Компьютерная алгебра
(курс лекций)

Игорь Алексеевич Малышев
Computer.Algebra@yandex.ru

Лекция 8

Преобразования представлений математических объектов

Содержание лекции

- Характеристика задач преобразования представлений (ПП)
- Средства преобразования представлений

План лекции: тема подраздела

- **Характеристика задач преобразования представлений (ПП)**
- Средства преобразования представлений

Характеристика задач ПП

Цели преобразования представлений

Предметная интерпретация символьных представлений

Процесс понимания (проникновения в суть) не имеет границ

Цель: понимание

Текущее представление математического объекта

Цель: вычисление

Кодирование представления с помощью структур данных

Граница изменений представлений априорно известна

Булева функция принадлежности элемента множеству	Булева решётка	Булева арифметика	Булева алгебра

Характеристика задач ПП

Условия преобразования представлений

Условия

позитивные **(+)**

Успешный опыт предыдущих преобразований. Работоспособная методика выполнения преобразований.

Ясность цели преобразования. Конструктивное на метауровне описание цели (в идеале – формальная спецификация цели).

Существование средств выполнения преобразования. Математический аппарат направленного изменения представлений.

негативные **(-)**

Достижение границ возможных преобразований. «Тупиковое» представление. Возможно лишь попятное движение – восстановление предыдущего представления.

Несовпадение постановок задач для текущего и «разрешимого» представлений. Уникальное представление, которое вне типовой схемы преобразования представлений.

Необходимость многоцелевых / взаимно противоречивых изменений представления. Многократные изменения направления преобразований

Характеристика задач ПП

Показатели качества преобразований

Показатели качества

Свойства выполненных преобразований

Свойства преобразованных представлений

Завершённость. Поставленные цели преобразований достигнуты.

Эффективность. Минимальная алгоритмическая сложность.

Общность. Применимость при различных типах постановок задач и/или типах математических объектов.

Информативность. Выполнение не только требуемого преобразования, но и доказательство его достоверности.

?

Характеристика задач ПП

Семантика понятия «представление»

Термин «представление» может иметь
(в зависимости от контекста его употребления)
три различных смысла:

(1) Совокупность правил
для создания некоторого лингвистического объекта;
(2) Процесс и
(3) Результат применения указанных правил.

Соответствие f между классом объектов O и классом представителей R
является **представлением** O в R ($f : O \rightarrow R$),
если каждый элемент, принадлежащий O,
соответствует одному или нескольким элементам из R
(иначе для него нет представления)
и каждый элемент из R соответствует одному
и только одному элементу из O
(иначе неизвестно, какой элемент класса O он представляет).

Характеристика задач ПП

Сущность преобразования представлений

Свойства представлений,
определяющие качество их преобразований,
напрямую зависят от выбора целей преобразований.

Если цель – это познание, то сущностью преобразований является смысловая схематизация представления, т.е. все «правильные» зависимости должны быть структурированы, а остальные становятся параметрами представления.

Если цель – это вычисление, то ключевую роль при выборе характера преобразования представления приобретает тип текущего этапа вычисления:
(1) ввод данных в систему компьютерной алгебры,
(2) подготовка данных к выполнению операции
над математическими объектами,
(3) вывод результатов вычислений для пользователя и т.п.

Характеристика задач ПП

Требования к свойствам представлений – 1

Каноничность. В множестве всех эквивалентных выражений необходимо выбрать единственное выражение, которое представляет этот класс эквивалентности.
При этом предполагается, что известен алгоритм проверки эквивалентности двух выражений.
В действительности, такой алгоритм известен не всегда.

Нормальность. Все эквивалентные нулю выражения представляются одинаковым образом.
Особость нуля связана с наличием у представляемого математического объекта арифметических операций (в частности, операции деления), определённых не для всех значений аргументов.
Любое каноническое представление нормально, но обратное верно не всегда.
Однако во многих случаях с помощью нормального представления удаётся построить каноническое.

Характеристика задач ПП

Требования к свойствам представлений – 2

Естественность. Представление каждого элемента определяется одинаково, независимо от того, в какой последовательности появляется этот элемент.
Пример неестественного представления – представление по методу Брауна.

Метод Стэнли Брауна (W. Stanley Brown).

Предполагая, что мы умеем проверять эквивалентность двух выражений и обладаем неограниченной памятью для хранения представления , реализуем следующие правила:

1) Сравниваем каждое вновь представляемое выражение со всеми хранимыми в памяти.

2) Если среди хранимых выражений найдётся эквивалентное исходному, то исходное переписывается в форме эквивалентного ему выражения, хранимого в памяти; иначе – его форма объявляется каноническим представлением в данном классе эквивалентности и запоминается.

Метод Брауна универсален, но форма представления конкретного элемента существенно зависит от его местоположения в последовательности представляемых элементов.

Экономичность. Представление обеспечивает минимальную емкостную сложность данных и минимальную алгоритмическую сложность операций над данными.

Характеристика задач ПП

Примеры канонических представлений – 1

Пример 1. Математический объект – множество натуральных чисел **N**, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$.
Основная теорема арифметики утверждает, что любое натуральное число единственным образом представимо в виде произведения простых чисел, расположенных в порядке неубывания.
Иными словами, разложение натурального числа на простые множители – метод получения его канонического представления.

При таком представлении сложность операций умножения и деления минимальна, а сложность операций сложения и вычитания существенно возрастает по сравнению с каноническим представлением в форме нормализованного (ненулевой старший разряд) целого числа многократной точности в позиционной системе счисления (знак числа хранится отдельно).

Замечание. Если все целые числа, участвующие в вычислениях, ограничены по абсолютной величине некоторой константой, то для их внутреннего представления удобно использовать систему вычетов по модулям взаимно простых чисел, произведение которых больше указанной константы. При этом арифметика многократной точностью необходима только при вводе и выводе данных.

Характеристика задач ПП

Примеры канонических представлений – 2

Пример 2. Математический объект – кольцо многочленов **Z** [x].
Основная теорема алгебры утверждает,
что любой многочлен от одной переменной z
с комплексными коэффициентами
может быть представлен в следующем виде:

$$a\,(z - x_1)\,(z - x_2)\,\ldots\,(z - x_n)$$

Иными словами, определение всех корней многочлена
(т.е. решение алгебраического уравнения) –
метод получения его канонического представления.

Характеристика задач ПП

Примеры прикладных задач преобразования представлений

№ п/п	Математический объект	Тип представления	Прикладная задача
1.	Нечёткое множество (**Лотфи Заде**)	Функция принадлежности элемента множеству: $\mu\ (x),\ x \in X$	Преобразование лингвистической неопределённости
2.	Ультраоператор (**А.Н. Тихонов**)	Решётки ультраоснащений опорных множеств: $\check{C} : \check{S} \rightarrow \check{D}$ $\check{S} = S \times L_S \times P_S\ ,\ \check{D} = D \times L_D \times P_D$ L – решётка понятий, P – шкала достоверностей.	Преобразование типа: $(\text{Д} \subseteq \text{И}) \leftrightarrow (\text{Д} \subseteq \text{И})$ Д – данные И – информация (виртуализация информации)
3.	Схема программы (**В.Е. Котов**)	Размеченный ориентированный граф: $G = (V, E, M)\ ,\ (v_i\ ,\ v_j) \in E$, M – функция разметки	Преобразование структур параллельной обработки данных

План лекции: тема подраздела

- Характеристика задач преобразования представлений (ПП)
- **Средства преобразования представлений**

Средства преобразования представлений

Вводные замечания

Замечание 1. Все преобразования представлений математических объектов производятся на символьном уровне абстракции,
т.е. над алгебраическими выражениями.

Замечание 2. Средством обеспечения выполнимости преобразований является существование
некоторого отношения эквивалентности между представлениями.

Замечание 3. Преобразования представлений,
не сохраняющие алгебраических свойств математических объектов
(т.е. различного рода аппроксимации) не рассматриваются.

Замечание 4. Все лингвистические объекты,
порождающие преобразуемые представления,
ограничены языками теорий первого порядка.

Средства преобразования представлений

Типы средств эквивалентных преобразований представлений

- Правила допустимых подстановок термов символьных строк
- Тождества законов композиции элементов алгебраических систем
- Правила вывода в формальных теориях (исчислениях)
- Диаграммы морфизмов категорий математических объектов

Средства преобразования представлений

Формальные теории (исчисления) – 1

Формальная теория (исчисление) – это кортеж следующих множеств:
1) множество A символов, образующих алфавит;
2) множество F слов в алфавите A, F $\subset$A, которые называются формулами;
3) подмножество B формул, B $\subset$F, которые называются аксиомами;
4) множество отношений R на множестве формул, которые называются правилами вывода.

Множество символов A может быть конечным или бесконечным.
Обычно для образования символов используют конечное множество букв
(без индексов или с индексами - натуральными числами).

Множество формул F обычно задается индуктивным определением
(например, с помощью формальной грамматики). Как правило, это множество бесконечно.

Множества A и F в совокупности определяют язык (сигнатуру) формальной теории.

Множество аксиом B может быть конечным или бесконечным.
Если оно бесконечно, то, как правило, задаётся с помощью конечного множества схем аксиом и правил порождения конкретных аксиом из схемы аксиом.

Множество правил вывода R, как правило, конечно.

Средства преобразования представлений

Формальные теории (исчисления) – 2

Выводом в исчислении ψ = (A, F, B, R) называется последовательность формул

$F_1, F_2, \ldots, F_n$

такая, что для любого k ($1 \le k \le n$) формула F_k есть либо аксиома исчисления ψ, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул, полученное по правилу вывода.

Формула G называется **теоремой исчисления** ψ (выводимой в ψ или доказуемой в ψ), если существует вывод $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$ который называется выводом формулы G или доказательством теоремы G. Записывается это следующим образом:

$F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$

Исчисление ψ называется **непротиворечивым**, если не все его формулы доказуемы. Иными словами, исчисление ψ называется непротиворечивым, если в нем не являются выводимыми одновременно формулы F и ¬F (отрицание F).

Исчисление ψ называется **полным** (или адекватным), если каждому истинному высказыванию M соответствует теорема теории ψ.

Формальная теория ψ называется **разрешимой**, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является ли эта формула теоремой теории ψ или нет.

Средства преобразования представлений

Классификация логик

Замечание 1. Понятия «(формальная) теория», «исчисление», «логика», рассматриваемые как математические абстракции, являются синонимами.

Замечание 2. Более сильные логики (т.е. логики порядков выше первого) используют некоторые внелогические понятия, такие как «натуральное число» и «множество».

Логика первого порядка – это исчисление, в котором **кванторы общности** ∀ (от англ. **A**ll – для всех) и **существования** (от англ. **E**xist - существует) ∃ всегда действуют только на множестве предметных переменных.

Логика второго порядка позволяет действовать одному из кванторов на подмножествах (не обязательно конечных) множества предметных переменных и на функциональных символах.
Слабая логика второго порядка позволяет действие кванторов на конечных подмножествах множества предметных переменных и на множестве натуральных чисел.

Логика третьего порядка позволяет действовать кванторам на множествах функциональных символов и т.д.

Средства преобразования представлений

Классические и неклассические логики

Логика первого порядка, которая позволяет аксиоматизировать теорию множеств (составляющую фундамент современной математики),
называется **классической** (или аристотелевской) логикой.

Причиной появления неклассических логик является наличие большого количества проблем, для моделирования и решения которых недостаточно формализма классической логики.

Все **неклассические** логики принято делить на два класса:

(1) расширения классической логики;

(2) альтернативы классической логики.

Класс (1) объединяет модальную логику и её разновидности:
темпоральную, динамическую и другие логики.

Класс (2) объединяет многозначную, частичную, нечёткую и интуиционистскую логики.

Средства преобразования представлений

Классическая логика: аксиомы группы

Пример. Алгебра G – группа описывается следующей системой аксиом:

$\forall x\ (x = x)$	(рефлексивность)
$\forall x\ \forall y\ (x = y \Rightarrow y = x)$	(симметричность)
$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z))$	(транзитивность)
$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (y = z \Rightarrow (x + y = x + z)\ \&\ (y + x = z + x))$	(подстановка)
$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x * y) * z = x * (y * z))$	(дистрибутивность)
$\forall x\ (x * e = x)$	(нейтральный элемент)
$\forall x\ \exists y\ (x * y = e)$	(обратный элемент)

Замечание. Аксиомы, относящиеся к полугруппе, показаны **зелёным цветом**, а аксиомы, обобщающие полугруппу до группы – **красным цветом**.

Замечание. В этом случае говорят,
что алгебра G является **моделью** для вышеуказанной системы аксиом.

Средства преобразования представлений

Неклассические n-значные логики – 1

Пример. Пусть L_n – **многозначная** пропозициональная **логика** (**Ян Лукасевич**, 1920).
Тогда мощность множества значений истинности в такой логике равно n:
$L_n = \{ 0, 1/(n-1) , 2/(n-1) , \ldots , (n-2)/(n-1) , 1 \}$

Замечание. Практически важными частными случаями многозначной логики являются частичные и нечёткие логики.

Частичная (трёхзначная, при n = 3) **логика** имеет три значения истинности: ложь (0), истина (1) и неопределённость (1/2).

Вычисления значений формул в n-значной логике выполняются (как и в классической логике) с помощью таблиц истинности.

Средства преобразования представлений

Неклассические n-значные логики – 2

Таблица истинности для 3-значной логики

A	**B**	**A & B**	**A $\vee$ B**	**A $\Rightarrow$ B**	**$\neg$ A**
x	**Y**	**min (x, y)**	**max (x, y)**	**min (1, 1 – x + y)**	**1 - x**
1	1	1	1	1	0
1	1/2	1/2	1	1/2	0
1	0	0	1	0	0
1/2	1	1/2	1	1	1/2
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2
1/2	0	0	1/2	1/2	1/2
0	1	0	1	1	1
0	1/2	0	1/2	1	1
0	0	0	0	1	1

Средства преобразования представлений

Неклассические n-значные логики – 3

Из вышеприведённой таблицы истинности очевидно следует справедливость аксиом:

$\forall$**A** $\forall$**B (A & B = B & A)**
$\forall$**A** $\forall$**B (A** $\vee$ **B = B** $\vee$ **A)**
$\forall$**A** $\forall$**B** $\forall$**C (A & (B & C) = (A & B) & C)**
$\forall$**A** $\forall$**B** $\forall$**C (A** $\vee$ **(B** $\vee$ **C) = (A** $\vee$ **B)** $\vee$ **C)**
$\forall$**A (** $\neg\neg$ **A = A)**
$\forall$**A (A & 0 = 0)**
$\forall$**A (A & 1 = A)**
$\forall$**A (A** $\vee$ **0 = A)**
$\forall$**A (A** $\vee$ **1 = 1)**
$\forall$**A** $\forall$**B (** $\neg$ **(A & B) = (** $\neg$ **A** $\vee$ $\neg$ **B))**

Замечание.
В n-значной ($n \geq 3$) логике закон «исключения третьего» не выполняется.
В частности, в этой логике формулы $A \Rightarrow B$ и $\neg A \vee B$ неэквивалентны.

Средства преобразования представлений

Неклассические n-значные логики – 4

Нечёткая логика FL_n основывается на понятии триангулярной нормы (**t-нормы**), моделирующей поведение истинностных значений, соединённых связкой «И», и понятии триангулярной конормы (**t-конормы**), моделирующей поведение истинностных значений, соединённых связкой «ИЛИ».

t-норма (t) и t-конорма (s) являются бинарными операциями следующего вида:

$t : [0,1]^2 \to [0,1]$ $\qquad\qquad$ $s : [0,1]^2 \to [0,1]$

Аксиоматическое определение свойств t-нормы:

(A1) $\forall a\, \forall b\, (a\, t\, b = b\, t\, a)$ (коммутативность)

(A2) $\forall a\, \forall b\, \forall c\, (a\, t\, (b\, t\, c) = (a\, t\, b)\, t\, c)$ (ассоциативность)

(A3) $\forall a\, \forall b\, \forall c\, ((a \le b) \Rightarrow (a\, t\, c \le b\, t\, c))$ (монотонность)

(A4) $\forall a\, (1\, t\, a = a)$ $\quad \forall a\, (0\, t\, a = 0)$ (граничные условия)

Аксиоматическое определение свойств t-конормы:

(A1) (A2) (A3)

(A4) $\forall a\, (0\, s\, a = a)$ $\quad \forall a\, (1\, s\, a = 1)$ (граничные условия)

t-конорма является **двойственной** к данной t-норме, если справедливо:

$\forall a\, \forall b\, (a\, s\, b = 1 - ((1 - a)\, t\, (1 - b)))$

Средства преобразования представлений

Неклассические n-значные логики – 5

Существует несколько способов определения t-норм, t-конорм, а также соответствующих им нечётких логик.

Логика Гёделя:
t-норма – это операция минимума «$\wedge$».
t-конорма – это операция максимума «$\vee$».

Вероятностная логика:
t-норма – это операция «t_P» (умножение событий в теории вероятностей).
t-конорма – это операция «s_P» (сложение событий в теории вероятностей):

$$a\ s_P\ b = a + b - a\ t_P\ b$$

Логика Лукасевича:
t-норма – это операция конъюнкции Лукасевича «$\otimes$»:

$$a \otimes b = 0 \vee (a + b - 1)$$

t-конорма – это операция дизъюнкции Лукасевича «$\oplus$»:

$$a \oplus b = \min(1, a + b)$$

Замечание. Объединение любых двух из трёх вышеперечисленных логик приводит к классической булевой логике.

Средства преобразования представлений

Равенство – особая форма представления

Системы равенств позволяют выражать следующие свойства математических объектов:

- Отношение между объектами.
- Определение объекта.
- Вычисление объекта.

Средства преобразования представлений

Равенства и отношения между объектами

Пример.

Рассмотрим следующее множество аксиом теории групп:

$x + 0 = x$; $x + (- x) = 0$; $(x + y) + z = x + (y + z)$

Зададимся вопросом:

следует ли равенство $0 + x = x$ из этих аксиом

(т.е. является ли оно истинным во всех группах) ?

Доказать то, что это равенство –

логическое следствие указанных аксиом

позволяют подстановки произвольных термов вместо переменных

и замены «равных равными».

Средства преобразования представлений

Равенства и определения объекта

Пример 1.
Множество равенств (аксиом) позволяет определить базовые объекты общей алгебры – группоиды и полукольца.
(В таких случаях говорят,
что алгебры представлены равенствами).

Пример 2.
Равенства в качестве определений
широко применяются в программировании:

- программы, написанные на аппликативных (функциональных) языках;
- абстрактные определения интерпретаторов;
- алгебраические определения типов данных.

Средства преобразования представлений

Равенства и вычисления объектов

Пример.

Равенства рассматриваются

как ориентированные правила переписывания.

Зададим функцию **Append** с помощью следующих равенств:

Append (NULL , x) = x

Append ((Cons (x , y) , z) = Cons (x , Append (y , z)

Теперь с помощью вышеприведённого определения

можно поставить задачу вычисления следующего выражения:

Append (Cons (A , Cons (B , NULL)) , Cons (C , NULL)

Результат вычисления:

Cons (A , Cons (B , Cons (C , NULL)))

Средства преобразования представлений

Исчисление равенств – 1

Равенством называется формула следующего вида s = t,
где s и t – термы, т.е. $s, t \in T(X, \Omega)$.

Присваиванием называется гомоморфизм $V: T(X, \Omega) \rightarrow A$,
где A – некоторая фиксированная Ω-алгебра.
При этом V (t) называется **значением терма** t относительно присваивания V.
Термы t и t' называются **функционально эквивалентными**, если V (t) = V (t').

Пусть $E \subseteq T(X, \Omega) \times T(X, \Omega)$.

Замечание. Пару $(a, b) \in E$ далее удобно рассматривать
как представление левой (a) и правой (b) частей некоторого уравнения.

Следующие два отношения эквивалентности на множестве $T(X, \Omega)$,
связанные с подмножеством E, являются основными для всех алгебраических теорий:

E |= s = t (читается: «s и t **семантически равны** в теории E»)

E |– s = t (читается: «s и t **доказуемо равны** в теории E»)

Средства преобразования представлений

Исчисление равенств – 2

Определение (для отношения $E \models s = t$). Если A является Ω-алгеброй, то равенство $s = t$ истинно в A, если для всех присваиваний V в A выполнено $V(s) = V(t)$.

Множество всех таких Ω-алгебр A, в которых истинны все равенства $a = b$, где $(a, b) \in E$, называется **многообразием** (эквациональным классом) $Var(\Omega, E)$ множества E.
$E \models s = t \Leftrightarrow s = t$ истинно во всех Ω-алгебрах из $Var(\Omega, E)$.

Определение (для отношения $E \vdash s = t$). Отношение $E \vdash s = t$ истинно, если равенство $s = t$ может быть выведено за конечное число шагов в исчислении равенств.

Исчисление равенств является правильным и полным относительно семантического равенства ($\models$), вследствие следующей теоремы:

Теорема (**Гаррет Биркгоф**, 1935). $E \models s = t \Leftrightarrow E \vdash s = t$

В силу этой теоремы отношение семантического равенства является рекурсивно перечислимым, если E – рекурсивно-перечислимое множество.

Замечание. Для фиксированного E с помощью $=_E$ будет обозначаться следующее отношение эквивалентности: $s =_E t \Leftrightarrow E \vdash s = t$

Средства преобразования представлений

Исчисление равенств – 3

Напомним, что гомоморфизм (эндоморфизм) $\sigma : T (X , \Omega) \rightarrow T (X , \Omega)$, удовлетворяющий условию $\sigma (x) \in X$ для всех $x \in X$ (кроме конечного их числа), является подстановкой.

Пусть a, b , c (в том числе с индексами) обозначают элементы множества $T (X , \Omega)$.

Формулы исчисления равенств :

(1) $a = b$ для произвольных $(a , b) \in E$ (элементы множества E являются **аксиомами**)

(2) отношение равенства обладает следующими свойствами:

- $a = a$ (**рефлексивность**)
- $a = b \Rightarrow b = a$ (**симметричность**)
- $a = b , b = c \Rightarrow a = c$ (**транзитивность**)

(3) для всех подстановок σ верно:
$a = b \Rightarrow \sigma (a) = \sigma (b)$ (**правило подстановки**)

(4) для всех операций $\omega \in \Omega$ арности n (n = 1 , 2 , …) верно:
$a_1 = b_1 , ,,, , a_n = b_n \Rightarrow \omega (a_1 , ,,, , a_n) = \omega (b_1 , ,,, , b_n)$ (**правило замены**)

Спасибо за внимание !

Вопросы ?