

ЛЕКЦІЯ 4

Рівняння Пуассона

Диференціальне рівняння

$$\nabla \vec{E} = \rho / \varepsilon_0, \text{ або}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

містить три функції E_x , E_y , E_z , які є проєкціями вектора напруженості електричного поля E . Врахуємо, що вектор напруженості електричного поля можна виразити через скалярну функцію – потенціал поля:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

Дію градієнта також символічно можна записати з використанням вектора набла:

$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Для проєкцій маємо:

$$E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

Або

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Перенесемо знак мінус до правої частини рівняння і запишемо його у вигляді:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Отримане рівняння називають *рівнянням Пуассона*. Воно є лінійним відносно потенціалу φ і містить суму частинних похідних другого порядку від потенціалу. Такі рівняння називають диференціальними рівняннями другого порядку.

Коли об'ємна густина заряду дорівнює нулю $\rho=0$, то права частина у рівнянні Пуассона також стає рівною нулю.

Рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

називають *рівнянням Лапласа*.

Символьно ліву частину рівнянь Пуассона і Лапласа можна записати, використовуючи позначення для суми диференціальних символів частинних похідних другого порядку:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

де символ Δ називають „лапласіаном”.

Лапласіан дорівнює квадрату вектора набла (скалярному добутку двох векторів набла):

$$\Delta = \vec{\nabla} \vec{\nabla} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

З використанням лапласіану рівняння Пуассона і рівняння Лапласа набувають вигляду:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\Delta \varphi = 0.$$

Рівняння Лапласа, на відміну від рівняння Пуассона, не містить правої частини, що спрощує знаходження потенціалу поля. В арсеналі сучасної математики існує багато розрахункових аналітичних та чисельних комп'ютерних методів (які вважаються стандартними методами і можуть бути реалізовані навіть на сучасному персональному комп'ютері) для розв'язку подібних диференціальних рівнянь. В цілому, задача розрахунку довільного електростатичного поля не має особливих принципових труднощів.

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ 1 МОДУЛЯ

1. Електричний заряд кратний елементарному:

$$q = \pm Ne .$$

2. Сума зарядів ізольованої системи є величиною постійною:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots q_n = const .$$

3. Закон Кулона. Сила, з якою перший заряд q_1 діє на заряд q_2 , дорівнює

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} ,$$

де \vec{r}_{12} – радіус-вектор, початок якого співпадає з першим зарядом, а кінець – з другим зарядом, \vec{F}_{12} – сила, прикладена до другого заряду.

4. Сила, з якою електричне поле діє на заряд q :

$$\vec{F} = q\vec{E} ,$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля.

5. Формула для напруженості електричного поля, утвореного точковим зарядом q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} .$$

6. Потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} .$$

7. Зв'язок між напруженістю електричного поля та потенціалом:

$$\vec{E} = -grad \varphi , \quad \varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' .$$

8. Потенціал точкового заряду визначається за формулою:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} .$$

9. Енергія заряду в потенціальному полі:

$$W = q\varphi.$$

10. Формула для потоку вектора напруженості електричного поля:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}.$$

11. Терема Гауса для вектора напруженості електричного поля:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

12. Напруженість електричного поля зарядженої пластини:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

13. Напруженість електричного поля зарядженої нитки:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

МОДУЛЬ 2

2.1 Діелектрики

Діелектрики – це речовини, які не проводять електричного струму, і їх використовують, наприклад, для ізоляції провідників в електричних колах. Діелектриками можуть бути речовини незалежно від їх агрегатного стану. Вони можуть перебувати в газоподібному, рідкому або твердому агрегатних станах.

Діелектрики впливають на взаємодії між зарядами і на розподіл електричного поля. Якщо два заряди розмістити в діелектрику, то сила взаємодії між ними зменшиться. Очевидно, що зменшення сили є наслідком того, що в діелектрику змінюється напруженість електричного поля. Змінити напруженість електричного поля можуть заряди речовини діелектрика. Отже основним при вивченні впливу діелектриків на електричне поле є з'ясування, як заряди речовини впливають на електричне поле. Ця задача є нетривіальною, бо самі заряди (точніше їх перерозподіл), як буде показано далі, виникають під дією електричного поля.

2.1.1. Поляризація діелектриків

При внесенні діелектриків в електричне поле відбувається спотворення поля. Можуть змінюватися величина і напрямок напруженості електричного поля. Зміна поля відбувається за рахунок перерозподілу власних зарядів діелектрика, який в процесі перерозподілу залишається електронейтральним. Діелектрики бувають двох видів: *полярні* та *неполярні*. У молекул полярних діелектриків розподіл додатних та від'ємних зарядів не співпадає. Якщо в молекулі всі додатні заряди ядер атомів замінити одним сумарним зарядом $+q$, який знаходиться у центрі розподілу всіх її додатних зарядів, а від'ємні заряди електронів замінити одним сумарним від'ємним зарядом, розміщеним у центрі розподілу від'ємних зарядів, то таку молекулу можна вважати електричним диполем, який складається із зарядів $+q$ і $-q$ з плечем l , що дорівнює відстані між цими зарядами (дивись рис.2.1).

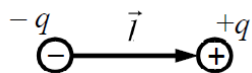


Рис. 2.1

Для характеристики диполя використовують фізичну величину, яку називають *дипольним моментом*

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

де l – вектор, модуль якого дорівнює плечу диполя $|l| = l$, початок співпадає з від’ємним зарядом, а кінець знаходиться на додатному заряді.

Якщо радіус-вектор положення додатного заряду позначити r_+ , радіус-вектор положення від’ємного заряду позначити r_- , то дипольний момент дорівнює сумі

$$\vec{p} = \sum_{i=1,2} q_i \vec{r}_i$$

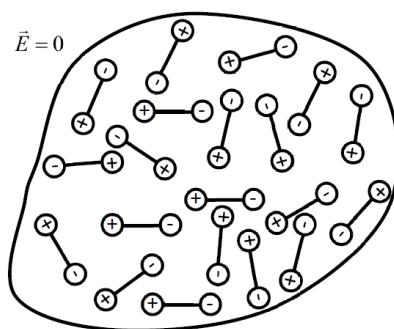
де індекс i позначає номери додатного та від’ємного зарядів та їх радіус-вектори. Дійсно, зробимо перетворення цієї суми

$$\sum_{i=1,2} q_i \vec{r}_i = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 = q \vec{r}_+ - q \vec{r}_- = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{l} = \vec{p}$$

де враховано, що плече диполя може бути записане, як різниця радіус векторів положень додатного та від’ємного зарядів

$$\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$$

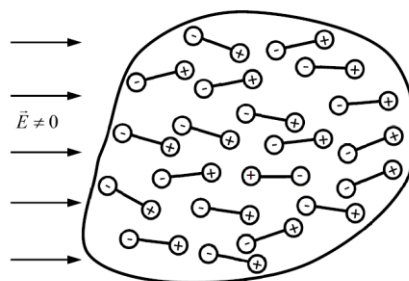
Кожна молекула полярного діелектрика, незважаючи на те, що вона електронейтральна, має дипольний момент. Внаслідок теплового руху орієнтування електричних диполів молекул є хаотичним, тому діелектрик за відсутності зовнішнього електричного поля не виявляє електризації. Діелектрики за відсутності зовнішнього електричного поля не створюють власного електричного поля. На рис. 2.2 показано розподіл зарядів диполів у діелектрику з хаотичною орієнтацією його дипольних моментів. Диполі молекул полярного діелектрика схематично зображено у вигляді з’єднаних відрізком двох кульок зі знаком плюс та знаком мінус, які позначають центри додатного та від’ємного заряду молекул. В середньому в об’ємі та біля поверхні діелектрика в рівній мірі присутні додатний та від’ємний заряди диполів.



Якщо полярний діелектрик розмістити у зовнішньому електричному полі, то на електричні диполі діятиме пара сил, під впливом якої вони здійснять повороти. При повороті диполя його додатній заряд буде зміщуватися вздовж силових ліній зовнішнього електричного поля, а від'ємний – у протилежному напрямку, як на рис. 2.3, на якому показано орієнтації диполів після їх нахилу електричним полем. Завдяки поворотам диполів і зміщенню їх зарядів на поверхні діелектрика, в яку входять силові лінії зовнішнього електричного поля, утворюються від'ємні заряди. На поверхні діелектрика, з якої силові лінії зовнішнього електричного поля виходять, утворюються додатні заряди. Ці заряди зв'язані зі своєю молекулою і не можуть її покинути, тому їх називають *зв'язаними*, або *поляризаційними*. Явище утворення поляризаційних зарядів називають *поляризацією діелектрика*. Результируючі напрямки векторів диполів у полярному діелектрику визначаються досягненням рівноваги орієнтуючої дії електричного поля та розорієнтуючої дії теплового руху. Зі зростанням напруженості поля момент пари сил, що діє на молекули, зростає, і зростає ступінь поляризації. В сильному полі всі диполі полярного діелектрика будуть направлені уздовж вектора напруженості електричного поля. Такий вид поляризації діелектрика називають *орієнтаційним*.

Полярними діелектриками є, наприклад, такі речовини, як CO, NH, HCl, N₂O, SO₂ та інші.

В *неполярних* діелектриках за відсутності електричного поля центр розподілу від'ємного заряду електронів молекул співпадає з центром розподілу їх додатних зарядів, тому плече диполя дорівнює нулю $l = 0$. Якщо такий діелектрик помістити в електричне поле, то під дією електричної сили в молекулах відбувається зміщення електронів, центри додатного і від'ємного



зарядів молекул не будуть співпадати, плече диполя стає не рівним нулю, $l \neq 0$. Величина дипольного моменту молекули неполярного діелектрика прямо пропорційна напруженості електричного поля

$$\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}$$

де β – коефіцієнт, що характеризує поляризаційну здатність молекули. Прикладами неполярних діелектриків є H₂, O₂, N₂, CH₄ тощо.