ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

№1 Случайная величина распределена по нормальному закону с параметром $\sigma = 2$. Сделана выборка объема $n = 25$, $\overline{x_B} = 2{,}8$. С надежностью $\gamma = 0{,}95$ найти доверительный интервал неизвестного параметра a (математического ожидания) этого распределения.

Решение. Из равенства $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(t) = 0{,}475$. Из таблицы интегральной функции Лапласа найдем число $t = 1{,}96$. Тогда точность оценки будет $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1{,}96 \cdot 2}{\sqrt{25}} = 0{,}784$.

Итак, доверительный интервал будет $\left(\overline{x_B} - 0{,}784;\ \overline{x_B} + 0{,}784\right)$. При $\overline{x_B} = 2{,}8$, то с надежностью 95% интервал $(2{,}016;\ 3{,}584)$ покрывает параметр a с точностью 0,8.

№2 Случайная величина распределена по нормальному закону с параметром $\sigma = 0{,}5$. Найти минимальный объем выборки n, чтобы с надежностью $\gamma = 0{,}95$ и точностью $\delta = 0{,}1$ имело место равенство $\overline{x_B} = a$.

Решение. Из равенства $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2} \Rightarrow \Phi(t) = 0{,}475$. Из таблицы интегральной функции Лапласа найдем число $t = 1{,}96$. Тогда, $n = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 0{,}5^2}{0{,}1^2} = (9{,}8)^2 = 96{,}04$. Итак, минимальный объем выборки $n = 96$.

№3 Случайная величина распределена по нормальному закону. Результаты наблюдений: $x_1 = -25$, $x_2 = 34$, $x_3 = -20$, $x_4 = 10$, $x_5 = 21$. Найти доверительный интервал для математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Найдем выборочное среднее и исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{x_B} = \frac{1}{5}(-25 + 34 - 20 + 10 + 21) = 4;$$

$$S^2 = \frac{1}{5-1}\left((-25-4)^2 + (34-4)^2 + (-20-4)^2 + (10-4)^2 + (21-4)^2\right) = 660{,}5 \Rightarrow S \approx 25{,}7.$$

По таблице распределения Стьюдента для $\gamma = 0{,}95$ и $k = n - 1 = 4$ находим $t_\gamma = 2{,}78$. Следовательно, $\delta = t_\gamma \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}} = 2{,}78 \cdot \dfrac{25{,}7}{2{,}24} \approx 31{,}9$. Доверительный интервал будет иметь вид: $(-27{,}9;\ 35{,}9)$.

№4 Для оценки нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 30 единиц и вычислено $S = 1{,}5$. Найти доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ с надежностью $\gamma = 0{,}9$.

Имеем $n = 30$, $\gamma = 0{,}9$. По таблице распределения хи- квадрат находим:

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+0{,}9}{2},\ 30-1} = \chi^2(0{,}95;\ 29) = 17{,}7;$$

$$\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-0{,}9}{2},\ 30-1} = \chi^2(0{,}05;\ 29) = 42{,}6.$$

Доверительный интервал имеет вид: $\left(\dfrac{\sqrt{30-1} \cdot 1{,}5}{\sqrt{42{,}6}};\ \dfrac{\sqrt{30-1} \cdot 1{,}5}{\sqrt{17{,}7}}\right)$ или $\sigma \in (1{,}238; 1{,}920)$.

№5 Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром $\sigma = 2$. Зроблена вибірка об'єму $n = 25$. З надійністю $\gamma = 0{,}95$ знайти довірчий інтервал невідомого параметра a цього розподілу.

№6 Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром σ. Знайти мінімальний об'єм n вибірки, щоб з надійністю γ та точністю δ виконувалася рівність $\bar{x}_B = a$, якщо $\sigma = 0{,}5$; $\gamma = 0{,}95$; $\delta = 0{,}1$.

№7 За даним розподілом вибірки об'єму $n = 10$

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання a нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за вибірковим середнім за допомогою довірчого інтервалу.

№8 Випадкова величина X – ознака генеральної сукупності, нормально розподілена зі середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Яким є довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання $a = M(X)$ із надійністю 0,99, якщо вибіркове середнє $\bar{x}_B = 16{,}8$ і обсяг вибірки $n = 25$?

№9 За даними вибірки обсягом $n = 10$ із генеральної сукупності нормально розподіленої кількісної ознаки X обчислено виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 5.1$. Знайти довірчий інтервал, який «накриває» середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sigma(X)$ із надійністю 0,999.