ТОЧКОВІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

№1 Найти оценку параметра показательного закона распределения по методу моментов.

Решение. Плотность вероятности показательного закона распределения имеет вид

$$f(x,\ \lambda)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0.$$

Поэтому

$$M(X)=\int_0^\infty x\,\lambda e^{-\lambda x}dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=\lambda e^{-\lambda x}dx \\ du=dx & v=-e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

или $\frac{1}{\lambda}=\overline{x_B}$. Откуда $\lambda=\frac{1}{\overline{x_B}}$.

№2 Найти оценки параметров нормального распределения случайной величины X методом моментов.

Решение. Так как $M(X)=a$ и $D(X)=\sigma^2$, то составим систему:

$$\begin{cases} M(X)=\overline{x_B}, \\ D(X)=D_B \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=\overline{x_B}, \\ \sigma^2=D_B. \end{cases}$$

Итак, $\theta_1=\overline{x_B}$ и $\theta_2=\sigma=\sqrt{D_B}$.

№3 Найти оценку параметра a распределения Пуассона методом максимального правдоподобия.

Решение. В данном случае $p\{X=m\}=\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}$. Поэтому

$$p(x_i,\ \theta)=p\{X=x_i,\ \theta\}=\frac{\theta^{x_i}\cdot e^{-\theta}}{x_i\,!}$$

при $x_i\in N$. Составляем функцию правдоподобия (для дискретной сл. величины X):

$$L(x,\ \theta)=\frac{\theta^{x_1}\cdot e^{-\theta}}{x_1\,!}\cdot\frac{\theta^{x_2}\cdot e^{-\theta}}{x_2\,!}\cdot\ldots\cdot\frac{\theta^{x_n}\cdot e^{-\theta}}{x_n\,!}=e^{-\theta n}\cdot\theta^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}\cdot\frac{1}{x_1\,!x_2\,!\ldots x_n\,!}.$$

Тогда

$$\ln L(x,\ \theta)=-\theta\cdot n+\sum_{i=1}^n x_i\ln\theta-\ln(x_1\,!x_2\,!\ldots x_n\,!)$$

и

$$\frac{d\ln L(x,\ \theta)}{d\theta}=-n+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Уравнение правдоподобия имеет вид:

$$\left(-n+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i\right)\Bigg|_{\theta=\tilde\theta}=0.$$

Отсюда находим

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x_B}.$$

А так как

$$\left.\frac{d^2 \ln L(x,\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = -\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0,$$

то оценка $\tilde{\theta} = \overline{x_B}$ является оценкой максимального правдоподобия.

№4 Статистические исследования уровня дневного дохода работника дали такие результаты:

доход x_i, грн.	6	7	8	9	10	11	12	13	14
число работников n_i	1	2	3	20	25	24	15	7	3

Вычислить точечные оценки $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, где X – уровень дохода одного работника.

Решение. За точечную оценку математического ожидания $M(X)$ берем выборочное среднее:

$$M^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{100}\cdot 1051 = 10{,}51.$$

Средний доход в течение одного дня работника составляет 10,51 грн.

Точечную оценку дисперсии $D(X)$ вычисляем в двух вариантах (смещенную и несмещенную):

$$D^* = D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{100}\cdot 234{,}99 = 2{,}3499;$$

$$D^* = S^2 = \frac{100}{99}\cdot 2{,}3499 = 2{,}3736.$$

Как видим, отклонение смещенной оценки $D^* = D_B$ от несмещенной $D^* = S^2$ составляет $S^2 - D_B = 0{,}0237$ и является сравнительно малым, т.к. объем выборки $n = 100$.

Для среднего квадратического отклонения имеем такие оценки:

$$\sigma^* = \sigma_B = \sqrt{2{,}3499} = 1{,}5329;$$

$$\sigma^* = S = \sqrt{2{,}3736} = 1{,}5406.$$

№5 Статистические исследования роста производительности труда предприятий региона в данном году в процентах к соответствующему периоду предыдущего года выражаются интервальной таблицей:

$(z_{i-1};\, z_i]$	$(80;\,90]$	$(90;\,100]$	$(100;\,110]$	$(110;\,120]$	$(120;\,130]$
n_i	2	14	60	20	4

Вычислить точечные оценки $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, где X – рост производительности труда одного предприятия региона в процентах к соответствующему периоду предыдущего года.

Решение. За точечную оценку математического ожидания $M(X)$ берем выборочное среднее для середин соответствующих интервалов:

$$M^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{100}\cdot 10600 = 106.$$

Средний рост производительности труда одного предприятия в данном году в процентах к соответствующему периоду предыдущего года составляет 106%.

Точечную оценку дисперсии $D(X)$ вычисляем в двух вариантах (смещенную и несмещенную):

$$D^* = D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100}\cdot 1129300 - 11236 = 57;$$

$$D^* = S^2 = \frac{100}{99}\cdot 57 = 57,(57).$$

Для среднего квадратического отклонения имеем такие оценки:

$$\sigma^* = \sigma_B = \sqrt{57} = 7{,}55;$$

$$\sigma^* = S = \sqrt{57,(57)} = 7{,}59.$$

№6 За даним розподілом вибірки

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

знайти точкову оцінку математичного сподівання та виправлену (незміщену) точкову оцінку середнього квадратичного відхилення.