ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2

1. Оператор A переводить вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор

$$A\boldsymbol{x} = (4x_1 + 3x_2 + x_3;\ 3x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Визначити, чи є лінійним перетворення $A\overline{x}$? Якщо так, то знайти його ядро, образ, ранг та дефект.

Розв'язання.

Нехай $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, тоді $A\boldsymbol{y} = (4y_1 + 3y_2 + y_3; 3y_1 + y_2; y_1 + 2y_2 + y_3)$. Будемо мати

$$A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = (4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4y_1 + 3y_2 + y_3; 3x_1 + x_2 + 3y_1 + y_2; x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3),$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3),$$

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4y_1 + 3y_2 + y_3; 3x_1 + x_2 + 3y_1 + y_2; x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 + 2y_2 + y_3).$$

Бачимо, що $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$.

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),$$

$$A(\alpha\boldsymbol{x}) = (4\alpha x_1 + 3\alpha x_2 + \alpha x_3; 3\alpha x_1 + \alpha x_2; \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3) =$$
$$= (\alpha(4x_1 + 3x_2 + x_3); \alpha(3x_1 + x_2); \alpha(x_1 + 2x_2 + x_3)),$$

тобто $A(\boldsymbol{\alpha x}) = \alpha(A\boldsymbol{x})$. Обидві властивості виконані, тому оператор A являється лінійним.

Запишемо матрицю чого оператора, для чого знайдемо образи базисних векторів $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$:

$$A\boldsymbol{e}_1 = (4;3;1), \qquad A\boldsymbol{e}_2 = (3;1;2), \qquad A\boldsymbol{e}_3 = (1;0;1).$$

Будемо мати: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо ранг матриці $\tilde{A}$. Для цього приведемо цю матрицю до ступінчастого виду:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{III}\cdot 3 \\ \cdot 4 - \mathrm{I} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rang} \tilde{A} = 2$, тому $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2$ і, отже, $\operatorname{defect} A = 3 - 2 = 1$.

Знайдемо вектори, які належать ядру: $\boldsymbol{x} \in \ker A \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ або в матричній формі: $\tilde{A}X = \boldsymbol{\theta}$. Таким чином, маємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 \qquad\quad = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

або з приведеною ступінчатою матрицею

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо її загальний, а потім й фундаментальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_3, \\ x_2 = -0{,}6x_3; \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
1	–3	5

Отже, фундаментальним розв'язком буде вектор $(1; -3; 5)$, тобто $\ker A = \langle (1; -3; 5) \rangle$.

Знайдемо вектори, які належать образу: $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} A : \exists \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ або в матричній формі: $\tilde{A}X = Y$. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь повинна мати розв'язок. Дослідимо її на сумісність. Для цього запишемо розширену матрицю цієї системи й приведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 3 & 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 2 & 1 & y_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\text{III}\cdot 3 \\ \cdot 4 - \text{I} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 0 & -5 & -3 & y_2 - 3y_3 \\ 0 & 5 & 3 & 4y_3 - y_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ +\text{II} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 0 & 5 & 3 & -y_2 + 3y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_1 + y_2 \end{array}\right).$$

Для того, щоб ця система мала розв'язки повинні співпадати ранги матриці системи й розширеної матриці системи. Результатом цього буде однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних (y_1, y_2, y_3):

$$y_3 - y_1 + y_2 = 0,$$

загальним розв'язком якої є $y_1 = y_2 + y_3$, а фундаментальний:

y_1	y_2	y_3
1	1	0
1	0	1

Отже, фундаментальним розв'язком будуть вектори: $(1; 1; 0)$, $(1; 0; 1)$, тобто $\operatorname{Im} A = \langle (1; 1; 0), (1; 0; 1) \rangle$.

2. Знайти

1) власні значення та відповідні власні вектори;

2) кореневі підпростори;

3) жорданову форму та жорданів базис лінійного оператора, який заданий у деякому базисі матрицею;

4) з'ясувати, чи можна привести матрицю до діагонального виду

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1) Знайдемо характеристичний многочлен лінійного оператора

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \lambda^2.$$

Його корені $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 0$ належать даному полю, отже, $\operatorname{Spec} A = \{0, 2\}$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda = 2$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot 4 \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II}\cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, відповідну до отриманої матриці й знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, відповідний до власного значення $\lambda = 2$, буде мати вигляд $\bar{x}_1 = c_1(1;0;-1;1)$, де $c_1 = const \neq 0$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda = 0$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \\ +\mathrm{IV} \\ -\mathrm{II}\cdot 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II}\cdot 2 \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, відповідну до отриманої матриці й знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + 3x_4 = 0; \\ -4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, відповідний до власного значення $\lambda = 0$, буде мати вигляд $\bar{x}_2 = c_2(-1;1;0;0)$, де $c_2 = const \neq 0$.

2) Алгебраїчна кратність власного значення $\lambda = 0$ дорівнює 2. Отже, для того, щоб скористатися визначенням кореневого підпростору, нам треба знайти другий степінь лінійного оператора $A - \lambda I$:

$$(\tilde{A} - 0E)^2 = \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер базис ядра лінійного оператора $(A-0I)^2$. Для цього треба знайти підпростір розв'язків однорідної системи рівнянь $A^2\overline{x}=\overline{0}$. Маємо

$$\tilde{A}^2=\begin{pmatrix}8&8&4&0\\0&0&0&0\\-8&-8&0&4\\8&8&4&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 1/4\\ \\ +\mathrm{I}\\ -\mathrm{I}\end{matrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}2&2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&4&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \leftrightarrow\mathrm{III}\\ \cdot 1/4\\ \\ \end{matrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}2&2&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок $\begin{cases}x_1=-x_2+0{,}5x_4,\\ x_3=-x_4.\end{cases}$. Фундаментальна система розв'язків $\overline{f_1}=c_1(-1;\,1;\,0;\,0)$, $c_1=\text{const}\neq 0$, $\overline{f_2}=c_2(1;\,0;\,-2;\,2)$, $c_2=\text{const}\neq 0$ системи рівнянь $\tilde{A}^2\overline{x}=\overline{0}$. Отже, система векторів $\overline{f_1},\ \overline{f_2}$ – базис кореневого підпростору, яке відповідає власному значенню $\lambda=0$.

Так як алгебраїчна кратність власного значення $\lambda=2$ дорівнює двом, то, аналогічно попередньому, знайдемо квадрат лінійного оператора $A-2I$ і за допомогою елементарних перетворень приведемо її до необхідної форми:

$$\left(\tilde{A}-2E\right)^2=\begin{pmatrix}1&3&1&0\\1&-1&0&-1\\-4&-4&-1&3\\4&4&1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&1&0\\1&-1&0&-1\\-4&-4&-1&3\\4&4&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4&0&0\\-4&0&0&4\\8&8&0&-8\\-8&-8&0&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-1/4)\\ \cdot(-1/4)\leftrightarrow\mathrm{I}\\ +2\mathrm{II}\\ +\mathrm{III}\end{matrix}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&8&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -8\mathrm{II}\\ \\ \end{matrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок $\begin{cases}x_1=x_4,\\ x_2=0,\\ x_3=x_3.\end{cases}$ Фундаментальна система розв'язків $\overline{f_3}=c_3(0;\,0;\,1;\,0)$, $\overline{f_4}=c_4(1;\,0;\,0;\,1)$, $c_3,\ c_4=\text{const}\neq 0$ дасть базис другого кореневого підпростору.

3) Покажемо два способи знаходження жорданової форми та жорданова базису лінійного оператора.

І спосіб.

Знайдемо жорданові клітини, що відповідають власному значенню $\lambda=2$. Ранг r_1 матриці $\tilde{A}-2E$ дорівнює 3, ранг r_2 матриці $\left(\tilde{A}-2E\right)^2$ дорівнює $r_2=2$. Число жорданових клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=2$, дорівнює

$$N_1(2)=r_0(0)-2r_1(0)+r_2(0)=4-2\cdot 3+2=0,$$

тобто жорданова нормальна форма не містить клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=2$. Знайдемо $\left(\tilde{A}-2E\right)^3$ та її ранг:

$$\left(\tilde{A}-2E\right)^3=\left(\begin{pmatrix}0&-4&0&0\\-4&0&0&4\\8&8&0&-8\\-8&-8&0&8\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1&3&1&0\\1&-1&0&-1\\-4&-4&-1&3\\4&4&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4&0&4\\12&4&0&-12\\-16&-16&0&16\\16&16&0&-16\end{pmatrix}\begin{matrix}\\+\mathrm{I}\cdot 3\\-\mathrm{I}\cdot 4\\+\mathrm{IV}\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4&4&0&4\\0&16&0&0\\0&-32&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\+\mathrm{II}\cdot 2\\\\\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4&4&0&4\\0&16&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці $r_3=2$. Тоді

$$N_2(0)=r_1(0)-2r_2(0)+r_3(0)=3-2\cdot 2+2=1.$$

$r_2=r_3=2$, отже, жорданова нормальна форма матриці, що відповідає $\lambda=2$, має одну клітку порядку 2.

Знайдемо жорданові клітини, що відповідають власному значенню $\lambda=0$. Ранг r_1 матриці $\tilde{A}-0E$ дорівнює 3, ранг r_2 матриці $\left(\tilde{A}-0E\right)^2$ дорівнює $r_2=2$. Число жорданових клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=0$, дорівнює

$$N_1(0)=r_0(0)-2r_1(0)+r_2(0)=4-2\cdot 3+2=0,$$

тобто жорданова нормальна форма не містить клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=0$. Знайдемо $\left(\tilde{A}-0E\right)^3$ та її ранг:

$$\left(\tilde{A}-0E\right)^3=\tilde{A}^3=\begin{pmatrix}8&8&4&0\\0&0&0&0\\-8&-8&0&4\\8&8&4&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&3&1&0\\1&1&0&-1\\-4&-4&1&3\\4&4&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&16&12&4\\0&0&0&0\\-16&-16&-4&4\\16&16&12&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\+\mathrm{I}\\-\mathrm{I}\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16&16&12&4\\0&0&0&0\\0&0&8&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4&4&3&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці $r_3=2$. Тоді

$$N_2(0)=r_1(0)-2r_2(0)+r_3(0)=3-2\cdot 2+2=1.$$

$r_2=r_3=2$, отже, жорданова нормальна форма матриці, що відповідає $\lambda=0$, має одну клітку порядку 2.

Тепер вже неважко побудувати й саму матрицю, що має жорданову нормальну форму:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Для знаходження жорданова базису, в якому матриця лінійного оператора має жорданову форму, треба знайти матрицу перехода T, розв'язавши відносно T матричне рівняння: $J=T^{-1}\tilde{A}T$, тобто $TJ-AT=\theta$. Нехай

$$T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$TJ=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{11}+2x_{12} & 0 & x_{13} \\ 2x_{21} & x_{21}+2x_{22} & 0 & x_{23} \\ 2x_{31} & x_{31}+2x_{32} & 0 & x_{33} \\ 2x_{41} & x_{41}+2x_{42} & 0 & x_{43} \end{pmatrix},$$

$$AT=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{matrix} 3x_{11}+3x_{21}+x_{31} & 3x_{12}+3x_{22}+x_{32} \\ x_{11}+x_{21}-x_{41} & x_{12}+x_{22}-x_{42} \\ -4x_{11}-4x_{21}+x_{31}+3x_{41} & -4x_{12}-4x_{22}+x_{32}+3x_{42} \\ 4x_{11}+4x_{21}+x_{31}-x_{41} & 4x_{12}+4x_{22}+x_{32}-x_{42} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 3x_{13}+3x_{23}+x_{33} & 3x_{14}+3x_{24}+x_{34} \\ x_{13}+x_{23}-x_{43} & x_{14}+x_{24}-x_{44} \\ -4x_{13}-4x_{23}+x_{33}+3x_{43} & -4x_{14}-4x_{24}+x_{34}+3x_{44} \\ 4x_{13}+4x_{23}+x_{33}-x_{43} & 4x_{14}+4x_{24}+x_{34}-x_{44} \end{matrix}\right),$$

$$TJ-AT=\left(\begin{matrix} -x_{11}-3x_{21}-x_{31} & x_{11}-x_{12}-3x_{22}-x_{32} \\ -x_{11}+x_{21}+x_{41} & x_{21}-x_{12}+x_{22}+x_{42} \\ 4x_{11}+4x_{21}+x_{31}-3x_{41} & x_{31}+4x_{12}+4x_{22}+x_{32}-3x_{42} \\ -4x_{11}-4x_{21}-x_{31}+3x_{41} & x_{41}-4x_{12}-4x_{22}-x_{32}+3x_{42} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -3x_{13}-3x_{23}-x_{33} & x_{13}-3x_{14}-3x_{24}-x_{34} \\ -x_{13}-x_{23}+x_{43} & x_{23}-x_{14}-x_{24}+x_{44} \\ 4x_{13}+4x_{23}-x_{33}-3x_{43} & x_{33}+4x_{14}+4x_{24}-x_{34}-3x_{44} \\ -4x_{13}-4x_{23}-x_{33}+x_{43} & x_{43}-4x_{14}-4x_{24}-x_{34}+x_{44} \end{matrix}\right).$$

Отримаємо однорідну систему рівнянь. Матрицю цієї системи треба привести до ступінчастого вигляду, потім знайти загальний та один частинний розв’язок. Будемо мати: $x_{44}=4$, $x_{41}=1$, $x_{42}=1$, $x_{43}=0$, $x_{34}=-4$, $x_{33}=0$, $x_{32}=0$, $x_{31}=-1$, $x_{24}=1$, $x_{23}=-2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=0$, $x_{14}=1$, $x_{13}=2$, $x_{12}=1$, $x_{11}=1$. Отже, матриця переходу до жорданова базису матиме вигляд:

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

II спосіб.

Знайдемо вектори жорданова базису для власного значення $\lambda = 2$. В якості повної системи візьмемо базис $\boldsymbol{e}_1 = \overline{f_3} = (0;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{f_4} = (1;\ 0;\ 0;\ 1)$ кореневого підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$. Тоді

$$(A-2I)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A-2I)\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$(A-2I)^2\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-2I)^2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо ланцюжки векторів

$$S_1 : (A-2I)\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1;$$
$$S_2 : (A-2I)\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2.$$

Тепер впорядкуємо ланцюжки по довжині, а для зручності запишемо їх по рядкам в матрицю й приведемо крайню ліву матрицю до ступінчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-\mathrm{I}} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Після викреслювання нульового вектора отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & & & & \end{array}\right)_{-\mathrm{I}} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right).$$

Ліва матриця приведена до ступінчастої форми, отже, система, яка складається з перших векторів ланцюжків, лінійно незалежна. Отже, й вся система векторів лінійно незалежна. Отримали жорданів базис $\boldsymbol{u}_1 = (1;\ 0;\ -1;\ 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0;\ 0;\ 1;\ 0)$.

Знайдемо тепер вектори жорданова базису для власного значення $\lambda = 0$. В якості повної системи візьмемо базис $\boldsymbol{e}_1 = \overline{f_1} = (-1;\ 1;\ 0;\ 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{f_2} = (1;\ 0;\ -2;\ 2)$ кореневого підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda = 0$. Тоді

$$(A-0I)\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}3&3&1&0\\1&1&0&-1\\-4&-4&1&3\\4&4&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(A-0I)\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}3&3&1&0\\1&1&0&-1\\-4&-4&1&3\\4&4&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Далі

$$(A-0I)^2\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}8&8&4&0\\0&0&0&0\\-8&-8&0&4\\8&8&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Нами побудовані ланцюжки векторів:

$$S_1:\boldsymbol{e}_1;$$
$$S_2:(A-0I)\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2.$$

Тепер впорядкуємо ланцюжки по довжині, а для зручності запишемо їх по рядкам в матрицю й приведемо крайню ліву матрицю до ступінчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&1&0&-2&2\\-1&1&0&0&&&&\end{array}\right)_{+\mathrm{I}}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&1&0&-2&2\\0&0&0&0&&&&\end{array}\right).$$

Ліва матриця приведена до ступінчастої форми, отже, система, яка складається з перших векторів ланцюжків, лінійно незалежна. Отже, й вся система векторів лінійно незалежна. Отримали жорданів базис $\boldsymbol{u}_3=(1;-1;0;0)$, $\boldsymbol{u}_4=(1;0;-2;2)$.

Кожному ланцюжку довжини h відповідає клітина порядку h в жордановій нормальній формі. Наш базис складається з двох ланцюжків, кожний довжиною 2. Отже, матриця оператора в цьому базисі має дві клітини, обидві порядку 2:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Так як всі обчислення проводилися в цьому базисі, в якому дана матриця оператора, то в цьому ж базисі дано вектори жорданова базису $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$. Тоді за означенням матриця переходу від першого базису до другого має вид

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&-1&0\\-1&1&0&-2\\1&0&0&2\end{pmatrix}.$$

4) З'ясуємо, чи можна привести матрицю до діагонального виду. Характеристичний многочлен матриці: $\chi_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)^2$, тобто маємо розклад цього многочлена на лінійні множники. Робимо висновок, що матриця $\tilde{A}$ може мати

діагональну форму. Для кожного власного значення $\lambda = 0$ і $\lambda = 2$, кратність яких дорівнює 2, знайдемо дефект матриці $\tilde{A} - \lambda_i E$: $\operatorname{defect}\left(\tilde{A} - 0E\right) = 1$, $\operatorname{defect}\left(\tilde{A} - 2E\right) = 1$. Для кожного такого власного значення отриманий дефект не співпадає з алгебраїчною кратністю λ_i в $\chi_A(\lambda)$, тому матрицю $\tilde{A}$ не можна привести до діагонального виду.

3. Дано підпростір $L = \langle f_1 = (1;\ 2;\ 0;\ 2);\ f_2 = (-1,\ 2,\ 4,\ 2)\rangle$. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$. Визначити ортогональну проекцію y й ортогональну складову z вектора $x = (-2,\ 3,\ -1,\ -4)$ відносно підпростору L. Задачу розв'язати двома способами.

Розв'язання.

Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ – вектор з ортогонального доповнення $L^{\perp}$. Тоді $\boldsymbol{x} \perp L$, тобто $\begin{cases} (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}_1) = 0, \\ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}_2) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$ Знайдемо ФСР отриманої системи:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{x}_1$	2	–1	1	0
$\boldsymbol{x}_2$	0	–1	0	1

Вектори $(2,\ -1,\ 1,\ 0)$ і $(0,\ -1,\ 0,\ 1)$ утворюють базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$.

І спосіб.

Спочатку побудуємо ортонормований базис даного підпростору. Координати векторів $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ не пропорційні, отже, вектори $\boldsymbol{f}_1$ і $\boldsymbol{f}_2$ утворюють базис підпростору L. Застосуємо до цього базису процес ортогоналізації Грамма-Шмідта.

По $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ побудуємо ортогональний базис $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$:

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 2); \qquad (\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_1) = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 = 9;$$

$$(\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{g}_1) = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 7;$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_1)} \boldsymbol{g}_1 = (-1,\ 2,\ 4,\ 2) - \frac{7}{9}(1;\ 2;\ 0;\ 2) =$$

$$= \frac{1}{9}\left[9(-1;\ 2;\ 4;\ 2) - 7(1;\ 2;\ 0;\ 2)\right] = \frac{1}{9}(-16;\ 4;\ 36;\ 4)$$

$$\text{або } \boldsymbol{g}_2 = (-4;\ 1;\ 9;\ 1).$$

Як видно, $\boldsymbol{g}_1 \perp \boldsymbol{g}_2$, так як $(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2) = 0$.

Побудуємо тепер ортонормований базис підпростору L:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|} = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_1;\ \boldsymbol{g}_1)}} = \frac{1}{3}(1;\ 2;\ 0;\ 2) = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right);$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_2;\ \boldsymbol{g}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{99}}(-4;\ 1;\ 9;\ 1) = \left(-\frac{4}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}};\ \frac{9}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}}\right).$$

Знайдемо скалярні добутки даного вектора $\boldsymbol{x}$ і векторів знайденого базису:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2) = -2 \cdot \frac{-4}{\sqrt{99}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} - 1 \cdot \frac{9}{\sqrt{99}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} = -\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

Ортогональна проекція $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на підпростір L й ортогональна складова $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}$ відносно підпростору L будуть такі:

$$\boldsymbol{y} = \text{пр}_L \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}\right) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{99}}\left(-\frac{4}{\sqrt{99}}; \frac{1}{\sqrt{99}}; \frac{9}{\sqrt{99}}; \frac{1}{\sqrt{99}}\right) = \left(-\frac{4}{9}; -\frac{8}{9}; 0; -\frac{8}{9}\right) -$$

$$-\left(-\frac{8}{99}; \frac{2}{99}; \frac{18}{99}; \frac{2}{99}\right) = \frac{1}{99}(-36; -90; -18; -90) = \frac{1}{11}(-4; -10; -2; -10);$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (-2; 3; -1; -4) + \frac{1}{11}(-4; -10; -2; -10) =$$

$$= \frac{1}{11}(-18; 43; -9; -34).$$

II спосіб.

Як було вказано в першому способі дані вектори $\boldsymbol{f}_1$ і $\boldsymbol{f}_2$ є лінійно незалежними, отже утворюють базис.

Так як за означенням $\boldsymbol{y}$, який представляє ортогональну проекцію $\boldsymbol{x}$ на підпростір L, належить L, то його можна виразити через базисні вектори цього підпростору, тобто $\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2$. Таким чином, отримаємо

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{z}.$$

Помножимо останню рівність скалярно на $\boldsymbol{f}_1$:

$$(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{f}_1) = (\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{z}; \boldsymbol{f}_1) = \alpha_1(\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_1) + \alpha_2(\boldsymbol{f}_2; \boldsymbol{f}_1) + (\boldsymbol{z}; \boldsymbol{f}_1) =$$

$$= \alpha_1(\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_1) + \alpha_2(\boldsymbol{f}_2; \boldsymbol{f}_1), \text{ так як } \boldsymbol{z} \in L^{\perp}.$$

Аналогічно,

$$(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{f}_2) = (\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{z}; \boldsymbol{f}_2) = \alpha_1(\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{f}_2; \boldsymbol{f}_2).$$

Обчислив відповідні скалярні добутки:

$$(\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_1) = 9, \ (\boldsymbol{f}_1; \boldsymbol{f}_2) = 7, \ (\boldsymbol{f}_2; \boldsymbol{f}_2) = 25, \ (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{f}_1) = -4, \ (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{f}_2) = -4,$$

отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9\alpha_1 + 7\alpha_2 = -4, \\ 7\alpha_1 + 25\alpha_2 = -4. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $\alpha_1 = -\frac{9}{22}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{22}$, а, отже

$$\boldsymbol{y} = -\frac{9}{22}\boldsymbol{f}_1 - \frac{1}{22}\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{11}(-4; -10; -2; -10).$$

З рівності $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ будемо мати:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (-2; 3; -1; -4) - \frac{1}{11}(-4; -10; -2; -10) = \frac{1}{11}(-18; 43; -9; -34).$$

4. В просторі R^3 з матрицею Грамма $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix}$ знайти кут між векторами $\boldsymbol{x} = (1; 2; 3)$ і $\boldsymbol{y} = (1; 0; -5)$.

Розв'язання.

Косинус кута між ненульовими векторами $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ обчислюється по формулі:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}.$$

Знайдемо скалярний добуток $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -5\end{pmatrix} = -256.$$

Обчислимо норми векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ по формулах $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ й $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = 128 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2};$$

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -5\end{pmatrix} = 536 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{536} = 2\sqrt{134}.$$

Отже, $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} = \dfrac{-256}{8\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{134}} = -\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$, тоді $\varphi \approx \pi - \arccos\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$.

5. Исследовать квадратичную форму $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ на положительную определенность по критерию Сильвестра. Найти сигнатуру, канонический и нормальный вид квадратичной формы при помощи метода

а) Лагранжа (2 способами);

б) Якоби.

Решение.

а)

<u>I способ.</u> Сделаем замену переменных $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тогда квадратичная форма преобразуется к виду

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

В соответствии со сказанным при доказательстве теоремы 3.1 сделаем новую замену переменных

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3), \qquad z_2 = y_2, \qquad z_3 = y_3,$$

получим

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$

После замены переменных $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратичная форма f будет приведена к каноническому виду

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2.$$

<u>II способ.</u> Выполним согласованные элементарные преобразования строк и столбцов матрицы квадратичной формы и присоединенной единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix}\begin{array}{ccc}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\end{pmatrix}\begin{array}{l}-\mathrm{II}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\begin{array}{ccc}-1&1&4\\1&0&-3\\1&-3&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\begin{array}{ccc}-2&1&4\\1&0&-3\\4&-3&0\\\hline 1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{array}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \cdot 2+\mathrm{I}\\ +2\mathrm{I}\\ \\ \\ \\ \end{array}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\underset{\cdot 2+\mathrm{I}\ \ +2\mathrm{I}}{\begin{pmatrix}\begin{array}{ccc}-2&1&4\\0&1&-2\\0&-1&8\\\hline 1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{array}\end{pmatrix}}\leftrightarrow\overset{-\mathrm{II}}{\begin{pmatrix}\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&2&-2\\0&-2&8\\\hline 1&1&2\\-1&1&-2\\0&0&1\end{array}\end{pmatrix}}\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II}\\ \\ \\ \\ \end{array}\leftrightarrow\underset{+\mathrm{II}}{\begin{pmatrix}\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&2&-2\\0&0&6\\\hline 1&1&2\\-1&1&-2\\0&0&1\end{array}\end{pmatrix}}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\begin{array}{ccc}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\\\hline 1&1&3\\-1&1&-1\\0&0&1\end{array}\end{pmatrix}.$$

Матрица третьего порядка, стоящая сверху, является диагональной. Значит, это матрица квадратичной формы, имеющей канонический вид. В соответствии с алгоритмом матрица третьего порядка, стоящая снизу – это искомая матрица перехода. Поэтому

$$f=-2x_1^2+x_2^2+6x_3^2$$

и

$$\begin{cases}x_1=z_1+z_2+3z_3,\\ x_2=-z_1+z_2-z_3,\\ x_3=\qquad\qquad\ \ z_3.\end{cases}$$

б) Запишем матрицу квадратичной формы: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$. Тогда угловые миноры: $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-1$, $\Delta_3=-6$. Этим методом данную квадратичную форму привести нельзя.

6. Проверить, будут ли формы f и $g=9t_1^2-2t_2^2+4t_3^2$ эквивалентными над полем R. Для эквивалентных форм найти преобразование, переводящее квадратичную форму f в форму $g=9t_1^2-2t_2^2+4t_3^2$. Форму f взять из условия задачи 1.

Решение. Выше был получен канонический вид для формы f: $f=-2x_1^2+x_2^2+6x_3^2$. Найдем индексы инерции и сигнатуру: $r_+=2$, $r_-=1$ и сигнатура $s=2-1=1$. Для формы g: $r_+=2$, $r_-=1$ и сигнатура $s=2-1=1$. Итак, формы эквивалентны.

Найдем теперь преобразование, переводящее форму f в форму g. Форма $f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ приводится к нормальному виду $f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2$ заменой

$$\begin{cases} y_1\sqrt{2} = z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3\sqrt{6} = z_3, \end{cases}$$

где y_i, $i = \overline{1,3}$ определяются соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 2x_3, \\ y_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} z_1\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 2x_3, \\ z_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ z_3\frac{\sqrt{6}}{6} = x_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3, \\ z_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ z_3 = x_3\sqrt{6}. \end{cases}$$

Форму $g = 9t_1^2 - 2t_2^2 + 4t_3^2$ заменой $\begin{cases} 3t_1 = z_1, \\ t_2\sqrt{2} = z_2, \\ 2t_3 = z_3 \end{cases}$ приводим к нормальному виду $g = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$.

Итак, искомое преобразование, переводящее форму f в форму g:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3 = 3t_1, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = t_2\sqrt{2}, \\ x_3\sqrt{6} = 2t_3. \end{cases}$$

Или, выразив x_i через t_i, $i = \overline{1,3}$, будем иметь:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}t_1 + t_2\sqrt{2} + t_3\sqrt{6}, \\ x_2 = t_1\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}t_2 - \frac{\sqrt{6}}{3}t_3, \\ x_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}t_3. \end{cases}$$

7. Найти все значения λ, при которых квадратичная форма f будет положительно-определенной. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + \lambda x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

Решение.

Запишем матрицу квадратичной формы $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ найдем все угловые миноры и применим критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 5\lambda - 4 > 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 - 5\lambda - 1 > 0.$$

Все угловые миноры должны быть положительны, получим систем у неравенств:

$$\begin{cases} 5\lambda - 4 > 0, \\ 5\lambda^2 - 5\lambda - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > \dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10} < \lambda < \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{5} < \lambda < \frac{5+3\sqrt{5}}{10}.$$

Ответ. $\lambda \in \left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \right)$.

8. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ к каноническому виду.

Решение. Запишем матрицу заданной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 3) = 0.$$

Собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$. Отсюда вытекает, что квадратичная форма f имеет такой канонический вид

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

При $\lambda = 1$ система уравнений для определения координат собственных векторов имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как $\lambda = 1$ является корнем характеристического уравнения третьей кратности, то ему соответствуют три линейно независимых собственных вектора. Это означает, что фундаментальная система решений рассматриваемой однородной системы уравнений должна состоять из трех линейно независимых решений рассматриваемой системы уравнений. Следовательно, ранг матрицы системы однородных уравнений $r=1$ и, поэтому, система уравнений эквивалентна одному из своих уравнений, например, второму уравнению, ФСР которой имеет вид:

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{a}_1$	1	1	0	0
$\boldsymbol{a}_2$	1	0	1	0
$\boldsymbol{a}_3$	–1	0	0	1

Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы *A*, которые отвечают собственному значению $\lambda = 1$. Любой собственный вектор матрицы *A*, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, так как координаты этого вектора удовлетворяют системе уравнений.

Применим процесс ортогонализации к системе векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ получим ортонормированную совокупность линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ матрицы *A*, отвечающих собственному значению $\lambda = 1$. Имеем

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|},\ \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{g}_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{g}_3}{\|\boldsymbol{g}_3\|},\ \boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{g}_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -3$ согласно получаем следующую систему уравнений для определения координат собственного вектора $\boldsymbol{a}_4$ матрицы *A*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет ранг, равный трем, поэтому фундаментальная система решений состоит из одного ненулевого решения $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Собственный вектор $\boldsymbol{a}_4$ оказывается таким: $\boldsymbol{a}_4 = (1, -1, -1, 1)$.

Нормированный собственный вектор: $\boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу Q ортогонального преобразования переменных, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду. Для этого поместим в столбцы матрицы Q координаты собственных векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$, получим

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, квадратичная форма $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ при помощи ортогонального преобразования переменных

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 + \frac{1}{2} y_4, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4, \\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4, \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4. \end{cases}$$

приводится к каноническому виду

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$