МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С.М. Гребенюк, Н.М. Д’яченко, І.В. Красікова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ - 2: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Методичні вказівки до самостійної роботи
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика» освітньо-професійних програм
«Математика», «Комп’ютерна математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №__ від _______ 2019 р.

Запоріжжя
2019

УДК 517.9 (075.8)
Г 79

Гребенюк С.М., Д'яченко Н.М., Красікова І.В. Математичний аналіз-2: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних: методичні вказівки до самостійної роботи для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійних програм «Математика», «Комп'ютерна математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2019. 130 с.

Методичні вказівки призначені допомогти студентам якісно засвоїти програмний матеріал за темами «Функції багатьох змінних», «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля» .

Методичні вказівки містять основні теоретичні відомості із зазначених тем, приклади задач з методикою їх розв'язання, варіанти завдань для самостійного виконання та питання для самоконтролю.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійних програм «Математика», «Комп'ютерна математика».

Рецензент
М.І. Клименко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної математики

Відповідальний за випуск
С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальної математики

ЗМІСТ

ВСТУП

Математичний аналіз є необхідною складовою частиною базової теоретичної підготовки студентів спеціальності «Математика» та основою для подальшого вивчення спеціальних дисциплін. Метою викладання навчальної дисципліни «Математичний аналіз - 2» у четвертому семестрі є надання систематичних знань студентам з основ класичного аналізу дійсних функцій багатьох змінних.

Математичний аналіз – фундаментальний курс, на поняттях і фактах якого базується більшість математичних дисциплін, вони також застосовуються в фізиці, механіці, економіці та інших галузях науки та техніки.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати основні поняття та факти теорії границь, неперервних функцій, диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних, а також основні області застосування відомих понять та фактів. Студент повинен вміти досліджувати функції багатьох змінних на неперервність, диференційовність, екстремум, інтегровність та інше; зводити кратні інтеграли до повторних та обчислювати їх; обчислювати криволінійні та поверхневі інтеграли; застосовувати кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли до обчислення площ фігур, довжин дуг кривих, об’ємів тіл, площ поверхонь, в техніці, векторному аналізі.

Методичні вказівки стосуються одного з розділів математичного аналізу – диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних. Цей розділ охоплює один семестр курсу та містить теми «Функції багатьох змінних», «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля». Вказівки містять необхідний теоретичний матеріал (означення основних понять, теореми, формули), який проілюстровано прикладами. До кожної теми пропонуються завдання до самостійного виконання та приклад розв’язання варіанта такого завдання.

Теоретичні знання і практичні навички, набуті при вивченні диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних застосовуються в окремих темах диференціальних рівнянь, чисельних методів, рівнянь математичної фізики, при розв’язанні прикладних задач.

1 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Мета вивчення теми:

1) засвоїти основні поняття теорії метричних просторів;

2) знати означення області визначення функції, лінії рівня та вміти їх зображати;

3) вміти знаходити подвійні та повторні границі функції двох змінних, або доводити, що вони не існують

3) навчитися досліджувати функції багатьох змінних на неперервність та диференційовність;

4) навчитися знаходити частинні похідні довільного порядку та записувати диференціали будь-якого порядку (у тому числі для складених функцій та функцій, заданих неявно);

5) знати геометричний зміст диференційовності та вміти застосовувати диференціальне числення до розв'язання геометричних задач;

6) ознайомитися із формулою Тейлора для функції багатьох змінних та навчитися розкладати функцію за формулою;

7) ознайомитися з поняттям неявної функції;

8) навчитися досліджувати функції багатьох змінних на локальний, умовний та абсолютний екстремум.

Основні поняття теми:

1) метрика, метричний простір, класифікація точок та множин у метричному просторі *(див. підрозділ 1.1)*;

2) область визначення функції, лінія рівня, поверхня рівня, границя функції, неперервна функція *(див. підрозділ 1.2)*;

3) частинна похідна, диференційовна функція, диференціал, похідні та диференціали вищих порядків *(див. пункти 1.3.1-1.3.2)*;

4) дотична площина, нормаль до поверхні, похідна за напрямком, градієнт функції *(див. пункти 1.3.3-1.3.4)*;

5) точки локального екстремуму *(див. пункт 1.3.6)*;

6) неявна функція, точки умовного екстремуму, абсолютний екстремум *(див. підрозділ 1.4)*.

Основні факти теми:

1) зв'язок між подвійними та повторними границями *(див. підрозділ 1.2)*;

2) умови диференційовності функцій багатьох змінних *(див. пункти 1.3.1-1.3.2)*;

3) формули частинних похідних складеної функції *(див. пункт 1.3.1)*;

4) геометричний зміст диференційовності *(див. пункт 1.3.3)*;

5) формула Тейлора *(див. пункт 1.3.5)*;

6) необхідна та достатні умови локального екстремуму *(див. пункт 1.3.6)*;

7) схема дослідження функції на умовний екстремум *(див. пункт 1.4.1)*.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Деякі відомості із теорії метричних просторів

Метричним простором називають довільну множину X разом із функцією $\rho(x,y)$, яка будь-яким елементам x і y із X ставить у відповідність дійсне невід'ємне число та задовольняє аксіоми:

1^0 $\rho(x,y)\geq 0\ \forall x,y\in X$; $\quad \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2^0 $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x,y\in X$;

3^0 $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,y,z\in X$ – *аксіома трикутника*.

Таку функцію $\rho(x,y)$ називають *метрикою* або відстанню між x та y. Елемент x метричного простору часто називають точкою цього простору. Метричний простір, що задається на множині X з метрикою $\rho(x,y)$, позначається (X,ρ).

Оскільки функція $\rho(x,y)=|x-y|$ на множині R задовольняє аксіоми метрики, $\mathrm{R}^1=(\mathrm{R},|x-y|)$ – метричний простір. А*рифметичним* m*-вимірним простором* R^m називають множину усіх впорядкованих скінченних сукупностей, що складаються із m дійсних чисел $(x_1,x_2,...,x_m)$ з операціями покоординатного додавання та множення на скаляр $\lambda\in\mathrm{R}$:

$$(x_1,x_2,...,x_m)+(y_1,y_2,...,y_m)\overset{def}{=}(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_m+y_m);$$

$$\lambda(x_1,x_2,...,x_m)\overset{def}{=}(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_m).$$

Сукупність $(x_1,x_2,...,x_m)$ називають точкою, вектором або елементом R^m, будемо його позначати $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$, а числа $x_i, i=(1,2,...,m)$ називають координатами точки $\overline{x}$. На просторі R^m розглянемо функції, кожна з яких визначає метрику:

$$\rho_1(\overline{x},\overline{y})=\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|;\quad \rho_2(\overline{x},\overline{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2};\quad \rho_\infty(\overline{x},\overline{y})=\max_{i=1,...,m}|x_i-y_i|.$$

Відповідні метричні простори позначаються таким чином:

$$\mathrm{R}_1^m\overset{def}{=}(\mathrm{R}^m,\rho_1);\quad \mathrm{R}_2^m\overset{def}{=}(\mathrm{R}^m,\rho_2);\quad \mathrm{R}_\infty^m\overset{def}{=}(\mathrm{R}^m,\rho_\infty).$$

Метричний простір R_2^m називають *евклідовим* m*-вимірним простором.* Скалярний добуток на ньому задається формулою $(\overline{x},\overline{y})=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i$, а метрика –

$$\rho(\overline{x},\overline{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_m-y_m)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k-y_k)^2}.$$

Відкритою, замкненою кулею і сферою радіусу r з центром в точці x_0 в метричному просторі (X,ρ) називають відповідно множини

$$B_r(x_0)=\{x\in X:\rho(x,x_0)<\varepsilon\}$$

$$B_r[x_0]=\{x\in X:\rho(x,x_0)\le\varepsilon\}.$$

$$S_r(x_0)=\{x\in X:\rho(x,x_0)=\varepsilon\}$$

На рис. 1.1 а, б, в зображені замкнені кулі в просторах R_1^2, R_2^2 і R_∞^2 відповідно.

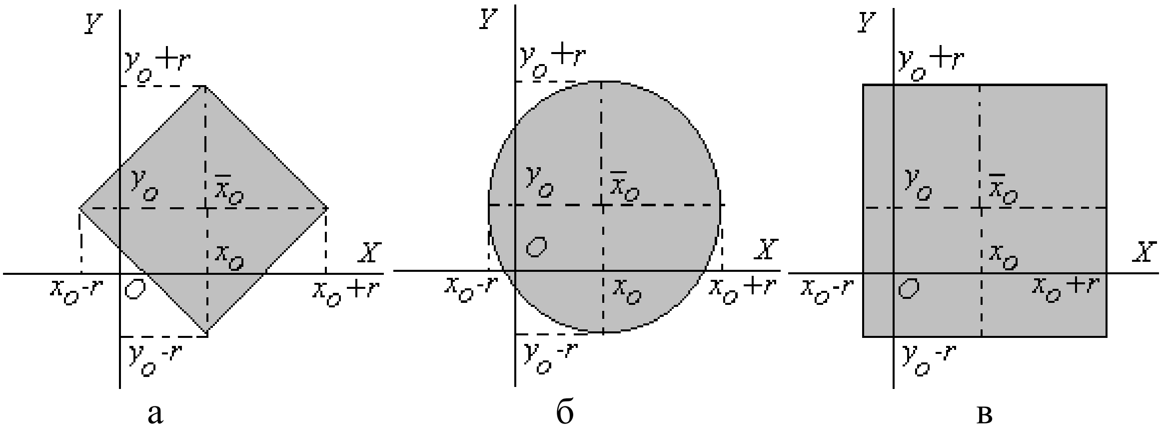


Рис 1.1

ε*-околом точки* x_0 називають відкриту кулю $B_\varepsilon(x_0)$, будемо його позначати $O_\varepsilon(x_0)$. Множину M метричного простору (X,ρ) називають *обмеженою*, якщо її можна цілком помістити в деяку кулю $B_r[x_0]$.

Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору (X,ρ) називають *збіжною до елемента* x_0 цього простору, якщо

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in \mathrm{N}\forall n\geq N\ \rho(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

При цьому точка x_0 називають *границею послідовності* $\{x_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

На мові околів збіжність послідовності до x_0 означає, що в довільному околі точки x_0 будуть міститися усі члени послідовності, починаючи з деякого номера. Збіжність послідовності у арифметичному m-вимірному просторі рівносильна покоординатній збіжності, тобто

$$\overline{x}_n=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\ldots,x_i^{(n)},\ldots,x_m^{(n)}\right)\ \underset{n\to\infty}{\overset{IR_2^m}{\longrightarrow}}\ \overline{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_i^{(0)},\ldots,x_m^{(0)})\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i^{(0)}\forall i=1,\ldots,m.$$

Точку x_0 називають *граничною точкою множини* M метричного простору (X,ρ), якщо будь-який її ε-окіл містить хоча б одну точку множини M, відмінну від x_0, тобто $\forall\varepsilon>0\exists x_\varepsilon\in M: x_\varepsilon\subset O_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$.

Множину M, називають *замкненою*, якщо будь-яка її гранична точка належить множині M. Наприклад, для множини $M=(0,1]\bigcup\{2\}$ точка 0 є граничною, але вона не належить множині, тобто M – незамкнена множина.

Точку x_0 називають *внутрішньою точкою множини*, якщо вона належить множині M разом із деяким своїм ε-околом, тобто якщо $\exists\varepsilon>0: O_\varepsilon(x_0)\subset M$.

M^0 – позначення множини внутрішніх точок множини M. Наприклад, для множини $M=(0,1]\bigcup\{2\}$ маємо $M^0=(0,1)$.

Множину M називають *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою, тобто якщо $M=M^0$.

1. Множина $B_r(x_0)$ є відкритою, а множина $B_r[x_0]$ – замкненою в будь-якому метричному просторі.

2. Множина $M = [0,1] \bigcup [2,3] \bigcup \{4\}$ – замкнена в R^1.
3. Множина $M = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge x + y \ge 0\}$ – замкнена в R_2^2 (вона зображена на рис.1.9.).
4. При цьому множина $M_1 = [0,1) \bigcup (2,3] \bigcup \{4\}$ – ні замкнена ні відкрита в R^1, а $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge x + y > 0\}$ – ні замкнена ні відкрита в R_2^2 .

Під *ламаною* розуміють сукупність відрізків таких, що при їх упорядкуванні кінець кожного попереднього відрізку співпадає з початком наступного.

Множину М в R^m називають зв'язною, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною, яка цілком буде лежати всередині множини М.

Множину M називають *зв'язною* в R^m, якщо будь-які дві її точки x і y можна сполучити неперервною лінією, яка цілком лежить всередині цієї множини. Будь-яку відкриту чи замкнену зв'язну множину називають *областю*.

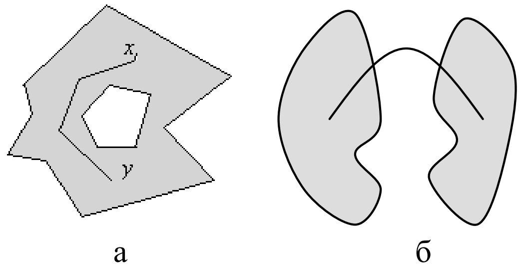


Рис 1.2

На рис 1.2 а зображена зв'язна множина, а на рис. 1.2 б – незв'язна.

1.2 Функції багатьох змінних

Відображення $f : R_2^m \to R^1$ називають числовою *функцією* m *змінних*. Її *областю визначення* називають множину $D(f) = \{\ \bar{x} \in R_2^m : \exists y \in R : f(\bar{x}) = y\}$

Функція m змінних задає поверхню у $m+1$-вимірному просторі (графік функції): $G = \{(\bar{x}, y) \in R^m \times R, y = f(\bar{x})\}$, зокрема, для функції двох змінних графіком буде множина $G = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3, z = f(x, y)\}$. Інтерпретацією графіка функції двох змінних є поверхня в тривимірному просторі. На рис 1.3 зображено графік функції $z = x^2 + y^2$.

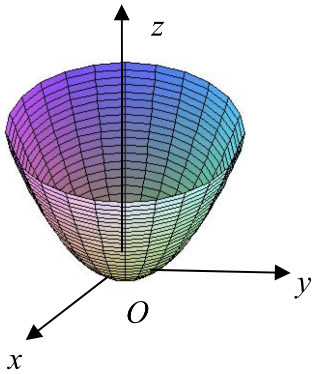


Рис. 1.3

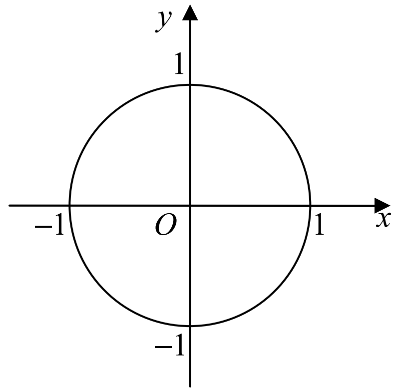


Рис. 1.4

Для визначення вигляду поверхні досліджують криві, які отримують при перетині поверхні площинами, паралельними координатним площинам. Якщо перетинати поверхню площинами $z = const$, на площині XOY отримаємо лінії, в точках яких функція зберігає сталі значення.

Переріз графіка функції $z = f(x, y)$ площиною $z = z_0$ називають *лінією рівня* цієї функції. Частіше під лінією рівня розуміють проекцію зазначеного перерізу. В будь-якому випадку її зображують на площині XOY.

У випадку функцій трьох і більше змінних можна аналогічно ввести поняття *поверхні рівня*, як перерізу графіка функції $z = f(\bar{x})$ площиною $z = z_0$.

Лінією рівня функції $z = x^2 + y^2$ при $z_0 = 1$ в проекції на площину XOY буде коло з центром в точці O радіуса 1 (див. рис. 1.4). На рис. 1.3 різні лінії рівня цієї функції – кола, паралельні площині XOY, розташовані в просторі. Вони роблять рисунок більш наочним. Зокрема, зрозуміло, що при $z_0 < 0$ ліній рівня не існує.

Нехай $\bar{x}_0 \in R^m$ – гранична точка області визначення функції. Число b називають *границею функції* $f(\bar{x})$ *в точці* $\bar{x}_0 \in R^m$ (за Коші), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x} \in D(f)\ 0 < \rho(\overline{x}, \overline{x_0}) < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon .$$

Цю границю називають *кратною* та позначається $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = b$ або $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^{(0)} \\ \cdots \\ x_m \to x_m^{(0)}}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = b$. У випадку функції двох змінних границю називають *подвійною*.

Як і у випадку функції однієї змінної, існує еквівалентне означення границі функції в точці. Число b називають *границею функції* $f(\bar{x})$ *в точці* $\bar{x}_0 \in R^m$ (за Гейне), якщо $\forall \{\bar{x}_n\} \in D(f) \setminus \{\bar{x}_0\}$ $\quad \bar{x}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{R}_2^m}{\longrightarrow}} \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{R}^1}{\longrightarrow}} b$.

Якщо функції $f(\bar{x})\ i\ g(\bar{x})$, що визначені на одній і тій же множині, в точці $\bar{x}_0$ мають границі, що відповідно дорівнюють b і c, то функції $f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})$, $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})$ і $\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ мають в точці $\bar{x}_0$ границі $b \pm c$, $b \cdot c$ і $\dfrac{b}{c}$, відповідно (у випадку частки – накладається додаткова умова: $c \neq 0$).

Зауважимо, що можна означати границю функції за однією змінною при фіксованому значенні іншої змінної. Такі границі називають повторними. Якщо існує $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y - fix}} f(x, y) = \phi(y)$ та існує $\lim\limits_{y \to y_0} \phi(y) = b$, тоді говорять, що в точці (x_0, y_0) існує повторна границя функції: $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = b$. Аналогічно означається $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.

Існує зв'язок між існуванням подвійних та повторних границь функції. Якщо в точці (x_0, y_0) існує подвійна границя функції $f(x,y)$ та при всіх x існує $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ і при всіх y існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, тоді обидві повторні границі існують та дорівнюють подвійній границі:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Якщо ж повторні границі існують, але не дорівнюють одна одній, подвійна границя не існує.

Нехай тепер точка $\bar{x}_0$ належить області визначення функції та є для неї граничною. Функцію $f(\bar{x})$ *називають неперервною в точці* $\bar{x}_0 \in \mathrm{R}_2^m$, якщо існує $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$. Якщо функція неперервна в кожній точці множини $M \subset \mathrm{R}_2^m$, то кажуть, що вона неперервна на цій множині. Якщо дві функції $f(\bar{x})$ *і* $g(\bar{x})$, що визначені на одній і тій же множині $M \subset \mathrm{R}_2^m$, неперервні в точці $\bar{x}_0 \in M$, то функції $f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})$, $f(\bar{x})\cdot g(\bar{x})$ і $f(\bar{x})/g(\bar{x})$ неперервні в точці $\bar{x}_0$ (у випадку частки $g(\bar{x}_0)\neq 0$).

Нагадаємо поняття складеної функції багатьох змінних. Нехай функція g переводить деяку множину $E_1 \subset R^m$ в множину $E \subset R^n$ за правилом $\bar{x} = \bar{g}(\bar{t})$, тобто $(x_1, x_2, ..., x_n) = \big(g_1(t_1,t_2,...,t_m), g_2(t_1,t_2,...,t_m), ..., g_n(t_1,t_2,...,t_m)\big)$, а функція $f(\bar{x})$ переводить $E \subset R^n$ в R^1. Тоді *складеною* називають функцію $\phi(\bar{t}) = f(\bar{g}(\bar{t}))$, яка переводить множину $E_1 \subset R^m$ в R^1:

$$\varphi(\bar{t}) = f\big(g_1(t_1,t_2,...,t_m), g_2(t_1,t_2,...,t_m), ..., g_n(t_1,t_2,...,t_m)\big).$$

Зауважимо, що якщо функція $\bar{g}(\bar{t})$, що переводить множину $E_1 \subset \mathrm{R}_2^m$ в множину $E \subset \mathrm{R}_2^n$, неперервна на E_1 (тобто неперервною на E_1 є кожна з функцій-координат $g_i(t_1,t_2,...,t_m), i=1,...,n$), а функція $f(\bar{x})$, що переводить $E \subset \mathrm{R}_2^n$ в R^1, неперервна на E, тоді складена функція $\varphi(\bar{t}) = f(\bar{g}(\bar{t}))$ є неперервною на $E_1 \subset \mathrm{R}_2^m$.

1.3 Диференціальне числення функцій багатьох змінних

1.3.1 Частинні похідні та диференційовність функції

Нехай функція $f(\bar{x})$ задана на області $E \subset \mathrm{R}_2^m$, а $\bar{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ – внутрішня точка E і Δx_i – такий приріст аргументу x_i, що точка $(x_1^{(0)}, .., x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_i^{(0)}, ..., x_m^{(0)})$ залишається всередині множини E. *Частинним* *приростом* цієї функції в точці $\overline{x}_0$ за змінною x_i називають величину $\Delta_i f(\overline{x}_0) = f(x_1^{(0)},..,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i, x_{i+1}^{(0)},...,x_m^{(0)}) - f(x_1^{(0)},...,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)},...,x_m^{(0)})$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0}\dfrac{\Delta_i f(\overline{x}_0)}{\Delta x_i}$, тоді її називають *частинною похідною* функції $f(\overline{x})$ в точці $\overline{x}_0$ за змінною x_i. Позначення $\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i}$ або $f'_{x_i}(\overline{x}_0)$ ($i \in \{1,...m\}$).

Зауважимо, що для функції багатьох змінних існування усіх частинних похідних за усіма змінними не забезпечує неперервність функції $f(\overline{x})$ в т. x_0.

Нехай функція $f(\overline{x})$ задана на області $E \subset R_2^m$, $\overline{x}_0 = (x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_m^{(0)})$ – внутрішня точка E і Δx_i – такі прирости аргументів x_i ($i=1,...,m$), що $(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}+\Delta x_2,...,x_m^{(0)}+\Delta x_m) \in E$. Функцію f називають диференційовною в точці $\overline{x}_0$, якщо її повний приріст можна подати у вигляді:

$$\Delta f(\overline{x}_0) = f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}+\Delta x_2,...,x_m^{(0)}+\Delta x_m) - f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_m^{(0)}) =$$
$$= A_1\cdot\Delta x_1 + ... + A_i\cdot\Delta x_i + ... + A_m\cdot\Delta x_m + \alpha_1\cdot\Delta x_1 + ... + \alpha_i\cdot\Delta x_i + ... + \alpha_m\cdot\Delta x_m,$$

де $A_1, A_2,...,A_i,...,A_m = const$, $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1,...,\Delta x_m)$ – нескінченно малі функції при $\Delta x_1 \to 0,...,\Delta x_m \to 0$, які дорівнюють нулю при $\Delta x_1 = 0,...,\Delta x_m = 0$.

Головну лінійну відносно приростів аргументів частину приросту функції в умові диференційовності називають диференціалом цієї функції в точці $\overline{x}_0$ та позначається $df(\overline{x}_0)$, тобто

$df(\overline{x}_0) = A_i dx_1 + A_2 dx_2 + ... + A_m dx_m$ де $dx_i = \Delta x_i \forall i = 1,...,m$.

Крім того, в умові диференційовності $\alpha_i\cdot\Delta x_i + ... + \alpha_m\cdot\Delta x_m = o(\rho)$, де $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2}$.

Якщо функція $f(\overline{x})$ диференційовна в точці $\overline{x}$, вона має в цій точці частинні похідні за кожною із змінних, причому $A_i = \dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} \forall i = 1,...,m$. З цього випливає, що приріст диференційовної функції можна записати у вигляді

$$\Delta f(\overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)\cdot\Delta x_i + o(\rho).$$

Відповідно, формула для обчислення диференціалу буде мати вигляд:

$$df(\overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_0)\cdot dx_i.$$

Теорема 1.1 *(необхідна умова диференційовності функції в точці).* Якщо функція $f(\overline{x})$ диференційовна в точці $\overline{x}$, то вона в цій точці має частинні похідні за кожною із змінних: $A_i = \dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} \forall i = 1,...,m$.

Теорема 1.2 *(достатня умова диференційовності функції в точці).* Якщо функція $f(\overline{x})$ має частинні похідні за кожною із змінних в деякому околі точці $\overline{x}_0$ і ці частинні похідні неперервні в цій точці, то вона в цій точці диференційовна.

Існування усіх частинних похідних функції в точці ще не гарантує її неперервності в цій точці, але якщо функція $f(\overline{x})$ диференційовна в точці $\overline{x}_0$, то вона в цій точці неперервна.

Наведемо формули частинних похідних складеної функції $\varphi(\bar{t}) = f(g_1(t_1,t_2,...,t_m), g_2(t_1,t_2,...,t_m),..., g_n(t_1,t_2,...,t_m))$, яка буде диференційовною за умови диференційовності функцій $g_i(t_1,t_2,...,t_m), i = 1,2,...,m$ в точці $\overline{t}_0 = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)},...,t_m^{(0)})$ та диференційовності функції $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2,...,x_n)$ в точці $\overline{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$, де $x_j^{(0)} = g_j(\bar{t}_0)$:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_1}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} + ... + \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} + ... + \left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_m}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right|_{\bar{t}_0} \qquad \forall\, j = \overline{1,m}.$$

1.3.2 Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Частинні похідні вищих порядків означаються індуктивно. Якщо, наприклад, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ існує в деякому околі точки (x_0, y_0), то *частинною похідною другого порядку* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ називають похідну за змінною x від похідної $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0)$.

Аналогічно означаються частинні похідні другого порядку за іншою комбінацією змінних у припущенні про існування відповідних частинних похідних першого порядку в деякому околі точки (x_0, y_0):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Якщо існує $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_1}}(\overline{x})$ в деякому околі точки $\overline{x}_0$, то частинна похідна n-ого порядку визначається таким чином:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_1}} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_1}}\right).$$

Якщо не усі індекси співпадають, то таку похідну називають *мішаною.*

Теорема 1.3 (*теорема Шварца*). Якщо однойменні мішані похідні функції $f(\overline{x})$ існують в деякому околі точки $\overline{x}_0$ і неперервні в цій точці, то вони в цій точці співпадають.

Функцію $f(\overline{x})$ будемо називати *n раз диференційовною в точці* $\overline{x}_0$, якщо усі її частинні похідні $(n-1)$-го порядку диференційовні в цій точці.

Теорема 1.4 *(достатні умови диференційовності функції n разів в т. $\overline{x}_0$)*. Якщо

1) функція $f(\overline{x})$ має частинні похідні до n-го порядку включно в околі точки $\overline{x}_0$;
2) ці частинні похідні n-ого порядку неперервні в т. $\overline{x}_0$, тоді функція $f(\overline{x})$ n разів диференційовна в т. $\overline{x}_0$

Зауважимо, що зазначені в теоремі умови (за теоремою Шварца) гарантують рівність усіх мішаних однойменних похідних в точці.

Якщо функція $f(\overline{x})$ n разів диференційовна в точці $\overline{x}_0$, її *n-й диференціал* визначається формулою

$$d^n f\Big|_{\overline{x}_0} \overset{def}{=} d(d^{n-1} f)\Big|_{\overline{x}_0}.$$

Якщо x, y – незалежні змінні, тоді диференціал другого порядку функції цих змінних має вигляд:

$$d^2 f = d(df) = \frac{d^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{d^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 = \left(\frac{\partial \circ}{\partial x} dx + \frac{\partial \circ}{\partial y} dy\right)^2 f.$$

Цей вираз є формальним, його можна узагальнити на випадок n-го диференціала:

$$d^n f = \left(\frac{\partial \circ}{\partial x} dx + \frac{\partial \circ}{\partial y} dy\right)^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} (dx)^k (dy)^{n-k}.$$

Узагальнимо отримане на випадок функцій багатьох (більше, як двох) змінних. Якщо аргументи функції незалежні, тоді

$$d^n f = = \left(\frac{\partial \circ}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \circ}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \circ}{\partial x_m} dx_m\right)^n f.$$

Зауважимо, що форма вищих диференціалів функції багатьох змінних, на відміну від диференціалів першого порядку, у загальному випадку неінваріантна, оскільки змінює свою форму у випадку, коли змінні $x_i (i = 1, \ldots, m)$ не є незалежними. Наприклад, диференціал другого порядку складеної функції двох змінних має вигляд:

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y.$$

1.3.3 Геометричний зміст диференційовності

Площину Π, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхні, називають *дотичною площиною* в цій точці, якщо кут між цією площиною і січною, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і будь-яку точку $M(x, y, z)$ поверхні, прямує до нуля, коли M прямує до M_0 вздовж поверхні (див. рис. 1.5).

Теорема 1.5 Функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці (x_0, y_0) тоді і лише тоді, коли графік поверхні, який визначається цією функцією, має в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) дотичну площину. Рівняння цієї площини Π визначається формулою

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

а *рівняння нормалі* n до неї в точці M_0 – формулою

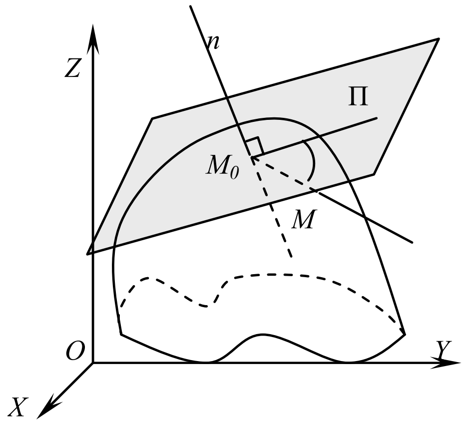


Рис. 1.5

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

1.3.4 Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена у деякій відкритій області, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить цій області, а пряма l, що проходить через цю точку задає деякий напрямок. Якщо $M(x, y, z) \in l$, тоді M_0M – довжина відрізка, що сполучає точки M_0 *і* M, яка береться із знаком „+”, якщо напрямок M_0M збігається із напрямком прямої l і „–” – у протилежному випадку. Границю $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M_0) - f(M)}{M_0M}$ називають *похідною від функції* f *за напрямком* l і позначається $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}$.

Формула для обчислення похідної за напрямком від диференційовної функції $u = f(x, y, z)$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляючі косинуси напрямку l.

Вектор $\overline{grad}\ f(M_0) = \left(\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0} \right)$ називають *градієнтом* функції f в точці M_0. Він вказує напрямок найшвидшого росту функції в цій точці.

Зрозуміло, що формулу похідної за напрямком можна записати через скалярний добуток градієнта функції f в точці M_0 та одиничного вектора $\overline{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ напрямку l: $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\left(\overline{grad}\ f(M_0),\overline{e}\right)$.

1.3.5 Формула Тейлора функції багатьох змінних

Нехай функція двох змінних $f(x,y)$ має в деякому околі точки (x_0,y_0) неперервні частинні похідні до $n+1$-го порядку включно, тоді в цьому околі має місце формула Тейлора:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}d^i f(x_0,y_0)+R_n(x_0,y_0),$$

де $R_n(x_0,y_0)=\dfrac{1}{n!}d^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$ – залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа, $h=x-x_0, k=y-y_0, 0<\theta<1$. Насправді, $R_n(x_0,y_0)=o(\rho^n)$, де $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.

1.3.6 Локальний екстремум функції багатьох змінних

Точку $\overline{x}_0$ називають *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції $f(\overline{x})$, якщо існує такий окіл цієї точки, в межах якого значення функції $f(\overline{x}_0)$ – найбільше (найменше) серед усіх інших значень функції, тобто
$\overline{x}_0$ – loc max (min) функції $f(\overline{x})$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow}\quad \exists\delta>0\forall\overline{x}\in O_\delta(\overline{x}_0)\ f(\overline{x})\le f(\overline{x}_0)\left(f(\overline{x})\ge f(\overline{x}_0)\right).$$

Якщо $\exists\delta>0\forall\overline{x}\in O_\delta(\overline{x}_0)\ f(\overline{x})<f(\overline{x}_0)\left(f(\overline{x})>f(\overline{x}_0)\right)$, то x_0 називають точкою нестрогого локального максимуму (локального мінімуму).

Наприклад, оскільки функція $z=(x-2)^2+\left(y-3\right)^2$ невід'ємна, тобто $z\ge 0$, то, розглянувши точку $M\left(2{,}3\right)$, отримаємо $z(M)=0\ge z(x,y)$. Це означає, що ця точка $M\left(2{,}3\right)$ є точкою локального мінімуму. Нехай $(x,y)\ne\left(2{,}3\right)$, тоді $z(x,y)>z(M)\Rightarrow M$ – точка строгого $loc\min$.

Розглянемо функцію $z=(x-y)^2$. Будь яка точка $M(x_0,x_0)$, що лежить на прямій $x=y$, є точкою локального мінімуму. Розглянемо точку $M_1\left(x_0+\dfrac{\delta}{2},x_0+\dfrac{\delta}{2}\right)$ із δ - околу точки $M(x_0,x_0)$. В цій точці $z(M_1)=z(M)$, тому M – точка нестрогого $loc\min$.

Точки локального максимуму і мінімуму називають *точками локального екстремуму* функції.

Теорема 1.6 *(необхідна умова локального екстремуму).* Якщо функція $f(\overline{x})$ в точці $\overline{x}_0$ має локальний екстремум, і в цій точці існують скінченні частинні похідні, то всі вони дорівнюють нулю.

Точки, в яких виконується необхідна умова екстремуму, є лише *підозрілими на екстремум* точками (*стаціонарними або критичними*). Для того, щоб впевнитися в тому, що ці точки дійсно є точками екстремуму, необхідно ще перевірити достатню умову екстремуму.

Для цього в припущенні про двічі диференційовність функції в стаціонарній точці потрібно побудувати другий диференціал функції:

$$d^2 f(\overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} dx_i dx_j \text{ , де } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\overline{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1,...,m).$$

Він являє собою квадратичну форму. Кажуть, що квадратична форма додатно (від'ємно) визначена, якщо для всіх значень dx_k, які водночас не дорівнюють нулю, вона набуває строго додатних (від'ємні) значень (k=1*,…,m)*.

Із курсу алгебри відомо, що для відповіді на питання про *знак квадратичної форми* застосовують критерій Сильвестра. Для цього спочатку утворюють матрицю квадратичної форми і обчислюють її головні мінори:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix};$$

$$A_1 = a_{11}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; ...; A_m = \det A .$$

Теорема 1.7 *(критерій Сильвестра).* Для того, щоб квадратична форма була додатно (від'ємно) визначеною необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її матриці були додатні (знакопочережні, починаючи з від'ємного знаку), тобто

для додатно визначеної: $A_1 > 0; A_2 > 0; A_3 > 0; ...; A_m > 0;$

для від'ємно визначеної: $A_1 < 0; A_2 > 0; A_3 < 0; A_4 > 0; ...$.

Теорема 1.8 *(достатня умова локального екстремуму).* Якщо двічі диференційовна функція $f(\overline{x})$ в стаціонарній точці $\overline{x}_0$ (тобто в такій точці, що $df(\overline{x}_0) = 0$) має другий диференціал, який є

а) додатно визначеною квадратичною формою, то $\overline{x}_0$ – точка *мінімуму*,

б) від'ємно визначеною квадратичною формою, то $\overline{x}_0$ – точка *максимуму*,

в) знакозмінною квадратичною формою, то в точці $\overline{x}_0$ *відсутній екстремум*.

Зауважимо, що до точок, підозрілих на екстремум, належать також і ті, в яких частинні похідні першого порядку не існують.

Для функції двох змінних достатню умову екстремуму сформулюємо окремо.

Теорема 1.9 *(достатні умови локального екстремуму функції двох змінних)***.** Якщо функція $z = f(x, y)$ двічі диференційовна в деякому околі точки (x_0, y_0), і в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю,

то за умови $\Delta = AC - B^2 \neq 0$, де $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, в точці (x_0, y_0) маємо а) *мінімум*, якщо $A > 0 \wedge \Delta > 0$,

б) *максимум*, якщо $A < 0 \wedge \Delta > 0$,

в) *відсутність екстремуму*, якщо $\Delta < 0$.

Якщо $\Delta = 0$, то потрібне додаткове дослідження із застосуванням означень локальних екстремумів.

1.4 Неявні функції

1.4.1 Умовний екстремум

Іноді потрібно знаходити екстремуми функції за якихось умов.

1 випадок. Умова задається одним рівнянням, з якого одну із змінних можна виразити через інші, тоді, підставляючи отриманий вираз в задану функцію, отримаємо задачу на звичайний локальний екстремум.

Якщо умова виражається рівнянням $F\left(u, x_1, \ldots, x_m\right) = 0$, тоді існування функції, що задана неявно, забезпечується наступною теоремою.

Теорема 1.10 Якщо функція $F\left(u, x_1, \ldots, x_m\right)$ диференційовна в деякому околі точки $M_0(u^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial u}$ неперервна в точці M_0 та $\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) \neq 0$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ існує такий окіл точки $M_0^*(x_1^0, ..., x_m^0)$, в межах якого існує єдиний розв'язок $u = \varphi\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ рівняння $F\left(u, x_1, \ldots, x_m\right) = 0$, такий, що $\left|u - u^0\right| < \varepsilon$, причому функція $\varphi\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ неперервна та диференційовна в цьому околі.

В умовах цієї теореми формула для обчислення частинних похідних від функції $\varphi\left(x_1, \ldots, x_m\right)$ має вигляд: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial u}$. Її легко отримати за допомогою диференціювання рівності $F\left(u, x_1, \ldots, x_m\right) = 0$, враховуючи, що F – складена функція.

2 випадок. Розглянемо систему, що задає умови:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Визначник $\left.\dfrac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{M_0} = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}\right|_{M_0}$ називають *якобіаном.*

Теорема 1.11 Нехай усі функції $F_i(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n), i=1,...,n$ диференційовні в деякому околі точки $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0\ldots,y_m^0)$, частинні похідні $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_i}, i,j=\overline{1,n}$ неперервні в точці M_0 та $\left.\dfrac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{M_0}\neq 0$. Тоді $\forall \varepsilon_1,...,\varepsilon_n>0$ існує такий окіл точки $M^*{}_0(x_1^0,...,x_m^0)$, в якому існує єдиний розв'язок $\begin{cases} y_1=\phi_1(x_1,\ldots,x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=\phi_n(x_1,\ldots,x_m) \end{cases}$ системи рівнянь (*), такий, що $\left|y_1-y_1^0\right|<\varepsilon_1,...,\left|y_n-y_n^0\right|<\varepsilon_n$, причому функції $\varphi_i(x_1,\ldots,x_m), i=\overline{1,n}$ - неперервні та диференційовні в околі точки M_0^*.

Кажуть, що функція $u=f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ має умовний екстремум в точці $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0\ldots,y_n^0)$ за умов (*), якщо координати цієї точки задовольняють умови (*) і значення функції $f(M_0)$ буде найбільшим (найменшим) серед усіх значень в точках, координати яких задовольняють (*).

Існує декілька способів дослідити функцію $m+n$ змінних $u=f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ на умовний екстремум. Іноді вдається в умовах теореми 1.11 розв'язати систему (*) відносно змінних $y_1,\ldots,y_n$, підставити отримані функції в задану функцію та отримати складену функцію m змінних:

$$u=f\left(x_1,\ldots,x_m,\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_m)\right).$$

Цю функцію досліджують на локальний екстремум. Якщо екстремумом цієї функції є точка $A_0\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right)$, тоді умовним екстремумом стане точка

$$M_0\left(x_1^0,\ldots,x_m^0,\varphi_1\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right),\ldots,\varphi_n\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right)\right).$$

Але цей спосіб іноді важко реалізувати, оскільки не завжди можливо розв'язати систему (*). Зручнішим є метод невизначених множників Лагранжа. Утворюють допоміжну функцію Лагранжа, в якій $\lambda_i (i=1,...,n)$ – константи:

$$L(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=f(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i\ (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n).$$

Цю функцію досліджують на локальний екстремум, як функцію $m+2n$ змінних. Знаходять підозрілі на екстремум точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0 & j = \overline{1,m} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial F}{\partial y_i} = 0 & i = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{ik} F_i = F_k = 0 & k = \overline{1,n} \end{cases}$$

Ця система містить $m+n+n$ рівнянь з тією ж кількістю невідомих $\{x_j\}_{j=1}^{m}, \{y_l\}_{i=1}^{n}, \{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$. Якщо точка $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0\ldots,y_m^0)$ і коефіцієнти $\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots,\lambda_m^0$ є одним із розв'язків цієї системи, то для того, щоб відповісти на запитання про те, чи буде умовним екстремумом точка M_0, потрібно скласти другий диференціал $d^2\Phi(M_0)$, і визначити знак цього диференціала, маючи на увазі, що змінні $dx_1,\ldots,dx_m,dy_1,\ldots,dy_n$ пов'язані співвідношеннями:

$$dF_1(M_0) = 0,\ldots,dF_n(M_0) = 0,$$

тобто $\left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}\bigg|_{M_0} dx_j + \sum\limits_{l=1}^{m} \dfrac{\partial F}{\partial y_i}\bigg|_{M_0} dy_l, \qquad i = \overline{1,n}. \right.$

Ця система є лінійною відносно змінних $dx_1,\ldots,dx_m,dy_1,\ldots,dy_n$, а її визначник дорівнює якобіану, який не дорівнює нулю, тому система може бути розв'язаною відносно $dy_1,\ldots,dy_n$. Ці розв'язки підставляємо в другий диференціал, після чого застосовуємо до отриманого диференціала $d^2L(M_0)$ критерій Сильвестра.

1.4.2 Абсолютний екстремум

Відомо, що якщо функція неперервна на замкненій обмеженій множині, тоді вона обмежена на цій множині та досягає на ній своїх супремуму та інфімуму. Отже, функція $f(\overline{x})$, диференційовна в обмеженій і замкненій області, досягає свого найбільшого і найменшого значень (абсолютного екстремуму) в цій області. Зауважимо, що ці значення вона приймає або у внутрішніх стаціонарних точках, або в межових точках області. Це дає можливість сформулювати алгоритм пошуку абсолютного екстремуму:

1) знайти стаціонарні точки функції $f(\overline{x})$ і ті точки, в яких частинні похідні не існують, та вибрати з них ті, які належать області;
2) *1 спосіб* пошуку стаціонарних точок на межі області: записати функції Лагранжа з врахуванням умов, що описують рівняння межі області, і знайти їх критичні точки, серед яких відкинути ті, що не належать межі області;

   2 спосіб пошуку стаціонарних точок на межі області:

   а) якщо це можливо, виразити деякі змінні з рівнянь межі через інші незалежні змінні;

б) підставити вирази для залежних змінних у вираз для функції $f(\bar{x})$ та отримати нову функцію, яка виражається через незалежні змінні;

в) для нової функції знайти стаціонарні точки, серед яких залишити лише ті, що належать межі області;

4) додати до розгляду крайові точки перетину кривих (поверхонь) області;
5) знайти значення функції у всіх знайдених стаціонарних точках області, межі і в крайових точках, щоб обрати серед них найбільше і найменше значення.

1.5 Питання для самоконтролю

1. Навести означення метрики та метричного простору. Описати $m-$вимірний евклідовий простір.
2. Навести означення відкритої та замкненої кулі, сфери, намалювати їх у двовимірному просторі.
3. Навести означення граничної, внутрішньої, граничної, ізольованої, межової точки.
4. Сформулювати означення замикання множини, відкритих та замкнених множин, навести приклади таких множин.
5. Сформулювати означення збіжної послідовності у метричному просторі та навести критерій збіжності.
6. Навести означення зв’язної множини та області.
7. Дати еквівалентні означення границі функції багатьох змінних.
8. Навести означення повторної границі функції двох змінних та подвійної. Пояснити, який зв’язок між ними існує.
9. Навести означення неперервності функції багатьох змінних. Пояснити, що таке неперервність за однією змінною.
10. Пояснити, що таке складена функція багатьох змінних та сформулювати теорему про її неперервність.
11. Навести основні теореми про властивості неперервних функцій.
12. Дати означення рівномірно неперервної функції багатьох змінних та сформулювати теорему Кантора.
13. Навести означення частинної похідної.
14. Дати два означення диференційовності функції багатьох змінних в точці та довести їх еквівалентність.
15. Сформулювати необхідну та достатню умови диференційовності функції багатьох змінних.
16. Означення дотичної площини до поверхні в тривимірному евклідовому просторі.
17. Сформулювати теорему про геометричний зміст диференційовності функції двох змінних. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.
18. Записати формули для обчислення частинних похідних складеної функції.
19. Дати означення повного диференціала та пояснити його інваріантність.
20. Означити похідні і диференціали вищих порядків.
21. Встановити зв’язок між змішаними частинними похідними.
22. Пояснити неінваріантість форми диференціала другого порядку. та випадок його інваріантності.
23. Дати означення похідні за напрямком, градієнта.

24. Записати формулу Тейлора функції багатьох змінних.
25. Навести означення точок локального екстремуму.
26. Сформулювати та довести необхідну умова екстремуму функції багатьох змінних.
27. Сформулювати достатні умови екстремуму функції двох та багатьох змінних.
28. Достатні умови екстремуму функції багатьох змінних (загальний випадок).
29. Дати означення умовного екстремуму функції та описати алгоритм дослідження на умовний екстремум.
30. Пояснити поняття абсолютного екстремуму функції багатьох змінних.

2 МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕМИ «ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

Задача 2.1 Знайти область визначення функції
$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\ln\left(1+\sqrt{x+y}\right)$ і зобразити її на координатній площині.

Розв'язання. Множина визначення даної функції двох змінних визначається системою нерівностей

$$\begin{cases}1-x^2-y^2\ge 0\\ 1+\sqrt{x+y}>0\\ x+y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x+y\ge 0\end{cases}.$$

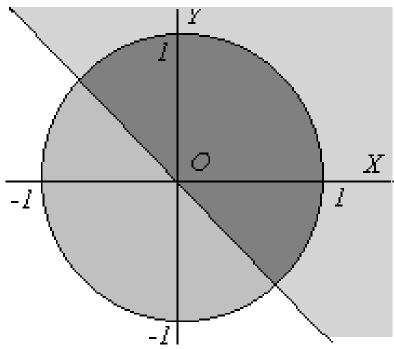


Рис. 2.1

Таким чином, область визначення задається геометричним місцем точок, що зображені на рис. 2.1. Ця множина є замкненою, зв'язною, обмеженою, тому є областю. ■

Задача 2.2 Знайти область визначення функцій

а) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos(x^2+y^2)}}$; **б)** $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. а) Область визначення – це множина точок площини, які задовольняють нерівність $\cos(x^2+y^2)>0$. Розв'яжемо її:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x^2+y^2<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in \mathrm{N}\bigcup\{0\},$$

тоді

$n=0: x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2}$ – це відкрите коло з центром у початку координат,

$n=1: \dfrac{3\pi}{2}<x^2+y^2<\dfrac{5\pi}{2}$ – це відкрите кільце,

$n=2,..3,.-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ – це сукупність відкритих концентричних кілець.

Зауважимо, що область визначення не є областю, оскільки незв'язна. ■

б) Зрозуміло, що така функція буде визначеною, якщо $x^2 + y^2 \neq 0$, тобто на всіх точках площини XOY за винятком точки $(0{,}0)$. ■

Задача 2.3 Побудувати лінії рівня функції $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, що відповідають числам $z_1 = \dfrac{1}{2}$, $z_2 = 0$, $z_3 = \dfrac{1}{4}$.

Розв'язання. Коли $z_1 = \dfrac{1}{2}$, маємо рівняння $\dfrac{1}{2} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ або $x^2 + y^2 = 2xy$. Це рівняння легко набуває вигляду $(x - y)^2 = 0$ або $x = y$, тобто є рівнянням бісектриси I та III координатних кутів. Але треба ще врахувати, що точка $(0{,}0)$ не належить області визначення функції.

Коли $z_2 = 0$, маємо рівняння $0 = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ або $xy = 0$ (за умови $x^2 + y^2 \neq 0$). Можливі два випадки: або $x = 0$, або $y = 0$, але неодночасно. Значить, лініями рівня у даному випадку будуть координатні осі за винятком точки початку координат.

Коли $z_3 = \dfrac{1}{4}$, маємо рівняння $\dfrac{1}{4} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ або $x^2 + y^2 = 4xy$. Це рівняння легко набуває вигляду $(y - 2x)^2 = 3x^2$ або $y - 2x = \pm\sqrt{3}x$. Таким чином, отримуємо рівняння двох прямих $y = (2 \pm \sqrt{3})x$, які проходять через початок координат. Знову враховуємо, що точка $(0{,}0)$ не належить області визначення функції (рис. 2.2-2.4). ■

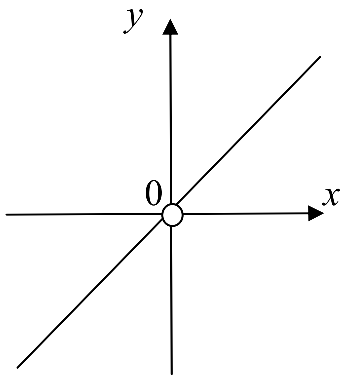


Рис.2.2 Лінія рівня $z_1 = 1/2$

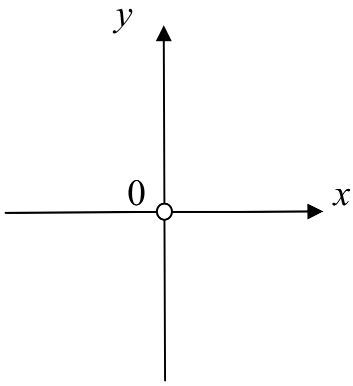


Рис.2.3 Лінія рівня $z_2 = 0$

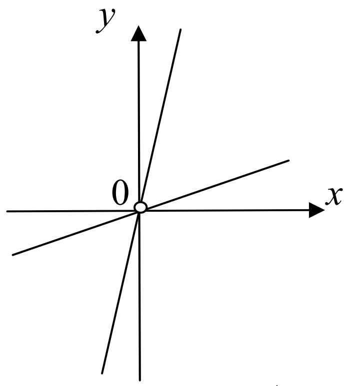


Рис.2.4 Лінія рівня $z_3 = 1/4$

Задача 2.4 Знайти повторні границі функції $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0), або довести, що вони не існують, якщо:

а) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1 + x^y}, \quad x_0 = \infty;\ y_0 = +0$;

б) $f(x,y) = \log_x(x + y), \quad x_0 = 1;\ y_0 = 0$;

в) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{\cos x-1}$, $x_0=1; y_0=1$;

г) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}$, $x_0=0; y_0=0$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y-fix, y>0}}\dfrac{x^y}{1+x^y}=1\Rightarrow\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}=1$;

$$\lim\limits_{\substack{y\to+0\\ x-fix}}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{2}.$$

Звідки, зокрема, отримуємо, що подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to+0}}\dfrac{x^y}{1+x^y}$ не існує. ■

б) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y-fix}}\log_x(x+y)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y-fix}}\dfrac{\ln(x+y)}{\ln x}=\left\|\dfrac{const}{0}\right\|=\infty\;\Rightarrow\;\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to1}\log_x(x+y)=\infty$;

$$\lim\limits_{\substack{y\to0\\ x-fix}}\log_x(x+y)=\lim\limits_{\substack{y\to0\\ x-fix}}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\frac{\ln x}{\ln x}=1\;\Rightarrow\;\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to+0}\log_x(x+y)=1.$$

Звідки також випливає, що подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\log_x(x+y)$ не існує. ■

в) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y-fix}}\dfrac{x-y}{\cos x-1}=\dfrac{1-y}{\cos1-1}\Rightarrow\lim\limits_{y\to1}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-y}{\cos x-1}=\dfrac{1-1}{\cos1-1}=0.$

$$\lim\limits_{\substack{y\to1\\ x\ne2\pi n,\\ n\in Z}}\frac{x-y}{\cos x-1}=\frac{x-1}{\cos x-1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to1}\frac{x-y}{\cos x-1}=\frac{1-1}{\cos1-1}=0.\ ■$$

г) Зрозуміло, що $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\ne0}}\sin\dfrac{x}{y}=0$, тобто $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{x}{y}=0$ – одна повторна границя існує. Нехай тепер $x\ne0$. Доведемо, що за такої умови $\lim\limits_{y\to0}\sin\dfrac{x}{y}$ не існує. Дійсно, виберемо 2 послідовності $y'_n=\dfrac{x}{2\pi n}$, $y''_n=\dfrac{x}{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n}$, які прямують до нуля. Якщо б функція $f(x,y)$ мала границю в точці $(x,0)$, тоді, за означенням границі функції за Гейне, послідовності $f(x,y'_n), f(x,y''_n)$ мали б збігатися до одного числа. Але $f(x,y'_n)=\sin2\pi n\to0$, а $f(x,y''_n)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\to1$. З цього випливає, що повторна границя $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\sin\dfrac{x}{y}$ не існує. ■

Задача 2.5 Знайти подвійну границю або довести, що вона не існує:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{tg(xy)}{x}$; **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x)^{\frac{1}{y}}$; **в)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; **г)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. а) Зробимо елементарні перетворення і скористаємося теоремою про арифметичні операції над границями

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{tg(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{tg(xy)}{xy}y=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{tg(xy)}{xy}\lim_{y\to 0}y.$$

Для першого множника $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{tg(xy)}{xy}$ заміна $t=xy$ приводить до границі $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{tg(t)}{t}=1$, а для другого, очевидно, – $\lim\limits_{y\to 0}y=0$, тому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{tg(xy)}{x}=0$. ■

б) Розглянемо дві пари послідовностей, які прямують до нуля: $x_n'=y_n'=\dfrac{1}{n}$, $x_n''=\dfrac{y_n''}{2}=\dfrac{1}{n}$. Але $\lim\limits_{\substack{x_n'\to 0\\ y_n'\to 0}}(1+x_n')^{\frac{1}{y_n'}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, а $\lim\limits_{\substack{x_n''\to 0\\ y_n''\to 0}}(1+x_n'')^{\frac{1}{y_n''}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

Отже, поведінка функції $(1+x)^{\frac{1}{y}}$ в околі точки $(0,0)$ залежить від того, як саме точки (x,y) прямують до точки $(0,0)$. Це означає, що подвійна границя не існує. ■

в) Нехай $x_n'=y_n'=\dfrac{1}{n}$, тоді $(x_n',y_n')=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n'y_n'}{x_n'^2+y_n'^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^2}{2/n^2}=\dfrac{1}{2}$. Тепер нехай $x_n''=\dfrac{y_n''}{2}=\dfrac{1}{n}$, тоді $(x_n'',y_n'')=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n''y_n''}{x_n''^2+y_n''^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2/n^2}{5/n^2}=\dfrac{2}{5}$. Згідно означення за Гейне, поведінка функції в околі точки $(0,0)$ не повинна залежати від того, за яким напрямком послідовність прямує до цієї точки. В даному прикладі цей факт місця не має, тому подвійна границя не існує. ■

г) З нерівності $(|x|-|y|)^2\ge 0$ випливає, що $0\le\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{2}$, тому отримаємо оцінку $0\le\dfrac{\left|x^2y^2\right|}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{2}|xy|$. Якщо $x\to 0\wedge y\to 0$, тоді за принципом двосторонньої обмеженості, маємо:

$$0 \le \frac{\left|x^2 y^2\right|}{x^2 + y^2} \le \frac{1}{2} |\, xy \,|$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow . \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Останнє виконується незалежно від напрямку прагнення точок (x, y) до точки $(0{,}0)$. Це означає, що подвійна границя існує: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$ ■

Задача 2.6 Дослідити функцію на неперервність в точці $(0{,}0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x \ne 0\,, y \ne 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. З 2.5 г) відомо, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0{,}0)$, тобто функція буде неперервною в точці $(0{,}0)$. Зрозуміло, що у всіх інших точках вона також буде неперервною як частка двох неперервних функцій. ■

Задача 2.7 Дослідити на неперервність функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x \ne 0 \; i \; y \ne 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Як було отримано в 2.5 в), ця функція в точці $(0{,}0)$ не має границі, тому в цій точці вона розривна. У всіх інших точках (x_0, y_0), де $x_0 \ne 0$ або $y_0 \ne 0$, функція $f(x, y)$ неперервна, оскільки

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x_0 y_0}{x_0{}^2 + y_0{}^2} = f(x_0, y_0)\,.$$

Отже, задана функція за сукупністю змінних x і y неперервна на всій площині, крім точки (0,0).

В той же час ця функція неперервна в точці (0,0) окремо за змінною x і за змінною y. Покажемо неперервність за змінною x:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y-fix}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} \dfrac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0 = f(0, y), \textit{якщо } y \ne 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0 = f(0{,}0), \textit{якщо } y = 0 \end{cases} = f(0, y).$$

Неперервність за змінною y перевіряється аналогічно. ■

Наведений приклад свідчить про те, що функція, яка неперервна за кожною змінною в деякій точці, не обов'язково буде неперервною за сукупністю змінних в цій точці.

Задача 2.8 Перевірити функцію $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ на диференційовність в точці $O(0,0)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні функції в точці $O(0,0)$ за означенням:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+0^3}-0}{\Delta x}=1,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^3}-0}{\Delta y}=1.$$

Повний приріст функції в точці $O(0,0)$:

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}.$$

Для диференційовної функції повний приріст повинен припускати подання у вигляді $\Delta f(0,0)=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)$, де $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, що в нашому прикладі перетворюється на $\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}=1\cdot\Delta x+1\cdot\Delta y+o(\rho)$.

Перевіримо, чи насправді $\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y=o(\rho)$.

Тобто знайдемо границю

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Для послідовності $(\Delta x_n,\Delta y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x_n)^3+(\Delta y_n)^3}-\Delta x_n-\Delta y_n}{\sqrt{(\Delta x_n)^2+(\Delta y_n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}}-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0.$$

Оскільки хоча б за одним з напрямків прямування $(\Delta x,\Delta y)$ до $(0,0)$ функція $\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ не прямує до нуля, тоді границя цієї функції дорівнювати нулю не може, тобто $\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y\neq o(\rho)$, і задана функція не є диференційовною в точці (0,0). ■

Задача 2.9 Знайти частинні похідні даних функцій за кожною із незалежних змінних:

$$f(x,y)=e^{xy}+\ln\left(x^2+y^2\right),\ g(x,y)=\sqrt{x+2y+x^3y^2}\,.$$

Розв'язання. Фіксуємо по черзі змінні y і x та знаходимо похідні за відповідними змінними:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}+\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}+\frac{2y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1+3x^2y^2}{\sqrt{x+2y+x^3y^2}},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{2+2x^3y}{\sqrt{x+2y+x^3y^2}}.\ \blacksquare$$

Задача 2.10 Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку від функцій $f(x,y)=e^{arctg\ xy}$, $g(x,y)=x^y$.

Розв'язання. Фіксуємо по черзі змінні y і x та знаходимо похідні за відповідними змінними:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{arctg\ xy}\frac{y}{1+(xy)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{arctg\ xy}\frac{x}{1+(xy)^2};$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x^y\ln x.$$

Перші диференціали мають вигляд:

$$df=f'_x dx+f'_y dy=\frac{e^{arctg\ xy}}{1+(xy)^2}\left(ydx+xdy\right);\ dg=yx^{y-1}dx+x^y\ln xdx.$$

Знайдемо другі частинні похідні і другі диференціали:

$$f''_{xx}=\left(e^{erctg\ xy}\frac{y}{1+(xy)^2}\right)'_x=\frac{y}{1+(xy)^2}\left(e^{erctg\ xy}\right)'_x+e^{erctg\ xy}\left(\frac{y}{1+(xy)^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{y}{1+(xy)^2}e^{erctg\ xy}\frac{y}{1+(xy)^2}+e^{erctg\ xy}y\frac{-2xy^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}=\frac{e^{arctgxy}y^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}(1-2xy);$$

$$f''_{yy}=\left(e^{erctg\ xy}\frac{x}{1+(xy)^2}\right)'_y=\frac{e^{erctg\ xy}x^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}(1-2xy);$$

$$f''_{xy}=f''_{yx}=\left(e^{erctg\ xy}\frac{x}{1+(xy)^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{x}{1+(xy)^2}e^{erctg\ xy}\frac{y}{1+(xy)^2}+e^{erctg\ xy}\frac{\left(1+(xy)^2\right)-xy^2 2x}{\left(1+(xy)^2\right)^2}=e^{erctg\ xy}\frac{1+xy-(xy)^2}{\left(1+(xy)^2\right)^2}.$$

Згідно з формулою $d^2 f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$, отримаємо

$$d^2 f = \frac{e^{erctg\,xy}}{1+(xy)^2}\left(y^2(1-2xy)\,dx^2 + 2\left(1+xy-(xy)^2\right)dxdy + x^2(1-2xy)\,dy^2\right).$$

Для другої функції:

$$g''_{xx} = \left(yx^{y-1}\right)'_x = y(y-1)x^{y-2},\ g''_{xy} = \left(yx^{y-1}\right)'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$g''_{yy}\left(x^y \ln x\right)'_y = x^y(\ln x)^2,$$

$$d^2 g = y(y-1)x^y dx^2 + 2(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x)dxdy + x^y(\ln x)^2 dy^2 .\ \blacksquare$$

Задача 2.11 Знайти частинні похідні і диференціал першого порядку для функцій

а) $z = f(u,v), \quad u = x + y, \quad v = x^2 + y^2$;

б) $z = f(u,v), \quad u = \dfrac{x}{y}, \quad v = \dfrac{y}{z}$;

в) $z = arctg(x + y^2), \quad x = 4t^2, \quad y = \sin t$.

Розв'язання. а) Для пошуку частинних похідних використаємо формули:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y .$$

Отримаємо:

$$f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 2x = f'_u + 2xf'_v; \quad f'_y = f'_u + 2yf'_v,$$

тоді

$$df = \left(f'_u + 2xf'_v\right)dx + \left(f'_u + 2yf'_v\right)dy = f'_u(dx + dy) + f'_v(2xdx + 2ydy).\blacksquare$$

б) В цьому випадку розв'язання аналогічно попередньому

$$f'_x = f'_u \frac{1}{y}; \quad f'_y = f'_u\left(\frac{-x}{y^2}\right) + f'_v\left(\frac{1}{z}\right); \quad f'_z = f'_v\left(\frac{-y}{z^2}\right);$$

$$df = f'_u \frac{1}{y}dx + \left(f'_u\left(\frac{-x}{y^2}\right) + f'_v \frac{1}{z}\right)dy + f'_v\left(\frac{-y}{z^2}\right)dz =$$

$$= f'_u\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\right) + f'_v\left(\frac{1}{z}dy - \frac{y}{z^2}dz\right).\blacksquare$$

в) *1 спосіб*. Використовуємо формулу частинних похідних складеної функції:

$$\frac{dz}{dt} = z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t =$$

$$= \left.\frac{1}{1+(x+y^2)^2}\right|_{x=4t^2, y=\sin t} 8t + \left.\frac{2y}{1+(x+y^2)^2}\right|_{x=4t^2, y=\sin t} \cos t =$$

$$= \frac{1}{1+(4t^2+\sin^2 t)^2}(8t + 2\sin t\cos t).$$

Складена функція залежить від однієї змінної, тому її диференціал дорівнює

$$dz = \frac{dz}{dt}dt = \frac{1}{1+(4t^2+\sin^2 t)^2}(8t+\sin 2t)dt \,.$$

2 спосіб. Підставимо замість x і y їх вирази через незалежну змінну t, після чого і знайдемо від отриманої функції однієї змінної похідну:

$$z'_t = \left(arctg(4t^2+\sin^2 t)\right)'_t = \frac{1}{1+(4t^2+\sin^2 t)^2}(8t+2\sin t\cos t)\,.$$

Видно, що диференціал буде має той же вигляд, який отримано вище. ■

Задача 2.12 Знайти частинні похідні $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}, \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}$ функції

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y} = 0\,,$$

$$x^2+y^2\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0) = \Delta x\,,$$

тому

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0+\Delta x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x} = 1.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0\,,$$

$$x^2+y^2\neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{dx} = y\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{dx}(0,\Delta y) = -\Delta y\,,$$

тому

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y} = -1\,.$$

Для розглянутої функції

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)} \neq \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}. \text{ ■}$$

Задача 2.13 Довести, що функція $u=\dfrac{1}{r}$, де $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, задовольняє при $r\neq 0$ рівнянню Лапласа $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

Розв'язання. Використаємо формулу для частинної похідної складеної функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\left.\frac{-1}{r^2}\right|_{r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=$$

$$=\left.\frac{-(x-a)}{r^3}\right|_{r=\sqrt{\ldots}}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left.\left[-(x-a)'_x\,r^{-3}-(x-a)(r^{-3})'_x\right]\right|_{r=\sqrt{\ldots}}=$$

$$=\left.\left[-r^{-3}-(x-a)(-3)r^{-4}\frac{2(x-a)}{2r}\right]\right|_{r=\sqrt{\ldots}}=\left.\left[-r^{-3}+3(x-a)^2r^{-5}\right]\right|_{r=\sqrt{\ldots}}.$$

Аналогічний вигляд будуть мати другі похідні за іншими змінними, тому

$$\Delta u=\left.\left[-3r^{-3}+3\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)r^{-5}\right]\right|_{r=\sqrt{\ldots}}=\left.\left[-3r^{-3}+3r^2r^{-5}\right]\right|_{r=\sqrt{\ldots}}=0,$$

що і треба було довести. ■

Задача 2.14 Знайти повні диференціали першого та другого порядку функції $f(x,y,z)=e^{xyz}$.

Розв'язання. Знайдемо усі частинні похідні цієї функції:

$$f'_x=yze^{xyz},\ f'_y=xze^{xyz},\ f'_z=xye^{xyz},$$

$$f''_{xx}=y^2z^2e^{xyz},\ f''_{yy}=x^2z^2e^{xyz},\ f''_{zz}=x^2y^2e^{xyz},$$

$$f''_{xy}=\left(yze^{xyz}\right)'_y=ze^{xyz}+xyz^2e^{xyz}=z(1+xyz)e^{xyz},$$

$$f''_{xz}=\left(yze^{xyz}\right)'_z=ye^{xyz}+xy^2ze^{xyz}=y(1+xyz)e^{xyz},$$

$$f''_{yz}=\left(xze^{xyz}\right)'_z=xe^{xyz}+x^2yze^{xyz}=x(1+xyz)e^{xyz}.$$

Напишемо тепер диференціали першого та другого порядку для функції трьох змінних:

$$df=f'_xdx+f'_ydy+f'_zdz=e^{xyz}\left(yzdx+xzdy+xydz\right);$$

$$d^2f=\left(\frac{\partial\circ}{\partial x}dx+\frac{\partial\circ}{\partial y}dy+\frac{\partial\circ}{\partial z}dz\right)^2 f=\frac{d^2f}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz+$$

$$+\frac{d^2f}{\partial y^2}(dy)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz+\frac{d^2f}{\partial z^2}(dz)^2=$$

$$=e^{xyz}\left(y^2z^2dx^2+x^2z^2dy^2+x^2y^2dz^2+2z(1+xyz)dxdy+2y(1+xyz)dxdz+2x(1+xyz)dydz\right).$$

■

Задача 2.15 Знайти диференціали першого та другого порядку функції $z = f(x, y)$, якщо $x = \dfrac{u}{v}, y = uv$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого та другого порядку, враховуючи, що задана функція є складеною:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v; \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v\right) = \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + v\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{v}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) + v\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{1}{v}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot v\right) + v\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{1}{v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot v\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{v^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot v^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u\right) = \left(-\frac{u}{v^2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{u}{v^2}\right) + u\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(-\frac{u}{v^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{2u}{v^3} + u\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) =$$

$$= \left(-\frac{u}{v^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot u\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{2u}{v^3} + u\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot u\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{u^2}{v^4} - 2\frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot u^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{2u}{v^3};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u\right) = \left(-\frac{u}{v^2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{u}{v^2}\right) + u\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y} = \left(-\frac{u}{v^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{v^2}\right) +$$

$$+ u\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} = \left(-\frac{u}{v^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot v\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{v^2}\right) +$$

$$+ u\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{1}{v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot v\right) + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^3}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot uv + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{v^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Отже, диференціал першого порядку буде мати вигляд:

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot v\right)du+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot u\right)dv.$$

Диференціал другого порядку буде мати вигляд:

$$d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial f}{\partial v^2}dv^2=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{v^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot v^2\right)du^2+$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^3}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot uv+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\left(-\frac{1}{v^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\right)dudv+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{u^2}{v^4}-2\frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot u^2+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{2u}{v^3}\right)dv^2.\ \blacksquare$$

Задача 2.16 Дана функція $z=3x^2+xy-y^2$ і дві точки $A(1;2),\ B(1{,}01;1{,}99)$.
а) знайти значення z функції в точці B;
б) обчислити наближене значення $\overline{z_1}$ функції в точці B, виходячи із значення z_0 функції в точці A, заміняючи приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом;
в) написати рівняння дотичної площини до поверхні $z=f(x,y)$ в точці $C(1;2;z_0)$ і перевірити, чи лежить точка $D(1{,}01;1{,}99;\overline{z_1})$ в цій площині.

Розв'язання. а) Обчислимо точне значення функції в точці: $z(B)=3\cdot 1{,}01^2+1{,}01\cdot 1{,}99-1{,}99^2=3{,}0603+2{,}0099-3{,}9601=1{,}1101$.
б) Обчислимо наближене значення $\overline{z_1}$ функції в точці B, застосовуючи наближену формулу: $\overline{z_1}\approx z(A)+dz(A)=z(A)+z'_x\big|_A\cdot(x_B-x_A)+z'_y\big|_A\cdot(y_B-y_A)$. Оскільки $z(A)=3+2-4=1$, $z'_x\big|_A=(6x+y)\big|_A=6+2=8$, $z'_y\big|_A=(x-2y)\big|_A=1-4=-3$, $\overline{z_1}\approx 1+8\cdot(1{,}01-1)-3\cdot(1{,}99-2)=1+0{,}08-0{,}03=1{,}05$.
в) Напишемо рівняння дотичної площини до заданої поверхні в точці $C(1,2,1)$:

$$z-z_0=z'_x\big|_A\cdot(x-x_A)+z'_y\big|_A\cdot(y-y_A),\ z-1=8\cdot(x-1)-3\cdot(y-2),\ z=8x-3y-1.$$

Перевіримо, чи буде точка $D(1{,}01;1{,}99;1{,}05)$ належати цій площині: $8\cdot 1{,}01-3\cdot 1{,}99-1=8{,}08-5{,}97-1=1{,}11\neq 1{,}05$. Це означає, що точка D не належить дотичній площині $z=8x-3y-1$. $\blacksquare$

Задача 2.17 Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=arctg\frac{x}{y}$ в точці $M_0\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні цієї функції в даній точці:

$$z'_x\big|_{M_0}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\frac{1}{y}\bigg|_{M_0}=\frac{1}{2};\quad \big|_{M_0},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\bigg|_{(0,0)}\quad z'_y\big|_{M_0}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\frac{-x}{y^2}\bigg|_{M_0}=-\frac{1}{2}.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі відповідно будуть мати вигляд:

$$z-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)\ \Rightarrow\ x-y-2z+\frac{\pi}{2}=0;$$

$$\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-1}{-1/2}=\frac{z-\pi/4}{-1}\ \Rightarrow\ x-1=-y+1=\frac{z-\pi/4}{-2}.\ ■$$

Задача 2.18 Знайти кут між градієнтами функції $u=x^2+y^2-z^2$ в точках $A(\varepsilon,0,0)$ і $B(0,\varepsilon,0)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні та градієнти функції в заданих точках: $u'_x=2x$; $u'_y=2y$; $u'_z=-2z$, $\overline{grad}\ f(A)=\left(2\varepsilon,0,0\right)$; $\overline{grad}\ f(B)=\left(0,2\varepsilon,0\right)$. Оскільки скалярний добуток $\left(\overline{grad}\ f(A),\overline{grad}\ f(B)\right)=0$, вектори взаємно перпендикулярні, тобто кут між ними – 90°. ■

Задача 2.19 Знайти похідну функції $z=x^2-y^2$ в точці $M(1,1)$ в напрямку l, що складає кут 60° з додатнім напрямком осі Ox.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні і градієнт в точці M: $z'_x=2x$; $z'_y=-2y$; $\overline{grad}\ z(M)=\left(2;-2\right)$. Одиничний вектор напрямку, що складає кут 60° з додатнім напрямком осі OX, має координати $\bar{e}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Отже, $\dfrac{\partial z(A)}{\partial l}=\left(\left(2;-2\right),\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=1-\sqrt{3}$. ■

Задача 2.20 Для даної функції $z=\ln(xy^2+1)$ знайти 1) $\overline{\mathrm{grad}\ z}(A)$; 2) похідну в точці $A(1,1)$ за напрямом вектора $\bar{a}=(-3;-4)$.

Розв'язання. $z'_x=\dfrac{y^2}{xy^2+1}$; $z'_y=\dfrac{2xy}{xy^2+1}$; $\overline{grad}\ z(A)=\left(\frac{1}{2};1\right)$;

$$\bar{e}=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{(-3,-4)}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}=\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right);$$

$$\frac{\partial z(A)}{\partial e}=\left(\left(\frac{1}{2};1\right),\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}-1\cdot\frac{4}{5}=-\frac{11}{10}=-1{,}1.\quad ■$$

Задача 2.21 Знайти величину та напрямок градієнта функції $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$ в точці $A\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},3\right)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції в точці A:

$$u'_x\big|_A=\cos(x+2y)+\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}\bigg|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},3\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\pi\right)+\frac{\sqrt{\frac{9\pi}{2}}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{3}{2},$$

$$u'_y\Big|_A = 2\cos(x+2y) + \frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}\Bigg|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},3\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\pi\right) + \frac{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}}{2\sqrt{\frac{3\pi}{2}}} = \frac{1}{2},$$

$$u'_z\Big|_A = \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}\Bigg|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},3\right)} = \frac{\sqrt{\frac{3\pi^2}{4}}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, $\overline{grad}\,u(A) = \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}\right)$, $\left|\overline{grad}\,u(A)\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{16}} = \frac{\sqrt{40+\pi^2}}{4}$. Напрямок вектора $\overline{grad}\,u(A)$ визначається кутами α,β,γ, які він утворює з додатними напрямами осей координат:

$$\cos\alpha = \frac{3/2}{\sqrt{40+\pi^2}/4} = \frac{6}{\sqrt{40+\pi^2}}, \cos\beta = \frac{1/2}{\sqrt{40+\pi^2}/4} = \frac{2}{\sqrt{40+\pi^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\pi/4}{\sqrt{40+\pi^2}/4} = \frac{\pi}{\sqrt{40+\pi^2}}.\ \blacksquare$$

Задача 2.22 Знайти похідні першого та другого порядку функції $z(x,y)$, $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}+1$, що задано неявно.

Розв'язання. Продиференціюємо заданий вираз за змінною x, враховуючи, що $z = z(x,y)$: $\frac{z - x\cdot z'_x}{z^2} = \frac{1}{z}\cdot z'_x$. Звідси випливає, що $z'_x = \frac{z}{z+x}$. Диференціюємо тепер за змінною y: $\frac{-x\cdot z'_y}{z^2} = \frac{y\cdot z'_y - z}{zy}$, звідки $z'_y = \frac{z^2}{zy+xy}$.

Знайдемо похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = \frac{z'_x(x+z) - z(1+z'_x)}{(z+x)^2} = \frac{z'_x\cdot x - z}{(z+x)^2} = \frac{\frac{z}{z+x}\cdot x - z}{(z+x)^2} = -\frac{z^2}{(z+x)^3};$$

$$z''_{yy} = \frac{2z\cdot z'_y(xy+zy) - z^2(x+y\cdot z'_y+z)}{(xy+zy)^2} = \frac{\frac{2z^3}{zy+xy}(xy+zy) - z^2(x+\frac{yz^2}{zy+xy}+z)}{(xy+zy)^2} =$$

$$= \frac{z^3 - xz^2 - \frac{yz^4}{zy+xy}}{(xy+zy)^2} = -\frac{x^2yz^2}{(xy+zy)^3};$$

$$z''_{xy} = \frac{z'_y(x+z) - z\cdot z'_y}{(z+x)^2} = \frac{z'_y\cdot x}{(z+x)^2} = \frac{\frac{z^2}{zy+xy}\cdot x}{(z+x)^2} = \frac{z^2\cdot x}{y(z+x)^3}.\blacksquare$$

Задача 2.23 Дослідити функцію $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ на локальний екстремум.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ u'_y = 2y + 12x = 0 \\ u'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2/4 \\ -x^2/4 + 6x = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2/4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 24 \end{array}\right. \\ z = -1 \end{cases}.$$

Отримаємо стаціонарні точки: $M_1(0,0,-1)$; $M_2(24,-144,-1)$.

Знаходимо другі частинні похідні:

$$u''_{xx} = 6x; \quad u''_{yy} = u''_{zz} = 2; \quad u''_{xy} = 12; \quad u''_{xz} = u''_{yx} = 0,$$

та обчислюємо головні мінори матриці квадратичної форми другого диференціала досліджуваної функції:

$$A_1 = u''_{xx} = 6x; \quad A_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 144;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 24x - 288.$$

Розглянемо спочатку точку $M_2(24,-144,-1)$; для неї $A_1 = 144 > 0$; $A_2 = 144 > 0$; $A_3 = 288 > 0$, отже, точка $M_2(24,-144,-1)$ – точка локального мінімуму.

В точці $M_1(0,0,-1)$ маємо $A_2 < 0$, тому в цій точці екстремуму немає. ■

Задача 2.24 Дослідити на екстремум функції

а) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$; **б)** $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. **а)** Знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y^3 = 0 \\ x = 2y^3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 2y^3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Отримаємо стаціонарні точки: $M_1(0,0); M_2(1,1); M_3(-1,-1)$.

Знаходимо другі частинні похідні:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2; \quad z''_{xy} = -2; \quad z''_{yy} = 12y^2 - 2,$$

звідки маємо:

$$A_1 = -2; B_1 = -2; C_1 = -2; \Delta_1 = 0.$$

Оскільки $\Delta_1 = 0$, то з'ясовуємо, чи буде ця точка точкою екстремуму за означенням. Нехай $y = x$, тоді $z(x,x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2)$. Якщо $0 < x < \sqrt{2}$, то $z(x,x) < 0 = z(0,0)$. Нехай тепер $y = -x$, тоді $z(x,-x) = 2x^4 > 0 = z(0,0)\ \forall x > 0$.

З отриманого приходимо до висновку, що в будь-якому околі радіуса, меншого за $\sqrt{2}$, значення функції можуть бути як більшими за значення в точці (0,0), так і меншими, отже, екстремуму в точці $M_1(0,0)$ немає.

Тепер розглянемо інші дві точки: $A_{2,3}=10; B_{2,3}=-2; C_{2,3}=10; \Delta_{2,3}=96.$ Оскільки $A_{2,3}>0; \Delta_{2,3}>0$, точки $M_2(1,1); M_3(-1,-1)$ – точки локального мінімуму. ■

б) Частинні похідні цієї функції $z'_x=\dfrac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\dfrac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ ніде не обертаються в нуль, а в точці $(0,0)$ не існують, тому будемо досліджувати цю точку на екстремум за означенням. Маємо, що $z(0,0)=1$, а $z=1-\sqrt{x^2+y^2}<1$. Отже, точка $(0,0)$ – точка локального максимуму. ■

Задача 2.25 Знайти точки умовного екстремуму функції $u=x^2-y^2$ за умови $2x-y-3=0$.

Розв'язання. Утворюємо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,z)=x^2-y^2+\lambda(2x-y-3).$$

Досліджуємо її на екстремум:

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda=0 \\ L'_y=-2y-\lambda=0 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\lambda \\ y=-\lambda/2 \\ -2\lambda+\lambda/2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ \lambda=-2 \end{cases}.$$

Отже, стаціонарна точка умовного екстремуму: $M(2;1)$ при $\lambda=-2$. Запишемо другий диференціал в цій точці. Оскільки $L''_{xx}=2; L''_{yy}=-2; L''_{xy}=0$, диференціал другого порядку має вигляд $d^2L(M)=2dx^2-2dy^2$. Для визначення знаку другого диференціала, продиференціюємо умову зв'язку: $2dx-dy=0$, звідки $2dx=dy$. Враховуючи цей факт, отримаємо, що $d^2L(M)=2dx^2-4dx^2=-2dx^2<0$, тобто точка $M(2;1)$ є точкою умовного максимуму. ■

Задача 2.26 Знайти точки умовного екстремуму функції $u=x-2y+2z$ за умови $x^2+y^2+z^2=1$.

Розв'язання. Утворюємо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right).$$

Досліджуємо її на екстремум:

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = 1/\lambda \\ z = -1/\lambda \\ 1/4\lambda^2 + 1/\lambda^2 + 1/\lambda^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1/3 \\ y = \pm 2/3 \\ z = \mp 2/3 \\ \lambda = \pm 3/2 \end{cases}.$$

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму: $M_1\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ при $\lambda = -\frac{3}{2}$ і $M_1\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ при $\lambda = \frac{3}{2}$. Дослідимо першу з них на виконання достатньої умови екстремуму. Оскільки $L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2\lambda;\quad L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0$, диференціал другого порядку має вигляд $d^2L(M_1) = -3(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$, тобто $M_1\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ – точка умовного максимуму. Аналогічно отримаємо, що $d^2L(M_2) = 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$, тобто $M_2\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ – точка умовного мінімуму. ■

Задача 2.27 Знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій множині.

а) $z = \frac{1}{2}x^2 - xy + y$ в замкненій області, що обмежена параболою $y = \frac{x^2}{3}$ і прямою $y = 3$;

б) $z = x + y$ в замкненому крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

Розв'язання. а) Знайдемо стаціонарні точки всередині області

$$\begin{cases} z'_x = x - y = 0 \\ z'_y = -x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Маємо першу точку $M_1(1,1)$, яка належить області D (див. рис. 2.5).

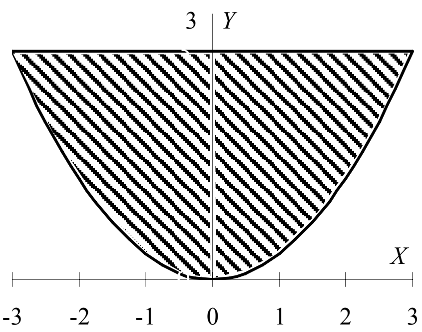


Рис. 2.5

Тепер розглянемо криву $y = x^2/3$. Будемо діяти за другим способом кроку 3 алгоритму. Підставляємо в рівняння функції рівняння кривої межі:

$$u = z\big|_{y=\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - x \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{6},$$

знаходимо стаціонарні точки отриманої функції: $u'_x = -x^2 + \frac{5x}{3} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{3}$, що відповідають таким точкам на параболі: $M_2(0,0);\ M_3\left(\frac{5}{3};\frac{25}{27}\right)$, які належать даній області D.

Розглядаємо далі пряму $y=3$:

$$u = z\big|_{y=3} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3; \quad u'_x = x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3,$$

на цій прямій $y=3$ отримаємо наступну точку $M_4(3,3) \in D$.

До додаткового розгляду включаються кутову точку області, що не потрапила до розгляду: $M_5(-3,3)$.

Переходимо до 5 кроку: знаходимо значення функції в отриманих п'яти точках, щоб серед них знайти найбільше і найменше:

$$z(M_1) = \frac{1}{2};\ z(M_2) = 0; \quad z(M_3) = \frac{5^3}{2\cdot 3^4} = \frac{125}{162},$$

$$z(M_4) = -\frac{3}{2} = \min_D z; \quad z(M_5) = \frac{33}{2} = \max_D z. \ \blacksquare$$

б) Оскільки $\begin{cases} z'_x = 1 \neq 0 \\ z'_y = 1 \neq 0 \end{cases}$, то стаціонарних точок всередині області немає. На межі, тобто на колі $x^2+y^2=1$, розв'яжемо задачу за допомогою функції Лагранжа: $L(x,y) = x + y + \lambda(x^2+y^2-1)$:

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ 1/4\lambda^2 + 1/4\lambda^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 1/\sqrt{2} \\ y = \mp 1/\sqrt{2}. \\ \lambda = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Обидві точки $M_{1,2}\left(\pm 1/\sqrt{2}; \pm 1/\sqrt{2}\right)$ належать колу, а значить і кругу D.

Тепер визначимось з найбільшим і найменшим значеннями:
$z(M_1) = \sqrt{2} = \max\limits_D z;\ z(M_2) = -\sqrt{2} = \min\limits_D z.$ $\blacksquare$

Задача 2.28 Знайти розклад функції $f(x,y) = 8x^2 - 3y^3 + x^2y^2 - 5x + 2y$ за формулою Тейлора в околі заданої точки $A(1,-1)$.

Розв'язання. Формула Тейлора має вигляд:

$$f(x,y) = f(1,-1) + df(1,-1) + \frac{1}{2!}d^2 f(1,-1) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(1,-1) + o(\rho^n).$$

Отже, потрібно знайти усі частинні похідні, обчислені в точці $(1;-1)$:

$f'_x\big|_{(1,-1)} = (16x + 2xy^2 - 5)\big|_{(1,-1)} = 13,\ f'_y\big|_{(1,-1)} = (-9y^2 + 2x^2y + 2)\big|_{(1,-1)} = -9,$

$f''_{xx}\big|_{(1,1)} = (16 + 2y^2)\big|_{(1,-1)} = 18,\ f''_{yy}\big|_{(1,-1)} = (-18y + 2x^2)\big|_{(1,-1)} = 20,\ f''_{xy}\big|_{(1,-1)} = 4xy\big|_{(1,-1)} = -4,$

$f'''_{xxx}\big|_{(1,-1)} = 0,\ f'''_{yyy}\big|_{(1,-1)} = -18,\ f'''_{xxy}\big|_{(1,-1)} = 4y\big|_{(1,-1)} = -4,\ f'''_{xyy}\big|_{(1,-1)} = 4x\big|_{(1,-1)} = 4.$

Зрозуміло, що серед похідних четвертого порядку ненульовими буде лише $f^{(4)}_{xxyy}\big|_{(1,-1)} = 4$. Це означає, що формула Тейлора буде містити доданки до диференціала четвертого порядку включно, а залишковий член буде дорівнювати нулю.

Окремо обчислимо $f(1,-1)=5$ та диференціали до четвертого порядку включно: $df(1,-1) = f'_x\big|_{(1,-1)}(x-1) + z'_y\big|_{(1,-1)}(y+1) = 13(x-1)-9(y+1)$,

$$d^2 f(1,-1) = f''_{xx}\big|_{(1,-1)}(x-1)^2 + 2f''_{xy}\big|_{(1,-1)}(x-1)(y+1) + f''_{yy}\big|_{(1,-1)}(y+1)^2 =$$

$$=18(x-1)^2 - 8(x-1)(y+1) + 20(y+1)^2,$$

$$d^3 f(1,-1) = f'''_{xxx}\big|_{(1,-1)}(x-1)^3 + 3f'''_{xxy}\big|_{(1,-1)}(x-1)^2(y+1) + 3f'''_{xyy}\big|_{(1,-1)}(x-1)(y+1)^2 +$$

$$+ f'''_{yyy}\big|_{(1,-1)}(y+1)^3 = -12(x-1)^2(y+1) + 12(x-1)(y+1)^2 - 18(y+1)^3,$$

$$d^4 f(1,-1) = f^{(4)}_{xxxx}\big|_{(1,-1)}(x-1)^4 + 4f^{(4)}_{xxxy}\big|_{(1,-1)}(x-1)^3(y+1) + 6f^{(4)}_{xxyy}\big|_{(1,-1)}(x-1)^2(y+1)^2 +$$

$$+ 4f^{(4)}_{xyyy}\big|_{(1,-1)}(x-1)(y+1)^3 + f^{(4)}_{yyyy}\big|_{(1,-1)}(y+1)^4 = 24(x-1)^2(y+1)^2.$$

Тепер можна записати формулу Тейлора:

$$f(x,y) = 8x^2 - 3y^3 + x^2y^2 - 5x + 2y = f(1,-1) + df(1,-1) + \frac{1}{2!}d^2 f(1,-1) + \frac{1}{3!}d^3 f(1,-1) + \frac{1}{4!}d^4 f(1,-1) =$$

$$= 5 + 13(x-1) - 9(y+1) + 9(x-1)^2 - 4(x-1)(y+1) + 10(y+1)^2 - 2(x-1)^2(y+1) + 2(x-1)(y+1)^2 -$$

$$- 3(y+1)^3 + (x-1)^2(y+1)^2. \quad \blacksquare$$

Задача 2.29 Функцію $z(x,y)=x^y$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки $(1;1)$ до доданків третього порядку. За допомогою формули наближено обчислити $(1{,}1)^{1{,}02}$.

Розв'язання. Формула Тейлора до доданків третього порядку буде мати вигляд:

$$z(x,y) = z(1,1) + dz(1,1) + \frac{1}{2!}d^2 z(1,1) + \frac{1}{3!}d^3 z(1,1) + o(\rho^3).$$

Отже, потрібно знайти усі частинні похідні до третього порядку включно, обчислені в точці $(1;1)$:

$$z'_x\big|_{(1,1)} = yx^{y-1}\Big|_{(1,1)} = 1, z'_y\big|_{(1,1)} = x^y \ln x\Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$z''_{xx}\big|_{(1,1)} = y(y-1)x^{y-2}\Big|_{(1,1)} = 0, z''_{yy}\big|_{(1,1)} = x^y(\ln x)^2\Big|_{(1,1)} = 0, z''_{xy}\big|_{(1,1)} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\Big|_{(1,1)} = 1,$$

$$z'''_{xxx}\big|_{(1,1)} = y(y-1)(y-2)x^{y-3}\Big|_{(1,1)} = 0, z'''_{yyy}\big|_{(1,1)} = x^y(\ln x)^3\Big|_{(1,1)} = 0,$$

$$z'''_{xxy}\big|_{(1,1)} = (y-1)x^{y-2} + yx^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x\Big|_{(1,1)} = 1,$$

$$z'''_{xyy}\big|_{(1,1)} = yx^{y-1}(\ln x)^2 + x^y 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\Big|_{(1,1)} = 0.$$

Окремо обчислимо $z(1,1)=1$. Тепер можна записати формулу Тейлора:

$$x^y = z(1{,}1) + \left(z'_x\big|(x-1) + z'_y\big|(y-1)\right) + \frac{1}{2!}\left(z''_{xx}\big|(x-1)^2 + 2z''_{xy}\big|(x-1)(y-1) + z''_{yy}\big|(y-1)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(z'''_{xxx}\big|(x-1)^3 + 3z'''_{xxy}\big|(x-1)^2(y-1) + 3z'''_{xyy}\big|(x-1)(y-1)^2 + z'''_{yyy}\big|(y-1)^3\right) + o(\rho^3) =$$
$$= 1 + (x-1) + \frac{1}{2}\cdot 2(x-1)(y-1) + \frac{1}{6}\cdot 3(x-1)^2(y-1) + o(\rho^3) = x + (x-1)(y-1) + \frac{(x-1)^2(y-1)}{2} + o(\rho^3)$$

За цією формулою обчислимо наближено

$$1{,}1^{1{,}02} \approx 1{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}02 + \frac{0{,}1^2\cdot 0{,}02}{2} = 1{,}1 + 0{,}002 + 0{,}0001 = 1{,}1021. \ \blacksquare$$

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ З ТЕМИ «ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

1. Знайти область визначення функції $f(x, y)$ і зобразити її на координатній площині
2. Знайти повторну границю або довести, що вона не існує.
3. Знайти подвійну границю або довести, що вона не існує.
4. Знайти частинні похідні даних функцій за кожною із незалежних змінних ($x, y, z, u, v, t, \phi, \varphi$ – змінні).
5. Знайти другий диференціал складеної функції $f(x, y)$, де x і y – задані функції змінних u і v.
6. Дана функція $z = f(x, y)$ і дві точки $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$. Потрібно

а) знайти значення z функції в точці B;

б) обчислити наближене значення $\overline{z_1}$ функції в точці B, виходячи із значення z_0 функції в точці A, заміняючи приріст функції при переході від точки A до точки B диференціалом;

в) написати рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $C(x_0, y_0, z_0)$ і перевірити, чи лежить точка $D(x_1, y_1, \overline{z_1})$ в цій площині.

7. Знайти повні диференціали указаного порядку.
8. Знайти частинні похідні першого і другого порядку за x і y від функції, що задана неявно.
9. Дослідити функцію на локальний екстремум.
10. Знайти умовний екстремум функції.
11. Знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій множині.
12. Для даної функції $z = f(x, y)$ знайти 1) $\overline{\operatorname{grad} z(A)}$; 2) похідну в точці A за напрямом $\overline{a}$.
13. Розв’язати задачу.
14. Знайти розклад функції за формулою Тейлора в околі заданої точки A.

ВАРІАНТ 1

1. $z=\frac{\sqrt{y^2-2x+4}}{2y}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(x+y)^2}{x^2+y^2}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin x}{\sin y}$
4. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$	5. $\begin{cases}x=uv,\\ y=v^3.\end{cases}$	6. $z=x^2+2xy+3y^2$; $A(2;1)$, $B(1,96;1,04)$
7. $u=e^{ax+by}$, $d^3u-?$	8. $x+y+z=c^z$	9. $z=x^3+8y^2-6xy+5$
10. $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ при $x^2+y^2=1$	11. $z=x^2-xy+y^2-4x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=0;\ y=0;\ 2x+3y=12$	12. $z=3x^2+2xy$; $A(1;2)$, $\overline{a}=4\overline{i}+3\overline{j}$
13. Знайти кут між градієнтами функцій $u=\frac{yz^2}{x^2}$, $v=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$, в точці $M\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$		14. $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-$ $-6x-2y-4$, $A(-2;1)$

ВАРІАНТ 2

1. $z=\ln\left(9-y^2-x^2\right)+\sqrt{\ln x}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\sin xy$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}\frac{\sin(x)}{\sin y+2}$
4. $z=\arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$	5. $\begin{cases}x=\sin uv,\\ y=e^v.\end{cases}$	6. $z=2xy+2y^2-2x$; $A(1;2)$, $B(0,97;2,03)$
7. $u=\cos(x+y)$, $d^2u-?$	8. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$	9. $z=5+x^3-6xy+8y^3$
10. $f(x,y)=2x^2+12xy+y^2$ при $x^2+4y^2=25$	11. $z=x^2+3y^2+x-y$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=1;\ y=1;\ x+y=1$	12. $z=2x^2+3xy+y^2$; $A(2;1)$, $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{j}$
13. Знайти кут між градієнтами функцій $u=x^2yz^3$, $v=\frac{4\sqrt{6}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{9y}+\frac{3}{z}$, в точці $M\left(2,\frac{1}{3},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$		14. $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$, $A(1;-2)$

ВАРІАНТ 3

1. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{x-y}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\sin(x)}{\sin y+2}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}\frac{\sin(xy)}{xy}$
4. $z=\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$	5. $\begin{cases}x=3uv,\\ y=4u^3.\end{cases}$	6. $z=2x^2+y^2+3y$; $A(2;2)$, $B(2,03;2,04)$
7. $u=\sin(x^2+y^2)$, $d^2u-?$	8. $x=z\ln\frac{z}{y}$	9. $z=5x^2+y^2+2x^3+xy^2$,
10. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ при $x^2/16+y^2/9+z^2/4=1$	11. $z=x^2+y^2-xy-x-y$ в трикутнику $x+y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0$	12. $z=\ln(x^2+3y^2)$; $A(1;1)$, $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{j}$

13. Знайти кут між градієнтами функцій $u=\frac{z^3}{xy^2}, v=9\sqrt{2}x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}-\frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, в точці $M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	14. $f(x,y)=x^3-5x^2-xy+$ $+y^2+10x+5y,\ A(2;-1)$

ВАРІАНТ 4

1. $z=\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}}{\sqrt{x+y}}$	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lvert x\rvert}\right)^{\lvert y\rvert}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1+\frac{1}{\lvert x\rvert}\right)^{\lvert y\rvert}$
4. $z=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$	5. $\begin{cases}x=v^3,\\ y=u-v.\end{cases}$	6. $z=2x^2+3xy+3y^2;$ $A(1;2),\ B(0{,}96;1{,}95)$
7. $u=x^2+y^2-xy-2x+y+7,$ $d^2u-?$	8. $x\sin y+y\sin x+z\sin x=a$	9. $z=x^3+y^2-6xy-$ $-39x+18y+20$
10. $f(x,y)=5-3x-4y$ при $x^2+y^2=25$	11. $z=x^2+y^2+2a^2$ в трикутнику $2x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0$	12. $z=x^2+3xy^2;$ $A(2;1),\ \overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}$
13. Знайти похідну функції $z=x^2-xy+y^2$ в точці M(1,1) у напрямку вектора $\overline{e}=6\overline{i}+8\overline{j}$.		14. $f(x,y,z)=(x+y+z)^2,$ $A(1;1;-2)$

ВАРІАНТ 5

1. $z=\ln y+\ln\sin x$	2. $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to1}\frac{\sin(x(y-1))}{e^y-e}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\arcsin x^2}{y}$
4. $z=\operatorname{arctg}\frac{v+w}{v-w}$	5. $\begin{cases}x=u/v,\\ y=3u-2v.\end{cases}$	6. $z=x^2+y^2+2x+y-1;$ $A(2;4),\ B(1{,}98;3{,}91)$
7. $u=x^3+y^3-3xy(x-y),$ $d^3u-?$	8. $xy+xz+yz=1$	9. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$
10. $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$ при $x^2+y^2=1$	11. $z=x^2+4xy-2y^2-6x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=0;\ y=0;\ x+y=3$	12. $z=x^2+y^2+2xy^2;$ $A(3;1),\ \overline{a}=-\overline{i}+\overline{j}$
13. Знайти похідну функції $u=\arcsin\left(z\big/\sqrt{x^2+y^2}\right)$ в точці M(1,1,1) у напрямку вектора $\overline{MN}$, де $N(3,2,3)$.		14. $f(x,y,z)=x^2+3z^2-2yz-3,$ $A(0;1;2)$

ВАРІАНТ 6

1. $z=\arcsin(x-y)$	2. $\lim\limits_{x\to2}\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(xy)}{y}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to\infty}}x^2y$
4. $z=xy\ln(x+y)$	5. $\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v.\end{cases}$	6. $z=x^2+2xy+y^2;$ $A(-3;4),\ B(-2{,}94;4{,}05)$
7. $u=\ln(x^xy^yz^z),\ d^2u-?$	8. $xe^y-ye^x+ze^x=a$	9. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$

10. $f(x,y)=x/3+y/5$ при $x^2+y^2=1$	11 $z=xy(2-x)(2-y)$ $D: 0 \le y \le 2x \le 4$	12. $z=xe^y$; $A(2;0)$, $\overline{a}=5\overline{i}+12\overline{j}$
13. Знайти похідну функції $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ в точці $M(1,2,1)$ у напрямку вектора $\overline{r}=2\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$.		14. $f(x,y,z)=xyz, \quad A(1;2;3)$

ВАРІАНТ 7

1. $z=\sqrt{y^2-x^2}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$
4. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$	5. $\begin{cases} x=u/v, \\ y=v/u. \end{cases}$	6. $z=9xy+2y^2+y$; $A(3;1)$, $B(2{,}94;1{,}07)$
7. $u=\ln(x+y)$, $d^3u-?$	8. $z=x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x}$	9. $z=3(x^2+y^2)-x^3+4y$
10. $f(x,y,z)=2x+y-2z$ при $x^2+y^2+z^2=36$	11. $z=x^3+y^3-3xy$ в трикутни- ку $x=0;\ y=0;\ x+y=3$	12. $z=\operatorname{arctg}(x^2y^2)$; $A(1;-1)$, $\overline{a}=5\overline{i}-12\overline{j}$
13. Знайти кут між градієнтами функцій $u(x,y,z)$ і $v(x,y,z)$ в точці M	14. $f(x,y)=\sin x\cos y$, $A\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ до членів другого порядку включно	

ВАРІАНТ 8

1. $z=\ln x+\ln\cos y$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$
4. $u=x^{y^z}$	5. $\begin{cases} x=uv, \\ y=\sqrt{v}. \end{cases}$	6. $z=x^2+y^2-4x+2y$; $A(3;2)$, $B(2{,}99;2{,}05)$
7. $u=\cos x\cdot \operatorname{ch} y$, $d^3u-?$	8. $x^2+y^2+z^2=a^2$	9. $z=3x^2y+y^3-12x-15y$
10. $f(x,y)=x/4+y/5$ при $x^2+y^2=16$	11. $z=x^3+8y^3-6xy+1$ в прямокутнику $0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1$	12. $z=\operatorname{arctg}(x/y)$ $A(2;-2)$, $\overline{a}=-\overline{i}-2\overline{j}$
13. Знайти величину і напрямок градієнта функції $u=xyz$ у точці $M(z,1,1)$	14. $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $A(1;1)$, до членів другого порядку включно	

ВАРІАНТ 9

1. $z=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2+y^2-6}}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin y}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{\sin xy}$
4. $z=(1+\log_y x)^3$	5. $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2. \end{cases}$	6. $z=2xy-2x+y$; $A(2;1)$, $B(1{,}93;1{,}05)$
7. $u=xyz, \quad d^3u-?$	8. $z^3-3xyz=a^3$	9. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$

10. $f(x,y)=1-4x-8y$ при $x^2-8y^2=8$	11. $z=x^2-xy+y^2+4x$ в трикутнику $x=0;\ y=0;\ x+y=-3$	12. $z=\ln(5x^2+4y^2)$; $A(1;1),\ \bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$
13. Знайти похідну функції $u=x/2+y/3+z/6$ у напрямку $\bar{e}=6\bar{i}+3\bar{j}-6\bar{k}$ у точці $M(x_o,y_o,z_o)$	14. $f(x,y)=\sqrt{x+y},\ A(2;2)$ до членів другого порядку включно	

ВАРІАНТ 10

1. $z=\ln\left(x^2-2y+4\right)+\sqrt{x}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin xy}{x+y}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y$
4. $z=\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)$	5. $\begin{cases}x=u+v,\\ y=e^u.\end{cases}$	6. $z=x^2+y^2-2x+2y$; $A(1;2),\ B(1,08;1,94)$
7. $u=e^{ax+by+cz}$, $d^3u-?$	8. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$	9. $z=3x^2y+y^3-12x-15y$
10. $f(x,y,z)=x-y+2z$ при $x^2+y^2+2z^2=16$	11. $z=x^2+2xy-y^2-4x$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=3;\ y=0;\ y=x+1$	12. $z=\arcsin(x/y)$; $A(3;5),\ \bar{a}=\bar{i}-\bar{j}$
13. Знайти кут між градієнтами функцій $u=\dfrac{x^2}{yz^2},\ v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3,$ в точці $M\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$		14. $f(x,y)=x\sqrt{1+y}$, $A(0;0)$ до членів другого порядку включно

ВАРІАНТ 11

1. $z=\sqrt{9-y^2-x^2}+\sqrt{xy}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty} x^2y$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$
4. $z=\ln\left[yx^2+xy^2+\sqrt{1+\left(yx^2+xy^2\right)^2}\right]$	5. $\begin{cases}x=u\sin v,\\ y=uv\end{cases}$	6. $z=x^2+3xy+y^2$; $A(1;2),\ B(1,03;1,97)$
7. $u=x^2y^3$, $d^5u-?$	8. $xyz=x+y+z$	9. $z=x^4+y^4-2(x-y)^2$
10. $f(x,y)=(x-y-4)/\sqrt{2}$ при $x^2+y^2=1$	11. $z=5x^2-3xy+y^2+4$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=-1;\ y=-1;\ x+y=1$	12. $z=2x^2+xy$; $A(-1;2),\ \bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$
13. Знайти кут між градієнтами функцій $u=\dfrac{yz^2}{x},\ v=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}-\dfrac{\sqrt{6}}{2y}+\dfrac{2}{3z},$ в точці $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$	14. $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$, $A(2;1)$, до членів другого порядку включно.	

ВАРІАНТ 12

1. $z=\arccos(x+2y)$	2. $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to -1}\dfrac{x+y}{\ln x}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\ln x}$
4. $z=\sqrt{1-\dfrac{(x+y)^2}{x^2y^2}}+$ $+\arcsin\dfrac{x+y}{xy}$	5. $\begin{cases}x=\sin(u+v),\\ y=\cos(u-v).\end{cases}$	6. $z=xy+y^2-2x;$ $A(2;1),\ B(2{,}03;0{,}96)$
7. $u=x^2yz,\quad d^4u-?$	8. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$	9. $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$
10. $f(x,y)=1/x+1/y$ при $x+y=2$	11. $z=1+xy^2$ в прямокутнику $0\le x\le 1,-1\le y\le 2$	12. $z=\mathrm{arctg}(y/x);$ $A(-1;1),\ \bar a=\bar i-\bar j$
13. Знайти величину і напрямок градієнта функції $u=\mathrm{tg}\,x-x+\ +3\sin y-\sin^3 y+z+\mathrm{ctg}\,z$ у точці $M\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$		14. $f(x,y)=\ln(1+x+y),\ A\,(0;0)$ до членів другого порядку включно

ВАРІАНТ 13

1. $z=\dfrac{\ln(2x)}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{\cos x-1}$	3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x)^{\frac{1}{y}}$
4. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{v\ \ +w}{vw}$	5. $\begin{cases}x=u^2+v^2,\\ y=u^2-v^2.\end{cases}$	6. $z=x^2y+y^2-2x;$ $A(2;1),\ B(2{,}03;0{,}96)$
7. $u=\ln(x^xy^yz^z),\ d^2u-?$	8. $xyz=x^2+y^2+z^2$	9. $z=x^3+3xy^2-39x-36y$
10. $z=xy$ при $x^2+y^2=8.$	11. $z=5x^2-3xy+y^2+4$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=-1;\ y=-1;\ x+y=1$	12. $z=\mathrm{arctg}(y/x);$ $A(-1;1),\ \bar a=\bar i-\bar j$
13. Знайти кут між градієнтами функцій $u=\dfrac{z}{x^3y^2},\ v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z\sqrt6},$ в точці $M\left(1,2,\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$	14. $f(x,y)=\mathrm{arctg}\dfrac{1+x}{1+y},\ A\,(0;0)$ до членів другого порядку включно	

4 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Мета вивчення теми:

1) засвоїти основні поняття та факти інтегрального числення функції багатьох змінних відповідно до теми «Кратні інтеграли»;

2) знати основні області застосування кратних інтегралів;

3) навчитися досліджувати функцію багатьох змінних на інтегровність;

4) навчитися зводити кратні інтеграли до повторних та обчислювати їх;

5) навчитися застосовувати кратні інтеграли до обчислення площ фігур, об'ємів тіл, площ поверхонь, в фізиці.

Основні поняття теми:

1) m-вимірний проміжок та його міра; інтеграл (кратний) на проміжку; функція m змінних, інтегровна на проміжку *(див. пункт 4.1.1)*;

2) верхня та нижня сума Дарбу функції m змінних на m-вимірному проміжку *(див. підрозділ 4.2)*;

3) множина лебеґової міри нуль в m-вимірному просторі *(див. підрозділ 4.3)*;

4) допустима множина в $\mathbb{R}_2^m$ та її міра (об'єм); інтеграл по допустимій множині; функція, інтегровна на допустимій множині *(див. пункт 4.4.1)*;

5) повторний інтеграл *(див. пункт 4.5.1)*;

6) дифеоморфізм: якобіан дифеоморфного відображення; полярні, циліндричні та сферичні координати *(див. пункти 4.5.2-4.5.6)*.

Основні факти теми:

1) властивості m-вимірного проміжку; необхідна умова інтегровності функції на проміжку *(див. пункт 4.1.1)*;

2) властивості інтегральних сум Дарбу на проміжку; критерій Дарбу інтегровності функції на проміжку *(див. підрозділ 4.2)*;

3) критерій Лебеґа інтегрованості функції на проміжку; класи функцій, інтегровних на $m-$вимірному проміжку *(див. підрозділ 4.3)*;

4) критерій Лебеґа інтегровності функції на допустимій множині *(див. пункт 4.4.1)*;

5) властивості кратного інтеграла по допустимій множині, теореми про середнє значення *(див. пункт 4.4.2)*;

6) теорема Фубіні про зведення кратного інтеграла до повторного та наслідки з неї *(див. пункт 4.5.1)*;

7) теорема про заміну змінних в кратному інтегралі, циліндричні та сферичні координати, їх якобіан, геометрична інтерпретація їх характеристик *(див. пункти 4.5.2-4.5.6)*.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

4.1 Поняття кратного інтеграла по m-вимірному проміжку

4.1.1 Інтеграл Рімана на m-вимірному проміжку.

Множину $I=\left\{\overline{x}=\left(x_1,x_2,...,x_j,...,x_m\right)\in\mathbb{R}^m : a_j\le x_j\le b_j, j=\overline{1,m}\right\}$ називають *m-вимірним проміжком*.

Приклади 4.1 Якщо $m=1$, то одновимірним проміжком є відрізок $[a_1,b_1]$ числової прямої.

4.2 Якщо $m=2$, то двовимірним проміжком є прямокутник на декартовій площині, координати якого задовольняють нерівності $a_1 \le x_1 \le b_1$, $a_2 \le x_2 \le b_2$, тобто в цьому випадку $I=\left[a_1,b_1\right]\times\left[a_2,b_2\right]$.

4.3 Якщо m=3, то тривимірним проміжком є прямий паралелепіпед в декартовому просторі, координати точок якого задовольняють нерівності $a_1 \le x_1 \le b_1$, $a_2 \le x_2 \le b_2$, $a_3 \le x_3 \le b_3$, тобто в цьому випадку $I=\left[a_1,b_1\right]\times\left[a_2,b_2\right]\times\left[a_3,b_3\right]$.

Мірою або об'ємом проміжку $I=I_{\left[\overline{a},\overline{b}\right]}$ (тут $\overline{a}=\left(a_1,...,a_m\right)$, $\overline{b}=\left(b_1,...,b_m\right)$) називають значення $\prod\limits_{j=1}^{m}\left(b_j-a_j\right)$ і записують:

$$\left|I\right|=V\left(I\right)=\mu\left(I\right)=\prod_{j=1}^{m}\left(b_j-a_j\right).$$

Кожен з відрізків $\left[a_j,b_j\right]$ ($j=\overline{1,m}$), що утворює проміжок I, розбивається на відрізки, а розбиття проміжку I утворюється із проміжків, кожен з яких є декартовим добутком відрізків утворених розбиттів.

Позначимо через $R=\left\{I_j\right\}_{j=1}^{n}$ множину проміжків розбиття, $\overline{\alpha}_j=\left(\alpha_1^j,\alpha_2^j,...,\alpha_k^j,...\alpha_m^j\right)\in I_j$ – проміжні (відмічені) точки, $P=\left\{\overline{\alpha}_j\right\}$ – множина відмічених точок.

Якщо A – довільна множина в $\mathbb{R}_2^m$, то $d(A)=\sup\left\{\rho\left(x,y\right):x,y\in A\right\}$ – діаметр множини A. Діаметром розбиття $d=d\left(R\right)$ називають максимальний серед усіх діаметрів проміжків розбиття, тобто

$$d=d\left(R\right)=\max_j d\left(I_j\right).$$

Інтегральною сумою функції $f\left(\overline{x}\right)$, що відповідає розбиттю $R=\left\{I_j\right\}_{j=1}^{n}$ проміжку I з відміченими точками $P=\left\{\overline{\alpha}_j\right\}$, називають значення такої суми

$$\sigma=\sigma\left(f,R,P\right)=\sum_{j=1}^{n}f\left(\overline{\alpha}_j\right)\cdot\left|I_j\right|.$$

Число $J=\lim\limits_{d\to0}\sigma$ називають *границею інтегральних сум* при діаметрі розбиття, що прямує до нуля ($d\to0$), якщо

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall R\,\forall P:\quad d<\delta\Rightarrow\left|\sigma-J\right|<\varepsilon.$$

Якщо існує $J=\lim\limits_{d\to0}\sigma$, тоді функцію $f\left(\overline{x}\right)$ називають *інтегровною за Ріманом на проміжку* I. *Позначення:* $f\left(\overline{x}\right)\in\Re\left(I\right)$. Число J називають *інтегралом Рімана на проміжку* I. Позначення: $J=\int\limits_I f\left(\overline{x}\right)d\overline{x}$.

Ще раз <u>підкреслимо</u>, що значення границі $J=\lim\limits_{d\to0}\sigma$ (згідно до означення) НЕ ЗАЛЕЖИТЬ від способу розбиття і вибору відмічених точок.

Окремі випадки кратних інтегралів:

m=1 $\quad J=\int\limits_{I=[a,b]}f\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ – визначений інтеграл Рімана, *m=2* $J=\iint\limits_I f(x,y)\,dxdy$ *– подвійний інтеграл,*

m=3 $J=\iiint\limits_I f(x,y,z)\,dxdydz$ *– потрійний інтеграл.*

Теорема 4.1 (*необхідна умова інтегровності функції на проміжку*). $f(\overline{x})\in\Re(I) \;\Rightarrow\; f(\overline{x})-$обмежена на I.

4.2 Критерій Дарбу інтегровності на $m-$вимірному проміжку

Введемо позначення:

$$m_j=\inf_{\overline{x}\in I_j} f(\overline{x}),\quad M_j=\sup_{\overline{x}\in I_j} f(\overline{x}).$$

Тут $R=\{I_j\}_{j=1}^n$ – розбиття проміжку I.

Означимо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу функції $f(\overline{x})$ на проміжку I, що відповідає розбиттю R відповідно:

$$\underline{S}=\underline{S}(f,R)=\sum_{j=1}^n m_j\left|I_j\right|,\quad \overline{S}=\overline{S}(f,R)=\sum_{j=1}^n M_j\left|I_j\right|.$$

Властивості інтегральних сум Дарбу.

Властивість 1. $\boxed{\underline{S}(f,R)=\inf\limits_P \sigma(f,R,P)\le\sup\limits_P \sigma(f,R,P)=\overline{S}(f,R)}$.

Властивість 2. Якщо R_1 є подрібненням розбиття R, то має місце нерівність

$\boxed{\underline{S}(f,R)\le\underline{S}(f,R_1)\le\overline{S}(f,R_1)\le\overline{S}(f,R)}$.

Властивість 3. Будь-яка нижня сума для розбиття R_1 не більша за будь-яку верхню суму Дарбу для іншого розбиття R_2:

$\boxed{\underline{S}(f,R_1)\le\overline{S}(f,R_2)}$.

Властивість 4.

$\forall\varepsilon>0\;\forall R\;\exists P_1:\overline{S}(f,R)-\sigma(f,R,P_1)<\varepsilon$,

$\forall\varepsilon>0\;\forall R\;\exists P_2:\sigma(f,R,P_2)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon$.

Розглянемо множину $\left\{\overline{S}(f,R):R\right\}$. Вона обмежена знизу, наприклад, значенням суми $\underline{S}(f,R^*)$, де R^* – фіксоване розбиття. Отже, за основною теоремою теорії дійсних чисел [**7**, с. 48; **6**, с. 50],

$\exists\inf\left\{\overline{S}(f,R):R\right\}=\overline{J}$ *– верхній інтеграл Дарбу.*

Аналогічно,

$\exists\sup\left\{\underline{S}(f,R):R\right\}=\underline{J}$ *– нижній інтеграл Дарбу.*

Теорема 4.2 (*критерій Дарбу інтегровності функції на проміжку*). Обмежена функція $f(\overline{x})$ є інтегровною на проміжку *I* тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{d\to0}\left(\overline{S}-\underline{S}\right)=0$, тобто

обмежена функція $f(\overline{x})\in\Re(I) \;\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0\;\forall R\;\; d<\delta\;\Rightarrow\;\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon.$$

Наслідок 4.1 Обмежена функція $f\left(\overline{x}\right)$ є інтегровною на проміжку I тоді і тільки тоді, коли $\underline{J}=\overline{J}$, крім того, $\underline{J}=\overline{J}=J=\int\limits_I f\left(\overline{x}\right)dx$.

4.3 Класи інтегровних функцій на проміжку

Теорема 4.3 Неперервна функція на проміжку інтегровна на ньому.

Множина A *має лебеґову міру нуль* (позначення: $\mu A=0$), якщо її можна покрити не більше, ніж зчисленною кількістю проміжків, із сумарним об'ємом меншим наперед заданого ε. Тобто

$$\mu A=0 \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon>0\,\exists\{I_j\}_{j\in M}:\left(\overline{\overline{M}}\le a \ \wedge\ A\subset\bigcup_{j\in M}I_j \ \wedge\ \sum_{j\in M}\left|I_j\right|<\varepsilon\right).$$

Приклад 4.4 Якщо A – скінченна множина, тоді $\mu A=0$.

Приклад 4.5 Якщо A – зчисленна ($\overline{\overline{A}}=a$), тоді $\mu A=0$.

Приклад 4.6 Якщо $I^{(m-1)}-(m-1)$– вимірний проміжок, а функція $\varphi\left(\overline{x}\right)$– неперервна на $I^{(m-1)}$, тоді множина $G=\left\{(\overline{x},y):y=\varphi(\overline{x})\wedge\overline{x}\in I^{(m-1)}\right\}$ в $\mathbb{R}^m$, яка є графіком функції $\varphi(\overline{x})$, має лебеґову міру нуль, тобто $\mu G=0$.

Теорема 4.4 (*критерій Лебеґа інтегровності функції на проміжку*). Обмежена функція $f(\overline{x})$ на проміжку I інтегровна тоді і тільки тоді, коли множена A її точок розриву має міру Лебеґа нуль, тобто $\mu A=0$.

Якщо деяка властивість виконується у всіх точках, окрім точок лебеґової міри нуль, то кажуть що така властивість виконується *майже скрізь*. Будемо скорочено це позначати «м.с.». Тому останню теорему можна сформулювати в такий спосіб:

Обмежена функція інтегровна на проміжку I тоді і тільки тоді, коли вона на ньому неперервна майже скрізь.

4.4 Означення інтеграла по множині. Властивості кратних інтегралів

4.4.1 Означення інтеграла по множині.

Пригадаємо, що *межовою точкою* множини $A\subset\mathbb{R}_2^m$ називають точку, в будь-якому околі якої лежать як точки множини A, так і точки доповнення до неї. Множину всіх межових точок множини A називають *межею* цієї множини і позначають ∂A.

Множину A із m-вимірного простору $\mathbb{R}_2^m$ називають *допустимою*, якщо множина її межових точок має лебеґову міру нуль. Тобто

$A\subset\mathbb{R}^m$ – допустима $\overset{def}{\Leftrightarrow}\mu\left(\partial A\right)=0$.

Приклад 4.7 Якщо область D обмежена графіками функцій $y=\varphi\left(\overline{x}\right)$, $y=\psi\left(\overline{x}\right)$, неперервними на $\mathrm{I}^{(m-1)}$, тоді її межа має лебеґову міру нуль (згідно з прикладом 4.6), а D є допустимою множиною в $\mathbb{R}^m$.

Зокрема, якщо $m = 2$, функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – неперервні на $[a,b]$, а також $f_1(x) \ge f_2(x)$ на $[a,b]$, то множина

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge f_2(x) \le y \le f_1(x)\}$$

(рис. 4.1) має межу лебеґової міри нуль. Отже, вона є допустимою.

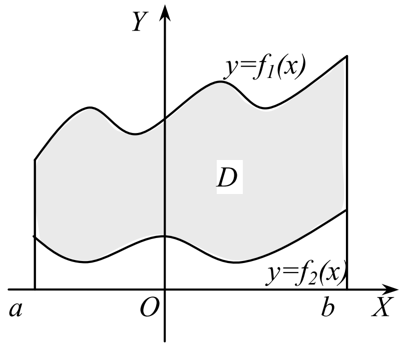


Рис. 4.1

Приклад 4.8 Тетраедр, куля, призма, куб, паралелепіпед є множинами допустимими, оскільки множина їх межових точок утворюється скінченною кількістю неперервних поверхонь.

Характеристичною функцією множини E називають функцію вигляду:

$$\chi_E(\overline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} \in E, \\ 0, & \overline{x} \notin E. \end{cases}.$$

Задамо функцію $f\chi_E(\overline{x}) = \begin{cases} f(\overline{x}), & \overline{x} \in E, \\ 0, & \overline{x} \notin E. \end{cases}$

Нехай E – допустима множина, тоді *інтегралом від функції* $f(\overline{x})$ *по допустимій множині* E називають інтеграл по проміжку I, що покриває E, від функції $f\chi_E(\overline{x})$, тобто

$$\int_E f(\overline{x})d\overline{x} \overset{def}{=} \int_{I \supset E} f\chi_E(\overline{x})d\overline{x}.$$

Якщо існує інтеграл в правій частині останньої рівності, тобто $f\chi_E \in \Re(I)$, тоді функцію $f(\overline{x})$ називають *інтегровною на множині* E і позначають $f \in \Re(E)$.

Теорема 4.5 (*критерій Лебеґа інтегровності функції на допустимій множині*). Функція $f(\overline{x})$, обмежена на допустимій множині E, інтегровна на цій множині тоді і тільки тоді, коли множина її точок розриву на множині E має лебеґову міру нуль. Тобто

$$\left.\begin{array}{l} f - \text{обм. на } E, \\ f \in \Re(E), \end{array}\right\} \Leftrightarrow \mu A = 0,$$ де A – множина точок розриву $f(\overline{x})$ на E.

Жордановою мірою (об'ємом) допустимої множини E називають інтеграл по цій множині від одиничної функції. Позначення: μE або $V(E)$. Тобто,

$$\mu E = V(E) \overset{def}{=} \int_E 1 d\overline{x}.$$

4.4.2 Загальні властивості кратних інтегралів

Надалі будемо вважати, що E, E_1, E_2 – допустимі множини.

Властивість 1 (*властивість лінійності*). $f, g \in \Re(E) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \Re(E)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, крім того $\int_E (\alpha f(\overline{x}) + \beta g(\overline{x}))\, d\overline{x} = \alpha \int_E f(\overline{x})\, d\overline{x} + \beta \int_E g(\overline{x})\, d\overline{x}$.

Властивість 2. $\left.\begin{array}{l} f(\overline{x}) \in \Re(E), \\ f(\overline{x}) \underset{E}{\overset{м.с.}{=}} 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \int_E f(\overline{x})d\overline{x} = 0.$

Наслідок 4.3 $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \Re(E), \\ f(\bar{x}) \underset{E}{\overset{м.с.}{=}} g(\bar{x}), \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_E f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int\limits_E g(\bar{x})\,d\bar{x}$.

Властивість 3 (*адитивність інтеграла*). Нехай E_1 і E_2 – допустимі множини, тоді виконуються наступні імплікації:

$$\exists \int\limits_{E_1 \cup E_2} f(\bar{x})\,d\bar{x} \overset{1\ \ вл.}{\Leftrightarrow} \left(\exists \int\limits_{E_1} f(\bar{x})\,d\bar{x} \wedge \exists \int\limits_{E_2} f(\bar{x})\,d\bar{x} \right) \overset{2\ \ вл.}{\Rightarrow} \exists \int\limits_{E_1 \cap E_2} f(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Крім того

$$\mu(E_1 \cap E_2) = 0 \Rightarrow \int\limits_{E_1 \cup E_2} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int\limits_{E_1} f(\bar{x})\,d\bar{x} + \int\limits_{E_2} f(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

$$\exists \qquad \Rightarrow \qquad \exists \qquad \wedge \qquad \exists$$

Властивість 4. $f \in \Re(E) \Rightarrow \begin{cases} |f| \in \Re(E); \\ \left| \int\limits_E f(\bar{x})\,d\bar{x} \right| \le \int\limits_E |f(\bar{x})|\,d\bar{x}. \end{cases}$

Властивість 5. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \Re(E), \\ f(\bar{x}) \ge 0 \ \forall \bar{x} \in E, \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_E f(\bar{x})\,d\bar{x} \ge 0$.

Властивість 6. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \Re(E), \\ f(\bar{x}) \ge g(\bar{x}) \ \forall \bar{x} \in E, \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_E f(\bar{x})\,d\bar{x} \ge \int\limits_E g(\bar{x})\,d\bar{x}$.

Властивість 7. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \Re(E), \\ E - \text{доп. мн.}, \\ m \le f(\bar{x}) \le M \ \ \forall \bar{x} \in E, \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot \mu E \le \int\limits_E f(\bar{x})\,d\bar{x} \le M \cdot \mu E$.

Властивість 8. $\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) \in \Re(E), \\ m = \inf\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \\ M = \sup\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \gamma \in [m, M] : \int\limits_E f(\bar{x})\,d\bar{x} = \gamma \cdot \mu E$.

Властивості 7–8 – це різні формулювання *теореми про середнє*.

Властивість 9 (*неперервний випадок теореми про середнє*).

$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) - \text{непер. на } E, \\ E - \text{доп. зв'язна мн.}, \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in E : \int\limits_E f(\bar{x})\,d\bar{x} = f(\xi) \cdot \mu E$.

Властивість 10 *(узагальнена теорема про середнє).*

$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) \in \Re(E), \\ m = \inf\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \\ M = \sup\limits_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \\ g(\bar{x}) \ge 0 \ \forall \bar{x} \in E, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) \in \Re(E), \\ \exists \gamma \in [m, M] : \int\limits_E f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})\,d\bar{x} = \gamma \cdot \int\limits_E g(\bar{x})\,d\bar{x}. \end{cases}$

Властивість 11 (*неперервний випадок узагальненої теореми про середнє*).

$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}), g(\bar{x}) - \text{непер. на } E, \\ E - \text{доп. зв'язна мн.}, \\ g(\bar{x}) \ge 0 \ \forall \bar{x} \in E, \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in E : \int\limits_E f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})\,d\bar{x} = f(\xi) \cdot \int\limits_E g(\bar{x})\,d\bar{x}$.

Властивість 12. $\left.\begin{array}{l}\int\limits_E f(\overline{x})d\overline{x}=0,\\ f(\overline{x})\geq 0\ \ \forall\overline{x}\in E,\end{array}\right\}\Rightarrow f(\overline{x})\overset{м.с.}{\underset{E}{=}}0$.

4.5 Теорема Фубіні та наслідки з неї. Заміна змінної під знаком кратного інтеграла

4.5.1 Теорема Фубіні та наслідки з неї.

Нехай X – проміжок в $\mathbb{R}^m$, Y – проміжок в $\mathbb{R}^n$, $X\times Y$ – проміжок в $\mathbb{R}^{m+n}$.

Теорема 4.6 (*теорема Фубіні*).

$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{x},\overline{y})\in\Re(X\times Y),\\ \overline{x}\in X,\overline{y}\in Y,\end{array}\right\}\Rightarrow \int\limits_{X\times Y} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{x}d\overline{y}=\int\limits_X d\overline{x}\left(\int\limits_Y f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}\right)=\int\limits_Y d\overline{y}\left(\int\limits_X f(\overline{x},\overline{y})d\overline{x}\right).$$

Перший інтеграл – це інтеграл на проміжку $X\times Y$. Другий и третій – це повторні інтеграли, які обчислюються таким чином. Нехай $\overline{x}\in X$ – довільний фіксований елемент проміжку X. Розглянемо $F(\overline{x})=\int\limits_Y f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}$. Значення функції $F(\overline{x})$ у випадку, коли існує інтеграл $\int\limits_Y f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}$, обирається як значення цього інтеграла; а у випадку, коли не існує інтеграл $\int\limits_Y f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}$, значення функції $F(\overline{x})$ обирається будь-яким між $\underline{\int\limits_Y} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}=\underline{J}(\overline{x})$ і $\overline{\int\limits_Y} f(\overline{x},\overline{y})d\overline{y}=\overline{J}(\overline{x})$, тобто

$$F(\overline{x})\in\left[\underline{J}(\overline{x}),\overline{J}(\overline{x})\right].$$

Наслідок 4.4 Якщо $X=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_m,b_m]\subset\mathbb{R}^m$, то

$$\int\limits_X f(\overline{x})d\overline{x}=\int\limits_{a_1}^{b_1}dx_1\int\limits_{a_2}^{b_2}dx_2\ldots\int\limits_{a_m}^{b_m}f(x_1,x_2,\ldots,x_m)dx_m.$$

Наслідок 4.5 Нехай D – допустима множина в $\mathbb{R}^{m-1}$, E – допустима множина в $\mathbb{R}^m$, яка визначається наступним чином

$$E=\left\{(\overline{x},y)\in\mathbb{R}^m:\overline{x}\in D\wedge\varphi(\overline{x})\leq y\leq\psi(\overline{x})\right\}.$$

Якщо функція $f(\overline{x},y)$ – інтегровна на E (тобто $f(\overline{x},y)\in\Re(E)$), тоді

$$\boxed{\int\limits_E f(\overline{x},y)d\overline{x}dy=\int\limits_D d\overline{x}\int\limits_{\varphi(\overline{x})}^{\psi(\overline{x})}f(\overline{x},y)dy}.$$

Наслідок 4.6

$$\left.\begin{array}{l}D\text{ – доп. мн., що визн. так само,}\\ \text{як і в поперед. наслідку }\left(D\subset\mathrm{R}^{m-1}\right),\\ \varphi(\overline{x})\text{ і }\psi(\overline{x})\text{ – неперервні на } D,\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1)\ E\text{ – допустима множина,}\\ 2)\ \boxed{\mu(E)=\int\limits_D(\psi(\overline{x})-\varphi(\overline{x}))\,d\overline{x}}.\end{array}\right.$$

Наслідок 4.7 Нехай E – допустима множина, що належить проміжку I, тобто $E \subset I \subset \mathbb{R}^m$. Подамо I у вигляді декартового добутку: $I = I_x \times I_y$, де $I_x \subset \mathbb{R}^{m-1}$, $I_y \subset \mathbb{R}^1$. Тоді при майже всіх значеннях $y_0 \in I_y$ переріз

$$E_{y_0} = \left\{ \left(\overline{x}, y \right) \in E : y = y_0 \right\}$$

множини E $\left(m-1 \right)$-вимірною гіперплощиною $y = y_0$ для майже всіх $y_0 \in I_y$ являє собою допустиму підмножину, причому

$$\boxed{\mu E = \int_{I_y} \tilde{\mu}\left(E_y \right) dy}.$$

Тут $\tilde{\mu}\left(E_y \right) - \left(m-1 \right)$-вимірна міра множини E_y у випадку, коли E_y – допустима. Якщо E_y – не є допустимою множиною, тоді $\tilde{\mu}\left(E_y \right)$ – це число, що лежить між $\underline{\int_{E_y}} 1dy$ і $\overline{\int_{E_y}} 1dy$.

4.5.2 Заміна змінної під знаком кратного інтеграла. Загальний випадок.

Припущення:

1) $D_{\overline{t}} \subset \mathbb{R}^m$, $D_{\overline{x}} \subset \mathbb{R}^m$;

2) $\varphi(\overline{t})$– *дифеоморфізм*, тобто взаємно однозначне відображення множин $D_{\overline{t}} \to D_{\overline{x}}$, причому таке, що $x_l = \varphi_l(\overline{t})$– неперервно диференційовні на $D_{\overline{t}}$ $\forall l = \overline{1,m}$ і $t_l = \varphi_l^{-1}(\overline{x})$– неперервно диференційовні на $D_{\overline{x}}$ $\forall j = \overline{1,m}$;

3) $D_{\overline{t}}$ і $D_{\overline{x}}$ – відкриті множини в $\mathbb{R}_2^m$;

4) $f(\overline{x})$– неперервна на $D_{\overline{x}}$ (або у загальному випадку $f \in \Re(D_{\overline{x}})$).

Теорема 4.7 (*заміна змінної під знаком кратного інтеграла).* Якщо $f(\overline{x})$– неперервна на $D_{\overline{x}}$, $\overline{x} = \varphi(\overline{t})$ – дифеоморфізм $D_{\overline{t}}$ на $D_{\overline{x}}$, $D_{\overline{x}} = \varphi(D_{\overline{t}})$, тоді має місце рівність

$$\boxed{\int_{D_{\overline{x}} = \varphi(D_{\overline{t}})} f(\overline{x}) d\overline{x} = \int_{D_{\overline{t}}} f(\varphi(\overline{t})) \cdot \det \varphi'(\overline{t}) d\overline{t}}.$$

Тут

$$\det \varphi'(\overline{t}) = \operatorname{abs} \frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{D(t_1, ..., t_m)} = \operatorname{abs} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & .... & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial t_1} & .... & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

Зауваження 4.3 $D_{\overline{x}}$ і $D_{\overline{t}}$ – це одна і та сама множина, але виражена через різні змінні.

4.5.3 Полярні координати.

У полярній системі координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ (див. рис. 4.2,а)

ρ – відстань від точки *M* площини до початку координат *O* ($\rho \geq 0$!),

φ – кут між OM і віссю Oρ,

ρ=*R* – коло радіусом *R* з центром в т. O,

$\varphi = \varphi_0$ – промінь, що утворює кут φ_0 з віссю Oρ (рис 4.2,б).

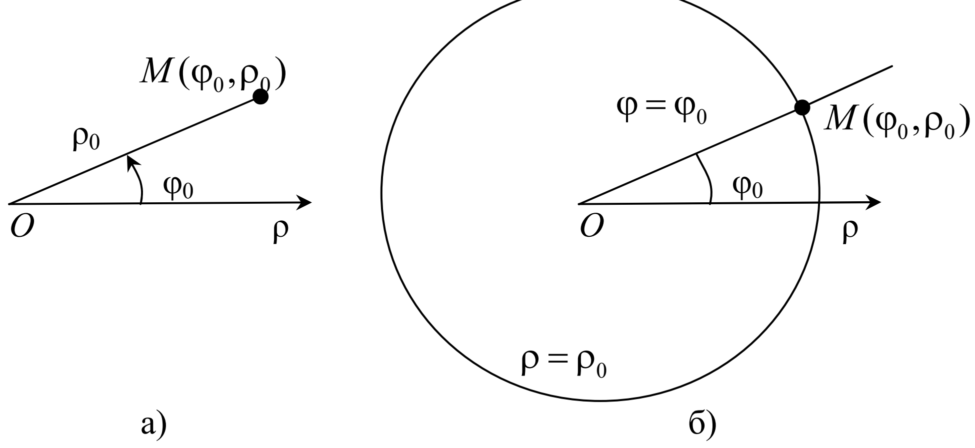


Рис.4.2

Елемент площі в полярній системі координат: $|I| d\rho d\varphi = \rho d\rho d\varphi$. Тоді площа плоскої області D обчислюється як

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi .$$

4.5.4 Циліндричні координати.

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = h. \end{cases}$ h – визначає аплікату точку *M* в просторі,

ρ – відстань від проекції *A* точки *M* простору на площину Oxy до початку координат *O*, тобто $\rho = OA$ ($\rho \geq 0$!),

φ – кут між OA і додатним напрямком осі Ox (див. рис. 4.3 а).

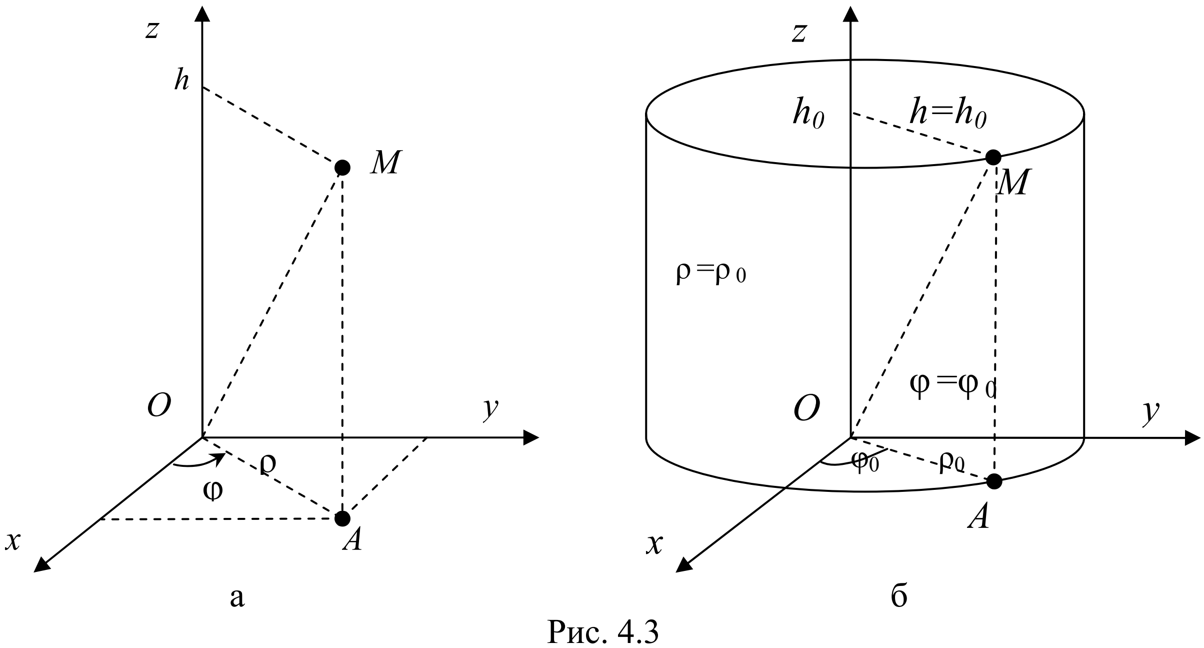


Рис. 4.3

$h = h_0$ – площина, паралельна Oxy,

$\rho = \rho_0$ – циліндр, твірна якого паралельна осі Oz і вісь якого збігається з цією віссю, радіус перерізу циліндра дорівнює ρ_0,

$\varphi = \varphi_0$ – півплощина, обмежена віссю аплікат, яка утворює з віссю абсцис кут φ_0 (див. рис. 4.3 б).

Знайдемо якобіан:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho .$$

Елемент об'єму: $dxdydz = |I| d\rho d\varphi dh = \rho \; d\rho d\varphi dh$.

4.5.5 Сферичні координати.

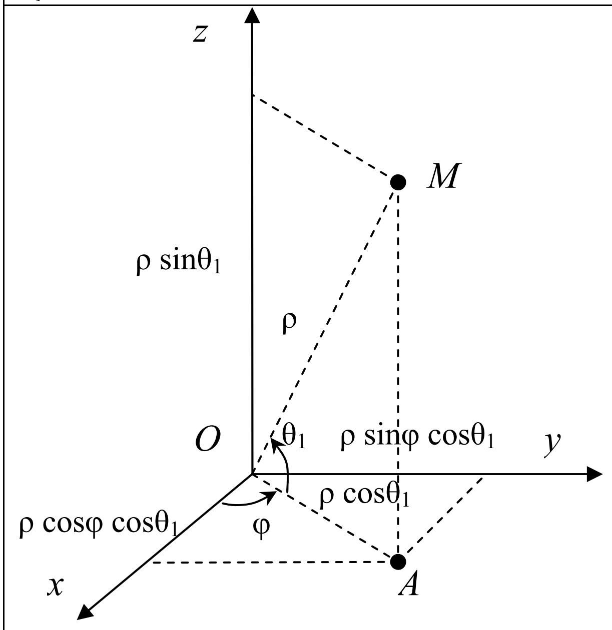
<table>
<tr><td>$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta_1, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta_1, \\ z = \rho\sin\theta_1 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta_2, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta_2, \\ z = \rho\cos\theta_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>

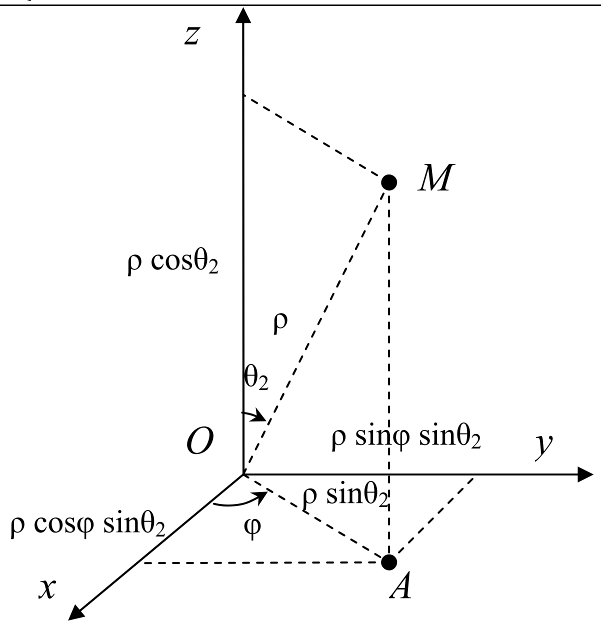
Рис. 4.4</td><td>

Рис. 4.5</td></tr>
<tr><td>θ_1 – кут між радіус-вектором OM та площиною Oxy</td><td>θ_2 – кут між радіус-вектором OM і додатнім напрямком осі Oz</td></tr>
<tr><td>$-\frac{\pi}{2} \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}; \quad |I_1| = \rho^2\cos\theta_1$</td><td>$0 \le \theta_2 \le \pi; \; |I_2| = \rho^2\sin\theta_2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ρ – відстань від початку координат до точки M, тобто $\rho = OM$ ($\rho \ge 0$!),
φ – кут між OA і віссю Ox, де A – це проекція точки M простору на площину Oxy</td></tr>
<tr><td>Елемент об'єму:
$dxdydz = \rho^2\cos\theta_1 \; d\rho \; d\varphi \; d\theta_1$</td><td>Елемент об'єму:
$dxdydz = \rho^2\sin\theta_2 \; d\rho \; d\varphi \; d\theta_2$</td></tr>
</table>

Обчислимо якобіан в першому випадку:

$$|I_1| = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta_1)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta_1 & -\rho\sin\varphi\cos\theta_1 & -\rho\cos\varphi\sin\theta_1 \\ \sin\varphi\cos\theta_1 & \rho\cos\varphi\cos\theta_1 & -\rho\sin\varphi\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & \rho\cos\theta_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\sin\theta_1\sin^2\varphi\cos\theta_1\sin\theta_1 + \rho^2\sin\theta_1\cos^2\varphi\cos\theta_1\sin\theta_1 +$$
$$+\rho^2\cos\theta_1\cos^2\varphi\cos^2\theta_1 + \rho^2\cos\theta_1\sin^2\varphi\cos^2\theta_1 = \rho^2\cos\theta_1.$$

Оскільки

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2(\cos^2\varphi\cos^2\theta_1 + \sin^2\varphi\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = \rho^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = \rho^2,$$

тому $\rho = \rho_0$ – сфера з центром в т.O радіуса ρ_0 (рис. 4.6).

$\theta_1 = \theta_0$ ($\theta_2 = \theta_0$) – частина конуса, твірна якого з площиною Oxy (з віссю Oz) утворює кут θ_0. При перерізі сфери $\rho = \rho_0$ конусом $\theta_1 = \theta_0$ ($\theta_2 = \theta_0$) утворюється паралель на сфері.

Оскільки $\varphi = \angle(OA, Ox)$, то $\varphi = \varphi_0$ – півплощина, обмежена віссю аплікат, яка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут φ_0. Переріз сфери цією півплощиною утворює меридіан.

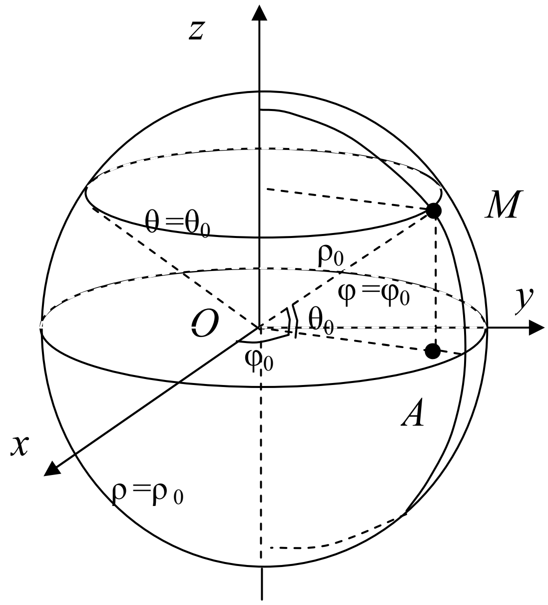


Рис. 4.6

4.5.6 Сферичні координати в $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{cases} x_1 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2.....\sin\varphi_{m-1}, \\ ...... \\ x_k = \rho\cos\varphi_{k-1}\prod\limits_{i=k}^{m-1}\sin\varphi_i, k = 2,3,....,m-1, \\ ...... \\ x_m = \rho\cos\varphi_{m-1}, \end{cases}$$

$$0 \le \varphi_1 \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi_i \le \pi \ \forall i = \overline{2, m-1}, \quad \rho \ge 0,$$

$$|I| = \rho^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^{k-1}\varphi_k \text{ – якобіан.}$$

Приклад 4.9 Обчислити $J = \int\limits_D \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}\,dx_1...dx_m$, де

$D: x_1^2 + ... + x_m^2 \le R^2$.

Оскільки $x_1^2 + ... + x_m^2 = R^2$, то $D:\ \rho^2 \le R^2 \quad \Rightarrow \quad D:\ \rho \le R$. Отже,

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi}\sin\varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi}\sin^2\varphi_3 d\varphi_3 .... \int_0^{\pi}\sin^{m-2}\varphi_{m-1}d\varphi_{m-1}\int_0^R \rho^{m-1}\cdot\rho\, d\rho =$$

$$=\frac{R^{m+1}}{m+1}\cdot 2\pi\cdot 2^{m-2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi_2 d\rho_2\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi_3 d\varphi_3\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi_4 d\varphi_4 ....\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}\varphi_{m-1}d\varphi_{m-1}=$$

$$=\frac{R^{m+1}}{m+1}\cdot\pi\cdot 2^{m-1}\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2!!}{3!!}\cdot 1\cdot ...\cdot\frac{(m-4)!!}{(m-3)!!}\cdot\frac{(m-3)!!}{(m-2)!!}\cdot\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & m-\text{парне},\\ 1, & m-\text{непарне}\end{cases}=$$

$$=\frac{R^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{\pi 2^{m-1}}{(m-2)!!}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{m-2}{2}\right]},$$

де $[a]-$ ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a. ■

4.6 Питання для самоконтролю

1. Навести означення m-вимірного проміжку та його міри.
2. Виписати властивості m-вимірного проміжку і довести їх.
3. Надати поняття розбиття m-вимірного проміжку та діаметру розбиття, множина проміжних (відмічених) точок m-вимірного проміжку, інтегральна сума Рімана функції m змінних на m-вимірному проміжку.
4. Навести означення границі інтегральних сум Рімана на проміжку при діаметрі розбиття, що прямує до нуля, інтеграла Рімана на проміжку, функції m змінних, інтегровною за Ріманом на проміжку.
5. Сформулювати та довести необхідну умову інтегровності функції на проміжку.
6. Означити верхню та нижню суми Дарбу функції m змінних на m-вимірному проміжку.
7. Сформулювати та довести критерій Дарбу інтегровності функції на проміжку.
8. Виписати властивості інтегральних сум Дарбу на проміжку і довести їх.
9. Ввести поняття верхнього, нижнього інтеграла Дарбу.
10. Сформулювати означення множини лебеґової міри нуль в m-вимірному просторі. Навести приклади.
11. Сформулювати критерій Лебеґа інтегрованості функції на проміжку.
12. Навести означення межової точки множини в $\mathbb{R}_2^m$, допустимої множини в $\mathbb{R}_2^m$ та її міри (об’єму).
13. Означити характеристичну функцію множини, інтеграл по допустимій множині, функцію, інтегровну на допустимій множині.
14. Виписати класи функцій, інтегровних на $m-$вимірному проміжку в довести відповідні твердження.
15. Сформулювати та довести критерій Лебеґа інтегровності функції на допустимій множині.
16. Виписати та довести властивості кратного інтеграла по допустимій множині, пов’язані зі знаком рівності.
17. Виписати і довести властивості кратного інтеграла по допустимій множині, пов’язані зі знаком нерівності, зокрема, теореми про середнє значення.
18. Сформулювати та довести теорему Фубіні про зведення кратного інтеграла до повторного та наслідки з неї.
19. Навести означення дифеоморфізму: якобіана дифеоморфного відображення.
20. Сформулювати та провести евристичне доведення теореми про заміну змінних в кратному інтегралі.
21. Виписати полярні, циліндричні та сферичні координати, їх якобіан, надати геометричну інтерпретацію їх характеристик.

5 МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕМИ «КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ»

Задача 5.1 Змінити порядок інтегрування:

$$I_1 = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{-\sqrt{16-8y}} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx$$

Розв'язання. Перший інтеграл в сумі задає область

$$D_1:\begin{cases} 0 \le y \le 2; \\ -\sqrt{16-y^2} \le x \le -\sqrt{16-8y}. \end{cases}$$

Криві, що обмежують цю область, мають рівняння:

$$y=0,\ \ y=2,\ \ x=-\sqrt{16-y^2},$$
$$x=-\sqrt{16-8y}.$$

З'ясуємо типи цих кривих:

1) $y=0,\ y=2$ – горизонтальні прямі,

2) $x=-\sqrt{16-y^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x \le 0, \end{cases}$ тому $x=-\sqrt{16-y^2}$ – ліва частина кола з центром в точці $(0,0)$ радіуса 4,

3) $x=-\sqrt{16-8y} \Rightarrow \begin{cases} y=2-\dfrac{x^2}{8}, \\ x \le 0, \end{cases}$ тому $x=-\sqrt{16-8y}$ – ліва вітка параболи.

Зважаючи на означення області D_1, зобразимо її на координатній площині (рис. 5.1).

Тепер розглянемо другий інтеграл і область, яку він визначає:

$$D_2:\begin{cases} 2 \le y \le 4; \\ -\sqrt{16-y^2} \le x \le 0. \end{cases}$$

Криві, що обмежують цю область:

1) $y=2,\ y=4$ – горизонтальні прямі,

2) $x=-\sqrt{16-y^2}$ – ліва частина кола з центром в точці $(0,0)$ радіуса 4.

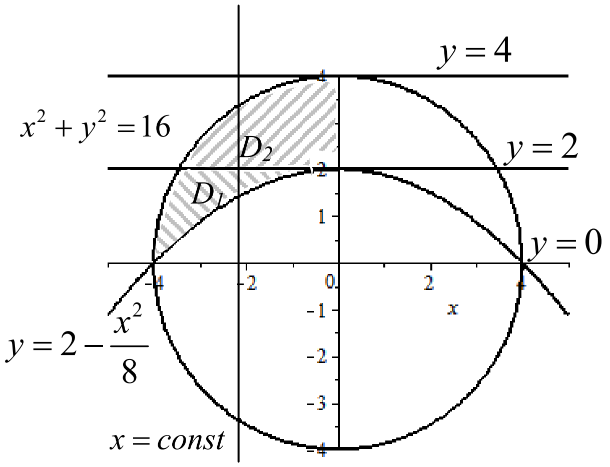


Рис. 5.1

Область D_2 зображено разом з областю D_1 на рис. 5.1. Об'єднання цих областей позначимо через D. Область D є допустимою, оскільки обмежена графіками неперервних функцій (згідно з прикладом 4.7). Отже, даний повторний інтеграл (за наслідком 4.5 із теореми Фубіні) відповідає подвійному інтегралу $I_1 = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

За наслідком 4.5 із теореми Фубіні подвійний інтеграл можна записати також як повторний із зовнішнім інтегруванням за змінною x. У цьому випадку потрібно вказати незмінні межі інтегрування за x, а межі інтегрування за y виразити неперервними функціями, що залежать від x. Для цього потрібно зробити такі дії.

1) В рівняннях межі області D виразити y через x:

$$x = -\sqrt{16-8y} \Rightarrow y = 2 - \frac{x^2}{8},$$

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{16-x^2},$$

при цьому необхідно врахувати, що в рівнянні другої кривої перед коренем потрібно обрати знак „+”, тому що у даному випадку область обмежена <u>верхньою частиною кола</u> $x^2 + y^2 = 16$.

2) Потрібно провести прямі, паралельні вісі ординат (тобто прямі $x = const$) з метою виявлення необхідності розбиття області на частини, а саме: незалежно від розташування такої прямої вона спочатку перетинає криву $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$, а потім криву $y = \sqrt{16-x^2}$, тому у даному випадку розбивати область на частини не потрібно.

3) Області D відповідають такі зміни x і y: $-4 \le x \le 0$, $2 - \dfrac{x^2}{8} \le y \le \sqrt{16-x^2}$.

Розставляємо межі інтегрування із зовнішнім інтегруванням за x:

$$I_1 = \int_{-4}^{0} dx \int_{2-\frac{x^2}{8}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy. \quad \blacksquare$$

Задача 5.2 Змінити порядок інтегрування: $\displaystyle\int_0^{x_1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-x^2} f(x,y)dy$,

де $x_1 > 0 -$ абсциса точки перетину графіків функцій $y = -x^2$ і $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо точку перетину даних кривих, зважаючи на те, що її абсциса додатна ($x_1 > 0$):

$$\begin{cases} y = -x^2, \\ y = -\sqrt{1-x^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{-y}, \\ y \le 0, \\ x = +\sqrt{1-y^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y}, \\ y \le 0, \\ \sqrt{-y} = \sqrt{1-y^2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y}, \\ y \le 0, \\ y^2 - y - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{-y}, \\ y \le 0, \\ y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx 0,79, \\ y_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62. \end{cases}.$$

Даний інтеграл задає область

$$D:\begin{cases}0\le x\le x_1,\\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le -x^2.\end{cases}$$

Криві, що обмежують цю область, мають рівняння:

$$x=0,\; x=x_1,\; y=-\sqrt{1-x^2},\; y=-x^2.$$

З'ясуємо типи цих кривих:

1) $x=0,\; x=x_1$ – вертикальні прямі,

2) $y=-\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y\le 0,\end{cases}$ тому $y=-\sqrt{1-x^2}$ – нижня частина кола з центром в точці $(0,0)$ радіуса 1,

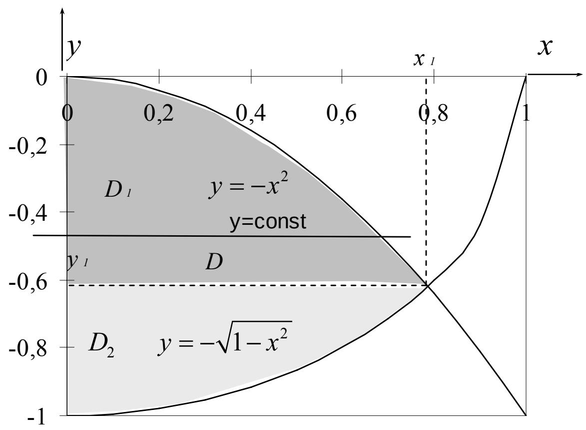


Рис. 5.2

3) $y=-x^2$ – парабола, вітки якої спрямовані вниз.

Зображення області наведено на рис. 5.2. За наслідком 4.5 із теореми Фубіні $I_2=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, і цей подвійний інтеграл можна також записати повторним із зовнішнім інтегруванням за змінною y. В цьому випадку потрібно вказати незмінні межі інтегрування за y, а межі інтегрування за x виразити неперервними функціями, що залежать від y. Для цього зробимо такі дії.

1) В рівняннях кривих, що задають межу області, виразити x через y: $x=+\sqrt{-y},\, x=+\sqrt{1-y^2}$, при цьому необхідно врахувати, що в рівняннях кривих перед коренями стоїть знак „+", тому що область D обмежена правою віткою параболи і правою частиною кола.

2) Потрібно провести прямі, паралельні осі абсцис (тобто прямі $y=const$) з метою виявлення необхідності розбиття області на частини, а саме:

- якщо така пряма проходить вище прямої $y=y_1$, то вона спочатку перетинає вісь ординат, а потім криву $x=\sqrt{-y}$,
- якщо така пряма проходить нижче прямої $y=y_1$, то вона спочатку перетинає вісь ординат, а потім криву $x=\sqrt{1-y^2}$;
- отримане означає, що дану область потрібно розбити на дві частини прямою $y=y_1$;

3) Перша з отриманих областей D_1 визначається нерівностями: $D_1:\begin{cases}y_1\le y\le 0,\\ 0\le x\le\sqrt{-y};\end{cases}$

4) Друга область D_2 – нерівностями: $D_2:\begin{cases}-1\le y\le y_1,\\ 0\le x\le\sqrt{1-y^2}.\end{cases}$

Розставляємо межі інтегрування зі зовнішнім інтегруванням за y:

$$I_2=\int\limits_{y_1}^{0}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{-y}}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{y_1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx,\quad y_1=\frac{1-\sqrt5}{2}.\ ■$$

Задача 5.3 Обчислити подвійний інтеграл:

$$I_3 = \iint\limits_D (x+y)dxdy,$$

$$D: y=(x+1)^2,\ x=\sin \pi y,\ 0 \le y \le 1.$$

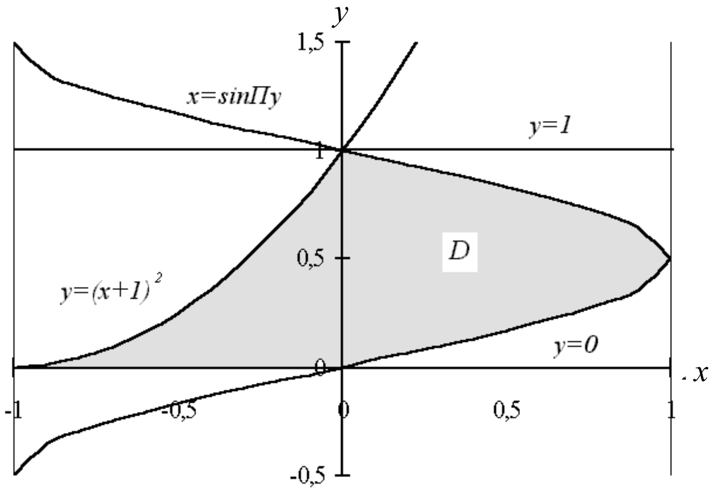


Рис. 5.3

Розв'язання. Зображення області D наведене на рис. 5.3. У даному випадку зручніше виражати даний інтеграл через повторний із зовнішнім інтегруванням за змінною y, щоб не розбивати область інтегрування на частини.

Виражаємо x через y в рівняннях кривих, отримаємо:

$$x = +\sqrt{y} - 1,\ x = \sin \pi y.$$

Перед коренем стоїть знак «+», оскільки область обмежена правою віткою параболи.

Область D визначається нерівностями:

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{y} - 1 \le x \le \sin \pi y. \end{cases}$$

За наслідком 4.5 із теореми Фубіні, подвійний інтеграл можна виразити повторним:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}-1}^{\sin \pi y} (x+y)dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + yx \right)\Bigg|_{\sqrt{y}-1}^{\sin \pi y} =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{\sin^2 \pi y}{2} + y \sin \pi y - \frac{\left(\sqrt{y}-1\right)^2}{2} - y\left(\sqrt{y}-1\right) \right) =$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\pi y + y \sin \pi y - \frac{y}{2} + \sqrt{y} - \frac{1}{2} - y\sqrt{y} + y \right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}y - \frac{1}{8\pi}\sin 2\pi y + \frac{y^2}{4} + \frac{2\sqrt{y^3}}{3} - \frac{2\sqrt{y^5}}{5} \right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 y \sin \pi y dy =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = y & du = dy \\ dv = \sin \pi y dy & v = -\dfrac{1}{\pi}\cos \pi y \end{matrix} \right\| = \frac{4}{15} - \frac{1}{\pi}\left(y \cos \pi y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi y dy \right) =$$

$$= \frac{4}{15} - \frac{1}{\pi}\left(-1 - \frac{1}{\pi}\sin \pi y \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{15} + \frac{1}{\pi}. \ \blacksquare$$

Задача 5.4 В завданнях а) і б) обчислити подвійний інтеграл за допомогою нових змінних, а в завданнях в)-д) – площу області, обмеженої кривими:

а) $I_4=\iint\limits_D xy(x+y)\,dx\,dy$; $D: x-y=-1, x-y=1, y=1/x, y=2/x,\ y>0$;

б) $I_5=\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx\,dy$; $D:\ \left(x^2+y^2\right)^2=32xy,\quad (x-2)^2+(y-2)^2\le 4$;

в) $\left(\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3=2ay^3$; **г)** $x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x,\ 0<a<b,\ 0<\alpha<\beta$;

д) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ за умови $x^2+y^2\ge a^2$.

Розв'язання. а) Зображення області D наведено на рис. 5.4.

Введемо нові змінні

$u=y-x,\ v=yx$.

Згідно з означенням області D отримаємо нерівності, що її характеризують:

$-1\le u\le 1,\ 1\le v\le 2$.

Знайдемо якобіан переходу від старих до нових змінних:

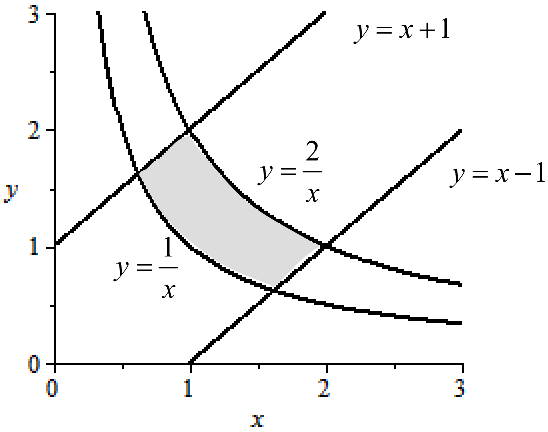


Рис. 5.4

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ y & x\end{vmatrix}=-x-y;$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{-x-y}\quad\Rightarrow\quad (x+y)\cdot abs\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=1.$$

Відображення

$$\begin{cases}u=y-x,\\ v=yx,\\ x>0,\end{cases}$$

яке переводить множину $\{(x,y):\ -1\le x-y\le 1,\ \ 1/x\le y\le 2/x\}$ у множину $\{(u,v):\ -1\le u\le 1,\ 1\le v\le 2\}$, визначає дифеоморфізм. Функції під знаком інтеграла неперервні на D, тому можна застосувати теорему 4.7 про заміну змінних під знаком кратного інтеграла:

$$I_4=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\{(u,v):\ -1\le u\le 1,\ 1\le v\le 2\}} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\cdot abs\frac{D(x,y)}{D(u,v)}du\,dv=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\cdot abs\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\\ =\underbrace{xy}_{=v}\underbrace{(x+y)\cdot abs\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}_{=1}=v\end{array}\right\|=\int\limits_1^2 v\,dv\int\limits_{-1}^1 du=\int\limits_1^2 v\,dv\cdot 2=\left.\frac{v^2}{2}\right|_1^2\cdot 2=3.\ \blacksquare$$

б) Введемо полярну систему координат $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$ (див. пункт 5.2 теоретичної частини), тоді для кривої $\left(x^2+y^2\right)^2=32xy$ матимемо:

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

$$\left(\rho^2\right)^2=32\,\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi\Rightarrow\rho^2=16\sin2\varphi\Rightarrow\rho=4\sqrt{\sin2\varphi}-\text{лемніската},$$

$$\rho^2\ge0\Rightarrow\sin2\varphi\ge0\Rightarrow\pi n\le\varphi\le\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathrm{Z}.$$

При $n=0$ полярний кут задовольняє нерівність $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, що відповідає I чверті.

При $n=1-$ нерівності $\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}$, це відповідає III чверті.

За умовою, лемніската лежить всередині круга

$$(x-2)^2+(y-2)^2\le4\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2\le2x+2y,$$

який в полярній системі координат задається нерівністю

$$\rho\le2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right).$$

Знайдемо точки перетину лемніскати $\rho=4\sqrt{\sin2\varphi}$ і кола $\rho=2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)$:

$$\begin{cases}\rho=4\sqrt{\sin2\varphi},\\ \rho=2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right),\end{cases}\Rightarrow4\sin2\varphi=\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)^2\Rightarrow\sin2\varphi=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi=\frac{1}{2}(-1)^m\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi m}{2},\ m\in\mathrm{Z}.$$

Розглянемо два значення для m – це 0 і 1. Саме вони будуть відповідати I чверті, а III чверті точки кола не належать. Матимемо:

$$m=0\Rightarrow\varphi_1=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3},\quad m=1\Rightarrow\varphi_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}.$$

Розглянемо інтеграл по тій області, яку зображено на рис. 5.5. Будемо її позначати через D. Ту область, яка є доповненням множини D до круга, пропонуємо розглянуте читачеві самостійно.

Щоб з'ясувати, чи потрібно область D розбивати на ділянки, побудуємо промені $\varphi=\varphi_0$.

- Якщо $0\le\varphi_0<\varphi_1$, то промінь $\varphi=\varphi_0$, виходячи з полярного полюса, проходить через область D і покидає її, проходячи через лемніскату.
- Те саме трапляється, коли $\varphi_2<\varphi_0\le\dfrac{\pi}{2}$.
- Якщо $\varphi_1<\varphi_0<\varphi_2$, то промінь $\varphi=\varphi_0$, виходячи з полярного полюса, проходить через область D і покидає її, проходячи через коло.
- Отримане означає, що дану область потрібно розбити на три частини променями $\varphi=\varphi_1$ та $\varphi=\varphi_2$.

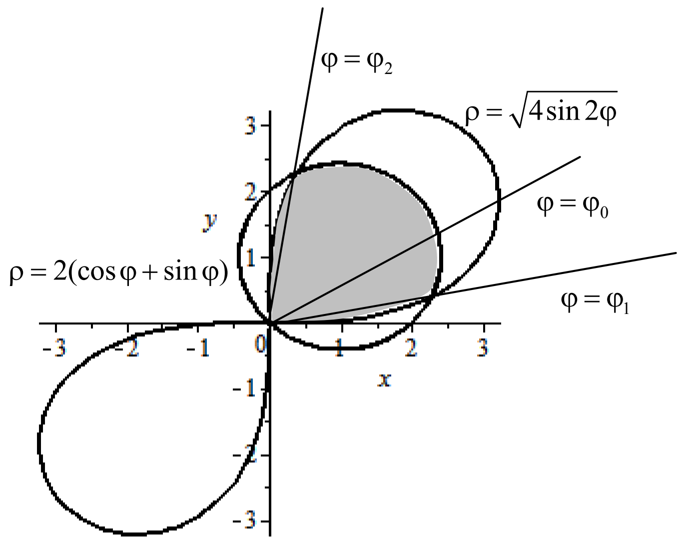


Рис. 5.5

Кожна з трьох отриманих областей визначається нерівностями:

$D_1:\ 0\le\varphi\le\varphi_1,\ 0\le\rho\le 4\sqrt{\sin 2\varphi}$,

$D_2:\ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2,\ 0\le\rho\le 2(\cos\varphi+\sin\varphi)$,

$D_3:\ \varphi_2\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 4\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Враховуючи значення якобіана в полярній системі координат $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\rho$, обчислимо даний інтеграл:

$$I_5=\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy=\int_0^{\varphi_1}d\varphi\int_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}}\operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\rho\,d\rho+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_0^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)}\varphi\rho\,d\rho+$$

$$+\int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}}\varphi\rho\,d\rho=\int_0^{\varphi_1}\varphi d\varphi\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}}+\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varphi d\varphi\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)}+\int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}}\varphi d\varphi\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{4\sqrt{\sin 2\varphi}}=$$

$$=8\int_0^{\varphi_1}\varphi\sin 2\varphi d\varphi+2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)^2d\varphi+8\int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}}\varphi\sin 2\varphi d\varphi=\left\|\begin{matrix}u=\varphi & du=d\varphi\\ dv=\sin 2\varphi d\varphi & v=-\dfrac{1}{2}\cos 2\varphi\end{matrix}\right\|=$$

$$=4\left(-\varphi\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\varphi_1}+4\left(-\varphi\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varphi(1+\sin 2\varphi)d\varphi=$$

$$=-4\varphi_1\cos 2\varphi_1+2\sin 2\varphi_1+2\pi+4\varphi_2\cos 2\varphi_2-2\sin 2\varphi_2+\varphi_2^2-\varphi_1^2+$$

$$+\left(-\varphi\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}=2\pi+\varphi_2^2-\varphi_1^2+3\varphi_2\cos 2\varphi_2-3\varphi_1\cos 2\varphi_1-$$

$$-\frac{3}{2}\sin 2\varphi_2+\frac{3}{2}\sin 2\varphi_1.$$

Оскільки

$$\sin 2\varphi_1=\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\quad \sin 2\varphi_2=\sin\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

$$\cos 2\varphi_1=\sqrt{1-\sin^2 2\varphi_1}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad \cos 2\varphi_2=\cos\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

то

$$I_5=\pi\left(2-\sqrt{2}\right)+\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\arcsin\frac{1}{3}.\ \blacksquare$$

в) Для обчислення площі області, обмеженої кривою $\left(\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^3=2ay^3$, введемо узагальнені полярні координати $\begin{cases}x=c\rho\cos\varphi,\\ y=b\rho\sin\varphi,\end{cases}$ тоді $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\rho^2$, а рівняння кривої, що обмежує область, набуває вигляду: $\rho^6=2ab^3\rho^3\sin^3\varphi$, тобто $\rho=b\cdot\sqrt[3]{2a}\sin\varphi$. Межі зміни кута φ знайдемо із нерівності $\rho\ge 0$, тобто $\sin\varphi\ge 0$. На відрізку $[0,2\pi]$ ця нерівність має розв'язок $0\le\varphi\le\pi$. Якобіан у цьому випадку дорівнює $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = bc\rho$. Зважаючи на означення міри допустимої множини, отримаємо:

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} cb\rho d\rho d\varphi = cb\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{b\cdot\sqrt[3]{2a}\sin\varphi} \rho d\rho = cb\int_0^{\pi} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{b\cdot\sqrt[3]{2a}\sin\varphi} =$$

$$= cb^3\int_0^{\pi} d\varphi \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{2}\sin^2\varphi = cb^3\int_0^{\pi} d\varphi \frac{\sqrt[3]{4a^2}}{4}(1-\cos 2\varphi) = \frac{cb^3\cdot\sqrt[3]{4a^2}}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi cb^3\cdot\sqrt[3]{4a^2}}{4}. \ \blacksquare$$

г) Оскільки область

$$D_{x,y} = \{(x,y)\in R^2 : x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x,\ 0<a<b,\ 0<\alpha<\beta.\}$$

обмежена неперервними лініями, графіки яких мають міру 0, тоді ця множина допустима. Із означення міри допустимої множини випливає, що $S = \int\int\limits_D dxdy$. Функція під знаком інтеграла $f(x,y)\equiv 1$ – неперервна на $D_{x,y}$. Введемо нові змінні $u=\varphi_1(x,y)=x+y,\quad v=\varphi_2(x,y)=\dfrac{y}{x}$. Відображення $\varphi(x,y)=\{\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)\}$ задає дифеоморфізм області $D_{x,y}$ на область $D_{u,v}:\begin{cases} a\le u\le b, \\ \alpha\le v\le\beta.\end{cases}$ Отже,

$$S = \int\int\limits_D dxdy = \left\| \begin{array}{l} u=x+y,\quad v=\dfrac{y}{x} \ \Rightarrow \qquad x=\dfrac{u}{v+1}, \\ a\le x+y\le b, \alpha\le\dfrac{y}{x}\le\beta \Rightarrow a\le u\le b, \alpha\le v\le\beta, \\ \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{x^2} = \dfrac{u}{x^2} = \dfrac{(v+1)^2}{u}, \\ abs\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{u}{(v+1)^2} \end{array} \right\| = \int_a^b du\int_{\alpha}^{\beta}\frac{u}{(v+1)^2}dv =$$

$$= \int_a^b udu\left(\frac{-1}{\beta+1}+\frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\beta+1}\right)(b^2-a^2). \ \blacksquare$$

д) Знайдемо площу області, що обмежена лінією $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ за умови $x^2+y^2\ge a^2$. Введемо полярну систему координат $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}$ тоді

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\rho^2, \\ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\rho^2\right)^2 = 2a^2\rho^2\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) \Rightarrow \rho^2 = 2a^2\cos 2\phi,$$

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi \ge 0 \ \Rightarrow -\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 2\varphi\le\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z \ \Rightarrow -\frac{\pi}{4}+\pi n\le\varphi\le\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

Знайдемо точки перетину лемніскати $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ і кола $\rho = a$:

$$\begin{cases}\rho = a\sqrt{2\cos 2\phi}, \\ \rho = a\end{cases} \Rightarrow a = a\sqrt{2\cos 2\phi} \Rightarrow \cos 2\phi = \tfrac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\phi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}\ \Rightarrow\ \phi = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathrm{Z}.$$

Дану область D зображено на рис. 5.6. Зважаючи на її симетрію, отримаємо

$$S = 4\iint_D \rho d\rho d\varphi = 4\int_0^{\pi/6} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\pi/6} d\varphi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = 4\int_0^{\pi/6} d\varphi\left(\frac{2a^2\cos 2\varphi}{2} - \frac{a^2}{2}\right) =$$

$$= 4\left.\left(\frac{a^2}{2}\sin 2\varphi - \frac{a^2}{2}\varphi\right)\right|_0^{\pi/6} = 2a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}a^2.\ \blacksquare$$

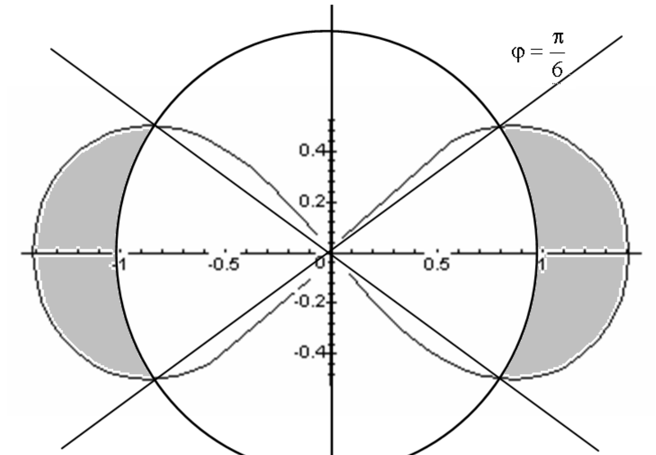


Рис. 5.6

У наступному прикладі розглянемо два **застосування подвійного інтеграла: для обчислення об'єму тіла і площа поверхні**.

Перший із цих прикладів передбачає застосування наслідку 4.6 із теореми Фубіні. В ньому стверджується, що якщо $D-$ допустима множина в $\mathbb{R}^{m-1}$, $E-$ множина в $\mathbb{R}^m$, яка визначається наступним чином

$$E = \{(\overline{x}, y) \in \mathrm{R}^m : \overline{x} \in D \wedge \varphi(\overline{x}) \le y \le \psi(\overline{x})\},$$

а $\varphi(\overline{x})\ i\ \psi(\overline{x})-$неперервні на D, тоді

1) $E-$допустима множина, 2) $\boxed{\mu(E) = \int_D (\psi(\overline{x}) - \varphi(\overline{x}))\,d\overline{x}}$.

Міра тривимірної допустимої множини (тіла) дорівнює її об'єму, і цей об'єм виражається подвійним інтегралом:

$$\boxed{V(E) = \iint_D (\psi(x,y) - \varphi(x,y))\,dx\,dy}.$$

У другому із прикладів будемо застосовувати формулу площі поверхні, що задана явно:

$$\boxed{\sigma = \iint_G \sqrt{1 + [f_x'(x,y)]^2 + [f_y'(x,y)]^2}\,dx\,dy,}$$

тут $G-$ проста плоска область, що є проекцією поверхні на площину Oxy.

Задача 5.5 Застосувати подвійний інтеграл до розв'язання наступних геометричних задач:

а) знайти об'єм тіла за допомогою подвійного інтеграла, якщо тіло обмежене поверхнями $y = 2x,\ x + y + z = 2,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$;

б) знайти площу поверхні $x^2 + y^2 = 2x$ за умови $0 \le z \le x^2 + y^2$.

Розв'язання. а) З'ясуємо вигляд тіла, що задається умовою задачі. В першому октанті площина $x + y + z = 2$ відсікає піраміду, а на площині Oxy -

трикутник OAB прямою $\begin{cases} x+y+z=2, \\ z=0 \end{cases}$, тобто $y=2-x$. Площина $y=2x$ ділить піраміду на дві піраміди, а трикутник OAB - на два трикутники OKB і OKA, які є проекціями утворених пірамід (рис. 5.7 – вигляд в просторі, рис. 5.8 – проекція на площину Oxy). Оскільки не зазначено, об'єм якої саме піраміди потрібно знайти, знайдемо об'єми обох ($SOAK$ і $SOBK$).

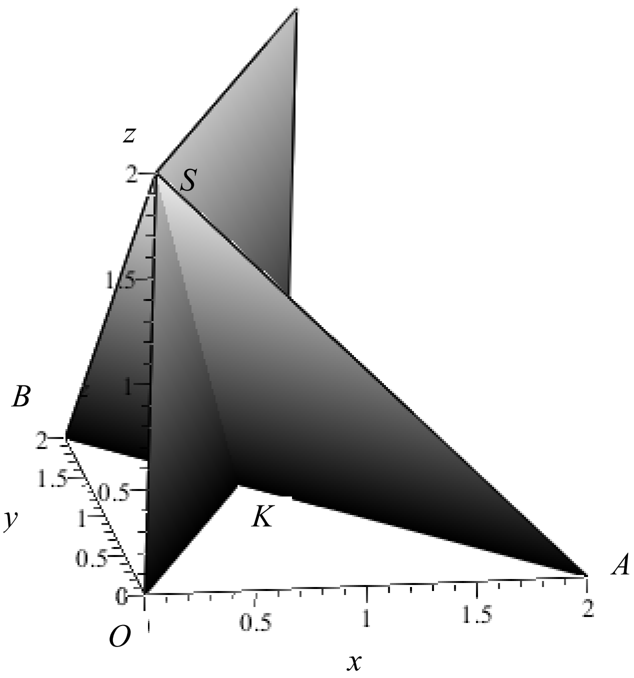


Рис. 5.7

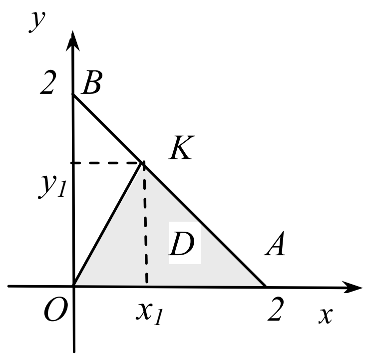


Рис. 5.8

Знайдемо координати точки K, що є точкою перетину прямих $y=2x$ і $y=2-x$ на площині. Для цього розв'яжемо систему $\begin{cases} y=2x, \\ y=2-x, \end{cases}$, звідки отримаємо $\begin{cases} x_1=2/3, \\ y_1=4/3. \end{cases}$.

Застосуємо наслідок 4.6 із теореми Фубіні, обираючи у виписаній вище формулі $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=2-x-y$, а за область D – трикутник OKA, отримаємо: $V_{SOAK}=\iint\limits_D (2-x-y)dxdy$.

Виписаний інтеграл простіше обчислити, обравши зовнішньою межею інтегрування y. В рівняннях прямих x виразимо через y, одержимо: $x=y/2$, $x=2-y$, а інтеграл (за наслідком 4.5 із теореми Фубіні) набуває вигляду:

$$V_1=\iint\limits_D (2-x-y)dxdy=\int\limits_0^{4/3}dy\int\limits_{y/2}^{2-y}(2-x-y)dx=\int\limits_0^{4/3}dy\left(2x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Bigg|_{y/2}^{2-y}=$$

$$=\int\limits_0^{4/3}dy\left[2(2-y)-\frac{(2-y)^2}{2}-y(2-y)-\left(y-\frac{y^2}{8}-\frac{y^2}{2}\right)\right]=\int\limits_0^{4/3}\left(2-3y+\frac{9}{8}y^2\right)dy=\frac{8}{9}.$$

Об’єм піраміди *SOKB* можна знайти за допомогою подвійного інтеграла, а можна і з розумінь аналітичної геометрії. Обчислимо об’єм усієї піраміди *SOAB*. Для цього загальне рівняння площини $x+y+z=2$ перепишемо як рівняння у відрізках, що відсікаються на координатних осях: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$. Тоді об’єм піраміди *SOAB* дорівнює $V=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$, а шуканий об’єм – $V_{SOBK}=V_{SOAB}-V_{SOAK}=\frac{4}{3}-\frac{8}{9}=\frac{4}{9}$. ■

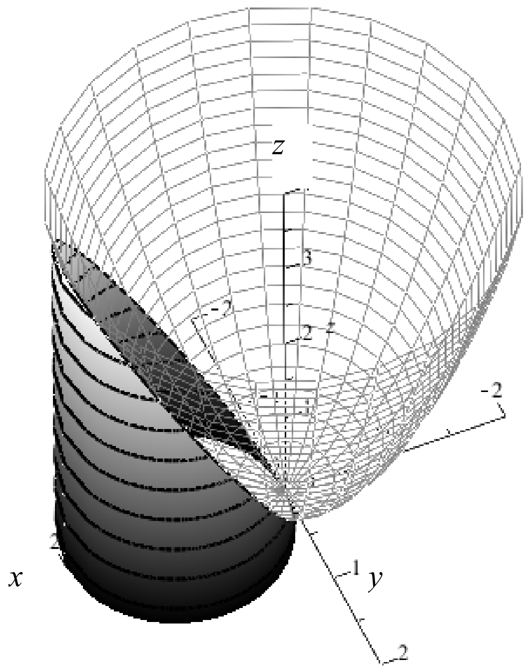


Рис. 5.9

б) За умовою, потрібно знайти площу частини циліндричної поверхні $x^2+y^2=2x$. Оскільки

$$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow \underline{x^2-2x+1}+y^2=1 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+y^2=1,$$

то ця поверхня є круговим циліндром, віссю якого є пряма $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases}$, а радіус кола в перерізі дорівнює 1.

Частина зазначеного циліндра знизу обмежена площиною $z=0$ (площина *Oxy*), а зверху – круговим параболоїдом $z=x^2+y^2$. (див. рис. 5.9). Знайдемо проекцію лінії перетину циліндра і параболоїда на площину Oxz:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=x^2+y^2, \end{cases} \Rightarrow z=2x.$$

Тепер можна побудувати проекцію *G* даної поверхні на зазначену площину (рис. 5.10).

При обчисленні площі поверхні будемо враховувати той факт, що площина *Oxz* розбиває цю поверхню на дві рівні частини. Перша із цих поверхонь задається рівнянням $y=\sqrt{2x-x^2}$, а друга – рівнянням $y=-\sqrt{2x-x^2}$. Отже, згідно із зазначеною вище формулою,

$$S=2\iint_G \sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}\,dx\,dz=$$

$$=2\iint_G \sqrt{1+\left(\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}\right)^2+0^2}\,dx\,dz=$$

$$=2\iint_G \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot dx\,dz=2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{2x} dz=$$

$$=2\int_0^2 \frac{2x\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\left\| \begin{matrix} d(2x-x^2)=(2-2x)dx, \\ 2x=-(2-2x)+2 \end{matrix} \right\|=$$

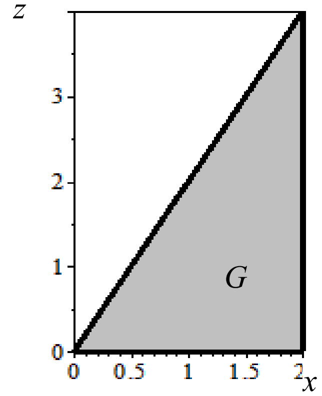


Рис. 5.10

$$=2\left(\int_0^2\frac{-(2-2x)\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}+\int_0^2\frac{2\,dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\right)=2\left(-\int_0^2\frac{d(2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}}+\int_0^2\frac{2\,d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\right)=$$

$$=2\left(-2\sqrt{2x-x^2}+2\arcsin(x-1)\right)\Big|_0^2=4(\underbrace{\arcsin 1}_{=\pi/2}-\underbrace{\arcsin(-1)}_{-\pi/2})=4\pi\,.\ \blacksquare$$

Задача 5.6 Знайти координати центра мас пластини $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$.

Розв'язання. Дану область зображено на рис. 5.11. Координати точок перетину парабол, що обмежують область, є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases}y=4-x^2,\\ y=x^2-2x,\end{cases}$ тобто $\begin{cases}x=2,\\ y=0\end{cases}$ або $\begin{cases}x=-1,\\ y=3.\end{cases}$. У даному випадку за зовнішню межу інтегрування простіше обрати x. Область D, таким чином, визначається нерівностями: $-1\le x\le 2$, $x^2-2x\le y\le 4-x^2$. Вона є допустимою (оскільки обмежена графіками неперервних функцій, згідно з прикладом 4.7), а її площу можна знайти як значення подвійного інтеграла:

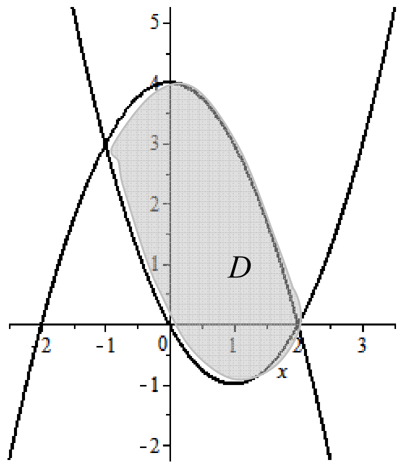


Рис.5.11

$$S=\iint_D dx\,dy=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2-2x}^{4-x^2}dy=\int_{-1}^{2}dx\ y\Big|_{x^2-2x}^{4-x^2}=$$

$$=\int_{-1}^{2}dx\left(4-x^2-(x^2-2x)\right)=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=9.$$

Тепер знайдемо координати центра мас однорідної пластини:

$$x_{ц.м.}=\frac{1}{S}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{1}{9}\int_{-1}^{2}x\,dx\int_{x^2-2x}^{4-x^2}dy=\int_{-1}^{2}dx\ y\Big|_{x^2-2x}^{4-x^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\int_{-1}^{2}x\left(-2x^2+2x+4\right)dx=\frac{1}{9}\left(-\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+2x^2\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{1}{2};$$

$$y_{ц.м.}=\frac{1}{S}\iint_D y\,dx\,dy=\frac{1}{9}\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2-2x}^{4-x^2}y\,dy=\frac{1}{9}\int_{-1}^{2}dx\ \frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2-2x}^{4-x^2}=$$

$$=\frac{1}{18}\int_{-1}^{2}\left(\left(4-x^2\right)^2-\left(x^2-2x\right)^2\right)dx=\frac{3}{2}.$$

Отже, центр мас даної однорідної пластини знаходиться в точці $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. $\blacksquare$

Задача 5.7 Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_V 2zy^4\cos(xyz)\,dx\,dy\,dz$, де тіло V обмежене поверхнями $x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=1$.

Розв'язання. Рисунок тіла та його проекції на площину Oxz зображено на рис. 5.12.

В цьому прикладі важливо правильно обрати порядок інтегрування. Якщо крайнє внутрішнє інтегрування буде проводитися за змінною y, то потрібно буде чотири рази застосовувати формулу інтегрування частинами. А якщо інтегрування за y здійснити як зовнішнє, то вже перше внутрішнє інтегрування дасть множник $1/y$, в результаті, після скорочення, порядок степеня змінної y зменшиться на 1. Аналогічно, щодо інтегрування за змінною z, то його теж не бажано ставити як крайнє внутрішнє з тих же міркувань. Щодо інтегрування за змінною x, то його не можна ставити як зовнішнє або середнє внутрішнє, оскільки при інтегруванні за іншими змінними, їх первісна буде мати множник $1/x$. Це означатиме, що при наступному інтегруванні за змінною x інтегрування зведеться до інтеграла типу $\int \frac{\cos ax}{x^k}dx$ $(k=1 \text{ або } k=2)$, який не виражається в елементарних функціях.

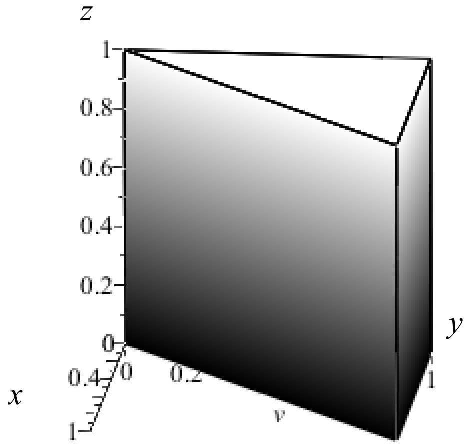


Рис. 5.12

Враховуючи сказане, отримаємо:

$V=\{(x,y,z):\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y,\ 0\le z\le 1\}$;

$$\iiint\limits_V 2zy^4\cos(xyz)\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^1 y^4dy\int_0^1 zdz\int_0^y \cos(xyz)\,dx = 2\int_0^1 y^4dy\int_0^1 z\,dz\left(\frac{1}{yz}\sin(xyz)\right)\Bigg|_0^y$$

$$=2\int_0^1 y^3\,dy\int_0^1 \sin(zy^2)\,dz = 2\int_0^1 y^3\,dy\left(-\frac{1}{y^2}\cos\left(zy^2\right)\right)\Bigg|_0^1 = 2\int_0^1\left(-y\cos y^2+y\right)dy=$$

$$=-\int_0^1 \cos y^2 d\left(y^2\right)+1=-\left(\sin y^2\right)\Big|_0^1+1=-\sin 1+1. \ ■$$

Задача 5.8 Обчислити:

а) потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (4-y)\,dx\,dy\,dz$, де $V:\ y=x, y=0, z=4-x-y, z=0$;

б) повторний інтеграл $J=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2dz$ за допомогою сферичних координат.

Розв'язання. а) Дане тіло V обмежене площинами $z=0$ (площина Oxy) і $z=4-x-y$ знизу та зверху відповідно.

На площині Oxy утворюються три прямі, які є перетином похилої $z=4-x-y$ та вертикальних площин $y=x, y=0$ з Oxy. Ці прямі на площині Oxy

мають рівняння $x+y=4$, $y=x, y=0$ відповідно. Вони обмежують область D, зображену на рис. 5.13. Ця область є проекцією тіла V на Oxy.

Точка перетину прямих $x+y=4$ і $y=x$ на площині Oxy має координати $(2;2)$. Щоб не розбивати область D на частини, потрібно за зовнішню змінну інтегрування обрати y. Тоді, в рівняннях прямих необхідно виражати x через y, а область D визначити як $D=\{(x,y):\ 0\le y\le 2,\ y\le x\le 4-y\}$, а тіло V – $V=\{(x,y):\ 0\le y\le 2,\ y\le x\le 4-y,\ 0\le z\le 4-x-y\}$.

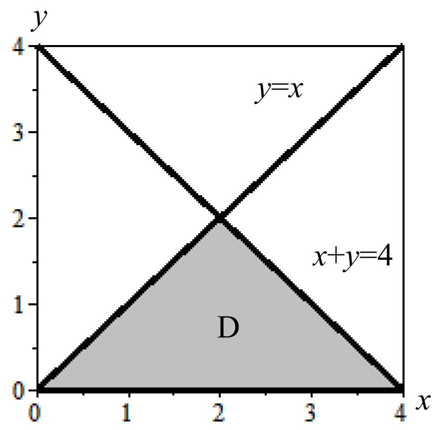


Рис. 5.13

Отже,

$$\iiint\limits_V (4-y)\,dx\,dy\,dz=\int_0^2 dy\int_y^{4-y}dx\int_0^{4-x-y}(4-y)dz=\int_0^2 dy\int_y^{4-y}(4-y)\cdot z\Big|_0^{4-x-y}dx=$$

$$=\int_0^2 dy\int_y^{4-y}(4-y)(4-y-x)dx=\int_0^2 dy\int_y^{4-y}\left((4-y)^2-(4-y)x\right)dx=$$

$$=\int_0^2 dy\left(x(4-y)^2-\frac{x^2}{2}(4-y)\right)\Bigg|_y^{4-y}=\int_0^2 dy\left(\frac{1}{2}(4-y)^3-y(4-y)^2+\frac{y^2}{2}(4-y)\right)=\frac{56}{3}.\ \blacksquare$$

б) Розглянемо сферичну систему координат для першого випадку (рис. 4.4):

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\cos\theta_1 \\ y=\rho\sin\varphi\cos\theta_1 \\ z=\rho\sin\theta_1 \end{cases}.$$

За умовою

$$0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2},$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2},$$

тому тіло обмежене додатними частинами конуса і сфери, що лежать в першому октанті. В даному випадку рівнянням поверхні конуса в сферичній системі координат є $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, а сфери – $\rho=\sqrt{2}$. Виходячи із геометричного змісту сферичних координат, отримаємо (див. рис. 5.14):

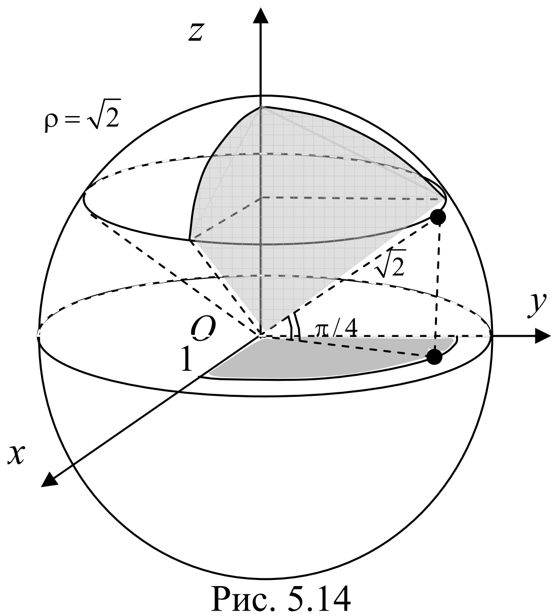


Рис. 5.14

$$J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\cos\theta_1\rho^2\sin^2\theta_1 d\rho=\frac{2\sqrt{2}-1}{15}\pi.\ \blacksquare$$

Задача 5.9 Обчислити об'єм тіла, обмежене поверхнями:

а) $z^2 = 4 - x, x^2 + y^2 = 4x,\ z \geq 0$; **б)** $z = 6 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $x^2 + y^2 = R|x|, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ \left(x^2 + y^2 \geq R|x|\right)$ (тіло Вівіані).

Розв'язання. а) Поверхня $z^2 = 4 - x$ є циліндричною з твірною, що паралельна вісі *Oy*. Рівняння поверхні $x^2 + y^2 = 4x$ можна переписати, виділивши повний квадрат, у вигляді $(x-2)^2 + y^2 = 4$, тому ця поверхня є круговим циліндром. На рис. 5.15 зображено схему утворення даного тіла T.

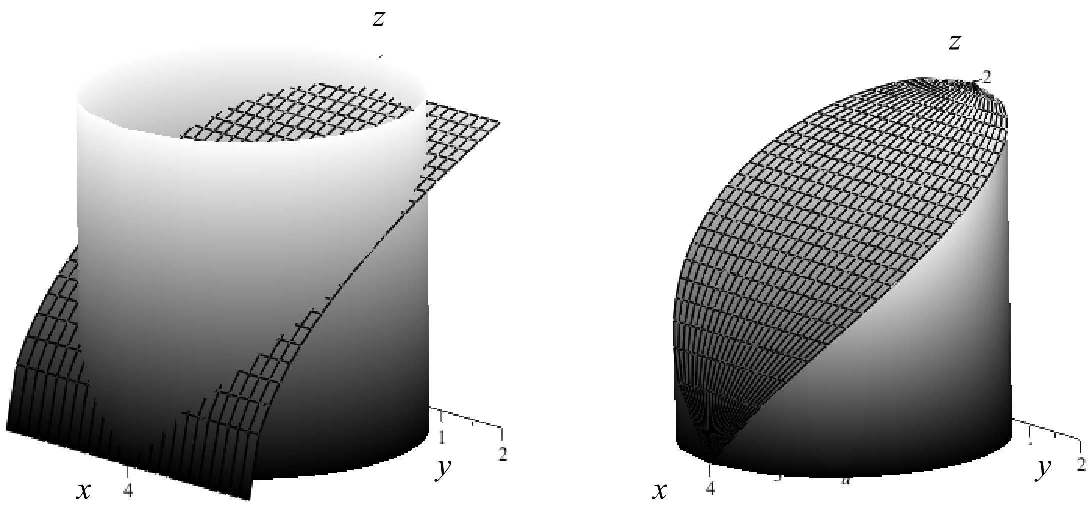


Рис. 5.15

Циліндрична поверхня $z^2 = 4 - x$ відсікає на площині *Oxy* півплощину $x \leq 4$. В проекції на *Oxy* круговий циліндр $(x-2)^2 + y^2 = 4$ утворює коло з центром в точці (2;0) радіуса 2, яке цілком міститься в півплощині $x \leq 4$. Тому проекцією D даного тіла на площину *xOy* є круг, який обмежується зазначеним колом (рис. 5.16).

Застосуємо означення об'єму допустимої множини T. Її об'єм обчислюється за формулою $V = \iiint\limits_T dx\, dy\, dz$.

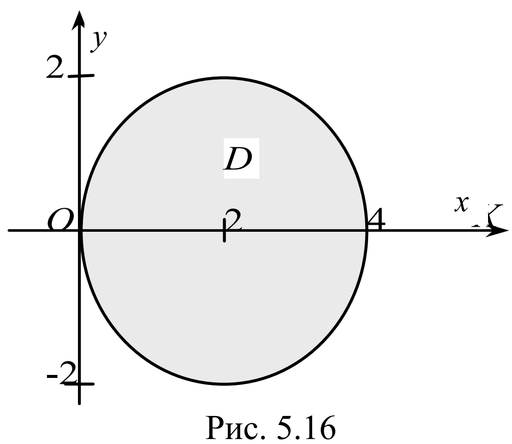


Рис. 5.16

Дане тіло знизу обмежене площиною *Oxy*, а зверху – циліндричною поверхнею $z = \sqrt{4 - x}$. Розглянемо проекцію D тіла T на площину *Oxy*. В рівнянні кола виразимо y через x: $y = \pm\sqrt{4x - x^2}$, де знак „+" відповідає верхній частині кола, а „–" – нижній. Отже, область T характеризується такими нерівностями:

$0 \leq x \leq 4, -\sqrt{4x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x},$

тому одержуємо:

$$V=\int_0^4 dx\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}dy\underbrace{\int_0^{\sqrt{4-x}}dz}_{=\sqrt{4-x}}=\int_0^4 dx\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}\sqrt{4-x}\,dy=$$

$$=\int_0^4 dx\left(y\sqrt{4-x}\right)\Big|_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}}=\int_0^4 2\sqrt{4x-x^2}\sqrt{4-x}\,dx=$$

$$=2\int_0^4\sqrt{x}(4-x)dx=2\left(4\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_0^4=\frac{256}{15}.\ \blacksquare$$

б) Дане тіло T обмежене поверхнями кругового параболоїда і кругового конуса (див. рис. 5.17). Знайдемо лінію перетину цих поверхонь:

$$\begin{cases}z=6-x^2-y^2,\\ z=\sqrt{x^2+y^2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=6-x^2-y^2,\\ z=6-z^2,\\ z\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=6-x^2-y^2,\\ \left[\begin{array}{l}z=2,\\ z=-3,\end{array}\right.\\ z\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=2.\end{cases}$$

Отже, проекцією D тіла T на площину Oxy є круг $x^2+y^2\le 4$.

Оскільки як рівняння поверхонь, що обмежують тіло, так і рівняння лінії, що обмежує його проекцію на площину Oxy, залежать від x^2+y^2, то для обчислення об'єму зручніше вводити циліндричну систему координат $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$ (див. пункт 4.5.3 теоретичної частини). Тоді рівняння поверхонь набувають вигляду

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z=\rho^2,$$

$$z=6-x^2-y^2\Rightarrow z=6-\rho^2,$$

а область D буде визначатися нерівностями
$D=\{(\rho,\varphi):\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2\}$.

Враховуючи означення міри допустимої множини T і значення якобіана циліндричної системи координат $\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}=\rho$, отримаємо:

$$V=\iiint_T dx\,dy\,dz=\iiint_T\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho\int_\rho^{6-\rho^2}dz=\frac{32\pi}{3}.\ \blacksquare$$

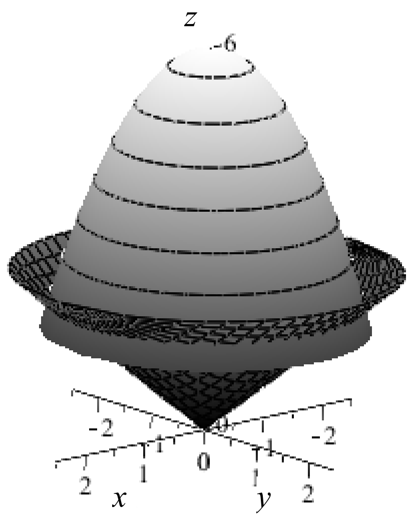


Рис. 5.17

в) Тіло Вівіані обмежене поверхнями
$x^2+y^2=R|x|,\quad x^2+y^2+z^2=R^2$
$\left(x^2+y^2\ge R|x|\right)$.

Розглянемо поверхню:

$$x^2+y^2=R|x|,\quad x^2+y^2-2R|x|\cdot\frac{1}{2}+\frac{R^2}{4}-\frac{R^2}{4}=0,\quad \left(|x|-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

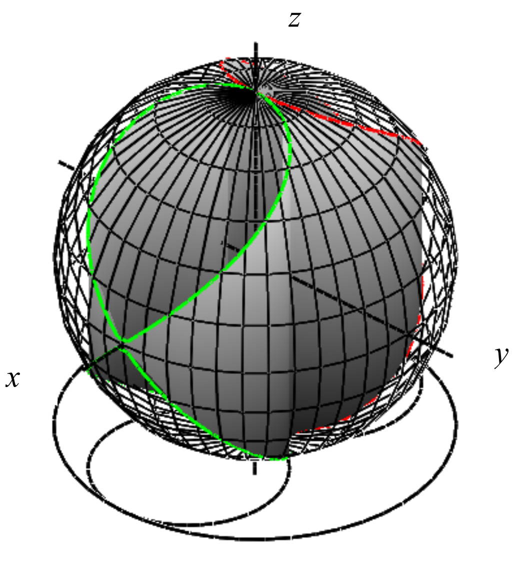


Рис. 5.18

Вона являє собою два циліндри з осями $x=-\dfrac{R}{2}$, $x=\dfrac{R}{2}$, радіусом перерізу $\dfrac{R}{2}$ кожен.

Дане тіло – це та частина кулі, що лежить зовні циліндричної поверхні. Перейдемо до циліндричної системи координат (рис. 5.18):

$$x^2+y^2=R|x| \;\Rightarrow\; \rho=R|\cos\varphi|,$$

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; z=\pm\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

Тоді

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{R\cos\varphi}^{R}\rho\,d\rho\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}dz=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{R\cos\varphi}^{R}\rho\,d\rho\; z\Big|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{R\cos\varphi}^{R}\sqrt{R^2-\rho^2}\;\rho\,d\rho==-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\frac{2(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}+1}}{3}\Bigg|_{R\cos\varphi}^{R}=\frac{8}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{16}{9}R^3.\ \blacksquare$$

Задача 5.10 Тіло задається поверхнями, які його обмежують, $\gamma(x,y,z)$ – густина. Знайти масу тіла, якщо

$$x^2+y^2+z^2\le 2Rz,\; z^2\mathrm{tg}^2\alpha\le x^2+y^2\le z^2\mathrm{tg}^2\beta,$$

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},\; z=0,\gamma=5\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Розв'язання. Дане тіло обмежене:

1) сферою $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$,

2) конусами $z^2\mathrm{tg}^2\alpha=x^2+y^2$, $z^2\mathrm{tg}^2\beta=x^2+y^2$, твірні яких з віссю Oz утворюють кути α і β відповідно.

Поверхні, що обмежують дане тіло, зображені на рис. 5.19.

Уведемо сферичні координати (див. пункт 4.5.5):

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\sin\theta_2,\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta_2,\\ z=\rho\cos\theta_2.\end{cases}$$

Дана сфера в цій системі координат буде визначатися рівнянням $\rho = 2R\cos\theta_2$. Оскільки $\theta_2 = \theta_0$ – частина конуса, твірна якого з віссю *Oz* утворює кут θ_0, то для даного тіла значення кута θ_2 задовольняє нерівність $\alpha \le \theta_2 \le \beta$. Якщо провести радіус-вектор через тіло, то він почне свій рух в початку координат і покине тіло через сферу. Це означає, що значення сферичної відстані ρ задовольняє нерівність $0 \le \rho \le 2R\cos\theta_2$. При оббігу тіла кут між проекцією зазначеного радіус-вектора на площину *Oxy* та віссю абсцис набуває значення від 0 до 2π, тобто $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Рис. 5.19

Для обчислення маси тіла застосуємо формулу

$$\boxed{M = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}.$$

Знаючи, що значення якобіана сферичної системи координат дорівнює $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta_2)} = \rho^2 \sin\theta_2$, отримаємо

$$M = \iiint\limits_V \gamma\left(\rho\cos\varphi\sin\theta_2, \rho\sin\varphi\sin\theta_2, \rho\cos\theta_2\right)\cdot \rho^2 \sin\theta_2 d\rho\, d\varphi\, d\theta_2 = \left\| \gamma = 5\rho^2 \right\| =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sin\theta_2 d\theta_2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\theta_2} 5\rho^2 \cdot \rho^2 d\rho = \int\limits_\alpha^\beta \sin\theta_2 d\theta_2 \int\limits_0^{2\pi} \rho^5 \Big|_0^{2R\cos\theta_2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sin\theta_2 d\theta_2 \int\limits_0^{2\pi} 32R^5 \cos^5\theta_2 d\varphi = -32R^5 \cdot 2\pi \cdot \int\limits_\alpha^\beta \cos^5\theta_2 d(\cos\theta_2) =$$

$$= -64R^5\pi \cdot \frac{\cos^6\theta_2}{6}\Bigg|_\alpha^\beta = \frac{32}{3} R^5 \pi \left(\cos^6\alpha - \cos^6\beta\right). \ \blacksquare$$

6 ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ»

1, 2. Змінити порядок інтегрування.
3. Обчислити подвійний інтеграл.
4. Обчислити подвійний інтеграл за допомогою нових змінних.
5. Знайти об'єм тіла за допомогою подвійного інтеграла.
6. Знайти координати центра мас пластини.
7, 8. Обчислити потрійний інтеграл.
9. Знайти об'єм тіла, що задається поверхнями, які його обмежують.
10. Тіло задається поверхнями, які його обмежують, $\gamma(x,y,z)-$ густина. Знайти масу тіла.

ВАРІАНТ 1

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)\,dy$	2. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3y}{4}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx$
3. $\iint\limits_D \left(\cos 2x + \sin y\right) dx\,dy$; $D: x=0,\ y=0,\ 4x+4y-\pi=0$	4. $\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right) dx\,dy$; $D: x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2=R^2$
5. Тіло обмежене поверхнями $6x-9y+5z=0,\ 3x-2y=0,\ 4x-y=0,$ $x+y=5,\ z=0$	6. Однорідна пластина обмежена лініями $y^2=x,\ 3y^2=x,\ y=\dfrac{x}{3}$
7. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dx\,dy\,dz$; $x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=1$	8. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$; $V:\ y=10x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$
9. $y=16\sqrt{2x},\ y=\sqrt{2x},\ z=0,\ x+z=2$	10. $64\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ y=0,$ $z=0\ \ (y\ge 0,\ z\ge 0),\ \gamma=\dfrac{5}{4}\left(x^2+y^2\right)$

ВАРІАНТ 2

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$	2. $\int\limits_{-3}^0 dx \int\limits_{-x}^3 f(x,y)\,dy + \int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)\,dy$
3. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{ax-x^2}}$; $D: x=0,\ y^2=a^2-ax$	4. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx\,dy$; $D-$ частина круга $x^2+y^2\le 1$, що лежить в I квадранті
5. Тіло обмежене еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	6. Однорідна пластина обмежена лініями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x=0,\ y=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$
7. $\iiint\limits_V x^2 z\,\operatorname{sh}(xyz)\,dx\,dy\,dz$; $x=2,\ y=\pi,\ z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$	8. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}$; $V:\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
9. $y=5\sqrt{x},\ y=\frac{5x}{3},\ z=5+\frac{5\sqrt{x}}{3},\ z=0$	
10. $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=1\ \left(x^2+y^2\le 1\right),\ x=0\ \left(x\ge 0\right),\ \gamma=4\lvert z\rvert$	

ВАРІАНТ 3

1. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy$	
2. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\,dx$	3. $\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$; $D: y=x\,\operatorname{tg}(x),\ y=x$
4. $\iint\limits_D x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$; $D:\ \left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right),\ x\ge 0-$ пелюстка лемніскати	5. Тіло обмежене круговим циліндром радіуса r, віссю якого служить вісь ординат, координатними площинами і площиною $\frac{x}{r}+\frac{y}{a}=1$
6. Однорідна пластина обмежена лініями $y^2=x,\ 3y^2=x,\ y=\frac{x}{3}$	7. $\iiint\limits_V y^2\operatorname{ch}(2xy)\,dx\,dy\,dz$; $x=0,\ y=-2,\ y=4x,\ z=0,\ z=2$
8. $\iiint\limits_V 15\left(y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$; $V:\ z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$	9. $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,$ $z=0,\ z=15x$
10. $x^2+y^2=1,\ 2z=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0,\quad z=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0),\ \gamma=10x$	

ВАРІАНТ 4

1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx$	
2. $\int_{3}^{7} dx \int_{\frac{9}{x}}^{3} f(x,y)\,dy + \int_{7}^{9} dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y)\,dy$	3. $\iint_D x \cdot y\,dx\,dy$; $D: x+y=2,\ x^2+y^2=2y$
4. $\iint_D \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\ (c>1);\ D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	5. Вивести «шкільну» формулу для обчислення об'єму конуса (висота H, радіус основи R) за допомогою подвійного інтеграла
6. Однорідна пластина обмежена лініями $x=\sqrt{2y-y^2},\ x=0$	7. $\iiint_V 8y^2z\,e^{2xyz}\,dx\,dy\,dz$; $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=-1,\ y=2,\ z=1$
8. $\iiint_V (3x+4y)\,dx\,dy\,dz$; $V: y=x,\ y=0,$ $x=1,\ z=5\left(x^2+y^2\right),\ z=0$	9. $x+y=2,\ y=\sqrt{x},\ z=12y,\ z=0$
10. $x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2,\quad x^2+y^2=\frac{4}{7}z,\ x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\ge 0\right),\ \gamma=80\cdot y\cdot z$	

ВАРІАНТ 5

1. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f(x,y)\,dy$	
2. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$	3. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$; $D-$ трикутник з вершинами $(-1;1),\ (1;3),\ (2;-4)$
4. $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$; $D:\ x^2+y^2\le ax$	5. Тіло обмежене поверхнями $z=xy,\ x^2=y,\ x^2=2y,$ $y^2=x,\ y^2=2x,\ z=0$
6. Однорідна пластина обмежена лініями $y=x^2,\ y=3x^2,\ y=3x$	7. $\iiint_V x^2\operatorname{sh}(3xy)\,dx\,dy\,dz$; $x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ y=2,\ z=36$
8. $\iiint_V \left(1+2x^3\right)dx\,dy\,dz$; $V: y=9x,$ $y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$	9. $x=20\sqrt{2y},\ x=5\sqrt{2y},\ z=0,\ y+z=\frac{1}{2}$
10 $x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=4z^2,\quad x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\ge 0\right),\ \gamma=20z$	

ВАРІАНТ 6

1. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy$	
2. $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$	3. $\iint\limits_D \frac{x+2y}{2x+y}\,dx\,dy$; $D: y \le 1+x, y \le 1-x, y \ge 0$
4. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dx\,dy$; $D: x^2+(y+2)^2 \le 4$	5. $x^2+y^2+z^2 \le 3a^2,\ x^2+y^2 \le 2az$
6. Однорідна пластина обмежена лініями $y=4x+4,\ y^2=-2x+1$	7. $\iiint\limits_V y^2 z\cos(xyz)\,dx\,dy\,dz$; $x=1,\ y=\pi,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
8. $\iiint\limits_V \left(27+54y^3\right) dx\,dy\,dz$; $V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$	9. $x=\frac{5}{2}\sqrt{y},\ x=\frac{5}{6}y,\ z=0,\ z=\frac{5}{6}\left(3+\sqrt{y}\right)$
10. $36\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ z=0\ \ (y \ge 0, z \ge 0),\ \gamma=\frac{5}{6}\left(x^2+y^2\right)$	

ВАРІАНТ 7

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx$	
2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f(x,y)\,dy$	3. $\iint\limits_D \left(x-y^2\right) dx\,dy$; $D-$ трикутник з вершинами $(1;0), (-1;2), (3;4)$
4. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dx\,dy$; $D: x^2+(y+2)^2 \le 4$	5. $x^2 \le ay \le bx,\ x^2+y^2 \le hz \le 2x^2+2y^2$
6. Однорідна пластина обмежена лініями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x=0\ \ (x \ge 0)$	7. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi}{4}yz\right) dx\,dy\,dz$; $x=1,\ y=-1,\ y=\frac{x}{2},\ z=0,\ z=-\pi^2$
8. $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$; $V:\ y=15x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$	9. $x^2+y^2=2,\ x=\sqrt{y},\ x=0,\ z=0,\ z=30y$
10. $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4\ \left(x^2+y^2 \le 4\right),\ \gamma=2\lvert z\rvert$	

ВАРІАНТ 8

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx$	2. $\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)\,dy$
3. $\iint\limits_D \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$; $D: y^2-x^2=a^2, x=a, x=0, y\ge 0$	4. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$; $D:\ 9\le x^2+y^2\le 25$
5. Тіло обмежене сферою $x^2+y^2+z^2=a^2$ і циліндром $x^2+y^2=ax$ (задача Вівіані)	6. Однорідна пластина обмежена лініями $y=x^2, y=2x^2, x=1, x=2$
7. $\iiint\limits_V y^2 z\,\mathrm{ch}\frac{xyz}{2}\,dx\,dy\,dz$; $x=2, y=-1, z=2, x=0, y=0, z=0$	8. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}$; $V:\ \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1, x=0, y=0, z=0$
9. $x+y=2, x=\sqrt{y}, z=\frac{12x}{5}, z=0$	10. $x^2+y^2=4,\ \ x^2+y^2=8z,$ $x=0, y=0, z=0\ (x\ge 0, y\ge 0),\ \gamma=5x$

ВАРІАНТ 9

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)\,dx$	2. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy$
3. $\iint\limits_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$; $D-$ трапеція з вершинами $(1;1), (5;1), (10;2), (2;2)$	4. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$
5. Тіло обмежене гіперболічним параболоїдом $z=x^2-y^2$ і площинами $x=3,\ z=0$	6. Однорідна пластина обмежена лініями $y=\sqrt{2x-x^2}, y=0$
7. $\iiint\limits_V x^2 e^{-xy}\,dx\,dy\,dz$; $x=-2, y=0, z=1, y=\frac{x}{4}, z=0$	8. $\iiint\limits_V \left(3x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$; $V: z=10y,$ $x+y=1,\ x=0, y=0, z=0$
9. $y=17\sqrt{2x}, y=2\sqrt{2x}, z=0, x+z=\frac{1}{2}$	10. $x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2,\ x^2+y^2=\frac{2}{5}z,$ $x=0, y=0\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0), \gamma=28xz$

ВАРІАНТ 10

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$	2. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\,dy$
3. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy$; $D: y=e^x, x=0, y=2$	4. $\iint\limits_D x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$; $D:\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right), x\le 0$ – пелюстка лемніскати
5. Тіло обмежене поверхнями $z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$	6. Однорідна пластина обмежена кривою $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$ (петля)
7. $\iiint\limits_V 2x^2y\,e^{xyz}\,dx\,dy\,dz$; $x=1, y=1, z=1, x=0, y=0, z=0$	8. $\iiint\limits_V (30z+15x)\,dx\,dy\,dz$; $V: z=x^2+3y^2,\ z=0,\ y=x, y=0, x=1$
9. $y=\frac{5}{3}\sqrt{x}, 9y=5x, z=0, 9z=5\left(3+\sqrt{x}\right)$	10. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,$ $x=0, y=0\ (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0), \gamma=6z$

ВАРІАНТ 11

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,dx$	2. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$
3. $\iint\limits_D dx\,dy$; $D:\ y=2-x,\ y^2=4x+4$	4. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$; $D: x^2+y^2=ax,\ x^2+y^2=2ax,\ y\ge 0$
5. Тіло обмежене поверхнями $z^2=xy,\ x+y=a,$ $x+y=b\quad (0<a<b)$	6. Пластина обмежена лініями $y=x,\ y=-x,\ x=1$ з густиною, яка в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до початку координат
7. $\iiint\limits_V x^2\sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)dx\,dy\,dz$; $x=2, y=x, y=0, z=0, z=\pi$	8. $\iiint\limits_V \left(4+8z^3\right)dx\,dy\,dz$; $V:\ y=x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0$
9. $x^2+y^2=8, y=\sqrt{2x}, y=0,$ $z=0, 11z=15x$	10. $25\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=4, x=0,$ $z=0\ \ (x\ge 0,\ z\ge 0),\ \gamma=2\,(x^2+y^2)$

ВАРІАНТ 12

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx$	2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$
3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$	4. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$; $D-$ область, обмежена колом $x^2+y^2=a^2$ і кардіоїдою $x^2+y^2=a\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)$ (область не містить початку координат)
5. Тіло обмежене поверхнями $z=x^2+y^2,\ \ x^2+y^2=x,$ $x^2+y^2=2x,\ z=0$	6. Однорідна пластина обмежена верхньою половиною еліпса, що спирається на велику вісь
7. $\iiint\limits_V x^2 z\,\mathrm{sh}(xyz)\,dx\,dy\,dz$; $x=2,\ y=0,\ y=x,\ z=xy,\ z=0$	8. $\iiint\limits_V 21xz\,dx\,dy\,dz$; $V:\ x=2,\ y=0,\ y=x,\ z=xy,\ z=0$
9. $x+y=4,\ y=\sqrt{2x},\ z=3y,\ z=0$	10. $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4$ $\left(x^2+y^2\le 4\right),\ y=0\ \ (y\ge 0),\ \ \gamma=\lvert z\rvert$

ВАРІАНТ 13

1. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$	2. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx$
3. $\iint\limits_D (3x+y)dx\,dy$; $D:\ x^2+y^2\le 9,\ \ y\ge \dfrac{2}{3}x+3$	4. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$
5. Тіло обмежене поверхнями $x^2+y^2+z^2=a^2,\ \ x^2+y^2\ge a\lvert x\rvert\ \ (a>0)$	6. Однорідна пластина обмежена синусоїдою $y=\sin x$, віссю Ox і прямою $x=\dfrac{\pi}{4}$
7. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{sh}\left(xy\right)dx\,dy\,dz$; $x=2,\ y=\dfrac{x}{2},\ y=0,\ z=0,\ z=1$	8. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$; $V:\ y=x,\ y=0,\ x=3,\ z=xy,\ z=0$
9. $6x=5\sqrt{y},\ 18x=5y,\ \ z=0,$ $18z=5\left(3+\sqrt{y}\right)$	10. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=6z,\ x=0,\ y=0,$ $z=0\ \ (x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0),\ \ \gamma=90y$

7 КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Мета вивчення теми:

1) засвоїти основні поняття та факти інтегрального числення функції багатьох змінних відповідно до теми «Криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля»;

2) знати основні області застосування криволінійних та поверхневих інтегралів;

3) навчитися обчислювати криволінійні та поверхневі інтеграли;

4) навчитися застосовувати криволінійні та поверхневі інтеграли до обчислення площ фігур, довжин дуг кривих, об'ємів тіл, площ поверхонь, в техніці, векторному аналізі.

5) знати основні поняття та факти теорії поля, розуміти їх фізичну інтерпретацію та навчитися обчислювати значення його основних характеристик;

6) знати основні теореми аналізу, їх зміст з точки зору теорії поля, навчитися застосовувати ці теореми, в тому числі, до обчислення циркуляції та течії векторного поля;

Основні поняття теми:

1) гладка крива; особлива точка кривої; криволінійні інтеграли першого і другого роду, загальний криволінійний інтеграл другого роду *(див. пункт 7.1.1)*;

2) поверхня; особлива точка на поверхні *(див. пункт 7.2.1)*;

3) координатні лінії на поверхні, дотичні площини і нормалі в точках поверхні; двосторонні, повні та обмежені поверхні *(див. пункт 7.2.1)*;

4) площа поверхні *(див. пункт 7.2.3)*;

5) поверхневі інтеграли першого і другого роду, загальний поверхневий інтеграла другого роду *(див. пункт 7.2.5)*;

6) скалярне та векторне поле, їх диференційовність, похідні за напрямом *(див. пункт 7.3.1)*;

7) потенціальне поле *(див. пункти 4.5.2-4.5.6)*.

Основні факти теми:

1) фізичний зміст криволінійних інтегралів першого і другого роду *(див. пункт 7.1.1)*;

2) зведення криволінійних інтегралів до визначеного інтеграла Рімана *(див. пункт 7.1.2)*;

3) властивості криволінійних інтегралів першого роду *(див. пункт 7.1.3)*;

4) умови, за яких множина точок у просторі являє собою поверхню *(див. пункт 7.2.1)*;

5) формули для обчислення площі поверхні для різних форм її задання *(див. пункти 7.2.3, 7.2.4)*;

6) фізичний зміст поверхневих інтегралів *(див. пункт 7.2.3)*;

7) зведення поверхневих інтегралів до кратних інтегралів *(див. пункт 7.2.6)*

8) фізичний зміст дивергенції і ротора векторного поля та формули для обчислення *(див. пункт 7.3.2);*

9) формула Гріна *(див. пункт 7.4.1);*

10) формула Остроградського-Гаусса *(див. пункт 7.4.2);*

11) формула Стокса *(див. пункт 7.4.3)*;

12) умови незалежності криволінійного інтеграла на площині від шляху інтегрування *(див. пункт 7.4.4)*.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

7.1 Криволінійний інтеграл

7.1.1 Поняття криволінійного інтеграла першого і другого роду.

Нехай L – спрямлювана крива, тобто така крива, у якої обмеженою є множина довжин всіх ламаних, вписаних в цю криву (див рис. 7.1). Значення супремума такої множини називають довжиною кривої.

Параметризація кривої L: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$.

***Припущення*:**

1. Крива L не має самоперетинів і самонакладів.

2. L **–** гладка крива, тобто така крива, параметризація якої виражається через неперервно диференційовні на відрізку $[a,b]$ функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, тобто:

а) функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$;

б) функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – диференційовні на інтервалі (a,b);

в) $\exists \varphi'(a+0) = \lim\limits_{t \to a+0} \varphi'(t) \quad \wedge \quad \exists \varphi'(b-0) = \lim\limits_{t \to b-0} \varphi'(t)$;

3. крива *не має особливих точок,* тобто таких точок $(\varphi(t_0);\psi(t_0)) \in L$, що $[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 = 0$. Іншими словами, усі точки кривої L є *звичайними,* і

$$\forall t_0 \in [a,b] \ [\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2 \neq 0.$$

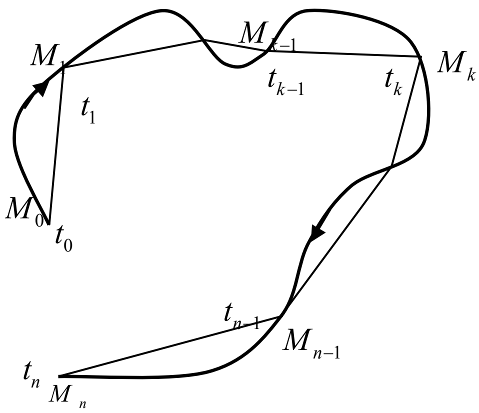


Рис.7.1

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Йому відповідає розбиття кривої L точками $\{M_k\}$ на множину дуг $\{\cup M_{k-1}M_k\}$ (рис. 7.1). Тут

$M_k(x_k, y_k) = M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$,

$M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}) = M_{k-1}(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1}))$,

$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}$,

$\Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = y_k - y_{k-1}$.

Позначимо через Δl_k довжину дуги $\cup M_{k-1}M_k$, тобто

$$\Delta l_k = |\cup M_{k-1}M_k| = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Діаметром розбиття кривої L точками $\{M_k\}$ називають число $\Delta = \max\limits_k \Delta l_k$.

Нехай $N_k \in \cup M_{k-1}M_k$ ($k = 1,\ldots,n$) – проміжні точки розбиття кривої L точками $\{M_k\}$. Враховуючи параметризацію кривої, матимемо:

$$N_k(\alpha_k, \beta_k) = N_k(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)),\ \tau_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1,\ldots,n.$$

Розглянемо три функції: $f(x,y)$, $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, задані на L, а також три інтегральні суми

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k, \beta_k) \cdot \Delta l_k,$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\alpha_k, \beta_k) \cdot \Delta x_k, \quad \sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\alpha_k, \beta_k) \cdot \Delta y_k.$$

Число I_s ($s = 1,2,3$) назвемо *границею інтегральних сум* σ_s при діаметрі розбиття, що прямує до нуля ($I_s = \lim\limits_{\Delta \to 0} \sigma_s$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \{M_k\} \forall \{N_k\} : \Delta < \delta \Rightarrow |\sigma_s - I_s| < \varepsilon.$$

Границю I_1 називають *криволінійним інтегралом першого роду* та позначають: $I_1 = \int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$.

Границі I_2 і I_3 називають *криволінійними інтегралами другого роду* та позначають: $I_2 = \int\limits_L P(x,y)\,dx$, $I_3 = \int\limits_L Q(x,y)\,dy$.

Суму $\int\limits_L P(x,y)\,dx + \int\limits_L Q(x,y)\,dy = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ називають *загальним інтегралом другого роду*.

Із означення випливає,

<u>по-перше,</u> що криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напряму оббігу кривої L, а інтеграл другого роду залежить від напряму оббігу L (змінює знак на протилежний при зміні напряму оббігу);

<u>по-друге</u>, *фізичний зміст інтеграла першого роду – це* маса кривої L, що має густину $f(x,y)$;

<u>по-третє,</u> *фізичний зміст інтеграла другого роду (загального інтеграла)* – робота по переміщенню матеріальної точки із точки *A* в точку *B* вздовж кривої L під дією сили $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\,\overline{i} + Q(x,y)\,\overline{j}$.

Аналогічним чином вводяться криволінійні інтеграли в просторі, зокрема,

$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ – *криволінійний інтеграл першого роду.*

$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ – *загальний криволінійний інтеграл другого роду.*

7.1.2 Зведення криволінійних інтегралів до визначеного інтеграла Рімана.

Теорема 7.1 (*зведення криволінійного інтеграла до визначеного*)**.** Нехай гладка крива L без особливих точок не має самоперетинів і самонакладів, функції $f(x,y)$, $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – неперервні вздовж L. Тоді існують криволінійні інтеграли першого і другого роду, до того ж, має місце формула зв'язку між криволінійними інтегралами і визначеним інтегралом Рімана:

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt = I_1, \tag{7.1}$$

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = I_2. \tag{7.2}$$

$$\int\limits_L Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)\,dt = I_3. \tag{7.3}$$

Криву називають *кусково-гладкою*, якщо вона неперервна і її можна розбити на скінченну кількість дуг L_k, що не мають спільних внутрішніх точок, тобто $\left(L_k \bigcap L_i\right)^0 = \varnothing \ \forall i \neq k$, $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$ так, що кожна ділянка L_k є гладкою кривою.

Нагадаємо, що ε-*околом точки* M_0 *на кривій* L називають множину точок кривої, що лежить всередині круга $O_\varepsilon(M_0)$ радіусу ε з центром в цій точці. Точку M_0 кривої називають внутрішньою, якщо вона належить цій кривій разом із деяким її ε-околом.

Якщо крива кусково-гладка, то криволінійні інтеграли вздовж неї можна подати як суму інтегралів вздовж гладких її ділянок, тобто $\int\limits_L \ldots = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{L_k} \ldots$ Більш того, формули (7.1), (7.2), (7.3) мають місце і для кусково-гладких кривих. Так само ці ж формули справедливі, якщо функції $f(x,y)$, $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ кусково-неперервні на L.

Формули (7.1), (7.2), (7.3) мають місце для кривих L у просторі: якщо крива параметризована як

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [a,b], \\ z = \eta(t), \end{cases}$$

то

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_a^b f\left(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\right)\cdot\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 + \left[\eta'(t)\right]^2}\,dt;$$

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx = \int\limits_a^b P\big(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_L Q(x,y,z)\,dy = \int\limits_a^b Q\big(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\big)\cdot\psi'(t)\,dy,$$

$$\int\limits_L R(x,y,z)\,dy = \int\limits_a^b R\big(\varphi(t),\psi(t),\eta(t)\big)\cdot\eta'(t)\,dt,$$

якщо $f(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – неперервні вздовж кривої, а L – гладка крива, без самоперетинів і самонакладів. Ці формули справедливі також, якщо L – кусково-гладка крива, а функції f, P, Q – кусково-неперервні вздовж кривої.

Аналогічно вводяться криволінійні інтеграли для кривих у просторі $\mathbb{R}^n$.

Якщо крива зімкнена (має єдину точку самоперетину), то інтеграл за цією кривою можна обчислювати, розбиваючи цю криву на дві гладкі частини без самоперетинів, а інтеграл подати сумою інтегралів по відповідним частинам кривої. Як правило, на практиці лише перевіряється неперервність $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ на відрізку зміни параметру t, що відповідає повному оббігу кривої.

Додатнім напрямом оббігу зімкненої кривої при обчисленні інтегралів другого роду будемо вважати такий напрям, рухаючись яким вздовж кривої L, область, яку обмежує ця крива, залишається ліворуч від точки, що здійснює цей оббіг. Тобто такий оббіг здійснюється проти годинникової стрілки.

Коли хочуть зазначити, що крива зімкнена, то дотримуються позначення:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

7.1.3 Властивості криволінійних інтегралів першого роду.

1) Якщо $\exists\int\limits_L f(x,y)dl \wedge \exists\int\limits_L g(x,y)\,dl$, тоді

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \exists\int\limits_L\big(\alpha\cdot f(x,y)+\beta\cdot g(x,y)\big)dl=\alpha\int\limits_L f(x,y)\,dl+\beta\int\limits_L g(x,y)\,dl\ -$$

це властивість *лінійності інтеграла першого роду.*

2) Властивість *адитивності інтеграла першого роду:* якщо $L=\bigcup\limits_{k=1}^{n}L_k$,

$\left(L_k\bigcap L_i\right)^0=\varnothing\ \forall i\neq k$, тоді $\int\limits_L f(x,y)\,dl=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k} f(x,y)\,dl$.

3) *Теорема про середнє:* якщо $f(x,y)$ – неперервна на L, тоді $\exists M^*\in L:\int\limits_L f(x,y)\,dl=f\left(M^*\right)\cdot|L|$.

4) *Оцінка модуля:* $\exists\int\limits_L f(x,y)\,dl\ \Rightarrow\begin{cases}1)\ \exists\int\limits_L|f(x,y)|\,dl;\\ 2)\ \left|\int\limits_L f(x,y)\,dl\right|\le\int\limits_L|f(x,y)|\,dl\end{cases}.$

Геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду.

$\int\limits_L dl=|L|$, тобто інтеграл $\int\limits_L dl$ дорівнює *довжині кривої* L.

7.2 Поверхневі інтеграли

7.2.1 Поняття поверхні.

Відображення f що переводить множину $G\subset\mathbb{R}^2$ в множину $G^*\subset\mathbb{R}^3$ називають *гомеоморфізмом*, якщо:

1. f – взаємно однозначне відображення G на G^*,
2. будь-яка фундаментальна послідовність $\{N_n\}\subset G$ точок переводиться в фундаментальну послідовність $\{M_n\}\subset G^*$,
3. будь яка фундаментальна послідовність $\{M_n\}\subset G^*$ є образом фундаментальної послідовності $\{N_n\}\subset G$.

Відображення f: $G\subset\mathbb{R}^2\to G^*\subset\mathbb{R}^3$ називають *локальним гомеоморфізмом*, якщо для будь-якої точки $x_\circ\in G$ існує її окіл $U_{x_\circ}\subset G$, який гомеоморфно відображається на свій образ, тобто на $f(U_{x_\circ})$.

Область G на площині T називають *елементарною областю (ЕО)*, якщо вона є гомеоморфним образом відкритого кругу $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^2$, тобто

$$G\subset T-\text{ЕО}\overset{def}{\Leftrightarrow}\ \exists\ D\subset\mathbb{R}^2-\text{відкритий круг: } f:D\to G\ -\text{гомеоморфізм.}$$

Зв'язну область G на площині називають *простою плоскою областю (ППО)*, якщо будь-яка її точка x_0 має окіл, який є елементарною областю, тобто

$$G\ -\text{ППО}\overset{def}{\Leftrightarrow}1)\ G-\text{зв'язна; }2)\ \forall x_0\ \exists U_{x_\circ}:\ U_{x_\circ}-\text{ЕО.}$$

Множину точок $\Phi\subset\mathbb{R}^3$ називають *поверхнею*, якщо вона є локально гомеоморфним образом простої плоскої області G, тобто

$$\Phi\subset\mathbb{R}^3\ -\textit{поверхня}\overset{def}{\Leftrightarrow}\ \exists G\ -\text{ППО: } f\text{: } G\to\Phi-\text{локальний гомеоморфізм.}$$

Околом точки *M на поверхні* Φ називають таку множину: $W(M)\overset{def}{=}U(M)\bigcap \Phi$.

Приклад 7.1 Нехай G – проста плоска область на площині Oxy (наприклад, G – відкритий круг),

$M(x,y)\in G$,

$z = z(x,y) = z(M)$ – неперервна функція на G,

G^* – графік функції $z(M)$, тобто $G^* = \{(x,y,z): z = z(x,y)\}$.

Відображення, що задає локальний гомеоморфізм:

$$\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=z(u,v), \end{cases} \quad \Rightarrow \Phi = G^* \text{ є поверхнею ! ■}$$

Розглянемо функцію, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in G, \quad G-\text{ ППО.} \\ x=z(u,v), \end{cases} \qquad (7.4)$$

Відображення задає векторну функцію $\overline{r}=\overline{r}(u,v)=x(u,v)\overline{i}+y(u,v)\overline{j}+z(u.v)\overline{k}$.

<u>Вимоги А:</u>

1. Функції (7.4) мають неперервні частинні похідні першого порядку в ППО G.
2. $\operatorname{rang}\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\right|_{(u,v)} = 2 \qquad \forall\,(u,v)\in G$.

Твердження 7.1 При виконані вимог А множина точок Φ в просторі, що визначаються рівнянням (7.4) являє собою поверхню, тобто є образом простої плоскої області G при локально гомеоморфному відображені.

Приклад 7.2 Функція $\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=z(u,v) \end{cases}$ в простій плоскій області G буде задовольняти вимоги А, якщо $z = z(u,v)$ має неперервні частинні похідні першого порядку в G. Тоді буде мати місце рівність

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{dz}{du} \\ 0 & 1 & \dfrac{dz}{dv} \end{pmatrix} = 2 .$$

Отже, за твердженням 7.1, ця функція визначає поверхню.

Поверхня Φ, що визначена рівнянням (7.4) і задовольняє вимоги А, в достатньо малому околі будь-якої своєї точки однозначно проектується хоча б на одну з трьох координатних площин.

Поверхню Φ, що задовольняє рівняння (7.4) і першу з вимог А, тобто частинні похідні першого порядку від координатних функцій неперервні в ППО G, називають *гладкою*, а якщо задовольняє другу вимогу А, тобто rang матриці дорівнює двом, то таку поверхню називають *поверхнею без особливих точок*. Тобто, фактично, поверхню Φ, що визначається рівнянням (7.4) і задовольняє обом вимогам А називають *гладкою поверхнею, без особливих точок* .

Нехай Φ – поверхня, що визначається рівнянням (7.4), гладка, без особливих точок, а її векторне рівняння має вигляд:

$$\overline{r}(u,v)=x(u,v)\overline{i}+y(u,v)\overline{j}+z(u,v)\overline{k} .$$

Нехай v_0 – таке фіксоване, що $(u, v_0) \in G$, тоді

$\overline{r}(u, v_o) = x(u, v_o)\overline{i} + y(u, v_o)\overline{j} + z(u, v_o)\overline{k}$ – крива на поверхні Ф,

$\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u}(u, v_0)$ – вектори дотичних до кривої $\overline{r}\ (u, v_0)$.

Аналогічно, якщо u_o таке, що $(u_o, v) \in G$, тоді $\overline{r}(u_o, v)$ – крива на Ф,

$\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}(u_o, v)$ – вектори дотичних до кривої $\overline{r}(u_o, v)$.

Множина кривих $\overline{r}\ (u, v_0)$ і $\overline{r}(u_o, v)$ утворює *множину координатних ліній.*

Оскільки $N_0(u_0, v_0) \to M_0(x_0, y_0, z_0)$, то $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u}(N_o)$ і $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}(N_o)$– два вектори, що виходять із однієї точки M_0. Із вимоги А2), в якій рядки матриці містять координати векторів $\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u}(N_o)\ i\ \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}(N_o)$, випливає, що ці вектори лінійно незалежні, оскільки ранг утвореної ними матриці дорівнює двом.

Тоді зазначені два вектори та точка M_0 визначають площину в т. M_0 на поверхні, яка є дотичною до цієї поверхні, а $\overline{n}(M_0) = \dfrac{\left[\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u}(N_0), \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}(N_0)\right]}{\left|\left[\dfrac{\partial \overline{r}}{\partial u}(N_0), \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial v}(N_0)\right]\right|}$ – одиничний вектор нормалі до дотичної площини в т. M_0.

Оскільки поверхня гладка, то усі компоненти дотичних векторів є неперервними функціями, тому $\overline{n}(M)$ – неперервна функція в <u>*околі*</u> довільної точки поверхні M_0. Таким чином, в <u>*околі*</u> будь-якої точки гладкої, без особливих точок поверхні утворено неперервне векторне поле нормалей. На практиці хотілося б мати справу з поверхнями, що мають цілком у всіх своїх точках неперервне поле нормалей.

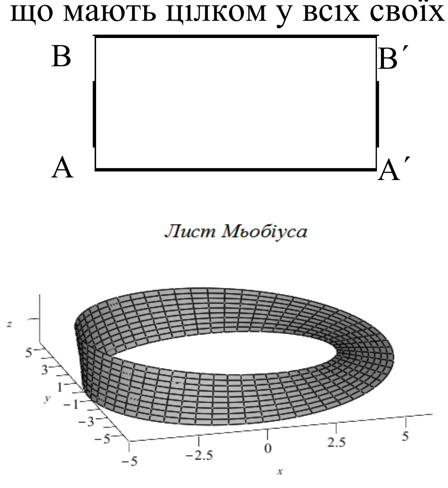


Рис. 7.2

Приклад 7.3 Розглянемо листок Мебіуса. Він утворюється склеюванням прямокутника ABB′A′ так, щоб збіглися точки B з A′ і A з B′. Поверхню, що утвориться в результаті називають *листком Мебіуса* (рис. 7.2).

При оббігу листка Мебіуса нормаль змінює свій напрям на протилежний. Листок Мебіуса не має неперервного поля нормалей (факт, відомий із диференціальної геометрії).

Якщо поверхня Ф в цілому має неперервне поле нормалей, то таку поверхню називають *двосторонньою.* У супротивному випадку поверхню називають *односторонньою*.

Листок Мебіуса є односторонньою поверхнею.

Поверхню Ф називають *повною*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність точок цієї поверхні збігається до точки, що лежить на цій поверхні.

Поверхню називають *обмеженою*, якщо її можна помістити в деяку тривимірну кулю.

Приклади 7.4 Куля, еліпсоїд, еліптичний параболоїд – двосторонні та повні поверхні. Куля та еліпсоїд – обмежені.

Надалі будемо розглядати такі поверхні Ф, що є:

1) <u>гладкими, **2)** без особливих точок, **3)** двосторонніми, **4)** повними, **5)** обмеженими.</u>

7.2.2 Допоміжні леми.

Лема 7.1 Нехай Φ гладка поверхня, а точка M_0 не є особливою, тобто rangA=2 в т. (u_0, v_0), що відповідає точці M_0. Тоді існує такий окіл точки M_0, який однозначно проектується на дотичну площину, що проходить через будь-яку точку цього околу.

Ділянка $\Phi^* \subset \Phi$ *має розмір* менший за δ, якщо вона лежить всередині кулі радіуса $\delta/2$.

Лема 7.2 Якщо поверхня Φ гладка, без особливих точок, обмежена, повна, тоді існує таке $\delta > 0$, що будь-яка ділянка Φ^* поверхні Φ, розмір якої менший за δ, однозначно проектується

а) на одну із координатних площин;

б) на будь-яку дотичну площину, що проходить через будь-яку довільну точку цієї ділянки.

Лема 7.3 Якщо поверхня Φ гладка, без особливих точок, обмежена, повна, двостороння та визначається рівняннями (7.4), тоді $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \Phi^* \subset \Phi$ ділянка розміру, меншого за δ, є такою, що кут $\angle\gamma$ між будь-якими двома нормалями в точках цієї ділянки задовольняє умову $\cos\gamma = 1 - \alpha$, де $0 < \alpha < \varepsilon$.

7.2.3 Площа поверхні.

Нехай Φ – гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена.

Застосовуємо лему 7.2, згідно з якою, знайдемо таке δ, щоб будь-яка ділянка поверхні розміром, меншим за δ, однозначно проектувалася б на будь-яку дотичну площину, що проходить через довільну точку цієї ділянки. Розбиваємо цю поверхню за допомогою кусково-гладких кривих на скінченну кількість ділянок $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ розміром, меншим за δ. Нехай $M_i \in \Phi_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) – довільні точки на цих ділянках. Позначимо через d – найбільший серед розмірів ділянок Φ_i – це *діаметр розбиття* (за побудовою, $d < \delta$). Проектуємо ділянку Φ_i на дотичну площину, що проходить через точку M_i. Позначаємо площу утвореної проекції через σ_i. Розглянемо $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i$.

Границею сум $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i$, що відповідають розбиттю $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$, при діаметрі розбиття d, що прямує до нуля, називають

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall \{\Phi_i\}_{i=1}^n\ \forall \{M_i\}\quad d < \delta\ \Rightarrow\ \left| \sum_{i=1}^{n} \sigma_i - I \right| < \varepsilon.$$

Якщо існує скінченне значення границі $I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$, тоді поверхню Φ називають *квадровною*, а значення границі I – її *площею*. Позначення: $I = \sigma(\Phi)$.

Зауваження 7.1 Не можна отримати площу поверхні, апроксимуючи її площами поверхонь вписаних многогранників при подрібненні розмірів граней, і беручи за площу поверхні sup вписаних многогранників (так ми робили при обчисленні довжин кривих, вписуючи в них ламані). Існує класичний приклад Шварца – так званий «чобіт Шварца», – він показує, що у площ, вписаних в циліндричну поверхню многогранників, може не існувати скінченного sup.

Теорема 7.2 Нехай поверхня Φ – гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена і визначається рівняннями (7.4) на простій плоскій області *G*. Тоді ця поверхня є квадровною, а для обчислення її площі застосовується формула:

$$\sigma = \iint\limits_G \left\| \left[\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}; \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right] \right\| du\, dv^{1},$$

де $\overline{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$.

В теоремі припускається, що поверхня є гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена і визначається рівняннями (7.4). Якщо поверхню можна розбити на скінченну кількість ділянок без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є гладкою, без особливих точок, повною, обмеженою, двосторонньою, що визначаються рівняннями (7.4), тоді поверхня Ф також буде квадровною, а її площа обчислюється як сума площ ділянок, що її утворюють.

Площа поверхні задовольняє властивості адитивності, тобто

$$\left(\Phi = \Phi_1 \bigcup \Phi_2 \quad \wedge \quad \Phi_1^{o} \bigcap \Phi_2^{o} = \varnothing\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\Phi} = \sigma_{\Phi_1} + \sigma_{\Phi_2}.$$

7.2.4 Формули площі поверхні, що задана параметрично, явно.

Будемо, як і раніше, припускати, що поверхня, задана рівняннями (7.4), гладка, без особливих точок, повна, двостороння, обмежена, а область G, на якій задані функції із (7.4), є простою плоскою областю.

Нехай $E = \left|\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$

$$G = \left|\frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Тоді, застосовуючи співвідношення $\left|\overline{[a,b]}\right|^2 + \left|\overline{(a,b)}\right|^2 = |\,\overline{a}\,|^2 \cdot |\,\overline{b}\,|^2$, $\overline{a} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}$, $\overline{b} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$, отримаємо $\left\| \left[\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right] \right\| = \sqrt{E\,G - F^2}$, тобто

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_G \sqrt{E\,G - F^2}\, du\, dv \text{ – площа поверхні, заданої параметрично через (1.7).}}$$

Нехай поверхня визначається функцією, що задана явно $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G$. Функція $f(x,y)$ на плоскій простій області G неперервна разом із своїми частинними похідними. Графік цієї функції є поверхнею (див. приклад 7.2) гладкою, без особливих точок, повною, двосторонньою, обмеженою. Її параметризація матиме вигляд:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \qquad (u,v) \in G. \\ z = f(u,v), \end{cases}$$

Тоді

$$E = 1 + \left[f'_x(x,y)\right]^2,\; G = 1 + \left[f'_y(x,y)\right]^2,\; F = f'_x(x,y)\cdot f'_y(x,y),$$

$$\sqrt{E\,G - F^2} = \sqrt{1 + \left[f'_x(x,y)\right]^2 + \left[f'_y(x,y)\right]^2}.$$

Звідки

[1] Якщо $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – вектори, то $[\overline{a}, \overline{b}]$ – їх векторний добуток.

$\boxed{\sigma = \iint\limits_G \sqrt{1+\left[f_x'(x,y)\right]^2+\left[f_y'(x,y)\right]^2}\,dx\,dy - \text{площа поверхні, що задана явно.}}$

7.2.5 Означення поверхневих інтегралів першого і другого роду.

Нехай поверхня Ф – гладка, без особових точок, двостороння, повна, обмежена і визначена параметричними рівняннями (7.4) в простій плоскій області G.

Припустимо, що на цій поверхні визначені чотири функції *f(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)*. Надалі будемо вважати, що вони неперервні на Ф.

Розіб'ємо поверхню Ф за допомогою кусково-гладких кривих на ділянки $\{\Phi_i\}$ так, щоб виконувалися леми 7.2 і 7.3.

Нехай $M_i \in \Phi_i$ точка на $i^{ій}$ ділянці поверхні, $\overline{n}(M_i)$ – вектор одиничної нормалі, тобто $\overline{n}(M_i) = (\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i)$. Позначимо $\sigma_i = \sigma(\Phi_i) = \iint\limits_S \sqrt{EG-F^2}\,dudv$, d – найбільший серед розмірів ділянок Φ_i. Введемо чотири інтегральні суми:

$$\Sigma_1 = \Sigma_1\left(f,\{\Phi_i\},\{M_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} F(M_i)\sigma_i,$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_2\left(P,\{\Phi_i\},\{M_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\cos X_i\sigma_i,$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_3\left(Q,\{\Phi_i\},\{M_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\cos Y_i\sigma_i,$$

$$\Sigma_4 = \Sigma_4\left(R,\{\Phi_i\},\{M_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} R(M_i)\cos Z_i\sigma_i.$$

Границею інтегральних сум Σ_s при діаметрі розбиття, що прямує до нуля, називають таке число I_s, для якого

$$I_s = \lim_{d\to 0}\sum\nolimits_S \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\ \forall\{\Phi_i\}\ \forall\{M_i\}\ d<\delta \Rightarrow \left|I_s - \Sigma_s\right| < \varepsilon\ \ (s=1,2,3,4).$$

Якщо існує $I_1 = \lim\limits_{d\to 0}\Sigma_1$, тоді I_1 називають *поверхневим інтегралом першого роду*.

Позначення: $I_1 = \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)d\sigma$.

Якщо існує $I_s = \lim\limits_{d\to 0}\Sigma_s$, s = 2, 3, 4, тоді I_s називають *поверхневим інтегралом другого роду*. Позначення:

$$I_2 = \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)\cos X d\sigma = \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)\cos Y d\sigma = \iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)dxdz,$$

$$I_4 = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\cos Z d\sigma = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy.$$

Значення суми

$$I_2 + I_3 + I_4 = \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + P(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)d\sigma$$

називають *повним (або загальним) поверхневим інтегралом другого роду.*

Поверхневий інтеграл I роду *не залежить* від сторони поверхні, по якій він обчислюється, а поверхневий інтеграл II роду залежить від сторони поверхні. Повний поверхневий інтеграл II роду *змінює знак* на протилежний при зміні сторони поверхні.

Фізичний зміст поверхневих інтегралів. Поверхневий інтеграл I роду – це маса поверхні з поверхневою густиною *f(x,y,z)*.

Розглянемо повний поверхневий інтеграл II роду. Нехай

$\overline{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,

$\overline{n}(x,y,z)=(\cos X,\cos Y,\cos Z)$,

тоді $I_2+I_3+I_4=\iint\limits_{\Phi}(\overline{A},\overline{n})d\sigma$ – течія векторного поля $\overline{A}$ через поверхню Ф.

Поверхневий інтеграл I роду і загальний поверхневий інтеграл II роду не залежать від вибору системи координат і є інваріантними відносно переходу до нових координат.

Зв'язок між поверхневими інтегралами I і II роду. Для переходу від поверхневого інтеграла II роду до поверхневого інтеграла I роду потрібно відповідно за функцію $f(x,y,z)$ обрати або $P(x,y,z)\cos X$, або $Q(x,y,z)\cos Y$, або $R(x,y,z)\cos Z$.

7.2.6 Зведення поверхневих інтегралів до кратних інтегралів Рімана.

Теорема 7.3 *(зведення поверхневих інтегралів до подвійних). Я*кщо поверхня Ф – гладка, без особових точок, двостороння, повна, обмежена і визначена параметричними рівняннями (7.4) на простій плоскій області G. Тоді

$$I_1=\iint\limits_{G}f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

$$I_2=\iint\limits_{G}P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\cos Xdudv,$$

$$I_3=\iint\limits_{G}Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\cos Ydudv,$$

$$I_4=\iint\limits_{G}R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\cos Zdudv.$$

Наслідок 7.1 Нехай $z=f(x,y)-$ неперервна функція на замкненій обмеженій області G, яка має неперервні частинні похідні першого порядку на G. Тоді графік цієї функції є гладкою, без особливих точок, двосторонньою, повною обмеженою поверхнею Ф. Поверхневі інтеграли II роду за цією поверхнею обчислюються за формулами:

$$I_2=-\iint\limits_{G}P(x,y,f(x,y))f_x^{'}(x,y)dxdy,$$

$$I_3=-\iint\limits_{G}Q(x,y,f(x,y))f_y^{'}(x,y)dxdy,$$

$$I_4=\iint\limits_{G}R(x,y,f(x,y))dxdy,$$

у припущенні, що нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю *Oz*.

Якщо поверхня Ф кусково-гладка, то поверхневі інтеграли можна обчислити як суму інтегралів за гладкими, без особливих точок, двосторонніми, обмеженими, повними ділянками.

7.3 Скалярне і векторне поле. Дивергенція і ротор векторного поля, їх фізичний зміст та формули для обчислення

7.3.1 Скалярні і векторні поля.

Для зручності подальшого розгляду, будемо векторні величини позначати рискою або стрілкою зверху на відміну від скалярних величин.

Будемо говорити, що в області D задане *скалярне (векторне) поле*, якщо кожній точці $M \in D$ відповідає за деяким законом єдине число (вектор).

Якщо $D \subset \mathrm{R}^3$, тоді скалярне поле – це скалярна функція трьох змінних; а векторне поле – векторна (координатна) функція трьох змінних.

Скалярне поле $U(M)$ називають *диференційовним в точці* $M \in D$, якщо його повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta U(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + \alpha_3\Delta z\,,$$

де A_1, A_2, A_3 – числа, що не залежать від $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \alpha_i = 0 \ \wedge\ \alpha_i\Big|_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0\\ \Delta z=0}} = 0\ , \quad \text{i=1, 2, 3.}$$

Як було доведено в темі «Функції багатьох змінних», еквівалентним є подання повного приросту у вигляді

$$\Delta U(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Нехай $\overline{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$, $\overline{h} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$. Тоді повний приріст матиме вигляд:

$$\Delta U(M) = (\overline{A}, \overline{h}) + o(\rho)\,.$$

Як було доведено в темі «Функції багатьох змінних», *градієнт скалярного поля*

$$\boxed{\overline{\mathrm{grad}}U(M) \overset{def}{=} \left\{\frac{\partial U}{\partial x};\frac{\partial U}{\partial y};\frac{\partial U}{\partial z}\right\}} = \overline{\nabla U}(M), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

визначає напрям найшвидшого зростання або спадання цього поля, тому градієнт не залежить від вибору системи координат. Отже, градієнт – це інваріант. Якщо $\vec{e}$ – одиничний вектор, що задає напрям, тоді *похідна скалярної функції* за напрямом $\vec{e}$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial e}(M) = (\overline{\mathrm{grad}}U(M), \overline{e})}$$

Векторне поле $\vec{a}(M)$ називають *диференційовним в точці* $M \in D$, якщо існує лінійний оператор $A\colon\ \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$, такий, що

$$\Delta\vec{a}(M) = \overline{a}(M_1) - \overline{a}(M) = A\overline{h} + \overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right),$$

де $M_1 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, $\left\|\overline{h}\right\| = \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$,

$\overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)$ – вектор: $\displaystyle\lim_{\left\|\overline{h}\right\|\to 0}\frac{\overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)}{\left\|\overline{h}\right\|} = \vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Твердження 7.2 Якщо $\vec{a}(M)$ – диференційовне векторне поле в точці $M \in D$, тоді приріст векторного поля у вигляді $\Delta\vec{a}(M) = A\overline{h} + \overline{o}\left(\left\|\overline{h}\right\|\right)$ визначається однозначно.

Векторне поле називають *диференційовним в області* D, якщо воно диференційовне у всіх точках області D.

Нехай $M, M_1 \in D$. Одиничний вектор $\vec{e}$ однаково спрямований з вектором $\overline{MM_1}$, тобто $\vec{e} \uparrow\uparrow \overline{M}\overline{M}_1$.

Похідною векторного поля $\vec{a}(M)$ *за напрямом* $\vec{e}$ називають

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}}(M) = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta \vec{a}(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\vec{a}(M_1) - \vec{a}(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|}.$$

Твердження 7.3 Якщо $\vec{a}(M)$ – диференційовне векторне поле в точці $M \in D$, $\vec{e}$ – одиничний вектор, що задає напрям, тоді $\dfrac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}}(M) = A\vec{e}$, де A – оператор в означенні диференційовності векторного поля $\vec{a}(M)$.

Мета: знайти матрицю $\overset{o}{A}$ оператора A, що визначається умовою диференційовності в ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{e}} = A\bar{e}, \\ a(\overline{M}) = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A\bar{i} = \dfrac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{i}} = \dfrac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}\bar{j} + \dfrac{\partial R}{\partial x}\bar{k}, \\ A\bar{j} = \dfrac{\partial P}{\partial y}\bar{i} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial R}{\partial y}\bar{k}, \\ A\bar{k} = \dfrac{\partial P}{\partial z}\bar{i} + \dfrac{\partial Q}{\partial z}\bar{j} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\bar{k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_1^1 = (\bar{i}, A\bar{i}) = \frac{\partial P}{\partial x}, a_1^3 = (\bar{k}, A\bar{i}) = \frac{\partial R}{\partial x}, \ldots$$

Висновок:

$$\overset{o}{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

7.3.2 Дивергенція, ротор, похідна за напрямом векторного поля.

Дивергенцією векторного поля, що є диференційовним в точці M називають дивергенцію оператора A, що визначається умовою диференційовності цього векторного поля в точці M. Тобто, якщо $\Delta\bar{a}(M) = A\bar{h} + o\left(\left\|\bar{h}\right\|\right)$, то $\operatorname{div}\bar{a}(M) = \operatorname{div} A$.

Ротор означається аналогічно, як $\overline{\mathrm{rot}}\, a(M) = \overline{\mathrm{rot}}\, A$.

Якщо $\bar{a}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$, то формули [2, с. 49-50] для обчислення мають вигляд:

$$\operatorname{div}\bar{a} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \bar{a});$$

$$\overline{\mathrm{rot}}\, a = (a_2^3 - a_3^2)\bar{i} + (a_3^1 - a_1^3)\bar{j} + (a_2^1 - a_1^2)\bar{k} =$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left[\nabla,\overline{a}\right].$$

Нехай напрям задається одиничним вектором

$\overline{e}=\cos\alpha\overline{i}+\cos\beta\overline{j}+\cos\gamma\overline{k}$,

де $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ – направляючі косинуси. Отримаємо формули для обчислення похідної за цим напрямом:

$$A\overline{e}=\cos\alpha\cdot A\overline{i}+\cos\beta\cdot A\overline{j}+\cos\gamma\cdot A\overline{k}=$$

$$=\overline{i}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)+$$

$$+\overline{j}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)+$$

$$+\overline{k}\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right).$$

Дивергенція і ротор не залежать від вибору базису, тому для диференційовного в точці M векторного поля ротор і дивергенція – інваріанти. Звідси випливає, що в кожній точці $M\in D$ вони визначаються однозначно.

Фізичний зміст дивергенції і ротору.

Дивергенція векторного поля $\overline{a}(M)=(P(M),Q(M),R(M))$ обчислюється за формулою $\operatorname{div}\overline{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$, а тому визначає швидкість зміни кожного компонента вектора у своєму власному напрямі. Отже, вона характеризує розбіжність векторного поля. Крім того,

- $\operatorname{div}\overline{a}(M)>0\Rightarrow$ із точки М витікає більше рідини, ніж потрапляє, тоді таку точку M називають *витоком*;
- $\operatorname{div}\overline{a}(M)<0\Rightarrow$ із точки M витікає менше рідини, ніж потрапляє, тоді таку точку M називають *стоком*;
- $\operatorname{div}\overline{a}(M)=0\Rightarrow$ здійснюється *баланс* між витіканням і потраплянням рідини в точці M.

Величина ротора векторного поля $\overline{\mathrm{rot}}a$ обчислюється за формулою

$$\overline{\mathrm{rot}}a=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Ротор векторного поля характеризує *вихор*. Це пов'язано з тим, що він якби «змішує» похідні і компоненти. Він якби слідкує як змінюються компоненти векторного поля за чужими напрямами, тобто ротор характеризує обертання векторного поля.

Якщо $\vec{v}(M)$ – векторне поле швидкостей течії рідини, тоді його кутова швидкість виражається через ротор векторного поля $\vec{v}(M)$ за формулою: $\vec{\omega}(M)=\frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,v(M)$.

7.4 Основні формули аналізу. Формула Гріна. Формула Остроградського-Гаусса. Формула Стокса

7.4.1 Формула Гріна

Нехай π – це площина в $\mathbb{R}^3$,

$\vec{k}$ – одиничний вектор нормалі до π,

D – область на площині π.

D – *однозв'язна плоска область*, тобто така область, яка має властивість: будь-яка кусково-гладка зімкнена крива, що лежить в D, обмежує область, яка також цілком лежить в D.

Через C позначимо межу ∂D області D, тобто множину межових точок D.

Умови на межу $C = \partial D$ області D:

1) множина C утворює криву, яка є зімкненою, кусково-гладкою, без особливих точок;

2) на площині π можна обрати таку декартову прямокутну систему координат, що усі прямі, які паралельні осям координат перетинають C не більш, ніж у двох точках.

$\overline{t} = \overline{t}(M)$ – векторне поле одиничних векторів дотичних до кривої C, яке узгоджено з $\vec{k}$. Це означає наступне: якщо дивитися з кінця вектора $\vec{k}$, то вектори $\overline{t}$ будуть задавати додатній напрям оббігу кривої C, тобто оббіг, що узгоджений з нормаллю за правилом «штопора».

Теорема 7.4 (*формула Гріна*). Нехай

♦ $\vec{a}(M)$ – векторне поле, диференційовне у відкритій області D,

♦ межа $C = \partial D$ області D задовольняє умови 1) і 2),

♦ векторне поле $\vec{a}(M)$ має неперервні похідні за будь-яким напрямом в точках замикання D, тобто в точках множини $D \bigcup C = \overline{D}$.

Тоді виконується формула:

$$\boxed{\iint\limits_{\overline{D}} (\overline{k}, \overline{\mathrm{rot}} a)\, ds = \oint\limits_{C} (\overline{t}, \overline{a})\, dl} \tag{Г1}$$

(тут ds – елемент площі області $\overline{D}$, а dl – диференціал дуги кривої C).

Фізична інтерпретація формули Гріна. Значення інтеграла $\oint\limits_{C} (\overline{t}, \overline{a}) dl$ – це циркуляція векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж контуру C (або робота векторного поля $\vec{a}(M)$ по пересуванню матеріальної точки вздовж кривої C). Воно дорівнює значенню інтеграла $\iint\limits_{\overline{D}} (\overline{k}, \overline{\mathrm{rot}} a) ds$, яке характеризує течію векторного поля $\overline{\mathrm{rot}} a$ через область $\overline{D}$.

Зауваження 7.2 (*щодо умови 2*). Якщо умова 2) на контурі C не виконується, тоді потрібно розбити область на ділянки, на яких вона виконується. Наприклад, якщо таких ділянок виявиться дві (рис. 7.3), то

$$\iint\limits_{\overline{D}} = \iint\limits_{\overline{D}_1} + \iint\limits_{\overline{D}_2},$$

$$\iint\limits_{\overline{D}_2} = \oint\limits_{C_2 \bigcup C_3} = \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3},$$

$$\iint\limits_{\overline{D}_1} = \oint\limits_{C_1 \bigcup C_3} = \int\limits_{C_1} - \int\limits_{C_3}.$$

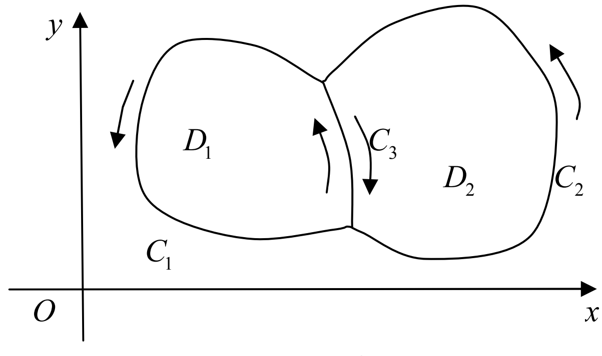


Рис. 7.3

Тепер додамо дві останні рівності, отримаємо

$$\iint_D = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C \ .$$

Таким чином, формула Гріна виконується і без умови 2).

Зауваження 7.3 (*щодо однозв'язності області* D). Не обов'язково потрібно накладати умову однозв'язності. Аналогічно зауваженню 7.2 область розбивається на ділянки за допомогою кусково-гладких кривих так, щоб кожна ділянка була однозв'язною. Інтеграли за кривими розділу взаємознищуються при додаванні.

Зауваження 7.4 (*щодо послаблень припущень гладкості векторного поля* $\vec{a}(M)$). Умови на гладкість векторного поля $\vec{a}(M)$ можна послабити, замінивши їх на неперервність поля $\vec{a}(M)$ в $\overline{D}$, його диференційовність в D і неперервність похідних за будь-яким напрямом в D.

Зауваження 7.5 (*щодо послаблень припущень на криву C*). На криву можна накладати лише припущення про її спрямлюваність.

Зауваження 7.6 Формула Гріна може бути записана у вигляді:

$$\boxed{\iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = \oint_C P dx + Q dy}. \qquad (\Gamma 2)$$

Крім того, формула (Г2), так само, як і формула (Г1), залишається інваріантною відносно вибору прямокутної системи координат.

7.4.2 Формула Остроградського-Гаусса.

Однозв'язною тривимірною областю $D \subset \mathbb{R}^3$ називають таку область, що будь-яка кусково-гладка зімкнена поверхня G, яка міститься в D, обмежує область D_1, яка лежить всередині *D*, тобто $(G \bigcup D_1) \subset D$.

$S = \partial D$ –множина межових точок області *D*.

$\vec{n} = \vec{n}(M)$ – векторне поле одиничних зовнішніх нормалей до поверхні *S*.

Поверхня S *в* $\mathbb{R}^3$ *задовольняє умови:*

1) S – кусково-гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена, зімкнена;
2) $\exists$ *Oxyz* (можна обрати прямокутну систему координат) таку, що будь-яка пряма, паралельна кожній координатній осі, перетинає *S* не більше, як у двох точках.

Теорема 7.5 (*формула Остроградського-Гаусса*). Нехай

- ♦ $\vec{a}(M)$ – диференційовне в *D* векторне поле,
- ♦ множина межових точок $S = \partial D$ області *D* задовольняє умови 1) і 2),
- ♦ похідна за будь-яким напрямом неперервна в $D \bigcup S = \overline{D}$.

Тоді виконується формула:

$$\boxed{\iiint_{\overline{D}} \operatorname{div} \overline{a} \, dv = \oint\!\!\oint_S (\overline{a}, \overline{n}) \, ds} \qquad (\text{О-}\Gamma 1)$$

(тут dv – елемент об'єму області $\overline{D}$, ds – елемент площі поверхні S).

Фізичний зміст: потрійний інтеграл від дивергенції векторного поля дорівнює течії векторного поля через поверхню *S*.

Зауваження 7.7 (*щодо області* D). Якщо поверхня *S* не задовольняє умову 2) або область D, яку вона обмежує, не є однозв'язною, тоді область D потрібно розбити на скінченну кількість областей, кожна з яких задовольняє умову 2), і застосувати властивість адитивності кратного інтеграла: $\iiint\limits_{\bar{D}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \iiint\limits_{D_i}$. Що стосується поверхневого інтеграла, то інтеграли вздовж тих частин поверхні, що будуть спільними у областей D_i, взаємознищаться, оскільки будуть мати протилежно спрямовані нормалі. Після застосування формули Остроградського-Гаусса для кожної з частин D_i та підсумовування, ми отримаємо, що $\iiint\limits_{\bar{D}} = \oiint\limits_{S}$.

Зауваження 7.8 Формулу Остроградського-Гаусса можна переписати у вигляді:

$$\boxed{\iiint\limits_{\bar{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint\limits_{S} P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy} \qquad \text{(О-Г2)}$$

Причому, ця формула є інваріантною за формою і значенням відносно переходу до нової системи координат.

7.4.3 Формула Стокса.

Повторимо деякі означення і зробимо висновки з метою введення поняття поверхні з краєм.

А) Із означень випливає, що як елементарна область (ЕО), так і проста плоска область (ППО), повинні бути відкритими множинами на площині з евклідовою метрикою.

Б) $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ – *поверхня* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists G$ – ППО і $\exists\, f : G \to \Phi$ – локальний гомеоморфізм.

В) Оскільки проста плоска область *G* є відкритою множиною, зокрема, в метричному просторі $\mathbb{R}_2^2$, то можна множину $\mathbb{R}^2$ локально гомеоморфно відобразити на *G*.

Г) Композиція локальних гомеоморфізмів $\mathbb{R}^2 \to G$ і $G \to \Phi$ є локальним гомеоморфізмом $\mathbb{R}^2 \to \Phi$, тому означення поверхні можна дати в інший спосіб.

$\Phi \subset \mathbb{R}^3$ – *поверхня* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $f\colon \mathbb{R}^2 \to \Phi$ – локальний гомеоморфізм.

Д) Введемо позначення:

$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0\}$.

Е) Окіл т.*M* на поверхні Ф:

$W(M) \overset{def}{=} U(M) \bigcap \Phi$.

Поверхнею з краєм називають таку множину *G*, деякий окіл кожної з точок якої є гомеоморфним образом або множини $\mathbb{R}^2$, або H^2. Множину *C* тих точок, околи яких є гомеоморфними образами множини H^2, називають *краєм поверхні G (*див. рис. 7.4).

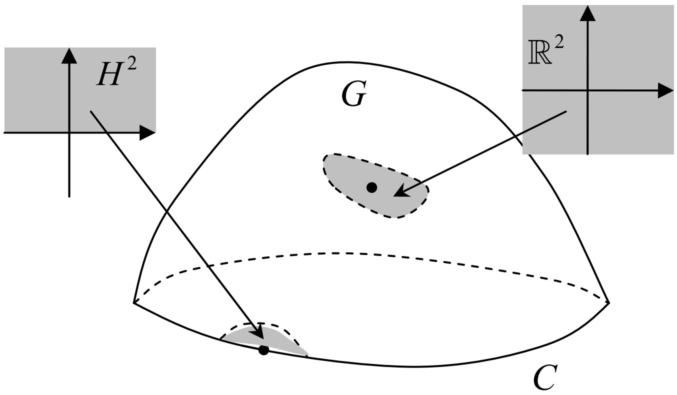


Рис.7.4

$S \subset \mathbb{R}^3$ – *однозв'язна поверхня* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, C$ – кусково-гладкої, зімкненої кривої $C \subset S$ $\exists$ поверхня G, для якої крива *C* є краєм, причому всі точки цієї поверхні *G* разом із точками краю *C* належать поверхні *S*, тобто $(G \bigcup C) \subset S$.

Умови на поверхню S:

1) *S* – кусково-гладка, без особливих точок, двостороння, повна, обмежена;

2) $\exists$ *C* – край поверхні *S*, який є кусково-гладкою, без особливих точок просторовою кривою;

3) $\exists$ система координат O*xyz* така, що поверхня *S* однозначно проектується на кожну з трьох координатних площин.

$\vec{n} = \vec{n}(M)$ – векторне поле одиничних нормалей до S.

$\vec{t} = \vec{t}(M)$ – векторне поле одиничних векторів дотичних в точках контура *C* за напрямами, які узгоджені з полем $\vec{n}$.

За цих умов виконується теорема.

Теорема 7.6 (*формула Стокса*). Нехай

♦ $\vec{a}(M)$ – векторне поле, неперервно диференційовне в околі поверхні *S* (у відкритій множині, що містить у собі *S*),

♦ поверхня *S* задовольняє зазначені умови 1) – 3).

Тоді має місце формула:

$$\boxed{\iint\limits_S (\vec{n}, \overline{\mathrm{rot}}\, a)ds = \oint\limits_C (\vec{a}, \vec{t})dl} \qquad \text{(C1)}$$

(тут ds – елемент площі поверхні S, а dl – диференціал дуги кривої C).

Фізичний зміст: течія векторного поля $\overline{\mathrm{rot}}\, a$ через поверхню *S* дорівнює циркуляції векторного поля вздовж контура *C,* який є краєм поверхні *S.*

Зауваження 7.9 Формула Стокса є вірною для поверхні S, що задовольняє умови 1) і 2), але не задовольняє умову 3). Дійсно, припустимо, що поверхню можна записати об'єднанням $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Phi_i$ ділянок Φ_i, які задовольняють усі три умови, а також ці ділянки не мають спільних внутрішніх точок. Далі подамо поверхневий і криволінійний інтеграл сумами $\iint\limits_S = \sum \iint\limits_{\Phi_i}$, $\oint\limits_C = \sum \oint\limits_{\partial \Phi_i}$. Для ділянок, що мають спільну межу, криволінійний інтеграл за цією межею взаємно знищиться, оскільки для таких ділянок оббіг буде здійснюватися в протилежних напрямах.

Зауваження 7.10 Формулу Стокса (C1) можна переписати у формах:

$$\boxed{\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz}. \qquad \text{(C2)}$$

$$\boxed{\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds = \oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz}. \qquad \text{(C3)}$$

Інтеграли зліва і справа формул (C2) і (C3) мають інваріантний характер відносно вибору декартової системи координат.

7.4.4 Умови незалежності криволінійного інтеграла на площині від шляху інтегрування. Потенціальні векторні поля.

Нехай $\vec{a}(x,y) = \{P(x,y); Q(x,y\}$ – плоске векторне поле у відкритій області D.

Функцію *U(x,y)* називають *потенціалом векторного поля* $\overline{a}(x,y)$, якщо $\overline{a}(x,y) = \overline{grad} U(x,y)$. *Поле* $\vec{a}$, що має потенціал, називають *потенціальним*.

Із означення потенціала і градієнта випливає:

$$\overline{\mathrm{grad}}U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y} \right\} = \{P, Q\} = \bar{a} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Теорема 7.7 Нехай функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – неперервні у відкритій області D. Для будь-яких двох точок A і B із області D значення інтеграла $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежать від лінії AB, що сполучає точки A і B та лежить всередині D, тоді і лише тоді, коли векторне поле $\vec{a}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ потенціальне. Крім того, при цьому

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A).$$

Висновок. Якщо в області D функції $P(x, y), Q(x, y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними, а інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від лінії $AB \subset D \quad \forall A, B \in D$, тоді (за теоремою 7.7) векторне поле $\bar{a} = \{P, Q\}$ – потенціальне, а разом з цим $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$.

Розглянемо зворотне твердження.

Твердження 7.4 Нехай

1) D – однозв'язна область,
2) функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – неперервні разом із своїми частинними похідними в області D;
3) $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$.

Тоді інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від лінії $AB \subset D \quad \forall A, B \in D$.

Загальний висновок. Інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування за дугою AB, що лежить в однозв'язній області D, в якій дані функції неперервні разом із своїми частинними похідними, *тоді і лише тоді*, коли $\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M) \quad \forall M \in D$. Крім того, має місце формула $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$, де $U(M)$ – потенціал векторного поля $\vec{a}(M)$.

7.5 Питання для самоконтролю

1. Навести означення спрямлюваної кривої, гладкої кривої, особливої точка кривої.
2. Ввести поняття розбиття кривої, проміжної точки на кривій, інтегральної суми першого і другого роду.
3. Навести означення границі інтегральних сум, криволінійного інтеграла першого і другого роду, загального криволінійного інтеграла другого роду.

4. Ввести поняття додатного напряму оббігу зімкненої кривої.
5. Пояснити фізичний зміст криволінійних інтегралів першого і другого роду.
6. Сформулювати та довести теорему про зведення криволінійних інтегралів до визначеного інтеграла Рімана.
7. Пояснити правила обчислення криволінійних інтегралів за кусково-гладкою кривою і від кусково-гладких функцій.
8. Виписати та обґрунтувати властивості криволінійних інтегралів першого роду.
9. Пояснити поняття гомеоморфізму та локального гомеоморфізму плоскої множини в просторову, елементарної області, простої плоскої області. Дати означення поверхні.
10. Що таке окіл точки на поверхні? Що таке особлива точка на поверхні?
11. Виписати умови, за яких множина точок у просторі являє собою поверхню. Довести відповідну теорему. Дати означення гладкої поверхні.
12. Сформулювати та довести леми про однозначне проектування малих околів точок на координатні площини, дотичні площини, про кут між нормалями в точках таких околів.
13. Пояснити поняття координатних ліній на поверхні, дотичної площини і нормалі в точці поверхні. Дати означення двосторонньої, повної та обмеженої поверхонь. Навести приклади.
14. Навести означення площі поверхні.
15. Вивести формули для обчислення площі поверхні для різних форм її задання.
16. Дати означення поверхневих інтегралів першого і другого роду, загального поверхневого інтеграла другого роду.
17. Пояснити фізичний зміст поверхневих інтегралів.
18. Сформулювати та довести теорему про зведення поверхневих інтегралів до кратних інтегралів.
19. Вивести формули для обчислення поверхневих інтегралів через кратні у випадку, коли поверхня визначається графіком функції двох змінних.
20. Ввести поняття скалярного та векторного полів, їх диференційовності, похідної за напрямом.
21. Вивести формули для обчислення похідної за напрямком для диференційовного скалярного і векторного полів
22. Пояснити фізичний зміст дивергенції і ротора векторного поля та виписати формули для їх обчислення.
23. Дати означення однозв'язної плоскої області. Виписати формулу Гріна з необхідними припущеннями. Пояснити її фізичний зміст. Провести обґрунтоване виведення формули.
24. Пояснити випадки можливості послаблення припущень у формулі Гріна.
25. Дати означення однозв'язної тривимірної області. Виписати формулу Остроградського-Гаусса з необхідними припущеннями. Пояснити її фізичний зміст. Провести обґрунтоване виведення формули.
26. Пояснити випадки можливості послаблення припущень у формулі Остроградського-Гаусса.
27. Пояснити поняття краю поверхні.
28. Дати означення однозв'язної області на поверхні. Виписати формулу Стокса з необхідними припущеннями. Пояснити її фізичний зміст. Провести обґрунтоване виведення формули.
29. Пояснити випадки можливості послаблення припущень у формулі Стокса.
30. Надати поняття потенціального поля. Виписати умови незалежності криволінійного інтеграла на площині від шляху інтегрування та довести відповідні твердження.

8 МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕМИ «КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ»

В наступних двох прикладах передбачається застосування теореми 7.1 про зведення криволінійного інтеграла до визначеного.

Задача 8.1 а) Обчислити інтеграл $\int\limits_{AC}(x+y)dx+(x-y)dy$, якщо AC – частина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ для випадку $y>0$, де $A(a,0)$, $C(0,b)$.

б) (№Д4255) Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, де $ABCDA$ – контур квадрата з вершинами $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$.

в) (№Д4311) Знайти площу області D, що обмежена петлею декартового листа $x^3+y^3=3axy$.

Розв'язання. а) Параметризуємо еліпс: $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$. Із умови і параметризації отримаємо: $P(x,y)=x+y, Q(x,y)=x-y$, $\varphi(t)=a\cos t$, $\psi(t)=b\sin t$ $a=0, b=2\pi$. Оскільки $\varphi'(t)=-a\sin t, \psi'(t)=b\cos t$, а точкам $A(a,0)$, $C(0,b)$ відповідають значення параметра $t=0$ і $t=\pi/2$, то за формулами (5.2) і (5.3) одержимо:

$$\int\limits_{AC}\ldots=\int\limits_a^b\Big(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\cdot\psi'(t)\Big)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\big(a\cos t+b\sin t\big)\big(-a\sin t\big)+\big(a\cos t-b\sin t\big)b\cos t\Big)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(-a^2\cos t\sin t-ab\sin^2 t+ab\cos^2 t-b^2\sin t\cos t\Big)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\left(a^2+b^2\right)}{2}\sin 2t+ab\big(\cos 2t\big)\right)dt=-\frac{a^2+b^2}{2}. \blacksquare$$

б) Обчислимо криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ окремо вздовж кожної сторони квадрата $ABCDA$ (рис. 8.1).

Знайдемо рівняння прямої AB:

$$AB:\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{1-0}\Rightarrow AB: y=1-x.$$

Звідси $dy=d(1-x)=-dx$. Тоді $dx+dy=0$, отже,

$$\int_{AB} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0.$$

Оскільки BC задається рівняннями $y = x+1$, то $dy = d(x+1) = dx$. Відрізку BC відповідають недодатні значення x і невід'ємні значення y, тому $|x|+|y| = -x+y$. При оббігу контура від точки B до точки C параметр x змінюється від 0 до -1. Отже,

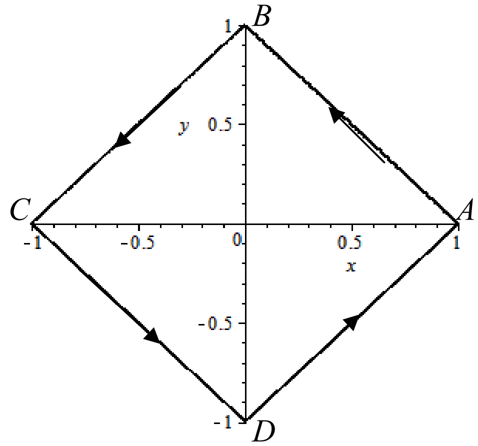


Рис. 8.1

$$\int_{BC} \ldots = \int_{BC} \frac{dx+dy}{-x+y} = \left\| \begin{matrix} y = x+1, \\ dy = dx \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_0^{-1} \frac{dx+dx}{-x+(x+1)} = \int_0^{-1} 2dx = -2.$$

Аналогічно,

$$CD: y = -x-1 \Rightarrow dy = -dx \Rightarrow dx+dy = 0 \Rightarrow \int_{CD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} DA: y = x-1 \Rightarrow dy = dx, \\ (x \ge 0 \wedge y \le 0) \Rightarrow |x|+|y| = x-y, \\ x \text{ змінюється від } 0 \text{ до } 1, \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{DA} \ldots = \int_{DA} \frac{dx+dy}{x-y} = \int_0^1 \frac{dx+dx}{x-(x-1)} = 2.$$

В результаті одержимо:

$$\int_{ABCDA} \ldots = \int_{AB} \ldots + \int_{BC} \ldots + \int_{CD} \ldots + \int_{DA} \ldots = 0 + (-2) + 0 + 2 = 0. \quad \blacksquare$$

в) Спочатку отримаємо формулу для обчислення площі через криволінійний інтеграл. За означенням міри допустимої множини D, її міра дорівнює її площі і $S = \iint_D 1 \cdot dx\, dy$. Застосуємо формулу Гріна (Г2):

$$\boxed{\iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds = \oint_C Pdx + Qdy},$$

обравши $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $C -$ зімкнений контур, який є межею області D і має додатний напрям оббігу. Розглянемо три можливих випадки.

1) якщо $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, то $Q(x,y) = x,\ P(x,y) = 0$ і $\boxed{S = \iint_D 1 \cdot dx\, dy = \oint_C x\, dy}$;

2) якщо $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, то $Q(x,y) = 0,\ P(x,y) = -y$ і $\boxed{S = \iint_D 1 \cdot dx\, dy = -\oint_C y\, dx}$;

3) якщо $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}$, то $Q(x,y) = \dfrac{1}{2}x,\ P(x,y) = -\dfrac{1}{2}y$ і

$$\boxed{S = \iint_D 1 \cdot dx\, dy = \frac{1}{2}\oint_C y\, dx + x\, dy}.$$

Для обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла потрібно застосувати одну із трьох отриманих вище формул.

Одержимо параметризацію кривої, поклавши $y = tx$, тоді

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3axy, \\ y = tx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + t^3x^3 = 3ax \cdot tx, \\ y = tx, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} dx = 3a \cdot \left(\dfrac{t}{1+t^3}\right)' dt = 3a \cdot \dfrac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2} dt, \\ dy = 3a \cdot \left(\dfrac{t^2}{1+t^3}\right)' dt = 3a \cdot \dfrac{2t-t^4}{\left(1+t^3\right)^2} dt. \end{cases}$$

Знайдемо значення параметра, які відповідають точці самоперетину кривої. Параметру $t_1 = 0$ відповідає точка $O(0,0)$ на площині, а параметру $t_2 = \infty$ – та ж сама точка, оскільки

$$\begin{cases} x_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{3at}{1+t^3} = 0, \\ y_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{3at^2}{1+t^3} = 0. \end{cases}$$

Розглянемо різницю між y і x:

$$\frac{3at^2}{1+t^3} - \frac{3at}{1+t^3} = \frac{3at(t-1)}{(t+1)(t^2-t+1)}.$$

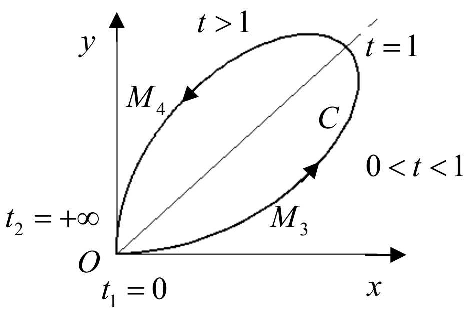


Рис. 8.2

Звідки отримаємо: $y < x$ при $t \in (0;1)$, а $y > x$ при $t \in (1;+\infty)$. Це означає, що всі точки $M_3\big(x(t_3); y(t_3)\big)$ кривої, що відповідають значенню параметра $t_3 \in (0;1)$ знаходяться нижче прямої $y = x$, а точки $M_4\big(x(t_4); y(t_4)\big)$, де $t_4 \in (1;+\infty)$, знаходяться вище цієї прямої (див. рис. 8.2). Отже, по-перше, інших точок самоперетину крива не має. По-друге, оскільки $t_1 < t_3 < t_4 < t_2$, то точки O, M_3, M_4, O, передують одна одній, тобто $O \prec M_3 \prec M_4 \prec O$. Таким чином, контур С пробігається проти годинникової стрілки, що відповідає додатному напряму оббігу.

Тепер застосуємо другу з отриманих формул для обчислення площі:

$$S = -\oint\limits_C y\, dx = -9a^2 \int\limits_0^\infty \frac{t^2}{1+t^3} \cdot \frac{1-2t^3}{\left(1+t^3\right)^2} dt = -9a^2 \int\limits_0^\infty t \cdot \frac{t}{1+t^3} \cdot d\left(\frac{t}{1+t^3}\right) =$$

$$= -\frac{9a^2}{2} \int\limits_0^\infty t \cdot d\left(\frac{t}{1+t^3}\right)^2 = \left\| \begin{matrix} u = t, & du = dt, \\ dv = d\left(\dfrac{t}{1+t^3}\right)^2, & v = \left(\dfrac{t}{1+t^3}\right)^2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{9a^2}{2}\left(t\left(\frac{t}{1+t^3}\right)^2\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(\frac{t}{1+t^3}\right)^2 dt \right) =$$

$$= -\frac{9a^2}{2}\left(0 - \frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{d\left(1+t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} \right) = -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^3}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{3a^2}{2}.\blacksquare$$

Задача 8.2

а) Знайти $|L|$ довжину кривої $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = e^{-t}, \end{cases}$

б) Обчислити криволінійні інтеграли $\int\limits_L (x+y)\,dl$ і $\int\limits_L (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ де $L-$ частина кола $x^2 + y^2 = ax\left(x \ge \frac{a}{2} \right)$, що сполучає точки $A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ і $B\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

в) Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dl$, вздовж дуги кривої $x^2 + y^2 = cz,\ \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\frac{z}{c}$, що сполучає точки $A(0,0,0), B(x_0, y_0, z_0)$.

Розв'язання. а) Із умови випливає, що

$\varphi(t) = e^{-t}\cos t,\ \psi(t) = e^{-t}\sin t,\ \eta(t) = e^{-t},\ a = 0, b = 2\pi.$

Застосуємо геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду і формули зв'язку між таким інтегралом і визначеним:

$$|L| = \int\limits_L dl = \int\limits_a^b \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 + \left[\eta'(t)\right]^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left[-e^{-t}\cos t + e^{-t}\left(-\sin t\right)\right]^2 + \left[-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t\right]^2 + \left[-e^{-t}\right]^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^{-t}\cdot\sqrt{\cos^2 t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} e^{-t}dt = \sqrt{3}\cdot\left(-e^{-t}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\sqrt{3}\left(e^{-2\pi} - 1\right) = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right).\ \blacksquare$$

б) Оскільки рівняння кола можна переписати у вигляді $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, то це коло має центр в точці $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ і радіус $\frac{a}{2}$. Нерівність $x \ge \frac{a}{2}$ задає праву частину кола AMB (див. рис. 8.3).

В полярній системі координат $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ рівняння даного кола має вигляд $\rho = a\cos\varphi$, тому

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = a\sqrt{\cos^2\varphi + (-\sin\varphi)^2}\,d\varphi = a\,d\varphi,$$

$$x(\varphi)=\rho(\varphi)\cos\varphi=a\cos^2\varphi=\frac{a}{2}(1+\cos2\varphi),$$

$$y(\varphi)=\rho(\varphi)\sin\varphi=a\cos\varphi\sin\varphi=\frac{a}{2}\sin2\varphi,$$

$$dx=-a\sin2\varphi\,d\varphi,\ \ dy=a\cos2\varphi\,d\varphi.$$

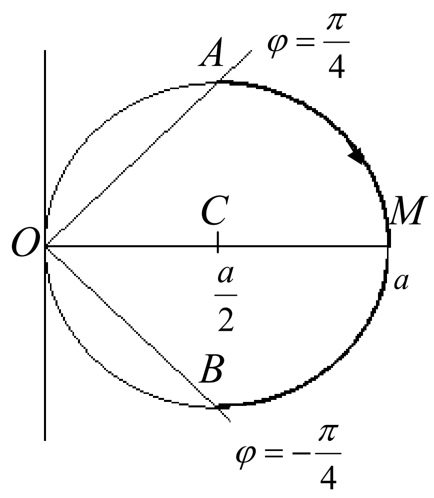


Рис. 8.3

Правій частині кола відповідає зміна полярного кута φ від $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$. При зведенні криволінійного інтеграла першого роду до визначеного, в останньому інтегралі межі інтегрування розставляються від меншого значення параметра до більшого. Щодо криволінійного інтеграла другого роду, то в ньому суттєвим є напрям оббігу кривої. Оскільки крива $L-$ пробігається від точки A до точки B, то у визначеному інтегралі межі інтегрування будуть від $\frac{\pi}{4}$ до $-\frac{\pi}{4}$. Отже, за теоремою 5.1 матимемо:

$$\int_L(x+y)\,dl=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2}{2}(1+\cos2\varphi+\sin2\varphi)\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi-\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int_L(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{a}{2}(1+\cos2\varphi)+\frac{a}{2}\sin2\varphi\right)\cdot(-a\sin2\varphi)d\varphi+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{a}{2}\sin2\varphi-\frac{a}{2}(1+\cos2\varphi)\right)\cdot a\cos2\varphi\,d\varphi=-\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\left(\sin2\varphi+\cos2\varphi+1\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right).\ \blacksquare$$

в) Потрібно параметризувати дану криву. Нехай спочатку $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, тоді

$$x^2+y^2=cz\ \Rightarrow\ \rho^2=cz\ \Rightarrow\ \rho=\sqrt{cz},$$

$$\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\frac{z}{c}\ \Rightarrow\ \mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}\frac{z}{c}\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{z}{c}.$$

Звідси одержимо параметризацію кривої

$$\begin{cases}x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c},\\ y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c},\\ \quad z=z.\end{cases}$$

Тоді

$$dl=\sqrt{\left(x_z'\right)^2+\left(y_z'\right)^2+\left(z_z'\right)^2}dz=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{c}{2\sqrt{cz}}\cos\frac{z}{c}-\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c}\cdot\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{2\sqrt{cz}}\sin\frac{z}{c}+\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c}\cdot\frac{1}{c}\right)^2+(1)^2}dz=$$
$$=\sqrt{\frac{c}{4z}+\frac{z}{c}+1}dz=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{z}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)dz.$$

Оскільки за параметр обрано z, то, за означенням кривої, він змінюється від 0 до z_0. Таким чином,

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dl=\int\limits_0^{z_0}cz\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{z}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)dz=\left(\frac{1}{2}c\sqrt{c}\cdot\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3}+\sqrt{c}\cdot\frac{2z^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^{z_0}=$$
$$=z_0\sqrt{cz_0}\cdot\left(\frac{1}{3}c+\frac{2}{5}z_0\right).\ \blacksquare$$

За твердженням 5.4, якщо

1) D – однозв'язна область,

2) функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – неперервні разом зі своїми частинними похідними в області D,

3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}(M)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(M)\quad \forall M\in D$,

тоді інтеграл $\int\limits_{AB}Pdx+Qdy$ не залежить від лінії $AB\subset D\quad\forall A,B\in D$.

Звідги випливає (за теоремою 5.7), що поле $\overline{a}=\{P,Q\}$ потенціальне, тобто

$$\exists U(x,y):\frac{\partial U}{\partial x}=P,\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q.$$

Окрім того, в цьому випадку $\int\limits_{AB}Pdx+Qdy=U(B)-U(A)$. Внаслідок того, що $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P,\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q$, диференціал функції $U(x,y)$ дорівнює

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=Pdx+Qdy.$$

Нехай виконуються припущення 1), 2), 3). Тоді виведемо формулу для обчислення потенціалу $U(x,y)$. Внаслідок зазначених припущень і твердження 5.4, інтеграл $\int\limits_{AB}Pdx+Qdy$ не залежить від лінії $AB\subset D\quad\forall A,B\in D$.

Припустимо, що точки $B(x,y)$ і $A(x_0,y_0)$ можна сполучити ламаною так, як зображено на рис. 8.4, і ламана цілком лежить всередині області D. Тоді

$$\int\limits_{AMB}...=\int\limits_{AM}...+\int\limits_{MB}...,$$

$AM: y = y_0 \;\Rightarrow\; dy = 0;$

$$\int\limits_{AM} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx;$$

$MB: x = x \;\Rightarrow\; dx = 0;$

$$\int\limits_{MB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy;$$

$$\int\limits_{AMB} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy.$$

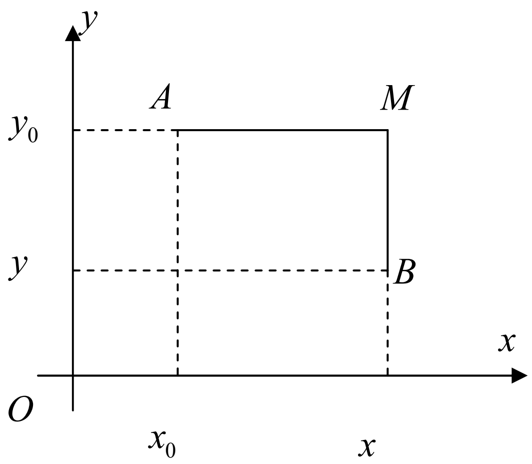


Рис. 8.4

Оскільки інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від кривої, що сполучає точки A і B, а його значення дорівнює $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$, то

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AMB} Pdx + Qdy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy\ ,$$

звідки

$$U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + U(x_0, y_0).$$

Отже,

$$\boxed{U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C}. \tag{8.1}$$

Можна отримати іншу формулу для пошуку потенціалу векторного поля на площині:

$$U(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C.$$

Нехай векторне поле $\overline{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\overline{i} + Q(x, y, z)\,\overline{j} + R(x, y, z)\,\overline{k}$ задане в однозв'язній множині $D \subset \mathbb{R}^3$ простору, його координатні функції P, Q, R неперервні разом зі своїми частинними похідними в D і задовольняють умови

$$\frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M), \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(M) = \frac{\partial R}{\partial y}(M), \quad \frac{\partial R}{\partial x}(M) = \frac{\partial P}{\partial z}(M) \quad \forall M \in D.$$

Тоді існує потенціал цього векторного поля, який можна визначити за формулою

$$\boxed{U(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + C}.$$

Задача 8.3 Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти функцію $U(x,y)$, попередньо упевнившись в тому, що наданий вираз є її повним диференціалом: $dU=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

Розв'язання. В даному випадку

$$P(x,y)=\frac{y}{3x^2-2xy+3y^2},\quad Q(x,y)=\frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}.$$

Ці функції неперервні разом зі своїми частинними похідними на всій декартовій площині, остання є множиною зв'язною. Отже, умови 1) і 2) твердження 5.4 виконуються. Перевіримо умову 3):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{3x^2-2xy+3y^2-y(-2x+6y)}{3x^2-2xy+3y^2}=\frac{3x^2-3y^2}{3x^2-2xy+3y^2},\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{3x^2-2xy+3y^2-x(6x-2y)}{3x^2-2xy+3y^2}=\frac{3x^2-3y^2}{3x^2-2xy+3y^2},\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, потенціал $U(x,y)$ існує, і його можна знайти за формулою (8.1). Точку (x_0,y_0) в цій формулі можна обирати довільним чином із множини визначення функцій P і Q, тобто на площині. Зручніше за все взяти $x_0=0,\ y_0=0$. Отже, маємо:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_0}{3x^2-2xy_0+3y_0^2}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}\,dy+C=$$

$$=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y\frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}\,dy+C=-\frac{x}{3}\int_0^y\frac{dy}{\left(y-\frac{x}{3}\right)^2+\frac{8}{9}x^2}+C=$$

$$=-\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}x}\cdot\operatorname{arctg}\left.\frac{y-\frac{x}{3}}{\frac{2\sqrt{2}x}{3}}\right|_0^y+C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3y-x}{2\sqrt{2}x}+C.$$

Перевірка. Доведено, що мають місце рівності $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P,\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q$. Дійсно,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3y-x}{2\sqrt{2}x}+C\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3y-x}{2\sqrt{2}x}\right)^2}\times$$

$$\times\frac{-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}(3y-x)}{8x^2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{8x^2}{8x^2+9y^2-6xy+x^2}\cdot\frac{-6\sqrt{2}y}{8x^2}=$$

$$=\frac{y}{3x^2-2xy+3y^2}=P(x,y);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3y-x}{2\sqrt{2}x}+C\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3y-x}{2\sqrt{2}x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}x}\cdot 3=$$

$$= \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = Q(x, y). \quad \blacksquare$$

Задача 8.4 (№Д4303) За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл, зімкнувши, якщо це необхідно, криву відрізком прямої. Тут

$$\int\limits_{AmO} \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy,$$

де $AmO -$ верхнє півколо $x^2 + y^2 = ax$, що пробігається від точки $A(a,0)$ до точки $O(0,0)$.

Розв'язання. Рівняння кола можна переписати у вигляді $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Звідси випливає, що це коло має центр в точці $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ і радіус $\frac{a}{2}$.

Зімкнемо криву відрізком OA (рис. 8.5). Об'єднання дуг AmO і OA позначимо через C, а область, яку обмежує контур C, через D.

Застосуємо формулу Гріна. Нехай

$$P(x, y) = e^x \sin y - my, \; Q(x, y) = e^x \cos y - m.$$

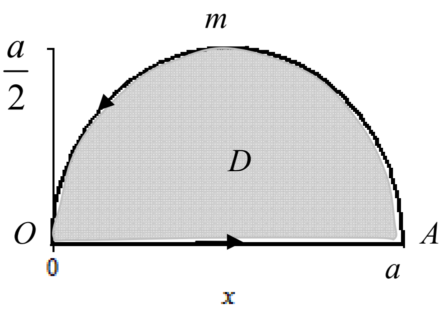


Рис. 8.5

Тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m, \; \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y,$$

$$\int\limits_{AmO} \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy +$$

$$+ \int\limits_{OA} \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[e^x \cos y - \left(e^x \cos y - m\right)\right] dx\, dy = \iint\limits_{D} m\, dx\, dy,$$

$$\int\limits_{AmO} \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy = \iint\limits_{D} m\, dx\, dy - \int\limits_{OA} \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy.$$

Зважаючи на означення міри допустимої множини D, одержимо значення подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{D} m\, dx\, dy = mS(D) = m \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi\, m\, a^2}{8}.$$

Обчислимо криволінійний інтеграл вздовж OA. Оскільки

$$OA: y = 0 \Rightarrow \left(dy = 0 \wedge P(x, 0) = 0\right),$$

то вираз під знаком криволінійного інтеграла дорівнює 0. Отже, $\int\limits_{OA} \ldots = 0$. Таким чином,

$$\int\limits_{AmO} \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy = \frac{\pi\, m\, a^2}{8}. \quad \blacksquare$$

Задача 8.5 Обчислити поверхневий інтеграл І роду $\iint\limits_S (xy + yz + xz)\, ds$, де $S-$ частина конуса $x^2 + y^2 = z^2,\ z \ge 0$, яка лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

Розв'язання. Схема утворення поверхні та її проекції D на площину Oxy зображено на рис. 8.6.

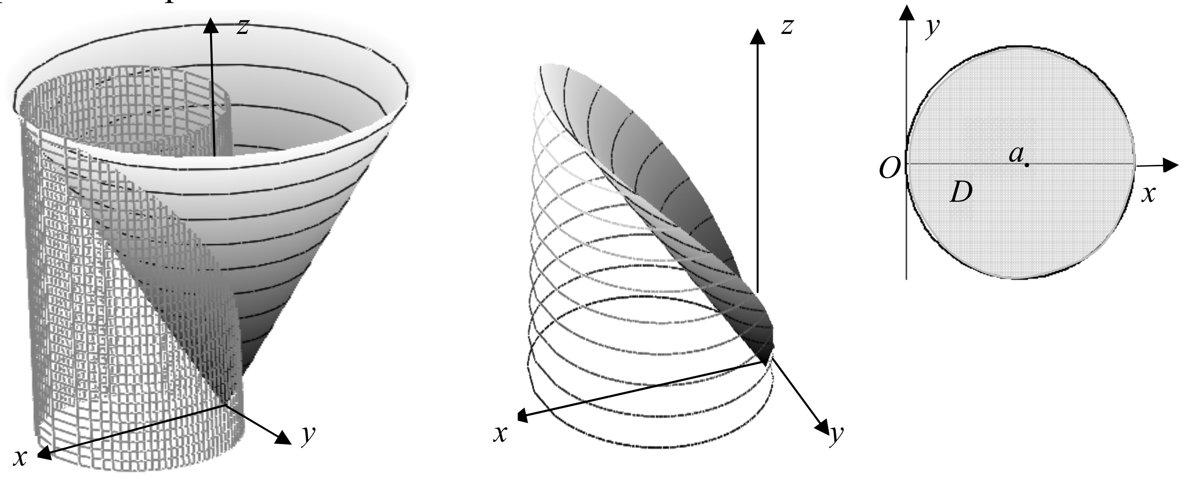


Рис. 8.6

Виразимо із рівняння поверхні z через x і y:

$$x^2 + y^2 = z^2,\ z \ge 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Знайдемо диференціал поверхні:

$$ds = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy.$$

Для зведення поверхневого інтеграла до кратного застосуємо теорему 5.3:

$$I_{20} = \iint\limits_S (xy + yz + xz)\, ds = \iint\limits_D \left(xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{2}\, dx\, dy.$$

Для обчислення подвійного інтеграла введемо полярну систему координат. Охарактеризуємо область D

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow \rho = 2a\cos\varphi,$$

$$D:\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2a\cos\varphi.$$

Отже,

$$I_{20} = \sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^2(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,\rho\, d\rho =$$

$$= 4a^4 \cdot \sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\cdot\cos^4\varphi =$$

$$= 4a^4 \cdot \sqrt{2}\left(\underbrace{\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos\varphi \sin\varphi + \sin\varphi)\cdot \cos^4\varphi}_{\text{непарна}}\, d\varphi}_{=0} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi \right).$$

Оскільки має місце формула

$$\boxed{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}},$$

то

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\, d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\, d\varphi = 2\cdot\frac{4!!}{5!!} = 2\cdot\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{16}{15}.$$

Таким чином, $I_{20} = \dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. ■

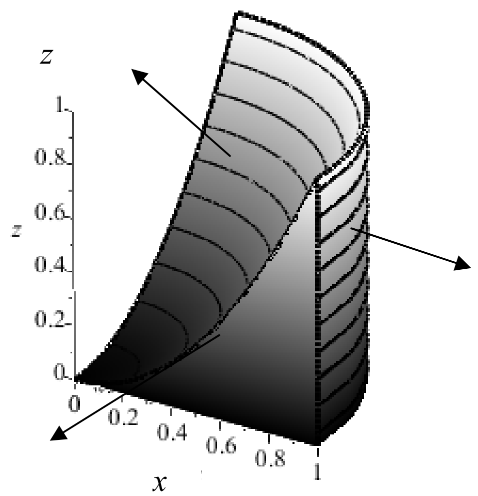


Рис. 8.7

Задача 8.6 Обчислити інтеграл $I_{21} = \iint\limits_S yz^2 dy\, dz + zy^2 dz\, dx + yx^2 dx\, dy$, де S – зовнішній бік поверхні тіла $0 \le z \le x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0$, двома способами: безпосередньо та за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язання. Дане тіло T зображено на рис. 8.7. Воно обмежене знизу площиною $z = 0$ (поверхня S_1), зверху – круговим параболоїдом $z = x^2 + y^2$ (поверхня S_2). Його бічна поверхня утворюється із двох площин $x = 0,\ y = 0$ і кругового циліндра $x^2 + y^2 = 1$ (поверхні S_3, S_4, S_5 відповідно).

Спочатку проведемо обчислення за формулою Остроградського-Гаусса (О-Г2). В даному прикладі $P = yz^2,\ Q = zy^2,\ R = yx^2$, тому $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 2yz$, $I_{21} = \iiint\limits_T 2yz\, dx\, dy\, dz$. Оскільки проекцією D тіла на площину Oxy є сектор круга $x^2 + y^2 \le 1$, що лежить в I чверті, а поверхня, що обмежує поверхню, виражається через $x^2 + y^2$, то для обчислення потрійного інтеграла зручно вводити циліндричні координати $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$. Матимемо:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \;\Rightarrow\; \rho=1, \\ z=x^2+y^2=\rho^2, \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad , \\ T:\; 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\; 0\le\rho\le 1,\; 0\le z\le\rho^2$$

$$I_{21}=\iiint\limits_T 2yz\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_0^{\rho^2}2\rho\sin\varphi\cdot z\,dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\,d\rho\cdot z^2\Big|_0^{\rho^2}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho^6\,d\rho=\frac{1}{7}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=\frac{1}{7}.$$

Тепер перейдемо до <u>безпосереднього обчислення</u>. Знайдемо поверхневі інтеграли II роду за п'ятьма поверхнями. Розглянемо спочатку інтеграл за поверхнею параболоїда S_2. Нормаль до неї утворює гострий кут з віссю аплікат, тому можна застосувати наслідок 5.1, звідки

$$\boxed{\begin{array}{l}\iint\limits_{S_2}P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)dx\,dy= \\ =\iint\limits_D\Big(-P(x,y,f(x,y))f_x'(x,y)-Q(x,y,f(x,y))f_y'(x,y)+R(x,y,f(x,y))\Big)dx\,dy.\end{array}}$$

Отже,

$$z=x^2+y^2=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x'(x,y)=2x,\;\; f_y'(x,y)=2y,$$

$$\iint\limits_{S_2}\ldots=\iint\limits_D\Big(-y\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2x-\left(x^2+y^2\right)y^2\cdot 2y+yx^2\Big)dx\,dy.$$

Введемо полярні координати, матимемо:

$$\iint\limits_{S_2}\ldots=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\left(-2\rho^6\cos\varphi\sin\varphi-2\rho^5\sin^3\varphi+\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{8}\sin 2\varphi-\frac{2}{7}\sin^3\varphi+\frac{1}{5}\cos^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi=-\frac{209}{840}.$$

Далі обчислимо інтеграл за площиною $z=0$. За означенням поверхневого інтеграла другого роду

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+Rdx\,dy=\iint\limits_S(P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)ds, \tag{8.2}$$

де $\cos X,\cos Y,\cos Z$ – направляючі косинуси нормалі до поверхні. Для даної площини $\cos X=0,\cos Y=0,\cos Z=-1$, де знак «–» обрано внаслідок того, що нормаль до площини утворює кут 180° з віссю аплікат. Крім того, оскільки $z=0$, то

$$ds=\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}dx\,dy=dx\,dy.$$

Проекцією на Oxy частини даної поверхні, що лежить на площині $z=0$, є область D. Отже,

$$\iint_{S_1}(yz^2\cos X+zy^2\cos Y+yx^2\cos Z)ds=\iint_{S_1}(y\cdot 0^2\cdot 0+0\cdot y^2\cdot 0+yx^2\cdot(-1))ds=$$

$$=-\iint_D yx^2dx\,dy=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi\cdot\rho\,d\rho=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d(\cos\varphi)=\frac{1}{5}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{15}.$$

Для площини $x=0$:

$\cos X=-1, \cos Y=0, \cos Z=0$, $ds=\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+\left(x'_z\right)^2}dy\,dz=dy\,dz$.

Проекцією на Oyz частини даної поверхні, що лежить на площині $x=0$, є область D_3: $0\le y\le 1,\ 0\le z\le y^2$. Отже,

$$\iint_{S_3}...=-\iint_{D_3}yz^2dy\,dz=-\int_0^1ydy\int_0^{y^2}z^2dz=-\frac{1}{3}\int_0^1y^7dy=-\frac{1}{24}.$$

Для площини $y=0$ функція під знаком поверхневого інтеграла $yz^2\cos X+zy^2\cos Y+yx^2\cos Z=0$, тому $\iint_{S_4}...=0$.

Розглянемо циліндричну поверхню $y=\sqrt{1-x^2}=g(y,z)$. Нормаль до неї утворює гострий кут з віссю ординат. Проекція відповідної частини поверхні на площину Oxz являє собою квадрат D_4: $0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1$. Таким чином,

$$\iint_{S_4}Pdy\,dz+Q\,dz\,dx+Rdx\,dy=$$

$$=\iint_{D_4}\left(-P(x,g(y,z),z)\cdot g'_x(x,y)+Q(x,g(y,z),z)-R(x,g(y,z),z)\cdot g'_z(x,y)\right)dx\,dz=$$

$$=\iint_{D_4}\left(-z^2\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+z\left(1-x^2\right)-x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot 0\right)dx\,dz=$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1\left(x\,z^2+z\left(1-x^2\right)\right)dz=\int_0^1\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\right)dx=\frac{1}{2}.$$

В результаті отримаємо:

$$\iint_S...=\sum_{k=1}^5\iint_{S_k}...=-\frac{209}{840}-\frac{1}{15}-\frac{1}{24}+0+\frac{1}{2}=\frac{1}{7}.\quad\blacksquare$$

Задача 8.7 Обчислити інтеграл вздовж кривої L, яка утворюється перетином зазначених поверхонь. Напрям оббігу обрати таким, щоб спостерігач, якого вісь Oz пронизує з ніг до голови, бачив його таким, що проходить проти руху годинникової стрілки. Розглянути два способи: безпосередньо та за формулою Стокса. Тут

а) $I_a=\oint_L(5-2xy)\,dx-2yz\,dy-2xz\,dz$, L: $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\x+y+z=1;\end{cases}$

б) $I_б=\oint_L 3yz\,dx-xz\,dy+x^2dz$, L: $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2+y^2=z^2,\ z>0.\end{cases}$

Розв'язання. а) Застосуємо формулу Стокса (С3)

$$\boxed{\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz}.$$

У даному прикладі за поверхню S будемо розглядати частину площини $x + y + z = 1$, яка лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = 9$. Згідно з умовою щодо орієнтації контура, з якою також узгоджено орієнтацію поверхні, нормаль до площини потрібно обрати $\overline{n} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$. Ця нормаль має довжину $|\overline{n}| = \sqrt{3}$, тому $\cos X = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cos Y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Маємо:

$$I_a = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 5 - 2xy & -2yz & -2xz \end{vmatrix} ds = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_S (x + y + z) ds.$$

Для площини $z = 1 - x - y$ диференціал поверхні дорівнює

$$ds = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{3}\; dx\, dy.$$

Проекцією D поверхні S на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \le 9$. Отже,

$$I_a = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_D 1 \cdot \sqrt{3}\; dx\, dy = 2 \cdot S(D) = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18\pi.$$

Для безпосереднього обчислення криволінійного інтеграла криву потрібно параметризувати. Якщо $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t$, то $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1 - 3\cos t - 3\sin t$. Тобто

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 1 - 3\cos t - 3\sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -3\sin t\, dt, \\ dy = 3\cos t\, dt, \\ dz = 3\,(\sin t - \cos t)\, dt, \end{cases}$$

Звідки

$$I_a = \int\limits_0^{2\pi} \big[(5 - 9\sin 2t)\,(-3\sin t) - 18\sin t\,(1 - 3\cos t - 3\sin t)\cos t -$$

$$-18\cos t(1 - 3\cos t - 3\sin t)\,(\sin t - \cos t)\big]\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[108\sin^2 t\cos t - 54\cos^3 t + 18\cos^2 t - 18\sin 2t - 15\sin t\right] dt = 18\pi. \quad \blacksquare$$

б) Лінія перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 4$ і $x^2 + y^2 = z^2$ при $z > 0$ лежить на площині $z = 2$. За поверхню, за якою обчислюється поверхневий інтеграл в формулі Стокса, оберемо саме площину $z = 2$, яка лежить всередині циліндра

$x^2+y^2=4$. Тоді нормаль до неї $\bar{n}=0\cdot\bar{i}+0\cdot\bar{j}+1\cdot\bar{k}$, а направляючі косинуси $\cos X=0, \cos Y=0, \cos Z=1$. Отже, за формулою Стокса

$$I_б=\iint\limits_S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3yz & -xz & x^2 \end{vmatrix} ds=-4\iint\limits_S z\,ds.$$

Для площини $z=2$ диференціал поверхні дорівнює $ds=dx\,dy$. Проекцією D поверхні S на площину Oxy є круг радіуса 2. Отже,

$$I_б=-4\iint\limits_D 2\,dx\,dy=-8\cdot S(D)=-8\cdot\pi\cdot 2^2=-32\pi.$$

Обчислимо інтеграл <u>безпосередньо</u>. Оскільки контур можна параметризувати $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=2, \end{cases}$ то $\begin{cases} dx=-2\sin t\,dt, \\ dy=2\cos t\,dt, \\ dz=0. \end{cases}$ Тоді

$$I_б=\int\limits_0^{2\pi}\left(-24\sin^2 t-8\cos^2 t\right)dt=-32\pi. \quad ■$$

Задача 8.8 Знайти течію векторного поля

а) $\bar{a}=8x\,\bar{i}+11y\,\bar{j}+17z\,\bar{k}$ через частину поверхні $\alpha: x+2y+3z=1$, що міститься в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).

б) $\bar{a}=(x+xy)\,\bar{i}+\left(y-x^2\right)\bar{j}+(z-1)\,\bar{k}$ через зімкнену поверхню $S: z=x^2+y^2,\ z=8-x^2-y^2$ (нормаль зовнішня).

Розв'язання. Згідно з фізичним змістом загального поверхневого інтеграла II роду, течія Π векторного поля $\bar{a}$ через поверхню S обчислюється за формулою $\Pi=\iint\limits_S(\bar{a},\bar{n})\,ds$, де $\bar{n}(x,y,z)=(\cos X,\cos Y,\cos Z)$ – одиничний вектор нормалі до поверхні S. Тобто

$$\Pi=\iint\limits_S(\bar{a},\bar{n})\,ds=\iint\limits_S(P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)ds.$$

Для даної площини $\alpha:\ x+2y+3z=1$ (або $\alpha:\ z=\frac{1}{3}(1-x-2y)$) одиничним вектором нормалі, яка утворює гострий кут з віссю Oz, є вектор $\bar{n}\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$, диференціалом поверхні –

$$ds=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{14}}{3}dx\,dy,$$

а проекцією на площину Oxy – область D, обмежена прямими $x=0,\ y=0,\ x+2y=1$ (рис. 8.8). Тоді течія поля через поверхню дорівнює

$$\Pi=\iint_D\left(\frac{8x}{\sqrt{14}}+\frac{22y}{\sqrt{14}}+\frac{17(1-x-2y)}{\sqrt{14}}\right)\cdot\frac{\sqrt{14}}{3}dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{1/2}dy\int_0^{1-2y}\left(8x+22y+17(1-x-2y)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{1/2}\left(-\frac{9}{2}(1-2y)^2-12y(1-2y)+17-34y\right)dy=1.\ \blacksquare$$

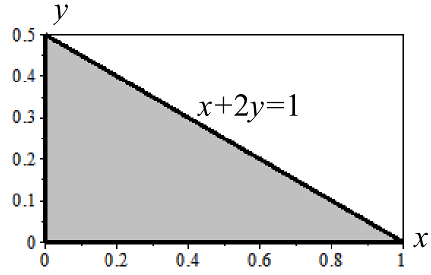


Рис. 8.8

б) При обчисленні потоку через зімкнену поверхню S зручніше застосовувати формулу Остроградського-Гаусса (О-Г1):

$$\boxed{\Pi=\oiint_S(\bar{a},\bar{n})\,ds=\iiint_{\bar{D}}\operatorname{div}\bar{a}\,dv},$$

де $\bar{D}$ – тіло, яке обмежує поверхня S. Оскільки $\operatorname{div}\bar{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$, то

$$\Pi=\iiint_{\bar{D}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

У даному прикладі

$$\Pi=\iiint_{\bar{D}}\left(\frac{\partial(x+xy)}{\partial x}+\frac{\partial\left(y-x^2\right)}{\partial y}+\frac{\partial(z-1)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iiint_{\bar{D}}(3+y)dx\,dy\,dz.$$

Задана поверхня обмежена параболоїдами $z=x^2+y^2$ і $z=8-x^2-y^2$ знизу та зверху, відповідно. Знайдемо лінію перетину параболоїдів:

$$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=8-x^2-y^2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=4.\end{cases}$$

Отже, проекцією тіла $\bar{D}$ на площину Oxy є круг $x^2+y^2\le 4$ (рис. 8.9).

Для обчислення потрійного інтеграла, до якого зведено обчислення потоку, введемо циліндричні координати $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$, одержимо

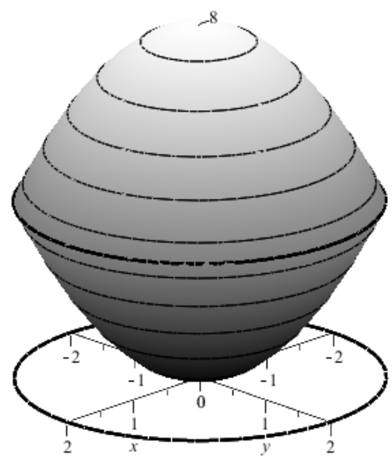


Рис. 8.9

$$z=x^2+y^2=\rho^2,\quad z=8-x^2-y^2=8-\rho^2,$$

$$\Pi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho\int_{\rho^2}^{8-\rho^2}(3+\rho\sin\varphi)\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(3+\rho\sin\varphi\right)\left(8-2\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(12\rho^2-\frac{3}{2}\rho^4+\left(\frac{8}{3}\rho^3-\frac{2}{5}\rho^5\right)\sin\varphi\right)\Bigg|_0^2=\int_0^{2\pi}\left(\frac{128}{15}\sin\varphi+24\right)d\varphi=48\pi.\quad\blacksquare$$

Задача 8.9 а) Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{a} = \frac{y}{3}\overline{i} - 3x\,\overline{j} + x\,\overline{k}$ вздовж кривої $L: x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ \ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t$ (у напрямі зростання параметра t).

б) Знайти модуль циркуляції векторного поля $\overline{a} = 2yz\,\overline{i} + xz\,\overline{j} + y^2\overline{k}$ вздовж кривої $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16,\ z > 0. \end{cases}$.

Розв'язання. а) За означенням, циркуляція обчислюється за формулою $Ц = \oint\limits_L (\overline{t}, \overline{a})dl$, де $\{\overline{t} = \overline{t}(M)\}$ – вектори дотичних до кривої L. Оскільки

$$\left.\begin{aligned} \overline{a} &= \{P, Q, R\} \\ \overline{t} &= \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\overline{t}, \overline{a})dl = P\cos\alpha\, dl + Q\sin\alpha\, dl + R\cos\gamma\, dl = Pdx + Qdy + R\,dz,$$

То

$$\boxed{Ц = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz}.$$

З'ясуємо вигляд заданої кривої. Оскільки $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,$ то $x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 1 - 2x - 2y$. Результатом перетину отриманих поверхонь – кругового циліндра і площини – є еліпс в просторі. Йому відповідає зростання параметра t від 0 до 2π. Таким чином,

$$Ц = \oint\limits_L \frac{y}{3}dx - 3x\,dy + x\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3}\sin t \cdot (-\sin t) - 12\cos t \cdot \cos t + 4\cos t \cdot (\sin t - \cos t) \right) dt = -\frac{52}{3}\pi. \ ■$$

б) Знайдемо циркуляцію векторного поля $\overline{a} = 2yz\,\overline{i} + xz\,\overline{j} + y^2\overline{k}$ вздовж кривої $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16,\ z > 0. \end{cases}$.

Лінія перетину поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ і $x^2 + y^2 = 16$ при $z > 0$ лежить на площині $z = 3$. За поверхню, вздовж якої обчислюється поверхневий інтеграл в формулі Стокса (С3), оберемо саме площину $z = 3$, яка лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = 16$. Тоді нормаль до неї $\overline{n} = 0 \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + 1 \cdot \overline{k}$. Отже, за формулою Стокса

$$Ц = \iint\limits_S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & xz & y^2 \end{vmatrix} ds = -\iint\limits_S z\,ds.$$

Для площини $z = 3$ диференціал поверхні дорівнює $ds = dx\,dy$. Проекцією D поверхні S на площину Oxy є круг радіуса 3. Отже,

$$Ц = -\iint\limits_{D} 3\,dx\,dy = -3\cdot S(D) = -3\cdot\pi\cdot 3^2 = -27\pi \Rightarrow |Ц| = 27\pi. \quad \blacksquare$$

Задача 8.10 Знайти роботу сили $\overline{F} = y\,\overline{i} - x\,\overline{j}$ при пересуванні точки її прикладання вздовж лінії $L:\ 2x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0$ від точки $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ до точки $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Розв'язання. В пункті 7.1.1 було зазначено, що фізичним змістом криволінійного інтеграла II роду є робота A по переміщенню матеріальної точки із точки M в точку N вздовж кривої L під дією сили $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\,\overline{i} + Q(x,y)\,\overline{j}$. Тобто

$$\boxed{A = \int\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}.$$

Задану криву параметризуємо в такий спосіб: $L:\ \begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}}, \\ y = \sin t. \end{cases}$ Пересування із точки M в точку N відповідає зростанню параметра t від 0 до π. Тоді для даної сили $\overline{F} = y\,\overline{i} - x\,\overline{j}$ робота дорівнюватиме

$$A = \int\limits_{L} y\,dx - x\,dy = \int\limits_{0}^{\pi}\left(\sin t\cdot\frac{-\sin t}{\sqrt{2}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\cdot\cos t\right)dt = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

9 ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ «КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ»

1, 2. Обчислити криволінійний інтеграл.

3. Використовуючи криволінійний інтеграл, знайти функцію u, попередньо впевнившись в тому, що наданий вираз є її повним диференціалом.

4. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл, зімкнувши, якщо це необхідно, криву відрізком прямої.

5. Обчислити поверхневий інтеграл I роду.

6. Обчислити інтеграл за зовнішньою стороною поверхні S за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

7. Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл вздовж кривої L, яка утворюється перетином зазначених поверхонь. Напрям обходу обрати так, щоб спостерігач, якого вісь Oz пронизує з ніг до голови, бачив його таким, що проходить проти руху годинникової стрілки.

8. Знайти течію векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(x,y,z)$ через частину поверхні P, що міститься в I октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).

9. Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(x,y,z)$ вздовж контура L (у напрямку зростання параметра t).

ВАРІАНТ 1

1. $\int\limits_{(0,0)}^{(3,6)} 4x\sin^2 y\,dx + y\cos^2 2x\,dy$ вздовж прямої лінії	2. $\int\limits_L xy\,ds$ вздовж контура прямокутника, обмеженого прямими $x=0,\ y=0,\ x=4,\ y=2$
3. $du = (2x-3y^2+1)dx + (2-6xy)dy$	
4. $\oint\limits_L e^{-x}\mathrm{sh}\,y\,dx + e^{-x}\mathrm{ch}\,y\,dy$, де $L-$ контур, що обмежує область $-a \le x \le 0,\ 0 \le y \le x+a,\ a>0$, який пробігається у додатному напрямку	5. $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z-0,5\right)ds$, де $S-$ частина параболоїда $2z = 2-x^2-y^2,\ z \ge 0$.
6. $\oiint\limits_S (x+y)\,dy\,dz + y\,dx\,dy$, $S:\ z = 8-x^2-y^2,\ z = x^2+y^2$	7. $\oint\limits_L yz\,dx - xz\,dy + xy\,dz$, $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$
8. $\overline{a} = 7x\,\overline{i} + (5\pi y+2)\,\overline{j} + 4\pi z\,\overline{k}$, $P: x+\dfrac{y}{2}+4z=1$	9. $\overline{a} = y\,\overline{i} - x\,\overline{j} + z^2\,\overline{k}$, $L: x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\ z=\sin t$

ВАРІАНТ 2

1. $\int\limits_L \dfrac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, $L: \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ від точки $(a,0)$ до точки $(0,a)$	
2. $\int\limits_L \dfrac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вздовж відрізка прямої $y=\dfrac{x}{2}-2$ від точки $(0,-2)$ до точки $(4,0)$	3. $du = \left(\dfrac{2xy^2}{1+x^2y^2}-3\right)dx + \left(\dfrac{2x^2y}{1+x^2y^2}-5\right)dy$
4. $\oint\limits_L x^2y^3dx - x^3y^2dy$, де $L-$ еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ з додатним напрямом обходу	5. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,ds$, $S = \left\{(x,y,z): z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le 2ax\right\}$
6. $\oiint\limits_S (x+y)dy\,dz + (y+z)dz\,dx + (z+x)dx\,dy$ $S:\ y=2x,\ y=4x,\ x=1,\ z=y^2,\ z=0$	7. $\oint\limits_L 4\,dx + 3x\,dy + 3xz\,dz$, $L: \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=3 \end{cases}$
8. $\overline{a} = 2\pi x\,\overline{i} + (7y+2)\,\overline{j} + 7\pi z\,\overline{k}$, $P: x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$	9. $\overline{a} = -x^2y^3\,\overline{i} + \overline{j} + z\,\overline{k}$, $L: x=\sqrt[3]{4}\cos t,\ y=\sqrt[3]{4}\sin t,\ z=3$

ВАРІАНТ 3

1. $\int_L \frac{x\,dx}{y}+\frac{y\,dy}{y-a}$ вздовж дуги циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ від точки $t=\frac{\pi}{6}$ до точки $t=\frac{\pi}{3}$	
2. $\int_L y\,ds$ вздовж відрізка прямої від точки $(0,0)$ до точки $(1,2)$	3. $du=-(0,5\cos 2y+y\sin 2x)dx+$ $+(x\sin 2y+\cos^2 x+1)dy$
4. $\oint_L y\,dx - xy\,dy$, де $L-$ контур, що обмежує область $0\le x\le 2$, $0\le y\le -x+\sqrt{2x}$, яка пробігається у додатному напрямку	5. $\iint_S \left(x^2+y^2+z^2\right)ds$, де $S-$ межа тіла $V=\left\{(x,y,z):\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\right\}$
6. $\oiint_S (3x-y-z)dydz+3ydzdx+2zdxdy$, $S:\ \ z=x^2+y^2,\ \ z=2y$	7. $\oint_L (x+y)\,dx - x\,dy + 6\,dz$, $L:\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=2 \end{cases}$
8. $\overline{a}=9\pi x\,\overline{i}+\overline{j}-3z\,\overline{k}$, $P:\frac{x}{3}+y+z=1$	9. $\overline{a}=(y-z)\,\overline{i}+(z-x)\,\overline{j}+(x-y)\,\overline{k}$, $L: x=4\cos t,\ y=4\sin t,\ z=1-\cos t$

ВАРІАНТ 4

1. $\int_L \left(x^2-y^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy$ у додатному напрямку вздовж еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
2. $\int_L x\,ds$ вздовж параболи $y=x^2$ від точки $(2,4)$ до точки $(1,1)$	3. $du=(y^2e^{xy^2}+3)dx+(2xye^{xy^2}-1)dy$
4. $\oint_L e^x(1-\cos y)\,dx+e^x(y+\sin y)\,dy$, де $L-$ квадрат $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=a$ з від'ємним напрямом обходу	5. $\iint_S (xy+yz+xz)ds$ де $S-$ частина конуса $x^2+y^2=z^2,\ z\ge 0$, розташована всередині циліндра $x^2+y^2=2ax$.
6. $\oiint_S (z+y)dy\,dz+(x-2y+z)dz\,dx+x\,dx\,dy$, $S:\ x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0$	7. $\oint_L y\,dx-2x\,dy+z^2\,dz$, $L:\begin{cases} z=4\left(x^2+y^2\right)+2, \\ z=6 \end{cases}$
8. $\overline{a}=(2x+1)\,\overline{i}-y\,\overline{j}+3\pi z\,\overline{k}$, $P:\frac{x}{3}+y+2z=1$	9. $\overline{a}=x^2\,\overline{i}+y\,\overline{j}-z\,\overline{k}$, $L: x=\cos t,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$

ВАРІАНТ 5

1. $\int\limits_L (x-y)\,dx+dy$ вздовж верхньої половини кола $x^2+y^2=R^2$ від точки $(R,0)$ до точки $(-R,0)$	
2. $\int\limits_{AB} \dfrac{y\,ds}{\sqrt{x}}$, де $AB-$ дуга кривої $y^2=\dfrac{4x^3}{9}$ від точки $A(3,2\sqrt{3})$ до точки $B\left(8,\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\right)$	3. $du=(e^{x+y}-\cos x)dx+(e^{x+y}+\sin y)dy$
4. $\oint\limits_L y^2\,dx - x^2\,dy$, де $L-$ контур, що обмежує область $0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\sin x$, яка пробігається у додатному напрямку	5. $\iint\limits_S \left(x+y+z\right)ds$, де $S-$частина конуса $x^2=y^2+z^2$, розташована всередині циліндра $x^2+y^2=2ax$.
6. $\oiint\limits_S (2y-15x)dydz+(z-y)dzdx+$ $+(3y-x)dxdy$, $S:\ z=3x^2+y^2+1, x^2+y^2=\dfrac{1}{4}, z=0$	7. $\oint\limits_L 3z\,dx-2y\,dy+2y\,dz$, $L:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ 2x-3y-2z=1\end{cases}$
8. $\overline{a}=7x\,\overline{i}+9\pi y\overline{j}+\overline{k}$, $P: x+\dfrac{y}{3}+z=1$	9. $\overline{a}=(y-z)\,\overline{i}+(z-x)\,\overline{j}+(x-y)\,\overline{k}$, $L: x=\cos t,\ y=\cos t,\ z=2(1-\cos t)$

ВАРІАНТ 6

1. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$ вздовж контура трикутника, обмеженого осями координат і прямою $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, який пробігається у від'ємному напрямку	
2. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, де $L-$ коло $x^2+y^2=ax$	3. $du=$ $=\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+2x\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+6y\right)dy$
4. $\oint\limits_{L:\,x^2+y^2=R^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx+$ $+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$.	5. $\iint\limits_S \left(3x^2+5y^2+3z^2-2\right)ds$, де $S-$ частина конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, що лежить між площинами $y=0,\ y=b$
6. $\oiint\limits_S (-2x)dy\,dz+z\,dz\,dx+(x+y)\,dx\,dy$, $S:\ x^2+y^2=2y, z=x^2+y^2, z=0$	7. $\oint\limits_L y\,dx-2x\,dy+z^2\,dz$, $L:\begin{cases}z=4\left(x^2+y^2\right)+2,\\ z=6\end{cases}$
8. $\overline{a}=\overline{i}+5y\,\overline{j}+11\pi z\,\overline{k}$, $P: x+y+\dfrac{z}{3}=1$	9. $\overline{a}=2y\,\overline{i}-3x\,\overline{j}+x\,\overline{k}$, $L: x=2\cos t,$ $y=2\sin t,\ z=2-2\cos t-2\sin t$

ВАРІАНТ 7

1. $\int\limits_L -y\,dx + x\,dy$ вздовж контура трикутника $x=0,\ y=0,\ 2x+3y=6$, який пробігається у додатному напрямі	
2. $\int\limits_L \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, де $L-$ перший оберт гвинтової лінії $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt \end{cases}$	3. $du=\left(\frac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+$ $+\left(\ln x+\frac{x}{y}+1\right)dy$
4. $\int\limits_L \left(e^{-x}\cos y-y^2\right)dx+\left(e^{-x}\sin y-x^2\right)dy$, де $L-$ праве $(x\ge a)$ півколо $x^2+y^2=2ax$ від точки $(a,0)$ до точки $(a,-a)$	5. $\iint\limits_S xyz\,ds$, $S=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$
6. $\oiint\limits_S (2x+y)dydz+(y+2xy)dxdy$, $S:\ z=2-4\left(x^2+y^2\right), z=4\left(x^2+y^2\right)$	7. $\oint\limits_L y\,dx-x\,dy+2z\,dz$, $L: \begin{cases} x^2+y^2=z^2/4, \\ z=2 \end{cases}$
8. $\overline{a}=x\,\overline{i}+(\pi z-1)\,\overline{k}$, $P: 2x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$	9. $\overline{a}=2z\,\overline{i}-x\,\overline{j}+y\,\overline{k}$, $L: x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=1$

ВАРІАНТ 8

1. $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$ (початок координат не лежить всередині контура інтегрування)	2. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, де $L-$ коло $x^2+y^2=2ay$
3. $du=\left(\frac{1}{y-1}-\frac{y}{(x-1)^2}-1\right)dx+$ $+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(y-1)^2}+2y\right)dy$	4. $\int\limits_L x^2y\,dx-y^2x\,dy$, де $L-$ верхня $(y\ge 0)$ частина правої петлі $(x\ge 0)$ лемніскати $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ від точки $(0,0)$ до точки $(a,0)$
5. $\iint\limits_S xyzds$, де $S-$ частина конуса $z^2=2xy, z\ge 0$, розташована всередині циліндра $x^2+y^2=a^2$.	6. $\oiint\limits_S (4y-3z)dy\,dz+(3x+2z)\,dz\,dx+$ $+(x+y+z)\,dx\,dy$, $S:\ x^2+y^2=1, z=4-x-y, z=0$
7. $\oint\limits_L y\,dx+x\,dy+3z^2\,dz$, $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x^2+y^2=1\ (z>0) \end{cases}$	8. $\overline{a}=5\pi x\,\overline{i}+(9y+1)\,\overline{j}+4\pi z\,\overline{k}$, $P: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$
9. $\overline{a}=y\,\overline{i}-x\,\overline{j}+z\,\overline{k}$, $L: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=3$	

ВАРІАНТ 9

1. $\int\limits_L xy\,dx$ вздовж дуги синусоїди $y=\sin x$ від $x=\pi$ до $x=0$	2. $\int\limits_L \left(x^3+y^3\right) ds$, де $L-$ лемніската $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy,\ x\ge 0,\ y\ge 0$
3. $du=\left(\dfrac{\cos x\cos y}{\sin^2 x}+\sin x\right)dx+$ $+\left(\dfrac{\sin y}{\sin x}-\cos y\right)dy$	4. $\int\limits_L \dfrac{3x^4}{4a^2}\,dy-\dfrac{xy^3}{b^2}dx$, де $L-$ еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ з додатним напрямком оббігу
5. $\iint\limits_S (xyz)^2\,ds$, $S=\left\{(x,y,z):x^2+y^2=z^2,\ a\le z\le b\right\}$	6. $\oiint\limits_S x\,dy\,dz-2y\,dz\,dx+3z\,dx\,dy$, $S:\ z=x^2+y^2, z=2x$
7. $\oint\limits_L (2-xy)\,dx-yz\,dy-xz\,dz$, $L:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x+y+z=1\end{cases}$	8. $\bar a=2\,\bar i+y\,\bar j+\dfrac{3\pi}{2}z\,\bar k$, $P:\dfrac{x}{3}+y+\dfrac{z}{4}=1$
9. $\bar a=x\,\bar i+z^2\,\bar j+y\,\bar k$, $L:x=\cos t,\ y=2\sin t,\ z=2\cos t-2\sin t-1$	

ВАРІАНТ 10

1. $\int\limits_L x\,dy$ вздовж контура трикутника, утвореного прямими $y=x,\ x=2,\ y=0$ (у додатному напрямку)	2. $\int\limits_L \dfrac{\sin 2\varphi}{\rho}\,ds$, де $L-$ коло з центром в точці $A(0,2)$ радіуса 2
3. $du=\left(-\dfrac{1}{x}+\dfrac{y^2}{(x+y)^2}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{(x+y)^2}\right)dy$	
4. $\int\limits_L x^3y^3\,dx+(x-y)^3\,dy$, де $L-$ ламана ABC, де $A(2,1),\ B(0,3),\ C(-2,1)$	5. $\iint\limits_S x^2\cdot\sqrt{1+4z}\,ds$, $S=\left\{(x,y,z):x^2+y^2=z,\ 0\le z\le b^2\right\}$
6. $\oiint\limits_S 7x\,dy\,dz+z\,dz\,dx+(x-y+5z)\,dx\,dy$, $S:\ z=x^2+y^2, z=x^2+2y^2, y=x,$ $y=2x, x=1$	7. $\oint\limits_L 2yz\,dx+xz\,dy+y^2\,dz$, $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ x^2+y^2=16\ (z>0)\end{cases}$
8. $\bar a=9\pi x\,\bar i+(5y+1)\,\bar j+2\pi z\,\bar k$, $P:3x+y+\dfrac{z}{9}=1$	9. $\bar a=3y\,\bar i-3x\,\bar j+x\,\bar k$, $L:x=3\cos t,\ y=3\sin t,$ $z=3-3\cos t-3\sin t$

ВАРІАНТ 11

1. $\int_L y\,dx - x\,dy$ де $L-$ верхня дуга еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ від точки $(a,0)$ до точки $(-a,0)$	2. $\int_L xy\,ds$, де $L-$ контур чотирикутника з вершинами $A(0,0), B(1,2), C(2,3), D(3,2)$
3. $du=\left(y^2e^{xy^2}+3\right)dx+ +\left(2xye^{xy^2}-1\right)dy$	4. $\int_L y\,dx - x\,dy$, де $L-$ контур, що обмежує область $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le a\sin 2\varphi$, та пробігається у від'ємному напрямку
5. $\iint_S xy^2z\,ds$, $S=\{(x,y,z): x^2+y^2=R^2,$	6. $\oiint_S 17x\,dy\,dz+7y\,dz\,dx+11z\,dx\,dy$, $S:\ z=x^2+y^2, z=2\left(x^2+y^2\right), y=x^2,$ $y=x$
7. $\oint_L -y\,dx+2dy+dz$, $L: \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=1 \end{cases}$	8. $\overline{a}=7\pi x\,\overline{i}+(x-2y)\,\overline{j}+\ (7z+2)\,\overline{k}$, $P: x+y+\frac{z}{2}=1$
9. $\overline{a}=-x^2y^3\,\overline{i}+2\,\overline{j}+xz\,\overline{k}$, $L: x=\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t,\ \ z=1$	

ВАРІАНТ 12

1. $\int_L \frac{y^2\,dx-x^2dy}{x^2+y^2}$, де $L-$ верхня дуга кола $x^2+y^2=a^2$, яка пробігається проти руху годинникової стрілки	2. $\int_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,ds$, де $L-$частина спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, що знаходиться всередині круга радіуса $R\ \ (R\le\pi)$ з центром в початку координат (в полярному полюсі)
3. $du=\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{1-2x}{xy^2}dy$	4. $\int_L y^{5/3}dx-x^{5/3}\,dy$, де $L-$ додатно орієнтована крива $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$
5. $\iint_S z^3\cdot(x+2y+3)\,ds$, $S=\{(x,y,z): x^2+z^2=4R^2,$ $x^2+y^2\le R^2, z\ge 0\}$	6. $\oiint_S (x+y+z)\,dy\,dz+(2y-x)\,dz\,dx+ +(3z+y)\,dx\,dy$, $S:\ z=x^2+y^2, y=x, y=2x, x=1, z=0$
7. $\oint_L 4x\,dx-yz\,dy+x\,dz$, $L: \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=1 \end{cases}$	8. $\overline{a}=\pi y\,\overline{j}+(4-2z)\ \overline{k}$, $P: 2x+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$
9. $\overline{a}=6z\,\overline{i}-x\,\overline{j}$, $L: x=3\cos t, y=3\sin t, z=3$	

ВАРІАНТ 13

1. $\int\limits_L (2a-y)\,dx + (y-a)dy$, де $L-$ перша (від початку координат) арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$	2. $\int\limits_L xy\,ds$, де $L-$ контур прямокутника $A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2)$
3. $du = \left(y^2 e^{xy^2} + 3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 1\right)dy$	4. $\int\limits_L (xy+x+y)\,dy - (xy+x-y)dx$, де $L-$ частина кола $x^2+y^2 = ax$ $\left(x \le \dfrac{a}{2}\right)$ від точки $\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a}{2}\right)$ до точки $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$
5. $\iint\limits_S (z-R)^3\,ds$, $S = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 2Rz, x \le 0, y \le 0, z \ge R\right\}$	6. $\oiint\limits_S y\,dy\,dz + (x+2y)\,dz\,dx + x\,dx\,dy$, $S:\ z = x^2+y^2, x^2+y^2 = 2x, z = 0$
7. $\oint\limits_L y\,dx + 3x\,dy + z^2\,dz$, $L: \begin{cases} z = x^2+y^2-1, \\ z = 3 \end{cases}$	8. $\overline{a} = (3\pi - 1)\,\overline{i} + (9\pi y + 1)\,\overline{j} + 6\pi z\,\overline{k}$, $P: \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{9} = 1$
9. $\overline{a} = z\,\overline{i} + y^2\,\overline{j} - x\,\overline{k}$, $L: x = \sqrt{2}\cos t, y = 2\sin t, z = \sqrt{2}\cos t$	

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н.,Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / под общ. ред. В.А. Садовничего. Москва: Факториал, 1996. 477 с.
2. Гребенюк С.М., Д'яченко Н.М., Красікова І.В., Панасенко Є.В. Математичний аналіз: інтегральне числення функції багатьох змінних: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Математика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія». Запоріжжя: ЗНУ, 2014. 120 с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва: Наука, 1990. 624 с.
4. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина І: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В. Леонтьєва. Запоріжжя: ЗНУ, 2012. 232 с.
5. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина ІІ: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В. Леонтьєва. Запоріжжя: ЗНУ, 2012. 495 с.
6. Д'яченко Н.М., Стреляєв Ю.М. Математичний аналіз – І: Вступ до аналізу: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньо-професійних програм «Математика», «Середня освіта (Математика)». Запоріжжя: ЗНУ, 2018. 221 с.
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Москва: Наука, 1979. 720 с.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Москва: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

9. Математичний аналіз: збірник завдань до самостійної роботи для студентів освітнього рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика» / Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, Ю.М. Стреляєв. Запоріжжя: ЗНУ, 2015. 76 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. Москва: Физматлит, 2003. Т.1. 680 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. Москва: Наука, 1966. Т.2. 800 с.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. Москва: Наука, 1966. Т.3. 656 с.

Додаткова

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Москва: Наука, 1985. 383 с.
2. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. для втузов. Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2005. 736 с.
3. Виноградова И.А., Олехник С.И., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: учеб. пособие: в 2 кн. Кн. 2. Ряди, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы. Москва: Высшая школа, 2002. 712 с.
4. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский Б.Н. Сборник задач по математическому анализу. Москва: Просвещение, 1973. 256 с.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. Москва: Наука, 1978. 480 с.
6. Задачник по курсу математического анализа / под ред. Н.Я. Виленкина. Москва: Просвещение, 1971. Ч. 1. 343 с.
7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Москва: Высшая школа, 1966. 460 с.
8. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 ч. Москва: Фазис. 1997. Ч.1. 554 с.
9. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 ч. Москва: Наука. 2004. Ч.2. 794 с.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 ч. Москва: Физматлит. Ч.1. 2005. 648 с.; Ч.2. 2002. 464 с.
11. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 2 т. Москва: Высшая школа, 1988. Т.1. 712 с.
12. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д. [и др.] Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды. Москва: Наука,1986. 528 с.
13. Ляшко І.І.,Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: у 2 ч. Киев: Вища школа. Ч.1. 1992. 494 с.; Ч.2. 1993. 375 с.
14. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Л.Г., Головчак Г.П. Математический анализ. Справочное пособие по математическому анализу: в 5 т. Т.1. Введение в анализ, производная, интеграл. Москва: Едиториал УРСС, 2001. 360 с.
15. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Л.Г., Головчак Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. Киев: Вища школа. Ч.1. Введение в анализ, производная, интеграл. 1974. 679 с.; Ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. 1977. 671 с.
16. Математичний аналіз у задачах і прикладах / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Ляшенко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. Ч. 1. Київ: Вища школа, 2002. 462 с.
17. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 1974. 480 с.
18. Никольский С.М. Курс математического анализа. Москва: Наука. Т.1. 1990. 528 с.; Т.2. 1991. 543 с.
19. Никольский С.М. Курс математического анализа. Москва: Наука. Т.1. 1990. 528 с.; Т.2. 1991. 543 с.
20. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций / под ред. М.Ф. Бокштейна. Москва: Просвещение, 1981. 271 с.

Навчально-методичне видання
(українською мовою)

Гребенюк Сергій Миколайович
Д'яченко Наталія Миколаївна
Красікова Ірина Володимирівна

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ - 2:
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

Методичні вказівки до самостійної роботи
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Математика» освітньо-професійних програм
«Математика», «Комп'ютерна математика»

Рецензент *М.І. Клименко*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д'яченко*