ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Задача Лагранжа

Варіаційними задачами на умовний екстремум називаються задачі, в яких треба знайти екстремум функціонала, причому на функції, від яких залежить функціонал, накладено деякі в'язи.

Задача Лагранжа ставиться так. Знайти екстремум функціонала

$$J[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')\,dx \to extr, \quad (5.1)$$

$$y_j(x_0) = y_{j0}, \quad y_j(x_1) = y_{j1} \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

при наявності умов

$$\varphi_i(x, y_1, ..., y_n) = 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ \ m < n\right), \quad (5.2)$$

які вважаються незалежними.

Теорема. Функції $y_1, y_2, ..., y_n$, які реалізують екстремум функціонала (5.1) при наявності умов (5.2), задовольняють при відповідному виборі множників $\lambda_i(x)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ рівняння Ейлера, що складені для функціонала

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right] dx. \quad (5.3)$$

Позначають $F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i = \Phi(x, y_1, ..., y_n)$. Тоді функції $\lambda_i(x)$ і $y_j(x)$ визначаються з рівнянь Ейлера

$$\Phi'_{y_j} - \frac{d}{dx}\Phi'_{y_j'} = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (5.4)$$

і

$$\varphi_i(x, y_1, ..., y_n) = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \quad (5.5)$$

Рівняння $\varphi_i = 0$ можна вважати рівняннями Ейлера для функціонала J^*, якщо аргументами функціонала вважати не тільки функції $y_1, y_2, ..., y_n$, а й функції $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)$. Вважається, що рівняння $\varphi_i(x, y_1, ..., y_n) = 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ є незалежними, тобто один із якобіанів порядку m не дорівнює нулю, наприклад,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} \neq 0.$$

Аналогічним чином розв'язується задача Лагранжа у випадку, коли рівняння в'язей є диференціальними рівняннями вигляду

$$\varphi_i(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ \ m < n\right). \quad (5.6)$$

Ізопериметрична задача

Ізопериметричними задачами називаються такі варіаційні задачі, в яких потрібно визначити екстремум функціонала $J[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')\,dx \to extr$

(5.7)

при наявності умов

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')\,dx = l_i, \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (5.8)$$

де l_i – сталі, m може бути більше, менше або дорівнювати n, а також аналогічні задачі для більш складних функціоналів.

Для того, щоб дістати основну необхідну умову в ізопериметричній задачі про знаходження екстремуму функціонала (5.7) при наявності в'язів (5.8), потрібно скласти допоміжний функціонал

$$\Phi = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dx\,, \tag{5.9}$$

де λ_i – сталі, та записати для нього рівняння Ейлера. Довільні сталі $C_1, C_2, ..., C_{2n}$ у загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера та сталі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ визначаються із граничних умов

$$y_k(x_0) = y_{k0},\ y_k(x_1) = y_{k1} \quad \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{5.10}$$

та із ізопериметричних умов (5.8):

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i dx = l_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$