5 СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

5.1 Поняття про систему випадкових величин і закон її розподілу

При вивченні випадкових явищ часто доводиться мати справу з двома, трьома і більшою кількістю випадкових величин. Спільний розгляд декількох випадкових величин призводить до створення систем випадкових величин.

Впорядкована множина $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ випадкових величин $X_i\left(i = \overline{1,n}\right)$, заданих на одному і тому ж ПЕП Ω, називається *n-вимірною випадковою величиною* або *системою випадкових величин.*

Одновимірні в.в. $X_1, X_2, \dots, X_n$ називаються *компонентами* або *складовими* *n*-вимірної в.в. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Їх зручно розглядати як координати випадкової точки або випадкового вектора $\overline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ в *n*-вимірному просторі.

Багатовимірні випадкові величини підпорядковуються практично без змін основним поняттям і означенням, що стосуються одновимірних випадкових величин. Заради простоти обмежимося розглядом системи двох випадкових величин; основні поняття узагальнимо до випадку більшої кількості компонент.

Впорядкована пара (X, Y) двох випадкових величин X і Y називається *двовимірною випадковою величиною* або *системою двох одновимірних випадкових величин* X і Y.

Система (X, Y) може бути представлена *випадковою точкою* $M(X, Y)$ або *випадковим вектором OM* (рис. 5.1).

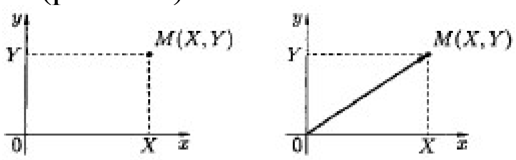

Рисунок 5.1

Система (X, Y) – це функція елементарної події: $(X, Y) = \varphi(\omega)$. Кожна елементарна подія ω зіставляється з двома *дійсними числами* *x* і *y* (або x_1 і x_2) – значеннями X і Y (або X_1 і X_2) в даному експерименті. В цьому випадку вектор $\overline{x} = (x_1, x_2)$ називається *реалізацією* випадкового вектору $\overline{X} = (X_1, X_2)$.

Приклад 1 Кинуто два кубики. Нехай в.в. X – кількість очок, що випали на першому кубику, в.в. Y – на другому; ПЕП складається з 36 елементів: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), \dots, (6,5), (6,6)\}$. Елементарна подія, наприклад $(6,5) = \omega_{65}$, відповідає парі чисел $x = 6$ і $y = 5$. Сукупність цих величин є функцією елементарної події ω.

Системи випадкових величин можуть бути *дискретними, неперервними* і *мішаними* в залежності від типу випадкових величин, що входять до складу системи. У першому випадку компоненти цих випадкових систем дискретні, у другому – неперервні, а в третьому – різного типу.

Повною характеристикою системи (X, Y) є її *закон розподілу ймовірностей*, який задає область можливих значень системи випадкових величин і ймовірність цих величин. Що стосується окремих випадкових величин, то закон розподілу системи може мати різні форми (таблиця, функція розподілу, щільність, . ..).

Таким чином, закон розподілу дискретної двовимірно в.в. (X, Y) можна задати формулою

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \qquad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \qquad (5.1)$$

або у вигляді таблиці з подвійним введенням:

$X\backslash Y$	y_1	y_2	y_3	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	...	p_{2m}
...	...	...	...	..	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	...	p_{nm}

Причому сума всіх ймовірностей p_{ij}, як сума ймовірностей повної групи несумісних подій $\{X = x_i, Y = y_j\}$, дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, можна знайти *закони розподілу кожної з складових* (противне, взагалі кажучи, невірно). Таким чином, $p_{x_1} = P\{X = x_1\} = p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{1m}$, що випливає з теореми про додавання несумісних подій $\{X = x_1, Y = y_1\}$, $\{X = x_1, Y = y_2\}, \ldots$ $\{X = x_1, Y = y_m\}$. Аналогічно можна знайти

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Приклад 2 В урні 4 кульки: 2 білих, 1 чорна, 1 синя. З неї навмання виймають дві кульки. Нехай в.в. X – кількість чорних кульок у виборці, в.в. Y – кількість синіх кульок у вибірці. Складіть закон розподілу для системи (X, Y). Знайдіть закони розподілу X і .Y

Розв'язання. В.в. X може приймати значення 0, 1; в.в. Y – значення 0, 1. Розрахуємо відповідні ймовірності:

$$p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, \qquad p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{6},$$

$$p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2}{6}, \qquad p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{6}.$$

Таблиця розподілу системи (X, Y) виглядає наступним чином:

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Звідси випливає:

$$P\{X = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P\{X = 1\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P\{Y = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P\{Y = 1\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}.$$

Закони розподілу компонентів X і мають вигляд:Y

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

5.2 Функція розподілу двовимірної випадкової величини та її властивості

Універсальною формою визначення розподілу двовимірної випадкової величини є функція розподілу (або «інтегральна функція»), придатна як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин, що позначається $F_{X,Y}(x,y)$ або просто $F(x,y)$.

Функція розподілу двовимірної випадкової величини(X,Y) називається функція $F(x,y)$, яка для будь-яких дійсних чисел x і y дорівнює ймовірності спільного виконання двох подій $\{X < x\}$ і $\{Y < y\}$.

Таким чином, за означенням,

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} \quad (5.2)$$

(подія $\{X < x, Y < y\}$ означає добуток подій $\{X < x\}$ і $\{Y < y\}$).

Геометрично функція $F(x,y)$ інтерпретується як ймовірність падіння випадкової точки (X,Y) в нескінченний квадрант з вершиною в точці (x,y), що лежить ліворуч і під нею (рис. 5.2).

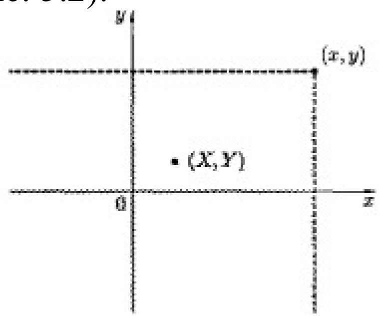

Рисунок 5.2

Функція розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X,Y) є додавання всіх ймовірностей p_{ij}, для яких $x_i < x$, $y_j < y$, тобто

$$F(x,y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p_{ij}. \quad (5.3)$$

Геометрична інтерпретація функції розподілу дозволяє наочно проілюструвати її властивості.

Властивості функції розподілу двовимірної випадкової величини:

1. Функція розподілу $F(x,y)$ обмежена, тобто $0 \le F(x,y) \le 1$.

Доведення. $F(x,y)$ є ймовірність, отже, $0 \le F(x,y) \le 1$.

2. $F(x,y)$ не зменшується для кожного свого аргументу при фіксованому другому, тобто

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y) \text{ при } x_2 > x_1;$$
$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1) \text{ при } y_2 > y_1.$$

Доведення. При збільшенні будь-якого з аргументів (x, y), заштрихована на рис. 5.2 площа збільшується, а отже, ймовірність потрапляння в неї випадкової точки (X, Y) не може зменшуватися.

3. Якщо хоча б один з аргументів обертається в $-\infty$, то функція розподілу $F(x, y)$ дорівнює нулю, тобто $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

Доведення. Події $\{X < -\infty\}$ та $\{Y < -\infty\}$ їх добутки неможливі: неможливо потрапити в квадрат з відсунутою межею в $-\infty$. Імовірність такої події дорівнює нулю.

4. Якщо обидва аргументи обертаються в $+\infty$, то $F(x, y) = 1$, тобто $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Доведення. Подія $\{X < +\infty\} \cdot \{Y < +\infty\}$ достовірна, тому її ймовірність дорівнює 1.

5. Якщо один з аргументів обертається в $+\infty$, то функція розподілу системи випадкових величин стає функцією розподілу в. в., що відповідає іншому елементу, тобто

$$F(x, +\infty) = F_1(x) = F_X(x), F(+\infty, y) = F_2(y) = F_Y(y). \quad (5.4)$$

Доведення. $\{X < +\infty\}$ є достовірною подією, отже $\{X < +\infty\} \cdot \{Y < y\} = \{Y < y\} F(+\infty, y) = P\{X < +\infty, Y < y\} = P\{Y < y\} = F_Y(y)$.

Аналогічно, $F(x, +\infty) = F_X(x)$.

6. $F(x, y)$ є неперервною зліва для кожного з його аргументів, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x, y) = F(x_0, y), \qquad \lim_{y \to y_0 - 0} F(x, y) = F(x, y_0).$$

Підкреслимо: знаючи спільний розподіл двох випадкових величин X і Y, можна знайти одновимірні розподіли цих випадкових величин, але протилежне, взагалі кажучи, невірно.

Зауважимо, що з геометричної точки зору $F(x, y)$ – *деяка поверхня* (*ступінчаста* для двовимірної дискретної випадкової величини), яка має ці властивості.

За допомогою функції $F(x, y)$ можна легко знайти *ймовірність потрапляння випадкової точки* (X, Y) *в прямокутник* D зі сторонами, паралельними осям координат:

$$P\{x_1 \le X \le x_2, y_1 \le Y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (5.5)$$

Наведемо «геометричне доведення», див. рис. 5.3.

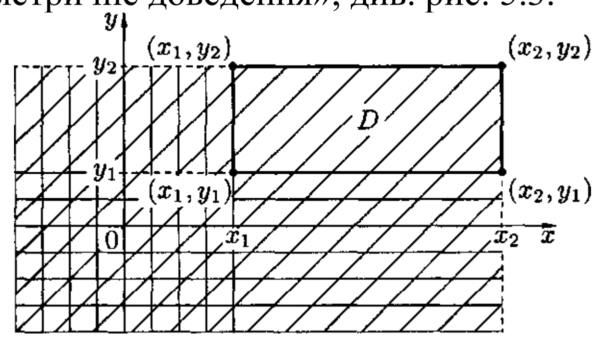

Рисунок 5.3

Тут $F(x_2, y_2)$ – ймовірність попадання випадкової точки в область, заштриховану косими лініями, $F(x_1, y_2)$ – вертикальними, $F(x_2, y_1)$ – горизонтальними, $F(x_1, y_1)$ – косими, вертикальними, горизонтальними (цю область відняли двічі, потрібно додати один раз).

Приклад 3 З таблиць розподілу системи (X, Y) компонент X і Y

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

знайти $F_1(x)$, $F_2(y)$, $F(x, y)$.

Розв'язання. Вище було знайдено

X	0	1
R	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
R	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Знайдемо функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ 0{,}5, \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1, \text{ при } x > 1; \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0, \text{ при } y \le 0, \\ 0{,}5, \text{ при } 0 < y \le 1, \\ 1, \text{ при} y > 1. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (5.3), знаходимо функцію розподілу$F(x, y)$:

$X \backslash Y$	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$
$x > 1$	0	$\frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$	$1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$

5.3 Щільність розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини та її властивості

Вичерпною характеристикою неперервної двовимірної випадкової величини є щільність ймовірності. Це поняття вводиться аналогічно тому, як це було зроблено при розгляді щільності розподілу ймовірностей однієї випадкової величини.

Двовимірна випадкова величина називається *неперервною*, якщо її функція розподілу $F(x, y)$ є неперервною функцією, диференційованою за кожним з аргументів, яка має другу мішану похідну $F''_{xy}(x, y)$.

Щільність розподілу ймовірностей неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) є другою мішаною похідною її функції розподілу.

Позначається сумісна щільність системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) як $f(x, y)$ (або $p(x, y)$). Таким чином, за означенням,

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x,y). \quad (5.6)$$

Щільність розподілу ймовірностей неперервної двовимірної випадкової величини (X,Y) є границя відношення ймовірності потрапляння випадкової точки (X,Y) в елементарний прямокутник зі сторонами Δx і Δy, прилеглої до точки (x,y), до площі цього прямокутника, коли його розміри Δx і Δy прямують до нуля (рис. 5.4).

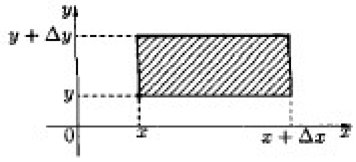

Рисунок 5.4

За аналогією з щільністю ймовірності одновимірної неперервної випадкової величини, для двовимірної випадкової величини (X,Y) щільність ймовірності визначається як функція $f(x,y)$, що задовольняє умові

$$P\{x \leq X < x + dx, y \leq Y < y + dy\} \approx f(x,y)dxdy; \quad (5.7)$$

вираз називається $f(x,y)dxdy$ *елементом ймовірності* двовимірної випадкової величини (X,Y).

Геометрично щільність розподілу ймовірностей $f(x,y)$ системи двох випадкових величин (X,Y) є деякою поверхнею, яка називається *поверхнею розподілу* (рис. 5.5).

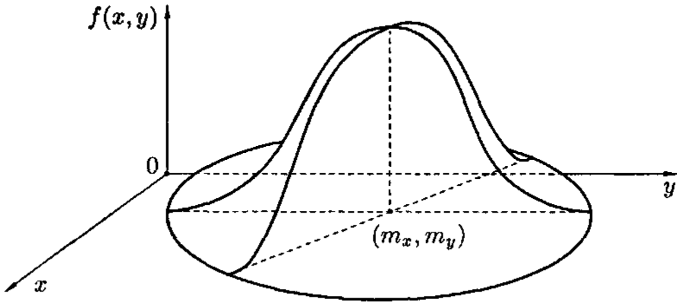

Рисунок 5.5

Щільність розподілу $f(x,y)$ має такі **властивості**:

1. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини невід'ємна, тобто $f(x,y) \geq 0$.

Доведення. Це випливає з того, що $F(x,y)$ неспадна функція для кожного аргументу.

2. Імовірність випадкової точки (X,Y), що потрапляє в область D, дорівнює подвійному інтегралу щільності над областю D, тобто

$$P\{(x,y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy. \quad (5.8)$$

Доведення. Елемент ймовірності $f(x,y)dxdy$ – це ймовірність випадкової точки (X,Y), що потрапить в прямокутник зі сторонами dx і dy (з точністю до нескінченно малих більш високого порядку, ніж добуток $dxdy$). Розбивши область D на прямокутники і застосувавши до кожного з них рівність (5,7), отримаємо, за допомогою теореми про додавання ймовірності, при $dx \to 0$ і $dy \to 0$, формулу (5.8.). Геометрично ця ймовірність представлена об'ємом циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею розподілу $f(x,y)$ і спирається на область D.

3. Функція розподілу двовимірної випадкової величини може бути виражена в термінах щільності її розподілу за формулою:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(u,v)dudv. \qquad (5.9)$$

Доведення. Вираз функції розподілу $F(x,y)$ системи випадкових величин (X,Y) через щільність $f(x,y)$ отримують за формулою (5.8) (область D – прямокутник, обмежений абсцисами $-\infty, x$ і ординатами $-\infty, y$):

$$F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}=P\{-\infty<X<x,-\infty<Y<y\}=$$
$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy.$$

4. Умова нормування: подвійний невласний інтеграл в нескінченних границях від щільності імовірності двовимірної в.в. дорівнює одиниці, тобто

$$F(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1.$$

Геометрично властивість 4 означає, що об'єм тіла, обмежений поверхнею розподілу і площиною Oxy, дорівнює 1.

Доведення. Поклавши в формулі (5.9) $x=y=+\infty$ і враховуючи, що $F(+\infty,+\infty)=1$, отримаємо

$$F(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1.$$

5. Щільності розподілу одновимірних компонент X і Y можна знайти за формулами:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=f_1(x)=f_x(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=f_2(y)=f_y(y) \qquad (5.10)$$

Доведення. Спочатку знайдемо функції розподілу (знаючи сумісну щільність двовимірної випадкової величини (X,Y), компонент X і Y):

$$F_1(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy, F_2(y)=F(+\infty,y)=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy,$$

тобто

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right)dx, \qquad F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\right)dy. \qquad (5.11)$$

Диференціюючи перше рівність по x, а друге по y, отримаємо щільності розподілу випадкових величин X і :Y

$$f_1(x)=F_1'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy, \qquad f_2(y)=F_2'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$$

Відзначимо, що розв'язання зворотної задачі (відновити закон розподілу системи (X,Y) за відомими законами розподілу компонент системи) взагалі неможливо.

Приклад 4 Двовимірна випадкова величина (X,Y) задається щільністю розподілу ймовірностей $f(x,y)=\frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Знайдіть: 1) A; 2) $F(x,y)$; 3) $P\{X<1,Y<1\}$; 4) $f_1(x)$ і $f_2(y)$.

Розв'язання.

1) Константа A знайдемо за допомогою умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=1,$$
$$A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}=1,$$
$$A\cdot \mathrm{arctg}x|_{-\infty}^{\infty}\cdot \mathrm{arctg}y|_{-\infty}^{\infty}=1,$$
$$A\pi^2=1\Rightarrow A=\frac{1}{\pi^2}.$$

2) Використовуючи формулу (5.9), знаходимо:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}\right)\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\left(\mathrm{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{arctg}y\Big|_{-\infty}^{y}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\right).$$

3) $P\{X<1, Y<1\}=F(1{,}1)=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$ (використали формулу (5.2), можна скористатися формулою (5.8)).

4) За формулою (5.10) отримаємо:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\mathrm{arctg}y\Big|_{-\infty}^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогічно, $f_2(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$.

5.4 Залежність і незалежність двох випадкових величин

Знаючи закони розподілу випадкових величин X і Y, що входять в систему (X,Y), можна знайти закон розподілу системи *тільки в тому випадку, коли випадкові величини X і Y* є незалежними. Дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, які значення приймає інша. В іншому випадку випадкові величини називаються *залежними.*

Тепер дамо загальне визначення незалежності випадкових величин.

Випадкові величини X і Y називаються *незалежними*, якщо події $\{X<x\}$ і $\{Y<y\}$ незалежні для будь-яких x і y. Інакше випадкові величини називаються *залежними*.

Сформулюємо умову незалежності випадкових величин.

Теорема 5.1 Щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу системи (X,Y) дорівнювала добутку функцій розподілу компонент:

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y). \tag{5.12}$$

Доведення. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то події $\{X<x\}$ і $\{Y<y\}$ незалежні. Отже, $P\{X<x, Y<y\}=P\{X<x\}\cdot P\{Y<y\}$, тобто $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$. Якщо ж має місце рівність (5.12), то $P\{X<x, Y<y\}=P\{X<x\}\cdot P\{Y<y\}$. Тоді випадкові величини X і Y є незалежними.

Зауважимо, що умова (5.12) є інакше записаною умовою незалежності двох подій: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ для випадку події $A=\{X<x\}, B=\{Y<y\}$.

Теорема 5.2 Необхідною і достатньою умовою незалежності двох неперервних випадкових величин, що утворюють систему (X,Y), є рівність

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y). \tag{5. 13}$$

Доведення. Якщо X і Y незалежні неперервні випадкові величини, то має місце рівність (5.12). Диференціюючи цю рівність по x, а потім по y, отримаємо

$f(x,y) = \frac{d}{dx}F_1(x) \cdot \frac{d}{dy}F_2(y)$ або $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. І навпаки. Інтегруючи рівність (5.13) по x і по y, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy,$$

тобто $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. На основі теореми 5.1 робимо висновок, що випадкові величини X і Y є незалежними.

Теорема 5.3 Необхідною і достатньою умовою незалежності двох дискретних випадкових величин X і Y, що утворюють систему (X,Y), є рівність

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \text{ для будь-яких } i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \quad (5.14)$$

(або, що одне й те саме: $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$).

Приклад 5 Залежними або незалежними є випадкові величини X і Y, розглянуті в прикладах а) 2; б) 4?

Розв'язання.

а) $p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{1}{6}$, а $P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, тобто $p_{11} \neq p_{x_1} \cdot p_{y_1}$. Випадкові величини X і Y є залежними.

б) $f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, а $f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Оскільки $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то, згідно з умовою (5.13), робимо висновок: випадкові величини X і Y є незалежними.

5.5 Умовні закони розподілу

Якщо випадкові величини X і Y, що утворюють систему (X,Y), залежать одна від одної, то *для характеристики їх залежності* вводиться поняття умовних законів розподілу випадкових величин.

Умовний закон розподілу однієї з випадкових величин, що входять в систему (X,Y), називається її законом розподілу, знайденим за умови, що інша випадкова величина прийняла певне значення (або потрапила в якийсь інтервал).

Нехай (X,Y) – дискретна двовимірна випадкова величина і $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$. Згідно з означенням умовних ймовірностей подій (нагадаємо: $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(AB)}{P(A)}$), умовна ймовірність того, що випадкова величина Y прийме значення y_j за умови $X = x_i$, визначається рівністю

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \quad (5.15)$$

(або коротко: $p\left\{\frac{y_j}{x_i}\right\} = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}}$).

Сукупність ймовірностей (5.15), тобто $p\left\{\frac{y_1}{x_i}\right\}, p\left\{\frac{y_2}{x_i}\right\}, \ldots, p\left\{\frac{y_m}{x_i}\right\}$ є умовним *законом розподілу випадкової величини Y за умови $X = x_i$*. Сума умовних ймовірностей $p\left\{\frac{y_j}{x_i}\right\}$ дорівнює 1, дійсно:

$$\sum_{j=1}^{m} p\left\{\frac{y_j}{x_i}\right\} = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

(див. пункт 5.1: $p_{x_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$).

Щільність ймовірності умовного розподілу (або *умовна щільність*) випадкової величини *Y* за умови $X = x_i$ визначається рівністю

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}, \text{ де } f_1(x) \neq 0. \qquad (5.17)$$

Умовна щільність має властивості щільності розподілу, тому $f\left(\frac{y}{x}\right) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{x}\right) dy = 1$.

Аналогічним чином визначається умовна щільність розподілу випадкової величини *X* за умови $Y = y_i$:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}, \text{ де } f_2(y) \neq 0. \qquad (5.18)$$

За допомогою співвідношень (5.17) і (5.18) можна написати

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) = f_2(y) \cdot f\left(\frac{x}{y}\right), \qquad (5.19)$$

тобто щільність спільного розподілу системи випадкових величин дорівнює добутку щільності одного компонента на умовну щільність іншого компонента при заданому значенні першого.

Рівність (5.19) називається *теоремою (правилом) множення щільностей розподілу* (вона аналогічна теоремі про добуток імовірностей для подій).

Приклад 6 Двовимірна випадкова величина задається щільністю спільного розподілу(X,Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy, \text{при} (x,y) \in D, \\ 0, \text{при} (x,y) \neq D, \end{cases}$$

де *D* – область на площині

$$\begin{cases} y > -x, \\ y < 2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Знайдіть безумовний і умовний розподіли компонента *X*. Переконайтеся, що випадкові величини *X* і *Y* є залежними.

Розв'язання. Область *D* показана на рис. 5.6.

Для початку знайдемо коефіцієнт *C* з умови нормування:

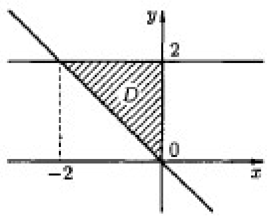

рисунок 5.6

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{0} dx \int_{-x}^{2} Cxydy =$$

$$= C\int_{-2}^{0} xdx\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{2}\right) = C\int_{-2}^{0} x\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)dx = C\left(x^2 - \frac{x^4}{8}\right)\Big|_{-2}^{0} = -2C.$$

Тому, $C = -\frac{1}{2}$. Тепер знаходимо

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-x}^{2}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dy = -\frac{1}{2}x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{2} = -\frac{1}{4}x(4 - x^2) = \frac{x^3 - 4x}{4},$$

тобто $f_1(x) = \frac{x^3-4x}{4}$, $x \in (-2{,}0)$. Контроль:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = \int_{-2}^{0} \frac{x^3-4x}{4} dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{4}(-4+8) = 1.$$

Щоб знайти $f\left(\frac{x}{y}\right)$, скористаємося формулою (5.18), попередньо знайшовши $f_2(y)$:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{-y}^{0}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dx = -\frac{1}{2}y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{0} = \frac{y^3}{4},\ y \in (0{,}2).$$

Тоді, $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = -\frac{1}{2}xy : \frac{y^3}{4} = -\frac{2x}{y^2}$, $(x,y) \in D$. Контроль:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{y}\right)dx = \int_{-y}^{0}\left(-\frac{2x}{y^2}\right)dx = -\frac{2}{y^2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{0} = -\frac{1}{y^2}(0-y^2) = 1.$$

Як видно, безумовний закон розподілу випадкової величини X ($f_1(x)$) не збігається з умовним законом розподілу випадкової величини X ($f\left(\frac{x}{y}\right)$); випадкові величини X і Y є залежними.

У разі довільного типу випадкових величин функцією розподілу $F(x,y)$ системи залежних випадкових величин (X,Y) може бути записана у вигляді:

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2\left(\frac{y}{X<x}\right) = F_2(y) \cdot F_1\left(\frac{x}{Y<y}\right),$$

де $F_2\left(\frac{y}{X<x}\right) P\{Y<y|X<x\}$ – умовна функція розподілу випадкової величини Y за умови $\{X<x\}$; $F_1\left(\frac{x}{Y<y}\right) = P\{X<x|Y<y\}$ є умовною функцією розподілу випадкової величини X за умови $\{Y<y\}$.

5.6 Числові характеристики двовимірної випадкової величини. Математичне очікування і дисперсія

Для системи випадкових величин також вводяться числові характеристики, аналогічні для однієї випадкової величини. В якості числових характеристик системи (X,Y) зазвичай розглядаються моменти різного порядку. На практиці найчастіше використовуються моменти І і ІІ порядків: математичне очікування (м.о.), дисперсія і момент кореляції. Математичне осікування і дисперсія двовимірної випадкової величини служать відповідно середнім і мірою розсіювання. Кореляційний момент виражає міру взаємного впливу випадкових величин, що входять в систему (X,Y).

Математичне очікування двовимірної в.в.(X,Y) – це сукупність двох м.о. MX і MY, що визначаються рівностями:

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \qquad MY = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}, \tag{5.20}$$

якщо (X,Y) є дискретною системою в.в. (тут $p_{ij} = P\{X=x_i, Y=y_j\}$) і

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy, \qquad MY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy, \tag{5.21}$$

якщо (X,Y) – неперервна система в.в. (тут $f(x,y)$ щільність розподілу системи).

Дисперсія системи в.в. (X, Y) – це сукупність двох дисперсій *DX* і *DY*, визначених рівностями:

$$DX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)^2 p_{ij}, \qquad DY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j - m_y\right)^2 p_{ij}, \tag{5.22}$$

якщо (X, Y) є дискретною системою в.в. і

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x, y)dxdy, \qquad DY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y - m_y\right)^2 f(x, y)dxdy, \tag{5.23}$$

якщо (X, Y) є неперервною системою в.в.

Дисперсії *DX* і *DY* характеризують розсіювання (розсіювання) випадкової точки (X, Y) і в напрямку осей *Ox* і *Oy* навколо $\left(m_x, m_y\right)$ точки на площині *Oxy* – центру розсіювання.

Математичні очікування m_x і m_y – це окремі *випадки початкового моменту* $\alpha_{k,s}$ *порядку* $k + s$ системи (X, Y), що визначаються рівністю

$$\alpha_{k,s} = M(X^k Y^s),$$

$m_x = M(X^1 Y^0) = \alpha_{1,0}$ і $m_y = M(X^0 Y^1) = \alpha_{0,1}$.

Дисперсії *DX* і *DY* є окремими випадками *центрального моменту* $\mu_{k,s}$ *порядку* $k + s$ системи (X, Y), що визначається рівністю

$$\mu_{k,s} = M\left((X - m_x)^k \left(Y - m_y\right)^s\right),$$

$DX = M(X - m_x)^2 = \mu_{2,0}$ і $DY = M\left(Y - m_y\right)^2 = \mu_{0,2}$.

Математичне очікування в.в. $\varphi(X, Y)$, що є функцією *компонент X* і *Y* двовимірної в.в. (X, Y) знаходиться аналогічно, за формулами:

$$M\left(\varphi(X, Y)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y) f(x, y)dxdy \tag{5.24}$$

для неперервного випадку і

$$M\left(\varphi(X, Y)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varphi\left(x_i, y_j\right)p_{ij} \tag{5.25}$$

для дискретного випадку.

Початковий момент II порядку $\alpha_{1,1} = MXY$ часто зустрічається в додатках. Розраховується за формулою

$$MXY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} \tag{5.26}$$

для дискретних в.в. і

$$MXY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy \tag{5.27}$$

для неперервних в.в.

5.7 Момент кореляції, коефіцієнт кореляції

Особливу роль відіграє центральний мішаний момент другого порядку $\mu_{1,1} = M(X - m_x)\left(Y - m_y\right) = M\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}$, який називають *кореляційним моментом* або *моментом зв'язку*.

Кореляційним моментом (або *коваріацією*) двох випадкових величин *X* і *Y* називається м.о. добутку відхилень цих в.в. від їх м.о. і позначається K_{XY} або $cov(X, Y)$. Таким чином, за означенням,

$$K_{XY} = cov(X,Y) = M\big[(X - m_x)\big(Y - m_y\big)\big] = M\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}. \tag{5.28}$$

В даному випадку: якщо (X,Y) – дискретна двовимірна в.в., то коваріація розраховується за формулою

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)\big(y_j - m_y\big)p_{ij}, \tag{5.29}$$

якщо (X,Y) є неперервною двовимірною в.в., то

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)\big(y - m_y\big)f(x,y)dxdy \tag{5.30}$$

(формули (5.29) і (5.30) виводяться з формул (5.24) і (5.25)).

Коваріацію часто зручно розраховувати за формулою

$$K_{XY} = cov(X,Y) = MXY - MX \cdot MY, \tag{5.31}$$

який випливає з визначення (5.28) на основі властивостей математичного очікування:

$$K_{XY} = M\big[(X - m_x)\big(Y - m_y\big)\big] = M\big(XY - Xm_y - Ym_x + m_x m_y\big) = MXY - m_y MX - m_x MY + m_x m_y = MXY - m_x m_y - m_x m_y + m_x m_y = MXY - MX \cdot MY.$$

Формулу (5.30) можна записати як

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - m_x m_y. \tag{5.32}$$

Властивості коваріації:

1. Коваріація симетрична, тобто $K_{XY} = K_{YX}$.

Доведення. Випливає з означення (5.28) коваріації.

2. Дисперсія в.в. – це його коваріація з самою собою, тобто $K_{XX} = DX$, $K_{YY} = DY$.

Доведення. $K_{XX} = M[(X - m_x)(X - m_x)] = M(X - m_x)^2 = DX$.

3. Якщо випадкові величини *X* і *Y* незалежні, то $K_{XY} = 0$.

Доведення. З незалежності в.в. X і Y випливає незалежність їх відхилень $X - m_x$ і $Y - m_y$. Використовуючи властивості м.о., отримаємо

$$K_{XY} = M(X - m_x) \cdot M\big(Y - m_y\big) = 0.$$

4. Дисперсія суми (різниці) двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій плюс (мінус) подвоєна коваріація цих випадкових величин, тобто

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2K_{XY}.$$

Доведення.

$$D(X+Y) = M\big((X+Y) - M(X+Y)\big)^2 =$$
$$= M\big((X - MX) + (Y - MY)\big)^2 = M(X - MX)^2 + 2M(X - MX)(Y - MY) +$$
$$+M(Y - MY)^2 = DX + DY + 2K_{XY},$$
$$D(X - Y) = DX + D(-Y) + 2M(X - MX)\big(-Y - M(-Y)\big) =$$
$$= DX + DY - 2K_{XY}.$$

5. Постійний множник можна винести за знак коваріації, тобто

$K_{cX,Y} = c \cdot K_{XY} = K_{X,cY}$ або $cov(cX,Y) = c \cdot cov(X,Y) = cov(X,cY)$.

Доведення.

$$K_{cX,Y} = M[(cX - McX)(Y - MY)] = M[c(X - MX)(Y - MY)] = cK_{XY}.$$

6. Коваріація не зміниться, якщо до однієї з в. в. (або до обох відразу) додати константу, тобто

$$K_{X+c,Y} = K_{XY} = K_{X,Y+c} = K_{X+c,Y+c}$$

або

$$cov(X + c, Y) = cov(X, Y) = cov(X, Y + c) = cov(X + c, Y + c).$$

7. Коваріація двох випадкових величин за модулем не перевищує їх с.к.в., тобто $|K_{XY}| \leq \sigma_x \cdot \sigma_y$.

Доведення. Застосовуючи властивість 4 до двох стандартних в.в. $\frac{X-m_x}{\sigma_x}$ і $\frac{Y-m_y}{\sigma_y}$, отримаємо:

$$D\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) = D\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right) + D\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) \pm$$

$$\pm 2M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} - M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right)\right)\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y} - M\left(\frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right)\right) =$$

$$= 1 + 1 \pm 2M\left(\frac{X-m_x}{\sigma_x} \cdot \frac{Y-m_y}{\sigma_y}\right) = 2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right).$$

Будь-яка дисперсія невід'ємна, тому

$$2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right) \geq 0. \quad (5.33)$$

Звідси випливає, що $-\sigma_x\sigma_y \leq K_{XY} \leq \sigma_x\sigma_y$, тобто $|K_{XY}| \leq \sigma_x \cdot \sigma_y$.

З властивості 3 випливає, що якщо $K_{XY} \neq 0$, то в.в. X і Y є залежними. Випадкові величини X і Y в даному випадку ($K_{XY} \neq 0$) називаються *корельованими*. Однак, з того, що $K_{XY} = 0$, не випливає незалежність в.в. X і Y. У цьому випадку ($K_{XY} = 0$) в.в. X і Y *називаються некорельованими.* З незалежності випливає некорельованість; протилежне, взагалі кажучи, не відповідає дійсності.

Як випливає з властивостей коваріації, вона K_{XY} характеризує як ступінь залежності випадкових величин, так і їх розсіювання довкола точки (m_x, m_y). Розмірність коваріації дорівнює добутку розмірностей в.в. X і Y. В якості характеристики залежності (а не розсіювання) в.і. X і Y приймають безрозмірну величину, яка є коефіцієнтом кореляції. Це найкраще значення ступеня впливу однієї в.в. до іншої.

Коефіцієнтом кореляції r_{XY} двох в.в. X і Y називають відношення їх коваріації (моменту кореляції) до добутку їх с.к.в:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}. \quad (5.34)$$

Очевидно, що коефіцієнт кореляції дорівнює коваріації стандартних в.в. $Z_1 = \frac{X-m_x}{\sigma_x}$ і $Z_2 = \frac{Y-m_y}{\sigma_y}$, тобто $r_{XY} = cov(Z_1, Z_2)$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною не перевищує 1, тобто $|r_{XY}| \leq 1$ або $-1 \leq r_{XY} \leq 1$.

Доведення. Оскільки $|K_{XY}| \leq \sigma_x \cdot \sigma_y$ (властивість 7 коваріації), тоді

$$|r_{XY}| = \frac{|K_{XY}|}{\sigma_x \sigma_y} \leq \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y} = 1.$$

2. Якщо X і Y незалежні, то $r_{XY} = 0$.

Доведення. $K_{XY} = 0$ у разі незалежності X і Y. Отже,

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = 0.$$

3. Якщо в.в. X і Y пов'язані лінійною залежністю, тобто $Y = aX + b, a \neq 0$, то $|r_{XY}| = 1$, причому $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ і $r_{XY} = -1$ при $a < 0$.

Доведення. За властивостями коваріації ми маємо

$$cov(X,Y) = cov(X, aX + b) = cov(aX + b, X) =$$
$$= a\, cov\left(X + \frac{b}{a}, X\right) = a\, cov(X, X) = aDX$$

і $DY = D(aX + b) = a^2 DX$.

$$r_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{aDX}{\sqrt{DX} \cdot |a| \cdot \sqrt{DX}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, \text{ при} a > 0, \\ -1, \text{ при} a < 0. \end{cases}$$

4. Якщо $|r_{XY}| = 1$, то в.в. X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю.

Доведення. Нехай $r_{XY} = 1$. Тоді з рівності

$$D\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) = 2\left(1 - \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}\right)$$

(див. властивість 7 коваріації) отримаємо $D\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) = 0$, тобто $\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y} = c$ – константа. Але

$$c = Mc = M\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x} - \frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) = M\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right) - M\left(\frac{Y - m_y}{\sigma_y}\right) == 0 - 0 = 0,$$

тобто $c = 0$. Отже , $\frac{X - m_x}{\sigma_x} = \frac{Y - m_y}{\sigma_y}$, тобто $Y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x) + m_y$. Коли $r_{XY} = -1$ ми отримаємо $Y = -\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x) + m_y$.

Таким чином, при $r_{XY} = \pm 1$ в.в. X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю.

Так, для незалежних випадкових величин $r_{XY} = 0$, для лінійно пов'язаних $|r_{XY}| = 1$, а в інших випадках $-1 < r_{XY} < 1$; говорять, що в.в. пов'язані *додатною кореляцією*, якщо $r_{XY} > 0$; якщо $r_{XY} < 0$ *від'ємною кореляцією*. Чим ближче $|r_{XY}|$ до одиниці, тим більше підстав вважати, що X і Y пов'язані лінійною залежністю. Зауважимо, що кореляційні моменти і дисперсії системи в.в. зазвичай задаються *кореляційною матрицею*:

$$\begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} DX & K_{XY} \\ K_{YX} & DY \end{pmatrix}.$$

Приклад 7 Закон розподілу дискретної двовимірної в.в. задано таблицею:

$X \backslash Y$	–1	0	1
0	0,15	0,40	0,05
1	0,20	0,10	0,10

Знайти коефіцієнт кореляції r_{XY} .

Розвязання. Знаходимо закони розподілу компонент X і Y:

X	0	1
P	0,6	0,4

Y	–1	0	1
P	0,35	0,50	0,15

Знаходимо математичне очікування компонент:

$$m_x = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4, \quad m_y = -1 \cdot 0{,}35 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}15 = -0{,}2.$$

Знаходимо дисперсії компонент:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}4 - (0{,}4)^2 = 0{,}24,$$

$$DY = MY^2 - (MY)^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}35 + 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}15 - (-0{,}2)^2 = 0{,}46.$$

Отже, $\sigma_x = \sqrt{DX} = \sqrt{0{,}24} \approx 0{,}49$, $\sigma_y = \sqrt{DY} = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}68$. Знайдемо MXY за формулою (5.26):

$$MXY = 0 \cdot (-1) \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0 \cdot 0{,}40 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}05 +$$
$$+1 \cdot (-1) \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}10 = -0{,}1.$$

(можна було б скласти закон розподілу $Z = XY$, а потім знайти $MZ = MXY$:

$Z = XY$	–1	0	1
P	0,20	0,70	0,10

$MZ = MXY = (-1) \cdot 0{,}20 + 0 \cdot 0{,}70 + 1 \cdot 0{,}10 = -0{,}1$).

Знаходимо кореляційний момент за формулою (5.31):

$$K_{XY} = cov(X,Y) = MXY - MX \cdot MY = -0{,}1 - 0{,}4 \cdot (-0{,}2) = -0{,}02 \neq 0.$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції (формула (5.34)):

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}02}{0{,}49 \cdot 0{,}68} \approx -0{,}06.$$

5.8 Регресія

При вивченні двовимірної випадкової величини розглядаються не тільки числові характеристики одновимірних компонент *X* і *Y*, а й числові характеристики умовних розподілів: умовні м.о., умовні дисперсії.

Умовне математичне очікування однієї з в.в., включених в систему (X,Y) називається її м.о., обчислюване за умови, що інша в.в. приймала певне значення (або потрапляла в цей інтервал). Позначення: $M(Y|X=x)$ або $M(Y|x)$ і $M(X|y)$.

Ці характеристики розраховуються за звичайними формулами м.о., в яких замість щільності розподілу і ймовірностей подій використовуються умовні щільності розподілу або умовні ймовірності.

Для неперервних в.в.

$$M(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy, \qquad M(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx, \qquad (5.39)$$

де і $f(y|x) f(x|y)$ – умовні щільності розподілу в.в. *X* і *Y*, що визначаються рівностями (5.17) і (5.18).

Для дискретних в.в. *X* і *Y* умовні м.о. розраховуються за формулами

$$M(Y|x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j|x_i), \quad M(X|y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i|y_j), \qquad (5.40)$$

де $p(y_j|x_i) = P\{Y = y_j|X = x_i\}$, $p(x_i|y_j) = P\{X = x_i|Y = y_j\}$, формули (5.15) і (5.16).

Умовне математичне очікування в.в. *Y* при заданій $X = x$, тобто $M(Y|x) = \varphi(x)$, називається *функцією регресії* або просто *регресією Y* на *x*: (або *Y* по *x*). Аналогічно, $M(X|y) = \varphi(y)$ *регресія X* на *y* (або *X* по *y*).

Графіки цих функцій називаються відповідно *лініями регресії* (або «кривими») *регресії* Y на x і X на y.

Якщо обидві регресійні *функції* Y на x і X на *y лінійні*, то говорять, що в.в. X і Y пов'язані *лінійною кореляцією.*

Приклад 8 Побудуйте регресійну лінію Y на x для двовимірної в.в. (X, Y), закон розподілу якої задається таблицею:

$X\backslash Y$	–1	0	1	Σ
0	0,10	0,15	0,20	0,45
1	0,15	0,25	0,15	0,55
Σ	0,25	0,40	0,35	1

Розв'язання. Знайдемо ряд умовних розподілів в.в. Y при $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ використовуючи формули (5.15):

$$p(y_1|x_1) = P\{Y = -1|X = 0\} = \frac{0{,}1}{0{,}45} = \frac{10}{45},$$
$$p(y_2|x_1) = P\{Y = 0|X = 0\} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{15}{45},$$
$$p(y_3|x_1) = P\{Y = 1|X = 0\} = \frac{0{,}20}{0{,}45} = \frac{20}{45}.$$

Відповідно до (5.40) ми маємо $M(Y|x_1) = -1 \cdot \frac{10}{45} + 0 \cdot \frac{15}{45} + 1 \cdot \frac{20}{45} = \frac{10}{45}$. Далі:

$$p(y_1|x_2) = P\{Y = -1|X = 1\} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{15}{55},$$
$$p(y_2|x_2) = P\{Y = 0|X = 1\} = \frac{0{,}25}{0{,}55} = \frac{25}{55},$$
$$p(y_3|x_2) = P\{Y = 1|X = 1\} = \frac{0{,}15}{0{,}55} = \frac{15}{55}.$$

Тому, $M(Y|x_2) = -1 \cdot \frac{15}{55} + 0 \cdot \frac{25}{55} + 1 \cdot \frac{15}{55} = 0.$

Лінія регресії Y на x показана на рис. 5.7.

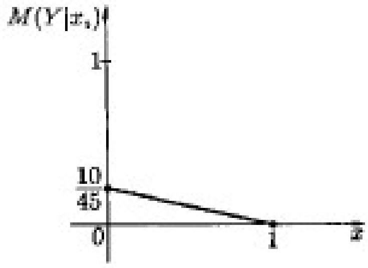

Рисунок 5.7