ПЕРЕВІРКА ПАРАМЕТРИЧНИХ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

№1 Из нормально распределенной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ получено выборку объема $n = 50$ и по ней найдено выборочное среднее $\bar{x} = 27{,}7$. Необходимо для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0:\ a = a_0 = 29$ при альтернативной гипотезе

а) $H_1:\ a \neq a_0$;

б) $H_1:\ a < a_0$.

Решение. Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$Z_{эмп.} = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(27{,}7 - 29)\sqrt{50}}{5} = -1{,}838.$$

а) для альтернативной гипотезы $H_1:\ a \neq a_0$ находим $z_{кр.}$:

$$\Phi(z_{кр.}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475 \Rightarrow z_{кр.} = 1{,}96.$$

Так как $\left| Z_{эмп.} \right| = 1{,}838 < z_{кр.} = 1{,}96$, то гипотезу H_0 принимаем.

б) для альтернативной гипотезы $H_1:\ a < a_0$ находим $z_{кр.}$:

$$\Phi(z_{кр.}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45 \Rightarrow z_{кр.} = 1{,}65.$$

Так как $Z_{эмп.} = -1{,}838 < -z_{кр.} = -1{,}65$, то отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1.

№2 Для выборки объема $n = 16$ значений нормально распределенной случайной величины X генеральной совокупности найдено выборочное среднее $\bar{x} = 118{,}2$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\sigma_B = 3{,}6$. Необходимо для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0:\ a = a_0 = 120$ при альтернативной гипотезе

а) $H_1:\ a \neq a_0$;

б) $H_1:\ a < a_0$.

Решение. Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$T_{эмп.} = \frac{(118{,}2 - 120)\sqrt{16}}{3{,}6} = -2.$$

а) для альтернативной гипотезы $H_1:\ a \neq a_0$ находим $t_{кр.}$ для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $k = n - 1 = 15$, расположенное в верхней строке таблицы: $t_{кр.} = t_{двустор.\,кр.}(0{,}05;\ 15) = 2{,}13$. Так как $\left| T_{эмп.} \right| = 2 < t_{кр.} = 2{,}13$, то гипотезу H_0 принимаем.

б) для альтернативной гипотезы $H_1:\ a < a_0$ находим $t_{кр.}$ для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $k = n - 1 = 15$, расположенное в нижней строке таблицы: $t_{кр.} = t_{правостор.\,кр.}(0{,}05;\ 15) = 1{,}75$. Так как $\left| T_{эмп.} \right| = 2 > t_{кр.} = 1{,}75$, то гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1.

№3 Для нормально распределенных случайных величин X и Y получены выборки объемами $n = 40$ и $m = 50$ соответственно, вычислены их выборочные средние $\bar{x} = 9{,}8$ и

$\bar{y}=9{,}6$. Если $\sigma_x=\sigma_y=0{,}3$, необходимо для уровня значимости $\alpha=0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0: a_x=a_y$ при альтернативной гипотезе $H_1: a_x\neq a_y$.

Решение. Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$Z_{эмп.}=\frac{9{,}8-9{,}6}{\sqrt{\frac{0{,}09}{40}+\frac{0{,}09}{50}}}=3{,}143.$$

По таблице находим $z_{кр.}$:

$$\Phi\left(z_{кр.}\right)=\frac{1-\alpha}{2}=\frac{1-0{,}01}{2}=0{,}495\Rightarrow z_{кр.}=2{,}58.$$

Так как $\left|Z_{эмп.}\right|=3{,}143>z_{кр.}=2{,}58$, то гипотезу $H_0: a_x=a_y$ отклоняем и принимаем гипотезу H_1.

№4 Для нормально распределенных случайных величин X и Y получены выборки объемами $n=5$ и $m=6$ соответственно, вычислены их выборочные средние $\bar{x}=3{,}3$, $\bar{y}=2{,}48$ и исправленные выборочные дисперсии $D_x=0{,}25$, $D_y=0{,}108$. Необходимо для уровня значимости $\alpha=0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0: a_x=a_y$ при альтернативной гипотезе $H_1: a_x\neq a_y$.

Решение. Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$T_{эмп.}=\frac{3{,}3-2{,}48}{\sqrt{4\cdot 0{,}25+5\cdot 0{,}108}}\cdot\sqrt{\frac{5\cdot 6(5+6-2)}{5+6}}=3{,}24.$$

Находим $t_{кр.}$ для уровня значимости $\alpha=0{,}05$ и числа степеней свободы $k=5+6-2=9$: $t_{кр.}=t_{двустор.\,кр.}(0{,}05;\,9)=2{,}26$. Так как $\left|T_{эмп.}\right|=3{,}27>t_{кр.}=2{,}26$, то гипотезу H_0 отклоняем.

№5 Важной мерой риска, связанного с владением акцией, является дисперсия (вариация во времени) ее цены. Финансовый аналитик хочет проверить гипотезу о том, что акция A тянет за собой больший риск, чем акция B. Случайная выборка цен акции A (признак X) из 25 выбранных дней дала результат $D_x=6{,}52$, а выборка цен акции B (признак Y) из 22 выбранных дней дала результат $D_y=3{,}47$. Для уровня значимости $\alpha=0{,}01$ проверить гипотезу $H_0: \sigma_x^2=\sigma_y^2$ при альтернативной гипотезе $H_1: \sigma_x^2>\sigma_y^2$.

Решение. Допустим, что распределение цен является приближенно нормальным и что два множества исследованных данных о ценах акций могут быть приняты как независимые выборки, образованные из двух статистических совокупностей цен. Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$F_{эмп.}=\frac{6{,}52}{3{,}47}=1{,}88.$$

Для уровня значимости $\alpha=0{,}01$ и числа степеней свободы $k_1=25-1=24$, $k_2=22-1=21$ находим по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора $f_{кр.}=f_{кр.}(0{,}01;\,24;\,21)=2{,}80$. Так как $F_{эмп.}=1{,}88<f_{кр.}=2{,}80$, то гипотезу H_0 принимаем. Это означает, что данные выборок не дают основания финансовому аналитику считать, что акция A тянет за собой больший риск, чем акция B.

№6 Для проверки того, влияет ли день недели на объем торгового оборота в каком-либо универсальном магазине, было проведено обследование в выбранные наугад дни.

Полученные данные сведены в следующей таблице. Оборот универсального магазина в разные дни недели (в условных единицах).

Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
1,2	1,1	1,5	1,6	1,2	1,5
1,0	1,4	1,0	1,4	1,2	2,0
0,8	1,1	1,1	1,5	1,8	1,9

Нетрудно убедиться, что $\overline{x_1} = 1$; $\overline{x_2} = \overline{x_3} = 1{,}2$; $\overline{x_4} = 1{,}5$; $\overline{x_5} = 1{,}4$; $\overline{x_6} = 1{,}8$. Общая средняя $\bar{x} = 1{,}35$.

В рассматриваемом случае $n_j = 3$, $j = \overline{1,6}$; $n = 18$ и $m = 6$, $k_1 = m - 1 = 5$, $k_2 = n - m = 12$.

Числитель статистики $S_1^2 = 0{,}2730$, а ее знаменатель $S_2^2 = 0{,}0567$. Получим числовое значение характеристики $F = 4{,}81$. Примем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Из таблицы находим, что при этом уровне значимости для $k_1 = 5$ и $k_2 = 12$ степеней свободы $f_\alpha = 3{,}11$. Полученное ранее числовое значение характеристики 4,81.

Таким образом, $F > f_\alpha$, и, следовательно, гипотезу, что день недели не влияет на объем торгового оборота следует, отвергнуть. Риск ошибки первого рода составляет лишь 5%.

№7 За двома незалежними вибірками об'ємами $n_1 = 9$ і $n_2 = 6$, що взяті з нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдено вибіркові дисперсії $D(X) = 14.4$ і $D(Y) = 20.5$. За рівнем значущості 0,1 перевірити нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючий гіпотезі $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

№8 Для вибірки обсягу $n = 100$ значень нормально розподіленої випадкової величини X генеральної сукупності знайдено вибіркове середнє $\bar{x}_B = 27{,}56$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5{,}2$. Потрібно для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 26$ за конкуруючої гіпотези $H_1 : a \neq 26$.

№9 Для вибірки обсягу $n = 16$ значень нормально розподіленої випадкової величини X генеральної сукупності знайдено вибіркове середнє $\bar{x}_B = 118{,}2$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 3{,}6$. Потрібно для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0 : a = a_0 = 120$ за конкуруючої гіпотези $H_1 : a \neq a_0$.