

Лекция № 3

Тема : Построение и анализ дискретной математической модели позитивной динамической системы балансового типа

Объединяя предлагаемые подходы в моделях В.В. Леонтьева и С.Карлина, описываемых соответственно системами

$$X_t = AX_t + B(X_{t+1} - X_t) + C_t, \quad (3.1)$$

и

$$X_{t+1} = AX_t + C_t, \quad (3.2)$$

и учитывая результаты проведенного анализа указанных моделей, построим новую дискретную математическую модель позитивной динамической системы балансового типа, являющуюся уточнением модели С. Карлина (3.2) и учитывающую как динамику производства, так и динамику инвестиций.

Такая модель описывается с помощью системы линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка

$$X_{t+1} = AX_t + B(X_{t+1} - X_t) + C_t \quad (3.3)$$

или

$$(I - B)X_{t+1} = (A - B)X_t + C_t. \quad (3.4)$$

Для системы (3.3) или (3.4) ставится задача Коши:

$$\text{при } t = t_0 = 0 \quad X(0) = X_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.5)$$

где $X(0) = X_0$ – n – мерный вектор-столбец начальных условий системы.

Полученная дискретная динамическая математическая модель, описываемая системой (3.3) или (3.4), является *разомкнутой*, то есть моделью, у которой изменение выходной характеристики X_{t+1} не оказывает воздействия на входные характеристики X_t и C_t позитивной динамической системы. Такая модель существенно зависит только от прошлых и текущих значений входных характеристик и не может скомпенсировать неизбежные изменения выходной характеристики системы.

Модель позитивной динамической системы балансового типа, описываемая системой (3.4) сводится к модели, описываемой системой

$$X_{t+1} = (I - B)^{-1}(A - B)X_t + (I - B)^{-1}C_t \quad (3.6)$$

или

$$X_{t+1} = \tilde{A}X_t + D_t, \quad (3.7)$$

где $\tilde{A} = (I - B)^{-1}(A - B)$, $D_t = (I - B)^{-1}C_t$.

Схема функционирования позитивной динамической системы балансового типа для разомкнутой модели (3.6) представляется на рис. 3.1, где X_t и C_t являются входными характеристиками (входами), а X_{t+1} – выходной характеристикой (выходом) системы.

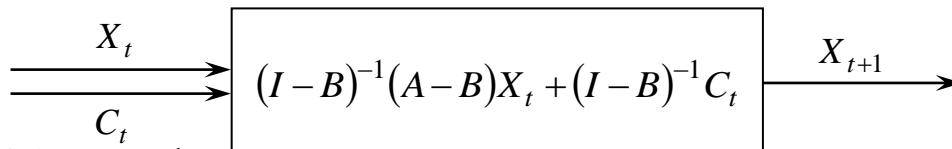


Рис. 3.1 Схема функционирования позитивной динамической системы балансового типа

Модель, описываемая системой (3.7) является аналогом динамической модели С. Карлина. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Модель (3.7) продуктивна тогда и только тогда, когда спектральный радиус матрицы $\rho(\tilde{A}) < 1$.

На основе теоремы 3.1 формулируется следующая лемма.

Лемма 3.1. Если в модели (3.7) матрицы A и \tilde{A} продуктивны, то для любого вектора $D_t \geq 0$ продуктивны и матрицы $B, (A - B)$.

Таким образом, в модели, описываемой системой (3.6) или (3.7) для обеспечения неотрицательности получаемых решений X_t действуют принятые В.В. Леонтьевым условия неотрицательности и продуктивности матрицы коэффициентов A , а также выделенные впервые дополнительные условия неотрицательности и продуктивности матриц $B, (A - B), (I - B)^{-1}(A - B)$, обеспечивающие позитивность системы и асимптотическую устойчивость решений (поскольку продуктивные матрицы $A, B, (A - B), (I - B)^{-1}(A - B)$ входят в класс M -матриц и матрица $\tilde{A} \geq 0, (I - \tilde{A}) \geq 0$).

Следовательно, если все перечисленные условия в модели (3.7) выполняются, то система (3.6) является асимптотически устойчивой, а получаемый на выходе модели вектор X_t поэлементно сходится при $t \rightarrow \infty$ к предельному (стационарному) X^* (рис. 3.2), определяемому при $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t = \Theta$ (где $\Theta = (\theta_{ij})_{n \times n}, \theta_{ij} = 0$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$) и $C_t = C_0 - const$, представляемому в виде

$$X^* = (I - A)^{-1}C_0$$

и являющемуся решением статической задачи В.В. Леонтьева.

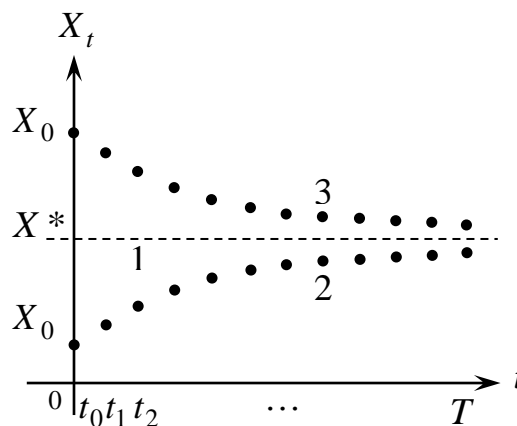


Рис. 3.2 Иллюстрация сходимости решения системы (3.6) (с одним входом и одним выходом) к стационарному решению X^*

На рис. 3.2 стационарное решение X^* обозначено пунктирной линией (1) и отражает максимальные (реально достижимые) возможности при имеющихся начальных данных модели. Таким образом, состояние $X = X^*$ характеризует состояние равновесия системы, то есть состояние, при котором в каждый момент времени t значения элементов вектора X_t являются постоянными и равными элементам вектора X^* .

Асимптотическая устойчивость решений обеспечивает сходимость всех решений системы (3.6) к состоянию X^* , определяемому пунктирной линией (1). Причем, если в наличии ресурса меньше (линия (2) на рис. 3.2), то получаемые решения сходятся снизу, а если ресурса больше – сверху (линия (3) на рис. 3.2). Отрицательных решений не будет в силу выполнения условий теоремы 3.1 и леммы 3.1 в модели, описываемой системой (3.6).

Непротиворечивость модели, описываемой системой (3.6) определяется следующим:

1) при $B = \Theta$ модель, описываемая системой (3.6), совпадает с моделью С. Карлина (3.2), а, следовательно, решение системы (3.6) совпадает с решением системы (3.2);

2) стационарное решение $X^* = (I - A)^{-1}C_0$, определяющее равновесное состояние системы (3.6) и определяемое при $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t = \Theta$ и $C_t = C_0 - const$ для модели, описываемой системой (3.6), модели С. Карлина (3.2) и динамической модели В. В. Леонтьева (3.1), совпадает с решением системы (3.1) статической модели В. В. Леонтьева, лежащей в основе их построения. Это означает, что указанные модели удовлетворяют гипотезе о балансовых соотношениях и определяет достоверность построенной модели (3.6).

Проведем анализ динамических свойств системы (3.6), предусматривающий решение соответствующей системы разностных уравнений. На основе анализа динамики свойств системы (3.6) представляется возможным описать не только качественный характер траекторий движения системы, но и рассчитать значения переменных модели, то есть определить положение системы в любой момент времени. Аналитическое исследование динамики предполагает нахождение точек равновесия, определение их типа, анализ свойств равновесия.

Основные направления анализа динамических свойств системы (3.6):

- 1) анализ системы разностных уравнений (3.6) при различных видах задания вектор-функции C_t ;
- 2) решение системы разностных уравнений (3.6);
- 3) определение точек равновесия и их типа;
- 4) графическая интерпретация решения системы: определение фазовых траекторий.

В зависимости от вида вектор-функции C_t возможны следующие случаи:

откуда

$$X_{t+1} = \tilde{A}(\tilde{A}^t X_0 + \tilde{A}^{t-1} \tilde{B}C_0 + \tilde{A}^{t-2} \tilde{B}C_0 + \dots + \tilde{A} \tilde{B}C_0 + \tilde{B}C_0) + \tilde{B}C_0$$

или

$$X_{t+1} = \tilde{A}^{t+1} X_0 + (\tilde{A}^t + \tilde{A}^{t-1} + \dots + \tilde{A} + I) \tilde{B}C_0, \quad (3.12)$$

где выражение в скобках – есть сумма членов геометрической прогрессии для квадратных матриц.

Заметим, что

$$\begin{aligned} (I - \tilde{A})(I + \tilde{A} + \tilde{A}^2 + \dots + \tilde{A}^{t-1} + \tilde{A}^t) &= \\ = I - \tilde{A} + \tilde{A} - \tilde{A}^2 + \tilde{A}^2 - \tilde{A}^3 + \dots + \tilde{A}^{t-1} - \tilde{A}^t + \tilde{A}^t - \tilde{A}^{t+1} &= I - \tilde{A}^{t+1}, \end{aligned}$$

откуда находим, что сумма членов геометрической прогрессии для квадратных матриц определяется в виде

$$I + \tilde{A} + \tilde{A}^2 + \dots + \tilde{A}^{t-1} + \tilde{A}^t = (I - \tilde{A})^{-1}(I - \tilde{A}^{t+1}). \quad (3.13)$$

Тогда, учитывая (3.13), решение (3.12) системы уравнений (3.11), представляющее собой траекторию движения основных характеристик исследуемой системы, примет вид

$$X_{t+1} = \tilde{A}^{t+1} X_0 + (I - \tilde{A})^{-1}(I - \tilde{A}^{t+1}) \tilde{B}C_0$$

или

$$X_{t+1} = \tilde{A}^{t+1} X_0 + (I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}C_0 - (I - \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^{t+1} \tilde{B}C_0. \quad (3.14)$$

Учитывая в (3.15) (при $\tilde{A} = \tilde{B}(A - B)$, $\tilde{B} = (I - B)^{-1}$), что

$$\begin{aligned} (I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}C_0 &= (I - \tilde{B}(A - B))^{-1} \tilde{B}C_0 = (\tilde{B}(\tilde{B}^{-1} + B - A))^{-1} \tilde{B}C_0 = \\ &= (\tilde{B}^{-1} + B - A)^{-1} \tilde{B}^{-1} \tilde{B}C_0 = (I - B + B - A)^{-1} C_0 = (I - A)^{-1} C_0, \\ (I - \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^{t+1} &= (\tilde{A}(\tilde{A}^{-1} - I))^{-1} \tilde{A}^{t+1} = \left((\tilde{B}(A - B))^{-1} - I \right)^{-1} \tilde{A}^{-1} \tilde{A}^{t+1} = \\ &= \left((A - B)^{-1}(I - B) - I \right)^{-1} \tilde{A}^t = \left((A - B)^{-1}((I - B) - (A - B)) \right)^{-1} \tilde{A}^t = (I - A)^{-1}(A - B) \tilde{A}^t, \\ (I - A)^{-1} C_0 &= X^*, \end{aligned}$$

получаем решение системы разностных уравнений (3.11) в виде

$$X_{t+1} = \tilde{A}^{t+1} X_0 + X^* - (I - A)^{-1}(A - B) \tilde{A}^t \tilde{B}C_0, \quad (3.15)$$

где $X_0 = X(0)$ – начальное состояние системы; $X^* = (I - A)^{-1} C_0$ – равновесное (установившееся) состояние системы.

Изменение значений стационарных решений X^* в модели приводит и к изменению решений X_{t+1} , определяемым в виде (3.15). Причем если C_t постоянны, то, следовательно, на элементы вектора $X^* = (I - A)^{-1} C^0$ существенно влияют значения элементов матрицы A .

С учетом вышеизложенного сформулируем некоторые выводы по полученному решению (3.15):

1) чтобы в модели, описываемой системой (3.11), существовал $X_t \geq 0$ (значение которого определяется в зависимости от изменения величины $X^* > 0$), должно выполняться неравенство $I - A > 0$, а следовательно и неравенство $A < I$.

2) из условия продуктивности матрицы $(I - B)^{-1}(A - B)$ (см. теорему 3.1) следует, что при $t \rightarrow \infty$ элементы матрицы $\left((I - B)^{-1}(A - B)\right)^t$ стремятся к нулю, а, значит, при $t \rightarrow \infty$ элементы столбцовой матрицы X_{t+1} стремятся к элементам столбцовой матрицы $(I - A)^{-1}C_0 = X^*$, то есть равновесное состояние не зависимо от t является асимптотически устойчивым.

Возможны следующие случаи:

а) при $X_0 > X^*$ значения X_t поэлементно приближаются к значениям равновесного X^* , монотонно экспоненциально убывая из начального состояния $X(0) = X_0$;

б) при $X_0 = X^*$ элементы вектора X_t остаются для всего последующего времени постоянными и равными элементам вектора X^* : $X_t = X^* = const \forall t \in [t_0; +\infty)$;

в) при $X_0 < X^*$ значения элементов X_t приближаются к значениям элементов равновесного вектора X^* , экспоненциально монотонно возрастая из начального состояния $X(t_0) = X_0$.

Таким образом, проведенный анализ ситуаций при $C_t = C_0 \geq 0$ показывает, что качественный характер траекторий основных характеристик исследуемой системы для них одинаков: полученные решения являются асимптотически устойчивыми – значения X_t при $t \rightarrow \infty$ сходятся к стационарному значению X^* , причем при $C_t = C_0 > 0$ значения X_t сходятся к X^* сверху или снизу, а при $C_t = 0$ – только сверху, постоянными X_t будут только при $X_0 = X^*$.

Таким образом, можно сделать вывод, что при введении в однородную модель, описываемую системой (3.8), слагаемого $C_t = C_0 > 0$ динамические свойства модели сохраняются, так как они зависят от матрицы $(I - B)^{-1}(A - B)$ системы: сохраняется тип равновесия, общий вид фазового портрета. Изменение состоит в том, что точка равновесия поэлементно перемещается из Θ в $X^* = (I - A)^{-1}C_0$, соответственно сдвигаются и директрисы системы.

3. Рассмотрим случай, когда C_t является некоторой заданной функцией времени. Данная ситуация соответствует системе уравнений (3.6) или (3.7). Причем функции C_t определяются в результате обработки экспериментальных

данных основных характеристик исследуемой системы методами регрессионного анализа данных, в частности методом наименьших квадратов или методом наименьших модулей.

Решение модели, описываемой системой разностных уравнений (3.6) представляется в виде

$$X_t = \left((I - B)^{-1}(A - B) \right)^t X_0 + \sum_{i=1}^t \left((I - B)^{-1}(A - B) \right)^{t-i} (I - B)^{-1} C_{i-1} \quad (3.16)$$

или

$$X_t = \tilde{A}^{t-1} \tilde{B} \left((A - B)X_0 + (I - A)X^* \right) + \tilde{A}^{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} \tilde{A}^{-i} \tilde{B} C_i, \quad (3.17)$$

где $\tilde{A} = \tilde{B}(A - B)$, $\tilde{B} = (I - B)^{-1}$.

Причем первое слагаемое в правой части решения (3.17) имеет вид решения (3.9) однородной системы (3.8), описывающей поведение исследуемого объекта при $C_t = 0$, и определяет убывающий характер части траектории X_t .

Второе слагаемое в правой части решения (3.17) зависит от вида функций $C_t \geq 0$. Перепишем его в виде

$$\sum_{i=1}^t \tilde{A}^{t-i} (I - B)^{-1} C_{i-1} = (I - B)^{-1} C_0 + \tilde{A}^t \sum_{i=2}^t \tilde{A}^{-i} (I - B)^{-1} C_{i-1},$$

где первое слагаемое в правой части определяет рост части траектории X_t , а второе слагаемое в зависимости от величины элементов X_0 может определять как рост части траектории X_t , так и ее спад.

Точка равновесия $X^* = (I - A)^{-1} C_0$ для модели (3.6) и тип равновесия (устойчивый узел) сохраняются.