4 Дискретні випадкові величини і їх числові характеристики

Під *випадковою величиною* розуміється величина, яка в результаті досвіду приймає те чи інше значення, і заздалегідь невідомо, яке саме. Випадкові величини (скорочено: в. в.) позначаються великими латинськими літерами *X*, *Y*, *Z*, ..., а значення, які вони приймають, відповідно малими літерами $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots$.

Прикладами в. в. можуть бути:

1) X – кількість очок, які з'являються при киданні кубика;

2) Y – кількість пострілів, зроблених до першого попадання в ціль;

3) Z – час безаварійної роботи пристрою і т.п. (людський зріст, курс долара, кількість несправних деталей в грі, температура повітря, виграш гравця, координата точки з випадковим вибором її на [0; 1], прибуток компанії, ...

Випадкова величина, яка приймає скінченну або зліченну кількість значень, називається *дискретною випадковою величиною* (скорочено: д. в. в.).

Якщо набір можливих значень в. в. незліченна, то така величина називається *неперервною* (скорочено: н. в. в.), тобто в. в. може прийняти всі значення з деякого скінченного чи нескінченного проміжку.

Приклад 1 Експеримент полягає в підкиданні монети 2 рази. У просторі елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, де $\omega_1 = \text{ГГ}$, $\omega_2 = \text{ГР}$, $\omega_3 = \text{РГ}$, $\omega_4 = \text{РР}$ можна розглянути в. в. X – кількість появ герба. В. в. X – функція елементарної події ω_i: $X(\omega_1) = 2, , X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 1, X(\omega_4) = 0$; X – д. в. в. зі значеннями $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Для повного опису в. в. недостатньо просто знати її можливі значення; ще потрібно знати ймовірності цих значень.

4.1 Закон розподілу дискретної випадкової величини. Їх числові характеристики

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями в. в. і їх імовірностями. Його задають таблично, графічно чи аналітично (у виді формул).

Сума імовірностей закону розподілу дорівнює 1: $\sum_i p_i = 1$.

Для д. в. в. X закон розподілу може бути подано у вигляді таблиці розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

де перший рядок містить всі можливі значення (зазвичай в порядку зростання) в. в., а друга – їх ймовірності. Таку таблицю називають *рядом розподілу*.

Приклад 2 В урні 8 кульок, з яких 5 – білі, інші – чорні. З неї навмання виймають 3 кульки. Знайдіть закон розподілу кількості білих кульок у виборці.

Розв'язання. Можливими значеннями в. в. X – кількості білих кульок у вибірці є $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$. Їх ймовірності дорівнюють відповідно: $p_1 = P\{X = x_1\} = \frac{C_5^0 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$, $p_2 = P\{X = x_2\} = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$,
$p_3 = P\{X = x_3\} = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$, $p_4 = P\{X = x_4\} = \frac{C_5^3 \cdot C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$.
Запишемо закон розподілу у вигляді таблиці:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Перевірка: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = 1$.

Дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина. В протилежному випадку випадкові величини є *залежними*. Декілька випадкових величин називаються *взаємно незалежними*, якщо закони розподілу будь-якого числа з них не залежать від того, які можливі значення набула решта величин.

Визначимо *математичні операції* над д. в. в.:

Сумою (*різницею*) д. в. в. *X*, яка приймає значення x_i з імовірністю $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$ і д. в. в. *Y*, яка приймає значення y_j з імовірністю $p_j = P\{Y = y_j\}$, $j = 1,2,\ldots,m$, називається д. в. в. $Z = X + Y$ ($Z = X - Y$), яка приймає значення $z_{ij} = x_i + y_j$ ($z_{ij} = x_i - y_j$) з імовірностями $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ для всіх заданих значень i і j. Якщо деякі суми $x_i + y_j$ (різниці $x_i - y_j$) збігаються, то відповідні ймовірності додаються.

Добутком д. в. в. *X*, яка приймає значення x_i з імовірністю $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$ і д. в. в. *Y*, яка приймає значення y_j з імовірністю $p_j = P\{Y = y_j\}$, $j = 1,2,\ldots,m$, називається д. в. в. $Z = X \cdot Y$, яка приймає значення $z_{ij} = x_i \cdot y_j$ з імовірностями $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ для всіх заданих значень i і j. Якщо деякі добутки $x_i \cdot y_j$ збігаються, то відповідні ймовірності додаються.

Добутком д. в. в. *на число с* називається д. в. в. *cX*, яка приймає значення cx_i з імовірністю $p_i = P\{X = x_i\}$.

Математичне сподівання (або *середнє значення*) д. в. в. *X*, що має закон розподілу $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1,n}$ – це число, що дорівнює сумі добутків всіх його значень та їх відповідних імовірностей. Математичне сподівання (скорочено: м. о.) позначається як MX (або $M(X)$, m_X).

Таким чином, за визначенням,

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i.$$

Якщо кількість можливих значень в. в. X нескінченно (злічено), то

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i,$$

причому ряд в правій частині повинен абсолютно збігатися (інакше в. в. *X* не має м. о.).

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання константи дорівнює самій цій константі, тобто $Mc = c$.

2. Постійний множник виноситься за знак м. о., тобто $M(cX) = cMX$.

3. М. с. суми в. в. дорівнює сумі їх м. о., тобто $M(X + Y) = MX + MY$.

Цю властивість можна узагальнити на довільне скінченне число доданків.

4. М. с. відхилення в. в. від її М. с. дорівнює нулю, тобто $M(X - MX) = 0$.

Відзначимо, що різниця $X - MX$ називається *відхиленням* в. в. X від її М. с. MX і позначається символом $\overset{\circ}{X}$: $\overset{\circ}{X} = X - MX$. Ця в. в. $\overset{\circ}{X}$ також називається *центрованою* в. в.

5. М. с. добутку незалежних в. в. дорівнює добутку їх м. о., тобто якщо X і Y незалежні, то

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

Приклад 3 У лотереї є 1000 квитків, з яких виграшні: 10 по 500 грн, 50 по 50 грн, 100 по 10 грн, 150 по 1 грн. Знайдіть математичне сподівання виграшу за одним квитком.

Розв'язання. Ряд розподілу в. в. X – сума виграшу за квиток виглядає наступним чином:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

Перевірка: $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$. Знайдемо MX:

$MX = 500 \cdot 0{,}01 + 50 \cdot 0{,}05 + 10 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}69 = 8{,}65$ гривень.

Дисперсія (*розсіювання*) в. в. X – математичне сподівання квадрата його відхилення від свого математичного сподівання.

Позначається дисперсія як DX (або $D(X)$, D_X). Таким чином, за визначенням,

$$DX = M(X - MX)^2$$

або $DX = M\overset{\circ}{X}^2$, або $DX = M(X - m_X)^2$.

Дисперсія характеризує ступінь дисперсії (розсіювання) значень випадкової величини відносно її середнього значення (математичного сподівання). Чим щільніше значення випадкової величини згруповані навколо математичного сподівання, тим менше дисперсія.

З визначення дисперсії випливають формули її розрахунку:

$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i$ – для д. в. в. X,

На практиці дисперсію в. в. зручно знаходити за формулою

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

Це дозволяє писати формули для його визначення в формі:

$DX = \sum_i x_i^2 p_i - (MX)^2$ – для д. в. в. X.

Властивості дисперсії

1. Дисперсія константи дорівнює нулю, тобто $Dc = 0$.

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, піднісивши його до квадрату, тобто $D(cX) = c^2 DX$.

3. Дисперсія суми незалежних в. в. дорівнює сумі їх дисперсій, тобто якщо X і Y незалежні, то $D(X+Y)=DX+DY$.

Зауважимо, що якщо в. в. X і Y є залежними, тоді

$$D(X+Y)=DX+DY+2M\big((X-MX)\cdot(Y-MY)\big).$$

4. Дисперсія в. в. не зміниться, якщо до цієї в. в. додати константу, тобто $D(c+X)=DX$.

5. Якщо в. в. X і Y незалежні, то

$$D(X\cdot Y)=MX^2\cdot MY^2-(MX)^2\cdot(MY)^2.$$

Приклад 4 У лотереї є 1000 квитків, з яких виграшні: 10 по 500 грн, 50 по 50 грн, 100 по 10 грн, 150 по 1 грн. Знайдіть дисперсію виграшу за квиток.

Розв'язання. Ряд розподілу в. в. X – сума виграшу за квиток виглядає наступним чином:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

Перевірка: $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1.$ Знайдемо *DX*:

$$DX=500^2\cdot 0{,}01+50^2\cdot 0{,}05+10^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}15+0^2\cdot 0{,}69=2635{,}15.$$

Дисперсія *DX* має розмірність квадрата в.в. *X*, що незручно для порівняльних цілей. Коли потрібно, щоб оцінка розсіювання мала розмірність в.в., використовується ще одна числова характеристика – *середнє квадратичне відхилення* (скорочено: с.к.в.).

Середнім квадратичним відхиленням або *стандартним відхиленням* в.в. *X* називається квадратний корінь з її дисперсії, що позначається σ_X (або σX). Таким чином, за визначенням,

$$\sigma_X=\sqrt{DX}.$$

З властивостей дисперсії випливають відповідні властивості с.к.в.: $\sigma c=0$, $\sigma_{cX}=|c|\sigma_X$, $\sigma(c+X)=\sigma_X$.

Приклад 5 Д.в.в. X задається рядом розподілу.

X	–1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти: *MX*, *DX*, .σ_X

Розв'язання.

$MX=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}4=0{,}9;$

$DX=(-1)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}4-0{,}9^2=1{,}29;$

$\sigma_X=\sqrt{1{,}29}\approx 1{,}14.$

Якщо декілька випадкових величин мають однакові розподіли, то їх числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія, і т. д.) однакові.

Математичне сподівання середнього однаково розподілених взаємнонезалежних випадкових величин дорівнює математичному сподіванню *a* кожної з величин:

$$M\overline{X}=a$$

Дисперсія середнього арифметичного n однаково розподілених взаємно незалежних випадкових величин в *n* раз менше дисперсії DX_i кожної з величин

$$D\overline{X} = \frac{DX_i}{n}.$$

4.2 Неперервні випадкові величини і їх числові характеристики

Неперервну випадкову величину X в повній мірі можна задати диференціальною функцією або щільністю імовірності $f(x) = F'(x)$, яка визначає *щільність розподілу імовірності* для кожної точки x. Знаючи щільність розподілу $f(x)$, можна обчислити інтегральну функцію розподілу $F(x)$ за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Імовірність попадання н. в. в. в інтервал $[a; b]$ дорівнює визначеному інтегралу від її щільності в межах від a до b, тобто

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Щільність розподілу має такі властивості:

1. $f(x)$ невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$. Графік щільності розподілу – крива розподілу розташована або над віссю *Ox*, або на цій осі.

2. Умова нормування: невласний інтеграл від щільності н. в. в. в нескінченних межах дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрично властивість нормування означає, що площа фігури, обмежена кривою розподілу $f(x)$ і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

Для н.в.в. *мода* M_0X – точка максимуму (локального) щільності $f_X(x)$.

Медіаною M_eX н.в.в. X називається таке її значення, для якого

$$P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = \frac{1}{2}.$$

тобто однаково ймовірно, чи буде в.в. X менша x_p або більша x_p. За допомогою функції $F(x)$ розподілу остання рівність можна записати у вигляді $F(M_eX) = 1 - F(M_eX)$. Звідси $F(M_eX) = \frac{1}{2}$.

Математичне сподівання н. в. в. X з щільністю ймовірності $f(x)$, називається число

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Інтеграл у правій частині рівності вважається абсолютно збіжним, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x)dx < \infty$ (інакше н. в. в. X не має м. о.).

Приклад 6 Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = 2x$ в інтервалі $(0; 1)$; за межами цього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання в. в.

Розв'язання.

$$MX = 2\int_{0}^{1} x \cdot xdx = 2\int_{0}^{1} x^2dx = \frac{2x^2}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсія н. в. в. X з щільністю ймовірності $f(x)$, називається число

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x)dx.$$

На практиці дисперсію в. в. зручно знаходити за формулою

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (MX)^2.$$

Приклад 7 Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = 2x$ в інтервалі $(0; 1)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. . Знайдіть дисперсію в. в.

Розв'язання.

$MX = 2\int_0^1 x \cdot xdx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2x^2}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$;

$DX = 2\int_0^1 x^2 \cdot xdx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\int_0^1 x^3 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається, як і для дискретної, рівністю

$$\sigma_X = \sqrt{DX}.$$

Приклад 8 Випадкова величина X задається щільністю розподілу $f(x) = 2\cos 2x$ в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайдіть: а) моду; б) медіану X.

Розв'язання.

а) функція $f(x) = 2\cos 2x$ у відкритому інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ не має максимуму, тому X моди не має.

б) знайдемо медіану $M_e X = m_e$ на основі її означення:

$$P\{X < m_e\} = P\{X > m_e\} \text{ або, що те саме } P\{X < m_e\} = \frac{1}{2}.$$

Враховуючи, що за умовою можливі значення X є додатними, перепишемо цю рівність наступним чином:

$$P\{0 < X < m_e\} = \frac{1}{2} \text{ або } 2\int_0^{m_e} \cos 2x dx = \sin 2m_e = \frac{1}{2}.$$

Звідси, $2m_e = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Отже, медіана $m_e = \frac{\pi}{12}$.

4.3 Мода і медіана. Моменти випадкових величин. Асиметрія і ексцес

Модою д.в.в. X називається її величина, яка приймається з найбільшою ймовірністю в порівнянні з двома сусідніми значеннями, позначається M_0X.

Якщо мода єдина, то розподіл в.в. називається унімодальним, інакше – полімодальним.

Медіаною M_eX н.в.в. X називається таке її значення, для якого

$$P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = \frac{1}{2}.$$

Для д.в.в. медіана зазвичай не визначається.

Математичне сподівання і дисперсія є окремими випадками наступних більш загальних понять – моментів в.в.

Початковим моментом порядку k в.в. X називається м.о. k-го степеня цієї величини, що позначається як α_k. Таким чином, за означенням

$$\alpha_k = M(X^k).$$

Для д.в.в. початковий момент виражається сумою:

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k p_i.$$

Зокрема, $\alpha_1 = MX$, тобто початковим моментом 1-го порядку є м.о.

Початковим моментом порядку k н.в.в. *X* називається число

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx.$$

Центральним моментом порядку k в.в. X називається м.о. величини $(X - MX)^k$, позначається μ_k. Таким чином, за означенням,

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

Зокрема, $\mu_2 = DX$, тобто центральний момент 2-го порядку є дисперсія; $\mu_1 = M(X - MX) = 0$ (див. властивість 4 м.о.). Для д.в.в.:

$$\mu_k = \sum_i (x_i - MX)^k p_i.$$

Центральним моментом порядку k н.в.в. *X* називається число

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k \cdot f(x)dx.$$

Центральні моменти можуть бути виражені через початкові моменти. Наприклад, $\mu_2 = DX = \alpha_2 - \alpha_1^2$ (дійсно, $\mu_2 = DX = MX^2 - (MX)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$); $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$; $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$, тощо.

Серед моментів вищих порядків особливе значення мають центральні моменти 3-го і 4-го порядків, які називають *коефіцієнтами асиметрії* і *ексцесу* відповідно.

Коефіцієнтом асиметрії («*скошеності*») *A* в.в. *X* називається величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{M(X - MX)^3}{(DX)^{\frac{3}{2}}}.$$

Коефіцієнтом ексцесу (*надлишковості*, «*піковості*») *E* в.в. *X* називається величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{M(X - MX)^4}{(DX)^2} - 3.$$

Приклад 9 Випадкова величина *X* задається щільністю розподілу $f(x) = 0{,}5x$ в інтервалі $(0{,}2)$; поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайдіть початкові та центральні моменти першого, другого, третього і четвертого порядків.

Розв'язання. За формулою $\alpha_k = \int_0^2 x^k \cdot f(x)dx$ знайдемо початкові моменти:

$$\alpha_1 = \int_0^2 x \cdot (0{,}5x)dx = \frac{4}{3}; \qquad \alpha_2 = \int_0^2 x^2 \cdot (0{,}5x)dx = 2;$$

$$\alpha_3 = \int_0^2 x^3 \cdot (0{,}5x)dx = 3{,}2; \qquad \alpha_4 = \int_0^2 x^4 \cdot (0{,}5x)dx = \frac{16}{3}.$$

Знайдемо центральні моменти. Центральний момент першого порядку будь-якої випадкової величини $\mu_1 = 0$.

Далі скористаємося формулами, які виражають центральні точки через початкові:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{9}; \qquad \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = -\frac{8}{135};$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = \frac{16}{135}.$$