1 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1.1 Понятие линейного оператора, действия над ними. Основные свойства

Пусть V и W – линейные пространства, размерности которых равны соответственно n и k. Мы будем называть *оператором* A, действующим из V в W, отображение вида $A: V \to W$, сопоставляющее каждому элементу $\boldsymbol{x}$ пространства V некоторый элемент $\boldsymbol{y}$ пространства W. При этом будем использовать обозначение $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$ или $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

Оператор A, *действующий из* V *в* W, *называется* линейным*, если для любых элементов* $\boldsymbol{x}_1$ *и* $\boldsymbol{x}_2$ *пространства* V *и любого комплексного числа* λ *выполняются соотношения:*

1°. $A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2$ (свойство аддитивности оператора).

2°. $A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x}$ (свойство однородности оператора).

Замечание 1 Если пространство W представляет собой комплексную плоскость, то линейный оператор A, действующий из V в W, называется *линейной формой* или *линейным функционалом*.

Замечание 2 Если пространство W совпадает с пространством V, то линейный оператор, действующий в этом случае из V в V, называют также *линейным преобразованием* пространства V.

В множестве всех линейных операторов, действующих из V в W, определим операции суммы таких операторов и умножения оператора на скаляр.

Пусть A и B – два линейных оператора, действующих из V в W. *Суммой* этих операторов назовем линейный оператор $A + B$, определяемый равенством

$$(A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}. \tag{1.1}$$

Произведением линейного оператора A на скаляр λ назовем линейный оператор λA, определяемый равенством

$$(\lambda A)\boldsymbol{x} = \lambda(A\boldsymbol{x}). \tag{1.2}$$

Назовем *нулевым* оператор, обозначаемый символом $\boldsymbol{\theta}$ и отображающий все элементы пространства V в нулевой элемент пространства W. Иными словами, оператор $\boldsymbol{\theta}$ действует по правилу $\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Для каждого оператора A определим противоположный оператор $-A$ посредством соотношения $-A = (-1)A$.

Легко проверить справедливость следующего **утверждения**.

Множество $L(V, W)$ всех линейных операторов, действующих из V в W, с указанными выше операциями суммы и умножения на скаляр и выбранными нулевым оператором и противоположным оператором образует *линейное пространство*.

Пример 1 Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $A\boldsymbol{x} = (x_1 + 1; x_2; x_3)$. Определить, является ли оператор A линейным.

Решение. Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $A\boldsymbol{y} = (y_1 + 1; y_2; y_3)$.

$$A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = (x_1 + 1 + y_1 + 1; x_2 + y_2; x_3 + y_3);$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3), \qquad A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (x_1 + y_1 + 1; x_2 + y_2; x_3 + y_3).$$

Видим, что $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \neq A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$, поэтому оператор A не является линейным.

Исследуем подробнее линейные операторы, действующие из V в V, т.е. изучим подробнее множество $L(V, V)$.

Назовем *тождественным* (или *единичным*) оператором линейный оператор I, действующий по правилу $\boldsymbol{Ix}=\boldsymbol{x}$ (здесь $\boldsymbol{x}$ – любой элемент V).

Введем понятие произведения линейных операторов из множества $L(V,V)$.

Произведением операторов *A* и *B* из $L(V,V)$ называется оператор *AB*, действующий по правилу

$$(AB)\boldsymbol{x}=A(B\boldsymbol{x}). \tag{1.3}$$

Отметим, что, вообще говоря, $AB\neq BA$.

Справедливы следующие *свойства* линейных операторов из $L(V,V)$:

1°. $\lambda(AB)=(\lambda A)B$.

2°. $(A+B)C=AC+BC$.

3°. $A(B+C)=AB+AC$.

4°. $(AB)C=A(BC)$. (1.4)

Замечание 1 Свойство 4° позволяет определить произведение любого конечного числа операторов из $L(V,V)$ и, в частности, n-ю степень оператора A с помощью формулы

$$A^n=\underbrace{A\,A\,\ldots\,A}_{n\ \text{сомножителей}}.$$

Очевидно, справедливо соотношение $A^{n+m}=A^nA^m$.

Нам понадобится понятие обратного оператора для данного оператора *A* из $L(V,V)$.

Линейный оператор *B* из $L(V,V)$ называет*ся обратным* для оператора *A* из $L(V,V)$, если выполняется соотношение $AB=BA=I$. Обратный оператор для оператора *A* обычно обозначается символом A^{-1}.

Из определения обратного оператора A^{-1} следует, что для любого $\boldsymbol{x}\in V$ справедливо соотношение $A^{-1}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

Таким образом, если $A^{-1}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, т.е. если оператор *A* имеет обратный, то из условия $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ следует, что $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

Мы будем говорить, что линейный оператор *A* **действует взаимно однозначно** из *V* в *V*, если любым двум различным элементам $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ отвечают различные элементы $\boldsymbol{y}_1=A\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_2=A\boldsymbol{x}_2$.

Если оператор *A* действует взаимно однозначно из *V* в *V*, то отображение $A:V\to V$ представляет собой отображение *V* на *V*, т.е. каждый элемент $\boldsymbol{y}\in V$ представляет собой образ некоторого элемента $\boldsymbol{x}\in V$: $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$.

Теорема 1.1 Для того чтобы линейный оператор A из $L(V,V)$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор действовал взаимно однозначно из *V* в *V*.

Введем понятия ядра и образа линейного оператора.

Ядром линейного оператора *A* называется множество всех тех элементов $\boldsymbol{x}\in V$, для которых $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. Ядро линейного оператора *A* обозначается символом $\ker A$.

Если $\ker A=\{\boldsymbol{0}\}$, то оператор A действует взаимно однозначно из V в *V*. Действительно, в этом случае из условия $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ следует, что $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, а это означает, что различным $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ отвечают различные $\boldsymbol{y}_1=A\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}_2=A\boldsymbol{x}_2$ (если бы $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}_2$, то $A(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{0}$, т.е. $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$ и элементы $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ не были бы различны).

Таким образом, согласно доказанному выше утверждению условие $\ker A=\{\boldsymbol{0}\}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор *A* имел обратный.

Образом линейного оператора A называется множество всех элементов $\boldsymbol{y}\in V$, представимых в виде $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. Образ линейного оператора A обозначается символом $\operatorname{Im} A$.

Замечание 1 Отметим, что если $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$, то $\operatorname{Im} A = V$, и наоборот. Поэтому наряду с отмеченным выше условием $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$ **условие** $\operatorname{Im} A = V$ **также является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор** A **имел обратный**.

Замечание 2 Очевидно, ядро $\ker A$ и образ $\operatorname{Im} A$ – линейные подпространства пространства *V*.

Вследствие замечания 2 можно рассматривать размерности $\dim(\ker A)$ и $\dim(\operatorname{Im} A)$ этих подпространств.

Назовем *рангом* линейного оператора A число, обозначаемое символом $rangA$ и равное $rangA = \dim(\operatorname{Im} A)$. Назовем *дефектом* линейного оператора A число, обозначаемое символом $defect\, A$ и равное $defect\, A = \dim(\ker A)$.

Пример Пусть V – n-мерное комплексное или вещественное линейное пространство.

1) Тождественный оператор $A = I : V \to V$, при этом $A\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, тогда $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} I = V$, $\ker A = \ker I = \{\boldsymbol{0}\}$ (ядро состоит из единственного нулевого элемента), значит $rangI = \dim(\operatorname{Im} I) = n$.

2) Нулевой оператор $A = \theta : V \to \{\boldsymbol{0}\}$, тогда $\operatorname{Im}\theta = \{\boldsymbol{0}\}$, $\ker\theta = V$, $rang\,\theta = \dim(\operatorname{Im}\theta) = 0$, $defect\,\theta = \dim(\ker\theta) = n$.

3) Рассмотрим оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dt}$ на пространстве $\{P_k(t)\}_{k \le n}$ многочленов степени не выше n, тогда $\operatorname{Im} A = \{P_k(t)\}_{k \le n-1}$, $\ker A = \{P_0(t)\}$ (т.к. $\dfrac{d}{dt} P_0(t) = 0$), отсюда $rangA = \dim(\operatorname{Im} A) = n - 1$, $defectA = \dim(\ker A) = 1$.

Теорема 1.2 Пусть размерность $\dim V$ пространства V равна n, и пусть A – линейный оператор из $L(V, V)$. Тогда $rangA + defectA = n$.

Теорема 1.3 Пусть V_1 и V_2 – два таких подпространства n-мерного пространства V, что $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$. Тогда существует такой линейный оператор A из $L(V, V)$, что $V_1 = \operatorname{Im} A$ и $V_2 = \ker A$.

Следствие из теоремы 1.2. Для того чтобы оператор A из $L(V, V)$ имел обратный A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы $rangA = \dim V = n$.

Пусть A и B – линейные операторы из $L(V, V)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4 Имеют место следующие соотношения:

$$rangAB \le rangA, \qquad rangAB \le rangB.$$

Теорема 1.5 Пусть A и B – линейные операторы из $L(V, V)$ и n – размерность V. Тогда $rangAB \ge rangA + rangB - n$.

Следствие из теорем 1.4 и 1.5. Если $rangA = \dim V = n$, то $rangAB = rangBA = rangB$.

1.2 Матричная запись линейных операторов

Фиксируем в линейном пространстве V базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$. Пусть $\boldsymbol{x}$ – произвольный элемент V и

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k \tag{1.11}$$

разложение $\boldsymbol{x}$ по данному базису.

Пусть A – линейный оператор из $L(V,V)$. Тогда из (1.11) получаем

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k A\boldsymbol{e}_k \,. \tag{1.12}$$

Полагая

$$A\boldsymbol{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \boldsymbol{e}_j \tag{1.13}$$

перепишем (1.12) в следующей форме:

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \right) \boldsymbol{e}_j \,.$$

Таким образом, если $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ и элемент $\boldsymbol{y}$ имеет координаты $y_1, y_2, ..., y_n$, то

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \,, \qquad j = \overline{1, n} \,. \tag{1.14}$$

Рассмотрим квадратную матрицу $\tilde{A}$ с элементами a_{jk} : $\tilde{A} = (a_{jk})$. Эта матрица называется *матрицей линейного оператора* в заданном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$. Иначе, элементами матрицы оператора являются координаты образов базисных векторов под действием оператора, записанные в столбцы.

Замечание 1 Если оператор A нулевой, то все элементы матрицы $\tilde{A}$ этого оператора равны нулю в любом базисе, т.е. $\tilde{A}$ – нулевая матрица.

Замечание 2 Если оператор A единичный, т.е. $A = I$, то матрица этого оператора будет единичной в любом базисе.

Пример Оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $A\boldsymbol{x} = (x_1 + x_2; x_2; 2x_1 - x_2 + 3x_3)$. Определить, является ли оператор A линейным. Если да, то записать его матрицу.

Решение. Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, тогда $A\boldsymbol{y} = (y_1 + y_2; y_2; 2y_1 - y_2 + 3y_3)$. Будем иметь

$$A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2; x_2 + y_2; 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2y_1 - y_2 + 3y_3),$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3),$$

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2; x_2 + y_2; 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2y_1 - y_2 + 3y_3).$$

Видим, что $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$.

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),$$

$$A(\alpha\boldsymbol{x}) = (\alpha x_1 + \alpha x_2; \alpha x_2; 2\alpha x_1 - \alpha x_2 + 3\alpha x_3) = (\alpha(x_1 + x_2); \alpha x_2; \alpha(2x_1 - x_2 + 3x_3)) = \alpha(A\boldsymbol{x}),$$

т.е. $A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(A\boldsymbol{x})$. Оба свойства выполнены, поэтому оператор A является линейным.

Для нахождения матрицы этого оператора вычислим координаты базисных векторов $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ под действием оператора A:

$$A\boldsymbol{e}_1 = (1,0,2), \qquad A\boldsymbol{e}_2 = (1,1,-1), \qquad A\boldsymbol{e}_3 = (0,0,3).$$

Запишем полученные координаты в виде столбцов матрицы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример В пространстве матриц второго порядка с обычными операциями сложения матриц и умножения матриц на число действует линейный оператор по правилу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем образы базисных векторов под действием линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1E_1 + 2E_2 + 0E_3 + 0E_4 = (1;\ 2;\ 0;\ 0),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3E_1 + 4E_2 + 0E_3 + 0E_4 = (3;\ 4;\ 0;\ 0),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 1E_3 + 2E_4 = (0;\ 0;\ 1;\ 2),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 3E_3 + 4E_4 = (0;\ 0;\ 3;\ 4).$$

Тогда матрица линейного оператора имеет вид: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Мы выяснили, что каждому линейному оператору *A* из $L(V, V)$ при заданном базисе линейного пространства *V* отвечает матрица $\tilde{A}$ этого оператора. Естественно возникает обратный вопрос – каждой ли данной матрице $\tilde{A}$ при заданном базисе в *V* можно поставить в соответствие линейный оператор *A*, матрицей которого будет данная матрица. Важно также выяснить вопрос о единственности матрицы линейного оператора в заданном базисе.

Теорема 1.6 Пусть в линейном пространстве *V* задан базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$, и пусть $\tilde{A} = (a_{jk})$ – квадратная матрица, содержащая *n* строк и *n* столбцов. Существует единственный линейный оператор *A*, матрицей которого в заданном базисе является матрица $\tilde{A}$.

Замечание 3 Пусть *A* и *B* – квадратные матрицы порядка n, *A* и *B* – отвечающие им линейные операторы в заданном базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ пространства *V*. Из доказательства теоремы 1.6 следует, что матрице $\tilde{A} + \lambda\tilde{B}$, где λ – некоторое число, отвечает линейный оператор $A + \lambda B$ (напомним, что *A*, *B* и $A + \lambda B$ принадлежат $L(V, V)$).

Теорема 1.7 Ранг линейного оператора *A* равен рангу матрицы $\tilde{A}$ этого оператора: $rang A = rang \tilde{A}$.

Пример Оператор *A* переводит вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $A\boldsymbol{x} = (4x_1 + 3x_2 + x_3; -3x_1 - x_2; -x_1 - 2x_2 - x_3)$. Является ли оператор *A* линейным? Если да, то найти его ранг дефект, образ и ядро.

Решение. Несложно проверить, что заданный оператор является линейным.

Запишем матрицу этого оператора, для чего найдем образы базисных векторов $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$:

$$A\boldsymbol{e}_1=(4;-3;-1),\qquad A\boldsymbol{e}_2=(3;-1;-2),\qquad A\boldsymbol{e}_3=(1;0;-1).$$

Будем иметь: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}4&3&1\\-3&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$. Согласно теореме 1.7 $rangA=rang\tilde{A}$, поэтому $rangA=rang\tilde{A}=2$ (ранг матрицы найти любым способом). Используя утверждение теоремы 1.2, получим $defectA=3-2=1$.

Найдем векторы, принадлежащие ядру: $\boldsymbol{x}\in\ker A \Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ или в матричной форме: $\tilde{A}X=\boldsymbol{\theta}$. Таким образом, имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений, фундаментальным решением которой будет вектор $(1;-3;5)$, т.е. $\ker A=\langle(1;-3;5)\rangle$.

Найдем векторы, принадлежащие образу: $\boldsymbol{y}\in\operatorname{Im}A:\exists\boldsymbol{x}\,\big|\,\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ или в матричной форме: $\tilde{A}X=Y$. Полученная система линейных алгебраических уравнений должна иметь решение. Исследовав ее на совместность, результатом чего будет однородная система линейных алгебраических уравнений относительно переменных (y_1,y_2,y_3), получим фундаментальное решение: $(-1;1;0)$, $(-1;0;1)$, т.е. $\operatorname{Im}A=\langle(-1;1;0),(-1;0;1)\rangle$.

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – произвольные квадратные матрицы, содержащие n строк и n столбцов. Из теорем 1.4, 1.5, 1.6 и 1.7 вытекают следующие следствия.

Следствие 1 Ранг произведения $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ удовлетворяет соотношениям

$$rang\tilde{A}\tilde{B}\le rang\tilde{A},\qquad rang\tilde{A}\tilde{B}\le rang\tilde{B},\qquad rang\tilde{A}\tilde{B}\ge rang\tilde{A}+rang\tilde{B}-n.$$

Следствие 2 Обратный оператор A^{-1} для оператора A существует только тогда, когда ранг матрицы $\tilde{A}$ оператора A равен n, т.е. размерности пространства. Отметим, что в этом случае существует также и обратная матрица $\tilde{A}^{-1}$ для матрицы $\tilde{A}$.

1.3 Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть V – линейное пространство, A – линейный оператор из $L(V,V)$, $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,...,\boldsymbol{e}'_n$ – два базиса в V и

$$\boldsymbol{e}'_k=\sum_{i=1}^{n}t_{ik}\boldsymbol{e}_i,\qquad k=\overline{1,n}\tag{1.16}$$

– формулы перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$ к базису $\{\boldsymbol{e}'_k\}$. Обозначим через T матрицу (t_{ik}):

$$T=(t_{ik}).\tag{1.17}$$

Отметим, что $rangT=n$. Пусть

$$\tilde{A}=(a_{jk})\text{ и }\tilde{A}'=(a'_{jk})\tag{1.18}$$

– матрицы оператора A в указанных базисах. Найдем связь между этими матрицами.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.8 Матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ оператора A в базисах $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и $\{\boldsymbol{e}'_k\}$ соответственно связаны соотношением

$$\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T, \tag{1.19}$$

где T^{-1} – обратная матрица для матрицы T, определенной равенством (1.17).

Пример Могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного линейного оператора в разных базисах?

Матрица перехода должна быть невырожденной, поэтому обе матрицы должны быть невырожденными. Будем иметь

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Значит, указанные матрицы не могут быть матрицами одного линейного оператора в разных базисах.

Пример Дана матрица линейного оператора $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\boldsymbol{e}'_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (2,1)$.

Запишем матрицу перехода, найдем к ней обратную:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу $\widetilde{A}'$ по формуле (1.19):

$$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 16 \\ -102 & -38 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1 Обратимся к формуле $\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T$. Умножая обе части этого матричного равенства слева на матрицу T и справа на T^{-1}, получим соотношение

$$\widetilde{A} = T\widetilde{A}'T^{-1}, \tag{1.20}$$

представляющее собой другую форму связи между матрицами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ линейного оператора A в разных базисах.

Замечание 2 Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – квадратные матрицы порядка n, A и B – отвечающие им линейные операторы в заданном базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$. Как уже отмечалось (см. замечание 3 предыдущего пункта) матрице $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$ отвечает линейный оператор $A + \lambda B$. Выясним вид матрицы этого оператора в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$. Пусть $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{B}'$ – матрицы операторов A и B в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$. Тогда, согласно (1.19), имеем

$$\widetilde{A}' = T^{-1}\widetilde{A}T, \qquad \widetilde{B}' = T^{-1}\widetilde{B}T.$$

Матрица линейного оператора $A + \lambda B$ в базисе $\{\boldsymbol{e}'_k\}$ имеет, согласно (1.19), следующий вид: $T^{-1}\left(\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}\right)T$.

Следствие из теоремы 1.8 $\det\widetilde{A} = \det\widetilde{A}'$.

1.4 Собственные значения и собственные векторы линейных операторов

Пусть A – линейный оператор, а I – тождественный оператор из $L(V, V)$.

Число λ называется *собственным значением* (*числом*) оператора A, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\,. \tag{1.23}$$

При этом вектор $\boldsymbol{x}$ называется *собственным вектором* оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Множество всех собственных значений оператора A называется его *спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}\,A$.

Многочлен относительно λ

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{1.24}$$

называется *характеристическим многочленом* оператора A, а уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.25}$$

называется *характеристическим.*

Теорема 1.9 Для того чтобы число λ было собственным значением оператора A, необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения (1.25) оператора A.

Следствие. Каждый линейный оператор имеет собственное значение.

Замечание 1 Так как значение определителя $\det(A - \lambda I)$ не зависит от выбора базиса, то коэффициенты характеристического многочлена в правой части (1.25) также не зависят от выбора базиса. Таким образом, коэффициенты характеристического многочлена оператора A представляют собой инварианты – величины, значения которых не зависят от выбора базиса.

В частности, коэффициент, равный $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, является инвариантом. Этот инвариант называется *следом оператора A* и обозначается символом trA:

$$trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}\,. \tag{1.27}$$

Алгебраической кратностью собственного значения λ называется кратность корня λ характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$.

Пусть теперь λ – собственное значение линейного оператора A. Тогда, по определению, ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ будет собственным, если $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ или, что равносильно, $A - \lambda I = 0$. Отсюда получаем, что подпространство $\ker(A - \lambda I)$ состоит из всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, и нулевого вектора. Это подпространство называется *собственным*. Его размерность называется *геометрической кратностью* собственного значения λ. Таким образом, для нахождения геометрической кратности собственного значения λ нужно найти размерность ядра линейного оператора $A - \lambda I$. Часто удобнее находить равную последней размерность подпространства решений однородной системы уравнений $(\tilde{A} - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Если найдена фундаментальная система решений этой однородной системы уравнений (заметим, что фундаментальная система решений состоит из собственных векторов), то число векторов в ней равно геометрической кратности собственного значения λ. Однако, находить специально фундаментальную систему решений нерационально, так как размерность подпространства решений однородной системы уравнений $(\tilde{A} - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, а, следовательно, и геометрическая кратность собственного значения λ, равна $n - r$, где число r равно рангу матрицы $(\tilde{A} - \lambda E)$. Очевидно, что алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения больше нуля и не превосходят размерности линейного пространства. Кроме того, геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

Все введенные понятия (собственное значение, собственный вектор, спектр, характеристический многочлен) переносятся с линейного оператора на его матрицу. Отметим также, что определение собственного значения и собственного вектора для операторов, действующих в бесконечномерных линейных пространствах, остается таким же, как и в конечномерном случае. Однако спектр линейного оператора в бесконечномерном случае определяется несколько иначе. Он включает в себя все собственные значения, но может содержать и другие значения.

Теорема 1.10 *Геометрическая кратность λ не превосходит алгебраической.*

Пример Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни (собственные значения):

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-14=0.$$

Собственные значения: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=7$. Найдем собственные векторы.

$\underline{\lambda=-2}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} x_1=-0{,}8x_2; \\ x_2=x_2. \end{cases}$$

Тогда, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=-2$, будет $X_1=(-0{,}8;1)$.

$\underline{\lambda=7}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} x_1=x_2; \\ x_2=x_2. \end{cases}$$

Тогда, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=7$, будет $X_2=(1;1)$.

Теорема 1.11 Для того чтобы матрица $\tilde{A}$ линейного оператора A в данном базисе была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы $\boldsymbol{e}_k$ были собственными векторами этого оператора. Линейные операторы, имеющие в некотором базисе диагональную матрицу, называются *операторами простой структуры*.

Теорема 1.12

1. Диагональная форма квадратной диагонализируемой матрицы определена однозначно с точностью до перестановки диагональных элементов.
2. Если $\chi_A(\lambda)$ раскладывается на линейные множители и не имеет кратных корней, тогда матрица $\tilde{A}$ является диагонализируемой.
3. Линейный оператор A имеет в некотором базисе диагональную матрицу тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена принадлежат данному полю и их геометрические кратности равны алгебраическим.

Теорема 1.13 Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ оператора A различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_p$ линейно независимы.

Следствие. Если характеристический многочлен оператора A имеет n различных корней, то в некотором базисе матрица оператора A имеет диагональный вид.

Действительно, в рассматриваемом случае, согласно только что сформулированной теореме собственные векторы линейно независимы и поэтому могут быть выбраны в качестве базисных. Но тогда по теореме 1.9 в этом базисе матрица оператора A будет диагональной.

Алгоритм приведения матрицы $\tilde{A}$ к диагональному виду

1. Сначала проверим матрицу $\tilde{A}$ на диагонализируемость. Для этого вычислим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ матрицы $\tilde{A}$ и попробуем разложить его на линейные множители. Если это невозможно, то делаем вывод, что матрица $\tilde{A}$ не является диагонализируемой. Для каждого собственного значения λ_i, кратность которого больше 1, найти дефект матрицы $\tilde{A} - \lambda_i E$. Если для каждого такого собственного значения полученный дефект совпадает с кратностью λ_i в $\chi_A(\lambda)$, матрица $\tilde{A}$ является диагонализируемой. Если хотя бы для одного λ_i полученный дефект будет меньше кратности λ_i в $\chi_A(\lambda)$, матрица $\tilde{A}$ не является диагонализируемой.
2. Если матрица является диагонализируемой, то найти все ее собственные векторы.
3. Диагональная форма $\tilde{A}_d$ матрицы $\tilde{A}$ и матрица перехода T записываем таким образом: начиная с левого верхнего угла по диагонали в матрицу $\tilde{A}_d$ записывается первое собственное число столько раз, какова его кратность. Одновременно, начиная слева, в матрицу T по столбцам записываются координаты найденных векторов, являющиеся базисом собственного подпространства матрицы $\tilde{A}$ (собственные векторы), соответствующие первому собственному числу. И так далее для второго, … собственных чисел.

Пример Приведите к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы: $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$. Разложение этого многочлена на линейные множители зависит от выбора поля. Если рассматривать поле действительных чисел, то квадратный делитель $\lambda^2 - 4\lambda + 13$ многочлена $\chi_A(\lambda)$ не имеет действительных корней, а значит многочлен $\chi_A(\lambda)$ не раскладывается над полем действительных чисел на линейные множители, откуда следует, что матрица A не является диагонализируемой над полем действительных чисел.

Теперь рассмотрим случай поля комплексных чисел. Тогда $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = (1-\lambda)(\lambda - (2+3i))(\lambda - (2-3i))$. Многочлен разложился на простые множители, из чего следует, что матрица A является диагонализируемой над полем комплексных чисел.

Собственные числа и соответствующие собственные векторы имеют вид:

$$\lambda_1 = 1,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 2+3i,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 2-3i,\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Итак, диагональная форма A_d матрицы A и матрица перехода T будут иметь вид:

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A \in L(V, V)$ – оператор с простым спектром, если $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)..(\lambda - \lambda_n)$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ различны.

1.5 Корневые подпространства

Пусть λ_i – собственное значение оператора A алгебраической кратности k_i. Тогда *корневое подпространство*, соответствующее этому собственному значению, есть ядро линейного оператора $(A - \lambda_i I)^{k_i}$: $\mathrm{K}_i := \ker(A - \lambda_i I)^{k_i}$.

Корневое подпространство является *инвариантным* (см. ниже) подпространством линейного оператора A. Если характеристический многочлен имеет каноническое разложение над данным полем

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} (\lambda_2 - \lambda)^{k_2} ... (\lambda_m - \lambda)^{k_m},$$

то пространство V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств:

$$V = \mathrm{K}_1 \oplus \mathrm{K}_2 \oplus ... \oplus \mathrm{K}_m.$$

В этом случае объединение базисов всех корневых подпространств даст базис всего пространства V. В этом базисе матрица линейного оператора A является клеточно-диагональной. Для размерности корневого подпространства имеет место следующее часто применяемое свойство

$$\dim \mathrm{K}_i = k_i.$$

Заметим, что для любого $0 < l_i \le k_i$ имеет место вложение подпространств $\ker(A - \lambda_i I)^{l_i} \subset \ker(A - \lambda_i I)^{k_i} = \mathrm{K}_i$. При этом, если для некоторого l_i, размерности равны $\dim \ker(A - \lambda_i I)^{l_i} = k_i$, то равны и подпространства $\ker(A - \lambda_i I)^{l_i} = \mathrm{K}_i$, и, следовательно, для нахождения K_i, в этом случае достаточно линейный оператор $A - \lambda_i I$ возвести лишь в l_i степень.

1.6 Жорданова нормальная форма

Пусть V **–** конечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел. Квадратная матрица k-го порядка

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

называется *жордановой клеткой*, соответствующей комплексному числу λ.

Жорданова матрица – это матрица $J=diag\left(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2),.., J_{k_m}(\lambda_m)\right)$ с жордановыми клетками $J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2),.., J_{k_m}(\lambda_m)$ на диагонали.

Корневым подпространством матрицы A, соответствующим собственному числу λ, называется множество всех тех векторов $\boldsymbol{x}$, для которых $(A-\lambda E)^n \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

Цепным базисом корневого подпространства матрицы A (*жордановым базисом*), соответствующим собственному числу λ, называется такой его базис $\boldsymbol{x}_{ij}$, $1\le i\le p$, $1\le j\le p_i$, для которого $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_{ij}=\boldsymbol{x}_{ij-1}$ и $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_{i1}=\boldsymbol{0}$.

Свойства корневых подпространств и цепных базисов:

Теорема 1.14

1. Размерность корневого подпространства матрицы A, соответствующего собственному числу λ, совпадает с кратностью λ.
2. В каждом корневом подпространстве существует цепной базис.
3. Количество цепей фиксированной длины в произвольных двух цепных базисах одного и того же корневого подпространства одинаково.
4. Количество цепей в произвольном цепном базисе корневого подпространства матрицы A, соответствующего собственному числу λ, равно размерности соответствующего собственного подпространства.
5. Количество цепей длины не меньше чем в произвольном цепном базисе корневого подпространства матрицы A, соответствующего собственному числу λ, равно разности дефектов матриц $(A-\lambda E)^i$ и $(A-\lambda E)^{i-1}$.

Теорема 1.15 Для матрицы $\tilde{A}$ линейного оператора существует *жорданов базис*, в котором матрица линейного оператора является жордановой матрицей: $J=T^{-1}\tilde{A}T$, где T – матрица перехода. В этом случае матрица *J* называется *жордановой нормальной формой* матрицы $\tilde{A}$. Жорданова нормальная форма матрицы определена однозначно с точностью до порядка жордановых клеток на диагонали.

Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы квадратной матрицы порядка n:

1. Найти собственные значения матрицы $\tilde{A}$ и их кратности.
2. Если собственное значение единственное, то вычислить число всех жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ по формуле

$$N(\lambda)=rang\left(\tilde{A}-\lambda E\right).$$

Если собственных значений несколько, то для каждого собственного значения λ матрицы A и для каждого $k\in N$ найти количество $N_k(\lambda)$ жордановых клеток k-го порядка, соответствующих собственному значению λ. Для этого вычислить числа $r_0(\lambda)=n$, $r_1(\lambda)=rang(A-\lambda E)$, $r_2(\lambda)=rang(A-\lambda E)^2$ и так далее до тех пор, пока для некоторого k не будет выполнено равенство равно $r_k(\lambda)=r_{k+1}(\lambda)$. После этого воспользоваться формулой

$$N_k(\lambda)=r_{k-1}(\lambda)-2r_k(\lambda)+r_{k+1}(\lambda).$$

3. Построить жорданову нормальную форму матрицы A как блочно-диагональную матрицу, диагонали которой составляют найденные жордановы клетки. Следует обратить внимание, что в полученной матрице собственное значение должно встречаться на диагонали столько раз, какова его кратность.

4. Для нахождения жорданова базиса, в котором матрица линейного оператора является жордановой матрицей, нужно

I способ: найти матрицу перехода T, решив относительно T матричное уравнение: $J = T^{-1}\tilde{A}T$, то есть $TJ - AT = \theta$.

II способ: в пункте 3 зафиксировать то наименьшее k^*, для которого $r_{k^*}(\lambda) = r_{k^*+1}(\lambda)$, и найти базис ядра матрицы $(A - \lambda E)^{k^*}$, решив однородную СЛАУ с матрицей $(A - \lambda E)^{k^*}$. Для каждого полученного базисного вектора $\boldsymbol{x}$ построить цепь $\boldsymbol{x}_k = (A - \lambda E)^k \boldsymbol{x}$. Выбрать $N_{k^*}(\lambda)$ цепей наибольшей длины, состоящих из линейно независимых элементов, – это часть искомого базиса. Проделать аналогичные действия для следующего (по убыванию) k, для которого $N_k(\lambda) \neq 0$, следя за линейной независимостью выбираемых векторов и выбранными раньше. Продолжать до тех пор, пока не будут выбраны все цепи. Составляем матрицу перехода T соответственно жордановой форме следующим образом: слева направо в матрице T по столбцам выписать координаты соответствующих базисных векторов в такой последовательности: сначала – собственный вектор, потом – следующий за ним вектор цепи и так далее. Тоже проделать для второй жордановой клетки, третей и так далее.

Пример Найти жорданову нормальную форму матрицы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни, т.е. собственные значения:

$$\det\left(\tilde{A} - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3-\lambda & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

Число всех жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$, равно:

$$N(0) = rang\left(\tilde{A} - 0E\right) = rang\tilde{A} = 2.$$

Число жордановых клеток 1-го порядка, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$, равно

$$N_1(0) = r_0(0) - 2r_1(0) + r_2(0) = 4 - 2\cdot 2 + rang\left(\tilde{A} - 0E\right)^2 = rang\tilde{A}^2 = rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. жорданова нормальная форма не содержит клеток 1-го порядка, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$.

Порядок матрицы $\tilde{A}$ равен 4, всего 2 жордановых клетки и нет клеток 1-го порядка. Поэтому жорданова нормальная форма матрицы содержит только две жордановых клетки 2-го порядка (4=2+2):

$$J = diag(J_2(0), J_2(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример Определить жорданову нормальную форму $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ и жорданов базис.

Решение. Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1.$$

Так как порядок матрицы равен 3, а число собственных значений также равно 3, то жорданова нормальная форма $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем жорданов базис. Так как собственные значения все разные и их количество равно рангу матрицы, то за базис можно взять собственное подпространство (систему собственных векторов): $\boldsymbol{x}_1(-1) = (1,\ 0,\ -1)$, $\boldsymbol{x}_2(2) = (0,\ 1,\ 2)$, $\boldsymbol{x}_3(1) = (1,\ 1,\ 0)$. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7 Инвариантные подпространства

Подпространство U пространства V называется *инвариантным подпространством* линейного оператора A, если $\forall \boldsymbol{y} \in U$ и вектор $A\boldsymbol{y} \in U$. Это значит, что линейный оператор A любой вектор инвариантного подпространства переводит в некоторый вектор этого же подпространства. Можно сказать, что все инвариантное подпространство линейным оператором A переводится в себя. Это обычно записывается формулой $A(U) \subset U$.

Нулевое подпространство и все пространство являются инвариантными для любого линейного оператора. Не всякое подпространство, инвариантное для одного линейного оператора, будет инвариантным и для другого. Если спектр линейного оператора не пуст, то линейная оболочка, порожденная любым собственным вектором, является инвариантным одномерным подпространством. И наоборот, любое одномерное инвариантное подпространство состоит из собственных векторов и нулевого вектора. Линейная оболочка $\ell(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_k)$ является инвариантным подпространством линейного оператора A тогда и только тогда, когда $\forall\ i = 1, 2, ..., k$ векторы

$Af_i \in \ell(f_1, f_2, ..., f_k)$. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами этого линейного оператора. Любое подпространство, содержащееся в ядре $\ker A$, и любое подпространство, содержащее образ $\operatorname{Im} A$, являются инвариантными подпространствами линейного оператора A.

Пусть U является инвариантным подпространством линейного оператора A. Тогда линейный оператор $A_1 : U \to U$ называется *индуцированным*, если $\forall \boldsymbol{x} \in U \quad A_1\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$.

1.8 Минимальный многочлен

Ненулевой многочлен

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$$

называется *аннулирующим многочленом* линейного оператора A, если линейный оператор $f(A)$ является нулевым:

$$f(A) := a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_{m-1}A + a_mI = \theta.$$

Для любого линейного оператора его множество аннулирующих многочленов непусто. В частности характеристический многочлен χ_A линейного оператора A является его аннулирующим многочленом: $\chi_A(A) = \theta^2$.

Минимальным многочленом линейного оператора A называется его аннулирующий многочлен наименьшей степени с равным единице старшим коэффициентом. Для любого линейного оператора существует его минимальный многочлен. Этот многочлен единственен и все аннулирующие многочлены линейного оператора делятся на его минимальный многочлен.

Если характеристический многочлен над полем F имеет каноническое разложение

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2}\ldots(\lambda_m - \lambda)^{k_m},$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $k_i > 0$, то минимальный многочлен имеет вид

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{l_1}(\lambda_2 - \lambda)^{l_2}\ldots(\lambda_m - \lambda)^{l_m},\ 0 < l_i \le k_i.$$

Натуральные числа l_i равны наибольшему порядку жордановых клеток с собственным значением λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, на диагонали для данной матрицы. А значит, эти числа λ_i удовлетворяют следующим соотношениям

$$r_{l_i - 1} > r_{l_i} \text{ и } r_{l_i} = r_{k_i},$$

где r_h есть ранг матрицы $(A - \lambda_i E)^h$.

1.9 Подобные матрицы

Матрицы $A_{\boldsymbol{e}}$ и $A_{\boldsymbol{u}}$ линейного оператора A связаны между собой с помощью матрицы перехода от одного базиса к другому

$$A_{\boldsymbol{u}} = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{u}}^{-1} A_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{u}}.$$

Эта формула приводит к следующему определению. Пусть A, B – квадратные матрицы одного и того же порядка с элементами из поля F. Будем матрицы A и B называть *подобными* над полем F, если существует обратимая матрица R (то есть невырожденная: $\det R \neq 0$) того же порядка с элементами из поля F такая, что

$$A = R^{-1}BR.$$

Матрицу R или ее обратную будем называть *матрицей, осуществляющей подобие*.

То, что матрицы A и B подобны, будем записывать так: $A \cong B$. Отметим, что отношение подобия является отношением эквивалентности на множестве всех квадратных матриц одного и того же порядка, так как выполняются следующие свойства:

1. Отношение подобия рефлексивно: $\forall A \quad A \cong A$;
2. Отношение подобия симметрично: если $A \cong B$, то $B \cong A$;
3. Отношение подобия транзитивно: если $A \cong B$ и $B \cong C$, то $A \cong C$.

Значит множество всех квадратных матриц одного и того же порядка разбивается на непересекающиеся классы подобных между собой матриц. Матрицы $A_{\boldsymbol{e}}$ и $A_{\boldsymbol{u}}$ одного оператора подобны и, следовательно, принадлежат одному классу. В каждом таком классе нет других матриц, кроме матриц одного и того же оператора. Точнее, пусть $A \in L(V, V)$, $\dim V < \infty$, $\boldsymbol{e}$ – базис в пространстве V и матрица M подобна матрице $A_{\boldsymbol{e}}$. Тогда существует такой базис $\boldsymbol{u}$ в пространстве V , что $A_{\boldsymbol{u}} = M$.

Если $A \cong B$, то $f(A) \cong f(B)$ для любого многочлена $f(x)$. В частности, $A^n \cong B^n$ для всех $n \in N \cup \{0\}$.

Характеристические многочлены подобных матриц равны. Обратное утверждение неверно, то есть существуют неподобные матрицы, у которых равны их характеристические многочлены.

Имеет место следующий критерий подобия матриц.

Теорема 1.16 Пусть характеристические многочлены матриц A и B с элементами из поля F раскладываются на линейные множители над полем F . Тогда для того, чтобы эти матрицы были подобными над полем F необходимо и достаточно, чтобы их жордановы нормальные формы совпадали с точностью до порядка следования жордановых клеток.

Если F есть поле комплексных чисел, то любой многочлен степени $n > 0$ можно разложить на линейные множители. Тогда для того, чтобы две комплексные матрицы были подобны необходимо и достаточно, чтобы их жордановы нормальные формы совпадали с точностью до порядка следования жордановых клеток. Из этого критерия следует, что для проверки подобия комплексных матриц нужно найти и сравнить их жордановы нормальные формы. Последние совпадут с точностью до порядка следования клеток тогда и только тогда, когда совпадут их характеристические многочлены, и для каждого собственного значения λ, имеющего алгебраическую кратность k , равны ранги r_h матриц $(A - \lambda E)^h$ и $(B - \lambda E)^h$ для всех $h = 1, 2, ..., k$.

2 ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

2.1 Вещественное евклидово пространство и его простейшие свойства

Вещественное линейное пространство E называется *вещественным евклидовым пространством* (или просто *евклидовым пространством*), если выполнены следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам этого пространства $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ставится в соответствие вещественное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

1°. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$ (*переместительное свойство* или *симметрия*).

2°. $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y})$ (*распределительное свойство*).

3°. $(\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ для любого вещественного λ.

4°. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})>0$, если $\boldsymbol{x}$ – ненулевой элемент; $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=0$, если $\boldsymbol{x}$ – нулевой элемент.

Приведем примеры евклидовых пространств.

Пример 1 Рассмотрим линейное пространство R_3 всех свободных векторов. Скалярное произведение любых двух векторов определим так, как это было сделано в аналитической геометрии (т.е. как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними). В курсе аналитической геометрии была доказана справедливость для так определенного скалярного произведения аксиом 1° – 4°). Стало быть, пространство R_3 с так определенным скалярным произведением является евклидовым пространством.

Пример 2 Рассмотрим бесконечномерное линейное пространство $C_{[a,\ b]}$ всех функций $x(t)$, определенных и непрерывных на сегменте $a<t<b$. Скалярное произведение двух таких функций $x(t)$ и $y(t)$ определим как интеграл (в пределах от a до b) от произведения этих функций

$$\int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Элементарно проверяется справедливость для так определенного скалярного произведения аксиом 1° – 4°. В самом деле, справедливость аксиомы 1° очевидна; справедливость аксиом 2° и 3° вытекает из линейных свойств определенного интеграла; справедливость аксиомы 4° вытекает из того, что интеграл $\int_a^b x^2(t)dt$ от непрерывной неотрицательной функции $x^2(t)$ неотрицателен и обращается в нуль лишь тогда, когда эта функция тождественно равна нулю на сегменте $a<t<b$ (т.е. является нулевым элементом рассматриваемого пространства). Таким образом, пространство $C_{[a,\ b]}$ с так определенным скалярным произведением представляет собой бесконечномерное евклидово пространство.

Пример 3 Следующий пример евклидова пространства дает n-мерное линейное пространство R_n упорядоченных совокупностей n вещественных чисел, скалярное произведение двух любых элементов $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ которого определяется равенством

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n.$$

Справедливость для так определенного скалярного произведения аксиомы 1° очевидна; справедливость аксиом 2° и 3° легко проверяется (достаточно вспомнить определение операций сложения элементов и умножения их на числа; наконец, справедливость аксиомы 4° вытекает из того, что $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$ всегда является неотрицательным числом и обращается в нуль лишь при условии $x_1=x_2=...=x_n=0$.

Рассмотренное в этом примере евклидово пространство часто обозначают символом E_n.

Пример 4 В пространстве $P_n[x]$ всех многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами можно определить скалярное произведение таким образом

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=f_0g_0+f_1g_1+...+f_ng_n$$

для любых многочленов

$$\boldsymbol{f}(x)=f_0x^n+f_1x^{n-1}+...+f_{n-1}x+f_n \text{ и } \boldsymbol{g}(x)=g_0x^n+g_1x^{n-1}+...+g_{n-1}x+g_n.$$

Устанавливаемые ниже свойства справедливы для произвольного евклидова пространства как конечной, так и бесконечной размерности.

Теорема 2.1 Для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ произвольного евклидова пространства справедливо неравенство

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\le(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}), \tag{2.1}$$

называемое *неравенством Коши-Буняковского*.

Линейное пространство R называется *нормированным*, если выполнены следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого каждому элементу $\boldsymbol{x}$ пространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое *нормой* (или *длиной*) указанного элемента и обозначаемое символом $\|\boldsymbol{x}\|$.

II. Указанное правило подчинено следующим трем аксиомам:

1°. $\|\boldsymbol{x}\|>0$, если $\boldsymbol{x}$ – ненулевой элемент, $\|\boldsymbol{x}\|=0$, если $\boldsymbol{x}$ – нулевой элемент.

2°. $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\;\|\boldsymbol{x}\|$ для любого элемента $\boldsymbol{x}$ и любого вещественного числа λ**.**

3°. Для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ справедливо следующее неравенство:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|, \tag{2.3}$$

называемое *неравенством треугольника* (или *неравенством Минковского*).

Теорема 2.2 Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента $\boldsymbol{x}$ определить равенством

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}. \tag{2.4}$$

Следствие. Во всяком евклидовом пространстве с нормой элементов, определяемой соотношением (2.4), для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ справедливо неравенство треугольника (2.3).

Заметим далее, что в любом вещественном евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между двумя произвольными элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ этого пространства. В полной аналогии с векторной алгеброй, мы назовем *углом* φ между элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ тот (изменяющийся в пределах от 0 до π) угол, косинус которого определяется соотношением

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\,\sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}}.$$

Данное нами определение угла корректно, ибо в силу неравенства Коши-Буняковского (2.1) дробь, стоящая в правой части последнего равенства, по модулю не превосходит единицы.

Пример 5 Пусть E – евклидово пространство, элементами которого являются действительные функции, непрерывные на отрезке $[0,\pi]$. Скалярное произведение двух произвольных элементов $\boldsymbol{f}=f(x)$ и $\boldsymbol{g}=g(x)$ пространства E определим известным способом $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\int\limits_0^\pi f(x)g(x)dx$. Требуется найти угол между элементами $\boldsymbol{a}=\sin x$ и $\boldsymbol{b}=\sin 3x$.

Решение. Согласно определению скалярного произведения

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\int\limits_0^\pi \sin x\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(\cos 2x-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\cos 2x\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\cos 4x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi-\frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^\pi=0,\quad \|\bar{a}\|=\|\bar{b}\|=\sqrt{\pi}.$$

На основании формулы угла $\cos\theta=0$, следовательно, угол между элементами $\sin x$ и $\sin 3x$ пространства E равен $\frac{\pi}{2}$.

Далее договоримся называть два произвольных элемента $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства E_n *ортогональными,* если скалярное произведение этих элементов $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ равно нулю (в этом случае косинус угла φ между элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будет равен нулю).

Сумму $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ двух ортогональных элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будем называть *гипотенузой* прямоугольного треугольника с катетами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Теорема 2.2 (Пифагора) Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин катетов.

В заключение запишем норму, неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника в каждом из конкретных евклидовых пространств, рассмотренных в предыдущем пункте.

В евклидовом пространстве всех свободных векторов с обычным определением скалярного произведения норма вектора а совпадает с его длиной $|\bar{a}|$, неравенство Коши-Буняковского приводится к виду $(\bar{a},\bar{b})^2\le|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$, а неравенство треугольника – к виду $|\bar{a}+\bar{b}|\le|\bar{a}|+|\bar{b}|$.

В евклидовом пространстве $C_{[a,\,b]}$ всех непрерывных на сегменте $a<t<b$ функций $x=x(t)$ норма элемента $x=x(t)$ равна $\sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt}$, а неравенства Коши-Буняковского и треугольника имеют вид

$$\left(\int\limits_a^b x(t)y(t)dt\right)^2\le\int\limits_a^b x^2(t)dt\int\limits_a^b y^2(t)dt,\qquad \sqrt{\int\limits_a^b (x(t)+y(t))^2dt}\le\sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt}+\sqrt{\int\limits_a^b y^2(t)dt}.$$

В евклидовом пространстве E_n упорядоченных совокупностей n вещественных чисел норма любого элемента $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ равна

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,,$$

а неравенства Коши-Буняковского и треугольника имеют вид

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right),$$

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}\,.$$

Два евклидовых пространства E и E' называются *изоморфными*, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если элементам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства E отвечают соответственно элементы $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{y}'$ пространства E', то элементу $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ отвечает элемент $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}'$, элементу $\lambda \boldsymbol{x}$ (при любом вещественном λ) отвечает элемент $\lambda \boldsymbol{x}'$ и скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ равно скалярному произведению $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$.

Таким образом, евклидовы пространства E и E' изоморфны, если они изоморфны как линейные пространства и если этот изоморфизм сохраняет величину скалярного произведения соответствующих пар элементов.

Теорема 2.3 Все евклидовы пространства одной и той же размерности n изоморфны между собой.

Данная теорема позволяет утверждать, что если в каком-нибудь конкретном n-мерном евклидовом пространстве E' доказана теорема, сформулированная в терминах операций сложения, умножения на числа и скалярного перемножения элементов, то эта теорема справедлива и в совершенно произвольном n-мерном евклидовом пространстве E.

2.2 Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства

Будем говорить, что n элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства E_n образуют *ортонормированный базис* этого пространства, если эти элементы попарно ортогональны и норма каждого из этих элементов равна единице, т.е. если

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = \begin{cases} 1, \text{ при } i = k; \\ 0, \text{ при } i \ne k. \end{cases} \tag{2.5}$$

Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех свободных векторов или совокупность n элементов $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ евклидова пространства всех упорядоченных совокупностей n вещественных чисел.

Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема 2.4 Во всяком n-мерном евклидовом пространстве E_n существует ортонормированный базис.

Доказательство. Согласно определению размерности в пространстве E_n найдется n линейно независимых элементов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$.

Докажем, что можно построить n элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, линейно выражающихся через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, и, образующих ортонормированный базис (т.е. удовлетворяющих соотношениям (2.5)).

Проведем доказательство возможности построения таких элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ методом математической индукции.

Если имеется только один элемент f_1, то для построения элемента e_1 с нормой, равной единице, достаточно нормировать элемент f_1, т.е. положим

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \qquad (\|e_1\| = 1).$$

Из элементов $g_1 = f_1$ и f_2 образуем $g_2 = f_2 - \alpha g_1$. Число α возьмем таким, чтобы $(g_2, e_1) = (g_2, g_1) = 0$. Имеем

$$0 = (g_2, g_1) = (f_2 - \alpha g_1, g_1) = (f_2, g_2) - \alpha(g_1, g_1) = (f_2, g_1) - \alpha.$$

Следовательно, $\alpha = \dfrac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}$, а $g_2 = f_2 - \dfrac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1$. Положим

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \qquad (\|e_2\| = 1).$$

Единичный вектор e_2 ортогонален вектору e_1. Построим теперь вспомогательный вектор $g_3 = f_3 - \mu g_1 - \lambda g_2$. Подберем числа μ и λ так, чтобы $(g_3, g_1) = 0$, $(g_3, g_2) = 0$. Для определения этих чисел имеем уравнения

$$0 = (g_3, g_1) = (f_3, g_1) - \mu(g_1, g_1), \qquad 0 = (g_3, g_2) = (f_3, g_2) - \lambda(g_2, g_2).$$

Следовательно, $\mu = \dfrac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)}$, $\lambda = \dfrac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)}$, а $g_3 = f_3 - \dfrac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot e_1 - \dfrac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot e_2$.

Единичный вектор

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} \qquad (\|e_3\| = 1).$$

очевидно, ортогонален единичным векторам e_1 и e_2.

Продолжая процесс создания попарно ортогональных единичных векторов e_1, e_2, e_3, …, построим за конечное число шагов ортонормированный базис n – мерного евклидового пространства.

Заметим, что различных ортонормированных базисов евклидового пространства бесконечно много, так как бесконечно много базисов $f_1, f_2, ..., f_n$, из которых процессом ортогонализации можно создавать ортонормированные.

Доказанная теорема приводит к следующему осуществляемому шаг за шагом алгоритму построения по данной системе n линейно независимых элементов $f_1, f_2, ..., f_n$ системы n попарно ортогональных элементов e_1, e_2, …, e_n, норма каждого из которых равна единице:

Указанный алгоритм обычно называют *процессом ортогонализации* линейно независимых элементов $f_1, f_2, ..., f_n$ $\cdot$(процесс ортогонализации Грамма-Шмидта).

Замечание. Конечно, в каждом n-мерном евклидовом пространстве существует много ортонормированных базисов. Действительно, если например, строить ортонормированный базис процессом ортогонализации одних и тех же линейно независимых элементов $f_1, f_2, ..., f_n$, то, начиная процесс ортогонализации с различных элементов f_k, мы придем к различным ортонормированным базисам.

Пример 6 Применить процесс ортогонализации Грамма-Шмидта к системе векторов $f_1 = (1,\ 2,\ 2)$, $f_2 = (1,\ 1,\ -5)$, $f_3 = (3,\ 2,\ 8)$.

Решение. Сначала построим ортогональный базис g_1, g_2, g_3:

$$g_1 = f_1 = (1,\ 2,\ 2),$$

$$g_2=f_2-\frac{(f_2,g_1)}{(g_1,g_1)}\cdot g_1=(1,\,1,\,-5)-\frac{1\cdot1+2\cdot1+2\cdot(-5)}{1\cdot1+2\cdot2+2\cdot2}\cdot(1,\,2,\,2)=\frac{1}{9}(16,\,23,\,-31)$$

$$\text{или } g_2=(16,\,23,\,-31),$$

$$g_3=f_3-\frac{(f_3,g_1)}{(g_1,g_1)}\cdot g_1-\frac{(f_3,g_2)}{(g_2,g_2)}\cdot g_2=(3,\,2,\,8)-\frac{3\cdot1+2\cdot2+8\cdot2}{1\cdot1+2\cdot2+2\cdot2}\cdot(1,\,2,\,2)-$$

$$-\frac{3\cdot16+2\cdot23+8\cdot(-31)}{16\cdot16+23\cdot23+(-31)\cdot(-31)}\cdot(16,\,23,\,-31)=\frac{270}{1746}(12,\,-7,\,1)$$

$$\text{или } g_3=(12,\,-7,\,1).$$

Построен ортогональный базис g_1,g_2,g_3. Получим из него ортонормированный базис e_1,e_2,e_3:

$$e_1=\frac{g_1}{\|g_1\|}=\frac{1}{3}(1,\,2,\,2)=\left(\frac{1}{3},\,\frac{2}{3},\,\frac{2}{3}\right),$$

$$e_2=\frac{g_2}{\|g_2\|}=\frac{1}{\sqrt{1746}}(16,\,23,\,-31),$$

$$e_3=\frac{g_3}{\|g_3\|}=\frac{1}{\sqrt{194}}(12,\,-7,\,1).$$

Свойства ортонормированного базиса. Пусть e_1, e_2, …, e_n – произвольный ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства, а x и y – два произвольных элемента этого пространства. Найдем выражение скалярного произведения $(x,\,y)$ этих элементов через их координаты относительно базиса $e_1,\,e_2,\,\dots,\,e_n$.

Обозначим координаты элементов x и y относительно базиса e_1, e_2, …, e_n соответственно через x_1, x_2, …, x_n и y_1, y_2, …, y_n, т.е. предположим, что $x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, $y=y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n$. Тогда

$$(x,\,y)=(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n\,,y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n)$$

или

$$(x,\,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\,,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(e_i,e_j)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n. \qquad (2.7)$$

Таким образом, *в ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых элементов равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов*.

Рассмотрим теперь в n-мерном евклидовом пространстве совершенно произвольный (вообще говоря, не ортонормированный) базис $f_1,f_2,\dots,f_n$ и найдем выражение скалярного произведения двух произвольных элементов x и y через координаты этих элементов относительно указанного базиса.

Обозначим координаты элементов x и y относительно базиса $f_1,f_2,\dots,f_n$ соответственно через $x_1,\,x_2,\,\dots,\,x_n$ и $y_1,\,y_2,\,\dots,\,y_n$, т.е. предположим, что

$$x=x_1f_1+x_2f_2+\ldots+x_nf_n,\qquad y=y_1f_1+y_2f_2+\ldots+y_nf_n.$$

Пользуясь аксиомами скалярного произведения, получим

$$(x,\,y)=(x_1f_1+x_2f_2+\ldots+x_nf_n\,,y_1f_1+y_2f_2+\ldots+y_nf_n)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_if_i\,,\sum_{j=1}^{n}y_jf_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(f_i,f_j).$$

Таким образом, в произвольном базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ скалярное произведение двух любых элементов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + ... + x_n\boldsymbol{f}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + ... + y_n\boldsymbol{f}_n$ определяется равенством

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \boldsymbol{x}G\boldsymbol{y}^t, \tag{2.8}$$

где матрица $G = (a_{ij})$ – *матрица Грамма*, ($i, j = \overline{1,n}$) имеет элементы $a_{ij} = (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j)$; $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$; $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – матрицы-строки координат элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно.

Матрице Грамма поставим в соответствие ее определитель: $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n)$.

Свойства определителя Грамма:

1. $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n) \geq 0$.
2. $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n$ – линейно зависимы.
3. Для $k = 1$, $\det G(\boldsymbol{f}_1) = (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1) = |\ \boldsymbol{f}_1\ |^2$ – квадрат длины вектора;

$k = 2$, $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2) \\ (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2) \end{vmatrix}$ – квадрат площади;

$k = 3$, $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_3) \\ (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_3) \\ (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{f}_3) \end{vmatrix}$ – квадрат объема;

$k = s$, $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_s)$ – квадрат объема s-мерного параллелепипеда, со сторонами $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_s$.

4. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта не меняет определитель Грамма.

Пример 7 В пространстве R^3 с матрицей Грамма $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix}$ найти угол между векторами $\boldsymbol{x} = (1;\ 2;\ 3)$ и $\boldsymbol{y} = (1;\ 0;\ -5)$.

Решение. Напомним, что косинус угла между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{y}\|}.$$

Найдем скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -256.$$

Найдем нормы векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ по формулам $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ и $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}$:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 128 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2};$$

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -5\end{pmatrix}=536 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{536}=2\sqrt{134}.$$

Итак, $\cos\varphi=\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}=\dfrac{-256}{8\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{134}}=-\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$.

Ответ: $\varphi\approx\pi-\arccos\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$.

2.3 Разложение n-мерного евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения

Два подпространства L_1 и L_2 евклидова пространства называются *ортогональными* $(L_1\perp L_2)$, если $\forall\,\boldsymbol{x}\in L_1$, $\forall\,\boldsymbol{y}\in L_2$: $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ или $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$.

Лемма 2.1 Если $L_1\perp L_2$, то $L_1\cap L_2=\varnothing$.

Пусть L – произвольное подпространство n-мерного евклидова пространства E.

Совокупность $L^{\perp}$ всех элементов $\boldsymbol{y}$ пространства E, ортогональных к каждому элементу $\boldsymbol{x}$ подпространства L, называется *ортогональным дополнением* подпространства L.

Пример 8 V – пространство всех геометрических (свободных) векторов, L – подпространство всех векторов, параллельных некоторой плоскости; $L^{\perp}$ – подпространство всех векторов, перпендикулярных данной плоскости.

Пример 9 Дано подпространство $L=\langle \boldsymbol{a}_1=(1,\,2,\,1,\,-3);\,\boldsymbol{a}_2=(-1,\,2,\,3,\,4)\rangle$. Определить базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{x}=(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)$ – вектор из ортогонального дополнения $L^{\perp}$. Тогда $\boldsymbol{x}\perp L$, т.е. $\begin{cases}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1)=0,\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_2)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-3x_4=0,\\-x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0.\end{cases}$ Найдем ФСР полученной системы:

$$\begin{cases}x_1=x_3+3{,}5x_4,\\x_2=-x_3-0{,}25x_4\end{cases}\Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{x}_1$	1	–1	1	0
$\boldsymbol{x}_2$	3,5	–0,25	0	1

Векторы $(1,\,-1,\,1,\,0)$ и $(3{,}5,\,-0{,}25,\,0,\,1)$ образуют базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$.

Пусть $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ – два произвольных элемента множества $L^{\perp}$, а $\boldsymbol{x}$ какой-либо элемент подпространства L. Очевидно, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)=0$ и $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)=0$ по свойству векторов множества $L^{\perp}$. Так как

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)=0,$$

то $\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2\in L^{\perp}$. Для произвольного числа α имеем $(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y}_1)=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)=0$. Следовательно, и элемент $\lambda\boldsymbol{y}_1\in L^{\perp}$. Таким образом, множество $L^{\perp}$ является подпространством евклидового пространства E.

Лемма 2.2 (критерий) Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – базис в подпространстве L_1. Вектор $\boldsymbol{y} \in L_1^{\perp} \Leftrightarrow (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_1) = 0, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2) = 0, \ldots, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_n) = 0$.

Теорема 2.5 Евклидово пространство E есть прямая сумма произвольного подпространства $L \subset E$ и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$, т.е. $E = L \oplus L^{\perp}$.

Следствие 1 $\dim L + \dim L^{\perp} = \dim E$.

Замечание В равенстве $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ теоремы 2.4 вектор $\boldsymbol{y}$ – ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство, $\boldsymbol{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{x}$ относительно подпространства.

Пример 10 Определить проекцию вектора $\boldsymbol{x} = (-2, 1, 3, 4)$ *на подпространство* $L = \langle \boldsymbol{f}_1 = (1;\ 2;\ 0;\ 2);\ \boldsymbol{f}_2 = (-1, -3, 4, -2) \rangle$ и ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{x}$ относительно подпространства L.

Решение.

I способ.

1) Построить ортонормированный базис данного подпространства. Координаты векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ не пропорциональны, следовательно, векторы $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ образуют базис подпространства L. Применим к этому базису процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

Сначала по $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ строим ортогональный базис $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$:

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 0, 2); \qquad (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1) = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 = 9;$$

$$(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1) = -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -11;$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)} \boldsymbol{g}_1 = (-1, -3, 4, -2) - \frac{-11}{9}(1;\ 2;\ 0;\ 2) =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\ 9(-1;\ -3;\ 4;\ -2) + 11(1;\ 2;\ 0;\ 2)\ \right] = \frac{1}{9}(2;\ -5;\ 36;\ 4)$$

$$\text{или } \boldsymbol{g}_2 = (2;\ -5;\ 36;\ 4).$$

Как видно, $\boldsymbol{g}_1 \perp \boldsymbol{g}_2$, т.к. $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2) = 0$.

Построим теперь ортонормированный базис подпространства L:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|} = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_1;\ \boldsymbol{g}_1)}} = \frac{1}{3}(1;\ 2;\ 0;\ 2) = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right);$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_2;\ \boldsymbol{g}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{1341}}(2;\ -5;\ 36;\ 4) = \left(\frac{2}{\sqrt{1341}};\ -\frac{5}{\sqrt{1341}};\ \frac{36}{\sqrt{1341}};\ \frac{4}{\sqrt{1341}}\right).$$

2) Найти скалярные произведения данного вектора $\boldsymbol{x}$ и векторов найденного базиса:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2) = -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{1341}} + 1 \cdot \frac{-5}{\sqrt{1341}} + 3 \cdot \frac{36}{\sqrt{1341}} + 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{1341}} = \frac{115}{\sqrt{1341}}.$$

3) Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство L и ортогональную составляющую $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}$ относительно подпространства L:

$$\boldsymbol{y} = \text{пр}_L \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right) +$$

$$+\frac{115}{\sqrt{1341}}\left(\frac{2}{\sqrt{1341}};-\frac{5}{\sqrt{1341}};\frac{36}{\sqrt{1341}};\frac{4}{\sqrt{1341}}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{16}{9};0;\frac{16}{9}\right)+$$

$$+\left(\frac{230}{1341};-\frac{575}{1341};\frac{4140}{1341};\frac{460}{1341}\right)=\frac{1}{149}(158;\ 201;\ 460;\ 316);$$

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(-2;\ 1;\ 3;\ 4)-\frac{1}{149}(158;\ 201;\ 460;\ 316)=\frac{1}{149}(-456;\ -52;\ -13;\ 280).$$

II способ.

1) Построить базис данного подпространства. Как было указано в первом способе данные векторы $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ являются линейно независимыми, значит образуют базис.

2) Так как по определению $\boldsymbol{y}$, представляющий ортогональную проекцию $\boldsymbol{x}$ на подпространство L, принадлежит L, то его можно выразить через базисные векторы этого подпространства, т.е. $\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2$. Таким образом, получим

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z}.$$

Домножим последнее равенство скалярно на $\boldsymbol{f}_1$:

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_1)=(\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_1)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_1)+(\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_1)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_1),$$ т.к. $\boldsymbol{z}\in L^{\perp}$.

Аналогично,

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_2)=(\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_2)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_2)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_2).$$

Вычислив соответствующие скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)=9,\ (\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_2)=-11,\ (\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_2)=30,\ (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_1)=8,\ (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_2)=3,$$

получим систему уравнений:

$$\begin{cases}9\alpha_1-11\alpha_2=8,\\-11\alpha_1+30\alpha_2=3.\end{cases}$$

Решив систему, получим: $\alpha_1=\frac{273}{149}$, $\alpha_2=\frac{115}{149}$, а, значит

$$\boldsymbol{y}=\frac{273}{149}\boldsymbol{f}_1+\frac{115}{149}\boldsymbol{f}_2=\frac{1}{149}(158;\ 201;\ 460;\ 316).$$

Из равенства $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ будем иметь:

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(-2;\ 1;\ 3;\ 4)-\frac{1}{149}(158;\ 201;\ 460;\ 316)=\frac{1}{149}(-456;\ -52;\ -13;\ 280).$$

2.4 Комплексное евклидово (унитарное) пространство

Линейное пространство над полем комплексных чисел называется *комплексным евклидовым пространством* или *унитарным*, если в нём определена операция скалярного произведения двух любых векторов, т.е. указано правило, по которому каждой паре векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства ставится в соответствие комплексное число $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, при этом выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

1. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})}$
2. $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y})$.
3. $(\alpha\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.
4. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})\geq 0$ и $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=0$ лишь при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

Здесь α – произвольное комплексное число; $\overline{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})}$ – число, сопряженное числу $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$; $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ – действительное число.

Установим необходимые для дальнейшего свойства скалярного произведения.

Свойство 1 $(\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y})=\overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

Доказательство. Согласно аксиомам 1 и 3 скалярного произведения имеем

$$(\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y})=\overline{(\alpha\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})}=\overline{\alpha(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})}=\overline{\alpha}\,\overline{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})}=\overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Свойство 2 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_2)$.

Доказательство. Согласно аксиомам 1 и 2 скалярного произведения имеем

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=\overline{(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x})}=\overline{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x})}=\overline{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x})}+\overline{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x})}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_2).$$

Комплексное евклидово пространство можно сделать нормированным, если каждому вектору $\boldsymbol{x}$ поставить в соответствие действительное число $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}$. Проверка аксиом нормы осуществляется также, как в вещественном евклидовом пространстве. Она основана на использовании неравенства Коши-Буняковского для унитарного пространства

$$(\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}))^2\le(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}).$$

Доказательство этого неравенства аналогично доказательству неравенства Коши-Буняковского для вещественного евклидова пространства.

В унитарном пространстве понятие угла между двумя векторами не определяется, однако два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ таких, что $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=0$, называются *ортогональными*.

В комплексном евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации произвольного базиса унитарного пространства в точности совпадает с описанным выше процессом ортогонализации базиса вещественного евклидова пространства.

Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ – ортонормированный базис комплексного евклидова пространства, а $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+...+x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+...+y_n\boldsymbol{e}_n$ – два произвольно взятых вектора этого пространства. Тогда на основании аксиом и свойств скалярного произведения

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+...+x_n\boldsymbol{e}_n\,,\,y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+...+y_n\boldsymbol{e}_n)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i\,,\,\sum_{j=1}^{n}y_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\overline{y_j}\,,$$

где $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, …, $\overline{y_n}$ – числа, сопряженные комплексным числам y_1, y_2, …, y_n. Таким образом, *скалярное произведение двух векторов унитарного пространства, в котором выбран ортонормированный базис, равно сумме произведений координат первого вектора на соответствующие сопряженные значения координат второго вектора*.

3 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

3.1 Сопряженный оператор

Пусть E – евклидово пространство.

Линейный оператор $A^*: E \to E$ называется *сопряженным* к линейному оператору $A: E \to E$, если для любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из E выполняется соотношение

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}). \qquad \textbf{(3.1)}$$

Легко убедиться в том, что оператор A^*, сопряженный к линейному оператору A, сам является линейным оператором. Это следует из очевидного соотношения

$$(A\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2) = \overline{\alpha}(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1) + \overline{\beta}(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_2) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}_1) + \overline{\beta}(\boldsymbol{x},\ A^*\boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x},\ A^*(\alpha\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2)),$$

справедливого для любых элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ и любых комплексных чисел α и β.

Лемма 3.1 Если квадратные матрицы M и N порядка n таковы, что для любых вектор-столбцов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ выполняется соотношение $\boldsymbol{x}^t M\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t N\boldsymbol{y}$, то $M = N$.

Теорема 3.1 Любому линейному оператору $A: E \to E$ соответствует единственный сопряженный оператор A^*, причем его матрицей в любом *ортонормированном базисе* $\boldsymbol{e}$ является матрица $\tilde{A}^t$, транспонированная матрице $\tilde{A}$ линейного оператора A в том же базисе $\boldsymbol{e}$.

Пример 1 Вектор $\boldsymbol{a} \in R^3$ порождает линейный оператор $A: R^3 \to R^3$ согласно формуле

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}.$$

Оператор, сопряженный к оператору A, можно определить, опираясь на свойства скалярного, векторного и смешанного произведений:

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{axy} = \boldsymbol{yax} = (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\ -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ -A\boldsymbol{y}).$$

Из приведенных соотношений видно, что $A^* = -A$.

Пример 2 Линейное пространство $C_0^\infty[a, b]$ бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, у которых в точках a и b производные любого порядка равны нулю со скалярным произведением $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$ (см. 2.1). Отображение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$, которое каждой функции $x \in C_0^\infty[a, b]$ ставит в соответствие ее производную, является линейным оператором. Оператором, сопряженным к A, будет $-A$, поскольку, согласно

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \int\limits_0^1 x'(t)y(t)dt = x(t)y(t)\,\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x(t)y'(t)dt = -\int\limits_0^1 x(t)y'(t)dt = \int\limits_0^1 x(t)(-y'(t))dt = (\boldsymbol{x},\ -A\boldsymbol{y}).$$

Отметим следующие свойства сопряженных операторов:

1. $I^* = I$.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.
4. $(A^*)^* = A$.
5. $(AB)^* = B^* A^*$.

Замечание. Понятие сопряженного оператора для вещественного пространства вводится совершенно аналогично. Выводы этого пункта и свойства сопряженных операторов справедливы и для этого случая (при этом свойство 3 формулируется так:

($(\lambda A)^* = \lambda A^*$).

Пример 3 В базисе $\boldsymbol{a}_1 = (-1;\,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1;\,-2)$ евклидова пространства R^2 известна матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ линейного оператора. Определить матрицу сопряженного оператора в этом базисе.

Решение. Определим элементы матрицы Грамма базисных векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

Тогда, $G = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Отсюда, $G^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Поэтому матрица сопряженного оператора в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ равна $A^* = G^{-1}AG = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38 & 68 \\ -24 & 43 \end{pmatrix}$.

Пример 4 Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ – ортонормированный базис в унитарном пространстве U_2, $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2$. Линейный оператор A, действующий в этом пространстве, имеет в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ матрицу $A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$.

Решение. Матрица $A_{\boldsymbol{e}}^*$ оператора A^* в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ связана с матрицей $A_{\boldsymbol{e}}$ оператора A равенством $A_{\boldsymbol{e}}^* = \overline{A}_{\boldsymbol{e}}^T$. При переходе к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ матрица оператора A^* преобразуется по формуле $A_{\boldsymbol{f}}^* = T^{-1}A_{\boldsymbol{e}}^*T = T^{-1}\overline{A}_{\boldsymbol{e}}^T T$, где T – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$, т.е. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Аналогично, матрица $A_{\boldsymbol{f}}$ связана с матрицей $A_{\boldsymbol{e}}$ соотношением $A_{\boldsymbol{f}} = T^{-1}A_{\boldsymbol{e}}T$. Отсюда следует, что $A_{\boldsymbol{e}} = TA_{\boldsymbol{f}}T^{-1}$ и, следовательно, $\overline{A}_{\boldsymbol{e}}^T = \left(\overline{T}^{-1}\right)^T \overline{A}_{\boldsymbol{f}}^T\,\overline{T}^T$. Таким образом, получаем

$$A_{\boldsymbol{f}}^* = T^{-1}\left(\overline{T}^{-1}\right)^T \overline{A}_{\boldsymbol{f}}^T\,\overline{T}^T\,T.$$

Так как $T^{-1} = \dfrac{1}{-1-i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}$, то

$$A_{\boldsymbol{f}}^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & -1-i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}.$$

3.2 Самосопряженный (симметричный) оператор

Линейный оператор *A*, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве, называют *самосопряженным* (*симметричным* (*эрмитовым*)), если $A^* = A$ или если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ верно равенство

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}).$$

Линейный оператор *A*, действующий в евклидовом пространстве, называют кососимметричным (косоэрмитовым), если $A = -A^*$ или $(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y})$.

Действительно, если указанное соотношение выполняется, то, согласно первому определению, линейный оператор A является сопряженным оператором к самому себе, т.е. $A^* = A$.

Пример 5 Самосопряженными являются простейшие линейные операторы: нулевой θ и тождественный I, так как для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$

$$(I\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ I\boldsymbol{y}),$$
$$(\theta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (0,\ \boldsymbol{y}) = 0 = (\boldsymbol{x},\ 0) = (\boldsymbol{x},\ \theta\boldsymbol{y}).$$

Самосопряженный оператор в вещественном пространстве определяется аналогично.

Пример 6 Рассмотрим линейное пространство R^3 с обычным скалярным произведением свободных векторов $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. Отображение $A: R^3 \to R^3$ ортогонального проектирования векторов из R^3 на направление вектора $\boldsymbol{a}$ единичной длины, которое определяется формулой $A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$, является линейным оператором, так как

$$A(\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y}) = (\mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \mu(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + \nu(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \mu(A\boldsymbol{x}) + \nu(A\boldsymbol{y}).$$

Убедимся, что этот оператор является самосопряженным:

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = ((\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\ (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}).$$

Теорема 3.2 Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе является симметрической $A = A^t$ (эрмитовой). Наоборот, если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе является симметрической (эрмитовой), то этот оператор – самосопряженный .

Теорема 3.3 Пусть A – линейный оператор, действующий в комплексном евклидовом пространстве U**.** Тогда справедливо представление $A = A_R + iA_I$, где A_R и A_I – самосопряженные операторы, называемые соответственно действительной и мнимой частью оператора A.

Мы будем говорить, что операторы A и B *коммутируют*, если $AB = BA$.

Теорема 3.4 Для того чтобы произведение AB самосопряженных операторов A и B было самосопряженным оператором, необходимо и достаточно, чтобы они коммутировали.

В дальнейших теоремах устанавливается ряд важных свойств самосопряженных операторов.

Теорема 3.5 Если оператор A самосопряженный, то для любого $\boldsymbol{x} \in U$ скалярное произведение $(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ **–** вещественное число.

Теорема 3.6 Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Следствие 1 Если матрица A является симметрической, то все корни ее характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ действительные.

Следствие 2 Самосопряженный оператор, действующий в n*-мерном* евклидовом пространстве, имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

Следствие 3 Симметрическая матрица порядка n имеет n собственных значений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

В следующей теореме выясняется свойство ортогональности собственных векторов самосопряженного оператора.

Теорема 3.7 Если A – самосопряженный оператор, то собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям этого оператора, ортогональны.

Теорема 3.8 (теорема Гамильтона-Кэли) Если A – самосопряженный оператор и $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ **–** характеристический многочлен этого оператора, то $\chi_A(A) = 0$.

Самосопряженный оператор A называется *положительным*, если для любого $\boldsymbol{x} \in V$ справедливо соотношение

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0. \tag{3.14}$$

Если оператор A – положительный и из условия $(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$ следует, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, то A называется *положительно определенным* оператором.

Положительные и положительно определенные операторы соответственно обозначаются символами $A \geq 0$ и $A > 0$.

Теорема 3.9 Каждое собственное значение положительного (положительно определенного) оператора неотрицательно (положительно).

Теорема 3.10 У каждого самосопряженного линейного оператора A, действующего в n-мерном евклидовом пространстве V существует n линейно независимых попарно ортогональных и единичных собственных векторов.

Замечание 1 Договоримся в дальнейшем нумеровать собственные значения самосопряженного оператора в порядке убывания с учетом повторяющихся, т.е. кратных собственных значений. При этом $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ и отвечающие им собственные векторы $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$ можно считать взаимно ортогональными и удовлетворяющими условию $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$.

Пример 7 В линейной оболочке $L = L(\sin x, \cos x)$ скалярное произведение элементов $\boldsymbol{f}_1 = A_1 \sin x + B_1 \cos x$ и $\boldsymbol{f}_2 = A_2 \sin x + B_2 \cos x$ введено по формуле

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 + \frac{1}{2}(A_1 B_2 + A_2 B_1).$$

а) доказать, что элементы $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos x$ и $\boldsymbol{e}_1 = \sin x - \cos x$ образуют ортонормированный базис пространства L.

б) найти матрицу оператора дифференцирования D в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$.

в) найти матрицу сопряженного оператора D^* в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$.

г) справедливо ли равенство $D^* = -D$?

д) является ли оператор D симметричным в пространстве L?

Решение.

а) Так как $\|\boldsymbol{e}_1\|^2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = 1$,

$$\|\boldsymbol{e}_2\|^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2}(1 + 1) = 1, \qquad (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

то $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ – ортонормированный базис пространства L.

б) Найдем матрицу $\tilde{D}$ оператора D в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$. Действуя оператором D на базисные элементы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, получаем:

$$D\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{e}_2,$$

$$D\boldsymbol{e}_2 = (\sin x - \cos x)' = \cos x + \sin x = \sqrt{3}\boldsymbol{e}_1.$$

Отсюда следует, что $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ – матрица оператора D в базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$.

в) Матрица $\tilde{D}^*$ сопряженного оператора D^* в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ является транспонированной по отношению к матрице $\tilde{D}$, т.е. $\tilde{D}^* = \tilde{D}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

г) сравнивая матрицы $\tilde{D}^*$ и $\tilde{D}$, приходим к выводу, что $\tilde{D}^* \neq -\tilde{D}$. Следовательно, не равны и соответствующие операторы: $D^* \neq -D$.

д) так как матрица $\tilde{D}$ оператора D в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ не является симметричной, то и оператор D не является симметричным.

Пример 8 Является ли эрмитовым оператор A, если в некотором ортонормированном базисе он имеет матрицу:

$$\text{а) } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i & -i \\ 2+3i & 3 & 2+i \\ i & 2-i & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i & i \\ 2+3i & 3 & 2+i \\ i & 2-i & -1 \end{pmatrix}?$$

Решение.

а) так как $\tilde{A}^* = \overline{\tilde{A}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i & -i \\ 2+3i & 3 & 2+i \\ i & 2-i & -1 \end{pmatrix} = \tilde{A}$, то $\tilde{A}$ – эрмитова матрица, и, следовательно, A – эрмитов оператор.

б) так как $\tilde{A}^* = \overline{\tilde{A}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i & -i \\ 2+3i & 3 & 2+i \\ i & 2-i & -1 \end{pmatrix} \neq \tilde{A}$, то $\tilde{A}$ не является эрмитовой матрицей, и, следовательно, A не является эрмитовым оператором.

Пример 9 Пусть A – линейный оператор, действующий в унитарном пространстве. Доказать, что оператор $B = i\left(A - A^*\right)$ является эрмитовым оператором.

Решение. Оператор является эрмитовым, если он равен сопряженному оператору, т.е. $B^* = B$. Используя свойства сопряженного оператора, получим

$$B^* = \left[i\left(A - A^*\right)\right]^* = -\left(A - A^*\right)^* = -i\left(A * - \left(A^*\right)^*\right) = -i\left(A * - A\right) = i\left(A - A^*\right) = B.$$

3.3 Унитарный (ортогональный) оператор

Линейный оператор $U \in L(U, U)$ ($U \in L(E, E)$) называется *унитарным* (*ортогональным*), если $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ справедливо соотношение

$$\left(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}\right) = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right). \tag{3.16}$$

В дальнейшем соотношение (3.16) будем называть *условием унитарности* оператора.

Замечание 1 Из условия (3.16) унитарности оператора следует, что для любого унитарного оператора U справедливо равенство $\| U\boldsymbol{x} \| = \| \boldsymbol{x} \|$.

Отметим следующее утверждение.

Теорема 3.12 Если λ – собственное значение унитарного оператора U, то $|\lambda| = 1$.

Теорема 3.13 Для того чтобы линейный оператор U, действующий в евклидовом пространстве E, был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение

$$U^* = U^{-1}. \tag{3.17}$$

Замечание 2 В процессе доказательства теоремы установлено, что условие (3.16) унитарности оператора *U* и условие

$$U^*U = UU^* = I \tag{3.18}$$

эквивалентны. Таким образом, в основу определения унитарного оператора можно положить условие (3.18). Это условие также можно называть *условием унитарности* оператора *U*.

Матрица *U* называется *ортогональной*, если

$$U^tU = UU^t = E. \tag{3.19}$$

Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве E, то оператор *U* является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ ортогональна.

Свойства ортогональных матриц:

1. Действительная квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из равенств $A^tA = E$, $AA^t = E$.
2. Единичная матрица является ортогональной. Нулевая матрица ортогональной не является.
3. Если матрица A ортогональна, то A^t тоже ортогональна.
4. Если матрицы A и B ортогональны, то AB – ортогональна.
5. Определитель ортогональной матрицы равен 1 или –1.
6. Действительная квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда все ее строки (столбцы) образуют ортонормированный базис в E^n.
7. Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису является ортогональной.
8. Если матрица перехода от одного базиса к другому ортогональна и один из этих базисов ортонормирован, то и второй базис является ортонормированным.

Непосредственно из равенства (3.19) следует, что если матрица $U = (u_{ik})$ является ортогональной, то

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^k u_i^l = \begin{cases} 1, & k = l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

В заключение рассмотрим для примера ортогональных преобразований в одномерном и двумерном пространствах.

В одномерном случае каждый вектор $\boldsymbol{x}$ имеет вид $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{e}$, где α – вещественное число, и $\boldsymbol{e}$ – вектор, порождающий данное пространство. Тогда $U\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$, и так как $(U\boldsymbol{e}, U\boldsymbol{e}) = \lambda^2(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$, то $\lambda = \pm 1$.

Таким образом, в одномерном случае существуют два ортогональных преобразования: $U_+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ и $U_-\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

В двумерном случае каждое ортогональное преобразование определяется в произвольном ортонормированном базисе ортогональной матрицей второго порядка, т.е. матрицей $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Из условия (3.18) следует

$$a^2 + b^2 = 1,\ a^2 = d^2,\ b^2 = c^2,\ ac + db = 0,\ ab + cd = 0.$$

Полагая $a = \cos\varphi$, $b = -\sin\varphi$, получаем, что каждая ортогональная матрица второго порядка имеет вид

$$Q_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \pm\sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix},$$

причем во второй строке в обоих случаях следует брать либо знак +, либо знак –.

Отметим, что $\det Q_{\pm} = \pm 1$. Ортогональная матрица Q_+ называется *собственной*, а ортогональная матрица Q_- – *несобственной*.

Оператор U_+ с матрицей Q_+ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ осуществляет поворот *в плоскости* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ на угол φ.

Для того чтобы выяснить, как действует оператор U_- с матрицей Q_-, введем матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, совпадающую с Q_- при $\varphi = 0$, и заметим, что $Q_- = QQ_+$. Матрице Q отвечает отражение плоскости относительно оси $\boldsymbol{e}_1$, и следовательно, действие оператора заключается в повороте на угол φ *и* последующем отражении.

В общем случае, когда ортогональный оператор U действует в n-мерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный базису, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$, в котором матрица оператора Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & 0 & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & \\ & & & & & \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & & & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ & & & & & & & & \sin\varphi_k & -\cos\varphi_k \end{pmatrix}.$$

В этой матрице все элементы, кроме выписанных, равны нулю.

Таким образом, в некотором ортонормированном базисе действие ортогонального оператора сводится к последовательным поворотам и отражениям относительно координатных осей.

Пример 10 Для ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, определить канонический вид и ортонормированный базис, в котором матрица ортогонального оператора имеет канонический вид.

Решение. В трехмерном евклидовом пространстве матрица ортогонального оператора в подходящем ортонормированном базисе имеет один из следующих видов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

След матрицы линейного оператора – это инвариант линейного оператора, который не зависит от базиса.

Для матрицы A: $trA = 2/3 + 2/3 + 2/3 = 2$.

Для матрицы A_1: $trA_1 = -1 + \cos\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi - 1$.

Для матрицы A_2: $trA_2 = 1 + \cos\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi + 1$.

Равенство $trA = trA_1$ невозможно, поэтому канонический вид матрицы ортогонального оператора равен $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Так как $trA = trA_2$, то $2 = 1 + 2\cos\varphi$. Отсюда $\cos\varphi = 0{,}5$ и $\varphi = \pi/3$. Поэтому

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ 0 & \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A_2 равны $1, 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Найдем соответствующие собственные векторы.

Пусть $\underline{\lambda = 1}$. Тогда

$$(A - \lambda E)X = 0 \to \begin{pmatrix} 2/3-1 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3-1 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

Собственный вектор, соответствующий $\lambda = 1$, равен $(1;\, 1;\, 1)$.

Пусть $\underline{\lambda = 1/2 + i\sqrt{3}/2}$. Тогда

$$(A - \lambda E)X = 0 \to \begin{pmatrix} 2/3-1/2-i\sqrt{3}/2 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3-1/2-i\sqrt{3}/2 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3-1/2-i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 18\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 6\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} i.$$

Так как у нас действительное линейное пространство, то возьмем за два других собственных вектора действительную и мнимую части полученного вектора, т.е. $(0;\, 1;\, -1)$ и $(2;\, -1;\, -1)$.

Базис из собственных векторов является ортогональным, получим из него ортонормированный базис:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;\, 1;\, 1), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0;\, 1;\, -1), \; \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2;\, -1;\, -1).$$

Пример 11 Является ли унитарным оператор A, действующий в этом унитарном пространстве U_3, если в некотором ортонормированном базисе он имеет матрицу:

а) $\tilde{A} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4+3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$; б) $\tilde{A} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ 4i & 4+3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$?

Решение.

а) $\tilde{A}^* = \overline{\tilde{A}}^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4-3i & 4i & 6-2i \\ -4i & 4-3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 1 \end{pmatrix}$. Проверим выполнение условия $\tilde{A}\tilde{A}^* = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4+3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4-3i & 4i & 6-2i \\ -4i & 4-3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 1 \end{pmatrix} = E$. Значит, $\tilde{A}$ – унитарная матрица, и, следовательно, A – унитарный оператор.

б) $\tilde{A}^* = \overline{\tilde{A}}^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4-3i & -4i & 6-2i \\ -4i & 4-3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 1 \end{pmatrix}$. Проверим выполнение условия $\tilde{A}\tilde{A}^* = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ 4i & 4+3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4-3i & -4i & 6-2i \\ -4i & 4-3i & -2+6i \\ -6+2i & -2+6i & 1 \end{pmatrix} \neq E$. Значит, $\tilde{A}$ не является унитарной матрицей, и, следовательно, A не является унитарным оператором.

Пример 12 Линейные операторы A_1, A_2, A_3, действующие в этом унитарном пространстве U_2, имеют в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ матрицы: $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Установить, являются ли операторы $A = \frac{1}{2}(A_1, A_2)$ и $B = \frac{1}{2}(A_2, A_3)$ унитарными операторами.

Решение. Так как $A = \frac{1}{2}A_1A_2 - \frac{1}{2}A_2A_1$, то матрица $A_{\boldsymbol{e}}$ этого оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеет вид:

$$A_{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -i\tilde{A}_3, \qquad A_{\boldsymbol{e}}^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = A_{\boldsymbol{e}}^*,$$

значит, $A_{\boldsymbol{e}}$ – унитарная матрица. Поэтому A – унитарный оператор.

Аналогично, матрица оператора $B = \frac{1}{2}A_2A_3 - \frac{1}{2}A_3A_2$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ имеет вид:

$$B_{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\tilde{A}_1.$$

Легко проверить, что условие унитарности выполняется, значит, $B_{\boldsymbol{e}}$ – унитарная матрица. Поэтому B – унитарный оператор.

3.4 Нормальный оператор

Линейный оператор A называется *нормальным*, если справедливо соотношение

$$A^*A = AA^*. \tag{3.19}$$

Обращаясь к условию (3.18) унитарности оператора и к условию (3.19), мы видим, что любой унитарный оператор является нормальным оператором.

Лемма. Пусть A – нормальный оператор. Тогда оператор A и оператор A^* имеют общий собственный вектор $\boldsymbol{e}$ такой, что $\|\boldsymbol{e}\|=1$, и справедливы соотношения $A\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}$ и $A^*\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e}$.

Теорема 3.14 Пусть $\boldsymbol{A}$ – нормальный оператор. Тогда существует ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$, состоящий из собственных векторов операторов $\boldsymbol{A}$ и A^*.

Следствие 1 Пусть $\boldsymbol{A}$ – нормальный оператор. Существует базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$, в котором $\boldsymbol{A}$ имеет диагональную матрицу.

Следствие 2 Унитарный оператор имеет полную ортонормированную систему собственных векторов.

Следующая теорема является обратной для теоремы 3.14.

Теорема 3.15 Если у действующего в n-мерном евклидовом пространстве E оператора $\boldsymbol{A}$ имеется n попарно ортогональных собственных элементов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$, то оператор $\boldsymbol{A}$ нормальный.

Пример 13 Является ли нормальным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$? Если да, то найти канонический базис, т.е. ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора имеет блочно-диагональный вид с блоками порядка 1 или 2.

Решение. Достаточно проверить равенство $AA^T=A^TA$:

$$AA^T=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Получили одинаковые матрицы, значит, оператор является нормальным.

Перейдем к поиску ортонормированного базиса. Найдем характеристический многочлен и его корни:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\left(-\lambda^2+2\lambda-3\right).$$

Таким образом, $\lambda=-1$, $\lambda=1\pm i\sqrt{2}$. Найдем собственный вектор, соответствующий единственному действительному собственному значению $\lambda=-1$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\\ -\mathrm{II}\end{matrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +\mathrm{II}\end{matrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3,\\ x_2=0.\end{cases}$$

В этом случае собственный вектор $\boldsymbol{f}_1(-1;0;1)$.

Найдем собственный вектор, соответствующий одному из двух сопряженных комплексных собственных значений, например, $\lambda=1-i\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} -1+i\sqrt{2} & -1 & 1 \\ 1 & i\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1+i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\left(-1-i\sqrt{2}\right) \\ \\ -\mathrm{II} \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1+i\sqrt{2} & -1-i\sqrt{2} \\ 1 & i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1-i\sqrt{2} & -2+i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{III} \\ \cdot 3-\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1+2i\sqrt{2} & 4+i\sqrt{2} \\ 0 & -1-i\sqrt{2} & -2+i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1/3 \\ \cdot\left(-1-2i\sqrt{2}\right) \\ \cdot\left(-1+i\sqrt{2}\right) \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & -9i\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -3i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 1/9 \\ \cdot 3-\mathrm{II} \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad -x_3 = 0, \\ \qquad x_2 - i\sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = i\sqrt{2}x_3. \end{cases}$$

За собственные векторы возьмем действительную и мнимую части ФСР системы: $\boldsymbol{f}_2(1;\,0;\,1)$, $\boldsymbol{f}_3\left(0;\,\sqrt{2};\,0\right)$.

Нормируя все найденные векторы, получим:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{f}_1\|} = \frac{(-1;\,0;\,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\,0;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_2\|} = \frac{(1;\,0;\,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\,0;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{f}_3}{\|\boldsymbol{f}_3\|} = \frac{\left(0;\,\sqrt{2};\,0\right)}{\sqrt{2}} = (0;\,1;\,0).$$

Это и есть искомый ортонормированный базис. Так как

$$A\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1, \qquad A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_3, \qquad A\boldsymbol{e}_3 = -\sqrt{2}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

то в этом ортонормированном базисе нормальный оператор A имеет матрицу: $A_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

3.5 Полярное разложение

Напомним, что линейный оператор называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого вектора.

Теорема 3.16 Пусть A – невырожденный линейный оператор в евклидовом пространстве E. Тогда существуют ортогональный оператор U и самосопряжённый оператор C с положительными собственными значениями (положительный оператор), такие, что $A = UC$ – *полярное разложение*.

Замечание. На практике, надо умножить матрицу A линейного оператора на матрицу A^t. Из матрицы AA^t извлечь квадратный корень и получим симметрическую матрицу R. С помощью элементарных преобразований из матрицы $(R|A)$ получим матрицу $(E|Q)$. Тогда $A = RQ$.

Пример 14 Найти полярное разложение для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве.

Решение. $R^2 = AA^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда, $R = \sqrt{R^2} = aR^2 + bE$. Найдем a и b.

Найдем собственные значения матрицы R^2: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$. Они различны.

Функция $f(x) = \sqrt{x}$. Составим и решим систему относительно a и b:

$$\begin{cases} f(\lambda_1) = a\lambda_1 + b, \\ f(\lambda_2) = a\lambda_2 + b; \end{cases} \to \begin{cases} \sqrt{2} = 2a + b, \\ \sqrt{8} = 8a + b; \end{cases} \to \begin{cases} a = \sqrt{2}/6, \\ b = 2\sqrt{2}/3. \end{cases}$$

Тогда, $R = aR^2 + bE = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Видим, что $R^t = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} = R$.

В матрице $(R|A)$ получим на месте матрицы R единичную матрицу:

$$(R|A) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right).$$

Тогда, $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Мы видим, что

$$QQ^t = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили полярное разложение $A = RQ$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

4 БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

4.1 Билинейные формы

Числовая функция $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, аргументами которой являются всевозможные векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вещественного линейного пространства V, называется *билинейной формой,* если для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\in V$ и любого вещественного числа λ выполняются соотношения

$$\begin{cases} B(\boldsymbol{x}+z,\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(z,\ \boldsymbol{y}), \\ B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}+z) = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x},\ z), \\ B(\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}), \\ B(\boldsymbol{x},\ \lambda\boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}). \end{cases} \tag{4.1}$$

Иными словами, билинейная форма представляет собой числовую функцию $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ двух векторных аргументов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, определенную на всевозможных векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вещественного линейного пространства V и линейную по каждому из этих аргументов.

Пример 1 Скалярное произведение в евклидовом пространстве – пример билинейной функции.

Пример 2 Рассмотрим линейное пространство R^2. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)$. Определим функцию $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ следующим образом: $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$. Убедимся, что $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ является билинейной функцией.

Пусть $\boldsymbol{z} = (z_1,\ z_2)$ – вектор пространства R^2 . Так как $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} = (x_1,\ x_2) + (z_1,\ z_2) = (x_1+z_1,\ x_2+z_2)$, то

$$B(\boldsymbol{x}+z,\ \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1+z_1 & x_2+z_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(z,\ \boldsymbol{y}).$$

Так как $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha(x_1,\ x_2) = (\alpha x_1,\ \alpha x_2)$, то

$$B(\alpha\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Так как $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = (y_1,\ x_2) + (y_1,\ z_2) = (y_1+z_1,\ y_2+z_2)$, то

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}+z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x},\ z).$$

Так как $\alpha\boldsymbol{y} = \alpha(y_1,\ y_2) = (\alpha y_1,\ \alpha y_2)$, то

$$B(\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha y_1 & \alpha y_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ называется *симметричной* (*кососимметричной*), если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ линейного пространства V выполняются соотношения

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}) \qquad (B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = -B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})). \tag{4.2}$$

Справедливо следующее утверждение: **любую билинейную форму можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм**.

Пусть в n-мерном линейном пространстве V задана билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Выясним вопрос о представлении формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в случае, когда в V задан определенный базис $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1 Билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ при заданном в n-мерном линейном пространстве базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ может быть однозначно представлена в следующем виде:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\eta_j, \tag{4.3}$$

где

$$b_{ij} = B(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j), \tag{4.4}$$

а ξ_i и η_j – координаты в базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно.

Матрица

$$B(\boldsymbol{e}) = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \tag{4.5}$$

элементы b_{ij} которой определены с помощью соотношений (4.4), называется *матрицей билинейной формы* $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в данном базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$.

Замечание 1 Любая квадратная матрица $(b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ является в данном базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ матрицей некоторой билинейной формы.

Замечание 2 Если $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – симметричная (кососимметричная) билинейная форма, то матрица (4.5) этой формы в базисе $\boldsymbol{e}$ является симметричной (кососимметричной). Справедливо и обратное – если матрица (4.5) билинейной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ симметрична (кососимметрична), то и билинейная форма является симметричной (кососимметричной).

Пример 3 Рассмотрим линейное пространство R^3. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Определим билинейную функцию $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ следующим образом: $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3$. Определим матрицу этой билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-1, 3, 2)$.

Так как размерность линейного пространства R^3 равна 3, то порядок матрицы билинейной функции $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равна 3. Вычислим элементы матрицы:

$$a_{11} = B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 6, \qquad a_{12} = B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = -1, \qquad a_{13} = B(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = -6,$$
$$a_{21} = B(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -1, \qquad a_{22} = B(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 7, \qquad a_{23} = B(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 7,$$
$$a_{31} = B(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = -6, \qquad a_{32} = B(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = 7, \qquad a_{33} = B(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 36,$$

Тогда матрица билинейной функции $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ равна

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -6 \\ -1 & 7 & 7 \\ -6 & 7 & 36 \end{pmatrix}.$$

Выясним вопрос о преобразовании матрицы $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ билинейной формы при переходе от базиса $\boldsymbol{e}$ к новому базису $\boldsymbol{f}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2 Матрицы $A(\boldsymbol{e})$ и $A(\boldsymbol{f})$ билинейной формы $A(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$ в базисах $\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\}$ и $\boldsymbol{f}=\{f_1,f_2,...,f_n\}$ связаны соотношением

$$A(\boldsymbol{f})=T^t A(\boldsymbol{e})T\,, \qquad (4.7)$$

где $T=(t_{ij})$ – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{f}$.

Пример 4 Дана матрица билинейной функции $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$. Найти матрицу этой билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}_1'=(5,3)$, $\boldsymbol{e}_2'=(2,1)$.

Матрица перехода имеет вид: $T=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Отсюда $T^t=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Тогда матрица билинейной функции в базисе $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ равна $A'=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}136 & 50\\ 49 & 18\end{pmatrix}$.

Следствие. Ранг матрицы $A(\boldsymbol{f})$ равен рангу матрицы $A(\boldsymbol{e})$. Это сразу вытекает из соотношения (4.7), из того, что матрица T и, стало быть, матрица T^t являются невырожденными, и из теоремы о том, что ранг матрицы не изменяется при умножении ее на невырожденную матрицу.

Это следствие позволяет ввести важный числовой инвариант билинейной формы – так называемый ранг билинейной формы.

Рангом билинейной формы, заданной в конечномерном линейном пространстве V, называется ранг матрицы этой формы в произвольном базисе пространства V.

Билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$, заданная в конечномерном линейном пространстве V, называется *невырожденной* (*вырожденной*), если ее ранг равен (меньше) размерности пространства V.

4.2 Квадратичные формы

Пусть $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$ – симметричная билинейная форма, заданная на линейном пространстве V.

Квадратичной формой называется числовая функция $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})$ одного векторного аргумента $\boldsymbol{x}$, которая получается из билинейной формы $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$ при $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

Пример 1 Дана симметрическая билинейная функция $f=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1-3x_2y_2$. Найти квадратичную форму, ассоциированную с этой симметрической билинейной функцией.

Заменим в формуле симметрической билинейной функции букву $\boldsymbol{y}$ на букву $\boldsymbol{x}$. Тогда квадратичная форма имеет вид: $g=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_1-3x_2^2=x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$.

Симметричная билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$ называется *полярной* к квадратичной форме $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})$.

Полярная билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$ и квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})$ связаны следующим соотношением (*поляризация*):

$$B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})=\frac{1}{2}\left[B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-B(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})-B(\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{y})\right],$$

которое вытекает из очевидного равенства

$$B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})+B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})$$

и свойства симметрии формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

Пример 2 Найти поляризацию квадратичной формы $g=x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$.

Пусть $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2)$. Тогда $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$. Поляризация квадратичной формы равна:

$$\frac{1}{2}[g(x+y)-g(x)-g(y)]=0{,}5\Big[(x_1+y_1)^2+4(x_1+y_1)(x_2+y_2)+2(x_2+y_2)^2-$$
$$--\left(x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2\right)-\left(y_1^2+4y_1y_2+2y_2^2\right)\Big]=x_1y_1+2x_1y_2+2y_1x_2+2x_2y_2.$$

Пусть в конечномерном линейном пространстве V задана симметричная билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, полярная к квадратичной форме $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$. Пусть, кроме того, в V указан базис $\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\}$.

Согласно теореме 4.1 форму $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ можно представить в виде (4.3)

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j,$$

где ξ_i и η_j – координаты в базисе $\boldsymbol{e}$ векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно. При этом в силу симметрии $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$: $a_{ij}=a_{ji}$.

Полагая в (4.3) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ (т.е. $\eta_i=\xi_i$) мы получим следующее представление для квадратичной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ в конечномерном пространстве V с заданным базисом $\boldsymbol{e}$:

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{4.11}$$

Матрица (a_{ij}) называется матрицей квадратичной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ в заданном базисе $\boldsymbol{e}$.

Матрица (a_{ij}) является симметричной. Очевидно, каждой симметричной матрице (a_{ij}) отвечает с помощью соотношения (4.11) квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$, причем (4.11) будет представлением $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ в пространстве V с заданным базисом $\boldsymbol{e}$.

Отметим, что матрица квадратичной формы при переходе к новому базису преобразуется по формуле (4.7). Поэтому ранг этой матрицы не меняется при переходе к новому базису.

Обычно ранг матрицы квадратичной формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ называется *рангом* квадратичной формы.

Если ранг матрицы квадратичной формы равен размерности пространства V, то форма называется *невырожденной*, а в противном случае – *вырожденной*.

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию.

Квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ называется:

1) *положительно* (*отрицательно*) определенной, если для любого ненулевого $\boldsymbol{x}$ выполняется неравенство

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})>0 \qquad (B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})<0)$$

(такие формы называются также знакоопределенными*);*

2) *знакопеременной*, если существуют такие $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, что

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})>0, \qquad B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})<0;$$

3) *квазизнакоопределенной*, если для всех $\boldsymbol{x}$

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ или } B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \leq 0,$$

но имеется отличный от нуля вектор $\boldsymbol{x}$, для которого $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$.

В дальнейшем мы укажем признаки, по которым можно судить о принадлежности формы $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ к одному из указанных типов.

Отметим следующее важное утверждение.

Если $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ представляет собой билинейную форму, полярную положительно определенной квадратичной форме $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$, то $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве.

Обратимся к четырем аксиомам скалярного произведения.

Если число, называемое скалярным произведением векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, обозначить символом $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, то эти аксиомы запишутся следующим образом:

1°. $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$.

2°. $B(\boldsymbol{x} + z,\ \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + B(z,\ \boldsymbol{y})$.

3°. $B(\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

4°. $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0$ и $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$.

Так как билинейная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ полярная квадратичной форме $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ симметрична, то аксиома 1° выполняется. Аксиомы 2° и 3° в сочетании с требованием симметрии выполнены в силу определения билинейной формы. Аксиома 4° выполняется, так как квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ положительно определена.

Замечание. Очевидно, аксиомы скалярного произведения можно рассматривать как совокупность требований, определяющих билинейную форму, полярную положительно определенной квадратичной форме. Поэтому скалярное произведение в линейных пространствах может быть задано с помощью такого вида билинейной формы.

4.3 Приведение квадратичной формы к сумме квадратов

В этом параграфе указаны различные методы приведения квадратичной формы к сумме квадратов, т.е. будут указаны методы выбора такого базиса $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n\}$ в линейном пространстве V, по отношению к которому квадратичная форма представляется в следующем каноническом виде:

$$B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + ... + \lambda_n\eta_n^2, \tag{4.12}$$

где $(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ – координаты $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ в выражении (4.12) называются *каноническими коэффициентами*.

Подчеркнем, что мы рассматриваем квадратичные формы в произвольном вещественном линейном пространстве.

Настоящий параграф посвящен не только доказательству возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду, но и описанию двух методов такого приведения, имеющих большую практическую ценность и широко встречающихся в приложениях.

Так как каждому преобразованию базиса отвечает невырожденное линейное преобразование координат, а невырожденному преобразованию координат – преобразование базиса, то вопрос о приведении формы к каноническому виду можно решать путем выбора соответствующего невырожденного преобразования координат.

1. Метод Лагранжа. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.3 Любая квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, заданная в n-мерном линейном пространстве V , с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду (4.12).

Доказательство. Проведем доказательство теоремы методом Лагранжа. Основная идея этого метода заключается в последовательном дополнении квадратного трехчлена по каждому аргументу до полного квадрата.

Будем считать, что $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \not\equiv 0$ и в данном базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ имеет вид (4.11).

Убедимся, во-первых, что с помощью невырожденного преобразования координат форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты вектора $\boldsymbol{x}$ будет отличен от нуля.

Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное невырожденное преобразование является тождественным.

В случае, если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, то с помощью перенумерации базисных векторов можно добиться требуемого результата. Ясно, что перенумерация является невырожденным преобразованием.

Если же все коэффициенты при квадратах координат равны нулю, то нужное преобразование можно получить следующим способом. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$\xi_1' = \xi_1 - \xi_2,\ \xi_2' = \xi_1 + \xi_2,\ \xi_i' = \xi_i,\ i = \overline{3, n}.$$

После этого преобразования коэффициент при $\xi_1'^2$ будет равен $2a_{12}$ и поэтому отличен от нуля.

Итак, будем считать, что в соотношении (4.11) $a_{11} \neq 0$. Выделим в выражении (4.11) ту группу слагаемых, которые содержат ξ_1. Получим

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + ... + 2a_{1n}\xi_1\xi_n + \sum_{i, j=2}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j . \tag{4.13}$$

Преобразуем выделенную группу слагаемых следующим образом:

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + ... + 2a_{1n}\xi_1\xi_n = a_{11}\left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\xi_2^2 - ... - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}\xi_n^2 -$$

$$- 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}\xi_2\xi_3 - ... - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}\xi_{n-1}\xi_n .$$

Очевидно, выражение (4.13) можно теперь переписать так:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = a_{11}\left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n\right)^2 + \sum_{i, j=2}^{n} a_{ij}^*\xi_i\xi_j , \tag{4.14}$$

где a_{ij}^* – коэффициенты при $\xi_i\xi_j$, полученные после преобразования.

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$\eta_1 = \xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n,$$
$$\eta_2 = \xi_2,$$
$$\ldots$$
$$\eta_n = \xi_n.$$

С помощью этого преобразования и представления (4.14) для $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ получим

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = a_{11}\eta_{11}^2 + \sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}^{*}\eta_i\eta_j\,. \tag{4.15}$$

Итак, если форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \not\equiv 0$, то с помощью невырожденного преобразования координат эту форму можно привести к виду (4.15).

Обратимся теперь к квадратичной форме $\sum\limits_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}^{*}\eta_i\eta_j$. Если эта форма тождественно равна нулю, то вопрос о приведении $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ к каноническому виду решен. Если же форма $\sum\limits_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}^{*}\eta_i\eta_j \not\equiv 0$, то мы можем повторить рассуждения, рассматривая преобразования координат $\eta_2,\ldots,\eta_n$, аналогичные описанным выше, и не меняя при этом координату η_1. Очевидно, такого типа преобразования координат $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ будут невырожденными.

Ясно, что за конечное число шагов мы приведем квадратичную форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ к каноническому виду (4.12).

Отметим, что нужное преобразование исходных координат $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ можно получить путем перемножения найденных в процессе рассуждений невырожденных преобразований. *Теорема доказана*.

Итак, <u>первый способ решения</u> основан на доказательстве теоремы Лагранжа.

<u>Второй способ решения</u>. Введем в рассмотрение следующую невырожденную матрицу

$$E_{i,\, j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & \ldots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Она получена из единичной матрицы заменой элемента, стоящего в *i*-й строке и *j*-ом столбце, на число α. Если $i = j$, то необходимо, чтобы число $\alpha \neq 0$. Для произвольной матрицы A можно вычислить произведение $AE_{i,\, j}(\alpha)$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что при $j \neq i$ это произведение можно получить из матрицы A, если все столбцы, кроме *j*-го оставить без изменения, а к *j*-му столбцу прибавить *i*-й столбец, умноженный на α. Если же $j = i$, то произведение получается из матрицы A умножением *j*-го столбца на α.

Если же умножать матрицу A на транспонированную матрицу $E_{i,j}^{T}(\alpha)$ слева, то есть вычислять $E_{i,j}^{T}(\alpha)A$, то это произведение получается из матрицы A при $i \neq j$ прибавлением к j-ой строке i-й строки, умноженной на α. Матрица $E_{i,j}(\alpha)$ является невырожденной, значит может выступать в роли матрицы перехода. Так как преобразование матрицы квадратичной формы происходит по формуле $A_{\boldsymbol{u}} = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} A_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{u}}$, то матрица $E_{i,j}^{T}(\alpha)A_{\boldsymbol{e}}E_{i,j}(\alpha)$ будет матрицей квадратичной формы в некотором базисе. Выбирая последовательно подходящие матрицы $E_{i,j}(\alpha)$, можно получить диагональную матрицу квадратичной формы, то есть привести ее к каноническому виду. Вместо умножения справа на матрицу $E_{i,j}(\alpha)$ будем выполнять элементарное преобразование столбцов: $j\,\text{столб} + \alpha\cdot i\,\text{столб}$, а вместо умножения слева на ее транспонированную будем выполнять элементарное преобразование строк: $j\,\text{строка} + \alpha\cdot i\,\text{строка}$. Обратим внимание на то, что в этих преобразованиях номера строк и столбцов одинаковы. Такое преобразование будем называть *согласованным элементарным преобразованием строк и столбцов*.

Замечание 1 Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется *каноническим*. Отметим, что канонический базис определен неоднозначно.

Замечание 2 Если форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ приведена к каноническому виду (4.12), то, вообще говоря, не все канонические коэффициенты λ, отличны от нуля. Оставляя в (4.12) лишь отличные от нуля λ, и перенумеровывая их заново, получим следующее выражение для $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_k\eta_k^2. \tag{4.16}$$

Ясно, что $k \leq n$. Так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы в любом базисе, то из (4.16) и условия $\lambda_i \neq 0$ при $i = \overline{1, k}$ вытекает, что ранг формы равен k. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.

Пример 3 Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

Решение.

<u>**I способ.**</u> Сделаем замену переменных $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тогда квадратичная форма преобразуется к виду

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

В соответствии со сказанным при доказательстве теоремы 3.1 сделаем новую замену переменных

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3), \qquad z_2 = y_2, \qquad z_3 = y_3,$$

получим

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$

После замены переменных $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратичная форма f будет приведена к каноническому виду

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2.$$

<u>II способ.</u> Выполним согласованные элементарные преобразования строк и столбцов матрицы квадратичной формы и присоединенной единичной матрицы:

$$
\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\leftrightarrow
\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\leftrightarrow
\left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2+\mathrm{I} \\ +2\mathrm{I} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\leftrightarrow
$$

$$
\leftrightarrow
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \cdot 2+\mathrm{I}\ \ +2\mathrm{I}
\end{array}
\leftrightarrow
\begin{array}{c}
-\mathrm{II} \\
\left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\leftrightarrow
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \qquad\qquad +\mathrm{II}
\end{array}
\leftrightarrow
\left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

Матрица третьего порядка, стоящая сверху, является диагональной. Значит, это матрица квадратичной формы, имеющей канонический вид. В соответствии с алгоритмом матрица третьего порядка, стоящая снизу – это искомая матрица перехода. Поэтому

$$f = -2x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2$$

и

$$
\begin{cases}
x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3, \\
x_2 = -z_1 + z_2 - z_3, \\
x_3 = \qquad\qquad\quad z_3.
\end{cases}
$$

2. Метод Якоби. При некоторых дополнительных предположениях о квадратичной форме $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ можно указать явные формулы перехода от данного базиса $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ к каноническому базису $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n\}$ и формулы для канонических коэффициентов λ_i.

Предварительно мы введем понятие треугольного преобразования базисных векторов.

Преобразование базисных векторов $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ называется *треугольным*, если оно имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1, \\
\boldsymbol{f}_2 = \alpha_{21}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{f}_3 = \alpha_{31}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\
\ldots \\
\boldsymbol{f}_n = \alpha_{n1}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \boldsymbol{e}_n.
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

Замечание. Так как определитель матрицы треугольного преобразования (4.17) отличен от нуля (равен 1), то векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ образуют базис.

Введем в рассмотрение угловые миноры матрицы $A(\boldsymbol{e})=(a_{ij})$ коэффициентов формы $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{e}$, обозначив их символами $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_{n-1}$:

$$\Delta_1 = a_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \qquad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (4.18)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.4 (Якоби) Пусть миноры $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_{n-1}$ матрицы (a_{ij}) квадратичной формы $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ отличны от нуля. Тогда существует единственное треугольное преобразование базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, с помощью которого форму $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ можно привести к каноническому виду.

Приведем формулы, по которым можно вычислить коэффициенты α_{ji} искомого треугольного преобразования, и формулы для канонических коэффициентов λ_j:

$$\lambda_1 = \Delta_1,\ \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \ldots,\ \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \qquad (4.19)$$

Пример 4 Найти канонический вид квадратичной формы

$$g(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

методом Якоби.

Запишем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда угловые миноры: $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = -17 < 0$. Канонический вид этой квадратичной формы будет иметь вид:

$$g = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{-17}{2}y_3^2.$$

Пример 5 Найти канонический вид квадратичной формы $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ методом Якоби.

Запишем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда угловые миноры:

$\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -6$. Этим методом данную квадратичную форму привести нельзя.

4.4 Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм

Закон инерции квадратичных форм. Мы уже отмечали выше, что ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля канонических коэффициентов. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразования, с помощью которого форма $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ приводится к каноническому виду. На самом деле при любом способе приведения формы $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ к каноническому виду не меняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов. Это свойство называется *законом инерции* квадратичных форм.

Пусть форма $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n\}$ определяется матрицей $A(\boldsymbol{e})=(a_{ij})$:

$$A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\ , \tag{4.20}$$

где $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Допустим, что эта форма с помощью невырожденного преобразования координат приведена к каноническому виду

$$A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\lambda_1\mu_1^2+\lambda_2\mu_2^2+...+\lambda_k\mu_k^2\ , \tag{4.21}$$

причем $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ – отличные от нуля канонические коэффициенты, занумерованные так, что первые q из этих коэффициентов положительные, а следующие коэффициенты – отрицательные:

$$\lambda_1>0\ ,\ \lambda_2>0\ ,\ \ldots,\ \lambda_q>0\ ,\ \lambda_{q+1}<0\ ,\ \ldots,\ \lambda_k<0\ .$$

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат μ_i:

$$\begin{cases}\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mu_1,\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\mu_2,...,\eta_q=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_q}}\mu_q\ ,\\ \eta_{q+1}=\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_{q+1}}}\mu_{q+1},...,\eta_k=\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\mu_k\ ,\\ \eta_{k+1}=\mu_{k+1},\ ...,\eta_n=\mu_n\ .\end{cases} \tag{4.22}$$

В результате этого преобразования форма $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ примет вид

$$A(x,\ x)=\eta_1^2+\eta_2^2+...+\eta_q^2-\eta_{q+1}^2-...-\eta_k^2\ , \tag{4.23}$$

называемый *нормальным видом* квадратичной формы.

Теорема 4.5 (закон инерции квадратичных форм). Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами в нормальном виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.

Следствие. Две квадратичные формы эквивалентны тогда и только тогда, когда ранги форм равны, положительные и отрицательные индексы инерции совпадают.

Классификация квадратичных форм. В этом пункте с помощью понятий индекса инерции, положительного и отрицательного индексов инерции квадратичной формы мы укажем, каким образом можно выяснить принадлежность квадратичной формы к тому или иному из перечисленных выше типов (положительно определенной, отрицательно определенной, знакопеременной и квазизнакоопределенной). При этом *индексом инерции* квадратичной формы мы будем называть число отличных от нуля канонических коэффициентов этой формы (т.е. ее ранг), *положительным индексом инерции* – число положительных канонических коэффициентов, *отрицательным индексом инерции* – число отрицательных канонических коэффициентов. Ясно, что сумма положительного и отрицательного индексов инерции равна индексу инерции. Отрицательный и положительный индексы инерции связаны соотношением $r=rang\ f=r_+ + r_-$, а пара $s=(r_+,\ r_-)$ или $s=r_+ - r_-$ называется *сигнатурой* квадратичной формы.

Итак, пусть индекс инерции, положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ соответственно равны k , p и q $(k=p+q)$. В предыдущем пункте было доказано, что в любом каноническом базисе $\boldsymbol{f}=\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,...,\boldsymbol{f}_n\}$ эта форма может быть приведена к следующему нормальному виду:

$$A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\eta_1^2+\eta_2^2+...+\eta_p^2-\eta_{p+1}^2-...-\eta_k^2\ , \tag{4.24}$$

где $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_p$ – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{f}$.

Пример 6 Найти нормальный вид и сигнатуру квадратичной формы

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Канонический вид этой формы имеет вид: $g = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{-17}{2}y_3^2$. Положим $\sqrt{2}y_1 = z_1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 = z_2$, $\sqrt{\frac{17}{2}}y_3 = z_3$. Тогда $g = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$. Это нормальный вид квадратичной формы. Положительный индекс инерции: $r_+ = 2$, отрицательный индекс инерции $r_- = 1$. Следовательно, сигнатура квадратичной формы $s = 2 - 1 = 1$.

Теорема 4.6 (необходимое и достаточное условие знакоопределенности квадратичной формы) Для того чтобы квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, заданная в n-мерном линейном пространстве L, была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы либо положительный индекс инерции p, либо отрицательный индекс инерции q был равен размерности n пространства L. При этом, если $p = n$, то форма положительно определенная, если же $q = n$, то форма отрицательно определенная.

Замечание. Для выяснения вопроса о знакоопределенности квадратичной формы с помощью указанного признака мы должны привести эту форму к каноническому виду.

Теорема 4.7 (необходимое и достаточное условие знакопеременности квадратичной формы) Для того чтобы квадратичная форма была знакопеременной, необходимо и достаточно, чтобы как положительный, так и отрицательный индексы инерции этой формы были отличны от нуля.

Теорема 4.8 (необходимое и достаточное условие квазизнакоопределенности квадратичной формы) Для того чтобы форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была квазизнакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения: либо $p < n$, $q = 0$, либо $p = 0$, $q < n$.

Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. Пусть форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ определяется матрицей $A(\boldsymbol{e}) = (a_{ij})$: $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ и пусть $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, …, $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ – угловые (главные) миноры и определитель матрицы (a_{ij}). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.9 (критерий Сильвестра) Для того чтобы квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$.

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причем $\Delta_1 < 0$.

Следствие 1 Для того чтобы квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры четного порядка были положительны и все угловые миноры нечетного порядка были отрицательны или, иначе, были выполнены неравенства $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_{2n-1} < 0$, $\Delta_{2n} > 0$.

Следствие 2 Для того чтобы квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные (не только угловые) миноры ее матрицы были неотрицательны.

Следствие 3 Для того чтобы квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ была неположительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны и все главные миноры нечетного порядка были неположительны.

Следствие 4 Для того чтобы квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ была неопределенной (знакопеременной), необходимо и достаточно, чтобы у ее матрицы существовали отрицательный главный минор четного порядка и два главных минора нечетных порядков разных знаков.

Пример 7 Исследовать квадратичные формы на знакоопределенность:

1) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=3x_1^2+4x_2^2+x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,

2) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=-3x_1^2-2x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$,

3) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=-2x_1^2-x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$,

4) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$,

5) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$.

Решение.

1) Для матрицы квадратичной формы $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ найдем все угловые миноры

$$\Delta_1 = 3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 3, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Все угловые миноры положительны, значит квадратичная форма положительно определенная.

2) Матрица квадратичной формы $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = -3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4.$$

Оба угловых минора нечетного порядка отрицательны и угловой минор четного порядка положителен. Значит, квадратичная форма отрицательно определена.

3) Матрица квадратичной формы $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = -2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Найдем все главные миноры. Кроме углового есть еще два главных минора первого порядка, равны –1 и –2. Не угловые главные миноры второго порядка $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$. Таким образом, все главные миноры нечетного порядка неположительны и все главные миноры четного порядка неотрицательны. Значит, квадратичная форма неположительна.

4) Матрица квадратичной формы $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = 4, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Найдем все главные миноры. Остальные главные миноры первого порядка равны 4 и 1. Не угловые главные миноры второго порядка $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Таким образом, все главные миноры неотрицательны. Значит, квадратичная форма неотрицательна.

5) Матрица квадратичной формы $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае опять только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Найдем все главные миноры. Не угловые главные миноры первого порядка равны 2 и 4. Не угловые главные миноры второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1$. Имеется отрицательный главный минор четного порядка. Поэтому квадратичная форма неопределенная.

4.5 Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

В предыдущих параграфах мы изучали билинейные и квадратичные формы в произвольном (не обязательно евклидовом) вещественном линейном пространстве *L*. В этом параграфе мы получим ряд сведений о билинейных и квадратичных формах, заданных в вещественном евклидовом пространстве.

Рассмотрим билинейную форму $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, заданную в евклидовом пространстве *V*. Каждой такой форме $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ однозначно соответствует линейный оператор такой, что справедливо равенство

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{4.25}$$

Кроме того, можно доказать, что билинейная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является симметричной тогда и только тогда, когда оператор *A*, фигурирующий в (4.25), является самосопряженным.

Напомним также, что для любого самосопряженного оператора *A* было доказано существование ортонормированного базиса из собственных векторов Это означает, что существуют ортонормированная система $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ и вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ такие, что

$$A\boldsymbol{e}_k = \lambda_k \boldsymbol{e}_k. \tag{4.26}$$

Отметим, что в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$ матрица оператора A имеет диагональный вид.

Приведение квадратичной формы к сумме квадратов в ортогональном базисе. Пусть $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – симметричная билинейная форма, заданная в вещественном евклидовом пространстве V, а $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ – определяемая ею квадратичная форма.

Докажем следующую теорему о приведении квадратичной формы $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ к сумме квадратов.

Теорема 4.10 Пусть $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – симметричная билинейная форма, заданная в евклидовом пространстве V. Тогда в пространстве V существует такой ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ и можно указать такие вещественные числа λ_k, что для любого $\boldsymbol{x} \in V$ квадратичная форма $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ может быть представлена в виде следующей суммы квадратов координат ξ_k вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$:

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2. \tag{4.39}$$

Сказанное выше позволяет сформулировать *основные этапы приведения действительной квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных*:

1. Записать матрицу A рассматриваемой квадратичной формы.

2. Определить из уравнения $|A - \lambda E| = 0$ собственные значения этой матрицы (они все действительны, так как матрица A симметрична).

3. Для каждого собственного значения λ_k определить соответствующие ему линейно независимые собственные векторы (n-мерные матрицы-столбцы).

4. К полученным собственным векторам, отвечающим собственному значению λ_k, применить процесс ортогонализации.

5. После того, как будут найдены все n собственных векторов матрицы A, образующие ортонормированный базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ в n-мерном действительном евклидовом пространстве матриц-столбцов, нужно координаты векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ поместить в соответствующие столбцы искомой матрицы Q.

6. Написать канонический вид квадратичной формы

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ собственные значения матрицы A.

7. Записать вид линейного преобразования переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

которое приводит заданную квадратичную форму $f = X^t \cdot A \cdot X$ к каноническому виду.

Пример 8 Привести ортогональным преобразованием переменных квадратичную форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому виду.

Решение. Запишем матрицу заданной квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0.$$

Собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, $\lambda_4=-3$. Отсюда вытекает, что квадратичная форма f имеет такой канонический вид

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2.$$

При $\lambda=1$ система уравнений для определения координат собственных векторов имеет вид

$$\begin{aligned}-x_1+x_2+x_3-x_4&=0\\ x_1-x_2-x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2-x_3+x_4&=0\\ -x_1-x_2+x_3-x_4&=0.\end{aligned}$$

Так как $\lambda=1$ является корнем характеристического уравнения третьей кратности, то ему соответствуют три линейно независимых собственных вектора. Это означает, что фундаментальная система решений рассматриваемой однородной системы уравнений должна состоять из трех линейно независимых решений рассматриваемой системы уравнений. Следовательно, ранг матрицы системы однородных уравнений $r=1$ и, поэтому, система уравнений эквивалентна одному из своих уравнений, например, второму уравнению, ФСР которой имеет вид:

$$x_1-x_2-x_3+x_4=0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{a}_1$	1	1	0	0
$\boldsymbol{a}_2$	1	0	1	0
$\boldsymbol{a}_3$	–1	0	0	1

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы A, которые отвечают собственному значению $\lambda=1$. Любой собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda=1$, является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, так как координаты этого вектора удовлетворяют системе уравнений.

Применим процесс ортогонализации к системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ получим ортонормированную совокупность линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$ матрицы A, отвечающих собственному значению $\lambda=1$. Имеем

$$\boldsymbol{f}_1=\frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$f_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|},\ g_2 = a_2 - (a_2, f_1)f_1 = a_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \|g_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$f_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|},\ g_3 = a_3 - (a_3, f_1)f_1 - (a_3, f_2)f_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \|g_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}},\ f_3 = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -3$ согласно получаем следующую систему уравнений для определения координат собственного вектора $\boldsymbol{a}_4$ матрицы A

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Матрица этой системы имеет ранг, равный трем, поэтому фундаментальная система решений состоит из одного ненулевого решения $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Собственный вектор $\boldsymbol{a}_4$ оказывается таким: $\boldsymbol{a}_4 = (1, -1, -1, 1)$.

Нормированный собственный вектор: $\boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу Q ортогонального преобразования переменных, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду. Для этого поместим в столбцы матрицы Q координаты собственных векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$, получим

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, квадратичная форма $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ при помощи ортогонального преобразования переменных

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 + \frac{1}{2} y_4$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4$$

приводится к каноническому виду

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2 .$$

Заметим, что форма f не является положительно определенной.

Две квадратичные формы будут *эквивалентными* на данным полем, если у них будут равны ранги и сигнатуры.

Пример 9 Для квадратичных форм $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ и $g = 9t_1^2 - 2t_2^2 + 4t_3^2$ определить, эквивалентны ли они над полем R? Если да, то найти преобразование, переводящее форму f в форму g.

Решение. Выше был получен канонический вид для формы f: $f = -2x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2$. Найдем индексы инерции и сигнатуру: $r_+ = 2$, $r_- = 1$ и сигнатура $s = 2 - 1 = 1$. Для формы g: $r_+ = 2$, $r_- = 1$ и сигнатура $s = 2 - 1 = 1$. Итак, формы эквивалентны.

Найдем теперь преобразование, переводящее форму f в форму g. Форма $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ приводится к нормальному виду $f = -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ заменой

$$\begin{cases} y_1\sqrt{2} = z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3\sqrt{6} = z_3, \end{cases}$$

где y_i, $i = \overline{1,3}$ определяются соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - 2x_3, \\ y_2 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} z_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - 2x_3, \\ z_2 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - x_3, \\ z_3 \frac{\sqrt{6}}{6} = x_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 - 2\sqrt{2} x_3, \\ z_2 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - x_3, \\ z_3 = x_3\sqrt{6}. \end{cases}$$

Форму $g=9t_1^2-2t_2^2+4t_3^2$ заменой $\begin{cases}3t_1=z_1,\\ t_2\sqrt{2}=z_2,\\ 2t_3=z_3\end{cases}$ приводим к нормальному виду $g=z_1^2-z_2^2+z_3^2$.

Итак, искомое преобразование, переводящее форму f в форму g:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2-2\sqrt{2}x_3=3t_1,\\ \dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2-x_3=t_2\sqrt{2},\\ x_3\sqrt{6}=2t_3.\end{cases}$$

Или, выразив x_i через t_i, $i=\overline{1,3}$, будем иметь:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}t_1+t_2\sqrt{2}+t_3\sqrt{6},\\ x_2=t_1\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}t_2-\dfrac{\sqrt{6}}{3}t_3,\\ x_3=\dfrac{\sqrt{6}}{3}t_3.\end{cases}$$

Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов в линейном пространстве.

Теорема 4.11 Пусть $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ – симметричные билинейные формы, определенные в вещественном линейном пространстве *V*. Допустим далее, что для всех $\boldsymbol{x}\in V$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, справедливо неравенство $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ (т.е. квадратичная форма $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ – положительно определенная). Тогда в пространстве *V* можно указать базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$ такой, что квадратичные формы $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ и $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ могут быть представлены в виде

$$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2, \tag{4.42}$$

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2, \tag{4.43}$$

где ξ_k – координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$.

Алгоритм приведения пары квадратичных форм одним преобразованием одну к каноническому виду, а другую – к нормальному

1. Находим матрицы *A* и *B* квадратичных форм f и g соответственно и определяем решения $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ уравнения $\det(A-\lambda B)=0$. Тогда канонический вид квадратичной формы $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$, а нормальный вид квадратичной формы $g=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$.
2. Найдем базисные векторы из системы уравнений $(A-\lambda_iB)X=\theta$ для каждого λ_i.
3. По матрице *B* строим поляризацию *G* квадратичной формы g. Симметрическая билинейная функция *G* определяет скалярное произведение. К полученным

базисным векторам применяется процесс ортогонализации Грамма-Шмидта относительно этого скалярного произведения.

4. Составляем матрицу перехода из координат ортонормированных векторов и получаем формулы замены координат.

Пример 10 Для квадратичных форм $f = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ и $g = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$ определить базис, в котором одна из этих квадратичных форм имеет канонический вид, а другая квадратичная форма приводится к нормальному виду, и соответствующую замену координат.

Решение. Находим матрицы A и B квадратичных форм f и g соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Форма f является положительно определенной, так как главные миноры ее матрицы положительны.

Решим уравнение $\det(B - \lambda A) = 0$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 13-11\lambda & -5+3\lambda \\ -5+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(13-11\lambda)(3-\lambda) - (-5+3\lambda)(-5+3\lambda) = 0, \quad \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7.$$

Тогда канонический вид квадратичной формы $g = y_1^2 + 7y_2^2$, а нормальный вид квадратичной формы $f = y_1^2 + y_2^2$.

Для каждого из чисел $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7$ решим матричное уравнение $(A - \lambda_i B)X = \theta$.

При $\lambda_1 = 1$ получаем $A - \lambda_1 B = \begin{pmatrix} 13-11 & -5+3 \\ -5+3 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_2. \end{cases}$$

При $x_2 = 1$ получим $x_1 = 1$. Тогда первый базисный вектор имеет вид $\boldsymbol{g}_1 = (1,\ 1)$.

При $\lambda_2 = 7$ получаем $A - \lambda_2 B = \begin{pmatrix} 13-11\cdot 7 & -5+3\cdot 7 \\ -5+3\cdot 7 & 3-1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 & 16 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} -64 & 16 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4x_1, \\ x_1 = x_1. \end{cases}$$

При $x_1 = 1$ получим $x_2 = 4$. Тогда второй базисный вектор имеет вид $\boldsymbol{g}_2 = (1,\ 4)$.

По матрице $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ строим поляризацию G квадратичной формы g. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \end{array}.$$

Симметрическая билинейная функция $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = 11x_1y_1 - 3x_2y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$ задает скалярное произведение. Векторы $\boldsymbol{g}_1 = (1,\ 1)$ и $\boldsymbol{g}_2 = (1,\ 4)$ ортогональны относительно этого скалярного произведения: $G(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2)=11\cdot1\cdot1-3\cdot1\cdot1-3\cdot1\cdot4+1\cdot4=0$. Тогда векторы $\boldsymbol{h}_1=\dfrac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_1)}}\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{h}_2=\dfrac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_2)}}\boldsymbol{g}_2$ образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, определяемого функцией G.

$$G(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_1)=11\cdot1\cdot1-3\cdot1\cdot1-3\cdot1\cdot1+1\cdot1=6,$$

$$G(\boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_2)=11\cdot1\cdot1-3\cdot4\cdot1-3\cdot1\cdot4+4\cdot4=3,$$

$$\boldsymbol{h}_1=\frac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_1)}}\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1;\ 1),$$

$$\boldsymbol{h}_2=\frac{1}{\sqrt{G(\boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_2)}}\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1;\ 4).$$

Тогда $G(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_1)=G(\boldsymbol{h}_2,\ \boldsymbol{h}_2)=1$, $G(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2)=0$.

Запишем координаты векторов $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ в виде столбцов матрицы. Получим матрицу перехода:

$$T=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{4}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем замену переменных:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{4}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2,\\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_1+\dfrac{4}{\sqrt{3}}y_2.\end{cases}$$