ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1 Основні поняття теорії ймовірності

1.1 Простір елементарних подій. Відношення між подіями

Експеримент, результат якого змінюється в міру його повторення, називається *випадковим експериментом*.

Наведемо приклади випадкових експериментів.

1. Експеримент полягає в підкиданні монети. Є грань, яка опинилася зверху. Жоден з результатів не можна передбачити заздалегідь. Експеримент випадковий.
2. Експеримент полягає в підкиданні кубика. Є грань, яка опинилася зверху. Експеримент випадковий.
3. Монета підкидається 2 рази (або, еквівалентно, дві монети один раз). Є грань, яка опинилася зверху. Експеримент випадковий.
4. Монету підкидають до тих пір, поки герб не випаде.

Ці приклади показують, що різноманітність випадкових експериментів досить велике і структура їх результатів також різноманітна.

Якщо в усіх випробуваннях дана подія обов'язково відбувається, то вона називається *достовірною*, якщо в усіх випробуваннях дана подія ніколи не може відбутись, то вона називається *неможливою*. Будь-який факт, який може статися в результаті випадкового експерименту і його появу неможливо передбачити заздалегідь, називається *випадковим явищем* або *випадковою подією*. Дві або декілька випадкових подій називаються *рівноможливими*, якщо умови їх появи однакові і вони мають однакові шанси відбутися.

Сукупність всіх можливих взаємовиключних результатів (нерозкладних подій) випадкового експерименту називається *простором елементарних* подій і позначається буквою Ω. Елементи множини Ω називаються відповідно *елементарними подіями* (*результатами*) і позначаються ω, $\omega \in \Omega$. Сама множина Ω є достовірною подією, а порожня множина $\emptyset$ – неможливою.

Простір елементарних подій Ω може бути *зліченним* або *скінченним*, якщо кожній елементарній події можна покласти у відповідність деяке натуральне число n. Такий простір називають *дискретним*. Якщо ж простір складається з нескінченного числа елементів, які не можна пронумерувати, то він називається *неперервним*.

Наприклад, (див вище):

1. Експеримент полягає в підкиданні монети. Є грань, яка опинилася зверху. Всього експеримент має два результати: Г (герб), Ч (число).
2. Експеримент полягає в підкиданні кубика. Є грань, яка опинилася зверху. Всього результатів шість: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Монета підкидається 2 рази (або, еквівалентно, дві монети один раз). Є грань, яка опинилася зверху. Його результати можна записати так: (ГГ), (ГЧ), (ЧГ), (ЧЧ). Всього результатів чотири.

4. Монету підкидають до тих пір, поки герб не випаде. Результатами цього випадкового експерименту є: Г, (ЧГ), (ЧЧГ) ,..., (ЧЧ...ЧЧГ) , ... Кількість результатів експерименту нескінченно, але зліченно.

Отже, простір елементарних подій може бути *скінченною*, *нескінченно зліченною* або *незліченною множиною*.

Підмножини простору елементарних подій Ω називаються *випадковими подіями* або просто *подіями*. Випадкові події позначаються великими літерами латинського алфавіту *A, B, C*, ...

Зі сказаного вище випливає, що в ході експерименту обов'язково відбувається одна з елементарних подій $\omega \in \Omega$ і ніякі дві елементарні події ω_1 і ω_2, відмінні одна від одної, не можуть відбуватися одночасно (такі події називають *несумісними*). Якщо ж поява однієї події не заперечує непояву іншою або вони можуть відбуватися одночасно, то такі події називають *сумісними*.

Група несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ називається *повною групою подій*, якщо в результаті випробування обов'язково наступить одна і тільки одна подія цієї групи. Кожна елементарна подія $\omega \in \Omega$ повинна входити в склад однієї і тільки однієї з подій повної системи $A_1, A_2, \dots, A_n$. Вся множина Ω елементарних подій ω , що описує дане випробування, завжди утворює повну групу подій.

Повернемося до розглянутих вище прикладів з урахуванням введених визначень.

1. $\Omega = \{\omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{Ч}\}$, $|\Omega| = 2$, де – потужність множини.

2. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{\omega_i, i = \overline{1,6}\}$; $|\Omega| = 6$.

Подія $\text{A} = \{\text{Випала парна кількість очок}\} = \{2,4,6\}$.

3. $\Omega = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ЧГ}, \omega_3 = \text{ГЧ}, \omega_4 = \text{ЧЧ}\}$, $|\Omega| = 4$.

Подія $\text{A} = \{\text{Випадання герба}\} = \{\text{ГЧ}, \text{ЧГ}, \text{ГГ}\}$.

4. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\} = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \text{Р}\dots\text{РГ}, \ \dots\}$.

Подія А={експеримент закінчиться не пізніше, ніж при третьому підкиданні} $=$ $\{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$.

Оскільки події є підмножинами, операції над ними такі ж, як і в теорії множин. Тільки в теорії ймовірностей використовується термінологія, яка дещо відрізняється від теоретико-множинної, а геометрично випадкові події ілюструють з допомогою діаграм Ейлера-Венна, на яких простір елементарних подій Ω зображають у вигляді квадрата, а події – у вигляді кругів.

Так, наприклад на рис. 1.1 зображені сумісні події, на рис. 1.2 – несумісні події.

Запис $A \subseteq B$ *означає*, що подія *A* тягне за собою подію *B* (або, *B* випливає з *A*), тобто якщо всі елементарні події, що належать до події *A,* також належать до події *B*, тобто настання події *A* випливає з настання події *B* (рис. 1.3).

Очевидно, що будь-яка подія *A* тягне за собою достовірну і випливає з неможливої: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$.

Події A і B називаються *еквівалентними* або *рівносильними*, позначаються $A = B$, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

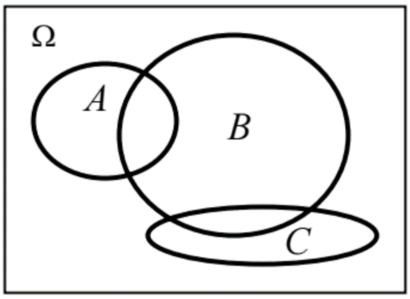


Рисунок 1.1

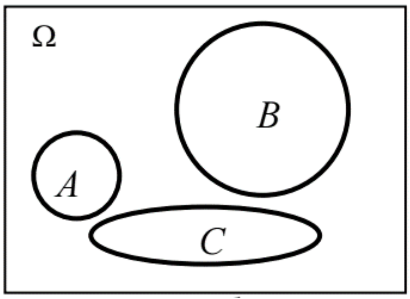


Рисунок 1.2

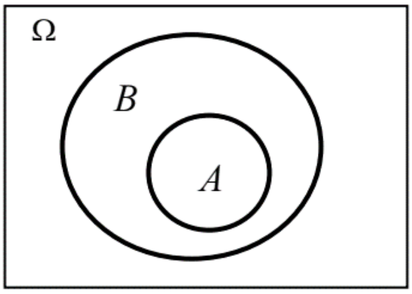


Рисунок 1.3

Сума (*об'єднання*) двох подій, A і B, $A, B \subseteq \Omega$ є подія $A + B$ $(A \cup B)$, що складається з усіх елементарних подій, що належать хоча б до однієї з подій A або B. Подія $A + B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A або подія B (рис. 1.4).

Добутком (*перетином*) двох подій A і B, $A, B \subseteq \Omega$ є подія, AB $(A \cap B)$, що складається з елементарних подій, що належать як до A, так і до B. Подія AB виникає тоді і тільки тоді, коли події A і B відбуваються одночасно (рис. 1.5).

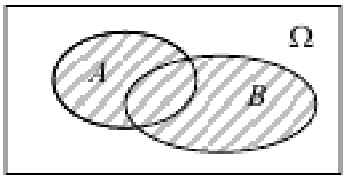


Рисунок 1.4

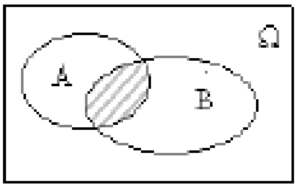


Рисунок 1.5

Операції суми і добутку узагальнюються до будь-якого скінченного або зліченного числа подій. При цьому використовуються позначення:

$$A + B + C,\ A \cup B \cup C,\ \sum_{k=1}^{n} A_k,\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k,\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k;$$

$$ABC,\ A \cap B \cap C,\ \prod_{k=1}^{n} A_k,\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k,\ \prod_{k=1}^{\infty} A_k,\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Різницею двох подій A і B, $A, B \subseteq \Omega$ називається *подія* $A - B$ $(A \backslash B)$, що складається з елементарних подій множини A, які не належать B. Подія $A - B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли A відбувається, але В не відбувається (рис. 1.6).

Подію $\overline{A} = \Omega - A$ називають *протилежною* події A (*доповненням* до А). Подія $\overline{A}$ виникає тоді і тільки тоді, коли A не відбувається (рис. 1.7).

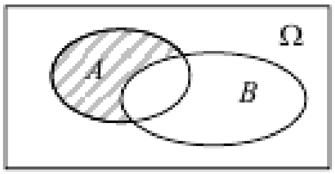


Рисунок 1.6

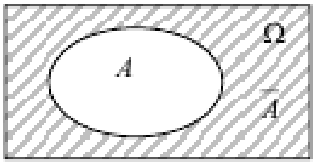


Рисунок 1.7

Симетрична різниця $C = A\Delta B$, зображена на рис. 1.8, є такою подією, в яку входять ті елементарні події, які входять в A чи B, але не входять в їх перетин $A \cap B$. Отже, симетрична різниця може бути представлена таким чином:

$$C = A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Події A і B називаються *несумісними*, якщо $AB = \emptyset$ (рис. 1.2).

Події утворюють $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *повну групу подій*, якщо:

– вони попарно несумісні: $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$;
– в сумі вони дають достовірну подію: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ (рис. 1.9).

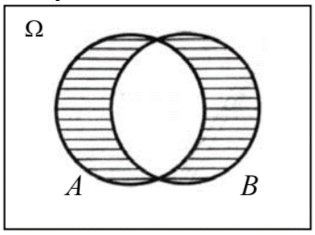


Рисунок 1.8

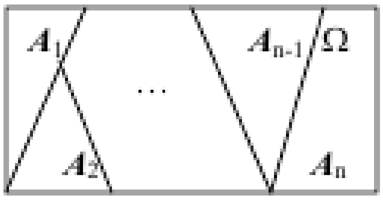


Рисунок 1.9

Властивості операції події

1. $A + B = B + A, AB = BA$ – комутативність.
2. $(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$ – асоціативність.
3. $(A + B)C = AC + BC$ – дистрибутивність.
4. $A + \Omega = \Omega, A\Omega = A$.
5. $A + \emptyset = A, A\emptyset = \emptyset$.
6. $A + A = A, AA = A$.
7. $A + \overline{A} = \Omega, A\overline{A} = \emptyset$.
8. $\overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$.
9. $\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ –закони Де Моргана.
10. $A \subseteq B \Rightarrow A + B = B, AB = A$.
11. $AB \subseteq A \subseteq A + B$.
12. $A - B = A\overline{B}$.

Приклад 1 Експеримент складається з підкидання кубика: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Розглянемо події:

$A = \{$Випадання парної кількості очок$\} = \{2,4,6\}$;

$B = \{$Випадання не більше трьох очок$\} = \{1,2,3\}$;

$C = \{$Випадання непарної кількості очок$\} = \{1,3,5\}$.

Тоді $A + B = \{1,2,3,4,6\}$; $AB = \{2\}$; $A - B = \{4,6\}$; $\overline{A} = \{1,3,5\} = C$; $AC = \emptyset$ і $A + C = \Omega$, тобто A і C утворюють повну групу подій.

Приклад 2 Нехай A, B, C – довільні випадкові події. Використовуючи поняття протилежної події, означення суми та добутку подій, записати вирази для таких подій:

а) D – відбулась тільки подія C;

б) E – відбулись події B і C, а подія A не відбулась;

в) K – не відбулось жодної з цих подій;

г) L – відбулись всі три події;

д) F – відбулось не більше двох з цих подій;
е) M – відбулись тільки дві події;
є) N – відбулось не менше двох з цих подій;
ж) O – відбулась хоча б одна з цих подій;
з) S – відбулось не більше однієї з цих подій;

Розв'язання.

а) $\mathrm{D} = \overline{A}\,\overline{B}C$;

б) $\mathrm{E} = \overline{A}\,BC$;

в) $\mathrm{K} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

г) $\mathrm{L} = \mathrm{ABC}$;

д) дана подія F є протилежною подією до такої: відбулись усі три події – ABC, тобто $\mathrm{F} = \overline{ABC}$;

е) $\mathrm{M} = \overline{A}\,BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} = (AB + BC + AC) - ABC$;

є) $\mathrm{N} = \overline{A}\,BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC = AB + BC + AC$;

ж) $\mathrm{O} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$ або $\mathrm{O} = \overline{K}$;

з) $M = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{ABC}$ або $\mathrm{T} = \overline{L}$.

1.2 Формула включень та виключень

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об'єднанні множин.

N-*множиною* Ω називається множина, що містить N-елементів.

Для двох множин має місце формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Приклад 3 Знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та діляться на 7 або на 11. Позначимо як A множину чисел, що діляться на 7, B – множину чисел, що діляться на 11. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{1000}{11}\right] - \left[\frac{1000}{7 \cdot 11}\right] = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об'єднанні ускладнюється:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Приклад 4 Одну з мов (англійську, німецьку, іспанську) вивчає 231 студент, причому $|E| = 180$, $|D| = 110$, $|S| = 70$, $|E \cap D| = 82$, $|E \cap S| = 40$, $|D \cap S| = 15$, де як E, D, S позначено множини студентів, які відповідно вивчають англійську, німецьку й іспанську мови. Скільки студентів вивчають усі три мови?

Розв'язання. Маємо

$$231 = 180 + 110 + 70 - 82 - 40 - 15 + |E \cap D \cap S|,$$

звідки випливає, що $|E \cap D \cap S| = 8$ студентів.

Теорема 1.1 (принцип включення-виключення або **формули решета)** Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Зазначимо, що формула включення-виключення містить $2^n - 1$ доданків, по одному для кожної непорожньої підмножини з $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

1.3 Елементи комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y – n_2 способами, то або x, або y (один з об'єктів) можна вибрати $n_1 + n_2$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об'єктів (x, y) можна вибрати $n_1 n_2$ способами.

Узагальнене правило добутку. Якщо об'єкт x_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт x_2 – n_2 способами, …, об'єкт x_k – n_k способами, то вибір впорядкованої системи об'єктів $(x_1,\ x_2, \ldots, x_п)$ можна здійснити $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.

Комбінаторні формули в прикладних задачах теорії ймовірностей зазвичай пов'язані з вибором *m* елементів з сукупності, що складається з *n* елементів. Існує два способи вибору:

а) *вибір з повторенням*, при якому виділений елемент повертається в сукупність і може бути вибраний знову;

б) *вибір без повторення*, при якому виділений елемент не повертається в сукупність і вибір не містить повторюваних елементів.

Розміщенням з n елементів деякої множини по m елементах – це будь-який впорядкований набір з m елементів заданої множини. Кількість всіх розміщень дорівнює $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

Якщо предмети можуть повторюватися в упорядкованій множині, то ця множина називається ***розміщенням з повторенням***. Кількість розміщень з повтореннями дорівнює: $\overline{A}_n^m = n^m$.

Перестановкою з n елементів деякої множини називається розміщення з n елементів по n елементів. Кількість всіх перестановок дорівнює $P(n) = A_n^n = n!$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями). Точніше, нехай є n елементів k різних типів, а число n_j $(j = \overline{1, k})$ – кількість елементів j -го типу. Очевидно, що $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Перестановки з n елементів за такої умови називають ***перестановками з повтореннями***. Кількість таких перестановок позначають як:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Комбінаціями називаються сполуки або групи, складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Кількість всіх комбінацій дорівнює

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Комбінації з повтореннями. Комбінацією з повтореннями з *n* елементів по *k* називається будь-яка *k*-множина виду $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, де $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – елементи множини (не обов'язково різні). Число всіх комбінацій з повтореннями з *n* елементів по *k* позначається (тут можливе *k* > *n*) і рівне

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

1.4 Класичне визначення ймовірності

Кажуть, що випадковий експеримент задовольняє *класичному визначенню ймовірності* (або *класичній схемі ймовірностей),* якщо:

– простір елементарних подій складається з *скінченого числа* результатів $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$;

– з міркувань симетрії можна припустити, що всі елементарні результати експерименту *однаково можливі* (тобто жоден з результатів не має переваги перед іншими).

Згідно *з класичним визначенням ймовірності, ймовірність* будь-якої події $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \ldots, \omega_{k_m}\}$, $\omega_{k_i} \in \Omega$, $k_i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i = \overline{1,m}$ дорівнює відношенню числа *m* сприятливих результатів події *A* до загальної кількості результатів *n*:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Приклад 5 Визначте ймовірність події *A*, яка полягає в тому, що при підкиданні двох кубиків сума очок не перевищить 4.

Розв'язання. У цьому прикладі важливо розуміти, що якщо значення суми випавших очок розуміється як результат експерименту: $\Omega = \{\omega_i = i, i = \overline{2,12}\}$ або кількість очок, які випали на кожен з кубиків без урахування порядку їх послідовності: $\Omega = \{\omega_{ij} = (i,j); i,j = \overline{1,6}; i < j\}$, то результати не є однаково можливими і класичне визначення ймовірності не застосовується. Правильне розв'язання відповідно до класичного визначення ймовірності можна отримати, якщо тільки під результатом розуміти кількість балів, які випали на кожній з кісток з урахуванням порядку їх послідовності: $\Omega = \{\omega_{ij} = (i,j); i,j = \overline{1,6}\}$. У цьому випадку $n = |\Omega| = 6^2 = 36$, $A = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (3,1); (1,3)\}$. Тому і $m = |A| = 6$ і $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$.

Властивості ймовірності

1. Імовірність будь-якої події – це число між нулем і одиницею, тобто $0 \le P(A) \le 1$. Імовірність неможливо] події дорівнює 0, а ймовірність достовірної – 1.

2. Якщо події A і B несумісні, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

3. Імовірність будь-якої події A в сумі з імовірністю протилежної події $\overline{A}$ дорівнює одиниці: $P(A) + P(\overline{A}) = 1 = P(\Omega)$.

Якщо ймовірність події, що цікавить, складно розрахувати з якихось причин, то можна спробувати розрахувати ймовірність протилежної події, а потім використовувати властивість 3 для обчислення шуканої ймовірності події A.

4. Якщо $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

При розв’язанні завдань з використанням класичного визначення ймовірності широко використовуються поняття комбінаторики. Згадаймо деякі з них.

1.5 Статистична ймовірність

До основних недоліків застосування класичного означення до обчислення ймовірностей випадкових подій відносяться:

- можливість нескінченної кількості наслідків у деяких випробуваннях;
- можливість того, що елементарні події, що можуть відбутися внаслідок випробування не будуть рівноймовірними;
- неможливість у деяких випадках представити подію, що цікавить дослідника, у вигляді множини елементарних подій.

З цих причин, поряд з класичною схемою, використовують також інші способи обчислення ймовірностей. При статистичному методі знаходження ймовірності вважають, що вона дорівнює відносній частоті появи події у серії з багатьох випробувань.

Відносною частотою (*частістю*) події A називають відношення кількості m випробувань, у яких ця подія відбулася, до загальної кількості n здійснених випробувань:

$$v(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад 6 У серії зs 100 пострілів стрілець 86 разів влучив у ціль. Відносна частота влучення у ціль даним стрільцем буде $v = 0{,}86$.

Якщо випробування здійснюються в однакових умовах у достатньо великих кількостях, то відносна частота появи події у цих дослідах виявляє *властивість стійкості*. Ця властивість полягає у тому, що при здійсненні кількох серій з великої кількості випробувань відносна частота події змінюється мало, коливаючись навколо деякої сталої величини, що дорівнює ймовірності даної події. Таким чином, *статистичною ймовірністю події* є відносна частота її появи у серії з достатньо великої кількості випробувань. Для існування статистичної ймовірності події A потрібна:

- можливість, хоча б принципова, здійснення необмеженого числа випробувань, у кожному з яких може з’явитися ця подія;
- стійкість відносних частот появи події A у різних серіях з достатньо великої кількості випробувань.

1.6 Геометричне означення ймовірності

Геометричне визначення ймовірності є узагальненням класичного визначення ймовірності в тому випадку, коли множина рівних результатів нескінченна.

Кажуть, що випадковий експеримент задовольняє *геометричному визначенню ймовірності,* якщо:

– результати експерименту можуть бути представлені точками деякої області $\Omega \in R^n$, що мають скінченну міру μ;

– можна припустити, що попадання точки в будь-яку область $A \subseteq \Omega$, що має однакову скінчену міру μ, однаково можливо і не залежить від форми і розташування A всередині Ω. При цьому кажуть, що точка рівномірно розподілена в області Ω або кидається в область Ω навмання.

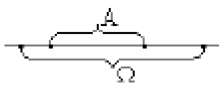
Згідно з *геометричним визначенням ймовірності,* ймовірність потрапляння точки в будь-яку область A (подія A) пропорційна її мірі μ:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Зокрема:

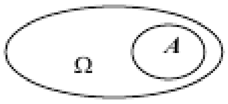
– коли $n = 1$, то міра $\mu(\cdot)$ розуміється як довжина $l(\cdot)$ підмножини на числовій прямій R і

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)};$$



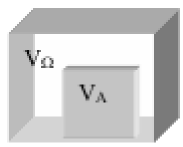
– коли $n = 2$, то міра $\mu(\cdot)$ розуміється як площа $S(\cdot)$ підмножини на площині R^2 і

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)};$$



– коли $n = 3$, міра $\mu(\cdot)$ розуміється як об'єм $V(\cdot)$ підмножини в просторі R^3 і

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$



З геометричного визначення ймовірності випливають такі **властивості ймовірності**:

1. $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ якщо події A і B несумісні.

Приклад 7 Два запити можуть бути отримані однаково на один сервісний пристрій в часовому проміжку $[0; T]$. Час обслуговування одного запиту дорівнює τ. Якщо наступна заявка надходить в момент, коли пристрій зайнято службою попереднього, то воно втрачається. Знайдіть ймовірність втрати програми.

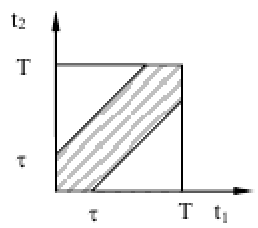


Рисунок 1.10

Розв'язання. Давайте позначимо t_1, t_2 – моменти надходження заявок. Тоді $\Omega = \{(t_1, t_2), 0 \le t_1, t_2 \le T\}$

Подія A, яка нас цікавить має вигляд:

$$A = \{(t_1, t_2), 0 \le t_1, t_2 \le T : |t_2 - t_1| < \tau\}.$$

Тому, (див. рисунок 1.7)

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$