2 Теореми додавання та множення імовірностей та наслідки з них

2.1 Теореми додавання для несумісних подій

Теорема 2.1 (про додавання ймовірностей) Імовірність появи однієї з двох несумісних подій A і B, байдуже якої, дорівнює сумі імовірностей цих подій

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Наслідок. Імовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, дорівнює сумі імовірностей цих подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Теорема 2.2 Сума імовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)=1.$$

Протилежними називають дві рівноможливі події, що утворюють повну групу. Якщо одну з протилежних подій позначити через A, то другу подію позначають як $\overline{A}$.

Теорема 2.3 Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Якщо при обчисленні імовірності певної події ніяких інших обмежень, крім сукупності умов S, при яких вона може відбутися чи не відбутися не накладають, то таку імовірність називають *безумовною*. Якщо накладають і другі додаткові умови, то таку імовірність події називають *умовною*.

Умовною ймовірністю $P_B(A)$ називають ймовірність події A, обчислену за умови, що подія B відбулася:

$$P_B(A)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Приклад 1 У урні є 2 білі кульки і 7 чорних кульок. З неї підряд виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що 2-й куля буде білою, за умови, що 1-а куля була чорною?

Розв'язання.

1 спосіб. Нехай A – 1-а куля чорна, B – 2-а куля біла. З моменту настання події A в урні залишилося 8 кульок, з яких 2 – білого кольору. Тому $P(\text{B}|\text{A})=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

2 спосіб. Давайте знайдемо $P(\text{B}|\text{A})$ по формулі. Очевидно, $P(A)=\frac{7}{9}$. Знайдемо $P(AB)$: $n=9\cdot 8=72$ – це загальна кількість результатів (поява двох кульок). Події AB сприяють $m=C_2^1\cdot C_7^1=14$ результатів. Тому $P(AB)=\frac{14}{72}=\frac{7}{36}$. Отже,

$$P(\text{B}|\text{A})=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{7}{36}:\frac{7}{9}=\frac{1}{4}.$$

Теорема 2.4 (про множення ймовірностей) Імовірність сумісної появи двох подій рівна добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність іншої події, обчислену в припущенні, що перша подія вже відбулася:

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(\text{B}|\text{A}).$$

Для будь-якого скінченного числа подій правило множення ймовірностей узагальнюється наступним чином.

Наслідок 1 Імовірність сумісної появи декількох подій рівна добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності всіх решти, причому імовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулися:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Приклад 2 Партія з 100 деталей містить 5 бракованих деталей. Знайдіть ймовірність того, що серед обраних 10 деталей не буде бракованих деталей.

Розв'язання. Розглянемо події

$B_k = \{k$-а обрана деталь $-$ небракована$\}$,

$B = \{$всі 10 обраних деталей – небраковані$\}$.

Тоді $B = B_1B_2\dots B_{10}$ і відповідно до теореми про множення ймовірностей отримаємо:

$$P(B_1B_2\dots B_{10}) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1B_2)\cdot\ldots\cdot P(B_{10}|B_1B_2\dots B_9) =$$
$$= \frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\ldots\cdot\frac{86}{91} = 0{,}584.$$

Дві події називаються *незалежними*, якщо імовірність появи однієї з них не впливає на імовірність настання чи не настання іншої події, тобто умовні імовірності подій рівні їх безумовним імовірностям:

$$P(A|B) = P(A).$$

Якщо $P(A|B) \neq P(A)$, то кажуть, що подія A залежить від події B . Поняття незалежності симетричне, тобто якщо подія A не залежить від події B, то подія B не залежить від події A.

Наслідок 2 Якщо події A і B незалежні, то імовірність їх сумісної появи рівна добутку їх імовірностей:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Дві події називаються *незалежними*, якщо імовірність їх добутку рівна добутку імовірностей цих подій; в протилежному випадку події називаються *залежними*. Декілька подій називають *попарно незалежними*, якщо кожні дві з них незалежні.

Декілька подій називають *незалежними в сукупності* (або просто незалежними), якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки решти.

Якщо декілька подій незалежні попарно, то звідси ще не випливає їх незалежність в сукупності. Але з умови незалежності подій у сукупності випливає їх попарна незалежність. Тому умова незалежності подій у сукупності сильніша вимоги їх попарної незалежності.

Властивості незалежних подій

1. Якщо події A і B незалежні, то незалежними є також такі пари подій: $\overline{A}$ і B, A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

2. Якщо подія A незалежна від подій B_1 і B_2, які несумісні ($B_1B_2 = \emptyset$), то подія A не залежить від їх суми $B = B_1 + B_2$.

Приклад 3 Випадковий експеримент полягає в підкиданні правильного тетраедра. Розглядається грань, що впала вниз. Грані тетраедра пофарбовані наступним чином: 1 грань – біла, 2 грань – чорна, 3 грань – червона, 4 грань містить всі кольори.

Розглянемо події:

$A = \{$випадання білого кольору$\}$,

$B = \{$випадання чорного кольору$\}$,

$C = \{$випадання красного кольору$\}$.

Тоді, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, $P(AC) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$, $P(BC) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$. Отже, події A, B і C є попарно незалежними. Однак, $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$. Тому події A, B і C не є незалежними в сукупності.

На практиці, як правило, незалежність подій встановлюється не шляхом її перевірки за визначенням, а навпаки: вони вважають події незалежними з якихось зовнішніх причин або з урахуванням обставин випадкового експерименту, і використовують самостійність для знаходження ймовірностей роботи подій.

Наслідок 3 Імовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку імовірностей цих подій

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Теорема 2.5 Імовірність появи хоч би однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком імовірностей протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\ldots P\left(\overline{A_n}\right).$$

Імовірність суми сумісних подій. Імовірність появи хоч би однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Якщо події A і B незалежні, то формула імовірності суми подій набере вигляду:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

якщо події A і B залежні, то формула має вигляд:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B) = P(A) + P(B) - P(B)P_B(A).$$

Для трьох сумісних подій теорема про додавання ймовірності має такий вигляд:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

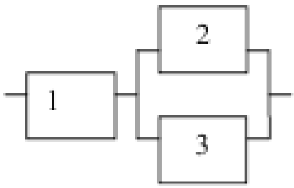
Імовірність суми довільного числа сумісних подій має вигляд:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P\left(A_iA_j\right) +$$

$$+ \textstyle\sum_{1 \le i < j < k \le n} P\left(A_iA_jA_k\right) + (-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Остання формула ще носить назву формули включень і виключень.

Приклад 4 (типовий приклад знаходження умовних ймовірностей, поняття незалежності, теорема про додавання ймовірностей). Електричний ланцюг складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірності виходу з ладу кожного з елементів відповідно дорівнюють $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}2$.



1)Знайдіть ймовірність збою схеми.
2) Відомо, що схема відмовила. Яка ймовірність того, що при цьому відмовив:
а) 1-й елемент; б) 3-й елемент?

Розв'язання.

1) Розглянемо події $A_k = \{$відмовив k-й елемент$\}$, $k = 1,2,3$ і подія $A = \{$відмовила схема$\}$. Тоді подія A представляється у вигляді:

$$A = A_1 + A_2A_3.$$

Оскільки події A_1 і A_2A_3 не є несумісними, то для знаходження ймовірності $P(A) = P(A_1 + A_2A_3)$ слід використовувати загальну теорему про додавання ймовірності, згідно з якою

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3).$$

Використовуючи подальшу незалежність подій A_k, $k = 1,2,3$, будемо мати $P(A) = P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}1 + 0{,}04 - 0{,}004 = 0{,}136$.

2) а) якщо вже відомо, що схема дала збій, то для того, щоб знайти ймовірність відмови в даному випадку 1-го елемента, необхідно визначити умовну ймовірність $P(A_1|A)$. За визначенням умовної ймовірності і з урахуванням того, що $A_1 \subset A$, отримаємо:

$$P\left(\frac{A_1}{A}\right) = \frac{P(A_1A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}136} = \frac{25}{34};$$

б) оскільки $A_3 \not\subset A$, умовна ймовірність $P(A_3|A)$ дещо інша:

$$P(A_3/A) = \frac{P(A_3A)}{P(A)} = \frac{P(A_1A_3 + A_2A_3)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3)}{P(A)} = \frac{0{,}02 + 0{,}04 - 0{,}004}{0{,}136} = \frac{7}{17}.$$

Приклад 5 Імовірність ураження цілі при кожному пострілі становить 0,9. Скільки самостійних пострілів необхідно зробити, щоб вразити ціль з ймовірністю не менше ніж 0,9999?

Розв'язання. Нехай n – кількість зроблених пострілів, подія $A_k = \{$попадання в ціль при k-му пострілі$\}$, $1 \leq k \leq n$, подія $A = \{$ураження цілі$\}$. Очевидно, що $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, але оскільки події A_k, $1 \leq k \leq n$ не є попарно несумісними, то для знаходження ймовірності $P(A) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ слід використовувати теорему про додавання ймовірності в загальному вигляді.

Зручніше перейти до протилежної події:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1A_2\ldots A_n}\right) =$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n}) = 1 - (0{,}1)^n \geq 0{,}9999.$$

Розв'язуючи отриману нерівність $(0{,}1)^n \leq 0{,}0001$ відносно n, отримаємо, що $n \geq 4$.

2.2 Повна формула ймовірності. Формула Байєса

Припустимо, що даний випадковий експеримент пов'язаний з повною групою подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, ймовірності яких $P(H_k)$, $k = \overline{1,n}$ відомі. Нас цікавить якась подія *A*, яка може відбутися одночасно з однією з H_k. У цьому випадку умовні ймовірності $P(A|H_k), k = \overline{1,n}$ настання події *A* при кожній H_k відомі. Потрібно визначити безумовну ймовірність $P(A)$.

Уявімо собі подію А як:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = AH_1 + \dots + AH_n.$$

В отриманій сумі доданки попарно несумісні: $(AH_i)(AH_j) = \emptyset, i \neq j$. Тому, використовуючи правило множення ймовірностей, отримаємо:

$$P(A) = P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k) -$$

формула повної ймовірності.

В ній події H_k називаються *гіпотезами* (так як одна з H_k обов'язково настає), а ймовірності $P(H_k), k = \overline{1,n}$ – *ймовірностями гіпотез*.

Приклад 6 Збиральний цех заводу отримує 40% деталей з 1-го цеху і 60% з 2-го цеху. 90% стандартних деталей виробляються в 1-му цеху, а 95% – у 2-му. Знайдіть ймовірність того, що навмання взята робітником деталь буде стандартною.

Розв'язання. Взяття деталі можна розбити на два етапи. Перший – це вибір цеху. Існує дві гіпотези: H_1 – деталь була зроблена 1 цехом, H_2 – 2-м. Другий етап – взяття деталі. Подія *A* – випадково взята деталь стандартна. Очевидно, що події H_1 і H_2утворюють повну групу, $P(H_1) = 0{,}4$, $P(H_2) = 0{,}6$. Числа 0,9 і 0,95 – це умовні ймовірності події *A* за умови виконання гіпотез H_1 і H_2 відповідно, тобто $P(A|H_1) = 0{,}9$ і $P(A|H_2) = 0{,}95$. За формулою повної ймовірності знаходимо

$$P(A) = \sum_{k=1}^{2} P(H_k)P(A|H_k) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}95 = 0{,}93.$$

Припустимо, що з випадковим експериментом пов'язані *n* гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, ймовірності яких відомі $P(H_k), k = \overline{1,n}$. Відомо також, що гіпотеза H_k надає події *A* ймовірність $P(A|H_k), k = \overline{1,n}$. Припустимо, що експеримент був проведений, і в результаті подія *A* відбулася. Цей факт призводить до переоцінки ймовірностей гіпотез $P(H_k), k = \overline{1,n}$. Кількісно це питання розв'язується за такою формулою:

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, k = \overline{1,n} -$$

формула Байєса (або *формула гіпотез*).

В ній $P(H_k), k = \overline{1,n}$ називаються *апріорними ймовірністями гіпотез* (вони визначаються апріорі – до експерименту). Умовні ймовірності $P(H_k|A), k = \overline{1,n}$ називаються *апостеріорними ймовірностями гіпотез* (їх обчислюють апостеріорі – після експерименту, коли стало відомо, що подія *A* відбулася).

Приклад 7 Двійкові символи {0, 1} передаються по каналу зв'язку. Імовірність спотворення символів в каналі ($0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$) однакова і дорівнює

0,2. Імовірність символу 0 на вході каналу дорівнює 0,9, а ймовірність символу 1 – 0,1. На виході каналу прийнято сигнал, що відповідає 1. Визначте ймовірність того, що на вхід каналу подавалася також 1.

Розв'язання. Розглянемо гіпотези:

$H_0 = \{\text{на вході каналу зв'язку символ } 0\}$,

$H_1 = \{\text{на вході каналу зв'язку символ } 1\}$.

Очевидно, що $H_0 H_1 = \emptyset$ і за умовою $P(H_0) = 0{,}9$, $P(H_1) = 0{,}1$, тобто події H_0 і H_1 утворюють повну групу подій.

Нехай подія $A = \{\text{на виході каналу прийнято символ } 1\}$. Тоді, згідно з умовою задачі, ймовірність спотворення символу 0 в каналі є умовною ймовірністю $P(A|H_0) = 0{,}2$, а умовна ймовірність $P(A|H_1) = 0{,}8$ – ймовірність неспотворення в каналі символу 1. З точки зору введених позначень, потрібно знайти умовну (апостеріорну) ймовірність $P(H_1|A)$.

Давайте спочатку знайдемо безумовну ймовірність події A за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{1} P(H_k) P\left(\frac{A}{H_k}\right) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}26.$$

Тоді, згідно з формулою Байєса, ми знаходимо апостеріорну ймовірність $P(H_1|A)$:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{i=0}^{1} P(H_i)P(A|H_1)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}8}{0{,}26} \approx 0{,}31$$

з апріорною ймовірністю $P(H_1) = 0{,}1$.

Очевидно, що в цьому випадку апостеріорна ймовірність $P\left(\frac{H_0}{A}\right) \approx 0{,}69$ з апріорною ймовірністю $P(H_0) = 0{,}9$.