Розділ 10

ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Інформація, яку здобувають на підставі вибірки, реалізованої із генеральної сукупності, може бути використана для формулювання певних суджень про всю генеральну сукупність. Наприклад, розпочавши виготовляти покришки нового типу для автомобілів, відбирають певну кількість цих покришок і піддають їх певним тестам.

За результатами тестів можна зробити висновок про те, чи кращі нові покришки від покришок старого типу, чи ні. А це, своєю чергою, дає підставу для ухвалення рішення: виготовляти їх чи ні.

Такі рішення називають *статистичними*.

Статистичні рішення мають імовірнісний характер, тобто завжди існує ймовірність того, що ці рішення будуть помилковими.

Головна цінність ухвалення статистичних рішень полягає в тому, що в межах імовірнісних категорій можна об'єктивно виміряти ступінь ризику, що відповідає тому чи іншому рішенню.

Будь-які статистичні висновки, здобуті на підставі обробки вибірки, називають *статистичними гіпотезами*.

Статистичні гіпотези про значення параметрів ознак генеральної сукупності називають *параметричними*.

Наприклад, висувається статистична гіпотеза про числові значення генеральної середньої $\bar{x}_{\Gamma}$, генеральної дисперсії D_{Γ}, генерального середнього квадратичного відхилення σ_{Γ} та ін.

Статистичні гіпотези, що висуваються на підставі обробки вибірки про закон розподілу ознаки генеральної сукупності, називаються *непараметричними*. Наприклад, на підставі обробки вибірки може бути висунута гіпотеза, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу, експоненціальний закон та ін.

10.1. Статистична перевірка гіпотез

Статистичною називається гіпотеза про вигляд невідомого розподілу випадкової величини або про параметри відомих розподілів.

Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу H_0.

Зміст нульової гіпотези записується так:

$$H_0: \ \bar{x}_\Gamma = a;$$

Конкуруючою (альтернативною) називають гіпотезу H_a, яка суперечить нульовій.

Кожній нульовій гіпотезі можна протиставити кілька альтернативних (конкуруючих) гіпотез.

Приміром, нульова гіпотеза стверджує: H_0: $\bar{x}_\Gamma = a$, а альтернативна гіпотеза – H_a: $\bar{x}_\Gamma > a$, тобто заперечує твердження нульової.

Простою називають гіпотезу, яка містить лише одне твердження.

Складною називають гіпотезу, яка складається зі скінченного або нескінченного числа простих гіпотез.

Складна статистична гіпотеза є неоднозначною. Вона може стверджувати, що значення параметра генеральної сукупності належить певній області ймовірних значень, яка може бути дискретною і неперервною.

Наприклад:

$$H_0: \ \bar{x}_\Gamma \epsilon \ [2; \ 2{,}1; \ 2{,}2].$$

Перевірка гіпотези здійснюється за даними вибірки, тобто статистичними методами. Тому перевірку гіпотези за даними вибірки називають статистичною.

У результаті статистичної перевірки правильності основної гіпотези H_0 за результатами вибірки у двох випадках може бути ухвалено неправильне рішення, тобто можуть бути допущені помилки двох видів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відхилена правильна гіпотеза.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза.

Ймовірність здійснити помилку першого роду позначають α і називають **рівнем значущості.**

Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01. Якщо прийнято рівень значущості рівним 0,05, то це означає, що в п’яти випадках із 100 ми ризикуємо одержати похибку першого роду (відкинути правильну гіпотезу).

Ймовірність здійснити помилку другого роду позначають β.

Для перевірки нульової гіпотези вибирається деяка випадкова величина *К,* розподіл якої відомий, і яка називається **статистичним критерієм** (або просто критерієм) перевірки нульової гіпотези.

Спостережним значенням критерію узгодження називають значення відповідного критерію, обчислене за даними вибірки.

Критичною областю називають множину значень критерію, при яких нульову гіпотезу відхиляють.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають множину значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез такий: якщо спостережуване значення критерію належить критичній області, нульову гіпотезу відхиляють; якщо спостережуване значення критерію належить області прийняття гіпотези, гіпотезу приймають.

Критичними точками $k_{\text{кр}}$ називають точки, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Правосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівністю

$$К > k_{\text{кр}} \; (k_{\text{кр}} > 0). \qquad (10.1)$$

Лівосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівністю

$$К < k_{\text{кр}} \; (k_{\text{кр}} < 0). \qquad (10.2)$$

Двосторонньою називають критичну область, яка визначається нерівностями

$$К < k_1, К > k_2 \; (k_2 > k_1). \qquad (10.3)$$

Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, то двостороння критична область визначається нерівностями

$$К < -k_{\text{кр}}, \; К > k_{\text{кр}} \; (k_{\text{кр}} > 0), \qquad (10.4)$$

або рівносильною їй нерівністю

$$|K| > k_{\text{кр}}. \qquad (10.5)$$

Лівобічна і правобічна області визначаються однією критичною точкою, двобічна критична область – двома критичними точками, симетричними щодо нуля.

Для знаходження правосторонньої критичної області достатньо знайти критичну точку $k_{\text{кр}}$. Для цього задають малу ймовірність α; число α називається рівнем значущості критерію. Далі знаходять критичну точку, виходячи з умови, що при справедливості нульової гіпотези виконується рівність

$$P\{\,К > k_{кр}\} = \alpha.$$

Для кожного критерію є відповідні таблиці, з яких знаходять критичну точку, що задовольняє цю формулу.

Аналогічно знаходять лівосторонню критичну область.

Двосторонню критичну область знаходять за умови справедливості нульової гіпотези з рівності

$$P\{\,К < k_1\,\} + P\{\,К > k_2\} = \alpha. \qquad (10.6)$$

Якщо розподіл критерію симетричний щодо нуля, то

$$P\{\,К < k_1\} = P\{\,К > k_2\,\}.$$

Врахувавши рівність (10.6), одержимо

$$P\{\,К > k_{кр}\,\} = \frac{\alpha}{2}. \qquad (10.7)$$

Тоді двосторонню критичну область знаходять з рівності (10.7). Критичні точки знаходять з відповідних таблиць.

При знаходженні критичної області доцільно враховувати потужність критерію.

Потужністю критерію називають імовірність належності критерію критичній області за умови, що правильна альтернативна гіпотеза.

Тобто потужність критерію є імовірність того, що основна гіпотеза буде відхилена, якщо альтернативна гіпотеза правильна.

Якщо рівень значущості вже обрано, то критичну область доцільно будувати так, щоб потужність критерію була максимальною. Виконання цієї вимоги забезпечує мінімальну імовірність похибки другого роду.

Зауваження. Єдиний спосіб одночасного зменшення ймовірностей похибок першого та другого роду це є збільшення об’єму вибірки.

Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези

Для перевірки правильності H_0 задається так званий рівень значущості α.

Пропонується такий алгоритм перевірки правильності H_0:

1. Сформулювати H_0 й одночасно альтернативну гіпотезу H_α.

2. Вибрати статистичний критерій, який відповідав би сформульованій нульовій гіпотезі.

3. Визначити допустиму імовірність похибки першого роду, тобто рівень значущості α;

4. Знайти за відповідною таблицею критичну область (критичну точку) для обраної статистичної характеристики.

До критичної області належать такі значення статистичної характеристики, за яких гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_α.

Наголосимо, що між рівнем значущості (та критичною областю існує такий зв'язок: якщо гіпотеза H_0 правильна, то з імовірністю значення вибіркової функції будуть належати критичній області.

10.2. Перевірка рівності вибіркового середнього гіпотетичному генеральному середньому

Нехай із **генеральної сукупності з відомою дисперсією $\boldsymbol{\sigma^2}$ отримано вибірку об'єму $\boldsymbol{n}$.**

Правило 1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0\colon a = a_0$ (про рівність генерального середнього a нормальної сукупності з відомою дисперсією σ^2 гіпотетичному (прогнозованому) значенню a_0) при конкуруючій гіпотезі $H_a\colon a \neq a_0$, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$U_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} \tag{10.8}$$

і за таблицею функції Лапласа знайти критичну точку $u_{\text{кр}}$ двосторонньої критичної області з рівності

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Якщо $|U_{\text{спост}}| < u_{\text{кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|U_{\text{спост}}| > u_{\text{кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 2. При конкуруючій гіпотезі $H_a\colon a > a_0$ критичну точку правосторонньої критичної області знаходять з рівності

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha.$$

Якщо $U_{спост} < u_{кр}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $U_{спост} > u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 3. При конкуруючій гіпотезі $H_a: a < a_0$ спочатку знаходять допоміжну критичну точку $u_{кр}$ за правилом 2, а потім вважають межею лівосторонньої критичної області

$$u'_{кр} = -u_{кр}.$$

Якщо $U_{спост} > -u_{кр}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $U_{спост} < u_{кр}$, то нульову гіпотезу відхиляють.

Потужність критерію перевірки основної гіпотези $H_0: a = a_0$ про рівність генерального середнього a гіпотетичному значенню a_0 при відомому середньому квадратичному відхиленні σ знаходять залежно від вигляду альтернативної гіпотези.

При альтернативній гіпотезі $H_a: a > a_0$ для гіпотетичного значення генерального середнього $a = a_1 > a_0$ потужність правостороннього критерію

$$1-\beta = \frac{1}{2} - \Phi(u_{кр} - \lambda),$$

де $u_{кр}$ знаходять з рівності $\Phi(u_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha,\ \lambda = \frac{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$. При різних значеннях a_1 функція потужності одностороннього критерію

$$\pi_1(a_1) = \frac{1}{2} - \Phi(u_{кр} - \lambda).$$

При альтернативній гіпотезі $H_a: a \neq a_0$ для гіпотетичного значення генерального середнього $a = a_1$ потужність двостороннього критерію

$$1-\beta = 1 - [\Phi(u_{кр} - \lambda) + \Phi(u_{кр} + \lambda)],$$

де $u_{кр}$ знаходять з рівності $\Phi(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$, $\lambda = \frac{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$. При різних значеннях a_1 функція потужності одностороннього критерію

$$\pi_1(a_1) = 1 - [\Phi(u_{кр} - \lambda) + \Phi(u_{кр} + \lambda)].$$

Приклад 10.1. Із нормальної генеральної сукупності з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4{,}8$ отримано вибірку об'єму $n = 144$, за якою знайдено вибіркове середнє $\bar{x} = 16$. Потрібно при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 15$ при конкуруючій гіпотезі:

А. $H_a: a \neq 15$.

Б. $H_a: a > 15$.

В. $H_a: a < 15$.

Крім того, необхідно знайти потужність правостороннього та двохстороннього критеріїв.

Розв'язання. Обчислимо спочатку спостережуване значення критерію

$$U_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(16-15)\sqrt{144}}{4.8} = 2{,}5.$$

А. Скористаємося правилом 1. Знайдемо критичну точку з рівності

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475.$$

За таблицею функції Лапласа визначимо критичну точку:

$$u_{\text{кр}} \approx 1{,}96.$$

Оскільки $|U_{\text{спост}}| > u_{\text{кр}}$, основна гіпотеза відхиляється. Тобто, вибіркове та генеральні середні суттєво відрізняються.

Б. Скористаємося правилом 2. Знайдемо критичну точку з рівності:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} - 0{,}05 = 0{,}45.$$

За таблицею функції Лапласа визначимо критичну точку:

$$u_{\text{кр}} \approx 1{,}64.$$

Оскільки $U_{\text{спост}} > u_{\text{кр}}$, основна гіпотеза відхиляється. Інакше кажучи, вибіркове та гіпотетичне генеральне середні суттєво відрізняються.

В. Скористаємося правилом 3. Критична точка буде такою ж, як і в пункті б), але з протилежним знаком:

$$u_{\text{кр}} \approx -1{,}64.$$

Оскільки $U_{\text{спост}} > u_{\text{кр}}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Тобто вибіркове та гіпотетичне генеральне середні несуттєво відрізняються.

Тепер знайдемо потужності правостороннього та двохстороннього критеріїв. Нагадаємо, що критичні точки у цих випадках різні та дорівнюють 1,64 і 1,96 відповідно .

Знайдемо параметр λ, який входить в обидва рівняння для визначення потужності критеріїв:

$$\lambda = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(16-15)\sqrt{144}}{4,8} = 2,5.$$

Отже, потужності відповідно правостороннього та двостороннього критеріїв будуть такі:

$$\pi_1^{\text{правост}}(16) = \frac{1}{2} - \Phi\left(u_{\text{кр}} - \lambda\right) = \frac{1}{2} - \Phi(1,64 - 2,5) = \frac{1}{2} + \Phi(0,86) =$$
$$= 0,5 + 0,3051 = 0,8051.$$

$$\pi_1^{\text{двост}}(16) = 1 - \left[\Phi\left(u_{\text{кр}} - \lambda\right) + \Phi\left(u_{\text{кр}} + \lambda\right)\right] =$$
$$= 1 - [\Phi(1,96 - 2,5) + \Phi(1,96 - 2,5)] =$$
$$= 1 - \left[-\Phi(0,54) + \Phi(4,46)\right] == 1 + 0,2054 - 0,5 = 0,7054.$$

Тобто ймовірності того, що нульова гіпотеза буде відхилена, якщо правильною є конкуруюча гіпотеза, дорівнюють 0,8051 і 0,7054 відповідно для правостороннього та двостороннього критеріїв.

Нехай із **генеральної сукупності отримано вибірку об'єму *n* з невідомою дисперсією**.

Якщо дисперсія генеральної сукупності невідома, то як критерій перевірки основної гіпотези беруть випадкову величину

$$T = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}, \tag{10.9}$$

де $s = \sqrt{\frac{n\sum_i n_i x_i^2 - \left(\sum_i n_i x_i\right)^2}{n(n-1)}}$ – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення. Величина T має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями вільності.

Правило 1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0$ про рівність невідомого генерального середнього a нормальної сукупності з невідомою дисперсією гіпотетичному (прогнозованому) значенню a_0 при конкуруючій гіпотезі $H_a: a \neq a_0$ потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$T_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}$$

і за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента при заданому рівні значущості α, розміщеному у верхній частині таблиці, і кількості ступенів вільності $k = n - 1$ знайти критичну точку $t_{\text{двост кр}}(\alpha; k)$.

Якщо $|T_{\text{спост}}| < t_{\text{двост кр}}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $|T_{\text{спост}}| > t_{\text{двост кр}}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 2. При конкуруючій гіпотезі $H_a: a > a_0$ за рівнем значущості α, розміщеним у нижній частині таблиці розподілу Стьюдента, і при кількості ступенів вільності $k = n - 1$ знаходять критичну точку правосторонньої критичної області $t_{\text{правост кр}}(\alpha; k)$.

Якщо $T_{\text{спост}} < t_{\text{правост кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $T_{\text{спост}} > t_{\text{правост кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 3. При конкуруючій гіпотезі $H_a: a < a_0$ спочатку знаходять допоміжну критичну точку (за правилом 2) $t_{\text{правост кр}}(\alpha; k)$ і вважають межею лівосторонньої критичної області $t_{\text{лівост кр}}(\alpha; k) = - t_{\text{правост кр}}(\alpha; k)$.

Якщо $T_{\text{спост}} > - t_{\text{правост кр}}$, немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $T_{\text{спост}} < - t_{\text{правост кр}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 10.2. Проведено 10 незалежних експериментів над випадковою величиною *X*, що має нормальний закон розподілу з невідомими значеннями a, σ. Наслідки експериментів подано у вигляді статистичного ряду:

x_i	2,5	2	–2,3	1,9	–2,1	2,4	2,3	–2,5	1,5	–1,7
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

При рівні значущості α = 0,001 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0: a = 0{,}9$, при альтернативній гіпотезі $H_a: a < 0{,}9$.

Розв'язання. Запишемо статистичний ряд у вигляді статистичного розподілу й обчислимо $\bar{x}$, s:

x_i	–2,5	–2,3	–2,1	–1,7	1,5	1,9	2	2,3	2,4	2,5
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \frac{1}{10}\Big(-2{,}5\cdot 1 + (-2{,}3)\cdot 1 + (-2{,}1)\cdot 1 + (-1{,}7)\cdot 1 + 1{,}5\cdot 1 + \\ +1{,}9\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2{,}3\cdot 1 + 2{,}4\cdot 1 + 2{,}5\cdot 1\Big) = 0{,}4;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 = \frac{1}{10}\Big((-2{,}5)^2\cdot 1 + (-2{,}3)^2\cdot 1 + (-2{,}1)^2\cdot 1 + \\ +(-1{,}7)^2\cdot 1 + 1{,}5^2\cdot 1 + 1{,}9^2\cdot 1 + 2^2\cdot 1 + 2{,}3^2\cdot 1 + +2{,}4^2\cdot 1 + 2{,}5^2\cdot \\ 1\Big) - -0{,}4^2 = 4{,}6 - 0{,}16 = 4{,}44;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{10}{9}\cdot 4{,}44 = 4{,}933;$$

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{4{,}933} \approx 2{,}22.$$

При альтернативній гіпотезі $H_a\colon a < 0{,}9$ будується лівобічна критична область. Для цього необхідно знайти критичну точку

$$t_{\text{лівост кр}}(\alpha; k) = -\ t_{\text{правост кр}}(\alpha; k);$$

$$t_{\text{правост кр}}(\alpha; k) = t(0{,}001; 9) = 4{,}78;$$

$$t_{\text{лівост кр}}(\alpha; k) = -4{,}78.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$T_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(0{,}4 - 0{,}9)\cdot\sqrt{10}}{2{,}22} = -\frac{0{,}5\cdot\sqrt{10}}{2{,}22} \approx -0{,}712.$$

Оскільки $T_{\text{спост}} > -\ t_{\text{правост кр}}$, то немає підстав відхилити $H_0\colon a = 0{,}9$.

Приклад 10.3. Реалізувавши вибірку з генеральної сукупності, ознака якої *X* має нормальний закон розподілу, дістали статистичний розподіл:

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	1	3	6	8	6	6	5	3	2

При рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0\colon a = 8$, якщо альтернативна гіпотеза $H_a\colon a \neq 8$.

Розв'язання. Обчислимо значення $\bar{x}$, s:

$$n = 1 + 3 + 6 + 8 + 6 + 6 + 5 + 3 + 2 = 40;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \frac{1}{40}(6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 11 \cdot 6 + +12 \cdot 5 + 13 \cdot \cdot 3 + 14 \cdot 2) = \frac{6+21+48+72+60+60+60+39+28}{40} = 10;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 = \frac{1}{40}(6^2 \cdot 1 + 7^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 6 + 9^2 \cdot 8 + 10^2 \cdot 6 + +11^2 \cdot 6 + 12^2 \cdot 5 + 13^2 \cdot 3 + 1{,}4^2 \cdot 2) - 10^2 = \\ = \frac{36+147+384+648+600+726+720+507+392}{100} - 100 = 104 - 100 = 4;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{40}{39} \cdot 4 = 4{,}103;$$

$$s = \sqrt{S^2} = \sqrt{4{,}103} \approx 2{,}03.$$

При альтернативній гіпотезі $H_a\colon a \neq 8$ будуємо двобічну критичну область. Враховуючи, що σ_{Γ} є невідомою величиною, для побудови цієї області беремо статистичний критерій.

$$t_{\text{двост кр}}(\alpha; k) = t_{\text{двост кр}}(0{,}01; 39) = 2{,}7.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$T_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(10-8)\sqrt{40}}{2{,}03} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{10}}{2{,}03} \approx 6{,}23.$$

Оскільки $|T_{\text{спост}}| > t_{\text{двост кр}}$, то немає підстав приймати нульову гіпотезу, тобто гіпотеза $H_0\colon a = 8$ відхиляється.

10.3. Перевірка рівності виправленої вибіркової дисперсії генеральній дисперсії

Нехай з нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму n, для якої знайдено виправлену вибіркову дисперсію S^2.

Правило 1. Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ про рівність невідомої генеральної дисперсії σ^2

гіпотетичному (прогнозованому) значенню σ_0^2 при конкуруючій гіпотезі $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$, потрібно обчислити спостережуване значення критерію

$$\chi^2_{\text{спост}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \qquad (10.10)$$

і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α і кількості ступенів вільності $k = n - 1$ знайти критичну точку $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha; k)$.

Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{крит}}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{крит}}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 2. При конкуруючій гіпотезі $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ знаходять ліву $\chi^2_{\text{лів крит}}(1-\frac{\alpha}{2}; k)$ і праву $\chi^2_{\text{прав крит}}(\frac{\alpha}{2}; k)$ критичні точки.

Якщо $\chi^2_{\text{лів крит}} < \chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{прав крит}}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{лів крит}}$ або $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{прав крит}}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Правило 3. При конкуруючій гіпотезі $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$ знаходять критичну точку $\chi^2_{\text{крит}}(1-\alpha; k)$.

Якщо $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{крит}}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 10.4. Із нормальної генеральної сукупності отримано вибірку об'єму $n = 20$, для якої знайдено вибіркову виправлену дисперсію $S^2 = 2{,}7$. Перевірити при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ основну гіпотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 3$, якщо альтернативна гіпотеза:

А. $H_a: \sigma^2 > 3$;

Б. $H_a: \sigma^2 \neq 3$;

В. $H_a: \sigma^2 < 3$.

Розв'язання. Знайдемо спостережуване значення критерію:

$$\chi^2_{\text{спост}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)\cdot 2{,}7}{3} = 17{,}1.$$

А. Скористаємося правилом 1. За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів вільності

$$k = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

знаходимо критичну точку:

$$\chi^2_{\text{крит}}(0{,}05; 19) = 30{,}14.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{крит}}$, то немає підстав відхиляти основну гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню. Інакше кажучи, різниця між виправленою вибірковою дисперсією $S^2 = 2{,}7$ і гіпотетичною генеральною дисперсією $\sigma_0^2 \leq 3$ незначуща.

Б. Скористаємося правилом 2. За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів вільності

$$k = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

знаходимо критичні точки:

$$\chi^2_{\text{лів крит}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}; k\right) = \chi^2_{\text{лів крит}}(0{,}975; 19) = 8{,}91;$$

$$\chi^2_{\text{прав крит}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right) = \chi^2_{\text{прав крит}}(0{,}025; 19) = 32{,}85.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{лів крит}} < \chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{прав крит}}$, то немає підстав відхиляти основну гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню.

В. Скористаємося правилом 3. За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і кількості ступенів вільності

$$k = n - 1 = 20 - 1 = 19$$

знаходимо критичну точку:

$$\chi^2_{\text{крит}}(1 - \alpha; k) = \chi^2_{\text{крит}}(0{,}95; 19) = 10{,}12.$$

Оскільки $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то немає підстав відхиляти основну гіпотезу про рівність генеральної дисперсії гіпотетичному значенню.

10.4. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох генеральних середніх (M(X) = M(Y))

Нехай задано дві генеральні сукупності, ознаки яких X і Y мають нормальний закон розподілу і водночас незалежні одна від одної. Необхідно перевірити правдивість $H_0: M(X) = M(Y)\ (\bar{x}_\Gamma = \bar{y}_\Gamma)$ при відомих значеннях D_X, D_Y ознак генеральних сукупностей.

З кожної генеральної сукупності здійснюють вибірку відповідно з обсягами n' і n'' і будують статистичні розподіли:

x_i	x_1	x_2	x_3	.....	x_m
n_i'	n_1'	n_2'	n_3'	.....	n_m'

y_j	y_1	y_2	y_3	.....	y_m
n_j''	n_1''	n''_2	n_3''	.....	n_m''

Тут $n' = \sum n_i',\ n'' = \sum n_j''$.

Обчислюються значення

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i'}{n'}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j n_j''}{n''}.$$

За статистичний критерій береться випадкова величина

$$U_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sigma(\bar{x} - \bar{y})}, \tag{10.11}$$

що має нормальний закон розподілу.

Оскільки $D(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{D_X}{n'} + \frac{D_Y}{n''}$, то статистичний критерій набере такого вигляду:

$$U_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{D_X}{n'} + \frac{D_Y}{n''}}}. \tag{10.12}$$

Залежно від формулювання альтернативної гіпотези H_a будуються відповідно правобічна, лівобічна та двобічна критичні області.

Спостережуване значення критерію, відповідно, обчислюється:

$$U_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{D_X}{n'} + \frac{D_Y}{n''}}}.$$

Приклад 10.5. За заданими статистичними розподілами двох вибірок, реалізованих із двох генеральних сукупностей, ознаки яких мають нормальний закон розподілу зі значенням дисперсій генеральних сукупностей $D_X = 10$, $D_Y = 15$,

x_i	12,2	13,2	14,2	15,2	16,2
n'_i	5	15	40	30	10

y_j	8,4	12,4	16,4	20,4	24,4
n''_j	10	15	35	20	20

при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правдивість нульової гіпотези

$H_0\colon M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза $H_a : M(X) > M(Y)$.

Розв'язання. Оскільки $n' = \sum n'_i = 100$, $n'' = \sum n''_j = 100$, обчислимо $\bar{x}$ та $\bar{y}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n'_i}{n'} = \frac{12{,}2\cdot 5 + 13{,}2\cdot 15 + 14{,}2\cdot 40 + 15{,}2\cdot 30 + 16{,}2\cdot 10}{100} =$$
$$= \frac{62{,}5+198+568+456+162}{100} = \frac{1446{,}5}{100} = 14{,}465;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j n''_j}{n''} = \frac{8{,}4\cdot 10 + 12{,}4\cdot 15 + 16{,}4\cdot 35 + 20{,}4\cdot 20 + 24{,}4\cdot 20}{100} =$$
$$= \frac{84+186+574+408+488}{100} = \frac{1740}{100} = 17{,}4.$$

Для альтернативної гіпотези $H_a\colon M(X) > M(Y)$ будується правобічна критична область. Критичну точку $u_{\text{кр}}$ знаходимо з рівності

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}01}{2} = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49.$$

За таблицею визначимо критичну точку:

$$u_{\text{кр}} \approx 2{,}34.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$U_{\text{спост}} = \frac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{D_X}{n'}+\frac{D_Y}{n''}}} = \frac{14{,}465-17{,}4}{\sqrt{\frac{10}{100}+\frac{15}{100}}} =- \frac{2{,}935}{\sqrt{0{,}1+0.15}} =- \frac{2{,}935}{0{,}5} =- 5{,}87.$$

Оскільки $U_{\text{спост}} < u_{\text{кр}}$, то $H_0\colon M(X) = M(Y)$ не відхиляється.

10.5. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій

Одним із важливих завдань математичної статистики є порівняння двох або кількох вибіркових дисперсій. Таке порівняння дає можливість визначити, чи можна вважати вибіркові дисперсії статистичними оцінками однієї і тієї ж дисперсії генеральної сукупності. Воно застосовується насамперед під час обчислення дисперсій за результатами технологічних вимірювань.

Порівняння дисперсій D_X , D_Y здійснюється зіставленням виправлених дисперсій S_x^2, S_y^2, які, відповідно, мають закон розподілу χ^2 із $k_1 = n' - 1$, $k_2 = n'' - 1$ ступенями свободи, де n' і n'' є обсяги першої і другої вибірок.

Нехай перша вибірка здійснена з генеральної сукупності з ознакою *Y*, дисперсія якої дорівнює D_Y, друга – з генеральної сукупності з ознакою *X*, дисперсія якої дорівнює D_X. Необхідно перевірити правильність нульової гіпотези

$$H_0: D_X = D_Y.$$

За статистичний критерій береться випадкова величина

$$F = \frac{S_\delta^2}{S_m^2}, \tag{10.13}$$

яка має розподіл Фішера–Снедекора із k_1 і k_2 ступенями свободи, де S_δ^2 є більшою з виправлених дисперсій, одержаною внаслідок обробки результатів вибірок, S_m^2 є меншою з виправлених дисперсій.

Приклад 10.6. Під час дослідження стабільності температури в термостаті дістали такі результати: 21,2; 21,8; 21,3; 21,0; 21,4; 21,3.

З метою стабілізації температури було використано удосконалений пристрій, після цього заміри температури показали такі результати: 37,7; 37,6; 37,6; 37,4. Чи можна за рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ вважати використання удосконаленого пристрою до стабілізатора температури ефективним?

Розв'язання. Очевидно, що ефективність стабілізаторів без удосконаленого пристрою і з ним залежить від дисперсій вимірюваних ними температур. Отже, задача звелась до порівняння двох дисперсій.

Обчислимо виправлені вибіркові дисперсії:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j n_j''}{n''} = \frac{21{,}2+21{,}8+21{,}3+21{,}0+21{,}4+21{,}3}{6} = 21{,}333;$$

$$D_{\text{в}}(Y) = \frac{1}{n''}\sum_{j=1}^{m} n_j'' y_j^2 - \left(\frac{1}{n''}\sum_{j=1}^{m} n_j'' y_j\right)^2 =$$
$$= \frac{21{,}2^2+21{,}8^2+21{,}3^2+21{,}0^2+21{,}4^2+21{,}3^2}{6} - 21{,}333^2 =$$
$$= \frac{2731{,}02}{6} - 455{,}097 = 455{,}17 - 455{,}097 = 0{,}073;$$

$$S_y^2 = \frac{n''}{n''-1} D_{\text{в}}(Y) = \frac{6}{6-1}\cdot 0{,}073 = 0{,}0876;$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i'}{n'} = \frac{37{,}7+37{,}6+37{,}6+37{,}4}{4} = \frac{150{,}3}{4} = 37{,}575;$$

$$D_{\text{в}}(X) = \frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{m} n_i' x_i^2 - \left(\frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{m} n_i' x_i\right)^2 =$$
$$= \frac{37{,}7^2+37{,}6^2+37{,}6^2+37{,}4^2}{4} - 37{,}575^2 =$$
$$= \frac{5647{,}57}{4} - 1411{,}880625 = 1411{,}8925 - 1411{,}880625 = 0{,}011875;$$
$$S_y^2 = \frac{n'}{n'-1} D_{\text{в}}(X) = \frac{4}{4-1}\cdot 0{,}011875 = 0{,}01583.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$F^* = \frac{S_\delta^2}{S_m^2} = \frac{0{,}0876}{0{,}01583} = 5{,}534.$$

Число ступенів свободи:

для більшої виправленої дисперсії $S_\delta^2 = S_y^2,\ k_1 = n'' - 1 = 6 - 1 = 5,$

для меншої $S_m^2 = S_x^2$, $k_2 = n' - 1 = 4 - 1 = 3.$

Оскільки удосконалення стабілізатора температур може тільки зменшити дисперсію, то будуємо правобічну критичну область. Отже,

$$H_a\colon S_y^2 > S_x^2.$$

Критичну точку знаходимо за таблицею відповідно до заданого рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ і числа ступенів свободи $k_1 = 5$, $k_2 = 3$,

$$F_{\text{кр}}(\alpha;\ k_1, k_2) = F_{\text{кр}}(0{,}01;\ 5, 3) = 28{,}2.$$

Оскільки $F^* < F_{\text{кр}}$, то дані спостережень не дають підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто вдосконалення термостабілізатора є ефективним.

Запитання для самоконтролю

1. Статистична гіпотеза – це … ?
2. Які статистичні гіпотези називають параметричними?
3. Які статистичні гіпотези називають непараметричними?
4. Нульовою (основною) називають гіпотезу …?
5. Конкуруючою (альтернативною) називають гіпотезу …?
6. Простою називають гіпотезу …?
7. Складною називають гіпотезу…?
8. Коли виникає помилка першого роду?
9. Коли виникає помилка другого роду?
10. Що таке рівень значущості?
11. Що називають статистичним критерієм перевірки?
12. Що називають спостережним значенням критерію узгодження?
13. Що називають критичною областю?
14. Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають …?
15. Основний принцип перевірки статистичних гіпотез.
16. Критичними точками $k_{кр}$ називають …
17. Правосторонньою називають критичну область …
18. Лівосторонньою називають критичну область …
19. Двосторонньою називають критичну область …
20. Потужністю критерію називають …
21. Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези.
22. Алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези про рівність генерального середнього a нормальної сукупності з відомою дисперсією σ^2 гіпотетичному значенню a_0 при конкуруючій гіпотезі $H_a: a \neq a_0$; $H_a: a < a_0$; $H_a: a > a_0$.
23. Алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези про рівність генерального середнього a нормальної сукупності з невідомою дисперсією гіпотетичному значенню a_0 при конкуруючій гіпотезі $H_a: a \neq a_0$; $H_a: a < a_0$; $H_a: a > a_0$.
24. Який статистичний критерій вибирається для перевірки основної гіпотези $H_0: a = a_0$ при невідомій дисперсії?
25. Який закон розподілу ймовірностей має статистичний критерій $T = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}$?
26. Алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези про рівність невідомої генеральної дисперсії σ^2 гіпотетичному (прогнозованому) значенню σ_0^2 при конкуруючій гіпотезі $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$; $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$.