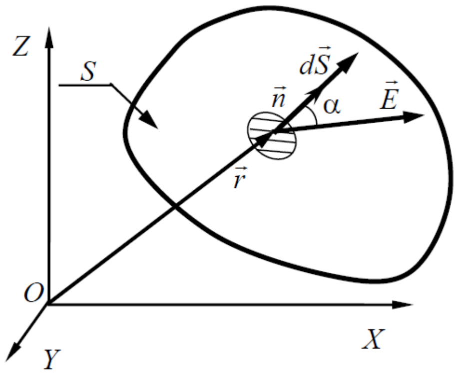
ЛЕКЦІЯ 3

ТЕОРЕМА ГАУСА ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

3.1 Потік вектора напруженості електричного поля

Розглянемо довільне електричне поле, вектор напруженості якого визначено в кожній точці простору $E(r)$. Тепер візьмемо довільну поверхню S. Розглянемо на поверхні довільну маленьку ділянку площею ΔS. Коли $\Delta S \to 0$, то зазначена ділянка буде лежати на площині, яка дотикається до поверхні. Таку малу ділянку будемо називати елементарною, а її площу позначатимемо dS.



Орієнтацію елементарної ділянки у просторі задає одиничний вектор $\vec{n}$, який перпендикулярний до ділянки. Введемо вектор елементу площі поверхні, який позначимо $\vec{dS}$, модуль якого дорівнює площі елементарної поверхні $\vec{dS} = dS$, і напрямок якого збігається з напрямком одиничного вектора $\vec{n}$, тобто $\vec{dS} \uparrow\uparrow \vec{n}$

Елементарний потік вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля через елемент поверхні $\vec{dS}$ визначається скалярним добутком:

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S}, \quad \text{або} \quad d\Phi_E = \vec{E}\vec{n}dS, \quad d\Phi_E = E\cos\alpha dS, \quad d\Phi_E = E_n dS,$$

де α – кут між векторами $\vec{E}$ та $\vec{dS}$

а $E = |\vec{E}|$ -модуль вектора напруженості електричного поля, E_n – нормальна до поверхні складова вектора E,

$E_n = E\cos\alpha$

Потік вектора напруженості максимальний, коли вектор напруженості електричного поля співнаправлений з вектором елемента поверхні $dS \uparrow\uparrow E$

Коли кут α<π/2, то потік додатний $d\Phi_E > 0$ і навпаки, коли α <π/2, то потік від'ємний $d\Phi_E < 0$

Величина потоку через довільну скінчену поверхню визначається шляхом інтегрування

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E \,.$$

З урахуванням означення елементарного потоку, маємо, що потік через довільну поверхню дорівнює інтегралу

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

Коли поверхня S замкнута, то зазначений інтеграл записують у вигляді:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \vec{E}\vec{n} dS$$

3.2 Інтегральна теорема Гауса для вектора напруженості електричного поля

Потік вектора напруженості електричного поля має цікаву властивість: його величина пропорційна заряду, оточеному поверхнею. Для доведення цього твердження спочатку розглянемо точковий заряд q. Цей заряд створює в оточуючому просторі електричне поле, вектор напруженості якого описується формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{e}_r}{r^2}$$

де e_r – одиничний вектор, напрямок якого співпадає з радіус-вектором положення точки спостереження вектора напруженості електричного поля

$\vec{e}_r \uparrow\uparrow \vec{r}$, а $r = |\vec{r}|$

Оточимо заряд сферичною поверхнею радіусом r, центр якої співпадає з точкою розташування заряду q. Вектор нормалі до цієї сферичної поверхні є одиничний вектор, який паралельний до радіуса сфери і співпадає за напрямком з радіус-вектором, $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{r}$

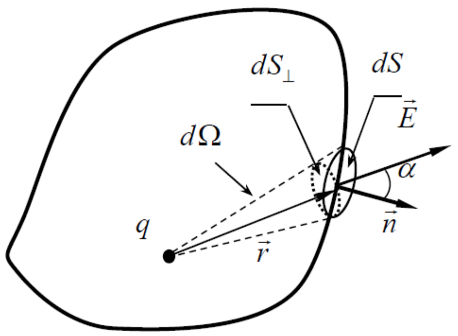
Тепер розрахуємо потік вектора напруженості електричного поля заряду q через цю поверхню.

Маємо:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2}d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{e}_r\vec{n}}{r^2}dS$$

Врахуємо, що у випадку, коли заряд q знаходиться в центрі сфери, одиничні вектори e_r та n для будь-якої точки сфери співпадають, а тому їх скалярний добуток дорівнює одиниці: $\vec{e}_r\vec{n} = |\vec{e}_r||\vec{n}| = 1$. Крім того, відстань від точок сфери до заряду постійна, $r = const$. З урахуванням цієї умови величина потоку дорівнює

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\oint_S dS$$



Інтеграл $\oint_S dS$ дорівнює площі сфери $\oint_S dS = 4\pi r^2$

Звідки маємо, що величина потоку буде дорівнювати

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Тепер розглянемо випадок, коли заряд оточено довільною несферичною замкнутою поверхнею.

Величина потоку вектора напруженості електричного поля дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E\cos\alpha dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\cos\alpha}{r^2}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{dS_\perp}{r^2}$$

де α – кут між вектором напруженості електричного поля E та вектором елементарної ділянки dS

Враховано, що $dS_\perp = \cos\alpha\, dS$ – проекція вектора dS на напрямок радіус-вектора. Відношення

$$\frac{dS_\perp}{r^2} = d\Omega$$

Дорівнює елементарному *тілесному* куту, який спирається на поверхню $dS_\perp$

Отже величина потоку вектора напруженості електричного поля, створюваного зарядом, через довільну замкнуту поверхню визначається інтегруванням по тілесному куту

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega$$

Величина тілесного кута для замкнутої поверхні, що оточує заряд, дорівнює

$$\oint_S d\Omega = 4\pi.$$

Таким чином, знову отримано, що величина потоку вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню, що оточує точковий заряд, пропорційна величині цього заряду

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Коли, наприклад, додатний заряд q знаходиться за межами замкнутої поверхні, то величина потоку через цю поверхню дорівнює нулю, бо силові лінії двічі по різному пронизують поверхню: один раз входять в неї, а другий раз виходять. Вклад в потік від ліній, що входять в поверхню, від'ємний і дорівнює

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

Де Ω – тілесний кут, на який спирається поверхня, і який визначено відносно точки розташування заряду. Вклад в потік від силових ліній, що виходять з поверхні, додатний і дорівнює

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

бо в обох випадках тілесні кути однакові.

Отриманий результат можна узагальнити на довільну систему зарядів. За принципом суперпозиції напруженість електричного поля системи зарядів дорівнює сумі напруженостей полів утворених кожним з зарядів окремо,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N, \quad \text{або} \quad \vec{E} = \sum_j^N \vec{E}_j$$

Потік вектора напруженості системи зарядів дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \sum_j^N \vec{E}_j d\vec{S} = \sum_j^N \oint_S \vec{E}_j d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i^{\tilde{N}} q_i$$

Сума зарядів $\sum_i^N q_i$ є повним зарядом, оточеним поверхнею. При підрахунку суми зарядів змінено індекс, бо не обов'язково всі заряди системи охоплені поверхнею, а $\tilde{N}$-позначено кількість зарядів, що потрапляють всередину відповідного об'єму.

Отримане співвідношення називається *теоремою Гауса* для вектора напруженості електричного поля, за якою величина потоку вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює повному (сумарному) заряду, охопленому поверхнею.

3.3 Теорема Гауса для напруженості електричного поля в диференціальній формі

Запишемо теорему Гауса для вектора напруженості електричного поля, за якою потік вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню пропорційний величині заряду охопленого поверхнею

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_n}{\varepsilon_0}$$

де q_n – повний заряд, який дорівнює сумі зарядів в об’ємі, обмеженому замкнутою поверхнею *S*.

У разі неперервного розподілу зарядів для характеристики розподілу заряду використовують об’ємну густину заряду $\rho = dq / dV$, де dq – величина заряду в елементарному об’ємі dV.

Для неперервного розподілу заряду маємо, що величина повного заряду в об’ємі, обмеженому поверхнею *S*, може бути визначена шляхом знаходження інтегралу

$$q_n = \int_V \rho dV$$

де інтегрування здійснюється по об’єму *V*.

Тепер теорема Гауса набуде вигляду

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

Врахуємо добре відоме з математики співвідношення, яке називають теоремою Остроградського – Гауса, за якою потік вектора через замкнуту поверхню можна знайти інтегруванням дивергенції цього вектора по об’єму.

У разі потоку для вектора напруженості електричного поля з теореми Остроградського – Гауса маємо:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_V div\vec{E}dV$$

де інтегрування здійснюється по об’єму *V*, обмеженому замкнутою поверхнею *S*. Під знаком правого інтегралу позначено дивергенцію вектора напруженості електричного поля, яка визначається сумою частинних похідних відповідних проекцій вектора напруженості:

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

З урахуванням теореми Остроградського – Гауса маємо рівність

$$\int_V div\vec{E}dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

в якій зліва і справа стоять інтеграли, що розраховуються по одному й тому ж самому об'єму, обмеженому поверхнею S. Зауважимо, що ця інтегральна рівність виконується для довільних поверхонь, тому вона можлива тільки у разі рівності підінтегральних виразів, тобто

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Отже, отримано, що дивергенція вектора напруженості електричного поля пропорційна густині об'ємного заряду. Зазначене співвідношення називають теоремою Гуса для вектора напруженості електричного поля в диференціальній формі.

Згідно з означенням дивергенції, рівняння теореми Гауса в диференціальній формі можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Зазначене співвідношення ще називають законом Кулона, записаним в диференціальній формі, оскільки теорема Гауса для вектора напруженості в інтегральній і в диференціальній формі є наслідком закону Кулона. Дивергенція будь-якого вектора формально розглядається як скалярний добуток вектора набла на цей вектор. Зокрема, дивергенція напруженості електричного поля:

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Диференціальне рівняння

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

дозволяє вирішувати обернену задачу, коли за допомогою відомого розподілу вектора напруженості електричного поля $E(r)$ можна знайти розподіл заряду, $\rho\,(r)$.