_1-0} = \\ = \frac{1}{v(x_1, y_1)}\left[\sqrt{1 + (y')^2(x)} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1 + (y')^2(x)}}\right]\Bigg|_{x=x_1+0},$$

або

$$\left.\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+(y')^2(x)}}\right|_{x=x_1-0} = \left.\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+(y')^2(x)}}\right|_{x=x_1+0}.$$

Позначимо кут між дотичною до кривої $y = \varphi(x)$ та віссю абсцис через α, а кути нахилу лівої та правої дотичних до екстремалі в точці (x_1, y_1) через β_1, β_2. Тоді умова відбиття набуває вигляду

$$\frac{1+\tan(\alpha)\tan(\beta_1)}{-\sec(\beta_1)} = \frac{1+\tan(\alpha)\tan(\beta_2)}{\sec(\beta_2)},$$

а після спрощення $-\cos(\alpha-\beta_1) = \cos(\alpha-\beta_2)$. Це означає, що кут падіння дорівнює куту відбиття.

Відповідь. Точка відбиття від заданої лінії $x = \varphi(t)$ променя світла визначається умовою: кут падіння дорівнює куту відбиття.

5.4. Задача про заломлення екстремалей

Припустимо, що підінтегральна функція $L(t, x, x')$ має лінію розриву $x = \varphi(t)$ похідної $x'(t)$ і граничні точки $A(t_0, x_0)$, $B(t_2, x_2)$ лежать по різні боки від лінії розриву. Запишемо функціонал $J(x(\cdot))$ у вигляді

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\,dt + \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), x'(t))\,dt = \\ = J_1(x(\cdot)) + J_2(x(\cdot)),$$

де $L_1(t, x, x') = L(t, x, x')$ з одного боку лінії розриву $x = \varphi(t)$ та $L_2(t, x, x') = L(t, x, x')$ з іншого боку лінії розриву. Якщо існує ламана екстремаль, то вона складається з екстремалей $\hat{x}_1(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ та $\hat{x}_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ функціоналів $J_1(x(\cdot))$ та $J_2(x(\cdot))$, що мають спільну точку на лінії розриву. Функціонали $J_1(x(\cdot))$ і $J_2(x(\cdot))$ мають одну фіксовану й одну рухому границю. Із необхідної умови екстремуму $\delta J(\hat{x}(\cdot)) = 0$ випливає така умова заломлення:

$$\left.\left[\hat{L}_1(t) + \big(\varphi'(t) - \hat{x}_1'(t)\big)\hat{L}_{1x'}(t)\right]\right|_{t=t_1-0} = \\ = \left.\left[\hat{L}_2(t) + \big(\varphi'(t) - \hat{x}_2'(t)\big)\hat{L}_{2x'}(t)\right]\right|_{t=t_1+0}.$$

Вона разом з двома граничними умовами $\hat{x}_1(t_0) = x_0$, $\hat{x}_2(t_2) = x_2$ та умовами $\hat{x}_1(t_1) = \varphi(t_1)$, $\hat{x}_2(t_1) = \varphi(t_1)$ дозволяє визначити точку заломлення t_1 та невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 розв'язків $\hat{x}_1(\cdot)$, $\hat{x}_2(\cdot)$ рівнянь Ейлера

$$\begin{aligned} L_{1x}(t) &= \frac{d}{dt} L_{1x'}(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ L_{2x}(t) &= \frac{d}{dt} L_{2x'}(t), \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Приклад 5.5 (*задача про заломлення світла*). У середовищі I швидкість поширення світла дорівнює $v_1(x, y)$, а в середовищі II — вона дорівнює $v_2(x, y)$. Середовища I та II розділені кривою $y = \varphi(x)$. Знайти умову заломлення світла, що йде з точки $A(x_0, y_0)$ середовища I у точку $B(x_2, y_2)$ середовища II, знаючи, що промінь проходить шлях AB за найкоротший відрізок часу.

Розв'язання. Задача зводиться до визначення екстремалей функціонала

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2(x)}}{v_1(x, y)}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2(x)}}{v_2(x, y)}\, dx = T_1 + T_2,$$

де функціонали T_1, T_2 визначають час переміщення променя з точки A до лінії розділення $y = \varphi(x)$ та від лінії розділення до точки B. Умова заломлення у такому разі матиме вигляд

$$\frac{1}{v_1(x, y)} \left[\frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + (y')^2(x)}} \right] \Bigg|_{x = x_1 - 0} = \frac{1}{v_2(x, y)} \left[\frac{1 + \varphi' y'}{\sqrt{1 + (y')^2(x)}} \right] \Bigg|_{x = x_1 + 0}.$$

Якщо позначимо

$$y'(x_1 - 0) = \tan(\beta_1), \quad y'(x_1 + 0) = \tan(\beta_2), \quad \varphi'(x_1) = \tan(\alpha),$$

то після спрощень дістанемо

$$\frac{\cos(\alpha - \beta_1)}{\cos(\alpha - \beta_2)} = \frac{v_1(x, y)}{v_2(x, y)}$$

або

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_2)\right.} = \frac{v_1(x, y)}{v_2(x, y)}.$$

Це співвідношення узагальнює відомий *закон заломлення світла*: відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює відношенню швидкостей у середовищах, на границі яких відбувається заломлення.

5.5. Односторонні варіації

У деяких задачах на екстремум допустимі функції не можуть проходити через точки заданої області. Якщо функція $x(\cdot)$, що є розв'язком такої задачі, не перетинає задану область, то наявність області не впливає на властивості функціонала та його варіації в околі функції. Тому можна використовувати звичні методи дослідження функціонала на екстремум. Якщо ж функція складається з частин екстремалей, що не потрапили в область заборони, і частин границі заданої області, то на границі області можливі лише односторонні варіації, оскільки в задану область функції не можуть потрапляти.

Дослідимо на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \mathrm{extr}, \tag{5.13}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{5.14}$$

за умови, що

$$x - \varphi(t) \geq 0, \tag{5.15}$$

де $\varphi(t)$ — неперервно диференційовна функція.

Теорема 5.5. *Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$, що дає екстремум функціонала (5.13) за умов (5.14), (5.15), складається з частин $\hat{x}(t) = \hat{x}_k(t)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $\hat{x}(t) = \varphi(t)$, $t \in [\tau_{k+1}, \tau_{k+2}]$, $k = \overline{0, m-1}$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_{m+1} = t_1$, то*
1) функції $\hat{x}_k(t)$ на відрізках $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ задовольняють рівняння Ейлера

$$L_x(t) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t) = 0;$$

2) у точках з'єднання τ_k, $k = \overline{1, m}$, *виконуються умови*

$$\big[L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) - L(t, \varphi(t), \varphi'(t)) + \\ + (\varphi'(t) - \hat{x}'(t)) L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))\big]\big|_{t=\tau_k} = 0;$$

3) $\varphi'(\tau_k) = \hat{x}'(\tau_k)$ *за умови* $L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \neq 0$ *(екстремаль* $\hat{x}(t)$ *дотикається до кривої* $x = \varphi(t)$ *у точці* τ_k*).*

Приклад 5.6. Визначити найкоротший шлях із точки $A(-2, 3)$ у точку $B(2, 3)$ в області $x \leq t^2$.

Розв'язання. Задача зводиться до дослідження на мінімум функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (x')^2(t)}\, dt$$

за умов $x(-2) = 3$, $x(2) = 3$, $x \leq t^2$. Екстремалями функціонала є прямі $x = c_1 + c_2 t$. Друга похідна $L_{x'x'} = [1 + x^2]^{-\frac{3}{2}} \neq 0$, тому шукана екстремаль буде складатися з відрізків AM, NB, прямих дотичних до параболи $x = t^2$, та частини MON параболи $x = t^2$. Позначимо абсциси точок дотику через $-\tau$, τ. У точках дотику ординати і кутові коефіцієнти прямої і дотичної до параболи однакові, тому $c_1 + c_2\tau = \tau^2$, $c_2 = 2\tau$. З іншого боку, дотична проходить через точку $B(2, 3)$, тому $c_1 + 2c_2 = 3$. Із трьох рівнянь обчислимо $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $\tau = 1$.

Відповідь. Розв'язок задачі такий:

$$x(t) = \begin{cases} -2t - 1, & -2 \leq t \leq -1, \\ t^2, & -1 \leq t \leq 1, \\ 2t - 1, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

5.6. Задачі для самостійного розв'язування

Знайти ламані екстремалі функціоналів.

5.1. $\int\limits_0^2 (x')^2(1-x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\, x(2)=1.$

5.2. $\int\limits_0^4 (x'-1)^2(x'+1)^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\, x(4)=2.$

5.3. $\int\limits_a^b \big((x')^2+2tx-x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(a)=c,\, x(b)=d.$

5.4. $\int\limits_{-1}^1 x^2\big(1-(x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(-1)=0,\, x(1)=1.$

5.5. $\int\limits_a^b \big((x')^4-2(x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(a)=c,\, x(b)=d.$

5.6. $\int\limits_0^a \sin(x')\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\, x(a)=b.$

5.7. Знайти функції, на яких може досягати екстремуму функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^{10} (x')^3\,dt, \quad x(0)=0, x(10)=0$$

за умови, що допустимі криві не можуть потрапити всередину кола $(t-5)^2+x^2=9$.

5.8. Серед кривих, які з'єднують точки $A(t_0,x_0)$, $B(t_1,x_1)$, визначити таку, що дає екстремум функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} x\sqrt{1-x^2(x')^2}\,dt$$

за умов $x \ge 0$, $1-x^2(x')^2 \ge 0$.

6. Умови екстремуму другого порядку

6.1. Умова Лежандра

У попередніх розділах наведені необхідні умови екстремуму першого порядку. Ці умови базуються на дослідженні першої варіації функціонала. Нові необхідні умови екстремуму можна отримати, досліджуючи другу варіацію функціонала.

Розглянемо основну задачу варіаційного числення

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{6.1}$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

за умови, що функція $L(t, x, x')$ два рази неперервно диференційовна за всіма аргументами.

Нехай $\hat{x}(\cdot)$ — функція, що дає мінімум функціонала $J(x(\cdot))$ задачі (6.1), а $h(\cdot)$ — допустима варіація аргументу функціонала $J(x(\cdot))$. Функція $h(\cdot)$ належить до класу H_0 неперервно диференційовних функцій на відрізку $[t_0, t_1]$ із нульовими граничними умовами. Визначимо функцію $\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot))$ дійсної змінної λ. Тоді другу варіацію функціонала $J(x(\cdot))$ можна обчислити за формулою

$$\varphi''(0) = \delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)).$$

Якщо функція $L(t, x, x')$ неперервна і має неперервні другі похідні $L_{xx}(t, x, x')$, $L_{xx'}(t, x, x')$, $L_{x'x'}(t, x, x')$, то маємо

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} W(t, h(t), h'(t))\, dt, \tag{6.2}$$

$$W(t, h(t), h'(t)) = \hat{L}_{xx}(t) h^2(t) + 2\hat{L}_{xx'}(t) h(t) h'(t) + \hat{L}_{x'x'}(t)(h')^2(t),$$
$$\hat{L}_{xx}(t) = L_{xx}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)), \quad \hat{L}_{xx'}(t) = L_{xx'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)),$$
$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)).$$

Функціонал (6.2) через необхідну умову другого порядку мінімуму функціоналів набуває невід'ємних значень при всіх допустимих варіаціях $h(\cdot) \in H_0$:

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0 \quad \text{для всіх } h(\cdot) \in H_0. \tag{6.3}$$

Із цієї нерівності можна вивести таку необхідну умову мінімуму основної задачі варіаційного числення (6.1).

Теорема 6.1 (умова Лежандра). *Якщо $\hat{x}(\cdot)$ — функція, що дає слабкий локальний мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення (6.1), то виконується умова Лежандра*

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \geq 0 \quad \text{для всіх } t \in [t_0, t_1]. \tag{6.4}$$

6.2. Умова Якобі

Якщо $\hat{x}(\cdot)$ — функція, що дає мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення, то друга варіація набуває невід'ємних значень при всіх допустимих варіаціях $h(\cdot)$:

$$\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0 \quad \text{для всіх } h(\cdot) \in H_0. \tag{6.5}$$

Означення 6.1. *Спряженою задачею* у варіаційному численні називається задача мінімізації функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$ на множині функцій з класу H_0:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, h(t), h'(t))\, dt \to \min, \quad h(t_0) = h(t_1) = 0, \tag{6.6}$$

Оскільки виконується умова (6.5) для всіх $h(\cdot)) \in H_0$, то спряжена задача завжди має тривіальний розв'язок: $h_0(t) \equiv 0$, $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h_0(\cdot)) = 0$.

Рівняння Ейлера

$$W'_h - \frac{d}{dt} W'_{h'} = 0 \tag{6.7}$$

функціонала спряженої задачі на мінімум (6.6) називається *рівнянням Якобі* основної задачі варіаційного числення. Рівняння Якобі при $h(\cdot) \in C^2[t_0, t_1]$ можна записати у вигляді

$$a(t)h''(t) + b(t)h'(t) + c(t)h(t) = 0, \tag{6.8}$$

де

$$a(t) = \hat{L}_{x'x'}(t), \quad b(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t), \quad c(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t) - \hat{L}_{xx}(t).$$

Рівняння Якобі (6.8) — це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Щоб уникнути тривіального розв'язку цього рівняння, визначають такі розв'язки $h(\cdot)$, які задовольняють ненульові початкові умови:

$$h(t_0) = 0, \quad h'(t_0) = 1. \tag{6.9}$$

Означення 6.2. Точка t^* називається *спряженою* із точкою t_0, якщо існує такий нетривіальний розв'язок $h(t)$ рівняння Якобі (6.8) з початковими умовами (6.9), що $h(t_0) = h(t^*) = 0$.

Теорема 6.2 (умова Якобі). *Якщо $\hat{x}(\cdot)$ — функція, що дає слабкий локальний мінімум функціонала $J(x(\cdot))$ основної задачі варіаційного числення і виконується посилена умова Лежандра*

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) > 0 \quad \text{для всіх } t \in [t_0, t_1], \tag{6.10}$$

то на інтервалі (t_0, t_1) не існує точок, спряжених із точкою t_0.

6.3. Достатні умови слабкого екстремуму

Прості приклади показують, що жодна з умов (стаціонарності, Лежандра, Якобі) не є достатньою умовою екстремуму. Проте в сукупності ці умови близькі до достатніх. Сформулюємо систему умов, достатніх для того, щоб допустима функція $x(\cdot)$ давала слабкий екстремум функціонала основної задачі варіаційного числення:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{6.11}$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

Теорема 6.3 (достатні умови слабкого мінімуму). *Допустима функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення (6.11), якщо вона задовольняє такі умови:*
1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}'_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}'_{x'}(t) = 0;$$

2) граничні умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1;$$

3) посилену умову Лежандра

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) > 0 \quad \text{для всіх } t \in [t_0, t_1];$$

4) посилену умову Якобі (на інтервалі $(t_0, t_1]$ *не існує точок* t^**, спряжених із точкою* t_0*).*

Аналогічну теорему можна сформулювати і для слабкого максимуму, замінивши на протилежний знак нерівності у посиленій умові Лежандра.

Приклад 6.1. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^a \big((x')^2 - x^2\big)\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(a) = 0.$$

Розв'язання. 1. Запишемо рівняння Ейлера: $x'' + x = 0$. Загальний розв'зок його такий: $x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$. Із граничних умов дістанемо $C_2 = 0$, $C_1 \sin(a) = 0$. Отже, екстремаллю задачі буде функція $\hat{x}(t) = C_1 \sin(t)$, де C_1 визначається з умови $C_1 \sin(a) = 0$.

2. Рівняння Якобі $h'' + h = 0$ не залежить від вигляду екстремалі. Нетривіальний розв'зок рівняння, який задовольняє умову $h(0) = 0$, має вигляд $h(t) = A \sin(t)$, $A \neq 0$. Отже, умова Якобі виконується, якщо $0 < a \leq \pi$, а при $0 < a < \pi$ виконується посилена умова Якобі, Якщо $a > \pi$, то на відрізку $(0, a]$ існує спряжена з точкою t_0 точка t^*, тобто умова Якобі не виконується.

3. Оскільки $L_{x'x'} = 2 > 0$, то кожна екстремаль неособлива і виконується посилена умова Лежандра.

Відповідь. Якщо $0 < a < \pi$, то екстремаль $\hat{x}(t) = 0$ дає слабкий мінімум функціонала задачі. Якщо $a > \pi$, то задача не має розв'язків. При $a = \pi$ допустимі екстремалі мають вигляд $\hat{x}(t) = C \sin(t)$, $J(\hat{x}(\cdot)) = 0$.

6.4. Умови слабкого екстремуму функціоналів від вектор-функцій

Спряжену точку, умову Якобі, умову Лежандра можна визначити для функціоналів, що залежать від векторнозначних функцій. Розглянемо основну задачу варіаційного числення

$$J(\overline{x}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\, dt \to \mathrm{extr}, \tag{6.12}$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0,\ \overline{x}(t_1) = \overline{x}_1,$$

де $\overline{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $\overline{x}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$.

Функція $\overline{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, а функція $L\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неперервна і має неперервні другі похідні

$$L_{xx} = \left\{L_{x_k x_j}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}},$$

$$L_{xx'} = \left\{L_{x_k x_j'}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}},$$

$$L_{x'x'} = \left\{L_{x_k' x_j'}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t))\right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Обчислимо другу варіацію функціонала $J(\bar{x}(\cdot))$, коли допустима функція $\overline{h}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Отримаємо такий квадратичний функціонал:

$$\delta^2 J(\overline{x}(\cdot), \overline{h}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\langle L_{x'x'} h'; h'\rangle + \left\langle \left(L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{xx'}\right) h; h \right\rangle\right] dt.$$

Якщо $\hat{x}(\cdot)$ — допустима вектор-функція, що дає слабкий мінімум функціонала задачі (6.12), то необхідно, щоб $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) \geq 0$ для допустимих функцій $h(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n), h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Означення 6.3. Допустима функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ задовольняє *умову Лежандра*, якщо

$$\hat{L}_{x'x'}(t) = L_{x'x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \geq 0 \quad \text{для всіх } t \in [t_0, t_1],$$

тобто матриця $\hat{L}_{x'x'}(t)$ невід'ємно визначена для всіх допустимих вектор-функцій $h(\cdot)$:

$$\langle \hat{L}_{x'x'}(t) h(t); h(t)\rangle \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Теорема 6.4 (необхідна умова Лежандра). *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ дає слабкий мінімум функціонала задачі (6.12), то виконується умова Лежандра.*

Зауваження 6.1. Щоб записати необхідну умову слабкого максимуму, потрібно знак нерівності в умові Лежандра поміняти на протилежний.

Означення 6.4. Задача на мінімум функціонала $\delta^2 J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot))$ у класі допустимих функцій $h(\cdot)$ називається *спряженою задачею.* Рівняння Ейлера такого функціонала називається *рівнянням Якобі.* Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$A(t)h''(t) + B(t)h'(t) + C(t)h(t) = 0 \tag{6.13}$$

із матричними коефіцієнтами

$$A(t) = \hat{L}_{x'x'}(t), \quad B(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t), \quad C(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t) - \hat{L}_{xx}(t).$$

Щоб уникнути тривіального розв'язку, визначають такі матричні $H(t, t_0)$ розв'язки рівняння (6.13), що задовольняють умови: $H(t_0, t_0) = 0$; $H'(t_0, t_0)$ — невироджена матриця. Ці умови виконуються, якщо

$$H(t_0, t_0) = 0, \quad H'(t_0, t_0) = I. \tag{6.14}$$

Означення 6.5. Точка t^* називається *спряженою* з точкою t_0, якщо існує такий нетривіальний розв'язок $H(t, t_0)$ рівняння Якобі (6.13) із початковими умовами (6.14), що матриця $H(t^*, t_0)$ невироджена.

Означення 6.6. Допустима функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ задовольняє посилену умову Лежандра, якщо

$$\langle \hat{L}_{x'x'}(t)h(t); h(t)\rangle > 0 \quad \text{для всіх } t \in [t_0, t_1].$$

для всіх допустимих варіацій $h(\cdot)$ функції $\hat{x}(\cdot)$.

Теорема 6.5 (**необхідна умова Якобі**). *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in \in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі (6.12) і виконується посилена умова Лежандра, то на інтервалі (t_0,t_1) не існує точок, спряжених із точкою t_0.*

Означення 6.7. Допустима функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє *посилену умову Якобі*, якщо на інтервалі $(t_o,t_1]$ не існує спряжених точок.

Теорема 6.6 (**достатні умови слабкого локального мінімуму**). *Допустима функція дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі (6.12), якщо вона задовольняє:*
1) рівняння Ейлера;
2) граничні умови;
3) посилену умову Лежандра;
4) посилену умову Якобі.

Зауваження 6.2. Достатні умови слабкого локального максимуму дістанемо, якщо в умові Лежандра поміняємо знак нерівності на протилежний.

Приклад 6.2. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{T_0} \left((x_1')^2 + (x_2')^2 + 2x_1x_2\right) dt \to \text{extr},$$
$$x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(T_0) = x_{i1}, \quad i = 1,2.$$

Розв'язання. 1. Система рівнянь Ейлера має вигляд

$$x_1'' = x_2, \quad x_2'' = x_1,$$

звідки $x_1^{(4)} = x_1$, $x_2^{(4)} = x_2$. Загальний розв'язок системи рівнянь Ейлера такий:

$$x_1(t) = C_1\sinh(t) + C_2\cosh(t) + C_3\sin(t) + C_4\cos(t),$$
$$x_2(t) = C_1\sinh(t) + C_2\cosh(t) - C_3\sin(t) - C_4\cos(t).$$

Із граничних умов можна визначити невідомі C_1, C_2, C_3, C_4.

2. Умова Лежандра виконана внаслідок того, що матриця $A(t) = L_{x'x'}(t) = I$ одинична.

3. Система рівнянь Якобі збігається із системою рівнянь Ейлера. Побудуємо такий матричний розв'язок системи:

$$H(t,0) = \begin{bmatrix} \sinh(t) & \sin(t) \\ \sinh(t) & -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad \det H'(0,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$
$$\det H(t,0) = -2\sinh(t)\sin(t).$$

Отже, спряжені точки мають вигляд: $t^* = \pi k$, $k \in N$.

Відповідь. При $T_0 < \pi$ існує єдина екстремаль, яка дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі. При $T_0 > \pi$ задача розв'язків не має. Якщо $T_0 = \pi$, то необхідне додаткове дослідження.

6.5. Умова Вейєрштрасса. Голкові варіації

Задачу на сильний екстремум у варіаційному численні вперше дослідив Вейєрштрасс. Щоб довести необхідну умову сильного мінімуму він використав спеціальні варіації допустимих функцій:

$$h_\lambda(t) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi, & t \in [\tau - \lambda, \tau], \\ \xi\lambda - (t-\tau)\sqrt{\lambda}\xi, & t \in [\tau, \tau + \sqrt{\lambda}], \\ 0, & t \notin [\tau - \lambda, \tau + \sqrt{\lambda}]. \end{cases}$$

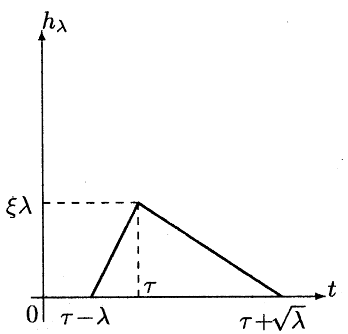
Похідна $h'_\lambda(t)$ варіації $h_\lambda(t)$ деякою мірою нагадує голку (рис. 9), тому такі варіації називають голковими.

Розглянемо основну задачу варіаційного числення:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr}, \tag{6.15}$$
$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{6.16}$$

у класі $KC^1[t_0, t_1]$ кусково-гладких функцій. Нехай $\hat{x}(\cdot)$ — екстремаль, що досліджується на сильний мінімум. Будемо вважати, що функція $\hat{x}(\cdot)$ гладка. Відповідно до методу варіацій побудуємо функцію

$$\varphi(\lambda) = J(x_\lambda(\cdot)) = J(\hat{x}(\cdot) + h_\lambda(\cdot)),$$



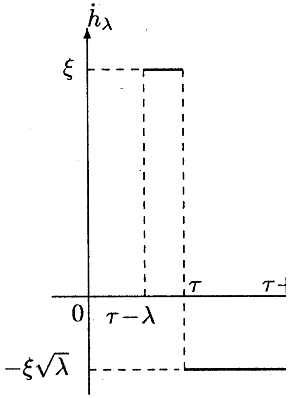


Рис. 9: Голкові варіації

де $h_\lambda(\cdot)$ — голкова варіація; τ — внутрішня точка відрізка $[t_0, t_1]$; ξ — довільне число. При досить малих $\lambda \geq 0$ функція $x_\lambda(\cdot) = \hat{x}(\cdot)+$ $+h_\lambda(\cdot)$ буде допустимою в задачі (6.15) і $x_\lambda(t_0) = x_0$, $x_\lambda(t_1) = x_1$.

Якщо $\hat{x}(\cdot)$ — це функція, на якій досягає мінімуму функціонал $J(x(\cdot))$ задачі (6.15), то $J(x_\lambda(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$, звідки

$$\varphi'(+0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} \geq 0,$$

тобто виконується умова Вейєрштрасса:

$$\begin{aligned} E(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau), \hat{x}'(\tau) + \xi) = L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau) + \xi)-\\ -L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) - \xi L_{x'}(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) \geq 0 \end{aligned} \qquad (6.17)$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ та $\tau \in [t_0, t_1]$.

Означення 6.8. Функція

$$E(t, x, y, z) = L(t, x, z) - L(t, x, y) - (z - y)L_y(t, x, y)$$

називається *функцією Вейєрштрасса.*

Теорема 6.7 (умова Вейєрштрасса сильного мінімуму). *Якщо $\hat{x}(\cdot)$ — функція, що дає сильний локальний мінімум функціонала основної задачі варіаційного числення (6.15), то для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ та $\tau \in [t_0, t_1]$, виконується нерівність (6.17).*

Означення 6.9. Інтегрант $L = L(t, x, x')$ називається *квазірегулярним* (*регулярним*) в області $V \subset \mathbb{R}^2$, якщо функція $x' \to L(t, x, x')$ опукла (строго опукла) для всіх $(t, x) \in V$.

Квазірегулярність (регулярність) інтегранта $L = L(t, x, x')$ в області V рівносильна тому, що функція Вейєрштрасса $E(t, x, x', u) \geq 0$ ($E(t, x, x', u) > 0$, $x' \neq u$) для всіх $(t, x) \in V$ та для всіх $(u, x) \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 6.8 (достатні умови сильного мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$ допустима екстремаль основної задачі варіаційного числення (6.15), інтегрант $L \in C^4(V \times \mathbb{R})$ і квазірегулярний в області V, де V — деякий окіл графіка $\{(t, \hat{x}(t)) | \, t_0 \leq t \leq t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний локальний мінімум основної задачі варіаційного числення.*

Зауваження 6.3. Достатні умови сильного максимуму отримаємо, поміняивши знак нерівності на протилежний в умовах Лежандра і Вейєрштрасса.

Приклад 6.3. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^a (x')^3(t)\, dt \to \text{extr},$$
$$x(0) = 0, \quad x(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Розв'язання. 1. Екстремалями функціонала є прямі лінії $\hat{x}(t) = C_1 t + C_2$. Із граничних умов випливає, що екстремум може досягатися лише на прямій $\hat{x}(t) = pt$, $p = b/a$, де p — тангенс кута нахилу прямої до осі OX.

2. Перевіримо умову Якобі. Складемо рівняння Якобі

$$a(t)h''(t) + b(t)h'(t) + c(t)h(t) = 0,$$

$$a(t) = \hat{L}_{x'x'}(t) = 6\hat{x}'(t) = 6p > 0,$$
$$b(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t) = 6\hat{x}''(t) = 0,$$
$$c(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t) - \hat{L}_{xx}(t) = 0.$$

Отже, рівняння Якобі має вигляд $6ph''(t) = 0$ або $h'' = 0$. Його загальний розв'язок $h(t) = At + B$. Нетривіальний розв'язок, що проходить через точку $(0, 0)$, такий: $h(t) = At$, $A \neq 0$. Ця функція перетворюється на нуль у точці $t = 0$ і більше нулів не має, тому умова Якобі виконується для всіх $a > 0$, $b > 0$.

3. Посилена умова Лежандра виконується тому, що $\hat{L}_{x'x'}(t) = 6\hat{x}'(t) = 6p > 0$. Це дає підставу твердити, що на екстремалі $\hat{x}(t) = pt$ досягається слабкий локальний мінімум функціонала задачі.

4. Обчислимо функцію Вейєрштрасса. Ця функція не зберігає знака для всіх $\xi \in R$. Умова Вейєрштрасса не виконується.

Відповідь. Екстремаль $\hat{x}(t) = pt$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі. Сильний мінімум не досягається.

Приклад 6.4. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^a \big(6(x')^2(t) - (x')^4(t) + x(t)x'(t)\big)\, dt \to \text{extr},$$
$$x(0) = 0, \quad x(a) = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Розв'язання. 1. Екстремалями функціонала є прямі лінії $x(t) = C_1 t + C_2$. Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x}(t) = pt$, $p = b/a$.

2. Рівняння Якобі $12(1-p^2)h'' = 0$ має нетривіальний розв'язок $h(t) = At$, $A \neq 0$, що проходить через точку $(0, 0)$. Функція $h = At$, не дорівнює нулю при $t > 0$, спряжених точок немає. Виконується посилена умова Якобі.

3. Перевіримо умову Лежандра. Оскільки $\hat{L}_{x'x'}(t) = 12(1-p^2)$, то екстремаль $\hat{x}(t) = pt$ дає слабкий мінімум, коли $p < 1$, а при $p > 1$ екстремаль дає слабкий максимум.

4. Обчислимо функцію Вейєрштрасса

$$\begin{aligned} E(t, \hat{x}, \hat{x}', \xi) = 6(\xi + p)^2 - (\xi + p)^4 + p(\xi + p)t - 6p^2 + p^4 - \\ - p^2 t - \xi(12p - 4p^3 + pt) = \\ = -\xi^2((\xi + p)^2 + 2p(\xi + p) - (6 - 3p^2)). \end{aligned}$$

Знак функції $E(t, \hat{x}, \hat{x}', \xi)$ протилежний знаку останнього множника. При $6 - 2p^2 \leq 0$ або $p \geq \sqrt{3}$ квадратичний вираз додатний для всіх $\xi \in \mathbb{R}$. Якщо ж $p < \sqrt{3}$, то квадратичний вираз може міняти знак. Отже, при $p \geq \sqrt{3}$ досягається сильний максимум.

Відповідь. При куті нахилу прямої $\hat{x}(t) = pt$ від 0 до $\pi/4$ екстремаль $\hat{x}(t) = pt$ дає слабкий мінімум функціонала задачі. Коли кут нахилу прямої від $\pi/4$ до $\pi/3$, то екстремаль $\hat{x}(t) = pt$ дає слабкий максимум функціонала, а при куті нахилу від $\pi/3$ до $\pi/2$ екстремаль $\hat{x}(t) = pt$ дає сильний максимум функціонала задачі.

6.6. Умови другого порядку в задачі Больца

Дослідимо на екстремум функціонал задачі

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \inf, \tag{6.18}$$

у просторі $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$.

Теорема 6.9 (необхідні умови слабкого мінімуму). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ дає слабкий локальний мінімум у задачі Больца (6.18), інтегрант $L(t, x, x') \in C^3(U)$, де U — окіл графіка $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) |\, t_0 \leq t \leq t_1\} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, термінант $l(x_0, x_1) \in C^2(V)$, де V — окіл точки $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \in \mathbb{R}^{2n}$. Тоді справджуються: 1) рівняння Ейлера*

$$\hat{L}_x(t) - \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) = 0;$$

2) умови трансверсальності

$$\hat{L}_{x'}(t_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad \hat{L}_{x'}(t_1) = -\hat{l}_{x_1};$$

3) умова Лежандра

$$\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

4) умова Якобі (на інтервалі (t_0, t_1) немає спряжених точок), якщо виконується посилена умова Лежандра: $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$;

5) квадратична форма $P+Q$ невід'ємна на $\mathbb{R}^{2n}$, якщо виконуються посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t)>0$, $t\in[t_0,t_1]$ і посилена умова Якобі (на інтервалі (t_0,t_1) немає спряжених точок). Тут

$$\begin{aligned}
Q(h_0,h_1) &= l''(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))[(h_0,h_1);(h_0,h_1)],\\
P(h_0,h_1) &= \langle \hat{L}_{x'x'}(t_1)(H_0'(t_1)h_0+H_1'(t_1)h_1),h_1\rangle-\\
&\quad-\langle \hat{L}_{x'x'}(t_0)(H_0'(t_0)h_0+H_1'(t_0)h_1),h_0\rangle+\\
&\quad+\langle \hat{L}_{xx'}(t_1)h_1,h_1\rangle-\langle \hat{L}_{xx'}(t_0)h_0,h_0\rangle,
\end{aligned}$$

$H_i(\cdot)$ — розв'язки рівняння Якобі з граничними умовами $H_i(t_j)=\delta_{ij}I$ (δ_{ij} — символ Кронекера; I — одинична матриця).

Теорема 6.10 (достатні умови слабкого мінімуму). *Нехай у задачі Больца (6.18) функція $L(t,x,x')$, що стоїть під знаком інтеграла, належить простору $C^3(U)$, де U — окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))|\,t_0\le t\le t_1\}\subset\mathbb{R}^{2n+1}$, функція $l(x_0,x_1)\in C^2(V)$, де V — окіл точки $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))\in\mathbb{R}^{2n}$. Якщо допустима функція $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ така, що виконуються: 1) рівняння Ейлера; 2) умови трансверсальності; 3) посилена умова Лежандра; 4) посилена умова Якобі (на інтервалі $(t_0,t_1]$ немає спряжених точок), а також квадратична форма $P+Q$ додатно визначена, то функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум у задачі Больца.*

Теорема 6.11 (необхідні умови сильного мінімуму). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot)\in C^2([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ дає сильний локальний мінімум у задачі Больца (6.18), інтегрант $L(t,x,x')\in C^3(U)$, де U — окіл графіка $\{(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))|\,t_0\le t\le t_1\}\subset\mathbb{R}^{2n+1}$, термінант $l(x_0,x_1)\in C^2(V)$, де V — окіл точки $(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1))\in\mathbb{R}^{2n}$. Тоді справджуються:*
1) рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t)-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t)=0;$$

2) умови трансверсальності

$$\hat{L}_{x'}(t_0)=\hat{l}_{x_0},\quad \hat{L}_{x'}(t_1)=-\hat{l}_{x_1};$$

3) умова Лежандра

$$\hat{L}_{x'x'}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

4) умова Якобі (на інтервалі (t_0, t_1) немає спряжених точок), якщо виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x'x'}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$;
5) квадратична форма $P + Q$ невід'ємна на R^{2n}, якщо виконуються посилена умова Лежандра і посилена умова Якобі (на інтервалі $(t_0, t_1]$ немає спряжених точок);
6) умова Вейєрштрасса $E(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), u) \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_1]$, де $E(t, x, x', u) = L(t, x, u) - L(t, x, x') - L_{x'}(t, x, x')(u - x')$ — функція Вейєрштрасса.

Теорема 6.12 (достатні умови сильного мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ — допустима екстремаль у задачі Больца (6.18), квазірегулярний на U інтегрант $L(t, x, x') \in C^3(U \times \mathbb{R}^n)$, де U — деякий окіл графіка $\{(t, \hat{x}(t)) | \, t_0 \leq t \leq t_1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ функції $\hat{x}(\cdot)$, термінант $l(x_0, x_1) \in C^2(V)$, де V — окіл точки $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \in \in \mathbb{R}^{2n}$. Якщо $\hat{x}(\cdot)$ така, що справджуються:*
1) рівняння Ейлера;
2) умови трансверсальності;
3) посилена умова Лежандра;
4) посилена умова Якобі (на інтервалі $(t_0, t_1]$ немає спряжених точок);
5) квадратична форма $P + Q$ додатно визначена,
то функція $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі Больца.

Теорема 6.13. *Нехай у задачі Больца інтегрант L має вигляд*

$$L = \langle Ax', x' \rangle + 2\langle Cx', x \rangle + \langle Bx, x \rangle,$$

де матриці $A(t)$, $C(t)$ неперервно диференційовні, а $B(t)$ неперервна, термінант l має вигляд

$$l(x_0, x_1) = \langle \alpha x_0, x_0 \rangle + 2\langle \gamma x_0, x_1 \rangle + \langle \beta x_1, x_1 \rangle,$$

де α, β, γ — матриці розміру $n \times n$. Якщо виконується посилена умова Лежандра: $A(t) > 0$ і в інтервалі (t_0, t_1) є спряжена *точка, то значення задачі* $S_{\min} = -\infty$. *Якщо ж виконуються посилені умови Лежандра, Якобі і матриця* $P+Q$ *невід'ємно визначена, то допустима екстремаль* $\hat{x}(\cdot) \equiv 0$ *реалізує мінімум задачі.*

Правило дослідження функціонала задачі Больца на екстремум

1. Знайти допустимі екстремалі задачі, тобто розв'язки рівняння Ейлера

$$L_x(t) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t) = 0,$$

що задовольняють умови трансверсальності

$$L_{x'}(t_0) = l_{x_0}, \quad L_{x'}(t_1) = -l_{x_1}.$$

2. Обчислити $L_{x'x'}(t)$ і перевірити, чи виконується посилена умова Лежандра:

$$\hat{L}_{x'x'}(t) > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in [t_0, t_1].$$

3. Знайти нетривіальні розв'язки $h(t)$ рівняння Якобі

$$a(t)h''(t) + b(t)h'(t) + c(t)h(t) = 0,$$
$$a(t) = \hat{L}_{x'x'}(t), \quad b(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'x'}(t),$$
$$c(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{xx'}(t) - \hat{L}_{xx}(t).$$

Визначити спряжені точки t^*: $h(t^*) = h(t_0) = 0$ і перевірити, чи належать ці точки інтервалу $(t_0, t_1]$.

4. Побудувати квадратичну форму $P+Q$ і дослідити її на додатну (від'ємну) визначеність.

5. Переконатися в тому, що інтегрант $L(t, x, x')$ квазірегулярний.

6. Користуючись наведеними теоремами показати, що допустима екстремаль дає слабкий (сильний) екстремум функціонала задачі.

Приклад 6.5. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((x')^2(t)-x^2(t)\right)dt+\alpha x^2(0)+\beta x^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\gamma x(0)x\left(\frac{\pi}{2}\right)\to \inf .$$

Розв'язання. 1. Рівняння Ейлера $x''+x=0$ має загальний розв'язок $x(t)=C_1\sin(t)+C_2\cos(t)$. Умови трансверсальності

$$x'(0)=\alpha x(0)+\gamma x(\pi/2)q,\quad x'(\pi/2)=-\beta x(\pi/2)-\gamma x(0)$$

задовольняє екстремаль $\hat{x}(t)=0$, якщо $(\gamma-1)^2-\alpha\beta\neq 0$, і множина екстремалей, якщо $(\gamma-1)^2-\alpha\beta=0$.

2. Посилена умова Лежандра виконана: $\hat{L}_{x'x'}(t)=2>0$.

3. Рівняння Якобі $h''+h=0$ має розв'язок $h(t)=\sin(t)$, що задовольняє граничні умови $h(0)=0$, $h'(0)=1$. На відрізку $(0,\pi/2]$ спряжених точок немає. Посилена умова Якобі виконана.

4. Побудуємо квадратичну форму $P+Q$. Розв'язки рівняння Якобі, що задовольняють граничні умови $h_0(\pi/2)=0$, $h_0(0)=1$, $h_1(\pi/2)=0$, $h_1(0)=0$ такі: $h_0(t)=\cos(t)$, $h_1(t)=\sin(t)$. Отже, квадратична форма

$$P+Q=\begin{vmatrix}2\alpha & 2\gamma-2\\ 2\gamma-2 & 2\beta\end{vmatrix}.$$

Ця форма, додатно визначена при $\alpha>0$ та $\alpha\beta-(\gamma-1)^2>0$, не є невід'ємно визначеною при $\alpha<0$ або $\alpha>0$ та $\alpha\beta-(\gamma-1)^2<0$.

5. Інтегрант $L=(x')^2-x^2$ квазірегулярний, оскільки

$$E(t,x,x',u)=(u-x')^2\geq 0\quad \text{для всіх } u\in R,\ x'\in R.$$

6. Аналізуючи отримані співвідношення переконаємося у справедливості такого висновку.

Якщо $\alpha>0$, $\alpha\beta-(\gamma-1)^2>0$, то функція $\hat{x}(t)\equiv 0$ дає сильний мінімум задачі. Якщо $\alpha>0$ і $\alpha\beta-(\gamma-1)^2<0$ або $\alpha<0$, то $S_{\min}=-\infty$. Якщо $\alpha>0$ і $\alpha\beta-(\gamma-1)^2=0$ або $\alpha<0$ і $\alpha\beta-(\gamma-1)^2>0$, то необхідне додаткове дослідження задачі.

6.7. Умови екстремуму другого порядку в задачах зі старшими похідними

Розглянемо варіаційну задачу зі старшими похідними

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t))\, dt \to \inf, \qquad (6.19)$$

$$x^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad x^{(k)}(t_1)) = x_{1k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \qquad (6.20)$$

Будемо вважати, що функція $L(t, x, x', \dots, x^{(n)}$ неперервно диференційовна $n+2$ рази. Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}([t_0, t_1], \mathbb{R})$ — екстремаль задачі. Вона задовольняє рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0.$$

Функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє умову Лежандра задачі (6.19)–(6.20), якщо

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) = L_{x^{(n)}x^{(n)}}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \dots, \hat{x}^{(n)}(t)) \geq 0 \quad t \in [t_0, t_1],$$

і задовольняє посилену умову Лежандра, якщо

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Функціонал $J(x(\cdot))$ має другу похідну в точці $\hat{x}(\cdot)$. Нехай

$$K(h(\cdot)) = J''(\hat{x}(\cdot))(h(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i,j=0}^{n} \hat{L}_{x^{(i)}x^{(j)}}(t) h^{(i)}(t) h^{(j)}(t) \right) dt.$$

Означення 6.10. Рівняння Ейлера – Пуассона функціонала $K(h(\cdot))$ називається *рівнянням Якобі* функціонала $J(x(\cdot))$ *на екстремалі* $\hat{x}(\cdot)$.

Означення 6.11. Точка t^* називається *спряженою з точкою* t_0, якщо існує нетривіальний розв'язок $h(\cdot)$ рівняння Якобі такий, що $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t^*) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє умову Якобі (посилену умову Якобі), якщо на інтервалі (t_0, t_1) (на інтервалі $(t_0, t_1]$) немає точок, спряжених із t_0.

Рівняння Якобі — це лінійне диференціальне рівняння порядку $2n$. Якщо виконується посилена умова Лежандра, то його можна розв'язати відносно старшої похідної. Нехай $h_1(\cdot), h_2(\cdot), \ldots, h_n(\cdot)$ — розв'язки рівняння Якобі такі, що $H(t_0) = 0$, а матриця $H^{(n)}(t_0)$ невироджена. Тут

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & \cdots & h_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_n^{(n-1)}(t) & \cdots & h_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

$$H^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} h_1^{(n)}(t) & \cdots & h_n^{(n)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_1^{(2n-1)}(t) & \cdots & h_n^{(2n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Точка t^* є спряженою з точкою t_0 тоді і тільки тоді, коли матриця $H(t^*)$ вироджена.

Означення 6.12. Інтегрант $L(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ називається *квазірегулярним* (регулярним) в області $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$, якщо функція $x^{(n)} \to L(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ опукла (строго опукла) для всіх $(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \in V$.

Функція Вейєрштрасса функціонала $J(x(\cdot))$ має вигляд

$$E(t, x, x', \ldots, x^{(n)}, u) = L(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, u) - \\ - L(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) - L_{x^{(n)}}(t, x, x', \ldots, x^{(n)})(u - x').$$

Квазірегулярність (регулярність) інтегранта L в області V означає, що $E(t, x, x', \ldots, x^{(n)}, u) \geq 0$ ($E(t, x, x', \ldots, x^{(n)}, u) > 0$, $x^{(n)} \neq u$) для всіх $(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \in V$, $(u, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^2$.

Означення 6.13. Функція $\hat{x}(\cdot) \in KC^n[t_0, t_1]$ дає сильний мінімум задачі (6.19)–(6.20), якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для кожної допустимої функції $x(\cdot) \in KC^n[t_0, t_1]$, яка задовольняє умову

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^{n-1}[t_0, t_1]} < \varepsilon,$$

виконується нерівність $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$.

Теорема 6.14 (необхідні умови слабкого мінімуму). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}[t_0, t_1]$ дає слабкий локальний мінімум у задачі зі старшими похідними (6.19)–(6.20), інтегрант $L(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) \in C^{(n+2)}(U)$, де U — окіл розширеного графіка $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)) | \, t_0 \leq t \leq t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Тоді справджуються:*
1) рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0;$$

2) граничні умови $\hat{x}^{(k)}(t_0) = x_{0k}$, $\hat{x}^{(k)}(t_1) = x_{1k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$;
3) умова Лежандра

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

4) умова Якобі, якщо виконується посилена умова Лежандра $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 6.15 (достатні умови слабкого мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}[t_0, t_1]$ допустима функція задачі (6.19)–(6.20) зі старшими похідними, інтегрант $L \in C^{(n+2)}(U)$, де U — окіл розширеного графіка $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)) | \, t_0 \leq t \leq t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Якщо $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера – Пуассона, посилені умови Лежандра і Якобі, то функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум функціонала задачі (6.19)–(6.20) зі старшими похідними.*

Теорема 6.16 (необхідні умови сильного мінімуму)). *Нехай функція $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}[t_0, t_1]$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі зі старшими похідними, інтегрант $L \in C^{(n+2)}(U)$, де U — окіл графіка $\{(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \ldots, \hat{x}^{(n-1)}(t)) | \, t_0 \leq t \leq t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Тоді функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє:*
1) рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0;$$

2) граничні умови

$$\hat{x}^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad \hat{x}^{(k)}(t_1) = x_{1k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

3) умову Лежандра

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

4) умову Якобі (на інтервалі (t_0, t_1) немає спряжених точок), якщо виконується посилена умова Лежандра

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1];$$

5) умову Вейєрштрасса $E(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \ldots, \hat{x}(n)(t), u) \geq 0$ для всіх $u \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 6.17 (достатні умови сильного мінімуму). *Нехай $\hat{x}(\cdot) \in C^{2n}[t_0, t_1]$ — допустима екстремаль у задачі зі старшими похідними, інтегрант $L \in C^{n+2}(U \times R)$ і квазірегулярний на U, де U — деякий окіл графіка $\{(t, \hat{x}(t), \ldots, \hat{x}^{(n-1)}(t) | \, t_0 \leq t \leq t_1\}$ функції $\hat{x}(\cdot)$. Якщо функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє посилені умови Лежандра і Якобі, то $\hat{x}(\cdot)$ дає сильний локальний мінімум функціонала задачі зі старшими похідними.*

Теорема 6.18. *Нехай у задачі зі старшими похідними інтегрант L має вигляд*

$$L = \sum_{k=0}^{n} A_k(t)(x^{(k)}(t))^2$$

і виконується посилена умова Лежандра: $A_n(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Якщо виконується посилена умова Якобі, то допустима екстремаль існує, єдина і дає абсолютний мінімум функціонала задачі. Якщо ж умова Якобі не виконується, то $S_{\min} = -\infty$.

Правило дослідження на екстремум функціонала задачі зі старшими похідними

1. Знайти допустимі екстремалі задачі, тобто розв'язки рівняння Ейлера – Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} L_{x^{(k)}}(t) = 0,$$

що задовольняють граничні умови

$$\hat{x}^{(k)}(t_0) = x_{0k}, \quad \hat{x}^{(k)}(t_1) = x_{1k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

2. Обчислити $\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t)$ і перевірити, чи виконується посилена умова Лежандра:

$$\hat{L}_{x^{(n)}x^{(n)}}(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

3. Знайти нетривіальні розв'язки $h(t)$ рівняння Якобі. Визначити спряжені точки t^*: $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t^*) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$, і перевірити, чи належать ці точки інтервалу $(t_0, t_1]$.

4. Побудувати квадратичну форму $P + Q$ і дослідити її на додатну (від'ємну) визначеність.

5. Переконатися в тому, що інтегрант $L(t, x, x', \ldots, x^{(n)})$ квазірегулярний.

6. Користуючись теоремами 6.14–6.18 показати, що допустима екстремаль дає слабкий (сильний) екстремум функціонала задачі.

Приклад 6.6. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{T_0} \left((x'')^2(t) - (x')^2(t)\right) dt \to \text{extr},$$
$$x(0) = x'(0) = x(T_0) = x'(T_0) = 0.$$

Розв'язання. 1. Рівняння Ейлера – Пуассона $x^{(4)} + x^{(2)} = 0$ має загальний розв'язок

$$x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3 t + C_4.$$

Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x}(t) \equiv 0$.

2. Посилена умова Лежандра виконується: $L_{x''x''}(t) = 2 > 0$.

3. Рівняння Якобі $h^{(4)} + h^{(2)} = 0$ має нетривіальні розв'язки $h_1(t) = 1 - \cos(t)$, $h_2(0) = \sin(t) - t$. Побудуємо матричну функцію

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos(t) & \sin(t) - t \\ \sin(t) & \cos(t) - 1 \end{bmatrix},$$

$$H(0) = 0, \quad H'(0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Спряжені точки дістанемо, якщо розв'яжемо рівняння

$$\det H(t) = 2(\cos(t) - 1) + t\sin(t) = 0.$$

Найближча до нуля спряжена точка $t^* = 2\pi$.

4. Інтегрант $L = (x'')^2 - (x')^2$ квазірегулярний, оскільки

$$E(t, x, x', x'', u) = (u - x'')^2 \geq 0 \quad \text{для всіх } u, x'' \in R.$$

5. Аналізуючи отримані співвідношення, переконуємося у справедливості такого висновку.

Відповідь. Екстремаль $\hat{x}(t) \equiv 0$ дає сильний мінімум задачі при $T_0 < 2\pi$. Якщо $T_0 > 2\pi$, то $S_{\min} = -\infty$. Можна показати, що при $T_0 = 2\pi$ допустимі екстремалі $\hat{x}(t) = C(1 - \cos(t))$ дають абсолютний мінімум функціонала задачі.

6.8. Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати найпростіші задачі варіаційного числення.

6.1. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(1) = 0.$

6.2. $\int\limits_0^a (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.3. $\int\limits_0^1 \big(x - (x')^2\big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.4. $\int\limits_0^a \big((x')^2 - x\big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.5. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + tx\big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.6. $\int\limits_0^1 \big(t^2x - (x')^2\big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.7. $\int\limits_0^a (x')^3\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.8. $\int\limits_0^{3/2} \big((x')^3 + 2x\big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(3/2) = 1.$

6.9. $\int\limits_0^a \big((x')^3 - (x')^2\big)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.10. $\int\limits_0^a \big((x')^3 + (x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.11. $\int\limits_1^e t(x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 0,\ x(e) = 1.$

6.12. $\int\limits_0^1 (1+t)(x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

6.13. $\int\limits_1^e \big(t(x')^2 + 2x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 1,\ x(e) = 0.$

6.14. $\int\limits_1^e \big(x - t(x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 1,\ x(e) = 2.$

6.15. $\int\limits_1^2 t^2(x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 3,\ x(2) = 1.$

6.16. $\int\limits_2^3 (t^2-1)(x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(2) = 0,\ x(3) = 1.$

6.17. $\int\limits_1^e \big(2x - t^2(x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = e,\ x(e) = 0.$

6.18. $\int\limits_0^1 x^2(x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(1) = \sqrt{2}.$

6.19. $\int\limits_0^{4/3} \big(x/(x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(4/3) = 1/9.$

6.20. $\int\limits_0^1 e^x(x')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = \ln(4).$

6.21. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + xx' + 12tx\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.22. $\int\limits_1^e \big(t(x')^2 + xx'\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 0,\ x(e) = 1.$

6.23. $\int\limits_0^1 \big(t^2(x')^2 + 12x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

6.24. $\int\limits_{-1}^1 \big((x')^2 + x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(-1) = x(1) = 1.$

6.25. $\int\limits_{-1}^1 \big((x')^2 + 4x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(-1) = -1,\ x(1) = 1.$

6.26. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2 + 2x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.27. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2 + tx\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.28. $\int\limits_0^1 \big(4x\sin(t) - x^2 - (x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.29. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2 + 6x\sinh(2t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.30. $\int\limits_0^a \big((x')^2 + x^2 - 4x\sin(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.31. $\int\limits_0^a \big((x')^2 + x^2 + 6x\sinh(2t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.32. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2 + 4x\sinh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = -1,\ x(1) = 0.$

6.33. $\int\limits_0^a \big((x')^2 + x^2 + 4x\sinh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.34. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2 + 4x\cosh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$

6.35. $\int\limits_0^a \big((x')^2 + x^2 + 4x\cosh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.36. $\int\limits_0^{\pi/2} \big((x')^2 - x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(\pi/2) = 0.$

6.37. $\int\limits_0^{\pi/4} \big(4x^2 - (x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(\pi/4) = 0.$

6.38. $\int\limits_0^{\pi/4} \big((x')^2 - 4x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(\pi/4) = 1.$

6.39. $\int\limits_0^{3\pi/4} \big((x')^2 - 4x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(3\pi/4) = -1.$

6.40. $\int\limits_0^{\pi/2} \big(2x + x^2 - (x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0.$

6.41. $\int\limits_0^{3\pi/2} \big((x')^2 - x^2 - 2x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(3\pi/2) = 0.$

6.42. $\int\limits_0^{3\pi/2} \big((x')^2 - x^2 - tx\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0.$

6.43. $\int\limits_0^{3\pi/2} \big((x')^2 - x^2 + 4x\sinh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0.$

6.44. $\int\limits_0^{a} \big((x')^2 - x^2 + 4x\sinh(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.45. $\int\limits_0^{\pi/2} \big(6x\sin(2t) + x^2 - (x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0.$

6.46. $\int\limits_0^{a} \big((x')^2 - x^2 - 6x\sin(2t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.47. $\int\limits_0^{\pi/2} \big(4x\sin(2t) + x^2 - (x')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0.$

6.48. $\int\limits_0^{3\pi/2} \big((x')^2 - x^2 - 4x\sin(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(3\pi/2) = 0.$

6.49. $\int\limits_0^{\pi/2} \big((x')^2 - x^2 + 4x\cos(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0.$

6.50. $\int\limits_0^{\pi/2} \big((x')^2 - x^2 + 4x\cos(t)\big)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$

6.51. $\int\limits_0^{3\pi/2} \big(x^2 - (x')^2 - 4x\cos(t)\big)\,dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}.$

6.52. $\int\limits_0^{a} \big((x')^2 - x^2 + 4x\cos(t)\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.53. $\int\limits_0^{1} \big((x')^2 + 3x^2\big)e^{2t}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(1) = e.$

6.54. $\int\limits_0^{1} \big(x^2 + (x')^2\big)e^{2t}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = e.$

6.55. $\int\limits_0^{a} \big((x')^2 - x^2\big)e^{2t}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.56. $\int\limits_0^{1} \sin(x')\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = \pi/2.$

6.57. $\int\limits_0^{1} \cos(x')\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = \pi.$

6.58. $\int\limits_0^{a} \sin(x')\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(a) = b.$

6.59. $\int\limits_0^a \cos(x')\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\ x(a)=b.$

6.60. $\int\limits_0^a x'e^{x'}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\ x(a)=b.$

6.61. $\int\limits_0^a \big((x')^5+5x\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\ x(a)=b.$

6.62. $\int\limits_0^1 \big(1-(x')^2\big)^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\ x(1)=b.$

6.63. $\int\limits_0^a \big((x')^2-x(x')^3\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\ x(a)=0.$

6.64. $\int\limits_0^1 \big((x')^2-4x(x')^3+2t(x')^4\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x(1)=0.$

6.65. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=1,\ x(1/2)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

6.66. $\int\limits_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \text{extr}, \quad x(1/2)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x(1)=1.$

6.67. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{x}\,dt \to \text{extr}, \quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1.$

6.68. $\int\limits_{-a}^a x\sqrt{1+(x')^2}\,dt \to \text{extr}, \quad x(-a)=x(a)=b.$

6.69. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{x}}\,dt \to \text{extr}, \quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1.$

6.70. $\int\limits_0^a \sqrt{x+h}\sqrt{1+(x')^2}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\ x(a)=b.$

6.71. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to \text{extr}.$

6.72. $\int\limits_0^1 \big((x')^2+x^2\big)\,dt - 2x(1)\sinh(1) \to \text{extr}.$

6.73. $\int\limits_0^\pi \big((x')^2+x^2-4x\sin(t)\big)\,dt + 2x^2(0)+2x(\pi)-x^2(\pi) \to \text{extr}.$

6.74. $\int\limits_0^{\pi/2} \big((x')^2-x^2\big)\,dt + x^2(0)-x^2(\pi/2)+4x(\pi/2) \to \text{extr}.$

6.75. $\int\limits_0^a \big((x')^2+x^2\big)\,dt + \alpha x^2(a) \to \text{extr}.$

6.76. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x'(0)=x'(1)=0,\ x(1)=1.$

6.77. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x(1)=x'(1)=0,\ x'(0)=1.$

6.78. $\int\limits_0^1 \big((x'')^2-48x\big)dt \to \text{extr},\ x(0)=1,\ x(1)=x'(1)=0,$
$x'(0)=-4.$

6.79. $\int\limits_0^1 \big(48x-(x'')^2\big)dt \to \text{extr},\ x(0)=x'(0)=0,\ x(1)=1,\ x'(1)=4.$

6.80. $\int\limits_0^1 \big(24tx-(x'')^2\big)\,dt \to \text{extr},\ x(0)=x'(0)=x(1)=0,\ x'(1)=0,1.$

6.81. $\int\limits_0^1 \big((x'')^2-24tx\big)dt \to \text{extr},\ x(0)=x'(0)=0,\ x(1)=\frac{1}{5},\ x'(1)=1.$

6.82. $\int\limits_0^{\pi} \big((x'')^2-x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=0,\ x'(0)=1,$
$x(\pi)=\sinh(\pi),\ x'(\pi)=\cosh(\pi).$

6.83. $\int\limits_0^{\pi} \big((x'')^2-x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x'(0)=0,$
$x(\pi)=\cosh(\pi)+1,\ x'(\pi)=\sinh(\pi).$

6.84. $\int\limits_0^{a} \big((x'')^2-x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x'(0)=x(a)=x'(a)=0.$

6.85. $\int\limits_0^{\pi} \big((x'')^2-x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x'(0)=0,$
$x(\pi)=\sinh(\pi),\ x'(\pi)=\cosh(\pi)+1.$

6.86. $\int\limits_0^{a} ((x'')^2+4x^2)dt \to \text{extr},\ x(0)=x'(0)=0,\ x(a)=b_0,\ x'(a)=b_1.$

6.87. $\int\limits_0^{\pi} \big((x'')^2+4x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=-1,\ x'(0)=0,$
$x(\pi)=\cosh(\pi),\ x'(\pi)=\sinh(\pi).$

6.88. $\int\limits_0^{\pi} \big((x'')^2+4x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x'(0)=x(\pi)=0,$
$x'(\pi)=\sinh(\pi).$

6.89. $\int\limits_0^{\pi/2} \big((x'')^2-x^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x'(0)=1,$
$x(\pi/2)=\pi/2,\ x'(\pi/2)=0.$

6.90. $\int_0^{\pi}\left((x'')^2-(x')^2\right)dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=x(\pi)=0$, $x'(\pi)=1$.

6.91. $\int_0^{1}\left((x'')^2+(x')^2\right)dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$, $x(1)=\cosh(1)$, $x'(1)=\sinh(1)$.

6.92. $\int_0^{1}\left((x'')^2+(x')^2\right)dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x(1)=\sinh(1)$, $x'(1)=\cosh(1)$.

6.93. $\int_0^{a}\left((x'')^2+(x')^2\right)dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=x(a)=x'(a)=0$.

6.94. $\int_0^{1} e^{-t}(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x(1)=e$, $x'(1)=2e$.

6.95. $\int_0^{1} e^{-t}(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$, $x(1)=x'(1)=e$.

6.96. $\int_0^{1}(t+1)(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(1)=2$.

6.97. $\int_0^{1}(t+1)(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=0$, $x(1)=\ln(2)$, $x'(0)=1$, $x'(1)=1/2$.

6.98. $\int_1^{e}(t+1)t(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(1)=0$, $x'(1)=1$, $x(e)=e$, $x'(e)=2$.

6.99. $\int_0^{1}(t+1)^3(x'')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=1$, $x(1)=1/2$, $x'(0)=-1$, $x'(1)=-1/4$.

6.100. $\int_0^{1}(x''')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(1)=3$, $x''(1)=6$.

6.101. $\int_0^{1}(x''')^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(1)=4$, $x''(1)=12$.

6.102. $\int_0^{1}\left((x''')^2+(x'')^2\right)dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=x''(0)=0$, $x'(0)=1$, $x'(1)=\cosh(1)$, $x(1)=x''(1)=\sinh(1)$.

7. Ізопериметричні задачі

7.1. Необхідні умови екстремуму

Ізопериметричні задачі — це задачі про геометричні фігури заданого виду, які мають максимальну площу при фіксованому периметрі. Серед таких задач, відомих ще в стародавніх Єгипті та Греції, є й варіаційні задачі. Наприклад, задача про замкнуту криву заданої довжини, яка обмежує максимальну площу (задача Дідони). Якщо рівняння кривої записати у параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t)$, то задачу можна формалізувати так. Визначити максимум функціонала

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt, \tag{7.1}$$
$$x(0) = x(T), \quad y(0) = y(T)$$

за умови

$$\int_0^T \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}\,dt = l. \tag{7.2}$$

Це задача на екстремум з інтегральною умовою (7.2).

Ізопериметричною задачею у варіаційному численні називається задача на умовний екстремум:

$$J_0(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), x'(t))\,dt \to \mathrm{extr}, \tag{7.3}$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), x'(t))\,dt = l_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{7.4}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{7.5}$$

Умови (7.4) називаються ізопериметричними. Як і в основній задачі варіаційного числення, припускається, що функції $f_j(t, x, x')$, $j = 0, 1, \ldots, m$, неперервні разом із похідними $f'_{jx}(t, x, x')$, $f'_{jx'}(t, x, x')$, $j = 0, 1, \ldots, m$, за всіма змінними.

Функції $x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$ називаються *допустимими в ізопериметричній задачі* (7.3)–(7.5), якщо вони задовольняють ізопериметричні умови (7.4) та граничні умови (7.5). Допустима функція $x(\cdot)$ дає слабкий локальний мінімум (максимум) функціонала ізопериметричної задачі (7.3)–(7.5) (записується як $\hat{x}(\cdot) \in \mathrm{locmin}$ ($\hat{x}(\cdot) \in \mathrm{locmax}$)), якщо існує таке число $\delta > 0$, що для будь-якої допустимої функції $x(\cdot)$, яка задовольняє співвідношення $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$, виконується нерівність

$$J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot)) \quad \big(J_0(x(\cdot)) \leq J_0(\hat{x}(\cdot))\big).$$

Теорема 7.1 (необхідні умови екстремуму). *Нехай функції $f_j(t,x,x')$, $f'_{jx}(t,\ x,\ x')$, $f'_{jx'}(t,x,x')$, $j = 0,1,\ldots,m$, неперервні. Якщо допустима функція $\hat{x}(\cdot)$ дає слабкий локальний екстремум функціонала ізопериметричної задачі (7.3)–(7.5), то існують множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, які не дорівнюють нулю одночасно і такі, що виконується рівняння Ейлера*

$$L_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{d}{dt} L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \tag{7.6}$$

де $L(t,x,x',\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(t,x,x')$ — функція Лагранжа задачі (7.3)–(7.5).

Зауваження 7.1. Рівняння Ейлера (7.6) визначають екстремалі задачі безумовного екстремуму функціонала

$$J^*(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(t, x(t), x'(t))\, dt.$$

Усі функції $f_j(t,x,x')$, $j = 0,\ldots,m$, входять у $J^*(x(\cdot))$ симетрично. Тому екстремалі задачі рівняння Ейлера (7.6) визначають екстремалі задачі безумовного екстремуму функціонала (7.3), (7.4) та задачі

$$J_s(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_s(t, x(t), x'(t))\, dt \to \mathrm{extr}$$

за умов

$$\int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), x'(t))\, dt = l_j, \quad j = 0, \ldots, s-1, s+1, \ldots, m,$$

збігаються при будь-якому s. У цьому полягає *принцип взаємності.* Наприклад, задача про максимальну площу, яка обмежується кривою заданої довжини, та задача про мінімум довжини замкнутої кривої, яка обмежує задану площу, взаємні і мають спільні екстремалі.

Правило множників Лагранжа розв'язування ізопериметричних задач (7.3)–(7.5)

1. Скласти функцію Лагранжа

$$L(t, x, x', \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(t, x, x').$$

2. Записати необхідну умову екстремуму — рівняння Ейлера для функції Лагранжа:

$$L_x(t, x(t), x'(t), \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x(t), x'(t), \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

3. Знайти допустимі екстремалі, тобто розв'язки рівняння Ейлера для лагранжіана L, що задовольняють ізопериметричні умови (7.4) та граничні умови (7.5), за умови, що не всі множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ дорівнюють нулю.

4. Знайти розв'язок задачі серед допустимих екстремалей або довести, що розв'язків немає.

Зауважимо, що ізопериметричну задачу (7.3)–(7.5) уперше розв'язав Л. Ейлер у 1744 р. Він довів справедливість співвідношення (7.6) методом ламаних.

Приклад 7.1. Знайти екстремалі ізопериметричної задачі

$$\int_0^1 (x')^2(t)\, dt \to \text{extr}, \quad \int_0^1 x(t)\, dt = 0, \quad x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Розв'язання. 1. Складемо лагранжіан

$$L = \lambda_0 (x')^2 + \lambda_1 x.$$

2. Запишемо рівняння Ейлера

$$L_x = \frac{d}{dt} L_{x'} \Longleftrightarrow \lambda_1 = 2\lambda_0 x''.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ — усі множники Лагранжа нулі. Тому допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. Рівняння Ейлера $x'' = \lambda_1$ має загальний розв'язок $x(t) = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3 визначаємо з граничних умов та ізопериметричної умови:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,$$
$$x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1,$$
$$\int_0^1 x(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 (C_1 t^2 + C_2 t)\,dt = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 0.$$

Отже, $C_1 = 3$, $C_2 = -2$, $C_3 = 0$.

Єдина допустима екстремаль має вигляд $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t$.

4. Покажемо, що екстремаль $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t$ дає абсолютний екстремум. Візьмемо допустиму функцію $x(\cdot)$, тоді

$$x(\cdot) - \hat{x}(\cdot) = h(\cdot) \in C^1[0,1], \quad h(0) = h(1) = 0, \quad \int_0^1 h(t)\,dt = 0.$$

Розглянемо співвідношення

$$J(x(\cdot))) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 (\hat{x}'(t) + h'(t))^2\,dt - \int_0^1 (\hat{x}')^2(t)\,dt =$$
$$= \int_0^1 2\hat{x}'(t)h'(t)\,dt + \int_0^1 (h')^2(t)\,dt \geq 2\int_0^1 \hat{x}'(t)h'(t)\,dt.$$

Інтегруючи частинами, дістанемо

$$\int_0^1 \hat{x}'(t)h'(t)\,dt = \hat{x}'(t)h(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \hat{x}''(t)h(t)\,dt = -6\int_0^1 h(t)\,dt = 0.$$

Таким чином, $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$ для будь-якої функції $x(\cdot)$. Крім того,

$$S_{\min} = \int_0^1 (\hat{x}')^2(t)\,dt = \int_0^1 (6t-2)^2\,dt = 4.$$

Відповідь. Функція $\hat{x}(t) = 3t^2 - 2t$ дає абсолютний мінімум функціонала ізопериметричної задачі.

Приклад 7.2 (*задача Дідони з фіксованими границями*). . Визначити криву заданої довжини l, яка проходить через точки

$A(-a,0)$, $B(a,0)$ і разом з відрізком $[-a,a]$ обмежує максимальну площу.

Формалізація задачі (рис. 10). Знайти функцію $x(\cdot)$, що задовольняє граничні умови $x(-a) = 0$, $x(a) = 0$ та дає максимум функціонала

$$S(x(\cdot)) = \int_{-a}^{a} x(t)\,dt$$

за ізопериметричної умови

$$\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1+(x')^2(t)}\,dt = l.$$

Розв'язання. 1. Складемо функцію Лагранжа

$$L = \lambda_0 x + \lambda_1\sqrt{1+(x')^2}.$$

2. Рівняння Ейлера має перший інтеграл $L - x'L_{x'} = C$ внаслідок того, що функція L явно не залежить від t. Отже, рівняння Ейлера буде таким:

$$\lambda_0 x + \lambda_1\sqrt{1+(x')^2} - \lambda_1\frac{(x')^2}{\sqrt{1+(x')^2}} = C.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то рівняння Ейлера має розв'язок $x = C_1 t + C_2$. Визначимо константи C_1, C_2 із граничних умов. Дістанемо єдину екстремаль. Це пряма, що проходить через точки $A(-a,0)$, $B(a,0)$. Лише тоді, коли $l = 2a$, ця екстремаль дає розв'язок задачі.

Нехай тепер $\lambda_0 = 1$. Рівняння Ейлера запишемо так:

$$x - C = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{1+(x')^2}}.$$

Заміна $x' = \tan(u)$, де u — параметр, зводить рівняння до вигляду

$$x - C = -\lambda_1\cos(u).$$

Використаємо співвідношення

$$dt = \frac{dx}{\tan(u)} = \frac{\lambda_1\sin(u)\,du}{\tan(u)} = \lambda_1\cos(u)\,du.$$

Інтегруючи це рівняння, дістанемо $t = \lambda_1 \sin(u) + C_1$. Отже, рівняння екстремалі в параметричній формі таке:

$$x = -\lambda_1 \cos(u) + C, \quad t = \lambda_1 \sin(u) + C_1.$$

Вилучаючи параметр, дістанемо рівняння кола

$$(t - C_1)^2 + (x - C)^2 = \lambda_1^2.$$

Константи C, C_1, λ_1 визначають із граничних умов та ізопериметричної умови.

Відповідь. Якщо $l = 2a$, то екстремаль — це відрізок прямої, що з'єднує точки A, B. Якщо $2a < l \leq \pi a$, то єдина екстремаль — це дуга довжиною l кола, яке проходить через точки A, B. При $l < 2a$ та $l > \pi a$ екстремалей немає.

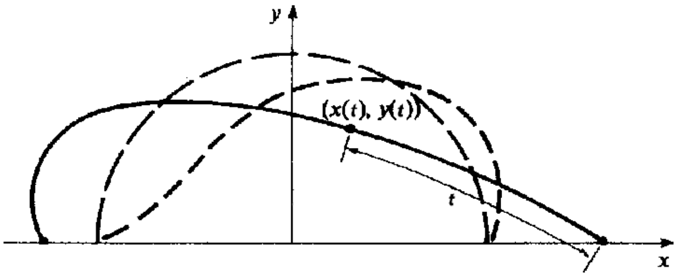


Рис. 10: Задача Дідони

Приклад 7.3 (*задача Дідони в параметричній формі*). Визначити максимум функціонала (рис. 10)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt,$$
$$x(0) = x(T), \quad y(0) = y(T)$$

за умови

$$\int_0^T \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}\,dt = l.$$

Розв'язання. 1. Складаємо лагранжіан

$$L = \lambda_0(xy' - yx') + \lambda_1\sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

2. Система рівнянь Ейлера має вигляд

$$2\lambda_0 y = \frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_1, \quad 2\lambda_0 x = \frac{\lambda_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_2.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то рівняння будуть такими:

$$\frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_1 = 0, \quad \frac{\lambda_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_2 = 0.$$

Розв'язки цієї системи диференціальних рівнянь $x(t) = At + B$, $y(t) = Ct + D$ не задовольняють умови $x(0) = x(T)$, $y(0) = y(T)$.

Нехай тепер $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Система рівнянь Ейлера матиме вигляд

$$y = \frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_1, \quad x = \frac{\lambda_1 y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + C_2.$$

Піднесемо до квадрата і додамо, дістанемо рівняння кола

$$(y - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = \lambda_1^2.$$

Відповідь. Максимальну площу при заданому периметрі обмежує коло.

Приклад 7.4 (*задача про положення рівноваги однорідної нитки під дією сили тяжіння*). Серед плоских ліній довжиною l, кінці яких закріплені в точках $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$, знайти ту, ордината центра ваги якої найменша.

Задача зводиться до дослідження на екстремум функціонала

$$P(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)\sqrt{1 + (x')^2(t)}\,dt \to \min,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (x')^2(t)}\,dt = l, \quad x(t_0) = x_0,\, x(t_1) = x_1.$$

Це ізопериметрична задача.

Розв'язання. 1. Складаємо лагранжіан

$$L = \lambda_0 x\sqrt{1+(x')^2} + \lambda_1\sqrt{1+(x')^2}.$$

2. Рівняння Ейлера для такої функції L має перший інтеграл

$$L - x'L_{x'} = C \Rightarrow (\lambda_0 x + \lambda_1)\sqrt{1+(x')^2} - \frac{(\lambda_0 x+\lambda_1)(x')^2}{\sqrt{1+(x')^2}} = C,$$

звідки $\lambda_0 x + \lambda_1 = C\sqrt{1+(x')^2}$.

3. Нехай $\lambda_0 = 0$, тоді єдина екстремаль — це пряма $x = At+B$. Вона є розв'язком задачі, якщо $l = \big((x_1-x_0)^2+(t_1-t_0)^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Нехай тепер $\lambda_0 = 1$. Рівняння Ейлера

$$x + \lambda_1 = C\sqrt{1+(x')^2}$$

інтегрується заміною $x' = \sinh(u)$, тоді

$$x + \lambda_1 = C\cosh(u), \quad dt = \frac{dx}{x'}, \quad C\,du \Rightarrow t = Cu + C_1.$$

Вилучаючи параметр u, дістанемо рівняння екстремалі

$$x + \lambda_1 = C\cosh\left(\frac{t-C_1}{C}\right).$$

Це рівняння ланцюгової лінії. Невідомі константи C, C_1, λ_1 визначаються з ізопериметричних та граничних умов.

Відповідь. Серед ліній заданої довжини найменшу ординату центра тяжіння мають ланцюгові лінії.

7.2. Задачі для самостійного розв'язування

7.1. Знайти криву, яка проходить через точку $A(0,b)$ на осі $0Y$ і точку на осі $0X$, обмежує разом із віссю $0X$ та віссю $0Y$ задану площу S і утворює при обертанні навколо осі $0X$ поверхню найменшої площі.

7.2. Знайти криву довжини l, яка проходить через початок координат $A(0,0)$, точку $B(x,h)$ на прямій $y = h$, і обмежує разом із віссю $0X$ і ординатою точки $B(x,h)$ найбільшу площу.

7.3. Знайти форму важкої однорідної нитки довжини l, один кінець якої закріплений у точці $B(x_1, y_1)$, а другий розташований на осі $0Y$.

7.4. З'єднати кривою довжини l задану точку M_1 на стороні кута з вершиною в початку координат із невідомою точкою M_2 на іншій стороні кута так, щоб площа фігури, утвореної сторонами кута і кривою, була найбільшою.

7.5. На вертикальних прямих $x = a$, $x = b$ знайти такі дві точки M, N і криву MN, що з'єднує ці точки, так, щоб площа $AMNB$, де $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, була максимальною за умови, що сума довжин кривої MN і відрізків AM, BN фіксована.

7.6. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(0) = 1,\ x(1) = 0.$

7.7. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 3,\ x(0) = 1,\ x(1) = 6.$

7.8. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

7.9. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = -4,\ x(1) = 4.$

7.10. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\ \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.11. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = -\frac{3}{2}, \quad \int\limits_0^1 tx\,dt = -2,\ x(0) = 2,$ $x(1) = -14.$

7.12. $\int\limits_0^{\pi} (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^{\pi} x\cos(t)\,dt = \frac{\pi}{2},\ x(0) = 1,\ x(\pi) = -1.$

7.13. $\int\limits_0^{\pi} (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^{\pi} x\sin(t)\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1.$

7.14. $\int\limits_0^{\pi} x\sin(t)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^{\pi} (x')^2\,dt = \frac{3\pi}{2},\ x(0) = 0,\ x(\pi) = \pi.$

7.15. $\int\limits_0^{\pi} (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^{\pi} x\cos(t)\,dt = \frac{\pi}{2},\ \int\limits_0^{\pi} x\sin(t)\,dt = \pi + 2,$ $x(0) = 2,\ x(\pi) = 0.$

7.16. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 xe^{-t}\,dt = e,\ x(1) = 2,\ x(0) = 2e + 1.$

7.17. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 xe^t\, dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

7.18. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2\big)\, dt \to \text{extr}, \int\limits_0^1 xe^t\, dt = \frac{e^2+1}{4},\ x(0) = 0,\ x(1) = e.$

7.19. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + x^2\big)\, dt \to \text{extr}, \int\limits_0^1 xe^{-t}\, dt = \frac{1-3e^{-2}}{4},\ x(0) = 0,\ x(1) = \frac{1}{e}.$

7.20. $\int\limits_1^2 t^2(x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_1^2 tx\, dt = \frac{7}{3},\ x(1) = 1,\ x(2) = 2.$

7.21. $\int\limits_1^2 t^3(x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_1^2 x\, dt = 2,\ x(1) = 4,\ x(2) = 1.$

7.22. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\, dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.23. $\int\limits_0^1 (x'')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 (x')^2\, dt = 2,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.24. $\int\limits_0^1 (x'')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\, dt = 2,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.25. $\int\limits_{-1}^0 (x')^3 dt \to \text{extr}, \int\limits_{-1}^0 tx' dt = -\frac{4}{15},\ x(-1) = 0,\ x(0) = \frac{2}{3.}$

7.26. $\int\limits_0^1 t^2 x\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^5\, dt = 1.$

7.27. $\int\limits_0^1 (x)^3\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\, dt = 2/3, \int\limits_0^1 tx\, dt = 2/5.$

7.28. $\int\limits_0^1 (x')^{4/3}\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx'\, dt = 5, \quad x(0) = -5/4,\ x(1) = 5.$

7.29. $\int\limits_0^{\pi} \big((x')^2 - x^2\big)\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^{\pi} x\cos(t)\, dt = 1,\ x(0) = x(\pi) = 0.$

7.30. $\int\limits_0^{\pi/2} \big((x')^2 - x^2\big)\, dt \to \text{extr}, \int\limits_0^{\pi/2} x\sin(t)\, dt = 1,\ x(0) = x(\pi/2) = 0.$

7.31. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \int\limits_0^1 (x - (x')^2)\, dt = 1/12,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1/4.$

7.32. $\int\limits_0^1 x_1'x_2'dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^1 x_1dt = 1,\ x_1(0) = x_1(1) = 0,$

$\int\limits_0^1 x_2dt = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_2(1) = 1.$

7.33. $\int\limits_0^1 x_1'x_2'\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 tx_1\,dt = \int\limits_0^1 tx_2\,dt = 0,$

$x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0,\ x_2(1) = 1.$

7.34. $\int\limits_0^1 (x_1 + x_2)\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 x_1'x_2'\,dt = 0,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,$

$x_1(1) = 1,\ x_2(1) = -3.$

7.35. $\int\limits_0^1 t(x_1 - x_2)\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 x_1'x_2'\,dt = -\frac{4}{5},$

$x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0,\ x_1(1) = 2.$

7.36. $\int\limits_0^1 \big((x_1')^2 + (x_2')^2 - 4tx_2' - 4x_2\big)\,dt \to \text{extr}, x_1(0) = 0,\ x_1(1) = 1,$

$\int\limits_0^1 \big((x_1')^2 - tx_1' - (x_2')^2\big)\,dt = 2,\ x_2(0) = 0,\ x_2(1) = 1.$

7.37. $\int\limits_0^\pi (x')^2\,dt \to \text{extr},\ \int\limits_0^\pi x\cos(t)\,dt = \pi/2,\ \int\limits_0^\pi x\sin(t)\,dt = -2,$

$x(0) = 0.$

7.38. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 xe^t\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

7.39. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 xe^t\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.40. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1.$

7.41. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1,\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0.$

7.42. $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

7.43. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (x')^2}\,dt = \pi/2,\ x(1) = 0.$

7.44. $\int\limits_{-1}^0 x\,dt \to \text{extr},\quad \int\limits_{-1}^0 \sqrt{1 + (x')^2}\,dt = \pi/2,\ x(-1) = 0.$

7.45. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 (x'')^2\,dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.46. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 (x'')^2\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = x(1) = 0.$

7.47. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \int\limits_0^1 (x'')^2\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = 0,$
$x(1) = x'(1) = 0.$

7.48. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\ x(0) = 0.$

7.49. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\ x(1) = x'(0) = 0.$

7.50. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = x'(1) = 0.$

7.51. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = 0,$
$x(1) = x'(1) = 0.$

7.52. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = 0.$

7.53. $\int\limits_0^1 (x'')^2 dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1, x(0) = x'(0) = 0,$
$x(1) = x'(1) = 0.$

7.54. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1,\ \int\limits_0^1 x\,dt = \int\limits_0^1 tx\,dt = 0.$

7.55. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt = 1,\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(0) = x(1),$
$x'(0) = x'(1).$

7.56. $T \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^T (x'')^2\,dt = 4,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x'(T) = -1.$

7.57. $T \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^T (x'')^2\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = 0,\ x'(T) = 1.$

7.58. $T \to \text{extr}, \int\limits_0^T (x'')^2\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = x(T) = 0,\ x'(T) = 1.$

7.59. $T \to \text{extr}, \int\limits_0^T (x'')^2\,dt = 4,\ x(0) = x'(0) = 0,\ x(T) = 1,\ x'(T) = 2.$

7.60. $x'(1) \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 (x'')^2\, dt = 4,\ x(0) = x'(0) = x(1) = 0.$

7.61. $x(1) \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 (x'')^2\, dt = 12,\ x(0) = x'(0) = x(1) = 0.$

7.62. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\, dt = 1,\ x(0) = 0.$

7.63. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\, dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.64. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx\, dt = 1,\ x(0) = 0.$

7.65. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx\, dt = 1,\ x(0) = x(1) = 0.$

7.66. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx\, dt = 0,\ x(0) = 0.$

7.67. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\, dt = \int\limits_0^1 tx\, dt = 0,\ x(0) = 1.$

7.68. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\, dt = \int\limits_0^1 tx\, dt = 0,\ x(1) = 1.$

7.69. $\int\limits_0^1 (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\, dt = \int\limits_0^1 tx\, dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

7.70. $\int\limits_0^T (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^T x\, dt = 1,\ x(0) = 3.$

7.71. $\int\limits_0^T (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^T x\, dt = 1/3,\ x(T) = 1.$

7.72. $\int\limits_0^\pi (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^\pi x \sin(t)\, dt = 1,\ x(0) = 0.$

7.73. $\int\limits_0^\pi (x')^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^\pi x \sin(t)\, dt = 1,\ x(0) = x(\pi) = 0.$

7.74. $\int\limits_0^\pi (x')^2 dt \to \text{extr}, \int\limits_0^\pi x \sin(t) dt = 1, \int\limits_0^\pi x \cos(t) dt = 0,\ x(0) = 0.$

7.75. $\int\limits_0^1 x_1' x_2'\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x_1\, dt = \int\limits_0^1 x_2\, dt = 0,$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0,\ x_1(1) = 1,\ x_2(1) = 2.$$

8. Задача Лагранжа

8.1. Задача Лагранжа з неголономними в'язями

Жозеф Луї Лагранж у праці "Аналітична механіка" (1788 р.) сформулював таку задачу. Знайти екстремум функціонала

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x'(t))\, dt \to \text{extr} \tag{8.1}$$

у класі векторних функцій $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, які задовольняють умови

$$\Phi_j(t, x(t), x'(t)) = 0,\ j = 1, \ldots, m, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{8.2}$$

Задачу (8.1)–(8.2) та різні її модифікації, пов'язані з додатковими обмеженнями (іншими граничними умовами, додатковими інтегральними співідношеннями тощо), називають *задачею Лагранжа з неголономними в'язями* на відміну від задачі з обмеженнями $\Phi_j(t, x(t)) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, де функції $\Phi_j(t, x)$ не залежать від x'. Такі обмеження у варіаційному численні називають *фазовими.* У механіці ці обмеження називають ще *голономними в'язями.*

Задачу (8.1)–(8.2) Лагранж розв'язав за допомогою методу невизначених множників. Цей метод базується на тому, що умовний екстремум у задачі (8.1)–(8.2) досягається на кривих, які є екстремалями функціонала

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda(\cdot), \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0)\, dt,$$

$$L(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0) = \lambda_0 f(t, x(t), x'(t)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \Phi_j(t, x(t), x'(t)).$$

Функція $L(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0)$ називається *функцією Лагранжа.* Число λ_0 та функції $\lambda_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, називаються *множниками Лагранжа.*

Теорема 8.1 (принцип невизначених множників Лагранжа). *Якщо функція $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ – розв'язок задачі (8.1)–(8.2) на умовний екстремум, то існують множники Лагранжа*

λ_0, $\lambda_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, які не дорівнюють нулю одночасно і такі, що функція $\hat{x}(\cdot)$ задовольняє рівняння Ейлера

$$L_x(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0) = \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0). \qquad (8.3)$$

Отже, невідомі функції $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, та $\lambda_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, знайдемо, розв'язавши рівняння Ейлера (8.3) та рівняння (8.2).

Зауважимо, що рівняння (8.2) будуть рівняннями Ейлера функціонала $L(t, x(t), x'(t), \lambda(t), \lambda_0)$, якщо аргументами функціонала вважати не тільки функцію $x(\cdot)$, а й функції $\lambda_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$.

8.2. Задача Лагранжа у формі Понтрягіна

У класі задач на умовний екстремум виділимо таку задачу Лагранжа:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \psi_0(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}, \quad (8.4)$$

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \qquad (8.5)$$

$$\psi_j(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad j = 1, \ldots, s. \qquad (8.6)$$

Тут функції

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}, \quad \varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n, \quad \psi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s.$$

Моменти часу t_0, t_1 будемо вважати фіксованими.

Обмеження $x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$ називають *диференціальним зв'язком*, обмеження $\psi_j(x(t_0), x(t_1))$, $j = 1, \ldots, s$, — *граничними* або *крайовими умовами*. Усі функції $f(t, x, u)$, $\varphi(t, x, u)$, $\psi_j(x_0, x_1)$, $j = 1, \ldots, s$, неперервно диференційовні. Задача (8.4)–(8.6) досліджується у банаховому просторі $Z = C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$. Елементи z цього простору Z мають вигляд $z = (x(\cdot), u(\cdot))$, де $x(\cdot)$ — неперервно диференційовна n-вимірна вектор-функція, а $u(\cdot)$ — неперервна r-вимірна вектор-функція. Елемент $z = (x(\cdot), u(\cdot))$ простору Z називають *керованим процесом* задачі (8.4)–(8.6), якщо функції $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ задовольняють рівняння (8.5), та *допустимим керованим процесом*, якщо крім того функція $x(\cdot)$ задовольняє граничні умови (8.6).

Допустимий керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, називається *оптимальним*, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для всіх допустимих керованих процесів $(x(\cdot), u(\cdot))$, які задовольняють умови $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1} < \varepsilon$, $\|u(\cdot) - \hat{u}(\cdot)\|_C < \varepsilon$, виконується нерівність $J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$.

Отже, оптимальний керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ дає слабкий локальний мінімум задачі (8.4)–(8.6).

Побудуємо задачу на безумовний екстремум

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \mu, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), u(t), p(t), \lambda_0)\, dt + \\ + l(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}, \tag{8.7}$$

$$L(t, x(t), x'(t), u(t), p(t), \lambda_0) = p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) + \\ + \lambda_0 f(x, x(t), u(t)), \tag{8.8}$$

$$l(x(t_0), x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \mu_j \psi_j(x(t_0), x(t_1)),\ \lambda_0 = \mu_0. \tag{8.9}$$

Якщо функціонал $\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \mu, \lambda_0)$ побудований, то згідно з методом Лагранжа потрібно шукати екстремум цього функціонала, припускаючи, що змінні $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ незалежні. Інакше кажучи, потрібно розв'язати задачу

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), \mu, \lambda_0) \to \text{extr}, \tag{8.10}$$

вважаючи, що множники Лагранжа фіксовані. Задача (8.10) — це задача Больца.

Теорема 8.2 (теорема Ейлера – Лагранжа). *Якщо* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *— оптимальний керований процес задачі (8.4)–(8.6), то існують множники Лагранжа* λ_0, μ_0 ($\lambda_0 = \mu_0 \geq 0$ *у задачі на мінімум,* $\lambda_0 = \mu_0 \leq 0$ *у задачі на максимум*), $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, $p(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, *які не дорівнюють нулю одночасно і такі, що виконуються:*

1) рівняння Ейлера – Лагранжа

$$L_x(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\hat{u}(t),p(t),\lambda_0)=\frac{d}{dt}L_{x'}(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\hat{u}(t),p(t),\lambda_0), \tag{8.11}$$

$$L_u(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t),\hat{u}(t),p(t),\lambda_0)=0; \tag{8.12}$$

2) умови трансверсальності

$$L_{x'}(t_0,\hat{x}(t_0),\hat{x}'(t_0),\hat{u}(t_0),p(t_0),\lambda_0)=\frac{\partial}{\partial x(t_0)}l(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)), \tag{8.13}$$
$$L_{x'}(t_1,\hat{x}(t_1),\hat{x}'(t_1),\hat{u}(t_1),p(t_1),\lambda_0)=-\frac{\partial}{\partial x(t_1)}l(\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_1)).$$

8.3. Задача Лагранжа з вільними границями

У просторі $Z=C^1(\Delta,\mathbb{R}^n)\times C(\Delta,\mathbb{R}^r)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ дослідимо таку задачу на умовний екстремум:

$$J_0(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}f_0(t,x(t),u(t))\,dt+ \\ +\psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to\inf, \tag{8.14}$$

$$x'(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),\quad t_0\le t\le t_1, \tag{8.15}$$

$$J_j(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}f_j(t,x(t),u(t))\,dt+ \\ +\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\le 0, \tag{8.16}$$
$$j=1,\ldots,m,$$

$$J_j(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}f_j(t,x(t),u(t))\,dt+ \\ +\psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=0, \tag{8.17}$$
$$j=m+1,\ldots,s.$$

Тут Δ —заданий скінченний відрізок числової прямої, функції

$$f_j\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R},$$
$$\varphi_j\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad j=0,1,\ldots,s,$$
$$\psi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^n,$$

щонайменше, неперервно диференційовні.

Четвірку $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ називають *керованим процесом* у задачі (8.14)–(8.17), якщо виконуються умови:
1) керування $u(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$;
2) фазова траєкторія $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$;
3) функція $x(\cdot)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$$

для всіх $t \in [t_0, t_1]$ за винятком точок розриву керування $u(\cdot)$.

Керований процес називається *допустимим*, якщо виконуються умови (8.16), (8.17). Допустимий керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ називають *локально оптимальним*, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого керованого процесу $(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, який задовольняє умови $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon$, $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$, $|x'(t) - \hat{x}'(t)| < \varepsilon$, $|u(t) - \hat{u}(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1] \cap [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, виконується нерівність

$$J_0(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \geq J_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1).$$

Теорема 8.3 (теорема Ейлера – Лагранжа). *Нехай $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ — оптимальний керований процес задачі (8.14)–(8.17), функції $f_j(t, x, u)$, $j = 0, 1, \ldots, s$, та їх частинні похідні по x та u неперервні, функція $\varphi(t, x, u)$ та її частинна похідна по x неперервні, функції $\psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, $j = \overline{0, s}$, неперервно диференційовні. Тоді існують множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$ і вектор-функція $p(\cdot) \in C^1(\Delta, R^n)$, які не дорівнюють нулю одночасно і такі, що для функції Лагранжа*

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x(t), u(t)) + \\ + p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t)))]\, dt + l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$f(t, x(t), u(t)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)),$$

$$l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

виконуються умови:

1) стаціонарності по x – рівняння Ейлера для лагранжіана

$$L(t, x(t), x'(t), u(t)) = f(t, x(t), u(t)) + p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t))$$

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) \Longleftrightarrow p'(t) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{f}_{jx}(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t),$$
$$\hat{t}_0 \le t \le \hat{t}_1,$$

де $\hat{f}_j(t) = f_j(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)),\ \hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$*;*

2) трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Longleftrightarrow p(\hat{t}_0) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{\psi}_{jx(t_0)},$$
$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Longleftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{\psi}_{jx(t_1)},$$

де

$$\hat{l} = l(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \psi_j(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1));$$

3) стаціонарності по u

$$\hat{L}_u(t) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \hat{f}_{ju}(t) - p(t)\hat{\varphi}_u(t) = 0, \quad \hat{t}_0 \le t \le \hat{t}_1;$$

4) стаціонарності по t_0, t_1

$$\hat{\mathcal{L}}_{t_0} = 0 \Longleftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)} + \hat{x}'(\hat{t}_0) = 0,$$
$$\hat{\mathcal{L}}_{t_1} = 0 \Longleftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)} + \hat{x}'(\hat{t}_1) = 0;$$

5) доповнювальної нежорсткості

$$\lambda_j J_j(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0, \quad j = 1, \ldots, m;$$

6) невід'ємності $\lambda_j \ge 0,\ j = 0, 1, \ldots, m$.

8.4. Задача Лагранжа з рухомими границями

У просторі $Z = C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дослідимо таку задачу на умовний екстремум:

$$\begin{gathered} J_0(x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt + \\ + \psi_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \mathrm{extr}, \qquad (8.18) \\ \psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \end{gathered}$$

де Δ —заданий скінченний відрізок $t_0, t_1 \in \Delta$.

Теорема 8.4 (необхідні умови екстремуму). *Нехай функція $L(t, x, x')$ та її частинні похідні по x та x' неперервні, функції ψ_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, неперервно диференційовні. Якщо $(\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0; \hat{t}_1)$ — розв'язок задачі (8.18) з рухомими границями, то існують множники Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, які не дорівнюють нулю одночасно і такі, що для функції Лагранжа*

$$\mathcal{L}(x(\cdot), t_0, t_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 L(t, x(t), x'(t))\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

виконуються умови:

1) стаціонарності по x (рівняння Ейлера для інтегранта $\lambda_0 L(t, x, x')$)

$$\lambda_0 \hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt} \lambda_0 \hat{L}_{x'}(t), \quad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1];$$

2) трансверсальності по x

$$\lambda_0 \hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \quad \lambda_0 \hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)};$$

3) стаціонарності по t_0, t_1

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{L}}_{t_0} = 0 \Longleftrightarrow -\lambda_0 \hat{L}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)} \hat{x}'(\hat{t}_0) = 0, \\ \hat{\mathcal{L}}_{t_1} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 \hat{L}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)} \hat{x}'(\hat{t}_1) = 0. \end{gathered}$$

Умови стаціонарності по t_0, t_1 записуються лише для задач на множині функцій із рухомими кінцями.

Правило невизначених множників Лагранжа розв'язування задач Лагранжа

1. Подати задачу у вигляді задачі (8.14)–(8.17).
2. Побудувати функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t)u(t))\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

$$f(t, x(t)u(t)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t)u(t)),$$

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \psi_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)).$$

3. Записати необхідні умови оптимальності керованого процесу:

1) стаціонарності по x — рівняння Ейлера

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dt}\hat{L}_{x'}(t) \Longleftrightarrow p'(t) = \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t);$$

2) трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Longleftrightarrow p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},$$
$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Longleftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)};$$

3) стаціонарності по u — рівняння Ейлера

$$\hat{L}_u(t) = 0 \Longleftrightarrow \hat{f}_u(t) - p(t)\hat{\varphi}_u(t) = 0;$$

4) стаціонарності по t_0, t_1

$$\hat{\mathcal{L}}_{t_0} = 0 \Longleftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\hat{x}'(\hat{t}_0) = 0,$$
$$\hat{\mathcal{L}}_{t_1} = 0 \Longleftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\hat{x}'(\hat{t}_1) = 0;$$

5) доповнювальної нежорсткості

$$\lambda_j J_j(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) = 0, \quad j = 1, \ldots, m;$$

6) невід'ємності $\lambda_j \geq 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$.
4. Знайти допустимі керовані процеси $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), t_0, t_1)$, які задовольняють умови п. 3 із множниками Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, p(\cdot)$, що не дорівнюють нулю одночасно.
5. Знайти розв'язок задачі серед допустимих керованих процесів, визначених у п. 4, або довести, що розв'язків немає.

Приклад 8.1. Розв'язати задачу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t)\,dt \to \text{extr}, \quad x'' + x = u, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 1.$$

Розв'язання. 1. Подамо задачу у вигляді задачі Лагранжа, скориставшись заміною $x_1 = x$, $x_2 = x'$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = u - x_1,$$
$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(\pi/2) = 1.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\lambda_0 u^2(t) + p_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + p_2(t)(x_2'(t) + x_1(t) -$$

$$- u(t)))\,dt + \mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0) + \mu_3 x_1(\pi/2).$$

3. Запишемо необхідні умови оптимальності.
1) рівняння Ейлера лагранжіана

$$L = \lambda_0 u^2 + p_1(x_1' - x_2) + p_2(x_2' + x_1 - u),$$
$$L_{x_1} = \frac{d}{dt} L_{x'} \Longleftrightarrow p_1' = p_2,$$
$$L_{x_2} = \frac{d}{dt} L_{x_2'} \Longleftrightarrow p_2' = -p_1,$$
$$L_u = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda_0 u - p_2 = 0;$$

2) трансверсальності термінанта

$$l = \mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0) + \mu_3 x_1(\pi/2):$$
$$p_1(0) = \mu_1, \quad p_2(0) = \mu_2, \quad p_2(\pi/2) = 0, \quad p_1(\pi/2) = -\mu_3.$$

4. Нехай $\lambda_0 = 0$. Тоді $p_1(t) = p_2(t) \equiv 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Отже, всі множники Лагранжа — нулі. Це суперечить умовам теореми. Тому при $\lambda_0 = 0$ допустимих екстремалей немає.
5. Візьмемо $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Із системи рівнянь Ейлера отримаємо диференціальне рівняння

$$p_2'' + p_2 = 0.$$

Загальний розв'язок такого диференціального рівняння

$$p_2 = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t).$$

Оскільки $p_2(\pi/2) = 0$, то $p_2 = C\cos(t)$, тому $u(t) = C\cos(t)$. Підставляючи цю функцію $u(t)$ у диференціальне рівняння $x''+x = u$, отримуємо $x'' + x = C\cos(t)$. Загальний розв'язок цього рівняння $x(t) = (C_1 + C_2 t)\sin(t) + C_3\cos(t)$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3 визначаються із граничних умов. Єдиний допустимий керований процес

$$(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \left(\frac{2}{\pi} t\sin(t), \frac{4}{\pi} t\cos(t)\right).$$

6. Покажемо, що екстремаль $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in \operatorname{absmin}$. Для того, щоб функція $(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot), \hat{u}(\cdot) + u(\cdot))$ була допустимим керованим процесом, потрібно взяти функцію $x(\cdot) \in C^2[0, \pi/2]$, $x(0) = x'(0) = x(\pi/2) = 0$ та керування $u = x'' + x$. Тоді

$$J(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot), \hat{u}(\cdot) + u(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \\ = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{u}(t)u(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t)\,dt \geq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{u}(t)(x''(t) + x(t))\,dt.$$

Інтегруючи частинами та враховуючи граничні умови, дістанемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{u}(t)(x''(t) + x(t))\,dt = \\ = \hat{u}(t)x'(t)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{u}(t)x(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{u}'(t)x'(t)\,dt = \\ = -x(t)\hat{u}'(t)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\hat{u}(t) + \hat{u}''(t))x(t)\,dt = 0.$$

Отже, ми показали, що $J(\hat{x}(\cdot) + x(\cdot), \hat{u}(\cdot) + u(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. Тому $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in \operatorname{absmin}$.

Відповідь. $\left(\frac{2}{\pi} t\sin(t), \frac{4}{\pi} t\cos(t)\right) \in \operatorname{absmin}$.

Приклад 8.2 (*задача Чаплигіна*). Визначити замкнуту криву, по якій повинен рухатись літак, щоб за час T облетіти найбільшу площу, якщо швидкість вітру дорівнює q. Швидкість літака стала за величиною і дорівнює v.

Розв'язання. 1. Формалізація задачі. Нехай $\alpha(t)$ — кут, який визначає положення вектора швидкості літака відносно напрямку, що протилежний до напрямку вітру. Формалізовану задачу можна записати так:

$$S(x(\cdot), y(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt \to \max,$$
$$x'(t) = v\cos(\alpha(t)) - q,\ y'(t) = -v\sin(\alpha(t)),$$
$$x(0) = x(T),\ y(0) = y(T).$$

Застосуємо метод невизначених множників Лагранжа. У задачі функція керування $u(t) = \alpha(t)$.
2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L}(x(\cdot), y(\cdot), \alpha(\cdot), p_1(\cdot), p_2(\cdot), \lambda_0, \mu_1, \mu_2) =$$
$$= \int_0^T \left[\frac{\lambda_0}{2}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) + p_1(t)(x'(t) - v\cos(\alpha(t)) + q) +\right.$$
$$\left. + p_2(t)(y'(t) + v\sin(\alpha(t))\right] dt + \mu_1(x(0) - x(T)) + \mu_2(y(0) - y(T)).$$

3. Запишемо необхідні умови оптимальності:
рівняння Ейлера – Лагранжа

$$\frac{\lambda_0}{2}y' - \frac{d}{dt}\left(-\frac{\lambda_0}{2}y + p_1\right) = 0,$$
$$-\frac{\lambda_0}{2}x' - \frac{d}{dt}\left(-\frac{\lambda_0}{2}x + p_2\right) = 0,$$
$$p_1 v\sin(\alpha(t)) + p_2 v\cos(\alpha(t)) = 0;$$

умови трансверсальності

$$L_{x'}(t_0) = \left(-\frac{\lambda_0}{2}y(t) + p_1(t)\right)\bigg|_{t=0} = \mu_1,$$
$$L_{x'}(t_1) = \left(-\frac{\lambda_0}{2}y(t) + p_1(t)\right)\bigg|_{t=T} = \mu_1,$$
$$L_{y'}(t_0) = \left(\frac{\lambda_0}{2}x(t) + p_2(t)\right)\bigg|_{t=0} = \mu_2,$$
$$L_{y'}(t_1) = \left(\frac{\lambda_0}{2}x(t) + p_2(t)\right)\bigg|_{t=T} = \mu_2.$$

Перші два рівняння — це рівняння Ейлера за змінними $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, а третє — це рівняння Ейлера за змінною $\alpha(\cdot)$.
4. Нехай $\lambda_0 = 0$, тоді з перших двох рівнянь Ейлера дістанемо $p_1(t) = C_1$, $p_2(t) = C_2$. Якщо $C_1 = C_2 = 0$, то всі множники Лагранжа дорівнюють нулю, а це суперечить принципу Лагранжа. Отже, C_1, C_2 не дорівнюють нулю одночасно. Підставимо значення $p_1(t) = C_1$, $p_2(t) = C_2$ у третє рівняння, дістанемо $C_1 v\sin(\alpha(t)) + C_2 v\cos(\alpha(t)) = 0$. Із цього співвідношення випливає, що швидкість літака повинна мати сталий напрямок, перпендикулярний до вектора (C_1, C_2). Це означає, що задача не має розв'язку.

Нехай тепер $\lambda_0 = 1$, тоді з перших двох рівнянь Ейлера дістанемо $p_1(t) = y(t) + C_1$, $p_2(t) = -x(t) + C_2$. Константи C_1, C_2 можна вибрати нульовими за рахунок переносу початку системи координат. Підставивши $p_1(t) = y(t)$, $p_2(t) = -x(t)$ у третє рівняння Ейлера, отримаємо

$$y(t)\sin(\alpha(t)) - x(t)\cos(\alpha(t)) = 0.$$

Якщо визначимо $y(t) = r(t)\cos(\alpha(t))$, $x(t) = r(t)\sin(\alpha(t))$, то з останнього рівняння випливає

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q}{v}\frac{dy}{dt}.$$

Інтегруючи це рівняння, дістанемо

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{yq}{v} + C.$$

Це рівняння еліпса (за умови, що $v > q$). Його можна подати у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{8.19}$$

де

$$a = \frac{vC}{\sqrt{v^2 - q^2}}, \quad b = \frac{v^2 C}{v^2 - q^2}, \quad y_0 = \frac{vqC}{v^2 - q^2}.$$

Невідома константа C визначається з граничних умов, якщо задано T.

Відповідь. 1. Якщо швидкість літака більша за швидкість вітру, то оптимальна траєкторія польоту — еліпс.

2. Якщо швидкість літака менша за швидкість вітру, то він не зможе повернутися у початкову точку. Рівняння описує гіперболу. Задача розв'язку не має.

3. Якщо швидкість вітру $q = 0$, то задача Чаплигіна трансформується в задачу Дідони, оптимальна траєкторія польоту — коло.

Приклад 8.3. Скласти рівняння лінії, яка лежить на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$, з'єднує дві точки $A(x_0, y_0, z_0)$ та $B(x_1, y_1, z_1)$ і має найменшу довжину. Така лінія називається *геодезичною.*

Розв'язання. 1. Формалізація задачі. Довжина лінії $y(x)$, $z(x)$, яка з'єднує точки A, B, обчислюється за формулою

$$l(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx.$$

Потрібно знайти мінімум функціонала $l(y(\cdot), z(\cdot))$ за умови $\varphi(x, y, z) = 0$ (лінія лежить на заданій поверхні).

Отже, формалізована задача має вигляд

$$l(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx \to \inf,$$

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$l^*(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z)\right] dx.$$

3. Запишемо рівняння Ейлера

$$\lambda(x)\varphi'_y = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}, \tag{8.20}$$

$$\lambda(x)\varphi'_z = \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}} \tag{8.21}$$

та рівняння $\varphi(x,y,z)=0$. Із цих трьох рівнянь визначають $\lambda(x)$ та функції $y(x)$, $z(x)$, які описують допустиму екстремаль.

Щоб виявити геометричні властивості геодезичних ліній, візьмемо похідну рівняння $\varphi(x,y,z)=0$ за змінною x:

$$\varphi'_x + \varphi'_y y' + \varphi'_z z' = 0.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на $\lambda(x)$ і підставивши замість $\lambda(x)\varphi'_y$ та $\lambda(x)\varphi'_z$ їхні вирази з рівнянь Ейлера, дістанемо рівняння, аналогічне рівнянням Ейлера:

$$\lambda(x)\varphi'_x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}.$$

Дроби, що стоять під знаком похідної по x, дорівнюють напрямним косинусам дотичної до шуканої геодезичної кривої, тому рівняння можна переписати так:

$$\frac{d\cos(\alpha)}{dx} = \lambda\varphi'_x, \quad \frac{d\cos(\beta)}{dx} = \lambda\varphi'_y, \quad \frac{d\cos(\gamma)}{dx} = \lambda\varphi'_z.$$

Користуючись формулою $\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha)$, отримуємо

$$\frac{d\cos(\alpha)}{ds} = \mu\varphi'_x, \quad \frac{d\cos(\beta)}{ds} = \mu\varphi'_y, \quad \frac{d\cos(\gamma)}{ds} = \mu\varphi'_z,$$

де $\mu = \lambda\cos(\alpha)$.

Ліві частини цих рівнянь пропорційні напрямним косинусам головної нормалі до кривої, а праві — напрямним косинусам нормалі до поверхні. Отже, уздовж геодезичної лінії головна нормаль до лінії буде нормаллю до поверхні.

Визначимо, як приклад, рівняння найкоротшої лінії, що лежить на поверхні $15x-7y+z-22=0$ та з'єднує точки $A(1,-1,0)$, $B(2,1,-1)$. Рівняння Ейлера (8.20), (8.21) мають вигляд

$$\lambda(x)\cdot(-7)=\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}},$$
$$\lambda(x)\cdot 1=\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}.$$

Шукані функції $y=y(x)$, $z=z(x)$ задовольняють рівняння поверхні $15x-7y+z-22=0$ та граничні умови $y(1)=-1$, $y(2)=1$, $z(1)=0$, $z(2)=-1$. Додамо друге рівняння Ейлера, помножене на 7, до першого. Отримаємо

$$\frac{d}{dx}(y'+7z')\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}=0,$$

звідки

$$(y'+7z')\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}=C.$$

Підставимо у це рівняння $z'=7y'-15$, дістанемо $y(x)=C_1x+C_2$. Граничні умови дають $C_1=2$, $C_2=-3$, тому $y(x)=2x-3$, $z(x)=1-x$.

Отже, найкоротша лінія задається рівняннями $y(x)=2x-3$, $z(x)=1-x$.

Приклад 8.4 (*задача про брахістохрону у середовищі з опором*). Серед ліній, що з'єднують дві точки A і B, знайти лінію, рухаючись по якій випущена вниз із початковою швидкістю v_0 матеріальна точка пройде весь шлях за найменший відрізок часу у середовищі, опір якого описується функцією $R(v)$.

Розв'язання. 1. Формалізація задачі. Нехай $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$ задані точки. Зміна кінетичної енергії точки при русі вздовж кривої буде відбуватись за рахунок додатної роботи сили тяжіння та від'ємної роботи сили опору середовища

$$d\frac{v^2}{2}=g\,dy-R(v)\,ds,\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Нехай x — незалежна змінна, тоді рівняння має вигляд

$$vv' - gy' + R(v)\sqrt{1 + (y')^2} = 0. \tag{8.22}$$

Задача зводиться до дослідження на екстремум функціонала

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v}\, dx \tag{8.23}$$

з граничними умовами $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $v(x_0) = v_0$, $v(x_1) = = v_1$ та неголономним зв'язком (8.22).

2. Складемо лагранжіан задачі (8.22), (8.23)

$$L = \left(1 + (y')^2\right)^{\frac{1}{2}} H + \lambda(x)vv' - \lambda(x)gy', \quad H = v^{-1} + \lambda(x)R(v).$$

Рівняння Ейлера по y має перший інтеграл $L_{y'} = C$ або

$$\frac{Hy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C + \lambda(x)g. \tag{8.24}$$

Рівняння Ейлера по $v(x)$ має вигляд

$$\sqrt{1 + (y')^2} H_v + \lambda(x)v' - \frac{d}{dx}(\lambda(x)v) = 0$$

або

$$v\lambda'(x)\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = H_v. \tag{8.25}$$

Система трьох рівнянь (8.22), (8.24), (8.25) достатня для визначення невідомих функцій $y(x)$, $v(x)$, $\lambda(x)$. Можна переконатись у справедливості формули

$$H^2 - (C + g\lambda)^2 = a^2, \tag{8.26}$$

де a — деяка константа. Із записаних рівнянь можна визначити λ як функцію від v: $\lambda = \lambda(v)$. Поділимо (8.24) на (8.25), дістанемо

$$dy = \frac{(C + g\lambda)v\, d\lambda}{HH_v}. \tag{8.27}$$

Враховуючи (8.24), (8.26), запишемо $y' = \frac{C}{a}$, звідки

$$dx = \frac{av\,d\lambda}{HH_v}. \tag{8.28}$$

Підставимо у (8.27), (8.28) $\lambda = \lambda(v)$, зінтегрувавши отримаємо

$$x = d + \varphi(v, a, c), \quad y = b + \psi(v, a, c), \tag{8.29}$$

де d, b — невідомі константи.

Відповідь. Рівняння (8.29) задають параметричну форму шуканої брахістохрони, параметром є швидкість v, невідомі константи a, b, c, d визначаються з 4-х граничних умов.

8.5. Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі Лагранжа.

8.1. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \text{extr}, \quad x'' - x = u,\ x(0) = 1.$

8.2. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \text{extr}, \quad x'' - x = u,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

8.3. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \text{extr}, \quad x'' - x = u,\ x(0) = 0,\ x(1) = \sinh(1),$
$x'(1) = \cosh(1) + \sinh(1).$

8.4. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \text{extr}, \quad x'' - x = u,\ x(0) = x'(0) = 0,$
$x(1) = \sinh(1),\ x'(1) = \cosh(1) + \sinh(1).$

8.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x'(0) = 1.$

8.6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

8.7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt \to \text{extr},\ x''+x = u,\ x(0) = x(\pi/2) = 0,\ x'(\pi/2) = -\pi/2.$

8.8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -\pi/2,$
$x(\pi/2) = 0,\ x'(\pi/2) = 1.$

8.9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr}, \quad x'' + x = u.$

8.10. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x(\pi/2) = 1.$

8.11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr},\ x'' + x = u,\ x(\pi/2) = 0,\ x'(\pi/2) = 1.$

8.12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x(\pi/2) = x'(0) = 0,$
$x'(\pi/2) = 1.$

8.13. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + (x')^2(0) \to \text{extr}, \quad x'' - x = u.$

8.14. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + (x')^2(0) \to \text{extr}, \quad x'' - x = u,\ x(0) = 1.$

8.15. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + (x')^2(0) \to \text{extr},\ x'' - x = u,\ x(0) = x(1) = 0,\ x'(1) = 1.$

8.16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt + (x')^2(0) \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

8.17. $\int\limits_0^1 (x^2 + u^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x' = x + u,\ x(1) = 1.$

8.18. $\int\limits_0^1 (x^2 + 2u^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x' = x/\sqrt{2} + u,\ x(0) = 1.$

8.19. $\int\limits_0^1 (x^2 + u^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x'' + \sqrt{2}x' = u,\ x(0) = 1.$

8.20. $\int\limits_0^1 (x^2 + u^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x'' - \sqrt{2}x' = u,\ x(0) = 1.$

8.21. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x^2(T) \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x(0) = 1.$

8.22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,dt + x'(0) \to \text{extr}, \quad x'' + x = u,\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 1.$

8.23. $\int\limits_0^1 \big((x')^2 + (y')^2\big)\,dt \to \text{extr}, \quad x'y - y'x = 1,\ x(0) = 0,$
$x(1) = \sin(1),\ y(0) = 1,\ y(1) = \cos(1).$

9. Задачі оптимального керування. Принцип максимуму Понтрягіна

9.1. Приклади задач оптимального керування

1. **Задача про оптимальну швидкодію**. Нехай візок рухається прямолінійно без тертя по горизонтальних рейках під дією зовнішньої сили, яку можна змінювати в заданих границях. Потрібно зупинити візок у заданому місці за найкоротший відрізок часу. Ця задача називається *найпростішою задачею про швидкодію.*

Формалізуємо задачу. Нехай маса візка дорівнює m, початкова координата x_0, початкова швидкість v_0. Зовнішню силу (силу тяги) позначимо через u. Згідно із законом Ньютона рівняння руху — це диференціальне рівняння

$$mx''(t) = u(t).$$

Обмеження на величину тяги запишемо так: $u_1 \le u(t) \le u_2$. Тоді формалізована задача має вигляд

$$\begin{aligned} T \to \inf, \quad mx''(t) = u(t), \quad u(t) \in [u_1, u_2], \\ x(0) = x_0, \quad m'x'(0) = v_0, \quad x(T) = x'(T) = 0. \end{aligned}$$

Ця задача буде розв'язана у наступному параграфі.

2. **Навігаційна задача керування кораблем**. Нехай корабель рухається зі сталою за модулем швидкістю відносно течії, швидкість якої стала за модулем і напрямком. Необхідно скласти програму керування рулем, яка забезпечить переміщення корабля в задану точку з початкової за найкоротший відрізок часу.

Позначимо через $x(t)$, $y(t)$ положення корабля в момент часу t у прямокутній системі координат такій, що вісь OX паралельна вектору швидкості течії $\vec{s}$. Положення рулів корабля в момент часу t буде визначати кут $\alpha(t)$ між вектором швидкості корабля $\vec{v}$ та вектором швидкості течії $\vec{s}$. Позначимо $v = |\vec{v}|$, $s = |\vec{s}|$. Тоді складові вектора швидкості корабля $\vec{v}$ по осі OX та по осі OY

дорівнюють $s + v\cos(\alpha)$, $v\sin(\alpha)$. Рух корабля можна описати системою диференціальних рівнянь

$$x'(t) = s + v\cos(\alpha(t)), \quad y'(t) = v\sin(\alpha(t)),$$

враховуючи, що $\sin^2(\alpha(t)) + \cos^2(\alpha(t)) = 1$ для всіх значень t. Нехай $u_1(t) = \cos(\alpha(t))$, $u_2(t) = \sin(\alpha(t))$, початковий момент часу t_0. Необхідно визначити керуючий вектор $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, $|\vec{u}(t)|^2 = u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1$ такий, що розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$x'(t) = s + vu_1(t), \quad y'(t) = vu_2(t)$$

задовольняє граничні умови $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, де (x_0, y_0) — координати початкового положення корабля, (x_1, y_1) — координати точки, в яку має припливти корабель. Різниця $t_1 - t_0$ повинна бути мінімальною. Отже, задача оптимального керування має вигляд

$$\begin{aligned}
&T = t_1 - t_0 \to \inf,\\
&x'(t) = s + vu_1(t), \quad y'(t) = vu_2(t),\\
&u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1, \quad t_0 \le t \le t_1,\\
&x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \quad y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1.
\end{aligned}$$

3. **Задача про найбільшу дальність польоту ракети з обмеженим прискоренням**. Потрібно визначити таке керування тягою двигуна ракети, яке максимізує дальність польоту ракети за умови, що значення тяги не може перевищувати деяку задану величину. Будемо вважати, що прискорення вільного падіння не змінюється, аеродинамічні властивості ракети такі, що опір повітря та інші ефекти малі і ними можна знехтувати. Нехай траєкторія польоту ракети лежить в одній площині. Позначимо через $(x(t), y(t))$ декартові координати ракети; $v_1(t)$, $v_2(t)$ — компоненти вектора швидкості ракети ($v_1(t) = x'(t)$, $v_2(t) = y'(t)$); $m(t)$ — масу ракети; $u_1(t)$, $u_2(t)$ — компоненти одиничного вектора, колінеарного до вектора тяги; g — прискорення вільного падіння; $u_3(t)$ — швидкість зменшення маси ракети двигуна

$(u_3(t) = -m'(t))$. Положення ракети в момент t описується вектором $(x(t), y(t), v_1(t), v_2(t), m(t))$. Керуючий процес у кожний момент часу t — це вектор тяги двигуна $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$. Нехай модуль тяги пропорційний з коефіцієнтом C швидкості зменшення маси $u_3(t)$. Тоді горизонтальна складова сили, що діє на ракету, дорівнює $Cu_3(t)u_1(t)$, а вертикальна складова сили дорівнює $Cu_3(t)u_2(t) - m(t)g$.

Система диференціальних рівнянь, що описує зміну вектора положення ракети, має вигляд

$$x'(t) = v_1(t), \quad y'(t) = v_2(t),$$
$$v_1'(t) = \frac{C}{m}u_3(t)u_1(t), \quad v_2'(t) = \frac{C}{m}u_3(t)u_2(t) - g, \quad m'(t) = -u_3(t).$$

Компоненти вектора керування $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ задовольняють обмеження, зумовлені тим, що вектор $(u_1(t), u_2(t))$ має одиничну довжину, а тяга двигуна не перевищує максимального значення $Cu_3^{\max}$; $0 \le Cu_3(t) \le Cu_3^{\max}$. Тому множина U допустимих значень вектора (u_1, u_2, u_3) у просторі R^3 визначається співвідношенням

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1, \quad 0 \le u_3(t) \le u_3^{\max}.$$

Ракету потрібно перевести з відомого положення в деяке положення на висоті y_1, використавши задану кількість пального M, так, щоб горизонтальна дальність польоту була максимальною. Отже, потрібно визначити керування $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \in U$, $t_0 \le t \le t_1$, яке переведе ракету з положення $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ у положення $y(t_1) = y_1$, $m(t_1) = m_1 = m_0 - M$ таким чином, щоб функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} v_1(t)\,dt$$

досяг максимального значення.

4. **Задача виведення штучного супутника Землі на кругову орбіту**. Будемо вважати, що ракета-носій рухається в одній площині з фіксованою системою координат. Як і в попередній за-

дачі, можна записати рівняння руху ракети:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= v_1(t), \quad y'(t) = v_2(t),\\
v_1'(t) &= \frac{\varphi_1(t) + u_1(t)\cos(u_2(t)}{m(t)},\\
v_2'(t) &= \frac{\varphi_2(t) + u_1(t)\sin(u_2(t)}{m(t)},\\
m'(t) &= -F(u_1(t)),
\end{aligned}
$$

де $x(t), y(t)$ — координати положення ракети; $v_1(t)$, $v_2(t)$ — компоненти вектора швидкості ракети; $m(t)$ — маса ракети; $u_1(t)$ — тяга двигуна ракети; $u_2(t)$ — кут між напрямком тяги та віссю OX; $F(u_1)$ — швидкість зменшення маси ракети; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — проекції на осі OX, OY інших сил, що діють на ракету (сила тяжіння, опору повітря тощо). Вважатимемо, що відоме початкове положення ракети $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ у момент t_0. Позначимо через t_1 момент виходу ракети-носія на кругову орбіту радіуса R. У цей момент повинні виконуватися умови

$$
\begin{aligned}
x^2(t_1) + y^2(t_1) &= R^2,\\
v_1(t_1)x(t_1) + v_2(t_1)y(t_1) &= 0,\\
v_1^2(t_1) + v_2^2(t_1) &= v_R^2,
\end{aligned}
\tag{9.1}
$$

де v_R^2 — швидкість руху супутника по орбіті радіуса R. Перша умова означає, що ракета у момент t_1 перебуває на колі радіуса R. За другої умови вектор швидкості ракети $\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))$ і вектор положення ракети $(x(t_1), y(t_1))$ в момент t_1 ортогональні. Тобто швидкість ракети спрямована по дотичній до орбіти. Третя умова означає, що при вимиканні ракети-носія в момент t_1 рух буде продовжуватися по орбіті радіуса R.

Вектор керування $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ повинен задовольняти обмеження

$$
0 \le u_1(t) \le u_1^{\max}, \quad 0 \le u_2(t) \le 2\pi, \tag{9.2}
$$

де $u_1^{\max}$ — найбільша можлива тяга, яку може розвинути двигун ракети-носія. Витрати пального за проміжок часу $t_1 - t_0$ будуть визначатися інтегралом

$$J(\vec{u}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(u_1(t))\,dt. \tag{9.3}$$

Таким чином, мета керування запуском супутника — перевести ракету-носій із початкового положення $(x_0, y_0, v_{10}, v_{20}, m_0)$ у положення (9.1) так, щоб вектор керування $\vec{u}(t)$ задовольняв умови (9.2) і інтеграл (9.3) набував найменшого значення.

5. **Задача про м'яку посадку космічного апарата на поверхню Місяця з мінімальними витратами пального**. Для спрощення математичної моделі прослідкуємо тільки за вертикальними компонентами вектора положення і швидкості космічного апарата, вважаючи, що в початковий момент він був недалеко від поверхні Місяця і можна вважати гравітаційне прискорення Місяця g_M сталим під час спускання. Положення апарата в момент часу t визначається вектором $(h(t), v(t), m(t))$, де $h(t)$ — висота, $v(t)$ — швидкість, $m(t)$ — маса апарата. Керування $u(t)$ — це вертикальна складова тяги двигуна, яка спрямована до поверхні Місяця і зменшує вертикальну швидкість апарата. Рівняння руху мають вигляд

$$h'(t) = v(t), \quad v'(t) = -g_M + u(t)m^{-1}(t), \quad m'(t) = -Cu(t).$$

Вважатимемо, що витрати маси апарата пропорційні значенню тяги з коефіцієнтом C.

Якщо h_0, v_0 — початкові висота і швидкість апарата в момент t_0, F — початковий запас пального, M — маса апарата без пального, t_1 — момент посадки, то граничні умови мають такий вигляд:

$$h(t_0) = h_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad m(t_0) = F + M, \tag{9.4}$$

$$h(t_1) = 0, \quad v(t_1) = 0. \tag{9.5}$$

Запис (9.5) є умови "м'якості" посадки. За них апарат досягає поверхні з нульовою вертикальною швидкістю. Якщо $u^{\max}$ — найбільша можлива тяга, то керуюча величина $u(t)$ на проміжку $t_0 \le t \le t_1$ повинна задовольняти умову

$$0 \le u(t) \le u^{\max}. \tag{9.6}$$

Отже, задача зводиться до визначення керування $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, що задовольняє обмеження (9.6), яке забезпечує м'яку посадку на поверхню Місяця в момент t_1 і для якого величина $m(t_1)$ набуває максимального значення.

9.2. Формалізація задачі оптимального керування

Основним елементом будь-якої задачі оптимального керування є керований об'єкт (керована система). Його положення в момент t описується вектором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$. Змінні $x_1, \dots, x_n$ називаються фазовими змінними, вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ — фазовим вектором або положенням об'єкта. Множина всіх можливих фазових векторів у $\mathbb{R}^n$ називається *фазовим простором.* Керований об'єкт має керуючі пристрої, положення яких у кожний момент часу t визначається вектором $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, що називається *вектором керування об'єкта.* Множина всіх можливих значень вектора керування в реальних об'єктах — це власна підмножина простору $\mathbb{R}^r$. Як правило, множина U замкнута й обмежена, оскільки в реальних об'єктах керування $u(t)$ не можуть набувати будь-яких значень, але можуть набувати своїх "крайніх" значень.

При математичному описі задач керування необхідно задавати допустимий характер зміни керуючого вектора. Дослідження найпростіших задач свідчить, що вимагати неперервності керування недоцільно. Більш природно вважати керуючий процес кусково-неперервним, тобто керування $u(t)$ можуть мати скінченну кількість точок розриву першого роду.

Закон руху об'єкта визначається диференціальним рівнянням

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{9.7}$$

де $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$.

Векторнозначна функція $\varphi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)$ неперервна і має неперервні похідні по $t, x_1, \dots, x_n$. Виконанням цих умов забезпечується існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння (9.7) із початковою умовою $x(t_0) = x_0$ при вибраному допустимому керуванні $u(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$. Тобто еволюція

$x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, об'єкта однозначно визначається вибором допустимого керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Розв'язок $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, рівняння (9.7) називається *фазовою траєкторією керованного об'єкта*, а пара $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, де $x(t)$ — траєкторія, що відповідає $u(t)$, називається *керованим процесом.* Керований процес $(x(t), u(t))$ називається допустимим, якщо задовольняє граничні умови.

Мета керування — перевести керований об'єкт із початкового положення $x(t_0) \in S_0 \subset \mathbb{R}^n$ у деяку множину $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ в момент $t_1\colon\ x(t_1) \in S_1$. Як правило, існує багато керувань $u(t)$ реальними керованими об'єктами. Тому виникає питання про найкраще, або оптимальне керування. Для цього необхідно визначити критерій якості або оптимальності керування, який дозволяє порівняти різні способи керування і вибрати найкращий (оптимальний) з них.

Критерій оптимальності $J(x(\cdot), u(\cdot))$ — це функціонал, визначений на множині допустимих керованих процесів $(x(t), u(t))$, де $u(t)$ — допустиме керування, а $x(t)$ — відповідна траєкторія. Оскільки функціонал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ набуває числових значень, то кожному керованому процесу $(x(t), u(t))$ відповідає число, за яким і судять про якість керування. Задача оптимального керування полягає в тому, щоб визначити допустиме керування $\hat{u}(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1]$, за якого фазова траєкторія задовольняє граничні умови $\hat{x}(t_0) \in S_0$, $\hat{x}(t_1) \in S_1$ і критерій оптимальності досягає на керованому процесі $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, екстремального значення. Залежно від вигляду критерію оптимальності та граничних умов розрізняють такі задачі оптимального керування.

Задача Лагранжа. Критерій оптимальності має вигляд

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf .$$

Функція $f\colon\ \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^1$ називається *інтегрантом.* Вважається, що вона неперервна і неперервно диференційовна за змінними t, x.

Задача Майєра. Функціонал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ має вигляд

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \Psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf .$$

Такий функціонал називається *термінальним.* Функція $\Psi\colon \mathbb{R}^1\times$ $\times\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ неперервна і неперервно диференційовна за всіма аргументами.

Задача Больца. Функціонал $J(x(\cdot), u(\cdot))$ має і термінальну і інтегральну частини

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \Psi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \inf .$$

Функції $f(t, x, u)$, $\Psi(t_0, x_0, t_1, x_1)$ мають такі самі властивості, як і в задачах Лагранжа та Майєра.

Якщо у задачі Больца $f \equiv 0$, то дістанемо задачу Майєра, якщо ж $\Psi \equiv 0$ — то задачу Лагранжа.

Якщо в задачі Лагранжа $f = 1$, то критерій оптимальності — це час $t_1 - t_0$ переходу об'єкта з початкового положення в кінцеве. Оптимальне керування забезпечить мінімізацію часу, витраченого на перехід. Така *задача* називається задачею *оптимальної швидкодії.*

Якщо множини S_0, S_1 початкових і кінцевих положень керованого об'єкта не залежать від моментів часу t_0, t_1 і мають лише одну точку $S_0 = \{x_0\}$, $S_1 = \{x_1\}$, то *задача* оптимального керування називається задачею з *фіксованими*, *або закріпленими кінцями траєкторії.*

Якщо множина S_0 (множина S_1) збігається з усім простором $\mathbb{R}^n$, то маємо задачу з вільним лівим (правим) кінцем траєкторії.

Якщо множина S_0 (або S_1) — це деякий підпростір простору $\mathbb{R}^n$ розмірності меншої, ніж n, то лівий (правий) кінець траєкторії називається рухомим.

У задачах оптимального керування можуть зустрічатися ситуації, коли моменти часу t_0, t_1 не фіксовані. Тоді інтервал $[t_0, t_1]$ необхідно включити в означення допустимого керованого процесу і розглядати керовані процеси $(x(t),\, u(t), t_0, t_1)$.

Допустимий керований процес $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ називається оптимальним, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якого іншого допустимого керованого процесу $(x(t), u(t), t_0, t_1)$, який задовольняє умови $|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon$, $\|\hat{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1] \cap [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, виконується нерівність

$$J(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \le J(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1).$$

Порівняно із задачею Лагранжа тут не вимагається близькість похідних $x'(t)$, $\hat{x}'(t)$. У класичному варіаційному численні це відповідає переходу від слабкого до сильного екстремуму.

Задачею оптимального керування (у формі Понтрягіна) називають таку екстремальну задачу в просторі $KC^1(\Delta,\mathbb{R}^n)\times$ $\times KC(\Delta,\mathbb{R}^r)\times\mathbb{R}^2$:

$$B(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))\,dt+$$
$$+\Psi_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to\inf; \tag{9.8}$$
$$x'(t)=\varphi(t,x(t),u(t)),\quad t\in T; \tag{9.9}$$
$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))\,dt+$$
$$+\Psi_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=0,\quad i=\overline{1,m}; \tag{9.10}$$
$$B_j(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} f_j(t,x(t),u(t))\,dt+$$
$$+\Psi_j(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\le 0,\ j=\overline{m+1,s}; \tag{9.11}$$
$$u(t)\in U,\quad t\in\Delta, \tag{9.12}$$

де $T\subset\Delta$ – множина точок неперервності керування $u(t)$; Δ — заданий відрізок числової прямої $\mathbb{R}^1$; $x(\cdot)\in KC^1(\Delta,\mathbb{R}^n)$; $u(\cdot)\in KC(\Delta,\mathbb{R}^r)$; $t_0,t_1\in\mathrm{int}\Delta$; $f_i\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$ — функції $n+r+1$ змінних; $\Psi_i\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — функції $2n+2$ змінних; $\varphi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^n$ — вектор-функція $n+r+1$ змінних; U — задана підмножина простору $\mathbb{R}^r$. Вектор-функція $x(\cdot)$ — це фазова змінна (або траєкторія), $u(\cdot)$ — керування. Рівняння (9.9) називається *диференціальним зв'язком.* Це рівняння повинно справджуватися в усіх точках неперервності $T\subset\Delta$ керування $u(t)$. Елемент $(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)$ простору $KC^1(\Delta,\mathbb{R}^n)\times KC(\Delta,\mathbb{R}^r)\times\mathbb{R}^2$, який задовольняє всі умови та обмеження задачі, називається *допустимим керованим процесом.*

Допустимий керований процес $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ називається (локально) оптимальним, якщо існує число $\varepsilon>0$ таке, що для будь-якого допустимого керованого процесу $(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1)$, який задовольняє умову

$$\|(x(\cdot),t_0,t_1)-(\hat{x}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)\|_{C(\Delta,R^n)\times R^2}<\varepsilon,$$

виконується нерівність $B(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \geq B(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$.

Функцією Лагранжа екстремальної задачі (9.8)–(9.12) називається функція

$$\mathcal{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1, p(\cdot), \lambda, \lambda_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), u(t))\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad (9.13)$$

де $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s$,

$$L = L(t, x(t), x'(t), u(t)) = \\ = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)) + p(t)(x'(t) - \varphi(t, x(t), u(t))), \quad (9.14)$$

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j \Psi_j(t_0, x(t_0), x_1, x(t_1)). \quad (9.15)$$

Функція $p(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Числа λ_i, $i = 0, 1, \ldots, s$, та функція $p(\cdot)$ називаються множниками Лагранжа задачі (9.8)–(9.12), функція $L = L(t, x(t), x'(t), u(t))$ — лагранжіаном, а функція $l = l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ — термінантом. Функцію

$$H(t, x, u, p) = p(t)\varphi(t, x(t), u(t)) - \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x(t), u(t)). \quad (9.16)$$

називають функцією Понтрягіна. Будемо надалі користуватися такими позначеннями:

$$\hat{L}_x(t) = L_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \hat{u}(t)), \quad \hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)),$$
$$\hat{f}_x(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad \hat{l}_{x_k} = l_{x_k}(\hat{t}_0, \hat{x}(t_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)), \quad k = 0, 1.$$

Теорема 9.1 (принцип максимуму Понтрягіна). *Нехай $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ — оптимальний керований процес у задачі оптимального керування (9.8)–(9.12), у якій функції $\varphi(t, x, u)$, $f_j(t, x, u), j = 0, 1, \ldots, s$, та їхні частинні похідні по x неперервні на множині $V \times U$, де V — окіл множини $\{(t, \hat{x}(t))\colon\ t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]\}$, а*

функції $\psi_j(t_0, x_0, t_1, x_1)$, $j = 0, \ldots, s$, *неперервно диференційовні в околі точки* $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$. *Тоді існують множники Лагранжа* λ_0, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $p(\cdot) \in KC^1([\hat{t}_0, \hat{t}_1], R^n)$, які не дорівнюють нулю одночасно і задовольняють умови:
1) стаціонарності по x (рівняння Ейлера лагранжіана L)

$$\hat{L}_x(t) = \frac{d}{dx}\hat{L}_{x'}(t) \Longleftrightarrow p'(t) = \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t),$$

де

$$f(t, x, u) = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j(t, x, u);$$

2) трансверсальності по x

$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0} \Longleftrightarrow p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0},$$
$$\hat{L}_{x'}(\hat{t}_1) = \hat{l}_{x_0} \Longleftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1};$$

3) оптимальності по u (принцип мінімуму в лагранжевій формі)

$$\min_{u \in U} \hat{L}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), u) = \hat{L}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \hat{u}(t)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \min_{u \in U} [f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u)] =$$
$$= [f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))] \quad \forall t \in T$$

або принцип максимуму у формі Гамільтона (Понтрягіна)

$$\max_{u \in U} H(t, \hat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \max_{u \in U} [p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u) - f(t, \hat{x}(t), u)] =$$
$$= p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall t \in T,$$

де $H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t))$ — функція Понтрягіна (9.16);
4) стаціонарності по t_0, t_1 (тільки тоді, коли границі t_0, t_1 інтервалу $[t_0, t_1]$ рухомі)

$$\hat{\mathcal{L}}_{t_0} = 0 \Longleftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x_0}\hat{x}'(\hat{t}_0) = 0,$$
$$\hat{\mathcal{L}}_{t_1} = 0 \Longleftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x_1}\hat{x}'(\hat{t}_1) = 0;$$

5) доповнювальної нежорсткості

$$\lambda_i B_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{T}_1) = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

6) невід'ємності $\lambda_j \geq 0, j = \overline{0, m}$.

9.3. Розв'язування задач оптимального керування

Приклад 9.1. Дослідити на екстремум функціонал задачі про оптимальну швидкодію

$$T \to \inf, \quad mx'' = u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$
$$x(T) = 0, \quad x'(T) = 0.$$

Розв'язання. За допомогою заміни $x = Ay + B(t-T)^2$ задачу можна подати у вигляді

$$T \to \inf, \quad y'' = u, \quad |u| \leq 1, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0,$$
$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0.$$

Це задача оптимального керування

$$T = \int_0^T 1\, dt \to \inf, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = u, \quad u \in [-1, 1],$$
$$x_1(0) = x_0, \quad x_2(0) = v_0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0,$$

де $x_1 = y$, $x_2 = x_1' = y'$, $x_0 = y_0$.

Застосуємо принцип максимуму Понтрягіна.

1. Побудуємо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^T \left[p_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + p_2(t)(x_2'(t) - u(t))\right] dt + \lambda_0 T +$$
$$+ \lambda_1(x_1(0) - x_0) + \lambda_2(x_2(0) - v_0) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T).$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера лагранжіана

$$L = p_1(x_1' - x_2) + p_2(x_2' - u)$$

будуть такими —

$$L_{x_i} = \frac{d}{dt} L_{x_i'},\ i = 1, 2 \Longleftrightarrow p_1' = 0, \quad p_2' = -p_1 \Longrightarrow p_2(t) = Ct + C_1;$$

б) трансверсальності по x

$$p_1(0) = \lambda_1, \quad p_2(0) = \lambda_2, \quad p_1(T) = -\lambda_3, \quad p_2(T) = -\lambda_4;$$

в) оптимальності по u (доданки, що не залежать від (u) не виписуємо)

$$\min_{u \in [-1,1]} [-p_2(t)u] = -p_2(t)\hat{u}(t) \Longrightarrow \hat{u}(t) = \operatorname{sign}(p_2(t))$$

при $p_2(t) \neq 0$;

г) стаціонарності по T

$$\mathcal{L}_T = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 + \lambda_3 x_1'(T) + \lambda_4 x_2'(T) = 0.$$

Враховуючи, що $x_2'(T) = 0$, $\lambda_4 = -p_2(T)$, $p_2(T)\hat{u}(T) = |p_2(T)|$, дістанемо

$$\mathcal{L}_T = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 = |p_2(T)|.$$

3. Нехай $\lambda_0 = 0$. Тоді з умови стаціонарності г) випливає, що $p_2(T) = 0$. Функція $p_2(t)$ не може бути тотожним нулем, оскільки всі множники Лагранжа були б нулями. Отже, з умови а) виводимо $p_2 = C(t - T)$, а з умови в) $\hat{u}(t) = 1$ або $\hat{u}(t) = -1$. Якщо $\hat{u}(t) = 1$, то $x_2(t) = t - T$, $x_1(t) = (t - T)^2/2$, $v_0^2/2 = x_0$. Таким чином, за допомогою керування $\hat{u}(t) = 1$ в точку $(0, 0)$ можна переміститися лише з початкових точок (x_0, v_0), які задовольняють співвідношення $x_0 = v_0^2/2$, $v_0 < 0$, а за допомогою керування $\hat{u}(t) = -1$ в точку $(0, 0)$ можна переміститися лише з початкових точок (x_0, v_0) таких, що $x_0 = -v_0^2/2$, $v_0 > 0$.

Нехай тепер $\lambda_0 = 1$. Тоді з умови г) дістанемо $|p_2(T)| = 1$. Отже, умову задовольняють дві функції

$$p_2^+(t) = C(t - T) + 1, \quad p_2^-(t) = C(t - T) - 1.$$

Відповідні керування мають вигляд

$$\hat{u}^+(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ +1, & \tau \leq t \leq T, \end{cases} \qquad \hat{u}^-(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -1, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Зобразимо траєкторію руху у фазовій площині (x_1, x_2). При тих значеннях t, за яких $\hat{u}(t) = 1$, виконується

$$x_2' = 1 \Longrightarrow x_1' = x_2 = t + C' \Longrightarrow x_1 = t^2/2 + C't + C'' = x_2^2/2 + C.$$

Фазова траєкторія, що відповідає таким значенням t, — це частина параболи $x_1 = x_2^2/2 + C$. Напрямок руху по ній визначається з умови зростання x_2, оскільки $x_2' = 1$. Аналогічно, тим значенням t, для яких $\hat{u}(t) = -1$ у фазовій площині відповідає парабола $x_1 = -x_2^2/2 + C$, а напрямок руху визначається з умови спадання x_2, оскільки $x_2' = -1$ (рис. 11).

Отже, фазові траєкторії руху в площині (x_1, x_2) — це частини парабол $x_1 = \pm x_2^2/2 + C$. Лінія $x_1 = -x_2|x_2|/2$ розділяє площину на дві частини. Якщо початкова точка (x_0, v_0) лежить ліворуч від цієї лінії, то за допомогою керування $\hat{u}(t) = 1$, $0 \le t \le \tau$, точка переміститься по параболі $x_1 = x_2^2/2 + C$ до перетину з параболою $x_1 = -x_2^2/2$ в момент $t = \tau$. У цей момент відбувається зміна керування $\hat{u} = +1$ на $\hat{u} = -1$. Далі точка рухається по параболі $x_1 = -x_2^2/2$ в точку $(0, 0)$. Точка, що лежить праворуч від лінії $x_1 = -x_2|x_2|/2$, під дією керування $\hat{u}(t) = -1$, $0 \le t \le \tau$, рухається по параболі $x_1 = -x_2^2/2 + C$ до перетину з лінією в момент $t = \tau$, а потім — по параболі $x_1 = x_2^2/2$ під дією керування $\hat{u}(t) = +1$.
Відповідь. Оптимальний керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ визначається співвідношеннями

$$\hat{u}^+(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le \tau, \\ +1, & \tau \le t \le T, \end{cases} \quad \hat{x}^+(t) = \begin{cases} -t^2/2 + C_1 t + C_2, & 0 \le t \le \tau, \\ (t - T)^2/2, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

$$\hat{u}^-(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \tau, \\ -1, & \tau \le t \le T, \end{cases} \quad \hat{x}^-(t) = \begin{cases} t^2/2 + C_1 t + C_2, & 0 \le t \le \tau, \\ -(t - T)^2/2, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

де τ, C_1, C_2 визначаються початковими умовами x_0, v_0. $\triangle$

Приклад 9.2. Дослідити на екстремум функціонал задачі про м'яку посадку на поверхню Місяця:

$$F + M - m(T) \to \inf, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = -g_L + u/m, \quad m' = -u,$$
$$x_1(0) = h_0, \quad x_2(0) = v_0, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad 0 \le u \le U,$$

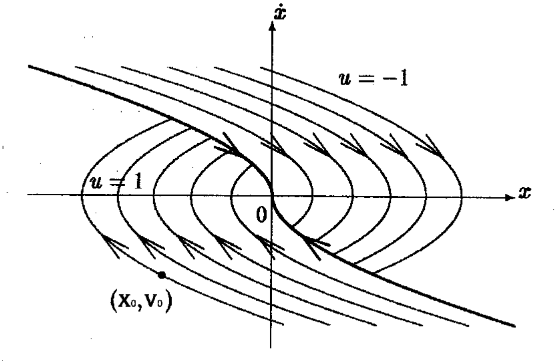


Рис. 11: Задача про оптимальну швидкодію

де $x_1(t)=h(t)$, $x_2(t)=v(t)=x_1(t)$, $t_0=0$ — початок спуску; T — кінець спуску (момент посадки).
Розв'язання. Це задача оптимального керування (задача Майєра). Застосуємо принцип максимуму Понтрягіна.

1. Побудуємо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L}=\int_0^T [p_1(t)(x_1'(t)-x_2(t))+p_2(t)(x_2'(t)+g_L-u(t)/m(t))+$$
$$+p_3(t)(m'(t)+u(t))]\,dt+\lambda_0(F+M-m(T))+\mu_1 x_1(T)+\mu_2 x_2(T).$$

Тут немає граничних умов на лівому кінці, оскільки вони не впливають на розв'язок задачі.

2. Запишемо необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера

$$-p_1'=0,\quad -p_2'-p_1=0,\quad -p_3'+p_2u/m^2=0;$$

б) трансверсальності по x

$$p_1(T)=-\mu_1,\quad p_2(T)=-\mu_2,\quad p_3(T)=\lambda_0;$$

в) оптимальності по u

$$\min_{0\le u\le U}[p_3(t)u-p_2(t)u/m(t)]=p_3(t)\hat{u}(t)-p_2(t)\hat{u}(t)/m(t);$$

г) стаціонарності по T

$$-\lambda_0 m'(T)+\mu_1 x_1'(T)=0 \iff \lambda_0\hat{u}(T)+p_2(T)(g_M-\hat{u}(T)/m(T))=0.$$

За умови а) дістанемо, що $p_1(t)=P$, $P=\text{const}$, $p_2(t)=-Pt+Q$, $Q=$const.

Позначимо $\Psi(t)=-p_3(t)+p_2(t)/m(t)$. Тоді з умови а) випливає, що $\Psi'(t)=-P/m(t)$.

З умови стаціонарності по T дістаємо $\Psi(T)\hat{u}(T)=p_2(T)g_M$, а з умови оптимальності по (u) отримаємо

$$\hat{u}(t)=\begin{cases}0, & \Psi(t)<0,\\ U, & \Psi(t)\geq 0.\end{cases}$$

3. Якщо $P=0$, то $\Psi=\Psi_0=\text{const}$, де $\Psi_0\neq 0$. Інакше $p_2=0$ і всі множники Лагранжа стають нулями. Тому $\hat{u}(t)\equiv 0$ або $\hat{u}(t)\equiv U$. Якщо ж $P\neq 0$, то функція Ψ строго монотонна і має перемикання з $\hat{u}=U$ на $\hat{u}=0$ або, навпаки, з $\hat{u}=0$ на $\hat{u}=U$. Перший випадок неможливий із технічних причин. Залишаються дві можливості: або рухатися з керуванням $\hat{u}(t)\equiv U$, або робити перемикання з нуля на U. Нехай τ — момент перемикання. Рух апарата при $t\leq\tau$ описується рівнянням вільного падіння $x_1=h_0+v_0t-g_Mt^2/2$, $x_2=v_0-g_Mt$, $m(t)\equiv m_0$. У фазовій площині (x_1,x_2) ці співвідношення визначають параболу $x_1=h_0+v_0(v_0-x_2)/g_M-(v_0-x_2)^2/2g_M$. Рух апарата на відрізку часу $[\tau,T]$ визначається такими рівняннями з початковими умовами

$$x_1'=x_2,\quad x_2'=-g_M+u/m,\quad m'=-U,$$

$$x_1(\tau)=h_1,\quad x_2(\tau)=v_1,\quad m(\tau)=F+M=m_0.$$

Розв'язок відповідної задачі Коші має вигляд $(\tau+s=t)$:

$$x_1(\tau+s)=h_1+v_1s-\frac{g_Ls^2}{2}+s-\frac{m_0}{U}\left(1-\frac{Us}{m_0}\right)\ln\left(1-\frac{Us}{m_0}\right),$$

$$x_2(\tau+s)=v_1-g_Ls-\ln\left(1-\frac{Us}{m_0}\right),\quad m=m_0-Us.$$

Множина точок (h_1, v_1), з яких можна перейти в початок координат під час роботи двигуна на повну потужність, задається в параметричній формі рівняннями $x_1(s) = x_2(s) = 0$. Вилучаючи з них параметр s, дістанемо криву $\Psi(h_0, v_0)$.
Відповідь. Оптимальне керування

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \tau, \\ U, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

де τ — перший додатний корінь рівняння

$$\Psi(h_0 + v_0\tau - \frac{g_L\tau^2}{2}; v_0 - g_L\tau) = 0. \tag{9.17}$$

Отже, на проміжку часу $[0, \tau]$ апарат рухається в режимі вільного падіння, а на проміжку $[\tau, T]$ двигун працює на повну потужність. Якщо при заданих (h_0, v_0) рівняння не має розв'язків, то м'яка посадка неможлива.

Приклад 9.3. Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_0^4 ((x')^2 + x)\, dt \to \inf, \quad |x'| \le 1,\ x(0) = 0.$$

Розв'язання. 1. Зведемо задачу до задачі оптимального керування у формі Понтрягіна:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^4 (u^2 + x)\, dt \to \inf, \quad x' = u, u \in [-1, 1], x(0) = 0.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^4 [\lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u)]\, dt + \lambda x(0).$$

3. Запишемо необхідні умови екстремуму:
а) рівняння Ейлера лагранжіана

$$L = \lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u), \quad p' = \lambda_0,$$

б) трансверсальності по x

$$L_{x'}(t_k) = (-1)^k l_{x(t_k)}, \quad k = 0, 1 \Longleftrightarrow p(0) = \lambda, \quad p(4) = 0,$$

в) оптимальності по u

$$\min_{-1\le u\le 1}[\lambda_0 u^2 - p(t)u] = \lambda_0 \hat{u}^2(t) - p(t)\hat{u}(t).$$

4. Нехай $\lambda_0 = 0$. Тоді з умови а) випливає $p' = 0$, а з умови б) $p = \lambda = 0$. Отже, усі множники Лагранжа стали нулями, що суперечить принципу максимуму. Нехай тепер $\lambda_0 = 1$. Тоді рівняння Ейлера має вигляд $p' = 1$. Таке рівняння й умови трансверсальності задовольняє функція $p = t - 4$. З умови оптимальності по u дістаємо

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} p(t), & |p(t)/2| > 1; \\ p(t)/2, & |p(t)/2| \le 1. \end{cases}$$

Отже,

$$\hat{x}'(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2; \\ (t-4)/2, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

Користуючись початковою умовою $x(0) = 0$, визначаємо неперервну функцію

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2; \\ t^2/4 - 2t + 1, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

5. Покажемо, що функція $\hat{x}(t)$ дає абсолютний мінімум. Нехай функція $h(\cdot) \in KC^1([0,4])$ така, що $\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)$ — допустима функція. Інтегруючи частинами та враховуючи, що $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}'(t) = \frac{t-4}{2}$ при $2 \le t \le 4$, дістаємо

$$\begin{aligned} J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) &= \\ &= \int_0^4 ((\hat{x}' + h')^2 + \hat{x} + h)\,dt - \int_0^4 ((\hat{x}')^2 + \hat{x})\,dt = \\ &= \int_0^4 2\hat{x}'h'\,dt + \int_0^4 h\,dt + \int_0^4 (h')^2\,dt \ge 2\int_0^4 \hat{x}'\,dh + \\ &+ \int_0^4 h\,dt = 2\hat{x}'h\Big|_0^4 + \int_0^4 (-2\hat{x}'' + 1)h\,dt = \int_0^2 h\,dt \ge 0 \end{aligned}$$

внаслідок того, що $h(t) \ge 0$ при $t \in [0,2]$, оскільки $h(0) = 0$ і $h'(t) > 0$ при $t \in [0,2]$.

Відповідь. Оптимальний керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ визначається співвідношеннями

$$\hat{x}(\cdot) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2, \\ t^2/4 - 2t + 1, & 2 \le t \le 4; \end{cases} \quad \hat{u}(\cdot) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 2, \\ (t-4)/2, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

Приклад 9.4. Дослідити на екстремум функціонал

$$\int_0^{T_0} |x'(t)|\, dt \to \inf, \quad x'(t) \ge A, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = b, \quad A < 0.$$

Розв'язання. 1. Зведемо задачу до задачі оптимального керування у формі Понтрягіна

$$\int_0^{T_0} |u(t)|\, dt \to \inf, \quad x' = u, \quad u \ge A, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = b.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{T_0} (\lambda_0 |u(t)| + p(t)(x'(t) - u(t))\, dt + \mu_1 x(0) + \mu_2 (x(T_0) - b).$$

3. Запишемо необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера лагранжіана $L = \lambda_0 u + p(x' - u)$ —

$$p' = 0 \Longrightarrow p(t) = p_0 = \text{const};$$

б) трансверсальності по x

$$p(0) = \mu_1, \quad p(T_0) = -\mu_2;$$

в) оптимальності по u

$$\min_{u \ge A} [\lambda_0 |u| - p(t) u] = \lambda_0 |\hat{u}(t)| - p(\hat{t}) u(t).$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $p_0 \ne 0$ (інакше всі множники Лагранжа — нулі). Нехай $p_0 > 0$. Тоді $\min\limits_{u \ge A} (-p_0 u) = -\infty$ і умова оптимальності по u не виконується. Якщо $p_0 < 0$, то з умови трансверсальності б) випливає $u \equiv A$, $x(t) = At$. Допустима екстремаль можлива лише при $b = AT_0$. Візьмемо $\lambda_0 = 1$. Умова оптимальності по u не виконується при $p_0 > 1$, а при $p_0 = 1$ ця умова виконується

за будь-якої невід'ємної функції $\hat{u}(\cdot)$. Якщо $-1 < p_0 < 1$, то $\hat{u} \equiv 0$, якщо $p_0 = -1$, то $\hat{u}(\cdot)$ — будь-яка функція, що задовольняє нерівність $A \leq \hat{u}(t) \leq 0$; якщо $p_0 < 1$, то $\hat{u} = A$.

5. Зі співвідношення

$$\int_0^{T_0} x'(t)\, dt = b$$

виводимо

$$|b| \leq \int_0^{T_0} |x'(t)|\, dt.$$

Тут рівність досягається на будь-якій допустимій екстремалі. Це означає, що будь-яка допустима екстремаль дає абсолютний мінімум задачі.

Відповідь. Якщо $b < AT_0$, то допустимих функцій немає. Якщо $b = AT_0$, то є одна допустима функція — екстремаль $\hat{x}(t) = At$. Якщо $AT_0 < b < 0$, то допустима екстремаль — будь-яка монотонно спадна допустима функція. Якщо $b = 0$, то єдина допустима екстремаль $\hat{x} \equiv 0$. Якщо $b > 0$, то будь-яка монотонно зростаюча функція є допустима екстремаль. Кожна допустима екстремаль дає абсолютний мінімум задачі.

9.4. Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачі оптимального керування.

9.1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin(t)\, dt \to \text{extr}; \quad |x'| \leq 1,\ x(-\pi) = x(\pi) = 0.$

9.2. $\int\limits_{0}^{7\pi/4} x \sin(t)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(0) = 0.$

9.3. $\int\limits_{0}^{4} ((x')^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(4) = 0.$

9.4. $\int\limits_{0}^{T_0} ((x')^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(0) = 0.$

9.5. $\int\limits_{0}^{T_0} ((x')^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(0) = \xi.$

9.6. $\int\limits_{0}^{T} ((x')^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(0) = \xi.$

9.7. $\int\limits_{0}^{T_0} ((x')^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(T_0) = \xi.$

9.8. $\int\limits_{0}^{T_0} ((x')^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(0) = 0,\ x(T_0) = 0.$

9.9. $\int\limits_{0}^{T} ((x')^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(0) = 0,\ x(T) = \xi.$

9.10. $\int\limits_{0}^{T_0} ((x')^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leq 1,\ x(0) = \xi.$

9.11. $\int\limits_{0}^{1} x\, dt \to \text{extr}, \quad |x''| \leq 2,\ x(0) = x'(0) = 0.$

9.12. $\int\limits_{0}^{1} x\, dt \to \text{extr}, \quad |x''| \leq 2,\ x(1) = x'(1) = 0.$

9.13. $\int\limits_{0}^{1} x\, dt \to \text{extr}, \quad |x''| \leq 2,\ x(0) = x'(1) = 0.$

9.14. $\int\limits_{0}^{2} x\, dt \to \text{extr}, \quad |x''| \leq 2,\ x(0) + x(2) = 0,\ x'(2) = 0.$

9.15. $\int\limits_{0}^{2} x\, dt \to \text{extr}, \quad |x''| \leq 2,\ x(0) + x(2) = 0,\ x'(0) = 0.$

9.16. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad |x''| \le 2,\ x(0)+x(1)=0,\ x'(0)+x'(1)=0.$

9.17. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \text{extr}, \quad |x''| \le 2,\ x(0)=x'(0)=x(2)=0.$

9.18. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \text{extr}, \quad |x''| \le 2,\ x(0)=x'(2)=x(2)=0.$

9.19. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \text{extr}, \quad |x''| \le 2,\ x(0)=x'(0)=x'(2)=0.$

9.20. $\int\limits_0^4 x\,dt \to \text{extr}, \quad |x''| \le 2,\ x(0)+x(4)=0,\ x'(0)=x'(4)=0.$

9.21. $T \to \inf, \quad |x''| \le 2,\ x(-1)=1,\ x(T)=-1,$
$x'(-1)=x'(T)=0.$

9.22. $T \to \inf, \quad |x''| \le 2,\ x(-1)=-1,\ x(T)=1,$
$x'(-1)=x'(T)=0.$

9.23. $T \to \inf, \quad |x''| \le 2,\ x'(0)=x'(T)=0,\ x(0)=1,\ x(T)=3.$

9.24. $T \to \inf, \quad -1 \le x'' \le 3,\ x(0)=1,\ x'(0)=x'(T)=0,$
$x(T)=-1.$

9.25. $T \to \inf, \quad -3 \le x'' \le 1,\ x(0)=3,\ x'(0)=x'(T)=0,$
$x(T)=-5.$

9.26. $T \to \inf, \quad |x''| \le 1,\ x(0)=\xi_1,\ x'(0)=\xi_2,\ x'(T)=0.$

9.27. $T \to \inf, \quad |x''| \le 1,\ x(0)=\xi_1,\ x'(0)=\xi_2,\ x(T)=0.$

9.28. $\int\limits_0^2 |x''|\,dt \to \inf, \quad x'' \ge -2,\ x(0)=0,\ x(2)=-1,\ x'(2)=-2.$

9.29. $\int\limits_0^2 |x''|\,dt \to \inf, \quad x'' \ge -2,\ x(0)=x'(0)=0,\ x(2)=-3.$

9.30. $\int\limits_0^2 |x''|\,dt \to \inf, \quad x'' \ge -2, \quad x(0)=x'(2)=0, \quad x(2)=3.$

9.31. $\int\limits_0^2 |x''|\,dt \to \inf, \quad x'' \le 2,\ x(0)=0, \quad x(2)=1, \quad x'(2)=2.$

9.32. $\int\limits_0^2 |x''|\,dt \to \inf, \quad x'' \le 2,\ x(0)=1,\ x'(0)=-2,\ x(2)=0.$

9.33. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \inf, \quad x'' \le 24,\ x(0)=11, \quad x(1)=x'(1)=0.$

9.34. $\int\limits_0^2 (x'')^2\,dt \to \inf, \quad x'' \geq 6, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x(2) = 17.$

9.35. $\int\limits_0^1 (x'')^2\,dt \to \inf,\ |x''| \leq 1,\ x(0) = x'(0) = 0,\ x(1) = -11/24.$

9.36. $x(2) \to \text{extr}; \quad |x'| \leq 2,\ \int\limits_0^2 (x')^2\,dt = 2, \quad x(0) = 0.$

9.37. $x(T_0) \to \text{extr}; \quad \int\limits_0^{T_0} (x')^2\,dt = 2, \quad |x'| \leq 1, \quad x(0) = 0.$

9.38. $\int\limits_0^1 ((x^2 + (x')^2)/2 + |x'|)\,dt \to \text{extr}; \quad x(1) = \xi.$

9.39. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - xy')\,dt \to \sup, \quad (x')^2 + (y')^2 \leq 1,$

$x(0) = x(T_0), \quad y(0) = y(T_0).$

9.40. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')\,dt \to \sup, \quad (x' - \xi)^2 + y^2 \leq 1,$

$x(0) = x(T_0), \quad y(0) = y(T_0).$

9.41. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')\,dt \to \sup, \quad (x')^2/a^2 + (y')^2/b^2 \leq 1,$

$x(0) = x(T_0), \quad y(0) = y(T_0).$

9.42. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')\,dt \to \sup, \quad |x'| \leq 1,\ |y'| \leq 1,$

$x(0) = x(T_0), \quad y(0) = y(T_0).$

9.43. $\int\limits_0^{T_0} (xy' - yx')\,dt \to \sup, \quad |x'| + |y'| \leq 1, \quad x(0) = x(T_0),$

$y(0) = y(T_0).$

9.44. $\int\limits_0^{T_0} t/(1 + (x')^2)\,dt \to \inf, \quad x' \geq 0, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi.$

9.45. $\int\limits_0^1 x^2\,dt \to \sup, \quad |x'| \leq 1, \quad x(0) = 0.$

10. Метод динамічного програмування

10.1. Принцип оптимальності

Метод динамічного програмування — це досить загальний метод розв'язування задач на екстремум. У його основі лежить спеціальний принцип оптимальності Р. Беллмана. Згідно з цим принципом оптимальне керування у будь-який момент часу не залежить від траєкторії руху об'єкта в минулому і визначається лише положенням об'єкта у даний момент часу та функціоналом якості задачі.

Покажемо докладніше, що означає принцип оптимальності динамічного програмування в задачі оптимального керування

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{10.1}$$

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{10.2}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{10.3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{10.4}$$

Нехай $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, — оптимальний керований процес задачі (10.1)–(10.4). Фіксуємо момент часу $\tau \in (t_0, t_1)$ і розділимо керований процес $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ на дві частини $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $t_0 \le t \le \tau$; $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $\tau \le t \le t_1$. Побудуємо задачу оптимального керування

$$J_\tau(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{\tau}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt + \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{10.5}$$

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad \tau \le t \le t_1; \tag{10.6}$$

$$u(t) \in U, \quad \tau \le t \le t_1, \tag{10.7}$$

$$x(\tau) = \hat{x}(\tau) = y. \tag{10.8}$$

Ця задача відрізняється від задачі (10.1)–(10.4) початковим моментом часу τ та початковим положенням $x(\tau) = \hat{x}(\tau) = y$. Принцип оптимальності означає, що частина $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $\tau \le t \le t_1$, оптимального керованого процесу задачі (10.1)–(10.4) буде оптимальним керованим процесом задачі (10.5)–(10.8).

Обґрунтувати це твердження можна за допомогою методу від супротивного. Припустимо, твердження не вірне. Отже, функціонал $J_\tau(x(\cdot), u(\cdot))$, що визначає критерій оптимальності в задачі (10.5)–(10.8), досягає мінімуму не на керованому процесі $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $\tau \le t \le t_1$, а на іншому керованому процесі $(x^*(t), u^*(t))$, $\tau \le t \le t_1$. Тоді виконується нерівність

$$J_\tau(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \int_\tau^{t_1} f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt + \Psi(\hat{x}(t_1)) \ge$$
$$\ge J_\tau(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) = \int_\tau^{t_1} f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt + \Psi(x^*(t_1)). \quad (10.9)$$

Побудуємо процес керування на проміжку $[t_0, t_1]$ так, щоб на проміжку $[t_0, \tau]$ об'єкт рухався по траєкторії $\hat{x}(t)$, $t_0 \le t \le \tau$, а на проміжку $[\tau, t_1]$ — по траєкторії $x^*(t)$, $\tau \le t \le t_1$. Через нерівність (10.9) відповідний керований процес

$$(x(\cdot), u(\cdot)) = \begin{cases} (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)), & t_0 \le t \le \tau; \\ (x^*(\cdot), u^*(\cdot)), & \tau \le t \le t_1 \end{cases}$$

дає критерію оптимальності $J(x(\cdot), u(\cdot))$ задачі (10.1)–(10.4) менше значення, ніж керований процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, $t_0 \le t \le t_1$. Це суперечить тому, що $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, $t_0 \le t \le t_1$, — оптимальний керований процес задачі (10.1)–(10.4).

Підкреслимо, що принцип оптимальності динамічного програмування означає, що оптимальність зберігає лише прикінцева частина траєкторії, а не її довільна частина.

10.2. Задача оптимальної швидкодії

Нехай траєкторія руху керованого об'єкта описується диференціальним рівнянням

$$x'(t) = \varphi(x(t), u(t)) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x'_k(t) = \varphi_k(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t)), \quad k = \overline{1, n},$$

де функція $\varphi(x, u)$ неперервна і неперервно диференційовна за змінними $x_1, \ldots, x_n$. Задача оптимальної швидкодії полягає в тому, щоб визначити керування $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$, яке переводить керований об'єкт із початкового положення x в момент часу t_0 в положення x_1 за найкоротший відрізок часу.

Припустимо, що виконуються такі вимоги:
1) для будь-якої точки x фазового простору існує оптимальний керований процес $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, що переводить керований об'єкт із положення x у положення x_1 за мінімальний час $B(x)$;
2) функція Беллмана $B(x)$ неперервно диференційовна.

Нехай керований об'єкт, що перебував у положенні x у початковий момент часу t_0 розпочинає рухатись під дією керування $u =$ const. Позначимо через $x(t)$ фазову траєкторію, що описується рівнянням

$$x'(t) = \varphi(x(t), u) \Leftrightarrow x'_k(t) = \varphi_k(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1, \ldots, u_r), k = \overline{1, n}.$$

У момент часу t об'єкт перебуватиме в положенні $x(t)$. Припустимо, що з моменту часу t об'єкт рухається по оптимальній траєкторії і досягає положення x_1. Тоді об'єкт перейде з положення x у положення x_1 за час $B(x(t)) + t - t_0$. Оскільки мінімальний час переходу об'єкта з положення x у положення x_1 дорівнює $B(x) = B(x(t_0))$, то виконується нерівність

$$B(x(t)) + t - t_0 \geq B(x(t_0)).$$

Поділивши обидві частини нерівності на $t - t_0$, дістанемо

$$\frac{B(x(t)) - B(x(t_0))}{t - t_0} \geq -1.$$

Перейдемо у цій нерівності до границі при $t \to t_0$. Отримаємо

$$\frac{d}{dt} B(x) = \langle B'(x), x' \rangle = \sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x) \varphi_k(x, u) \geq -1. \qquad (10.10)$$

Нехай $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ — оптимальний керований процес, що переводить об'єкт із положення x у положення x_1. Рухаючись по оптимальній траєкторії, об'єкт досягає положення $\hat{x}(t)$ у момент часу t, витративши $t - t_0$ часу. Відповідно до принципу оптимальності динамічного програмування частина оптимального керованого процесу $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$, $t \leq \tau \leq t_1$, буде оптимальним керованим процесом у задачі оптимальної швидкодії з початковим положенням $\hat{x}(t)$. Тому

$$B(\hat{x}(t)) + t - t_0 = B(\hat{x}(t_0)) = B(x),$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(\hat{x}(t_0))\varphi_k(\hat{x}(t_0),(\hat{u}(t_0)) = -1. \qquad (10.11)$$

Враховуючи, що $\hat{x}(t_0) = x$, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x)\varphi_k(x,(\hat{u}(t_0)) = -1.$$

Зіставляючи (10.10) та (10.11), переконуємося, що справджується таке твердження.

Теорема 10.1. *Нехай виконуються умови* 1), 2). *Функція Беллмана* $B(x)$ *задачі оптимальної швидкодії задовольняє рівняння*

$$\min_{u\in U}\left[\sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x)\varphi_k(x,u)\right] = \sum_{k=1}^{n} B'_{x_k}(x)\varphi_k(x,\hat{u}(t)) = -1. \qquad (10.12)$$

Це рівняння називається *рівнянням Беллмана* задачі оптимальної швидкодії.

Приклад 10.1. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії

$$T \to \inf, \quad x'(t) = ax(t) + u(t), \quad a > 0,$$
$$|u(t)| \le 1, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0.$$

Розв'язання. Складемо рівняння Беллмана

$$\min_{|u|\le 1}[B'(x)(ax+u)] = B'(x)(ax+\hat{u}(t)) = -1, \quad B(0) = 0.$$

Оскільки

$$\min_{-1\le u\le 1}[B'(x)u] = -|B'(x)|,$$

то його можна записати у вигляді

$$axB'(x) - |B'(x)| = -1, \quad B(0) = 0.$$

Оптимальне керування визначається співвідношенням

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & B'(x) < 0, \\ -1, & B'(x) > 0. \end{cases}$$

Оскільки функція Беллмана $B(x)$ — це мінімальний час переходу з точки x у точку 0, то функція $B(x) > 0$, $x \neq 0$. Вона монотонно зростає при $x > 0$ і монотонно спадає при $x < 0$. Тому $B'(x) > 0$ при $x > 0$ і $B'(x) < 0$ при $x < 0$. Враховуючи ці властивості, рівняння Беллмана можна записати у вигляді

$$B'(x)[ax - 1] = -1, \quad x > 0;$$
$$B'(x)[ax + 1] = -1, \quad x < 0,$$

звідки

$$B(x) = -\frac{1}{a}\ln(1 - a|x|), \quad |x| < 1/a;$$
$$u(t) = -\operatorname{sign} x(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Оптимальну траєкторію визначаємо з рівняння

$$x'(t) = ax(t) - \operatorname{sign} x(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Відповідь. Час T, витрачений на переміщення об'єкта з точки x_0 у точку 0, дорівнює $B(x_0) = -\frac{1}{a}\ln(1 - a|x_0|)$.

10.3. Задачі Майєра, Лагранжа, Больца

Розглянемо задачу оптимального керування Больца

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt + \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{10.13}$$
$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{10.14}$$
$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{10.15}$$
$$x(t_0) = x_0, \tag{10.16}$$

де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, функції $f(t, x, u)$, $\varphi(t, x, u)$, $\Psi(x)$ неперервні за всіма змінними та неперервно диференційовні за змінними x_k, $k = \overline{1, n}$; U — замкнута опукла множина у просторі керувань, моменти часу t_0, t_1 фіксовані і правий кінець траєкторії вільний.

Згідно з принципом оптимальності динамічного програмування побудуємо задачу

$$J_t(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_t^{t_1} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau + \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{10.17}$$

$$x'(\tau) = \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad t \le \tau \le t_1, \tag{10.18}$$

$$u(\tau) \in U, \quad t \le \tau \le t_1, \tag{10.19}$$

$$x(t) = x. \tag{10.20}$$

Припустимо, що виконуються умови:
1) за всіх значень параметрів $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$ задача (10.17)–(10.20) має розв'язок $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$, $t \le \tau \le t_1$, $J_t(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = B(x, t)$;
2) функція Беллмана $B(x, t)$ неперервно диференційовна за всіма змінними.

Покажемо, що $B(x, t)$ задовольняє диференціальне рівняння спеціального вигляду, що називається рівнянням Беллмана задачі (10.13)–(10.16). Візьмемо довільний вектор $u \in U$. За час Δt керування u переведе об'єкт із положення $x(t)$ у положення $x(t+\Delta t, u)$. Побудуємо керування $u^*(\tau)$ на проміжку $[t, t_1]$ згідно з формулою

$$u^*(\tau) = \begin{cases} u, & t \le \tau \le t + \Delta t; \\ v^*(\tau), & t + \Delta t \le \tau \le t_1, \end{cases}$$

де $v^*(\tau)$ — таке керування, що

$$B(x(t + \Delta t, u), t + \Delta t) = J_{t+\Delta t}(x(t + \Delta t, u), u), v^*(\cdot)).$$

Тоді справджується нерівність

$$B(x(t), t) \le J_t(x, u^*(\cdot)) = \\ = B(x(t + \Delta t, u), t + \Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} f(\tau, x(\tau), u)\, d\tau.$$

А оптимальне керування $\hat{u}(\tau)$, $t \le \tau \le t_1$, задовольняє рівняння

$$B(x(t), t) = B(x(t + \Delta t, \hat{u}), t + \Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} f(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))\, d\tau.$$

Поділимо ці співвідношення на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Дістанемо

$$f(t,x,u) + \frac{d}{dt} B(x(t,u),t) \geq 0,$$
$$f(t,x,\hat{u}) + \frac{d}{dt} B(x(t,\hat{u}),t) = 0.$$

Враховуючи рівняння руху та початкові умови, отримаємо

$$f(t,x,u) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,u) + B'_t(x,t) \geq 0,$$
$$f(t,x,\hat{u}) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + B'_t(x,t) = 0.$$

Оскільки множина U замкнута, то ці співвідношення можна записати у вигляді

$$\min_{u \in U} [B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,u) + f(t,x,u)] =$$
$$= B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + f(t,x,\hat{u}(t)) = 0, \qquad (10.21)$$
$$B(x,t_1) = \Psi(x). \qquad (10.22)$$

Гранична умова $B(x,t_1) = \Psi(x)$ є наслідком визначення функції Беллмана. Рівняння (10.21)–(10.22) називається рівнянням Беллмана задачі Больца (10.13) –(10.16).

Теорема 10.2. *Нехай для всіх значень $t \in [t_0,t_1], x \in \mathbb{R}^n$ існує оптимальний розв'язок $(\hat{x}(\tau),\hat{u}(\tau))$ задачі (10.17)–(10.20). Функція Беллмана $B(x,t) = J_t(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ задачі оптимального керування (10.13)–(10.16) задовольняє рівняння в частинних похідних*

$$\min_{u \in U} [B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,u) + f(t,x,u)] =$$
$$= [B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + f(t,x,\hat{u}(t))] = 0 \qquad (10.23)$$

із граничною умовою $B(x,t_1) = \Psi(x)$.

Розглянемо задачу Майєра

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \Psi(x(t_1)) \to \inf, \qquad (10.24)$$
$$x'(t) = \varphi(t,x(t),u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \qquad (10.25)$$
$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \qquad (10.26)$$
$$x(t_0) = x_0. \qquad (10.27)$$

Побудуємо допоміжну задачу оптимального керування

$$J_t(x(\cdot), u(\cdot)) = \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{10.28}$$

$$x'(\tau) = \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad t \le \tau \le t_1, \tag{10.29}$$

$$u(\tau) \in U, \quad t \le \tau \le t_1, \tag{10.30}$$

$$x(t) = x. \tag{10.31}$$

Теорема 10.3. *Нехай для всіх значень $x \in [t_0, t_1]$, $t \in \mathbb{R}^n$ існує оптимальний розв'язок $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$ задачі (10.28)–(10.31). Функція Беллмана $B(x,t) = J_t(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ задачі оптимального керування (10.24)–(10.27) задовольняє рівняння в частинних похідних*

$$\min_{u \in U}[B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,u)] =$$
$$= B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) = 0 \tag{10.32}$$

із граничною умовою $B(x,t_1) = \Psi(x)$.

Застосуємо метод динамічного програмування до задачі Лагранжа

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{10.33}$$

$$x'(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{10.34}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{10.35}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{10.36}$$

Побудуємо допоміжну задачу оптимального керування

$$J_t(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t}^{t_1} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau \to \inf, \tag{10.37}$$

$$x'(\tau) = \varphi(t, x(\tau), u(\tau)), \quad t \le \tau \le t_1, \tag{10.38}$$

$$u(\tau) \in U, \quad t \le \tau \le t_1, \tag{10.39}$$

$$x(t) = x. \tag{10.40}$$

Теорема 10.4. *Нехай для всіх значень $x \in [t_0, t_1]$, $t \in \mathbb{R}^n$ існує оптимальний розв'язок $(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))$ задачі (10.37)–(10.40). Фун-*

кція Беллмана $B(x,t) = J_t(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ задачі оптимального керування (10.33)–(10.36) задовольняє рівняння в частинних похідних

$$\min_{u \in U}[B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,u) + f(t,x,u)] =$$
$$= [B'_t(x,t) + B'_x(x,t)\varphi(t,x,\hat{u}(t)) + f(t,x,\hat{u}(t))] = 0 \qquad (10.41)$$

із граничною умовою $B(x,t_1) = 0$.

Приклад 10.2. Користуючись методом динамічного програмування, розв'язати задачу

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^T u^2(t)\,dt + \lambda x^2(T), \quad \lambda > 0,$$
$$x'(t) = u(t), \quad x(0) = x_0, \quad 0 \le t \le T,$$

де $u(t)$ — кусково-неперервна функція.

Розв'язання. Складемо рівняння Беллмана

$$\min_{u \in \mathbb{R}^1}[B'_x(x,t)u + B'_t(x,t) + u^2] = 0,$$
$$B(x,T) = \lambda x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad 0 \le t \le T.$$

Мінімум у рівнянні Беллмана досягається при $u = -B'_x/2$. Рівняння буде таким:

$$B'_t(x,t) - \frac{1}{4}[B'_x(x,t)]^2 = 0.$$

Будемо шукати функцію $B(x,t)$ у вигляді полінома

$$B(x,t) = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)x^2.$$

Підставимо його у рівняння та граничні умови. Дістанемо такі співвідношення:

$$b'_0(t) + b'_1(t)x + b'_2(t)x^2 - \frac{1}{4}(b_1(t) + 2b_2(t)x)^2 = 0,$$
$$b_0(T) + b_1(T)x + b_2(T)x^2 = \lambda x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, 0 \le t \le T.$$

Порівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x, отримаємо систему рівнянь

$$b_0'(t) - \frac{1}{4}b_1^2(t) = 0, \quad b_1'(t) - b_1(t)b_2(t) = 0,$$
$$b_2'(t) - b_2^2(t) = 0, \quad b_0(T) = b_1(T) = 0, \quad b_2(T) = \lambda.$$

Із останнього рівняння випливає

$$\frac{db_2(t)}{b_2^2(t)} = dt, \quad b_2(T) = \lambda,$$

звідки

$$b_2(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda(t - T)}, \quad 0 \le t \le T.$$

Із другого рівняння дістаємо

$$\frac{db_1(t)}{b_1(t)} = b_2(t)\,dt, \quad b_1(T) = 0,$$

звідки $b_1(t) = 0$. З першого рівняння отримаємо $b_0(t) = 0$.

Отже, функція Беллмана

$$B(x,t) = \frac{\lambda x^2}{1 - \lambda(t - T)}.$$

Оптимальне керування та оптимальна траєкторія такі:

$$\hat{u}(x,t) = \frac{\lambda x}{\lambda(t - T) - 1},\ \hat{x}(t) = -\frac{x_0}{1 + \lambda T}[\lambda(t - T) - 1],\ 0 \le t \le T.$$

Отже, оптимальний керований процес визначений.

10.4. Задачі для самостійного розв'язування

Виразити оптимальне керування через функцію Беллмана та записати рівняння Беллмана у вигляді, що не залежить від керування.

10.1. $T \to \inf$, $x''(t) = u(t)$, $|u(t)| \le 1$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$, $x(T) = x'(T) = 0$.

10.2. $T \to \inf, \quad x''(t) = u(t), \int\limits_0^T u^2(t)\,dt = 1, \quad x(0) = x_0,$
$x'(0) = v_0, \quad x(T) = x'(T) = 0.$

10.3. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2(t)\,dt + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf,$
$x'(t) = -ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0.$

10.4. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2(t)\,dt + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf,$
$x''(t) = -\omega^2 x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$

10.5. $J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\,dt \to \inf,$
$x_1'(t) = u(t)x_1(t) + x_2(t), \quad x_2'(t) = u^2(t),$
$x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = x_1.$

10.6. $J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))\,dt \to \inf,$
$x_1'(t) = u(t)x_1(t) + x_2(t), \quad x_2'(t) = u^2(t),$
$|u_1(t)| \le 1, |u_2(t) \le 1, \quad x_1(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = x_1.$

10.7. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = -\int\limits_{t_0}^{t_1}((x(t) - c)^2 + u^2(t))\,dt \to \sup,$
$x'(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$

Знайти функцію Беллмана у вигляді

$$B(x, t) = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)x^2$$

та визначити оптимальний керований процес у задачах.

10.8. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1}(x(t) - u(t))\,dt \to \sup, \quad x'(t) = \sqrt{u(t)},$
$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad 0 \le u \le x.$

10.9. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_1^T(tx^2(t) + t^{-1}u^2(t))\,dt \to \inf, \quad x'(t) = u(t),$
$x(1) = x_0.$

10.10. $J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}((x(t)\tan(t) + u(t)\cot(t))\,dt \to \inf,$
$x'(t) = u(t), \quad x(\pi/4) = 3\sqrt{2}.$

11. Відповіді. Вказівки. Розв'язки

1.1. *Розв'язання.* Функція f неперервна. Очевидно, що $S_{\max} = +\infty$. Згідно з наслідком 1.1 з теореми Вейєрштрасса мінімум досягається. Необхідні умови першого порядку мають вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо критичні точки: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Для того, щоб скористатися умовами другого порядку, обчислимо матриці, складені з других похідних:

$$A = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right\} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = A(1,1) = A(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Матриця A_1 невизначена. Тому точка $(0,0)$ не задовольняє необхідні умови екстремуму другого порядку. Точка $(0,0) \notin \operatorname{locextr} f$. Матриця A_2 додатно визначена, отже, згідно з теоремою 1.13 у точках $(1,1)$, $(-1,-1)$ досягається локальний мінімум задачі.

Відповідь. $(0,0) \notin \operatorname{locextr}$; $(1,1)$, $(-1,-1) \in \operatorname{absmin}$.

1.2. $(\ln(a + \sqrt{ab}), \ln(b + \sqrt{ab})) \in \operatorname{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

1.3. $((2a - b)/3, (2b - a)/3) \in \operatorname{locmin}$, $a + b < 0$;
$((2a - b)/3, (2b - a)/3) \in \operatorname{locmax}$, $a + b > 0$;
$(a, -a) \notin \operatorname{locmin}$, $a + b = 0$.

1.4. $(0,0) \notin \operatorname{locextr}$.

1.5. Стаціонарні точки: (x, y), де $x = (-1)^{k+1}\pi/12 + (k+m)\pi/2$, $y = (-1)^{k+1}\pi/12 + (k-m)\pi/2$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Точки $(x, y) \in \operatorname{locmin}$, якщо k парне, а m непарне. Точки $(x, y) \in \operatorname{locmax}$, якщо k непарне, а m парне. Точки $(x, y) \notin \operatorname{locextr}$, якщо $k + m$ парне.

1.6. $(0, 2k\pi) \in \operatorname{locmin}$, $(-2, (2k+1)\pi) \notin \operatorname{locextr}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1.7. $(0,0) \in \operatorname{absmin}$, $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \in \operatorname{locmax}$.

1.8. $(\pm(2e)^{-1/2}, \pm(2e)^{-1/2}) \in \operatorname{locmin}$, $S_{\min} = -1/2e$;
$(\pm(2e)^{-1/2}, \mp(2e)^{-1/2}) \in \operatorname{locmax}$, $S_{\max} = 1/2e$;
$(0, \pm 1) \notin \operatorname{locextr}$, $(\pm 1, 0) \notin \operatorname{locextr}$.

1.9. $(1,1)$ – сідлова точка.

1.10. $(2\pi/3, 2\pi/3) \in \operatorname{locmin}$, $S_{\min} = -3\sqrt{3}/8$;
$(\pi/3, \pi/3) \in \operatorname{locmax}$, $S_{\max} = 3\sqrt{3}/8$.

1.11. $(\pi/3, \pi/6) \in \mathrm{locmax}$, $S_{\max} = 3\sqrt{3}/2$.
1.12. $(1,2) \in \mathrm{locmin}$, $S_{\min} = 7 - 10\ln 2$.
1.13. $(-1/26, -3/26) \in \mathrm{locmin}$, $S_{\min} = -26e^{-1/52}$;
$(1,3) \in \mathrm{locmax}$, $S_{\max} = e^{-13}$.
1.14. $(1,-2)$ – сідлова точка.
1.15. $(0,0) \in \mathrm{locmin}$, $S_{\min} = 0$; $(-1/4, -1/2)$ – сідлова точка.
1.16. $(0,0) \in \mathrm{locmax}$, $S_{\max} = 1$.
1.17. $(a/c, b/c) \in \mathrm{locmin}$, $c < 0$; $(a/c, b/c) \in \mathrm{locmax}$, $c > 0$;
$S_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $S_{\max} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$;
екстемума немає, якщо $c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
1.18. $(\pm a/\sqrt{3}, \mp b/\sqrt{3}) \in \mathrm{locmin}$, $(\pm a/\sqrt{3}, \pm b/\sqrt{3}) \in \mathrm{locmax}$,
$S_{\min} = -ab/3\sqrt{3}/8$, $S_{\max} = -ab/3\sqrt{3}/8$.
1.19. $(\pm 1/2, \pm 1) \in \mathrm{locmin}$, $(0,0) \in \mathrm{locmax}$,
$S_{\min} = -9/8$, $S_{\max} = 0$; $(0, \pm 1)$, $(\pm 1/2, 0)$ – сідлові точки.
1.20. $(1,0) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +\infty$.
1.21. $(5,2) \in \mathrm{locmin}$, $S_{\min} = 30$, $S_{\max} = +\infty$.
1.22. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, $(2,3) \notin \mathrm{locextr}$.
1.23. $(-4, 14) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
1.24. $(8, -10) \notin \mathrm{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
1.25. $(1,1) \in \mathrm{locmax}$, $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0) \notin \mathrm{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$,
$S_{\max} = +\infty$.
1.26. $(-2/3, -1/3, 1) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = -4/3$, $S_{\max} = +\infty$.
1.27. $(2,2,1) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = -1$.
1.28. $(a/7, a/7, a/7) \in \mathrm{locmax}$, $S_{\max} = a^7/7^7$.
1.29. $(24, -144, -1) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = -6913$.
1.30. $(1/2, 1, 1) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = 4$.
1.31. $(-1, -2, 3) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = -14$.
1.32. $(2^{1/3}, 4^{1/3}) \in \mathrm{locmax}$, $(0,0) \notin \mathrm{locextr}$.
1.33. $a \neq b$, $(a^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}, b^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}) \in \mathrm{locmin}$,
$(a^{1/2}(a^{3/2}-b^{3/2})^{-1}, b^{1/2}(b^{3/2}-a^{3/2})^{-1}) \in \mathrm{locmax}$;
$a = b$, $(a^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}, b^{1/2}(a^{3/2}+b^{3/2})^{-1}) \in \mathrm{absmin}$.
1.34. $0 < a < 2$, $(0, -a^{1/2}) \in \mathrm{absmin}$, $(0, a^{1/2}) \in \mathrm{absmax}$; $a > 2$,
$(-b, -b^{-1}) \in \mathrm{locmin}$, $(b^{-1}, b) \in \mathrm{locmin}$, $(b, b^{-1}) \in \mathrm{locmax}$,
$(-b^{-1}, -b) \in \mathrm{locmax}$; $a = 2$, $(\pm 1, \pm 1) \notin \mathrm{locextr}$.
1.35. $(-1, \pi/3 + 2k\pi) \in \mathrm{absmin}$, $(1, -\pi/3 + 2k\pi) \in \mathrm{absmin}$,
$(1, \pi/3 + 2k\pi) \in \mathrm{absmax}$, $(-1, -\pi/3 + 2k\pi) \in \mathrm{absmax}$.
1.36. $(-b\,\mathrm{sign}(ab)/\sqrt{a^2+b^2}, -a\,\mathrm{sign}(ab)/\sqrt{a^2+b^2}) \in \mathrm{absmin}$,
$(b\,\mathrm{sign}(ab)/\sqrt{a^2+b^2}, a\,\mathrm{sign}(ab)/\sqrt{a^2+b^2}) \in \mathrm{absmax}$,
$S_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2}/|ab|$, $S_{\max} = \sqrt{a^2+b^2}/|ab|$.
1.37. $(ab^2/a^2+b^2, a^2b/a^2+b^2) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = a^2b^2/a^2+b^2$.
1.38. $S_{\min} = \lambda_1$, $S_{\max} = \lambda_2$, $(A-\lambda)(C-\lambda) - B^2 = 0$, $\lambda_1 < \lambda_2$.

1.39. $(\pm 2, \mp 3) \in \text{absmin}$, $(\pm 3/2, \pm 4) \in \text{absmax}$,
$S_{\min} = -50$, $S_{\max} = 106,25$.

1.40. $(\pi/8 + k\pi/2, -\pi/8 + k\pi/2) \in \text{locmin}$, $k = 2n + 1$;
$(\pi/8 + k\pi/2, -\pi/8 + k\pi/2) \in \text{locmax}$, $k = 2n$;
$S_{\min} = 1 + -1/\sqrt{2}$, $S_{\max} = 1 + 1/\sqrt{2}$.

1.41. $(8/13, 12/13) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 36/13$, $S_{\max} = +\infty$.

1.42. $(3/25, 4/25) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 1/25$, $S_{\max} = +\infty$.

1.43. $(1/2, 1/2) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = e^{1/4}$.

1.44. $(-1/2, 3/2) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

1.45. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.46. $(1/6, 1/3, 1/2) \in \text{locmax}$; $(t, 0, 1 - t) \in \text{locmax}$, $t > 1$, $t < 0$;
$(t, 0, 1 - t) \in \text{locmin}\ t \in (0, 1)$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

1.47. $\{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$, $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$,
$(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})\} \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -1/(3\sqrt{6})$;
$\{(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$, $(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$,
$(2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\} \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 1/(3\sqrt{6})$.

1.48. $\{(0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, 0)\} \in \text{absmin}$,
$S_{\min} = 0$; $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2}) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = (a - c)^2/4$;
$(0, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}) \notin \text{locextr}$, $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0) \notin \text{locextr}$.

1.49. $(1/2, 1/2, 1/2) \in \text{locmax}$,
$\{(x, y, z) : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 2, x + y + z = -1/2\} \in$
$\in \text{absmin}$.

1.50. $(-1/3, 2/3, -2/3) \in \text{absmin}$; $S_{\min} = -3$;
$(1/3, -2/3, 2/3) \in \text{absmax}$; $S_{\max} = 3$.

1.51. $S_{\max} = a^{m+n+p} m^m n^n p^p/(m + n + p)^{m+n+p}$,
$x/m = y/n = z/p = a/(m + n + p)$.

1.52. $(0, 0, \pm c) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = c^2$; $(\pm a, 0, 0) \in \text{absmax}$,
$S_{\max} = a^2$.

1.53. $(a/6, a/6, a/6) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = (a/6)^6$.

1.54. $(1, 1, 1) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 2$.

1.55. $(\pi/6, \pi/6, \pi/6) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 1/8$.

1.56. $(0, 1) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 1/e - 1$; $(1, 0) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = e - 1$.

1.61. $\{(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$,
$(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\} \in \text{absmin}$,
$\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$,
$(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\} \in \text{absmax}$,
$S_{\min} = -1/3\sqrt{3}$, $S_{\max} = 1/3\sqrt{3}$.

1.62. $(-2, 0, 7) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

1.63. $(0, 0, 0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$; $(0, 12, 0) \in \text{absmax}$, $S_{\max} = 576$.

1.64. $(0, 1, 0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$; $S_{\max} = +\infty$.

1.65. $(2/7, 174/35, -24/5) \in \mathrm{locmin}$, $S_{\min} = -\infty$; $(1, 0, 3) \in \mathrm{locmax}$, $S_{\max} = +\infty$; $(-1, 6, -3) \notin \mathrm{locextr}$.

1.67. Задача має розв'язок у силу теореми Вейєрштрасса. Застосуємо метод Лагранжа до логарифма функціонала. Задача регулярна. Тому функцію Лагранжа можна записати у вигляді

$$L = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln(x_j) + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{\beta_j} - b \right).$$

Необхідні умови екстремуму такі:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\alpha_j}{x_j} + \lambda a_j \beta_j x_j^{\beta_j - 1} = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{\beta_j} = b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Розв'язок першої системи рівнянь

$$x_j = \left(\frac{\alpha_j}{\lambda a_j \beta_j} \right)^{1/\beta_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

підставимо у другу систему рівнянь і знайдемо множник Лагранжа

$$\lambda = \frac{A}{b}, \quad A = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Враховуючи отримані результати, знаходимо розв'язок задачі

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \quad \hat{x}_j = \left(\frac{\alpha_j b}{a_j \beta_j A} \right)^{1/\beta_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.68. Розв'язок задачі

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \quad \hat{x}_j = \left(\frac{b}{A} \right)^{1/(\alpha_j B)} \left(\frac{\beta_j}{\alpha_j c_j} \right)^{1/\alpha_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$A = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\beta_j}{\alpha_j c_j} \right)^{\beta_j/\alpha_j}, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\alpha_j}.$$

1.69. Розв'язок задачі

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \quad \hat{x}_j = \left(\frac{b}{A} \right)^{1/(\alpha_j B)} \left(\frac{\alpha_j c_j}{\beta_j} \right)^{1/\alpha_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$A = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j c_j}{\beta_j} \right)^{\beta_j/\alpha_j}, \quad B = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\alpha_j}.$$

1.70. Розв'язок задачі

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \quad \hat{x}_j = \frac{b}{A} \left(\frac{c_j}{a_j} \right)^{1/(\alpha+1)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$A = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^{\alpha} c_j \right)^{1/(\alpha+1)}.$$

1.71. Розв'язок задачі

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \quad \hat{x}_j = \frac{b}{A} \left(\frac{a_j}{c_j} \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$A = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j^{\alpha}}{c_j} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

1.72. Задача має розв'язок у силу теореми Вейєрштрасса. Задача регулярна. Тому функцію Лагранжа можна записати у вигляді

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\alpha} + \lambda \left(b - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right).$$

Необхідні умови екстремуму такі:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \alpha c_j x_j^{\alpha-1} - \lambda a_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b.$$

Розв'язок першої системи рівнянь

$$x_j = \left(\frac{\lambda a_j}{\alpha c_j} \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

підставимо у друге співвідношення і знайдемо множник Лагранжа

$$\lambda = \alpha \left(\frac{b}{A} \right)^{\alpha-1}, \quad A = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j^{\alpha}}{c_j} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Враховуючи отримані результати, знаходимо розв'язок задачі

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n), \quad \hat{x}_j = \frac{b}{A}\left(\frac{a_j}{c_j}\right)^{1/\alpha-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

1.73. Задача має розв'язок у силу теореми Вейєрштрасса. Задача регулярна. Тому функцію Лагранжа можна записати у вигляді

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j |x_j|^\alpha + \lambda\left(b - \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right).$$

Необхідні умови екстремуму такі:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \alpha c_j |x_j|^{\alpha-1} \operatorname{sign}(x_j) - \lambda a_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b.$$

Оскільки $b > 0$, то $\lambda \neq 0$.
Нехай $\lambda < 0$. Тоді $\operatorname{sign}(x_j) = -\operatorname{sign}(a_j)$, і має виконуватись рівняння

$$-\sum_{j=1}^{n} |a_j| \left(\frac{-\lambda |a_j|^\alpha}{\alpha c_j}\right)^{1/(\alpha-1)} = b.$$

Оскільки $b > 0$, то це рівняння суперечливе і не має розв'язку.
Нехай $\lambda > 0$. Тоді $\alpha c_j |x_j|^{\alpha-1} = \lambda |a_j|$, та

$$x_j = \left(\frac{\lambda |a_j|}{\alpha c_j}\right)^{1/(\alpha-1)} \operatorname{sign}(a_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Підставимо у друге співвідношення та отримаємо

$$\lambda = \alpha\left(\frac{b}{A}\right)^{\alpha-1}, \quad A = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{|a_j|^\alpha}{c_j}\right)^{1/(\alpha-1)} > 0.$$

Отже, розв'язок задачі такий:

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n), \quad \hat{x}_j = \frac{b}{A}\left(\frac{|a_j|}{c_j}\right)^{1/(\alpha-1)} \operatorname{sign}(a_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

1.74. Обидві задачі мають розв'язки в силу теореми Вейєрштрасса. Стаціонарні точки (і розв'язки задач) – це $\hat{x}$ та $-\hat{x}$, де $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$,

$$\hat{x}_j = \left(\frac{b}{A}\right)^{1/\alpha} \left(\frac{c_j}{a_j}\right)^{1/(\alpha-1)}, \quad A = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{c_j}{a_j}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} > 0.$$

1.75. Обидві задачі мають розв'язки в силу теореми Вейєрштрасса. Стаціонарні точки (і розв'язки задач) – це $\hat{x}$ та $-\hat{x}$, де $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$,

$$\hat{x}_j = \left(\frac{b}{A}\right)^{1/\alpha} \left(\frac{|c_j|}{a_j}\right)^{1/(\alpha-1)} \operatorname{sign}(c_j), \quad A = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{|c_j|}{a_j}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} > 0.$$

1.76. Обидві задачі мають розв'язки в силу теореми Вейєрштрасса. Функцію Лагранжа можна записати у вигляді

$$L = \sum_{j=1}^{n} |c_j + x_j|^{\alpha} + \lambda \left(b - \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\alpha}\right).$$

Необхідні умови екстремуму такі:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \alpha |c_j + x_j|^{\alpha-1} \operatorname{sign}(c_j + x_j) - \lambda\alpha |x_j|^{\alpha-1} \operatorname{sign}(x_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\alpha} = b.$$

Із першої системи рівнянь випливає, що $x_j = \mu c_j$. Підставимо це співвідношення у другу умову й отримаємо

$$\mu = \pm \left(\frac{b}{A}\right)^{1/\alpha}, \quad A = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^{\alpha}.$$

Стаціонарні точки (і розв'язки задач) – це $\hat{x}$ та $-\hat{x}$, де $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$,

$$\hat{x}_j = c_j \left(\frac{b}{A}\right)^{1/\alpha}.$$

1.77. Одне число дорівнює $4 - 4/\sqrt{3}$, інше $4 + 4/\sqrt{3}$.
1.78. Рівнобедрений трикутник.
1.79. Точка E — середина відрізка BC.
1.80. Центр ваги фіксованої грані.

1.81. $t^2 - 1/3 \in \text{absmin}$.
1.82. $t^3 - 3t/5 \in \text{absmin}$.
1.83. $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n) \in \text{absmax}$, $\hat{p}_1 = \ldots = \hat{p}_n = 1/n$.
1.84. Квадрат.
1.85. Правильний трикутник.
1.86. Висота циліндра дорівнює $2/\sqrt{3}$.
1.87. Висота конуса дорівнює $4/3$.
1.88. Висота конуса дорівнює $4/3$.
1.89. Куб.
1.90. Правильний тетраедр.
1.91. Правильний трикутник.
1.92. Правильний многокутник.
1.93. Правильний многокутник.
1.94. *Розв'язання.* 1. Формалізація:

$$\sqrt{1 - a^2 \sin^2(\varphi)} \sin(\varphi) \to \sup, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2,$$

кут CEB позначений α, а площа чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними. Виконавши заміну $a \sin(\varphi) = \sqrt{z}$, дістанемо таку задачу:

$$f(z) = z(1 - z) \to \sup, \quad 0 \le z \le a^2.$$

За теоремою Вейєрштрасса задача має розв'язок $\hat{z}$.

2. Якщо $0 < \hat{z} < a^2$, то за теоремою Ферма $f'(\hat{z}) = 0$.

3. $f'(\hat{z}) = 0 \iff \hat{z} = 1/2$.

4. Оскільки задача має розв'язок, то одна зі стаціонарних точок 0, $1/2$, a^2 дає абсолютний максимум задачі. Порівнюючи значення функції $f(z)$ у цих точках, визначаємо розв'язок.

Відповідь. Якщо $0 \le a \le 1/\sqrt{2}$, то $\hat{z} = a^2$, тобто $\hat{\varphi} = \pi/2$. Якщо $1/\sqrt{2} \le a \le 1$, то $\hat{z} = 1/2$, тобто $\hat{\varphi} = \arcsin(a\sqrt{2})^{-1}$.

1.95. Центр вписаного кола.
1.96. *Розв'язання.* 1. Формалізація:

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|^2 + |x_1 - e|^2 + |x_2 - e|^2 \to \sup;$$
$$|x_1|^2 = |x_2|^2 = 1, \quad e = (1, 0), \quad x_i \in R^2, \quad i = 1, 2,$$
$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Функція Лагранжа

$$\mathcal{L} = \lambda_0 f(x_1, x_2) + \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2.$$

2. Запишемо необхідні умови

$$\mathcal{L}_{x_1} = 0 \iff \lambda_0(x_1 - x_2 + x_1 - e) + \lambda_1 x_1 = 0,$$
$$\mathcal{L}_{x_2} = 0 \iff \lambda_0(x_2 - x_1 + x_2 - e) + \lambda_2 x_2 = 0.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Усі множники Лагранжа — нулі. Нехай $\lambda_0 = -1$. Тоді

$$(2 - \lambda_1)x_1 = x_2 + e, \quad (2 - \lambda_2)x_2 = x_1 + e \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((2 - \lambda_1)(2 - \lambda_2) - 1)x_1 = e(3 - \lambda_2).$$

Отже, $x_1 = \pm e$, або $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = -e$. Тому 1) $x_1 = x_2 = \pm e$, 2) $x_1 = -x_2 = e$, 3) $x_1 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $x_2 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.

4. Оскільки множина допустимих елементів компактна, то за теоремою Вейєрштрасса розв'язок задачі існує. Максимум функціоналу дає третя екстремаль.

Відповідь. Правильний трикутник.

1.97. *Розв'язання.* 1. Нехай M — задана точка всередині кута AOB, точки C, D лежать на променях OA і OB відповідно і $M \in [CD]$. Проведемо через точку M паралельну OA пряму лінію; точку перетину її з OB позначимо через F. Нехай довжина OF дорівнює a, довжина FD дорівнює x. Площа трикутника OCD дорівнює $k(a + x)^2/x$, де k — деякий коефіцієнт пропорційності. Задача

$$S(x) = k(a + x)^2/x \to \inf, \quad x \geq 0$$

має розв'язок, оскільки $S(x)$ неперервна і $S(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$.

2. Запишемо необхідну умову екстремуму $S'(\hat{x}) = 0$.

3. Розв'яжемо рівняння $S'(\hat{x}) = 0 \iff \hat{x} = a$.

4. Оскільки стаціонарна точка одна, то $\hat{x} \in \text{absmin}$.

Відповідь. Пряма проведена так, що її відрізок між сторонами кута ділиться заданою точкою на дві рівні частини.

1.98. Через точку провести коло (більшого радіуса), що дотикається до сторін кута, та відрізок, дотичний до кола.

1.99. Чотирикутник, вписаний у коло.

1.100. *Розв'язання.* 1. Формалізація:

$$V(R, h) = \pi h^2(R - h/3) \to \sup, \quad 2\pi Rh = a, \quad 0 \leq h \leq 2R,$$

де R — радіус кулі, h — висота сегмента, a — площа бічної поверхні. Вилучаючи R, дістаємо

$$V(h) = \frac{ah}{2} - \frac{\pi k^3}{3} \to \sup, \quad 0 \leq h \leq \sqrt{a/\pi}.$$

2. Запишемо необхідну умову екстремуму $V'(\hat{h}) = 0$.

3. Розв'яжемо рівняння $V'(\hat{h}) = 0 \Longleftrightarrow \hat{h} = \sqrt{a/2\pi}$.

4. За теоремою Вейєрштрасса розв'язок задачі існує. Оскільки $\hat{h} \neq 0$ та $\hat{x} \neq \sqrt{a/\pi}$ через $V(0) = 0$, $V(\sqrt{a/\pi}) = a\sqrt{a}/6\sqrt{\pi} < V(\sqrt{a/2\pi}) = = a\sqrt{a}/3\sqrt{2\pi}$, то $a = 2\pi\hat{h}^2$, звідки $\hat{h} = R$.

Відповідь. Найбільший об'єм має півкуля.

1.101. Якщо точки A, B лежать по різні боки прямої l, то C — точка перетину прямих AB та l. Нехай точки A, B розміщені з одного боку від прямої l. Знайдемо точку A', симетричну точці A відносно прямої l. Перетин прямих $A'B$ та l визначає точку C.

1.102, 1.103. Вершина тетраедра проектується в центр кола, вписаного в основу.

1.104. Правильний тетраедр.

1.105. $x_0 = (x_1 + x_2 + x_3)/3$.

1.106. $x_0 = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i\right) \Big/ \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$.

1.107. Нехай

$$\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Якщо $|\hat{x}| \leq 1$, то $x_0 = \hat{x}$; якщо $|\hat{x}| > 1$, то $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$.

1.108. Нехай

$$\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Якщо $|\hat{x}| = 0$, то x_0 — будь-яке; якщо $|\hat{x}| \neq 0$, то $x_0 = \hat{x}/|\hat{x}|$.

1.109. Із точки (ξ_1, ξ_2) до еліпса $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$, $a_1 > a_2$ можна провести чотири нормалі, якщо ця точка лежить усередині астроїди

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 - a_2^2)^{2/3};$$

три нормалі, якщо вона лежить на астроїді (за винятком вершин). З інших точок можна провести дві нормалі.

1.110. З точки (ξ_1, ξ_2) до параболи $y = ax_2$, $a > 0$ можна провести три нормалі, якщо точка розташована вище кривої

$$\xi_2 = 3 \cdot 2^{-4/3} a^{-1/3} \xi_1^{2/3} + 2^{-1} a^{-1};$$

дві нормалі, якщо вона лежить на цій кривій (за винятком точки $(0, 2^{-1}a^{-1})$). З інших точок можна провести одну нормаль.

1.111. Із точки (ξ_1, ξ_2) можна провести три нормалі до ближньої гілки гіперболи та одну до дальньої, якщо

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} - (\xi_2 a_2)^{2/3} > (a_1^2 + a_2^2)^{2/3};$$

дві нормалі до ближньої та одну до дальньої, коли

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} - (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 + a_2^2)^{2/3};$$

(за винятком точок $(0, (a_1^2 + a_2^2)/a_1)$). З інших точок можна провести по одній нормалі до кожної гілки.

1.112. Відстань від точки $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ до гіперплощини $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ дорівнює $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i - b\right| \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-1/2}$.

1.113. *Розв'язання.* 1. Нехай гіперплощина визначена рівнянням $\langle a, x\rangle - b = 0$, де $\langle a, x\rangle$ — скалярний добуток векторів a, x. Формалізована задача має вигляд

$$\|x - x_0\|^2 \to \inf, \quad \langle a, x\rangle - b = 0, \quad a \neq 0.$$

Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \lambda_0 \|x - x_0\|^2 + \lambda \langle a, x\rangle.$$

2. Запишемо необхідну умову $2\lambda_0(\hat{x} - x_0) + \lambda a = 0$.
3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $a = 0$. Розв'язків немає. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. Тоді

$$\hat{x} = x_0 - \lambda a, \quad \lambda = (\langle a, x_0\rangle - b)/\langle a, a\rangle.$$

4. Переконуємось у тому, що $\hat{x} \in \text{absmin}$,

$$S_{\min} = (\langle a, x_0\rangle - b)/\langle a, a\rangle.$$

Відповідь. Відстань дорівнює $|\langle a, x_0\rangle - b)|/\|a\|$.

1.114. Відстань від точки $\hat{x}$ до прямої $at + b$, a, $b \in R^n$ дорівнює

$$(\|\hat{x} - b\|^2 - (\langle \hat{x} - b, a\rangle/\|a\|^2)^{1/2}.$$

1.115. $\hat{x} = -a/\|a\| \in \text{absmin}$, $l(\hat{x}) = \|a\|$.

1.116. Сторони прямокутника: $\sqrt{2}a, \sqrt{2}b$.

1.117. Сторони паралелепіпеда: $2a/\sqrt{3}, 2b/\sqrt{3}, 2c/\sqrt{3}$.

1.118. *Розв'язання.* Дослідимо на екстремум задачу

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \to \sup; \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q = a^q, \quad 1 < p < q,\ a > 0.$$

1. Множина допустимих елементів компактна, функціонал неперервний. За теоремою Вейєрштрасса розв'язок задачі існує.

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q - a^q\Big).$$

3. Запишемо необхідну умову екстремуму

$$\hat{\mathcal{L}}_{x_i} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 p|\hat{x}_i|^{p-1}\operatorname{sign}(\hat{x}) + \lambda q|\hat{x}_i|^{q-1}\operatorname{sign}(\hat{x}_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\hat{x} = 0$ не буде допустимим елементом задачі. Нехай $\lambda_0 = -1$. Тоді $\hat{x}_i = 0$ або $|\hat{x}_i| = (\lambda q/p)^{1/(p-q)}$.

5. Максимуму функціонал досягає в критичній точці. Нехай критична точка має рівно k відмінних від нуля координат. Ці координати такі: $|\hat{x}_i| = ak^{-1/q}$. Отже,

$$S_{\max}(a) = a^p \max_{1\le k\le n} k^{1-p/q} = a^p n^{1-p/q}.$$

Скориставшись розв'язком задачі, доведемо нерівність. Нехай $p > 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^q = a^q$. Тоді

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p/n\Big)^{1/p} = n^{-1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \le n^{-1/p}(S_{\max}(a))^{1/p} =$$

$$= n^{-1/p} a n^{1/p-1/q} = an^{-1/q} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q/n\Big)^{1/q}.$$

Якщо $p = 1$, то переконатися у справедливості нерівності можна, перейшовши до границі у нерівності з $p > 1$.

Нехай $0 < p < 1$ та $y_i = |x_i|^p$. Тоді

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p/n\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|/n\Big)^{1/p} \le$$

$$\le \Bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{q/p}/n\Big)^{p/q}\Bigg)^{1/q} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q/n\Big)^{1/q}.$$

Якщо $p < q < 0$, то $-q < -p$ і можна використати доведені нерівності

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p/n\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^{-1}|^{-p}/n\right)^{-(-1/p)} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^{-1}|^{-q}/n\right)^{-(-1/q)} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q/n\right)^{1/q}.$$

Нехай $p < 0 < q$. Тоді

$$\lim_{p\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p/n\right)^{1/p} = \left(\prod_{i=1}^{n} |x_i|\right)^{1/n},$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p/n\right)^{1/p} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} |x_i|\right)^{1/n} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q/n\right)^{1/q}.$$

1.119. Нерівність доводиться так само, як і в задачі 1.118.

1.120. Розв'язання таке саме, як і в задачі 1.118.

1.121. *Розв'язання.* Дослідимо на екстремум задачу

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \to \sup; \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = b^p, \quad p > 1, b > 0.$$

1. Множина допустимих елементів компактна, функціонал неперервний. За теоремою Вейєрштрасса розв'язок задачі існує.

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p.$$

3. Запишемо необхідну умову екстремуму

$$\hat{\mathcal{L}}_{x_i} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_0 a_i + \lambda p |\hat{x}_i|^{p-1} \operatorname{sign}(\hat{x}_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$ і $\lambda \neq 0$, то $\hat{x} = 0$ не буде допустимим елементом задачі. Нехай $\lambda_0 = -1$. Тоді

$$\hat{x}_i = \mu |a_i|^{p'-1} \operatorname{sign}(a_i), \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p = b^p$, то $\mu = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^{p'}\right)^{-1/p}$.

5. Критична точка одна. Тому $\hat{x} \in \mathrm{absmax}$.

$$S_{\max}(b) = b\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{p'}\right)^{-1/p'}.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq S_{\max}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

1.122. Вказівка. Дослідити на екстремум задачу

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \to \sup;\ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = a^p,\ \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p = b^p,\ p > 1,\ a > 0,\ b > 0.$$

3.1. Інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Варіаційна задача не має сенсу.
3.2. $\hat{x} = \cos(t) + C\sin(t)$.
3.3. $\hat{x} = \sinh(t)/\sinh(1)$.
3.4. $\hat{x} = 2\cosh(t)$.
3.5. $\hat{x} = t\cos(t)$.
3.6. $\hat{x} = e^{2(1-t)}$.
3.7. $\hat{x} = \sqrt{1-t^2}$.
3.8. $\hat{x} = e^t - e^{-3t}$.
3.9. $\hat{x}_1 = t$, $\hat{x}_2 = \sinh(t-1)/\sinh(1)$.
3.10. $\hat{x}_1 = C\sin(t) - \frac{t}{\pi}\cos(t)$, $\hat{x}_2 = C\sin(t) + (2\sin(t) - t\cos(t))/\pi$.
3.11. $\hat{x}_1 = \sin(2t)$, $\hat{x}_2 = -t^2/2 + (32+\pi^2)t/(8\pi)$.
3.12. $\hat{x}_1 = -(t^3 + 5t - 6)/6$, $\hat{x}_2 = t$.
3.13. $\hat{x}_1 = t^2/2 + 1$, $\hat{x}_2 = t$.
3.14. $\hat{x}_1 = (B-1)\cos(t) + (t/4 + D)\sin(t) + At + C$,
$\hat{x}_2 = B\cos(t) + (t/4 + D)\sin(t)$.
3.15. $\hat{x}_1 = \sinh(t)$, $\hat{x}_2 = -\sinh(t)$.
3.16. $\hat{x}_1 = \sinh(t)$, $\hat{x}_2 = \sinh(t)$.
3.17. $\hat{x}_1 = e^t$, $\hat{x}_2 = e^{-t}$.
3.18. $\hat{x}_1 = \sin(t)$, $\hat{x}_2 = -\sin(t)$.
3.19. $\hat{x}_1 = t^4$, $\hat{x}_2 = t^3$.
3.20. $\hat{x}_1 = t + \cos(t)$, $\hat{x}_2 = -\cos(t)$, $\hat{x}_3 = \cos(t) - t$.
3.21. $\hat{x} = (1-t)\sinh(t)$.
3.22. $\hat{x} = -(t^3 + 6t + 1)t^3/6$.
3.23. Варіаційна задача не має сенсу, оскільки під знаком інтеграла стоїть повний диференціал.

3.24. $\hat{x} = 1 - \cos(t)$.
3.25. $\hat{x} = t - \sin(t)$.
3.26. $\hat{x} = \sinh(t) - \sin(t)$.
3.27. $\hat{z}(x, y) = y$.
3.28. $\hat{x} = (t/2 - \pi/4)\cos(t) - (1/2 + \pi/4)\sin(t)$.
3.29. $\hat{x} = \cos(t)$.
3.30. $\hat{x} = e^t$.
3.31. $\hat{x} = \ln(t) + 1$.
3.32. $\hat{x} = (1/2)\sqrt{t+1}$.
3.33. $\hat{x} = 2\ln(t+1)$.
3.34. $\hat{x} = -e^t/(e^3+1)$.
3.35. $\hat{x} = \ln(t+1) - 1$.
3.36. $\hat{x} = 1/t + 1/2$.
3.37. $\hat{x} = \cos(t) - 1$.
4.1. $\hat{x} = 1 \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.2. $\alpha > -1 \Rightarrow \hat{x} = 0 \in \mathrm{absmin}$, $\alpha > -1 \Rightarrow \hat{x} = Ct \in \mathrm{absmin}$, $S_{\min} = 0$; $\alpha < -1 \Rightarrow S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.3. $\hat{T} = 1$, $\hat{x} = -2t \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.4. $\hat{T} = 1/2$, $\hat{x} = \pm 4t \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.5. $\hat{x} = 0 \notin \mathrm{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.6. $\hat{x} = (t^2 - 1)/4 \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.7. *Розв'язання.* 1. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{T_0} \lambda_0(x - (x')^2)\,dt + \lambda x(0).$$

2. Запишемо необхідні умови: а) рівняння Ейлера $2\lambda_0 x'' + \lambda_0 = 0$; б) трансверсальності $-2\lambda_0 x'(0) = \lambda$, $\lambda_0 x'(T_0) = 0$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1$. Загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x = -t^2/4 + C_1 t + C_2.$$

Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = t(2T_0 - t)/4$.

4. Перевіримо, що $\hat{x} \in \mathrm{absmax}$. Дійсно, якщо $h(\cdot) \in C^1([0, T_0])$, $h(0) = 0$, то

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^{T_0} h\,dt - \int_0^{T_0} 2\hat{x}'h'\,dt - \int_0^{T_0} (h')^2\,dt =$$
$$= \int_0^{T_0} (2\hat{x}'' + 1)h\,dt - 2\hat{x}'h\Big|_0^{T_0} - \int_0^{T_0} (h')^2\,dt = -\int_0^{T_0} (h')^2\,dt \le 0.$$

Отже, $S_{\min} = -\infty$.

4.8. $\hat{T} = 2$, $\hat{x} = t^2/4 - t + 1 \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $x_n(t) = 1 - t$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

4.9. $\hat{T} = 8$, $\hat{x} = t^2/4 - 8 \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $x_n(t) = (t^2 - n^2)/4 + n$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

4.10. $\hat{T} = 2\sqrt{\xi}$, $\hat{x} = t^2/4 \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$,

$$x_n = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 1, \\ -1, & 1 \le t \le n-1, \ T_n = n, \\ (\xi + 1)(t - p + 1) - 1, & n - 1 \le t \le n, \end{cases}$$

$S_{\max} = +\infty$.

4.11. $\hat{x} = t^2/4 - (1 + \sqrt{5})t$ $(\hat{T} = 8 + 4\sqrt{5}) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$; $x_n = (t^2 - nt)/4 + t$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

4.12. $\hat{T} = 2\sqrt{2}$, $\hat{x} = t^2/4 - t\sqrt{2} \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $x_n(t) = -t$, $T_n = n$; $S_{\max} = +\infty$.

4.13. $\hat{x} = \cos(t) + \sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

4.14. $S_{\max} = +\infty$, $T_0 < \pi/2 \Rightarrow \hat{x} = 0 \in \text{absmin}$, $T_0 = \pi/2 \Rightarrow \hat{x} = A\sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $T_0 > \pi/2 \Rightarrow S_{\min} = -\infty$.

4.15. $\hat{x} = (t - \pi/4 - 1)\sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

4.16. $\hat{x} = (t - \pi/4 + 1)\cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -\infty$.

4.17. $\hat{x} = \cosh(t-1)/\cosh(1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

4.18. $\hat{x} = t\cosh(t-1) - \sinh(t)(\sinh(1) + \cosh(1))/\cosh(1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

4.19. $\hat{x} = t\sinh(t) - \tanh(t)\cosh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

4.20. *Розв'язання.* 1. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \lambda_0((x')^2 + x^2)\,dt - \lambda_0 x^2(1) + \lambda(x(0) - 1).$$

2. Запишемо необхідні умови:
а) рівняння Ейлера $2\lambda_0(x'' - x) = 0$;
б) трансверсальності $2\lambda_0 x'(0) = \lambda$, $\lambda_0 x'(1) = \lambda_0 x(1)$.
3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$. Допустимих екстремалей немає.
Нехай $\lambda_0 = 1$. Загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x = C_1\sinh(t) + C_2\cosh(t).$$

Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = \sinh(t) + \cosh(t) = e^t$.
4. Перевіримо, що $\hat{x} \in \text{absmin}$. Дійсно,

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) = J(\hat{x}(\cdot)) + J(h(\cdot)) \ \forall h(\cdot) \in C^1([0,1]), \ h(0) = 0.$$

Формула Вейєрштрасса дає тотожність

$$\int_0^1 (x'^2(t) + h^2(t))\, dt = \int_0^1 (x'(t) + h(t)\coth(t))^2\, dt + \coth(1)h^2(1)$$
$$\forall\ h(\cdot) \in C^1([0,1]),\ h(0) = 0,$$

звідки $J(h(\cdot)) \geq 0\ \forall h(\cdot) \in C^1([0,1])$, $h(0) = 0$.
Тому $J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$, $S_{\max} = +\infty$.
4.21. Допустимих екстремалей немає.
4.22. $\hat{x} = t - e\ln(t) - 1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.23. $\hat{x} = t + (1-e)\ln(t) - 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.24. $\hat{x} = \xi\cosh(t)/\cosh(T_0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \xi^2\tanh(T_0)$, $S_{\max} = +\infty$.
4.25. $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0 \in \text{absmin}$; $\xi \neq 0 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.
4.26. $\xi\sinh(t)/\sinh(T_0) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \xi^2\coth(T_0)$, $S_{\max} = +\infty$.
4.27. $\xi = 0 \Rightarrow \hat{x} \equiv\in \text{absmin}$;
$\xi \neq 0 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$, $S_{\min} = \xi^2$, $S_{\max} = +\infty$.
4.28. $\hat{x} = 2\sinh(\hat{T})\cosh(t)$, $\hat{T}$ — розв'язок рівняння $\sinh(2T) + T = 1$.
4.29. $\hat{x} = -2\cosh(\hat{T})\sinh(t)$, $\hat{T}$ — розв'язок рівняння $\sinh(2T) + T = -1$.
4.30. $4/\sqrt{5}$.
4.31. $\sqrt{20}$.
4.32. $2\sqrt{2} - 1$.
4.33. $\sqrt{11}/2$.
4.34. 1.
4.35. 26/5.
4.36. $y = 2x^{2/3}$.
4.37. $\hat{x} = t/\sqrt{2}$, $\hat{T} = 2^{1/6}$.
4.38. $\hat{x} = \sqrt{2 - t^2} \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.39. $\hat{x} = \sqrt{1 - t^2 + t} \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.40. $\hat{T} = 1 - \sqrt{2/5}$, $\hat{x} = \sqrt{2 - (t-1)^2} \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.41. $\hat{x} = (2 - (t-1)^2)^{1/2}$.
4.42. $\hat{x} = (2 - (t-1)^2)^{1/2}$, $\hat{T} = 2$.

4.43. Екстремалі задачі — ланцюгові лінії $x = \coth\left(\frac{t}{C}\right)$. Нехай α визначається з рівнянь $\alpha = \sinh(\tau)$, $\tau = \coth(\tau)$. Тоді при $|\xi| < \alpha T_0$ екстремалей немає. Якщо $|\xi| = \alpha T_0$, то екстремаль одна, а при $|\xi| > \alpha T_0$ є дві екстремалі.

4.44. $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\cos(t)/\cos(1), \cos(t)/\cos(1))$.
4.45. $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\cos(t) + \tan(1)\sin(t), \cos(t) + \tan(1)\sin(t))$.

4.46. $\hat{x}_1 = \cosh(t-1)/\cosh(1) = \hat{x}_2$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \text{absmin}$.
4.47. $\hat{x} = (\sin(t), -\sin(t)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.48. $\hat{x} = (4t^2 - t^3)/2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.49. $\hat{x} = t - t^2/2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.50. $\hat{x} = t^2/2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 1$, $S_{\max} = +\infty$.
4.51. $\hat{x} = t^2 - t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.52. $\hat{x} = t^4 - 2t^3 + t \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -24/5$, $S_{\max} = +\infty$.
4.53. $\hat{x} = t^4 - 5t^3/2 + 3t^2/2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -9/5$, $S_{\max} = +\infty$.
4.54. $\hat{x} = t^4 - 2t^3 + t^2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = -4/5$, $S_{\max} = +\infty$.
4.55. $\hat{x} = 2t^3 - t^4 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.56. $\hat{x} = t^2/2 - et(\ln(t) - 1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.57. $\hat{x} = t\ln(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.58. $\hat{x} = t\ln(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.59. $\hat{x} = (t+e)\ln(t) - t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.60. $\hat{x} = \ln(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.61. $\hat{x} = \ln(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.62. $\hat{x} = e/2t + \ln(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.63. $\hat{x} = 1/t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.64. $\hat{x} = 1/t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.65. $\hat{x} = \cosh(t)\sin(t) - \sinh(t)(\tanh(\pi)\sin(t) + \cos(t)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.66. $\hat{x} = \cosh(t)\sin(t) - \sinh(t)\cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.67. $\cos(T_0)\cosh(T_0) \neq 1 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0 \notin \text{locextr}$;
$\cos(T_0)\cosh(T_0) = 1 \Rightarrow \hat{x} = C((\cosh(T_0) - \cos(T_0)(\sinh(t)+$
$+\sin(t)) - (\sinh(T_0) - \sin(T_0)(\cosh(t) + \cos(t)) \notin \text{locextr}$,
$S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.68. $\hat{x} \equiv 0 \notin \text{locextr}$;
$S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.69. $\hat{x} = (\sin(t) + \sinh(t))/2 + (1 - \sinh(\pi/2))(\cos(t) + \cosh(t))/2$
$\cosh(\pi/2) \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.70. $\hat{x} = (\cos(t) + \cosh(t) - [(1 + \cosh(\pi/2))\ \sinh(\pi)](\sin(t)+$
$+\sinh(t))/2 \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.71. $\hat{x} = (\sin(t) + \cos(t)/\coth(\pi/2) - (\cosh(t)+$
$+\cosh(\pi - t))/\sinh(\pi))/2 \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.72. $\hat{x} = ((1 + \cosh(\pi))(\sinh(t) + \sin(t))/\sinh(\pi) - \cosh(t)-$
$-\cos(t))/2 \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.73. $\hat{x} = ((1 + \cosh(\pi))(\cosh(t) + \cos(t))/2\sinh(\pi) - (\sinh(t)+$
$+\sin(t))/2) \notin \text{locextr}$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.74. $\hat{x} = \sin(t)/2 + \sinh(t)/2\sinh(\pi/2)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.75. $\hat{x} = \cosh(t)/2\sinh(\pi/2) - \cos(t)/2 \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$,
$S_{\max} = +\infty$.

4.76. $\hat{x} = \sinh(t)/2\cosh(\pi) - \sin(t)/2 \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.77. $\hat{x} = \cosh(t)/2\cosh(\pi) - \cos(t)/2 \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.78. $\hat{x} = \sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.
4.79. $\hat{x} = -\sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.
4.80. $\hat{x} = \cos(t) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.81. $\hat{x} = -\cos(t) \notin \text{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
4.82. $\hat{x} = \sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.
4.83. $\hat{x} = (1 + \sinh(\pi/2))(\sin(t) - \sinh(t))/2 + (\cosh(\pi/2)(\cosh(t) - \cos(t))/2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.84. $\hat{x} - \sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.85. $\hat{x} = \sinh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.86. $\hat{x} = \sinh(t-1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.87. $\hat{x} = \cosh(t) - 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.88. $\hat{x} = 1 - \cosh(t-1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.89. $\hat{x} = t + \sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.90. $\hat{x} = 1 - \cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
4.91. $\hat{x} = 2(\sin(t) - \cos(t) - t + 1)/(4 - \pi) \in \text{absmin}$.
4.92. $\hat{x} = t^3/2 - t^4/8 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 3$, $S_{\max} = +\infty$.
4.93. $\hat{x} = (t^2 + 2t + 2)/5 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.
4.94. $\hat{x} = (t^5 - 5t^4 + 10t^3)/6 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 20$, $S_{\max} = +\infty$.
4.95. $\hat{x} = (8t^5 - 25t^4 + 20t^3)/3 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 320$, $S_{\max} = +\infty$.
4.96. $\hat{x} = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 720$, $S_{\max} = +\infty$.
4.97. $\hat{x} = t^3(t-1)^2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 36$, $S_{\max} = +\infty$.

5.1. $\hat{x}_1 = \begin{cases} t, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in [1,2] \end{cases}$ $\quad \hat{x}_2 = \begin{cases} 0, & t \in [0,1], \\ t-1, & t \in [1,2]. \end{cases}$

5.2. $\hat{x}_1 = \begin{cases} -t, & t \in [0,1], \\ t-2, & t \in [1,4] \end{cases}$ $\quad \hat{x}_2 = \begin{cases} t, & t \in [0,3], \\ -t+6, & t \in [3,4]. \end{cases}$

5.3. Не існує.

5.4. $\hat{x} = \begin{cases} 0, & t \in [-1,0], \\ t, & t \in [0,1]. \end{cases}$

5.5. Ламані екстремалі складені з відрізків прямих, що паралельні бісектрисам координатних кутів.

5.6. Ламані екстремалі складені з відрізків прямих, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють $\frac{4n-1}{2}\pi$, $n \in Z$.

5.7. $x = \begin{cases} \pm 3t/4, & t \in [0, 16/5], \\ \pm\sqrt{9 - (t-5)^2}, & t \in [16/5, 34/5], \\ \pm(3(t-10)/4, & t \in [34/5, 10]. \end{cases}$

5.8. Екстремалі — еліпси $\frac{(t+C_1)^2}{C_2^4}+\frac{x^2}{C_2^2}=1$ з центрами на осі OX. Границя допустимої області визначається рівняннями $x=0$, $x^2=\pm 2(t-C_3)$. Параметри C_1, C_2 вибираються так, щоб еліпс проходив через точки A і B. Якщо шлях із точки A в точку B вибирати по дугах двох парабол та по прямій $y=0$, то дістанемо розривний розв'язок.

6.1. $\hat{x}=(1-t)\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.2. $\hat{x}=tb/a\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.3. $\hat{x}=(t-t^2)/4\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.4. $\hat{x}=-t^2/4+(b/a+a/4)t\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.5. $\hat{x}=(t^3-t)/12\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.6. $\hat{x}=(t-t^4)/24\in \text{absmin}$, $S_{\min}=-\infty$.
6.7. $\hat{x}=bt/a$ — єдина екстремаль, $b>0\Rightarrow \hat{x}\in \text{locmin}$,
$b<0\Rightarrow \hat{x}\in \text{locmax}$,
$b=0\Rightarrow \hat{x}\notin \text{locextr}$, $\forall\, b\,\hat{x}$ — не сильний locextr,
$S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.
6.8. $\hat{x}=(2t/3)^{3/2}$ — єдина екстремаль, $\hat{x}\in \text{locmin}$,
$\hat{x}$ — не сильний locextr, $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.
6.9. $\hat{x}=bt/a$ — єдина екстремаль, $b>a/3\Rightarrow \hat{x}\in \text{locmin}$,
$b<a/3\Rightarrow \hat{x}\in \text{locmax}$,
$b=a/3\Rightarrow \hat{x}\notin \text{locextr}$, $\forall\, b\,\hat{x}$ — не сильний locextr,
$S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.
6.10. $\hat{x}=bt/a$ — єдина екстремаль, $b>-a/3\Rightarrow \hat{x}\in \text{locmin}$,
$b<-a/3\Rightarrow \hat{x}\in \text{locmax}$,
$b=-a/3\Rightarrow \hat{x}\notin \text{locextr}$, $\forall\, b\,\hat{x}$ — не сильний locextr,
$S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=+\infty$.
6.11. $\hat{x}=\ln(t)\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.12. $\hat{x}=(\ln(1+t))/\ln(2)\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.13. $\hat{x}=t-e\ln(t)\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.14. $\hat{x}=(1+e)2^{-1}\ln(t)+(3-t)/2\in \text{absmax}$, $S_{\min}=-\infty$.
6.15. $\hat{x}=4/t-1\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.16. $\hat{x}=(\ln(3(t-1)/(t+1)))/\ln(3/2)\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.17. $\hat{x}=e/t-\ln(t)\in \text{absmax}$, $S_{\min}=-\infty$.
6.18. $\hat{x}=\sqrt{1+t}\in \text{absmin}$, $S_{\max}=+\infty$.
6.19. *Розв'язання.* 1. $L=x/(x')^2$.
2. Рівняння Ейлера $x/(x')^2=C$.

3. Загальний розв'язок рівняння $x=(C_1t+C_2)^2$. Граничні умови задовольняють екстремалі $\hat{x}_1=(t-1)^2$, $\hat{x}_2=(t-2)^2/4$.

4. Друга екстремаль оточена полем. Тому вона дає сильний локальний мінімум. Перша екстремаль не задовольняє умову Якобі. Отже, $\hat{x}_1\notin \text{locextr}$.

6.20. $\hat{x} = 2\ln(1+t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.21. $\hat{x} = t^3 - t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.22. $\hat{x} = \ln(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.23. $\hat{x} = t^3 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.24. $\hat{x} = \coth(t)/\coth(1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.25. $\hat{x} = \sinh(2t)/\sinh(2) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.26. $\hat{x} = (e^t + e^{1-t})/(1+e) - 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.27. $\hat{x} = (\sinh(t)/2\sinh(1)) - t/2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.28. $\hat{x} = \sin(t) - \sin(1)\sinh(t)/\sinh(1) \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\infty$.

6.29. $\hat{x} = \sinh(2t) - \sinh(2)\sinh(t)/\sinh(1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.30. $\hat{x} = \sin(t) + (b - \sin(a))\sinh(t)/\sinh(a) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.31. $\hat{x} = \sinh(2t) + (b - \sinh(a))\sinh(t)/\sinh \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.32. $\hat{x} = (t-1)\cosh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.33. $\hat{x} = t\cosh(t) + (b - a\cosh(a))\sinh(t)/\sinh(a) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.34. $\hat{x} = (t-1)\sinh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.35. $\hat{x} = ((b/\sinh(a)) - a + t)\sinh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.36. $\hat{x} = \cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.37. $\hat{x} = \cos(2t) \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\infty$.

6.38. $\hat{x} = \sin(2t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.39. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, $\frac{\pi}{2}$ — спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = \sin(2t) \notin \text{locextr}$.

6.40. $\hat{x} = \cos(t) + \sin(t) - 1 \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\infty$.

6.41. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, π — спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = \cos(t) - \sin(t) - 1 \notin \text{locextr}$.

6.42. $\hat{x} = (\pi\sin(t) - 2t)/4 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.43. $\hat{x} = \sinh(t) - \sinh(\pi/2)\sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.44. $0 < a < \pi \Rightarrow \hat{x} = \sinh(t) + \sin(t)(b - \sinh(a))/\sin(a) \in \text{absmin}$, π — спряжена точка. Отже, при $b > \pi$ умова Якобі не виконується. Допустимі екстремалі $\hat{x} \notin \text{locextr}$. Якщо $a = \pi$, то при $b = \sinh(\pi)$ екстремаль $\hat{x} = \sinh(t) + C\sin(t) \in \text{absmin}\ \forall C \in R$, при $b \neq \sinh(\pi)$ допустимих екстремалей немає і $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

6.45. $\hat{x} = \sin(2t) \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\infty$.

6.46. $0 < a < \pi$, $\hat{x} = (b/\sin(a) - 2\cos(a))\sin(t) + 2\sin(t) \in \text{absmin}$, π — спряжена точка. Отже, при $a > \pi$ умова Якобі не виконується. Допустимі екстремалі $\hat{x} \notin \text{locextr}$. Якщо $a = \pi$, то при $b = 0$ екстремаль $\hat{x} = \sin(2t) + C\sin(t) \in \text{absmin}$, а при $b \neq 0$ допустимих екстремалей немає і $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

6.47. $\hat{x} = t\cos(t) \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\infty$.

6.48. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, π — спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = t\cos(t) \notin$ locextr.

6.49. $\hat{x} = t\sin(t) - (\pi/2)\sin(t) \in$ absmin, $S_{\max} = +\infty$.

6.50. $\hat{x} = t\sin(t) \in$ absmin, $S_{\max} = +\infty$.

6.51. π — спряжена точка. Умова Якобі не виконується. Допустима екстремаль $\hat{x} = t\sin(t) \notin$ locextr. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

6.52. Якщо $0 < a < \pi$, то $\hat{x} = (b/\sin(a) - a)\sin(t) + t\sin(t) \in$ absmin, π — спряжена точка. Умова Якобі не виконується при $a > \pi$. Допустимі екстремалі $\hat{x} \notin$ locextr. Якщо $a = \pi$, то при $b = 0$ екстремаль $\hat{x} = (t + C)\sin(t) \in$ absmin, $\forall C \in R$, $S_{\min} = -\pi$; при $b \neq 0$ $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

6.53. $\hat{x} = e^t \in$ absmin, $S_{\max} = +\infty$.

6.54. $\hat{x} = te^{2-t} \in$ absmax, $S_{\min} = -\infty$.

6.55. $\hat{x} = tbe^{t-a}/a \in$ absmin, $S_{\max} = +\infty$.

6.56. $\hat{x} = \pi t/2 \in$ absmax, $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +1$.

6.57. $\hat{x} = \pi t \in$ absmin, $S_{\min} = -1$, $S_{\max} = +1$.

6.58. $S_{\min} = -a$, $S_{\max} = +a$, $2\pi k < b/a < \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$, $\hat{x} = bt/a \in$ locmax; $-\pi + 2\pi k < b/a < 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \hat{x} \in$ locmin; не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже, $\hat{x}$ — несильний locextr. Якщо $a = \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, то необхідне додаткове дослідження.

6.59. $S_{\min} = -a$, $S_{\max} = +a$, $\pi/2 + 2\pi k < b/a < 3\pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots \Rightarrow \hat{x} = bt/a \in$ locmin; $-\pi/2 + 2\pi k < b/a < \pi/2 + 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots \Rightarrow \hat{x} \in$ locmax. Не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже, $\hat{x}$ — несильний locextr. Якщо $a = \pi/2 + \pi k$, то необхідне додаткове дослідження.

6.60. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$, $a > -b/2 \Rightarrow \hat{x} = bt/a \in$ locmin; $a < -b/2 \Rightarrow \hat{x} \in$ locmax. Не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже, $\hat{x}$ — несильний locextr. Якщо $a = -b/2$, то необхідне додаткове дослідження.

6.61. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$; $b \geq 4a^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_1 = 4((t + c)^{5/4} - c^{5/4})/5 \in$ locmin; $b \leq -4a^{5/4}/5 \Rightarrow \hat{x}_2 = 4(c^{5/4} - t + c)^{5/4}/5 \in$ locmax, де c визначається з рівняння $4((a + c)^{5/4} - c^{5/4}) = 5|b|$. Не виконується необхідна умова Вейєрштрасса. Отже, $\hat{x}$ — несильний locextr. При $|b| < 4a^{5/4}/5$ допустимих екстремалей немає.

6.62. Якщо $|b| < 1/\sqrt{3}$, то екстремаль $\hat{x} = bt \in$ locmax. При $|b| > 1/\sqrt{3}$ екстремаль $\hat{x} = bt \in$ locmin, а при $|b| < 1$ ця екстремаль не дає сильного мінімуму, оскільки не виконується умова Вейєрштрасса.

6.63. Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x} \equiv 0$. Але вона не є розв'язком задачі. $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

6.64. Граничні умови задовольняє екстремаль $\hat{x} \equiv 0$. Вона задовольняє необхідні умови сильного мінімуму. Але сильного мінімуму не дає. Щоб переконатися в цьому, досить побудувати ламану $x(t,k,h) = kt/h$ при $0 \le t \le h$ і $x(t,k,h) = k(1-t)/(1-h)$ при $h \le t \le 1$, а потім для будь-якого $k > 0$ підібрати $h > 0$ так, щоб $J(x(\cdot,k,h)) < 0$.

6.65. $\hat{x} = \sqrt{1-t^2} \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.66. $\hat{x} = \sqrt{2t-t^2} \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.67. Допустима екстремаль — дуга кола з центром на осі t, що проходить через точки (t_0, x_0), (t_1, x_1). Вона дає мінімум функціонала задачі. $S_{\max} = +\infty$.

6.68. Екстремалі задачі — ланцюгові лінії $x = C\cosh((t+D)/C)$.

6.69. Допустиму екстремаль $x = a^2(1-\cos(\tau))/2$, $t = (\tau - \sin(\tau))a^2/2 + C$ можна оточити полем екстремалей. Інтегрант квазірегулярний. Допустима екстремаль дає absmin, $S_{\max} = +\infty$.

6.70. Екстремаль, що задовольняє початкову умову $x(0) = 0$, має вигляд $x(t,\alpha) = \alpha t + (1+\alpha^2)t^2/4h$. Рівняння обвідної лінії $x = -h + t^2/4h$. Якщо точка (a,b) лежить за межами цієї кривої, то допустимих екстремалей немає. Якщо точка лежить на кривій, то допустима екстремаль одна. Якщо точка лежить під кривою, то допустимих екстремалей дві. Верхня екстремаль має спряжену точку на інтервалі $(0,a)$ і не дає сильного екстремуму. Нижня дає сильний мінімум.

6.71. $\hat{x} \equiv 0$ — єдина екстремаль, $\hat{x} \notin \mathrm{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$ $(x_n \equiv n), S_{\max} = +\infty$.

6.72. $\hat{x} = \cosh(t) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.73. $\hat{x} = e^t + \sin(t) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.74. $\hat{x} = \sin(t) + \cos(t) \notin \mathrm{locextr}$, $S_{\min} = -\infty$ $(x_n \equiv n)$, $S_{\max} = +\infty$.

6.75. *Розв'язання.* 1. Складемо лагранжіан $L = (x')^2 + x^2$, $l = \alpha x^2(a)$.

2. Запишемо необхідні умови:

а) рівняння Ейлера $x'' - x = 0$;

б) трансверсальності $x'(0) = 0$, $x'(a) = -\alpha x(a)$.

3. Загальний розв'язок рівняння Ейлера $x = C_1\cosh(t) + C_2\sinh(t)$. Допустимі екстремалі $\hat{x}_1 \equiv 0\,\forall\alpha$, $\hat{x}_2 = C\cosh(t)$ при $\alpha = -\tanh(a)$.

4. Перевіримо умови другого порядку. Умова Лежандра виконується ($\hat{L}_{x'x'} = 2 > 0$). Інтегрант L регулярний. Умова Якобі теж виконується. Побудуємо квадратичну форму $P + Q$. Оскільки $h_1 = \sinh(t)/\sinh(a)$, $h_0 = \sinh(a-t)/\sinh(a)$, то матриця $P+Q$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2\coth(a) & -2/\sinh(a) \\ -2/\sinh(a) & 2\alpha + 2\coth(a) \end{vmatrix}.$$

Матриця $P + Q$ додатно визначена при $\alpha > -\tanh(a)$, невід'ємно визначена при $\alpha = \tanh(a)$ і невизначена при $\alpha < -\tanh(a)$, *Відповідь.* Якщо $\alpha > -\tanh(a)$, то $\hat{x} \equiv 0 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$. Якщо $\alpha = -\tanh(a)$, то $\hat{x} = C\cosh(t) \in \text{absmin}\ \forall\, C \in R$. При $\alpha < -\tanh(a)$ екстремаль $\hat{x} \equiv 0 \notin \text{locmin}$, $S_{\min} = -\infty$ $(x_n = n\cosh(t))$; $S_{\max} = +\infty\ \forall\, \alpha$.

6.76. $\hat{x} = 3t^2 - 2t^3 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.77. $\hat{x} = t(t-1)^2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.78. $\hat{x} = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.79. $\hat{x} = t^4 \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\infty$.

6.80. $\hat{x} = t^2(t^3 - 2t + 1)/10 \in \text{absmax}$, $S_{\min} = -\infty$.

6.81. $\hat{x} = (t^5 + 3t^3 - 2t^2)/10 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.82. $\hat{x} = \sinh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.83. $\hat{x} = \cosh(t) - \cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.84. *Розв'язання.* 1. $L = (x'')^2 - x^2$.

2. Складемо рівняння Ейлера – Пуассона $x^{(4)} - x = 0$.

3. Загальний розв'язок рівняння

$$x = C_1\sin(t) + C_2\cos(t) + C_3\sinh(t) + C_4\cosh(t).$$

Якщо $\cosh(a)\cos(a) \neq 1$, то єдина допустима екстремаль $\hat{x} \equiv 0$. У тому випадку, коли $\cosh(a)\cos(a) = 1$, маємо $\hat{x}_2 = C((\sinh(a)\sin(a))(\cosh(t) - \cos(t)) - (\cosh(a) - \cos(a))(\sinh(t) - \sin(t)))$.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму. Умова Лежандра виконується $\hat{L}_{x'x'} = 2 > 0$. Інтегрант L регулярний. Перевіримо умову Якобі. Рівняння Якобі має розв'язки $h_1 = \cosh(t) - \cos(t)$, $h_2 = \sinh(t) - \sin(t)$. Нехай

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1' & h_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \coth(t) - \cos(t) & \sinh(t) - \sin(t) \\ \sinh(t) + \sin(t) & \coth(t - \cos(t)) \end{bmatrix}.$$

Тоді $H(0) = 0$, а матриця $H''(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ невироджена. Спряжені точки t^* визначаються за допомогою співвідношення $\det H(t) = 0$, що приводить до рівняння $\cos(t)\cosh(t) = 1$.

Відповідь. Якщо $a < t^*$, то $\hat{x} \equiv 0 \in \text{absmin}$. Якщо $a > t^*$, то $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

6.85. $\hat{x} = \sinh(t) - \sin(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.86. $\hat{x} = C_1\sinh(t)\sin(t) + C_2(\cosh(t)\sin(t)\sinh(t)\cos(t)) \in \text{absmin}$, $C_1 = (2b_0\sinh(a)\sin(a)\sqrt{2}b_1(\cosh(a)\sin(a) - \sinh(a)\cos(a)))\times$ $\times(\sinh^2(a) - \sin^2(a))^{-1}$, $C_2 = (b_1\sinh(a)\sin(a) - b_0(\cosh(a)\sin(a) - \sinh(a)\cos(a)))(\sinh^2(a) - \sin^2(a))^{-1}$.

6.87. $\hat{x} = -\cosh(t)\cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.88. $\hat{x} = -\sin(t)\sinh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.89. $\hat{x} = t + \cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

6.90. $\hat{x} = (1 - \cos(t))/2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.91. $\hat{x} = \cosh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.92. $\hat{x} = \sinh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.93. $\hat{x} \equiv 0 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.94. $\hat{x} = te^t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.95. $\hat{x} = e^t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.96. $\hat{x} = t^2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.97. $\hat{x} = \ln(t+1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.98. $\hat{x} = t\ln(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.99. $\hat{x} = 1/(1+t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.100. $\hat{x} = t^3 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.101. $\hat{x} = t^4 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
6.102. $\hat{x} = \sinh(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

7.1. Пряма $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $ab = 2S$.

7.2. Коло $(x - R)^2 + y^2 = R^2$.

7.3. Ланцюгова лінія $y + \lambda = C \cdot \cosh(x/C)$.

7.4. Дуга кола, що перетинає під прямим кутом сторону кута, який проходить через точку M_2.

7.5. Півколо радіуса $(b - a)/2$ побудовано на діаметрі, паралельному осі OX.

7.6. $\hat{x} = 3t^2 - 4t + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.7. $\hat{x} = 3t^2 + 2t + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.8. $\hat{x} = (5t^3 - 3t)/2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.9. $\hat{x} = 5t^3 + 3t - 4 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.10. $\hat{x} = 60t^3 - 96t^2 + 36t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.11. $\hat{x} = -10t^3 - 12t^2 + 6t + 2 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.12. $\hat{x} = \cos(t) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.13. $\hat{x} = (t - 2\sin(t))/\pi \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.14. $\hat{x} = t + \sin(t) \in \text{absmax}$, $t - \sin(t) \in \text{absmin}$.
7.15. $\hat{x} = 2\sin(t) + \cos(t) + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.16. $\hat{x} = 2e^{1-t} + 1 - t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.17. $\hat{x} = 2(1 - e^t)/(e^2 - 4e + 3) + (e - 1)t/(e - 3) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.18. *Розв'язання.* 1. Складемо лагранжіан

$$L = \lambda_0((x')^2 + x^2) + \lambda x e^t.$$

2. Запишемо рівняння Ейлера $2\lambda_0(-x'' + x) + \lambda e^t = 0$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$ і всі множники Лагранжа — нулі. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. Рівняння Ейлера $x'' - x = \lambda e^t$ має загальний розв'язок $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 t e^t$. Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = te^t$.

7.19. $\hat{x} = te^{-t}$, $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

7.20. *Розв'язання.* 1. Складемо лагранжіан

$$L = \lambda_0 t^2 (x')^2 + \lambda t x.$$

2. Запишемо рівняння Ейлера

$$-\frac{d}{dt}(2\lambda_0 t^2 x') + \lambda t = 0.$$

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$ і всі множники Лагранжа — нулі. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. Рівняння Ейлера $x' = \lambda/2 + C/t^2$ має загальний розв'язок $x = C_1 t + C_2/t + C_3$. Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = t$.

4. Безпосередня перевірка показує, що $\hat{x} = t \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

7.21. $\hat{x} = 4/t^2 \in \mathrm{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

7.22. *Розв'язання.* 1. Складемо лагранжіан

$$L = \lambda_0 (x')^2 + \lambda x^2.$$

2. Запишемо рівняння Ейлера $\lambda_0 x'' - \lambda x$.

3. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda = 0$ і всі множники Лагранжа — нулі. Нехай $\lambda_0 = 1$. Рівняння Ейлера $x'' = \lambda x$ має загальний розв'язок:

а) $\lambda > 0 \Rightarrow x = C_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} t}$,

б) $\lambda = 0 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$,

в) $\lambda < 0 \Rightarrow x = C_1 \sin(\sqrt{-\lambda} t) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda} t)$.

При $\lambda > 0$ та $\lambda = 0$ допустимих екстремалей немає. При $\lambda < 0$ екстремалі мають вигляд

$$\hat{x} = \sqrt{2} \sin(\pi k t), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4. Абсолютний мінімум дає функція $\hat{x} = \pm\sqrt{2}\sin(\pi t)$, оскільки

$$\int_0^1 ((x')^2 - \pi^2 x^2)\, dt = \int_0^1 (x' - \pi \operatorname{ctg}(\pi t) x)^2\, dt \quad \forall\, x(\cdot) \in C^1([0,1]),$$
$$x(0) = x(1) = 0, \quad S_{\min} = \pi^2,\ S_{\max} = +\infty.$$

7.23. $\hat{x} = \pm\sqrt{2}\sin(\pi t)$.

7.24. $\hat{x} = \pm\sqrt{2}\sin(\pi t)$.

7.25. $\hat{x} = \frac{2}{3}(t+1)^{3/2}$.

7.26. $\hat{x} = \left(\frac{7}{2}\right)^{1/5} \sqrt{t}$.

7.28. $\hat{x} = \frac{5}{4}(5t^4 - 1)$.
7.29. $\hat{x} = \frac{4}{\pi} t \sin(t) + C \sin(t)$, $C \in R$.
7.30. $\hat{x} = \frac{8}{\pi} t \cos(t)$.
7.31. $\hat{x} = (2t - t^2)/4$.
7.32. $\hat{x}_1 = -6t^2 + 6t$, $\hat{x}_2 = 3t^2 - 2t$, $S_{\min} = -\infty$, $\quad S_{\max} = +\infty$.
7.33. $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = 5t^3/2 - 3t/2$, $S_{\min} = -\infty$, $\quad S_{\max} = +\infty$.
7.34. $\hat{x}^1 = (3t^2 - 2t, 3t^2 - 6t)$, $\hat{x}^2 = (-3t^2 + 4t, -3t^2)$,
$S_{\min} = -\infty$, $\quad S_{\max} = +\infty$.
7.35. $\hat{x}^1 = (3t - t^3, t^3 - t)$, $\hat{x}^2 = (t^3 + t, -t^3 + t)$,
$S_{\min} = -\infty$, $\quad S_{\max} = +\infty$.
7.36. $\hat{x} = ((7t - 5t^2)/2, t)$.

7.37. $\hat{x} = \cos(t) - 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.38. $\hat{x} = 2(e^t - te - 2)/(e^2 - 4e + 1) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.39. $\hat{x} = 2(te - t - e^t + 1)/((3 - e)(e - 1)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.40. $\hat{x} = \pm\sqrt{2}\cos(\pi k t)$, $k \in N$, $\hat{x} \equiv \pm 1 \in \text{absmin}$,
$S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.
7.41. $\hat{x} = \pm\sqrt{2}\cos(\pi t) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \pi^2$, $S_{\max} = +\infty$.
7.42. $\hat{x}_k = \pm\sqrt{2}\sin(1/2 + k)\pi t)$, $k \in Z$, $\hat{x}_1 \in \text{absmin}$,
$S_{\min} = \pi^2$, $S_{\max} = +\infty$.
7.43. $\hat{x} = \sqrt{1 - t^2} \in \text{absmax}$, $\hat{x} = -\sqrt{1 - t^2} \in \text{absmin}$.
7.44. $\hat{x} = \sqrt{1 - t^2} \in \text{absmax}$, $\hat{x} = -\sqrt{1 - t^2} \in \text{absmin}$.
7.45. $\hat{x} = \sqrt{5}(t^4 - 2t^3 + t)/2\sqrt{6} \in \text{absmax}$, $-\hat{x} \in \text{absmin}$,
$S_{\max} = -S_{\min} = 1/2\sqrt{30}$.
7.46. $\hat{x} = \sqrt{5}(t^4/3 - 5t^3/6 + t^2/2) \in \text{absmax}$, $-\hat{x} \in \text{absmin}$,
$S_{\max} = -S_{\min} = 1/8\sqrt{5}$.
7.47. $\hat{x} = \sqrt{5}t^2(t - 1)^2/2 \in \text{absmax}$, $-\hat{x} \in \text{absmin}$,
$S_{\max} = -S_{\min} = 1/12\sqrt{5}$.
7.48. $\hat{x} = 2t \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.
7.49. $\hat{x} = 5(t^4 - 6t^2 + 5)/16 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 15/2$, $S_{\max} = +\infty$.
7.50. $\hat{x} = 15t^2(t - 2)^2/8 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 45$, $S_{\max} = +\infty$.
7.51. $\hat{x} = 30t^2(t - 1)^2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 720$, $S_{\max} = +\infty$.
7.52. $\hat{x} = C((\cosh(\omega t) - \sin(\omega t))(\cosh(\omega) + \cos(\omega)) + (\cos(\omega t) -$
$- \cosh(\omega t))(\sinh(\omega) + \sin(\omega))) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \omega^4$,
$\cosh(\omega)\cos(\omega) = -1$, $\omega > 0$, $S_{\max} = +\infty$.
7.53. $\hat{x} = C((\sinh(\omega t) - \sin(\omega t))(\cosh(\omega) - \cos(\omega)) + (\cos(\omega t) -$
$- \cosh(\omega t))(\sinh(\omega) - \sin(\omega))) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \omega^4$,
$\cosh(\omega)\cos(\omega) == 1, \omega > 0$, $S_{\max} = +\infty$.
7.54. $\hat{x} = C((\sinh(\omega t) + \sin(\omega t))(\cosh(\omega) - \cos(\omega)) + (\cos(\omega t) -$
$- \cosh(\omega t))(\sinh(\omega) - \sin(\omega))) \in \text{absmin}$, $S_{\min} = \omega^4$,
$\cosh(\omega)\cos(\omega) = 1, \omega > 0$, $S_{\max} = +\infty$.

7.55. $\hat{x}_k = \sqrt{2}\sin(2\pi kt + \gamma), \gamma \in R^1$, $\hat{x}_1 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = (2\pi)^4$, $S_{\max} = +\infty$.
7.56. $\hat{x} = t(1-t) \in \text{absmin}$, $T = 1$, $S_{\max} = +\infty$.
7.57. $\hat{x} = t^2/2 \in \text{absmin}$, $T = 1$, $S_{\max} = +\infty$.
7.58. $\hat{x} = t^3/16 - t^2/4 \in \text{absmin}$, $T = 4$, $S_{\max} = +\infty$.
7.59. $\hat{x} = t^2 \in \text{absmin}$, $T = 1$, $S_{\max} = +\infty$.
7.60. $\hat{x} = t^3 - t^2 \in \text{absmax}$, $\hat{x} = t^2 - t^3 \in \text{absmin}$,
7.61. $\hat{x} = 3t^2 - 2t^3 \in \text{absmax}$, $\hat{x} = 2t^3 - 3t^2 \in \text{absmin}$,
7.62. $\hat{x} = 3t - t^2/2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 3$, $S_{\max} = +\infty$.
7.63. $\hat{x} = 6t - 6t^2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 12$, $S_{\max} = +\infty$.
7.64. $\hat{x} = 15t/4 - 5t^3/4 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 15/2$, $S_{\max} = +\infty$.
7.65. $\hat{x} = 15(t - t^3)/2 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 45$, $S_{\max} = +\infty$.
7.66. $\hat{x} = 5t^3/8 - 15t/8 + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 15/8$, $S_{\max} = +\infty$.
7.67. $\hat{x} = -20t^3/3 + 14t^2 - 8t + 1 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 8$, $S_{\max} = +\infty$.
7.68. $\hat{x} = 20t^3/3 - 6t^2 + 1/3 \in \text{absmin}$, $S_{\min} = 8$, $S_{\max} = +\infty$.
7.69. $\hat{x} = 10t^3/3 - 12t^2 + 3t \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.70. $\hat{T} = 1/3$, $\hat{x} \equiv 3 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.71. $\hat{T} = 1/3$, $\hat{x} \equiv 1 \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.72. $\hat{x} = 2(t + \sin(t))/(3\pi) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.73. $\hat{x} = 2\sin(t)/\pi \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.74. $\hat{x} = 8(1 - \cos(t) - \pi(t + \sin(t))/4)/(16 - 3\pi^2)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
7.75. $\hat{x} = (3t^2 - 2t, 6t^2 - 4t)$, $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.
8.1. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\cosh(t) + C\sinh(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.2. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\cosh(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.3. $(\hat{x}, \hat{u}) = (t\cosh(t), 2\sinh(t)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.4. $(\hat{x}, \hat{u}) = (t\sinh(t), 2\cosh(t)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.5. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\sin(t) + C\cos(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.6. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\sin(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.7. $(\hat{x}, \hat{u}) = (t\cos(t), -2\sin(t)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.8. $(\hat{x}, \hat{u}) = ((t - \pi/2)\sin(t), 2\cos(t)) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.9. $(\hat{x}, \hat{u}) = (C\sin(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.10. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\sin(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.11. $(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\dfrac{-2(t+2)\cos(t)}{4+\pi}, \dfrac{4\sin(t)}{4+\pi}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.12. $(\hat{x}, \hat{u}) =$
$$= \left(\frac{-(2\pi t + 4\pi)\cos(t) + (4t - 2\pi)\sin(t)}{4 - 4\pi - \pi^2}, \frac{8\cos(t) - 4\pi\sin(t)}{4 - 4\pi - \pi^2}\right),$$
$(\hat{x}, \hat{u}) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.13. $(\hat{x}, \hat{u}) = (C\cosh(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.
8.14. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\cosh(t), 0) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

8.15. $\hat{x} = (3t\sinh(1)\cosh(t) + (t\sinh(1) - t\cosh(1) - \sinh(1) -$
$-2\cosh(1))\sinh(t))/(\sinh(2) + \sinh^2(1) - 3),$

$$\hat{u} = \frac{6\sinh(1)\sinh(t) + 2(\sinh(1) - \cosh(1))\cosh(t)}{\sinh(2) + \sinh^2(1) - 3},$$

$(\hat{x}, \hat{u}) \in \text{absmin}$, $S_{\max} = +\infty$.

8.16. $(\hat{x}, \hat{u}) = \left(\dfrac{(4+2t)\sin(t)}{4+\pi}, \dfrac{4\cos(t)}{4+\pi}\right) \in \text{absmin}, \quad S_{\max} = +\infty.$

8.17. $(\hat{x}, \hat{u}) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\cosh(\sqrt{2}t) + \sinh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}\cosh(\sqrt{2}) + \sinh(\sqrt{2})}, \frac{\sinh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}\cosh(\sqrt{2}) + \sinh(\sqrt{2})}\right)$$

$(\hat{x}, \hat{u}) \in \text{absmin}, \quad S_{\max} = +\infty.$

8.18. $(\hat{x}, \hat{u}) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\cosh(t-1) + \sinh(t-1)}{\sqrt{2}\cosh(1) - \sinh(1)}, \frac{\sinh(t-1)}{2\cosh(1) - \sqrt{2}\sinh(1)}\right)$$

$(\hat{x}, \hat{u}) \in \text{absmin}, \quad S_{\max} = +\infty.$

8.19. $(\hat{x}, \hat{u}) \in \text{absmin}$, $\hat{x} = (C_1 t + C_2)\cosh(t) + (C_3 t + C_4)\sinh(t)$, $\hat{u} = \hat{x}'' + \sqrt{2}(x')$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 визначаються за умов $x(0) = 1$, $\hat{u}(0) = \hat{u}(1) = \hat{u}'(1) = 0$; $S_{\max} = +\infty$.

8.20. $(\hat{x}, \hat{u}) \in \text{absmin}$, $\hat{x} = (C_1 t + C_2)\cosh(t) + (C_3 t + C_4)\sinh(t)$, $\hat{u} = \hat{x}' - \sqrt{2}\hat{x}'$. Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 визначаються за умов $x(0) = 1$, $\hat{u}(0) = \hat{u}(1) = \hat{u}'(1) = 0$; $S_{\max} = +\infty$.

8.21. $(\hat{x}, \hat{u}) = (\cos(t) - \cot(\hat{T})\sin(t), 0) \in \text{absmin}$, $\forall \hat{T} \neq k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$, $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = +\infty$.

8.22. $(\hat{x}, \hat{u}) = ((t/4 + 1 - \pi/8)\sin(t), \cos(t/2))$.

8.23. *Розв'язання.* 1. Перейдемо до полярних координат
$x = r\sin(\varphi)$, $y = r\cos(\varphi)$. Тоді
$x' = r'\sin(\varphi) + r\varphi'\cos(\varphi)$, $y' = r'\cos(\varphi) - r\varphi'\sin(\varphi)$.
Тому

$$x'y - y'x = r^2\varphi' = 1,$$
$$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + r^2(\varphi')^2 = (r')^2 + \varphi'.$$

Отже, матимемо таку задачу Лагранжа:

$$\int_0^1 u^2(t)\,dt \to \text{extr},$$
$$\varphi' = r^{-2}, \quad r' = u, \quad r(0) = r(1) = 1, \quad \varphi(1) = 1.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^1 (\lambda_0 u^2 + p_1(\varphi' - r^{-2}) + p_2(r' - u))\,dt + \lambda_1 r(0) + \\ + \lambda_2 r(1) + \lambda_3 \varphi(0) + \lambda_4 \varphi(1).$$

3. Запишемо необхідні умови ектремуму:

а) систему рівнянь Ейлера

$$L_r - \frac{d}{dt}L_{r'} = 0,\ L_\varphi - \frac{d}{dt}L_{\varphi'} = 0 \Rightarrow -p_2' + 2p_1 r^{-3} = 0,\ p_1' = 0;$$

б) трансверсальності по r та φ

$$p_1(0) = \lambda_3; \quad p_1(1) = -\lambda_4, \quad p_2(0) = \lambda_1, \quad p_2(1) = -\lambda_2;$$

в) стаціонарності по u

$$2\lambda_0 u - p_2 = 0.$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то всі множники Лагранжа нулі. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1/2$. З умови стаціонарності по u та рівняння Ейлера дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$r'' - C/r^3 = 0 \Rightarrow r''r' - Cr'/r^3 = 0 \Rightarrow (r')^2 + C/r^2 = C'.$$

Але $r''r' - C/r^2 = 0$. Тому

$$(r^2/2)'' = (r')^2 + r''r = C', \quad r^2 = C_1t^2 + C_2t + C_3.$$

Із початкових умов маємо $r^2 = A(1-t)t+1$. Тому $\varphi' = (1+At(1-t))^{-1}$. Оскільки

$$\varphi(1) = \int_0^1 (1 + At(1-t))^{-1}\,dt = 1,$$

то $A = 0$. Отже, $\hat{r}(t) = 1$, $\hat{\varphi}(t) = t$.

Відповідь. Єдина допустима екстремаль $\hat{x} = \sin(t)$, $\hat{y} = \cos(t)$.

9.1. $\hat{x} = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \le t \le -\pi/2, \\ -t, & -\pi/2 \le t \le \pi/2, \\ t - \pi, & \pi/2 \le t \le \pi, \end{cases}$

$\hat{x} \in \operatorname{absmin}$, $-\hat{x} \in \operatorname{absmax}$.

9.2. $\hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le \pi/4, \\ t - \pi/2, & \pi/4 \le t \le 7\pi/4, \end{cases}$

$\hat{x} \in \operatorname{absmin}$, $-\hat{x} \in \operatorname{absmax}$.

9.3. $\hat{x} = \begin{cases} t^2/4 - 3, & 0 \le t \le 2, \\ t - 4, & 2 \le t \le 4, \end{cases}$

$\hat{x} \in \operatorname{absmin}$, $4 - t \in \operatorname{absmax}$.

9.4. $T_0 \le 2 \Rightarrow t^2/4 - tT_0/2 \in \operatorname{absmin}$;

$$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le T_0 - 2, \\ (t - T_0)^2/4 + 1 - T_0, & T_0 - 2 \le t \le T_0, \end{cases}$$
$\hat{x} \in \text{absmin}$, $t \in \text{absmax}$.

9.5. $T_0 \le 2 \Rightarrow \hat{x} = (t - T_0)^2/4 + \xi - T_0^2/4 \in \text{absmin}$;
$$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t + \xi, & 0 \le t \le T_0 - 2, \\ (t - T_0)^2/4 + 1 + \xi - T_0, & T_0 - 2 \le t \le T_0, \end{cases}$$
$\hat{x} \in \text{absmin}$, $t + \xi \in \text{absmax}$.

9.6. $\xi \le 0 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$;
$0 < \xi \le 1 \Rightarrow \hat{T} = 2\sqrt{\xi}$, $\hat{x} = t^2/4 - \sqrt{\xi}t + \xi$;
$\xi > 1 \Rightarrow \hat{T} = 1 + \xi$,
$$\hat{x}_{\min} = \begin{cases} -t + \xi, & 0 \le t \le \xi - 1, \\ (t - \xi - 1)^2/4, & \xi - 1 \le t \le 1 + \xi, \end{cases}$$
$S_{\min} = -\infty$ $(T_n = n,\ x_n = \xi - t)$,
$S_{\max} = +\infty$ $(T_n = n,\ x_n = \xi + t)$.

9.7. $T_0 \le 2 \Rightarrow \hat{x} = t^2/4 + \xi - T_0^2/4 \in \text{absmin}$;
$$T_0 > 2 \Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} t^2/4 + 1 + \xi - T_0, & 0 \le t \le 2, \\ t + \xi - T_0, & 2 \le t \le T_0, \end{cases}$$
$\hat{x} \in \text{absmin}$, $-t + T_0 + \xi \in \text{absmax}$.

9.8. $T_0 \le 4 \Rightarrow \hat{x} = t(t - T_0)/4 \in \text{absmin}$; $T_0 > 4 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le T_0/2 - 2, \\ (t - T_0/2)^2/4 + 1 - T_0/2, & T_0/2 - 2 \le t \le T_0/2 + 2, \\ t - T_0, & T_0/2 + 2 \le t \le T_0, \end{cases}$$
$\hat{x} \in \text{absmin}$;
$$\hat{x} = \begin{cases} t, & 0 \le t \le T_0/2 - 2, \\ T_0 - t, & T_0/2 \le t \le T_0, \end{cases} \qquad \hat{x} \in \text{absmax}.$$

9.9. $\xi \le 0 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$;
$0 < \xi \le 1 \Rightarrow \hat{T} = 2\sqrt{\xi}$, $\hat{x} = t^2/4$;
$$\xi > 1 \Rightarrow \hat{x}_{\min} = \begin{cases} t^2/4, & 0 \le t \le 2, \\ t - 1, & 2 \le t \le \hat{T}, \end{cases}$$
$\hat{T} = 1 + \xi$; $S_{\min} = -\infty$, $S_{\max} = +\infty$.

9.10. $|\xi| \le \coth(T_0) \Rightarrow \hat{x} = \xi \cosh(t - T_0)/\cosh(T_0) \in \text{absmin}$,
$|\xi| > \coth(T_0) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{cases} \xi - t \operatorname{sign} \xi, & 0 \le t \le |\xi| - \sqrt{1 + C^2}, \\ C \cosh(t - T_0) \operatorname{sign} \xi, & |\xi| - \sqrt{1 + C^2} \le t \le T_0, \end{cases}$$
$C \sinh(|\xi| - \sqrt{1 + C^2} - T_0) = -1$,
$\hat{x} \in \text{absmin}$, $\xi + t \in \text{absmax}$.

9.11. $\hat{x} = -t^2 \in \text{absmin}$, $\hat{x} = t^2 \in \text{absmax}$.

9.12. $\hat{x} = -(t-1)^2 \in \text{absmin}$, $\hat{x} = (t-1)^2 \in \text{absmax}$.
9.13. $\hat{x} = t^2 - 2t \in \text{absmin}$, $\hat{x} = 2t - t^2 \in \text{absmax}$.
9.14. $\hat{x} = (t-2)^2 - 2 \in \text{absmin}$, $\hat{x} = 2 - (t-2)^2 \in \text{absmax}$.
9.15. $\hat{x} = t^2 - 2 \in \text{absmin}$, $\hat{x} = 2 - t^2 \in \text{absmax}$.
9.16. $\hat{x} = t^2 - t \in \text{absmin}$, $\hat{x} = t - t^2 \in \text{absmax}$.
9.17. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 2-\sqrt{2}, \\ t^2 - (8-4\sqrt{2})t + 12 - 8\sqrt{2}, & 2-\sqrt{2} \le t \le 2, \end{cases}$
$\hat{x} \in \text{absmin}$, $-\hat{x} \in \text{absmax}$.
9.18. $\hat{x} = \begin{cases} t^2 - 2, & 0 \le t \le 1, \\ -(t-2)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$ $\hat{x} \in \text{absmin}$, $-\hat{x} \in \text{absmax}$.
9.19. *Розв'язання.* 1. Зведемо задачу до вигляду

$$\int_0^2 x_1\,dt \to \inf,$$
$$x_1' = x_2, \quad x_2' = u, \quad |u| \le 2, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_2(2) = 0.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^2 (\lambda_0 x_1 + p_1(x_1' - x_2) + p_2(x_2' - u))\,dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2).$$

3. Запишемо необхідні умови:
а) систему рівнянь Ейлера
$-p_1' + \lambda_0 = 0$, $-p_2' - p_1 = 0$;
б) трансверсальності по x
$p_1(0) = \lambda_1$; $p_1(2) = 0$, $p_2(0) = \lambda_2$, $p_2(2) = -\lambda_3$;
в) оптимальності по u
$\min\limits_{|u|\le 2}(-p_2 u) = -p_2\hat{u}$.
4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $p_1(t) \equiv 0 \Rightarrow p_2'(t) = 0 \Rightarrow p_2(t) = C \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{u}(t) = \pm 2 \Rightarrow \hat{x} = \pm t^2 + C_1 + C_2$. Із граничних умов випливає, що допустимих екстремалей немає.

Нехай $\lambda_0 = 1$. Тоді $p_1 = t - 2 \Rightarrow p_2 = -(t-2)^2/2 + C$. З умови оптимальності по u випливає, що $\hat{u} = 2\,\text{sign}\,p_2$. Оскільки при $\hat{u} \equiv C$ допустимих екстремалей немає, то потрібно дослідити керування $\hat{u}$, яке має перемикання в точці τ на відрізку $[0,2]$. Це може відбуватися лише тоді, коли функція $p_2(t)$ змінює знак у точці τ з мінуса на плюс. Отже,

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -2, & 0 \le t \le \tau, \\ 2, & \tau \le t \le 2. \end{cases}$$

Тоді

$$\hat{x}=\begin{cases}-t^2+C_1t+C_2, & 0\le t\le \tau,\\ t^2+C_3t+C_42, & \tau\le t\le 2.\end{cases}\Rightarrow \hat{x}=\begin{cases}-t^2, & 0\le t\le 1,\\ (t-2)^2-2, & 1\le t\le 2.\end{cases}$$

Невідомі константи на точку τ визначаємо з умови неперервності x та x' у точці τ та граничних умов.

5. Покажемо, що $\hat{x}\in\operatorname{absmin}$. Нехай функція $h(\cdot)$ така, що $\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)$ допустима. Інтегруючи частинами та користуючись співвідношеннями $p'(2)=0$, $p''=-1$, $h(0)=h'(0)=h'(2)=0$, $p=p_2=1/2-(t-2)^2/2$, дістанемо

$$\int_0^2(-ph'')\,dt=-ph'\Big|_0^2+p'h\Big|_0^2-\int_0^2 p''h\,dt=\int_0^2 h\,dt,$$

звідки

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))=\int_0^2(-ph'')\,dt\ge 0,$$

оскільки $p(t)\le 0$, $h''(t)\ge 0$ при $t\in[0,1]$ і $p(t)\ge 0$, $h''(t)\le 0$ при $t\in[1,2]$.

9.20. $\hat{x}=\begin{cases}-t^2, & 0\le t\le 1,\\ (t-2)^2-2, & 1\le t\le 3,\\ -(t-4)^2, & 3\le t\le 4,\end{cases}$ $\hat{x}\in\operatorname{absmin}$, $-\hat{x}\in\operatorname{absmax}$.

9.21. $\hat{T}=1$, $\hat{x}=\begin{cases}-t^2-2t, & -1\le t\le 0,\\ t^2-2t, & 0\le t\le 1,\end{cases}$ $\hat{x}\in\operatorname{absmin}$.

9.22. $\hat{T}=1$, $\hat{x}=\begin{cases}t^2+2t, & -1\le t\le 0,\\ -t^2+2t, & 0\le t\le 1,\end{cases}$ $\hat{x}\in\operatorname{absmin}$.

9.23. $\hat{T}=2$, $\hat{x}=\begin{cases}t^2+1, & 0\le t\le 1,\\ -t^2+4t-1, & 1\le t\le 2,\end{cases}$ $\hat{x}\in\operatorname{absmin}$.

9.24. $\hat{T}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $\hat{x}=\begin{cases}-t^2/2+1, & 0\le t\le\sqrt{3},\\ (\sqrt{3}t-4)^2/2-1, & \sqrt{3}\le t\le\hat{T},\end{cases}$
$\hat{x}\in\operatorname{absmin}$.

9.25. $\hat{T}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$, $\hat{x}=\begin{cases}-3t^2/2+3, & 0\le t\le 2/\sqrt{3},\\ (t-8\sqrt{3}t)^2/2-5, & 2/\sqrt{3}\le t\le 8/\sqrt{3},\end{cases}$
$\hat{x}\in\operatorname{absmin}$.

9.26. $\xi_2\ge 0\Rightarrow\hat{T}=\xi_2$, $\hat{x}=-t^2/2+\xi_2t+\xi_1\in\operatorname{absmin}$,
$\xi_2<0\Rightarrow\hat{T}=-\xi_2$, $\hat{x}=t^2/2+\xi_2t+\xi_1\in\operatorname{absmin}$.

9.27. $\xi_1>0\Rightarrow\hat{T}=\xi_2+\sqrt{\xi_2^2+2\xi_1}$, $\hat{x}=-t^2/2+\xi_2t+\xi_1\in\operatorname{absmin}$,
$\xi_1<0\Rightarrow\hat{T}=-\xi_2+\sqrt{\xi_2^2-2\xi_1}$, $\hat{x}=t^2/2+\xi_2t+\xi_1\in\operatorname{absmin}$.

$\xi_1 = 0 \Rightarrow \hat{T} = 0.$

9.28. $\hat{x} = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ -(t-1)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.29. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ -2t+1, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.30. $\hat{x} = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 3-(t-2)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.31. $\hat{x} = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.32. $\hat{x} = \begin{cases} (t-1)^2, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.33. $\hat{x} = \begin{cases} 8t^3 - 18t + 11, & 0 \le t \le 1/2, \\ 12(t-1)^2, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.34. $\hat{x} = \begin{cases} -t^3 + 6t^2, & 0 \le t \le 1, \\ 3t^2 + 3t - 1, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.35. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2/2, & 0 \le t \le 1/2, \\ t^3/3 - t^2 + t/4 - 1/24, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \quad \hat{x} \in \text{absmin}.$

9.36. $\hat{x} = t \in \text{absmax}$, $\hat{x} = -t \in \text{absmin}$.

9.37. $T_0 < 2 \Rightarrow \hat{x} \in \varnothing$, $T_0 \ge 2 \Rightarrow \hat{x} = t\sqrt{2/T_0}$,
$\hat{x} \in \text{absmax}$, $-\hat{x} \in \text{absmin}$.

9.38. *Розв'язання.* 1. Зведемо задачу до вигляду

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2 + u^2}{2} + |u| \right) dt \to extr, \quad x' = u, \quad x(1) = \xi.$$

2. Складемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left(\lambda_0 \left(\frac{x^2 + u^2}{2} + |u| \right) + p(x' - u) \right) dt + \lambda x(1).$$

3. Запишемо необхідні умови:
а) рівняння Ейлера $-p' + \lambda_0 x = 0$;
б) трансверсальності по x
$p(0) = 0; \quad p(1) = -\lambda;$
в) оптимальності по u

$$\min_{u \in R} \left(\lambda_0 \left(\frac{u^2}{2} + |u| \right) - pu \right) = \lambda_0 \left(\frac{(\hat{u})^2}{2} + |\hat{u}| \right) - p\hat{u}.$$

4. Якщо $\lambda_0 = 0$, то $p \equiv 0$, $\lambda = 0$. Усі множники Лагранжа — нулі. Допустимих екстремалей немає. Нехай $\lambda_0 = 1$ в задачі на мінімум. Тоді

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & |p| < 1, \\ p-1, & p \geq 1, \\ p+1, & p \leq -1. \end{cases}$$

Оскільки $p(0) = 0$, то $\hat{u}(t) = 0$ при малих t. Отже, $\hat{x}(t) = C$. За умов а), б) $p(t) = Ct$ при таких t. При $t = 1/|C|$ модуль $p(t)$ дорівнює 1. Це точка перемикання керування. Нехай $|p| \geq 1$. Тоді $\hat{u}' = p' \Rightarrow x'' - x = 0$. Із неперервності $\hat{u} = x'$ дістаємо, що $x = C\cosh(t-1)/|C|$. Константа C визначається з умови $x(1) = \xi$.

5. Допустима екстремаль: $|\xi| \leq 1 \Rightarrow \hat{x}_{\min} = \xi$;

$$|\xi| > 1 \Rightarrow \hat{x}_{\min} = \begin{cases} C, & 0 \leq t \leq 1/|C|, \\ C\cosh(t - 1/|C|), & 1/|C| \leq t \leq 1, \end{cases}$$

де C визначається з рівняння $C\cosh(t - 1/|C|) = \xi$. Через опуклість задачі $\hat{x}_{\min} \in \text{absmin}$.

9.39. Оптимальна траєкторія — коло радіуса $T_0/2\pi$.

9.40. Оптимальна траєкторія — еліпс $(x^2+y^2)^{1/2} - \xi y = C$.

9.41. Оптимальна траєкторія — еліпс $(x/b)^2 + (y/a)^2 = R^2$.

9.42. Оптимальна траєкторія — квадрат $|x| + |y| = C$.

9.43. Оптимальна траєкторія — квадрат $|x| = C_1$, $|y| = C_2$.

9.44. $\hat{x} = -\dfrac{p}{2}(-\ln(u) + u^2 + 3u^4/4) + 7p/2$,

$t = -\dfrac{p}{2}(1/u + 2u + u^2)$, $p < 0$.

9.45. Допустимі екстремалі

$$\hat{x}_n(t) = \int_0^t \operatorname{sign}\cos\left((2n+1)(\pi/2)\tau\right)\, d\tau, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

$\hat{x} \in \text{absmax}$.

Література

1. Алексеев В. М. Сборник задач по оптимизации/ В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М. : Наука, 1984, – 288 с.
2. Алексеев В. М. Оптимальное управление/ В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979, – 430 с.
3. Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. – М. : Наука, 1981. – 304с.
4. Беллман Р. Динамическое программирование/ Р. Беллман. – М. : ИЛ, 1960. – 400с.
5. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи/ Э.М. Галеев. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 304 с.
6. Гюнтер Н. М. Сборник задач по высшей математике, т. 1–3./ Н.М. Гюнтер, Р. О. Кузьмин.– М.: Гостехиздат, 1947, – 264 с.
7. Краснов М.Л. Вариационное исчисление/ М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко,А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 192 с.
8. Моклячук М. П. Методы оптимизации/ М.П. Моклячук. – К. : УМК ВО, 1990, – 140 с.
9. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі/ М.П. Моклячук. – К. : Либідь, 1994. – 328 с.
10. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі/ М.П. Моклячук. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. – 399с.
11. Моклячук М.П. Основи опуклого аналізу/ М.П. Моклячук. – К. : ТВіМС, 2004. – 240 с.
12. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов/ Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976, – 392 с.
13. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
14. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения/ Л.Я. Цлаф. – М.: Наука, 1966. –192 с.
15. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление/ Л.Э. Эльсгольц. - М.: Наука, 1965. – 424 с.
16. Янг. Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления/ Л. Янг. – М.: Мир, 1974. – 482 с.