Запорізький національний університет
Міністерства освіти і науки України

Методичні матеріали
для лабораторних занять

за курсом

«ТЕОРІЯ КООПЕРАТИВНИХ ІГОР»

Частина 1

для студентів
освітньої програми Комп’ютерні науки

Запоріжжя
2021

<u>ЧАСТИНА 1</u>

Тема1. Основні поняття й визначення теорії ігор. Матричні ігри

1. Основні поняття й визначення теорії ігор.
2. Класифікація ігор.
3. Матричні ігри.
   3.1. Ігри двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язок матричних ігор у чистих стратегіях.
   3.2. Розв'язок матричних ігор у змішаних стратегіях.
   3.3. Властивості розв'язків матричних ігор.

§1. Основні поняття й визначення теорії ігор

Багато соціально-економічних ситуацій, у яких розглядається питання про вибір розв'язку, мають тем властивістю, що в них зустрічаються не менш двох сторін з різними (іноді, протилежними) інтересами, кожна з яких для досягнення своєї мети має можливість діяти різними способами, вибір яких при деяких умовах може здійснюватися залежно від дій протиборчої сторони. Такі ситуації називаються **конфліктними**.

<u>Конфліктні ситуації характеризуються наступними рисами</u>:

1. наявність зацікавлених сторін (споживачі, фірми, країни й т.п.);
2. існування можливих дій кожної зі сторін;
3. інтереси сторін (задоволення потреб сторін).

Математична модель конфліктної ситуації називається **грою**.

Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється тим, що не включає другорядні, несуттєві для ситуації фактори й ведеться за певними правилами, які в реальній ситуації можуть порушуватися.

Теорія ігор – це теорія математичного моделювання умов конфлікту й пошук на цій основі оптимальних компромісів.

Природньою базою для аналізу конфліктних ситуацій служать широко розповсюджені ігри – шахи, шашки, карткові ігри.

Тому теорії ігор властива наступна термінологія:

- **Гравці** – сторони, що брати участь у конфлікті.

Гравці, що мають протилежні по відношенню друг до друга інтереси, називаються **супротивниками**.

- **Партія** – одне здійснення гри.
- **Стратегії** – доступні для гравців дії, у загальному випадку – це набір правил і обмежень.

На множині всіх можливих стратегій задається **функція виграшу** або **платіжна функція**. Якщо стратегії гравців визначені, то ця функція для цього конкретного набору стратегій визначає розмір виграшу або програшу кожної зі сторін.

- **Ситуації –** можливі наслідки конфлікту. Кожна ситуація – результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Ситуація називається **прийнятної** для гравця, якщо цей гравець змінюючи в ситуації свою стратегію, не може збільшити свого виграшу.

Ситуація рівноваги – ситуація, прийнятна для всіх гравців.

- **Процес розв'язку гри** – процес знаходження ситуації рівноваги.
- **Виграш (програш)** – наслідки конфлікту.

Виграші (програші) учасників мають кількісне вираження (якщо це не так, то завжди можна їм його приписати, наприклад, у шахах вважати «виграш» за одиницю, «програш» – за мінус одиницю, «нічию» – за нуль).

Розвиток гри в часі можна представляти як ряд послідовних «ходів» учасників.

Ходом називається вибір гравцем одного з передбачених правилами гри дій і його здійснення.

Ходи бувають:

- **особисті –** гравець свідомо вибирає й здійснює той або інший варіант дій (приклад – будь-який хід у шахах).
- **випадкові** – вибір здійснюється не волею гравця, а якимось механізмом випадкового вибору (кидання монети, гральної кістки, виймання карти з колоди й т.п.).

Усяка гра містить у собі **три елементи**: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I, \{x\}, \{H\} > = < \text{гравці, стратегії, виграші} >.$$

Невизначеність результату гри викликається **різними причинами**, які розбиваються на 3 групи:

1. особливості правил гри, які викликають величезна різноманітність у її розвитку таким чином, що результат гри неможливо передбачити заздалегідь - комбінаторні ігри (шахи, шашки);
2. вплив випадкових факторів – азартні ігри (кістки, карти);
3. відсутність інформації про дії супротивника.

Задачею теорії ігор є вироблення рекомендацій для гравців, тобто визначення для них оптимальних стратегій.

Оптимальною стратегією гравця називається така, яка забезпечує йому найкраще положення в даній грі, тобто максимальний виграш. Якщо гра повторюється неодноразово й містить, крім особистих, ще й випадкові ходи, оптимальна стратегія забезпечує максимальний середній виграш.

§2. Класифікація ігор

Залежно від кількості гравців розрізняють:

- гри двох гравців (парні ігри) – це гри, у яких можуть зустрічатися інтереси двох супротивників (ці ігри є найбільш вивченими);
- гри *n* гравців (множинні) – це гри, у яких можуть зустрічатися інтереси трьох і більш супротивників (менш досліджені через виникаючі принципові труднощі й технічних можливостей одержання розв'язку. Чим більше гравців – тим більше проблем).

По кількості стратегій ігри діляться на:

- кінцеві ігри – гри, у яких усі гравці мають кінцеве число можливих стратегій;
- нескінченні ігри – гри, у яких хоча б один із гравців має нескінченна кількість можливих стратегій.

По доступності інформації ігри діляться на:

- гри з повною інформацією – гра, у якій кожний гравець при кожному особистому ході знає всю передісторію її розвитку, тобто результати всіх попередніх ходів, як особистих, так і випадкових (шахи, шашки, «хрестики й нулики»);
- гри з неповною інформацією (карти).

По характеру взаємодії ігри діляться на:

- безкоаліційні ігри – гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції;
- коаліційні ігри – гравці можуть вступати в коаліції;
- (кооперативні) гри – коаліції визначені наперед.

По характеру виграшів ігри діляться на:

- гри з нульовою сумою (загальний капітал усіх гравців не міняється, а перерозподіляється між гравцями; сума виграшів усіх гравців дорівнює нулю);
- гри з ненульовий (фіксованої) сумою.

По кількості ходів ігри діляться на:

- однокрокові ігри – гри, у яких після кожного ходу гра закінчується й відбувається перерозподіл виграшів;
- багатокрокові ігри (шахи).

По виду функцій виграшу ігри діляться на:

- Матричні ігри.

Матрична гра – це кінцева гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш гравця 1 у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 2, стовпець – номеру застосовуваної стратегії гравця 2; на перетинанні рядка й стовпця матриці перебуває виграш гравця 1, відповідний до застосовуваних стратегій).
Для матричних ігор доведене, що кожна з них має розв'язок і воно може бути легко знайдене шляхом відомості гри до задачі лінійного програмування.

- Біматичні ігри.

Біматична гра – це кінцева гра двох гравців з ненульовою сумою, у якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (у кожній матриці рядок відповідає стратегії гравця 1, стовпець – стратегії гравця 2, на перетинанні рядка й стовпця в першій матриці перебуває виграш гравця 1, у другій матриці – виграш гравця 2.)
Для біматичних ігор також розроблена теорія оптимальної поведінки гравців, однак вирішувати такі ігри складніше, чим звичайні матричні.

- Неперервні ігри – це гри, у яких функція виграшів кожного гравця є безперервною залежно від стратегій.

Доведене, що гри цього класу мають розв'язку, однак не розроблене практично прийнятних методів їх знаходження.

- Опуклі ігри – це гри, у яких функція виграшів є опуклою.

Для них розроблені прийнятні методи розв'язку, що полягають у відшуканні чистої оптимальної стратегії (певного числа) для одного гравця й імовірностей застосування чистих оптимальних стратегій іншого гравця. Така задача вирішується порівняно легко.

- та ін.

§3. Матричні ігри

§3.1 Ігри двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язок матричних ігор у чистих стратегіях

Найпростішим випадком, докладно розробленим у теорії ігор, є кінцева парна гра з нульовою сумою (**антагоністична гра двох осіб або двох коаліцій**). Розглянемо таку гру, у якій беруть участь два гравці *А* и *В* протилежні інтереси, що мають: виграш одного дорівнює програшу іншого.
Парна гра складається із **двох ходів**:

1. гравець *А* вибирає одну зі своїх можливих стратегій $A_i\left(i=\overline{1,m}\right)$;
2. гравець *У* вибирає свою стратегію із $B_j\left(j\in\overline{1,n}\right)$ при повному незнанні обраної стратегії гравцем *А*.

Позначимо:
$\varphi_1\left(A_i,B_j\right)$ – виграш гравця А;
$\varphi_2\left(A_i,B_j\right)$– виграш гравця В.

Виграші повинні задовольняти умові:

$$\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0. \qquad (1)$$

Якщо позначимо, що

$$\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j),$$

те, отже,

$$\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j)$$

Тому що виграш гравця *A* дорівнює виграшу гравця *B* с зворотним знаком, ми можемо цікавитися тільки виграшем $\varphi(A_i, B_j)$ гравця *A*. Природно, *A* прагне максимізувати, а *B* – мінімізувати $\varphi(A_i, B_j)$.

Якщо гравець А вибирає деяку стратегію A_i, то це саме по собі не може впливати на значення функції $\varphi(A_i, B_j)$, тобто вплив A_i на величину значення $\varphi(A_i, B_j)$ є невизначеним. Визначити j можна тільки після вибору своєї стратегії B_j гравцем В.

Наслідки ігри $m \times n$ повністю визначаються матрицею (**платіжною матрицею** або **матрицею гри**)

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

де $a_{ij} = \varphi(A_i, B_j)$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$.

Матриця гри – це таблиця, у яку зведені правила гри в такий спосіб:

а) номер рядка матриці *A* відповідає номеру стратегії A_i гравця А, а номер стовпця – номеру застосовуваної стратегії B_j гравця В;

б) на перетинанні рядка A_i й стовпця B_j перебуває елемент a_{ij}, тобто виграш гравця *A* (відповідний до застосовуваних стратегій) або програш гравця *B*.

Принципи вибору стратегій гравцями *A* и *B*

Нехай гравець А вибирає деяку стратегію A_i.

Тоді в найгіршому випадку (коли його вибір стане відомий супротивникові) він одержить виграш, рівний

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Передбачаючи таку можливість, гравець А повинен вибрати таку стратегію A_{i0}, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha = \alpha_{i0} = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (2)$$

Величина α гарантує виграш гравця *A* и називається **нижньою ціною гри.**

Стратегія A_{i0}, що забезпечує одержання α називається **максимінною стратегією**, ідея якої полягає в тому, що гравець *A* не розраховує на можливі помилки гравця *B* и одержує **гарантований виграш** α.
Гравець *B,* вибираючи стратегію виходить із наступного принципу: при виборі деякої стратегії B_j його програш не перевищить максимального зі значень елементів j-*го* стовпця матриці, тобто

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Розглядаючи всі значення β_j, гравець У вибирає таке значення β_{j0}, при якім його максимальний програш буде мінімальним, тобто

$$\beta = \beta_{j0} = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}. \qquad (3)$$

Величина β називається **верхньою ціною гри**, а відповідна до виграшу β стратегія B_{j0} – називається **мінімаксною стратегією**.

Якщо гравці А и В прийняли відповідно стратегії A_{i0} й B_{j0}, то говорять, що вони використовують **принцип міні-макса (принцип гарантованого результату)**: *надходь так, щоб при найгіршій для тебе поведінці супротивника одержати максимальний виграш.*
<u>Приклад:</u> Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 3 = \alpha = \max_i \alpha_i \\ 1 \end{array}$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \qquad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 5$$

$$\beta = \min_j \{4 \quad 5 \quad 6 \quad 5\} = 4$$

отже $\alpha = 3 < \beta = 4$. $\qquad (i = 2, j = 1) \Rightarrow (2{,}1)$ - ситуація.

<u>Приклад:</u> Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ -1 \end{array}$$

$$\beta_i = \max_i a_{ij} = 3 \quad 2 \quad 4 \quad 5$$

$$\beta_j = \min_j \beta_i = 2.$$

$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i (0,2,-1) = 2$.

$\alpha = \beta = 2$

У випадку, коли $\alpha = \beta$ ми маємо справу із **сідловою точкою** або **точкою рівноваги**.

Сідлова точка – це такий елемент $a_{i_0 j_0}$ матриці *A*, який одночасно є мінімальним у рядку й максимальним у стовпці.

Стратегії (i_0, j_0) відповідні до сідлової точки $a_{i_0 j_0}$ називаються **чистими стратегіями**.

Ознака наявності сідлової точки й урівноваженої пари стратегій (пари стратегій A_{i_0}, B_{j0}, що володіють властивістю рівноваги) – це рівність нижньої й верхньої ціни гри

$$V = \alpha = \beta.$$

Значення $V = \alpha = \beta$ називається **чистою ціною гри**.

Ціна гри V й набір стратегій (i_0, j_0) утворюють **розв'язок гри в чистих стратегіях**, тобто набір

$$\{(i_0, j_0), V\}.$$

<u>*Твердження*</u>: Ситуація (i_0, j_0) в матричній $m \times n$-грі є **рівноважною (сідловою точкою)**, якщо для будь-якого $i = 1,\ldots,m$ й кожного $j = 1,\ldots,n$ виконується нерівність

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}.$$

У грі може існувати не одна сідлова точка, наприклад

$$(i_0, j_0), (i_{10}, j_{10}), \ (i_{20}, j_{20}).$$

<u>*Твердження*</u>: У випадку існування сідлової точки платіжної матриці говорять, що гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Вірно й <u>*зворотне твердження*</u>: Гра має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця гри має сідлову точку.

<u>**Теорема 1:**</u> У матричній грі нижня ціна гри α не перевершує верхньої ціни гри β, тобто $\alpha \le \beta$.

Доказ:

За визначенням: $\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \quad (\forall i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n})$;

$\beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij} \quad (\forall i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n})$.

Тоді: $\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j \qquad (\forall i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n})$, звідки $\alpha_i \le \beta_j$.

Оскільки отримана нерівність виконується для довільних α_i і β_j, то вона виконується й для α й β, тобто:

$$\max_i \alpha_i = \alpha \le \beta = \min_j \beta_j$$

Отже, доведене, що $\alpha \le \beta$.

Теорема доведена.

Приклад:

$$\begin{array}{rccl} & & & \min\limits_{j} a_{ij} \\ A = & \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{matrix}\rightarrow \\ \rightarrow\end{matrix} & \left.\begin{matrix}10\\20\end{matrix}\right\} \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = 20 \\ \max\limits_{i} a_{ij} & \begin{matrix}\downarrow & \quad\downarrow\end{matrix} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix}40 & 30\end{matrix}}_{\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = 30} & & \end{array}$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\alpha < \beta$, тобто дана матриця не має сідлової точки.

Якщо гравець А обирає свою чисту максимінну стратегію $i = 2$, то гравець В, вибравши свою мінімаксну $j = 2$, програє тільки 20.

У цьому випадку гравцеві А вигідно обрати стратегію $i = 1$, тобто відхилитися від своєї чистої максимінної стратегії й виграти 30.

Тоді гравцеві В буде вигідно обрати стратегію $j = 1$, тобто відхилитися від своєї чистої мінімаксної стратегії й програти 10.

У свою чергу гравець А повинен обрати свою 2-гу стратегію, щоб виграти 40, а гравець У відповість вибором 2-ї стратегії і т.д.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Завдання № 1

Кожен з двох гравців показує один або два пальці, і якщо загальне число показаних пальців парне, то гравець А отримує суму, що дорівнює цьому числу, а якщо непарне, то гравець В отримує суму, що дорівнює цьому числу. Побудуйте матрицю гри та знайдіть оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Завдання № 2

Гравці показують один одному один або два пальці. В платить А суму, що дорівнює добутку чисел показаних пальців. А платить В суму, що дорівнює загальному числу показаних пальців. Побудуйте матрицю гри, що показує чистий виграш гравця А. Знайдіть верхню та нижню ціни гри. Встановіть, чи існує в цій грі рішення в чистих стратегіях.

Завдання № 3

Бомбардувальники атакують об'єкт, що захищається винищувачами. При цьому бомбардувальники можуть кожного разу атакувати або "високо", або "низько". Низька атака робить бомбардування більш влучною. Точно також винищувачі можуть кожного разу шукати бомбардувальників або "високо", або "низько". Бомбардувальникам приписуються 6 очок, якщо вони відхиляться від винищувачів, і 0 очок, якщо винищувачі їх виявлять. Крім того, бомбардувальникам приписуються 3 додаткові очки за влучність, якщо вони летять низько. Побудуйте матрицю гри. Знайдіть верхню та нижню ціни гри. Встановіть, чи існує в цій грі рішення в чистих стратегіях.

Завдання № 4

Гравець А розшукує гравця В в одному з трьох міст *X, У* і *Z*. Відстань між *X* і *У* дорівнює 5 милям, відстань між *У* і *Z* дорівнює 5 милям і відстань між *Z* і *X* дорівнює 10 милям. Гравець В може попрямувати в одне і тільки одне з цих трьох міст. Якщо гравець А попрямує в те ж місто, що і гравець В, то А затримує В, в протилежному ж випадку В вислизає. Гравець А отримує 10 очок, якщо він затримує В, а гравець В - число очок, що дорівнює відстані його від гравця А, якщо В вислизає. Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання № 5

Кожен з двох гравців показує від одного до п'яти пальців, і загальне число показаних пальців ділиться на 3. Якщо сума ділиться на 3 без залишку, то ніяких виплат не робиться. Якщо залишок дорівнює 1, то гравець А виграє суму, рівну загальному числу показаних пальців, якщо залишок дорівнює 2, то гравець В виграє суму, рівну загальному числу показаних пальців. Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання № 6

Два гравці домовилися грати в наступну гру. Перший гравець показуватиме 1, 2 або 4 пальці. Одночасно другий гравець показуватиме 2, 3 або 5 пальців. Якщо загальне число показаних пальців дорівнює 3, 5 або 9, то перший гравець отримує таку ж суму. У протилежному ж випадку не робиться ніякої виплати. Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання № 7

У відомій дитячій грі кожен з двох гравців вимовляє слово "камінь", "ножиці" або "папір". Якщо один вимовляє "камінь", а інший "ножиці", то перший виграє монету. Аналогічно, "ножиці" виграють у "паперу", а "папір" у "каменю". Якщо обидва гравці називають один і той же предмет, то гра вважається зіграною в нічию. Випишіть матрицю цієї гри, знайдіть верхню та нижню ціни гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання № 8

У відомій дитячій грі кожен з двох гравців вимовляє слово "камінь", "ножиці" або "папір". Нехай коли "камінь" розбиває "ножиці", виплачується 1 цент, коли "ножиці" ріжуть "папір", виплачується 2 центи, і коли "папір" покриває "камінь", виплачується 3 центи. Якщо обидва гравці називають один і той же предмет, то гра вважається зіграною в нічию. Побудуйте матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання №9

Перший гравець записує ціле число від 1 до 20 на аркуші паперу. Не показуючи другому гравцеві написане число, перший говорить йому, що він написав. Перший гравець може сказати правду, а може і збрехати. Другий гравець повинен вгадати, сказав перший гравець правду або ні. Якщо перший гравець замічений у брехні, то він повинен заплатити другому гравцеві 10 гривен. Якщо він помилково звинувачений у брехні, то він отримує від другого гравця 5 гривен. Якщо перший гравець сказав правду і другий гравець вгадав це, то другий гравець отримує від першогогравця одну гривну. Якщо перший гравець сказав неправду, а другий гравець не вгадав, то він платить першому гравцеві 5 гривен. Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання №10

Мандрівник вирішив вчинити подорож з точки *А* в точку *Е*. Він зацікавлений досягти кінцевої точки найбільш коротким шляхом. Можливі напрями руху і відстані між ними представлені наступним чином:

маршрут,	відстань (у км)
А-Б	800
А-В	900
В-Г	400
В-Д	200
Б-Г	300
Б-Д	600
Г-Е	500
Д-Е	300.

Мандрівникові можуть бути поставлені перешкоди. Зокрема, може бути заблокована одна дорога, що йде з пункту *Б* і одна дорога, що йде з пункту *В*. Мандрівник нічого не знатиме про блокування доріг, поки він не потрапить у *Б* або у *В*. Куди варто йти мандрівникові: у *Б* або у *В*? Який з маршрутів з *Б* або *В* варто заблокувати?

Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання №11

Знайти верхню, нижню ціну гри, седловую точку (якщо існує):

а) $\begin{pmatrix} -25 & \frac{35}{N} & -\frac{N}{4} & 55 \\ 2*N & \frac{3*N}{4} & -6 & 45 \\ -1 & N & -N & -5*N \\ -25 & 13 & N*2 & 0 \\ 45 & \frac{N}{10} & -2 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -8 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

N - номер студента в журналі.

Завдання №12

Нехай задана наступна гра за участю двох гравців: перший гравець загадує будь-яке ціле число від 1 до 3. Другий гравець повинен відгадати це число. Якщо другий гравець вказує число правильно, він отримує виграш, що дорівнює значенню цього числа. Інакше цей виграш отримує перший гравець. Визначте число стратегій гравців і складіть платіжну матрицю гри. Визначте нижню і верхню ціну гри. Встановіть, чи існує в цій грі рішення в чистих стратегіях.

Завдання №13

Побудуйте платіжну матрицю для двохпальцьової гри Морра, яка полягає в наступному. У гру грають 2 гравці: кожен з них показує 1 або 2 пальці і одночасно називає число пальців, яке, на його думку, покаже супротивник (природно супротивник цього не бачить і не знає). Якщо один з гравців вгадує правильно, то він виграє суму,що дорівнює сумі пальців, показаних ним і його супротивником. Інакше - нічия і виграш дорівнює 0. Визначте нижню і верхню ціни гри. Встановіть, чи існує в цій грі рішення в чистих стратегіях.

Завдання №14

Побудуйте платіжну матрицю гри в якій два гравці незалежно один від одного називають по одному цілому числу з діапазону 1-5. Якщо сума названих чисел парна, то виграє другий гравець і перший платить йому суму, що дорівнює максимальному з чисел. Якщо сума названих чисел непарна, то виграє перший гравець і другий платить йому суму,що дорівнює максимальному з чисел. Визначте нижню і верхню ціни гри. Встановіть, чи існує в цій грі рішення в чистих стратегіях.

§3.2 Розв'язок матричної гри в змішаних стратегіях

Дослідження в матричних іграх починається зі знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha = \beta,$$

те знаходженням цієї сідлової точки закінчується дослідження гри.

Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha < \beta,$$

те гра має розв'язок у змішаних стратегіях.

Змішаною стратегією першого гравця називається вектор

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m),$$

де:

$$p_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Змішаною стратегією другого гравця називається вектор-стовпець

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

де:

$$q_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1.$$

Вектор p є вектором імовірності застосування $i-$ї стратегії першим гравцем. Аналогічно, **вектор** q є вектором імовірності застосування $j-$ї стратегії другим гравцем.

Частним випадком змішаної стратегії є чиста стратегія. Наприклад, застосуванню чистої стратегії A_3 буде відповідати вектору $p^{(3)} = (0,0,1,0,\dots,0)$, а застосуванню чистої стратегії B_2 буде відповідати вектору $q^{(2)} = (0,1,0,0,\dots,0)$. Тобто, якщо в змішаній стратегії яка-небудь i-я чиста стратегія застосовується з імовірністю 1, те всі інші чисті стратегії не застосовуються. І ця i-я чиста стратегія є частним випадком змішаної стратегії.

Оскільки гравці вибирають свої чисті стратегії випадково й незалежно друг від друга, то гра має випадковий характер. Тому випадкової стає й величина виграшу (програшу).

У цьому випадку **середня величина виграшу**, тобто математичне очікування, є функцією від двох змішаних стратегій, яку ми будемо визначати в такий спосіб:

$$f(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j, \tag{4}$$

де $f(p,q)$ – це **платіжна функція гри** з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$.

Стратегії $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$, $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ називаються **оптимальними**, якщо для довільних стратегій p $(\forall p = (p_1, p_2, \ldots, p_m))$ і q $(\forall q = (q_1, q_2, \ldots, q_n))$ виконується умова:

$$f(p,q^*) \le f(p^*,q^*) \le f(p^*,q). \tag{5}$$

Це означає, що використання в грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує:

- першому гравцеві виграш, не менший, чим при використанні їм будь-якої іншої стратегії p;
- другому гравцеві програш, не більший, ніж при використанні їм будь-якої іншої стратегії q.

Сукупність оптимальних стратегій і ціни гри становить **розв'язок гри**.
Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ціну гри:

$$V = f(p^*,q^*).$$

Тоді фактично розв'язком гри є набір (трійка):

$$(p^*,q^*,V).$$

Теорема 2 (фон Неймана): У змішаних стратегіях будь-яка кінцева матрична гра має розв'язок.

Нехай маємо матричну гру з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й деякі оптимальні змішані стратегії p^* й q^* гравців А и В, що забезпечують суму виграшу *V*.

Виникає питання: як перевірити, що набір (p^*,q^*,V) є розв'язком гри? Для цього необхідно перевірити справедливість нерівності (5) для довільних змішаних стратегій, у тому числі й для стратегій p^* і q^*.
Однак різних змішаних стратегій, серед яких і оптимальні стратегії – нескінченна множина. І в цьому випадку неможливо перевірити справедливість нерівності (5).

На це питання дозволяє відповісти наступна теорема.
Теорема 3: (Критерій оптимальності змішаних стратегій)
Для того, щоб змішані стратегії $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ й $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ були оптимальними для гравців А и В у грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й виграшем V, необхідно й достатнє виконання нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge V, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le V. \tag{7}$$

Доказ:

1. *Необхідність.*

Нехай p^*, q^* – оптимальні змішані стратегії. Доведемо, що для них виконуються співвідношення (6) і (7).

Тому що це оптимальні стратегії, то вони по визначенню задовольняють співвідношенню (5).

Використовуючи (4) і нерівність (5) ми можемо записати:

$$f\left(p, q^*\right) \le f\left(p^*, q^*\right) \le f\left(p^*, q\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \le V \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j . \tag{8}$$

Нерівність (8) одержуємо з нерівності (5) шляхом явного опису функцій $f\left(p, q^*\right)$, $f\left(p^*, q^*\right)$ і $f\left(p^*, q\right)$.

Розглянемо праву частину співвідношення (8).

Значення $V \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій q,

де $q = \left(q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n\right) = \left(0, \ldots, \overset{(j)}{1}, \ldots, 0\right)$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій, у тому числі й для чистої стратегії.

Тоді $V \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$, що свідчить про виконання нерівності (6).

Співвідношення (7) перевіряється аналогічним образом: шляхом підстановки в ліву частину нерівності (8) вектора стратегії q^*:

$$V \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* ,$$

у тому числі $p = \left(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m\right) = \left(0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0\right)$.

У такий спосіб ми довели співвідношення (7): $V \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*$.

2. *Достатність.*

Нехай виконуються умови (6) і (7). Покажемо, що p^*, q^* – оптимальні змішані стратегії.

З урахуванням співвідношення (6) перетворимо праву частину співвідношення (8), а з урахуванням співвідношення (7) – ліву частину співвідношення (8).

Нехай $q-$ довільний вектор.

Тоді: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \right) \underset{\text{на основании (6)}}{\geq} \sum_{j=1}^{n} q_j V = V \sum_{j=1}^{n} q_j = V$.

Аналогічно для лівої частини співвідношення (8).

Нехай $p-$ довільний вектор.

Тоді: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \right) \underset{\text{на основании (6)}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} p_i V = V \sum_{i=1}^{m} p_i = V$.

Що й було потрібно довести.

Зауваження до Теореми 3: На підставі теореми 3 можна зробити висновок: якщо гравець А ухвалює оптимальну змішану стратегію p^*, а гравець В – будь-яку чисту стратегію B_j, то виграш гравця А буде не менше ціни гри V.

Аналогічне твердження слушне й для другого гравця: якщо гравець В ухвалює оптимальну змішану стратегію q^*, а гравець А – будь-яку чисту стратегію A_i, то виграш гравця В буде не більше ціни гри V.

Чисті стратегії, що входять у його оптимальну змішану стратегію з імовірностями, відмінними від нуля, називаються **активними стратегіями**.

Для активних стратегій справедлива наступна теорема 4.

Теорема 4: Якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, те його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри не залежно від того, яку стратегію приймає інший гравець, якщо тільки той (другий гравець) не виходить за межі своїх активних стратегій.

Теорема 5: Оптимальні змішані стратегії p^* й q^* відповідно гравців А и В у матричній грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й із ціною V будуть оптимальними й у матричній грі з матрицею $(ba_{ij}+c)_{m\times n}$ й із ціною гри $V' = bV + c$, де $b > 0$.

На підставі теореми 5 платіжну матрицю, що має негативні числа можна перетворити в матрицю з додатними числами.

Приклад: Дана матриця гри $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо ціну гри для матриці A:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \min \\
A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix} \\
\hline
\max \ \ -1 \quad 1 &
\end{array}
$$

Тоді $\left.\begin{matrix} \alpha = \max\limits_{i} \alpha_i = -1 \\ \beta = \min\limits_{j} \beta_j = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad V = \alpha = \beta = -1.$

Нехай $c = 4, b = 1$. Щоб перейти від негативних елементів матриці A до додатних, додамо до всіх елементів матриці величину $з$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

і знайдемо ціну гри для матриці A':

$$
\begin{array}{c|c}
 & \min \\
A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \\
\hline
\max \ \ 3 \quad 5 &
\end{array}
$$

Тоді $\left.\begin{matrix} \alpha = \max\limits_{i} \alpha_i = 3 \\ \beta = \min\limits_{j} \beta_j = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad V' = \alpha = \beta = 3.$

Оскільки $V' = V + c$, то $V = V' - c = 3 - 4 = -1$.

Таким чином, умова теореми 5 виконана.

§3.3 Властивості розв'язків матричних ігор

1) Домінування чистих стратегій

Застосування принципу домінування дозволяє іноді зменшити кількість стратегій гравців, тобто зменшити розмірність матриці *A*. Це випливає з того факту, що домінуючі стратегії можуть бути виключені, при цьому ціна гри не змінюється.

Рядок з номером *i* домінує рядок з номером *k*, якщо виконується умова:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad \text{для } j = \overline{1,n}.$$

Причому існує хоча б один стовпець із номером m, для якого виконується умова: $a_{im} > a_{km}$.

Домінуючий рядок можна викреслити з матриці, тому що цією стратегією перший гравець ніколи не скористується, оскільки його виграш при виборі стратегії i завжди буде не менше, ніж при виборі стратегії k.

Стовпець *j* домінує стовпець із номером *k*, якщо виконується умова:

$$a_{ij} \le a_{ik} \quad \text{для } i = \overline{1,m}.$$

Причому існує хоча б один рядок з номером p, для якої виконується умова:

$$a_{pj} < a_{pk}.$$

Домінуючий стовпець також може бути викреслять із матриці, тому що другий гравець не буде вибирати цю стратегію, оскільки його програш при такому виборі стратегії j буде не менше, чим якби він побрав домінуючу стратегію k.

<u>Приклад:</u> Спростити матрицю гри A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Тут рядок A_1 домінує рядок A_2. Отже, викреслюємо другий рядок A_2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Тоді матриця A прийме вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці стовпець B_2 домінує стовпці B_3, B_4, B_5. Отже, викреслюємо третій, четвертий і п'ятий стовпці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця A приймає остаточний вид, який більше вже не можна спростити:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Теорема 6:</u> Якщо елементи одному рядка (стовпця) не усе менше (більше) або дорівнюють відповідним елементам іншим рядків, але усе менше (більше) або рівні деяким опуклим лінійним комбінаціям відповідних елементів інших рядків (стовпців), те цю стратегію можна виключити, замінивши її змішаною стратегією з відповідними частотами використання чистих стратегій.

<u>Приклад:</u> Спростити матрицю гри A:

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для перших двох чистих стратегій A_1 і A_2 гравця А поберемо частоти їх застосування (імовірності) рівними 0,25 і 0,75. Третя стратегія гравця А домінується лінійною опуклою комбінацією стратегій A_1 і A_2, узятих із частотами 0,25 і 0,75 відповідно, тобто змішаною стратегією:

$$\begin{array}{c} 24\cdot 0{,}25+0\cdot 0{,}75=6>4 \\ 0\cdot 0{,}25+8\cdot 0{,}75=6>5 \end{array}.$$

Тому стратегію A_3 можна виключити, використовуючи замість неї зазначену змішану стратегію.

Аналогічно, якщо кожний елемент деякого стовпця більше або рівний деякої опуклої лінійної комбінації відповідних елементів деяких інших стовпців, те цей стовпець можна виключити з розгляду.

<u>Приклад:</u> Для матриці

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

третя стратегія B_3 гравця В домінується змішаною стратегією зі стратегій B_1 і B_2, узятих із частотами 0,5 і 0,5:

$$\begin{array}{c} 10\cdot 0{,}5+0\cdot 0{,}5=5<6 \\ 0\cdot 0{,}5+10\cdot 0{,}5=5<7 \end{array}.$$

Таким чином, вихідна матриця гри еквівалентна матриці наступного виду:

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Як видно, можливості домінування змішаними стратегіями на відміну від чистих значно є менш прозорими (потрібно належним чином підібрати частоти застосування чистих стратегій), але такі можливості є й ними корисно вміти користуватися.

2) Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею (2×2)

Розглянемо, що часто зустрічаються в теорії ігор або, що зводяться до них у результаті застосування властивості домінування матрична ігри з (2(2)-матрицею.

Будемо говорити, що гра з (2×2)-матрицею **строго детермінована**, якщо ця матриця містить елемент, скажемо V, який одночасно є мінімальним елементом в утримуючому його рядку й максимальним елементом в утримуючому його стовпці.

Тоді оптимальні стратегії гравців полягають у наступному:

- для гравця А: «вибрати рядок, що містить V»;
- для гравця В: «вибрати стовпець, що містить V».

Ціною гри й буде число V.

Матрична гра називається **необразливої**, якщо її ціна дорівнює нулю ($V = 0$).

Властивість: Матрична гра з матрицею *A*, у якій в одному рядку або в одному стовпці стоять однакові елементи, є **строго детермінованою**.

Деякі матричні ігри не є строго детермінованими, тобто відповідна їм матриця не містить елемента, який був би одночасно мінімальним у своєму рядку й максимальним у своєму стовпці. Не строго детерміновані матричні ігри з (2(2)-матрицею можна охарактеризувати в такий спосіб.

Теорема 7: Гра з матрицею

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

не є строго детермінованою тоді й тільки тоді, коли виконано одне з наступних двох умов:

а) $a < b, a < c$ і $d < c$;

б) $a > b, a > c$ і $d > c$.

Доказ:

Якщо виконується яка-небудь із умов (а) або (б), то, як неважко перевірити, жоден елемент матриці не може бути одночасно мінімальним у тому рядку, якому він належить, і максимальним у тому стовпці, якому він належить; отже, гра не буде строго детермінованою.

Щоб довести другу частину теореми, згадаємо, що гра є строго детермінованою, якщо у відповідній їй матриці рівні два елементи якого-небудь рядка або стовпця. Отже, можна припустити, що ніякі два елементи одніго й того ж рядка або того самого стовпця не рівні.

Припустимо тепер, що $a < b$. Тоді $a < b$, інакше елемент *a* буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Крім того, $c > d$, інакше, елемент *із* буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Нарешті, $d < b$, інакше елемент d буде мінімальним елементом рядка й максимальним елементом стовпця. Отже, припущення $a < b$ приводить до відзначеного вище випадку (а).

Аналогічне припущення $a > b$ приводить до випадку (б).

Теорема доведена.

Приклад: Розглянемо карткову гру з матрицею гри виду

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ця гра не є строго детермінованою.

Приклад: Нехай матриця гри має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ця гра також не є строго детермінованою.

Розглянемо не строго детерміновану гру з матрицею

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для не строго детермінованої гри з матрицею G число V називається **ціною** цієї **гри**, а вектори $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ й $q^* = \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix}$ – **оптимальні стратегії** гравців А и В, якщо мають місце наступні нерівності[1]:

$$p^* G = (p_1^*, p_2^*) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ge (v, v); \tag{9}$$

$$G q^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Нехай гравець А вибирає змішану стратегію $p = (p_1, p_2)$ й (незалежно) гравець У вибирає змішану стратегію $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Тоді гравець А виграє суму a з імовірністю $p_1 q_1$, суму b з імовірністю $p_1 q_2$, суму з c імовірністю $p_2 q_1$ й суму d з імовірністю $p_2 q_1$.

Отже, середнє значення його виграшу має величину

$$a p_1 q_1 + b p_1 q_2 + c p_2 q_1 + d p_2 q_2 = pGq.$$

Аналогічно перебуває й середнє значення виграшу гравця В. Воно рівно цьому ж вираженню, але зі зворотним знаком.

Щоб виправдати дане вище визначення, ми повинні показати, що якщо для матриці G існують V, p^*, q^* із зазначеними властивостями, то гравець А може зробити середнє значення свого виграшу рівним V або більшим V, а гравець У може зробити це середнє значення рівним V або меншим V. Нехай q – будь-яка стратегія для В. Помноживши (9) праворуч на q, ми одержимо співвідношення $p^* G q \ge (V, V) q = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця В гравець А може забезпечити собі виграш, середнє значення якого щонайменше рівно V.

Аналогічно нехай p буде будь-який вектор стратегії для гравця А. Помноживши (10) ліворуч на p, ми одержимо співвідношення $pGq^* \le p \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця А гравець У може зробити середнє значення виграшу А рівним якнайбільше V. Саме в цьому змісті стратегії p^* і q^* є оптимальними. Ми бачимо далі, що якщо обидва гравця відіграють оптимальним образом, то для гравця А середнє значення виграшу рівно V, а для гравця В середнє значення виграшу рівно $-V$.

Тепер ми повинні розв'язати питання про існування стратегій p^* і q^* в не строго детермінованій грі. Тоді як при більш складних іграх знаходження оптимальних стратегій виявляється важкою задачею, розв'язок цього питання у випадку не строго детермінованої гри з (2(2)-матрицею може бути отриманий за наступними формулами:

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{11}$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{12}$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{13}$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{14}$$

$$v = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}. \tag{15}$$

Легко перевірити, що знайдені по формулах (11)-(15) вектори p,q й число V задовольняють умовам (9)-(10). У дійсності нерівності (9) і (10) у цьому простому випадку переходять у рівності. Цей факт не має місця в загальному випадку не строго детермінованих ігор, матриця яких має більше число рядків або стовпців.

Знаменник кожної з формул (11)-(15) являє собою різницю між сумами елементів по двом діагоналям.

Оскільки для не строго детермінованої гри елементи по одній діагоналі повинні перевершувати елементи по іншій діагоналі, то знаменник не може звернутися в нуль. У чисельнику дробу для V стоїть визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

<u>**Приклад:**</u> Нехай задана гра з матрицею 2×2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо нижню й верхню ціни гри:

$$\begin{array}{lccl} & & \min\limits_{j} a_{ij} & \\ A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\to \\ \to\end{array} & \left.\begin{array}{r} -2 \\ -3 \end{array}\right\} & \max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}=-2 \\ \max\limits_{i} a_{ij} \downarrow \quad \downarrow & & & \\ \quad \underbrace{5 \quad 4} & & & \\ \min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}=4 & & & \end{array}$$

Отже, $\alpha=-2$ і $\beta=4$. Тому що $\alpha<\beta$, те в матриці A немає сідлових точок. Отже розв'язок гри слід шукати в змішаних стратегіях.

Кожний із гравців А.і В має єдину оптимальну змішану стратегію відповідно $p^*=\left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^*=\left(q_1^*, q_2^*\right)$, які визначаються формулами (11)-(14):

$$p_1^*=\frac{d-c}{(a+d)-(b+c)}=\frac{-3-5}{(-2-3)-(4+5)}=\frac{4}{7},$$

$$p_2^*=\frac{a-b}{(a+d)-(b+c)}=\frac{-2-4}{(-2-3)-(4+5)}=\frac{3}{7}=1-p_1^*,$$

$$q_1^*=\frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}=\frac{-3-4}{(-2-3)-(4+5)}=\frac{1}{2},$$

$$q_2^*=\frac{a-c}{(a+d)-(b+c)}=\frac{-2-5}{(-2-3)-(4+5)}=\frac{1}{2}=1-q_1^*.$$

Таким чином, оптимальною змішаною стратегією гравця А є стратегія $p^*=\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$, а оптимальною змішаною стратегією гравця В є стратегія $q^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Ціну гри підрахуємо по формулі (15):

$$v=\frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}=\frac{(-2)(-3)-4\cdot 5}{(-2-3)-(4+5)}=1.$$

Тоді розв'язок гри – набір $\left(p^*,q^*,V\right)$, тобто $\left(\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),1\right)$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

Завдання №1

Спростити матрицю гри та знайти рішення гри (номер варіанту відповідає номеру фамілії студента в журналі академічної групи).

1) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 10 & 11 \\ 6 & 6 & 4 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 10 & 11 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 8 & 11 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 9 & 10 & 12 & 13 \\ 7 & 10 & 5 & 6 & 8 \\ 8 & 8 & 6 & 6 & 12 \\ 7 & 9 & 10 & 12 & 13 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

11) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 7 & 10 & 5 & 11 \\ 7 & 9 & 8 & 9 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 5 & 11 \\ 7 & 9 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$

13) $\begin{vmatrix} 9 & 12 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 13 & 14 \\ 9 & 9 & 7 & 7 & 13 \\ 8 & 11 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 13 & 14 \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 8 & 10 & 11 & 7 & 11 \\ 9 & 11 & 13 & 7 & 12 \\ 11 & 9 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 9 & 10 & 11 & 10 \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 6 & 8 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 8 & 6 & 9 & 4 & 10 \\ 7 & 5 & 8 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

16) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Завдання №2

Спростити матрицю гри та знайти рішення гри,яка задана матрицею виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & N+1 & N+2 \\ 4 & N/100 & N^2 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & N \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

де N - номер студента в журналі академічної групи).

Завдання № 3

Визначити строго детерміновані і безобідні ігри. Знайти оптимальні стратегії і ціну гри.

1). $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. 3). $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. 5). $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. 7). $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 9). $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2). $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 4). $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 6). $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 8). $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$. 10). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 2: Методи розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях

1. Графоаналітичний метод розв'язання ігр з платіжною матрицею розмірністю $2\times n$ и $m\times 2$.
2. Зведенння матричної гри до задачі лінійного програмування.
3. Чисельний метод розв'язання ігр – метод Брауна-Робінсон.

§1. Графоаналітичний метод розв'язання ігор 2×*n* и *m*×2

Графоаналітичний метод розв'язання задач теорії ігор застосований тільки до ігор, в яких хочаб один гравець має тільки 2 стратегії, тобто до ігор з матрицею гри $2\times n$ або $m\times 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}_{2\times n}; \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}_{m\times 2}.$$

Передбачається, що цей метод застосовується у випадках відсутності у грі седловой точки. Розглянемо гру виду $(2\times n)$

	q_1	q_2	$\cdots$	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
$p_2 = 1 - p_1$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}

Оскільки гравець *A* має тільки 2 стратегії, то, отже, $p_2 = 1 - p_1$ (це витікає з властивості, що $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$). При цьому $p_1 \ge 0, p_2 \ge 0$.

Очікувані виграші гравця *A*, що відповідають чистим стратегіям гравця *B*, представляються таблиці 1

Таблица 1

Чисті стратегії гравця *B*	Очікувані виграші гравця *A*
1	$p_1 a_{11} + (1 - p_1) a_{21} = (a_{11} - a_{21}) p_1 + a_{21}$
2	$p_1 a_{12} + (1 - p_1) a_{22} = (a_{12} - a_{22}) p_1 + a_{22}$
…	………
n	$p_1 a_{1n} + (1 - p_1) a_{2n} = (a_{1n} - a_{2n}) p_1 + a_{2n}$

Очевидно з таблиці 1, що очікуваний виграш гравця *A* лінійно залежить від p_1.

Відповідно до критерію минимакса для ігор в змішаних стратегіях гравець A має обирати p_1 таким чином, щоб максимізувати свій мінімальний виграш.

Аналогічно для гравця B: гравець B має обирати свою змішану стратегію q_1 таким чином, щоб мінімізувати свій максимальний програш.

Ця задача може бути розв'язана графічно побудовою прямих ліній, що відповідають лінійним функціям від змінної p_1 (для гравця A) або від змінної q_1 (для гравця B).

Розглянемо процедуру застосування графічного методу розв'язання ігор на конкретному прикладі.

<u>Приклад:</u> Розглянемо гру, задану платіжною матрицею.

$$\text{игрок B:}$$

$$\text{игрок A:}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На площині *pOy* введемо систему координат і на осі *Op* відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця A $(p_1, 1-p_1)$. Зокрема, точці $A_1(0,0)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_2(1,0)$ – стратегія A_2 і т.д. (рисунок 1).

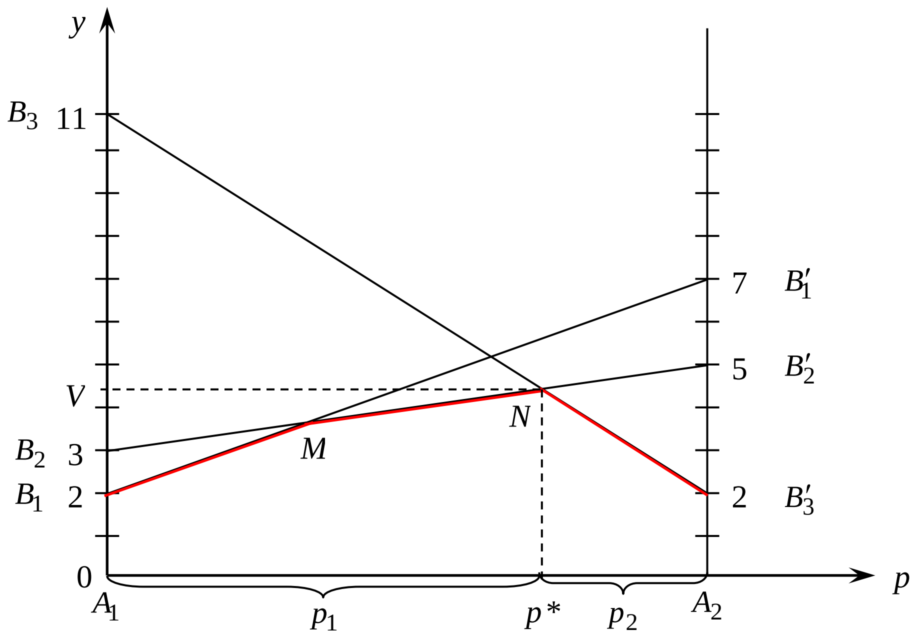

Рисунок 1

В точках A_1 и A_2 встановимо перпендикуляр і на отриманих прямих відкладатимемо виграші гравців.

На першому перпендикулярі (в даному випадку він співпадає з віссю *0y*) відкладемо виграш гравця *A* при стратегії A_1, а на другому - при стратегії A_2. Якщо гравець *A* застосує стратегію A_1, то виграє при стратегії B_1 гравця *B* – 2, при стратегії B_2 – 3, а при стратегії B_3 – 11. Числам 2, 3, 11 на осі *0x* відповідають точки B_1, B_2 та B_3.

Якщо ж гравець *A* застосує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 дорівнює 7, при B_2 – 5, а при B_3 – 2. Ці числа визначають точки B_1', B_2', B_3' ,, на перпендикулярі, відновленому в точці A_2. Сполучаючи між собою точки B_1 та B_1', B_2 та B_2', B_3 та B_3' отримаємо три прямі, відстань до яких від осі *0p* визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій.

Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізку B_1B_1' до осі *0p* визначає середній виграш V_1 при будь-якому поєднанні стратегій A_1A_2 (з частотами p_1 і $1-p_1$) і стратегією B_1 гравця *B*. Ця відстань дорівнює $2p_1+7(1-p_1)=V_1$. (Згадайте планіметрію і розгляньте трапецію $A_1B_1B_1'A_2$).

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній B_1MNB_3' визначають мінімальний виграш гравця *A* при застосуванні їм будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці *N* (тобто точка *N* визначає максимум серед мінімумів). Отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $p^*=(p_1,1-p_1)$, а її ордината дорівнює ціні гри V.

Координати точки *N* знаходимо як точку перетину прямих B_2B_2' і B_3B_3'. Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3p_1+5(1-p_1)=V \\ 11p_1+2(1-p_1)=V \end{cases} \Rightarrow p_1=\frac{3}{11}, \quad p_2=1-p_1=\frac{8}{11}, \quad V=\frac{49}{11}.$$

Відповідно $p^*=\left(\frac{3}{11},\frac{8}{11}\right)$, при ціні гри $V=\frac{49}{11}$.

Оскільки при виборі оптимальної стратегії ми не використали B_1, то таким чином ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, зображуватимемо графічно стратегії гравця В (див. рисунок 2). На площині *qOy* введемо систему координат і на осі *Oq* відкладемо відрізок одиничної довжини B_2,B_3, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця В $(q_1,1-q_1)$. Зокрема, точці $B_2(0,0)$ відповідає стратегія B_2, точці $B_3(1,0)$ - стратегія B_3.

Далі діємо аналогічно випадку, розглянутому для гравця *A* з урахуванням того факту, що гравець *B* прагне мінімізувати свій максимальний програш.

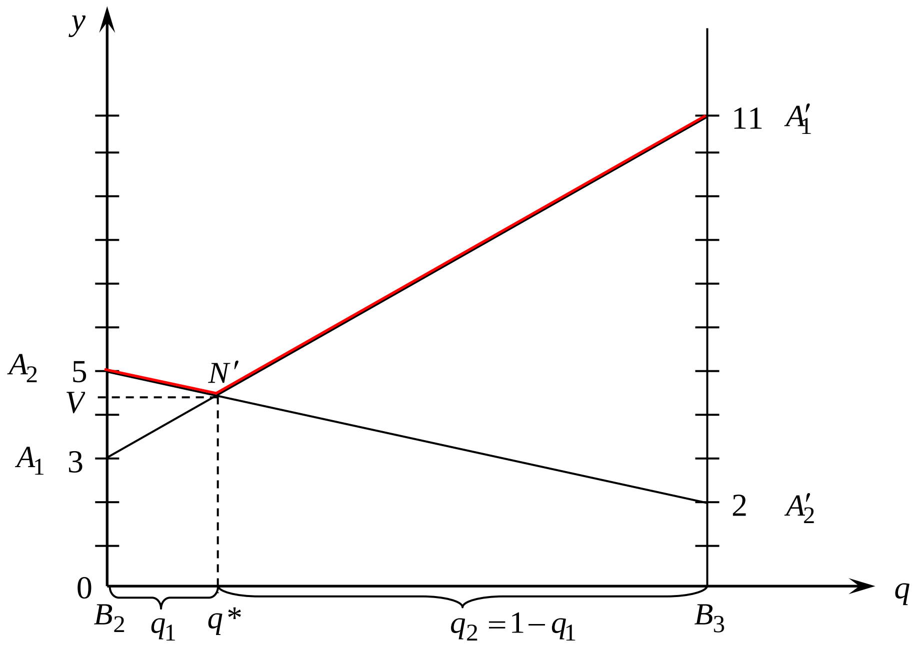

Рисунок 2

Оптимальні стратегії для гравця B можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} 3q_1 + 11(1-q_1) = V \\ 5q_1 + 2(1-q_1) = V \end{cases} \Rightarrow q_1 = \frac{9}{11}, \quad q_2 = 1 - q_1 = \frac{2}{11}, \quad V = \frac{49}{11}$$

та, відповідно, $q^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$. З рисунку видно, що стратегія B_1 не увійде до оптимальної стратегії.

Отже, розв'язок гри має вигляд:

- для гравця А: $\left(\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$;
- для гравця В: $\left(\left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$,

і, отже, загальний розв'язок гри запишеться у виді

- $\left(\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$.

<u>Приклад</u>: Розглянемо гру, задану платіжною матрицею.

$$\begin{array}{cc} & \text{игрок B:} \\ & \begin{array}{ccc} & B_1 & B_2 \\ A_1 & & \\ A_2 & & \\ A_3 & & \\ A_4 & & \end{array} \end{array}$$

$$\text{игрок A:} \quad \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 6 & 5 \\ A_2 & 4 & 6 \\ A_3 & 2 & 7 \\ A_4 & 1 & 8 \end{array}$$

На площині qOy введемо систему координат і на осі Oq відкладемо відрізок одиничної довжини B_1, B_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця B $(q_1, 1-q_1)$. Зокрема, точці $B_1(0,0)$ відповідає стратегія B_1, точці $B_2(1,0)$- стратегія B_2 (див. рисунок 3).

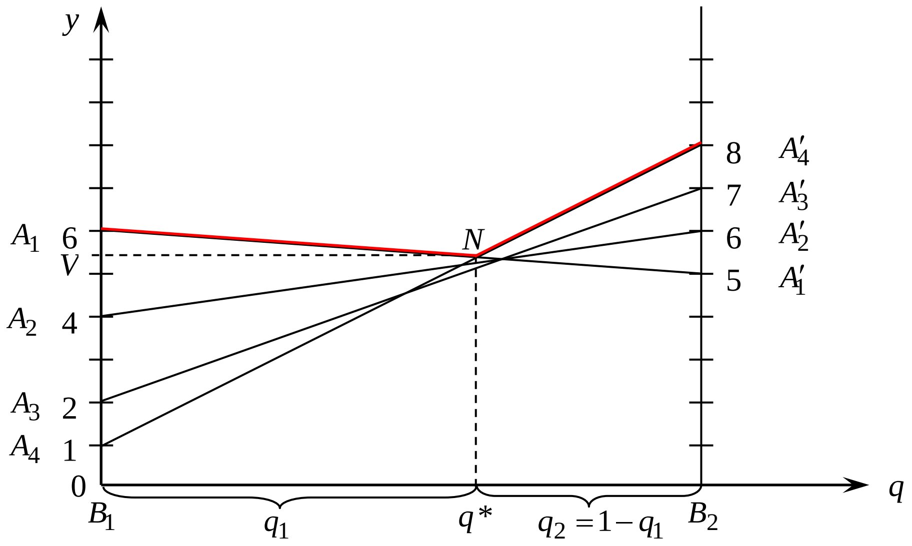

Рисунок 3

У точках B_1 і B_2 встановимо перпендикуляр і на отриманих прямих відкладатимемо виграш гравців.

На першому перпендикулярі (в даному випадку він співпадає з віссю *0y*) відкладемо виграш гравця *B* при стратегії B_1, а на другому - при стратегії B_2 . Якщо гравець *B* застосує стратегію B_1, то виграє при стратегії A_1 гравця *A* - 6, при стратегії A_2 - 4, при стратегії A_3 - 2, а при стратегії A_4 - 1. Числам 6, 4, 2, 1 на осі *0y* відповідають точки A_1, A_2, A_3 і A_4 .

Якщо ж гравець *B* застосує стратегію B_2, то його виграш при стратегії A_1 дорівнює 5, при A_2- 6, при A_3 - 7, а при A_4- 8. Ці числа визначають точки A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 на перпендикулярі, відновленому в точці B_2.

Сполучаючи між собою точки A_1 та A_1', A_2 та A_2', A_3 та A_3', A_4 та A_4', отримаємо чотири прямі, відстань до яких від осі 0q визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій.

Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізку A_1A_1' до осі $0q$ визначає середній виграш V_1 при будь-якому поєднанні стратегій B_1B_2 (з частотами q_1 і $1-q_1$) і стратегією г A_1 гравця *A*. Ця відстань дорівнює $6q_1+5(1-q_1)=V_1$. (Згадайте планіметрію і розгляньте трапецію $B_1A_1A_1'B_2$).

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній A_1NA_4' визначають максимальний програш гравця *B* при застосуванні їм будь-яких змішаних стратегій. Ця максимальна величина є мінімальною в точці *N* (тобто точка*N* визначає мінімум серед максимумів). Отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $q^*=(q_1,1-q_1)$, а її ордината дорівнює ціні гри V.

Координати точки *N* знаходимо як точку перетину прямих A_1A_1' і A_4A_4'. Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 6q_1+5(1-q_1)=V \\ q_1+8(1-q_1)=V \end{cases} \Rightarrow q_1=\frac{3}{8}, \quad q_2=1-q_1=\frac{5}{8}, \quad V=\frac{43}{8}.$$

Отже $q^*=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$, при ціні гри $V=\frac{43}{8}$.

Оскільки при виборі оптимальної стратегії ми не використали A_2 і A_3, то таким чином ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, зображуватимемо графічно стратегії гравця *A* (див. рисунок 4). На площині *pOy* введемо систему координат і на осі *Op* відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_4, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця *A* $(p_1,1-p_1)$. Зокрема, точці $A_1(0,0)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_4(1,0)$- стратегія A_4. Далі діємо аналогічно випадку, розглянутому для гравця *B* з урахуванням того факту, що гравець *A* прагне максимізувати свій мінімальний виграш.

Оптимальні стратегії для гравця *A* можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} 6p_1+1(1-p_1)=V \\ 5p_1+8(1-p_1)=V \end{cases} \Rightarrow p_1=\frac{7}{8}, \quad p_2=1-p_1=\frac{1}{8}, \quad V=\frac{43}{8}$$

і, отже, $p^*=\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right)$.

З рисунка 4 видно, що стратегії A_2 і A_3 не увійдуть до оптимальної стратегії.

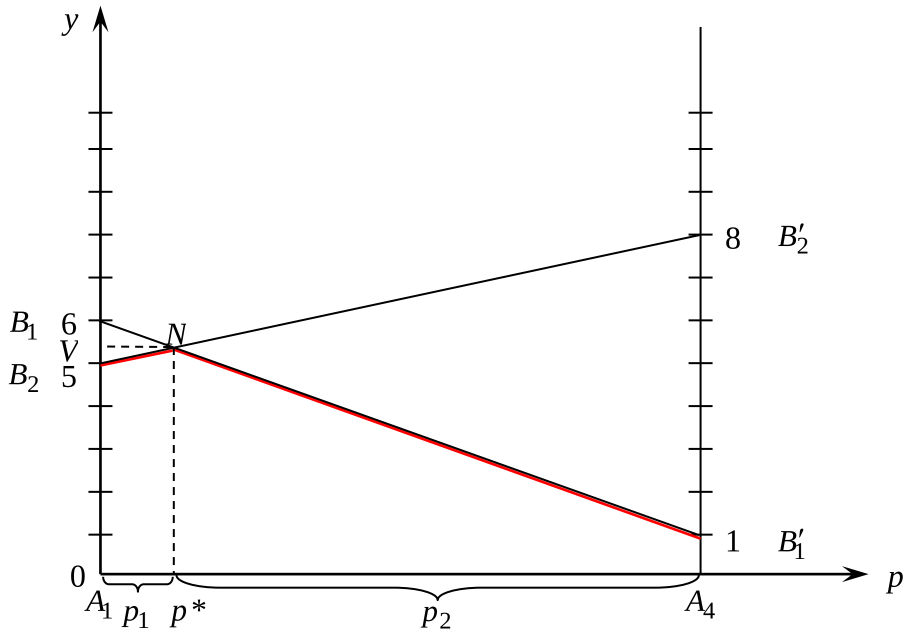

Рисунок 4

Отже, рішення гри має вигляд:

- для гравця ***A**:* $\left(\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right),\frac{43}{8}\right)$;
- для гравця ***B***: $\left(\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),\frac{43}{8}\right)$,

отже, загальний розв'язок гри запишеться у виді

$$\left(p^*,q^*,V\right)=\left(\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),\frac{43}{8}\right).$$

Відповідь: Розв'язок гри з матрицею A:

$$\left(\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),\frac{43}{8}\right).$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

Завдання. Розв‘язати матричні ігри з платіжною матрицею A (а), б), в), г)) графоаналітичним методом:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}$ (*k*-номер студента у журналі);

б). $A=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ (*k*=*n+1*, *n*- номер студента у журналі);

в). $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & k & 3 \end{pmatrix}$(*k*=*n+1*, *n*- номер студента у журналі);

г). $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -k & 2 & 4 \end{pmatrix}$(k - номер студента у журналі);

д) $\begin{pmatrix} 3 & -N & 1.5*N & N & 2*N/3 \\ -2*N & 2.5*N & -N & 8 & 2*N \end{pmatrix}$ (N - номер студента у журналі);

е) $\begin{pmatrix} 4 & N \\ 2 & 6 \\ N-1 & 2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$(N - номер студента у журналі).

2. Зведенння матричної гри до задачі лінійного програмування.

Нехай є матрична гра з матрицею $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

Позначимо:

$$p^*=(p_1,\dots,p_i,\dots,p_m)-$$ оптимальна змішана стратегія гравця А;

$$q^*=(q_1,\dots,q_j,\dots,q_n)-$$ оптимальна змішана стратегія гравця В.

Стратегія p^* гравця А гарантує йому виграш (за теоремою 3), не менший ціни гри V, незалежно від вибору стратегії B_j гравцем В.

Це можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge V, \quad j=\overline{1,n}, \tag{1}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \quad p_i \ge 0. \tag{2}$$

Аналогічно, стратегія q^* гравця В гарантує йому програш, не більший ціни гри V, незалежно від вибору стратегії A_i гравцем А, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le V, \quad i=\overline{1,m}, \tag{3}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1, \quad q_j \ge 0. \tag{4}$$

Оскільки елементи платіжної матриці відповідно до теореми 5 можна завжди зробити позитивними, то і ціна гри $V > 0$.

Перетворимо системи (1) і (3), розділивши обидві частини кожного нерівності на додатне число V:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij} p_i}{V} \ge 1, \quad j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} q_j}{V} \le 1, \quad i=\overline{1,m},$$

Введемо нові позначення

$$\begin{cases} \dfrac{p_i}{V} = x_i, \quad i=\overline{1,m}, \\ \dfrac{q_j}{V} = y_j, \quad j=\overline{1,n}, \end{cases}$$

при підстановці яких в (1)-(4) отримуємо 2 системи:

а) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad j=\overline{1,n}, & (5) \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{1}{V}, \quad x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m}. & (6) \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \quad i=\overline{1,m}, & (7) \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{V}, \quad y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}. & (8) \end{cases}$$

У разі а) перший гравець прагне знайти такі значення x_i та, отже, p_i, щоб ціна гри V була максимальною. Тому рішення першої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень p_i $(i = \overline{1, m})$, при яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min .$$

Аналогічно, у випадку б) другий гравець прагне знайти такі значення y_j та, отже, q_j, щоб ціна гри V була найменшою. Тому рішення другої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень q_j , при яких

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to \max .$$

Отже, фактично в (6) і (8) ми отримуємо цільові функції відповідно для систем (5) і (7):

$$\text{а)} \quad f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V} \to \min , \tag{9}$$

$$\text{б)} \quad f(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{V} \to \max . \tag{10}$$

Таким чином, ми отримали двоїсті одна одній задачі лінійного програмування:

$$\text{а)} \quad \begin{aligned} & f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V} \to \min , \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \qquad j = \overline{1, n}, \\ & x_i \ge 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{б)} \quad \begin{aligned} & f(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{V} \to \max . \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \qquad i = \overline{1, m}, \\ & y_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{12}$$

Розв'язавши пару взаємо двоїстих симетричних задач (11) та (12), знайдемо

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}; \qquad p_i = V \cdot x_i^* \ \left(i = \overline{1, m}\right), \quad q_j = V \cdot y_j^* \ \left(j = \overline{1, n}\right),$$

за допомогою яких визначаємо рішення гри

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m\right), \left(q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n\right), V\right).$$

Приклад зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

Знайти рішення гри, яка визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Перевіримо гру на наявність сідлової точки:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \max_i \alpha_i = 1$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \qquad 3 \quad 4 \quad 3$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \min_j \beta_j = 3$$

Отже, $\alpha \le V \le \beta$, тобто $1 \le V \le 3$.

Оскільки $\alpha \ne \beta$, то рішення гри потрібно шукати в змішаних стратегіях.

Складемо задачі лінійного програмування (ЗЛП) для кожного гравця:

для гравця А:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 4x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

для гравця В:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1 \\ y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Приведемо їх до канонічного вигляду:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min \qquad f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_5 = 1 \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

При приведенні до канонічної формі з'являються додаткові змінні x_3, x_4, x_5, y_4, y_5. Для встановлення взаємозв'язків між ними подумки впишемо їх у вихідну матрицю:

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} y_4 & 0 \\ 0 & y_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 \end{matrix} & \end{array}$$

Встановлюючи взаємозв'язки між змінними прямої та двоїстої до неї задачі, отримаємо наступні:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}$$

Знаючи взаємозв'язки між змінними, достатньо розв'язати одну з задач. Наприклад, розв'язуємо задачу з y-ками.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося симплекс-методом.

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_4	0	1	3	1	2	1	0
y_5	0	1	1	4	3	0	1
ЦФ		0	-1	-1	-1	0	0

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_1	1	1/3	1	1/3	2/3	1/3	0
y_5	0	2/3	0	11/3	7/3	-1/3	1
ЦФ		1/3	0	-2/3	-1/3	1/3	0

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_1	1	3/11	1	0	5/11	4/11	-1/11
y_2	1	2/11	0	1	7/11	-1/11	3/11

ЦФ	5/11	0	0	1/11	3/11	2/11

Таким чином, отримали оптимальний план:

$$y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*\right) = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0, 0\right); \qquad f\left(y^*\right) = \frac{5}{11}.$$

Відповідно до встановлених зв'язків між додатковими змінними, маємо:

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right) = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0, \frac{1}{11}\right)$$

$$f\left(x^*\right) = \frac{5}{11}$$

Тоді знаходимо:

$$V = \frac{1}{f\left(x^*\right)} = \frac{1}{f\left(y^*\right)} = \frac{11}{5};$$

$$p_i = V \cdot x_i^* \quad \left(i = \overline{1,2}\right), \qquad q_j = V \cdot y_j^* \quad \left(j = \overline{1,3}\right),$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{11}{5} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{5} \\ p_2 = \frac{11}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \frac{11}{5} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{5} \\ q_2 = \frac{11}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{5} \\ q_3 = \frac{11}{5} \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Тоді: $p^* = (p_1, p_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $q^* = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$.

Відповідь: Рішення гри з матрицею А: $\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right), \frac{11}{5}\right)$

<u>Приклад:</u> Знайти рішення гри, яка визначається матрицею.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Щоб не мати справу з матрицею, в якій є від'ємні елементи, скористаємося теоремою 5: додамо до кожного елементу матриці число 5 та отримаємо матрицю виду

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ціна гри отриманої матриці відповідно до теореми 5 збільшиться на 5 одиниць (тобто $V' = V + 5$), а оптимальні змішані стратегії p^* та q^* залишаться незмінними.

Перевіримо гру на наявність сідлової точки:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \max_i \alpha_i = 2$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \qquad 9 \quad 9 \quad 11$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \min_j \beta_j = 9$$

Отже, $\alpha \le V \le \beta$, тобто $2 \le V \le 9$.

Оскільки $\alpha \ne \beta$, то рішення гри потрібно шукати в змішаних стратегіях.

Складемо задачі лінійного програмування (ЗЛП) для кожного гравця:

для гравця А:

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \ge 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \ge 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0, \ \ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

для гравця В:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \le 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \le 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0, \ \ y_2 \ge 0, \ \ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Приводимо їх до канонічного вигляду:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_5 = 1 \\ 9x_1 + 11x_3 - x_6 = 1 \\ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,6} \end{cases}$$

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 + y_4 = 1 \\ 2y_1 + 9y_2 + y_5 = 1 \\ 9y_1 + 11y_3 + y_6 = 1 \\ y_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

При приведенні до канонічної формі з'являються додаткові змінні $x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$. Для встановлення взаємозв'язків між ними подумки впишемо їх у вихідну матрицю:

$$
\begin{array}{cccc}
A = \left(\begin{array}{ccc} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{array}\right) & \begin{array}{ccc} y_4 & 0 & 0 \\ 0 & y_5 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 \end{array} \\
\begin{array}{ccc} x_4 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_6 \end{array} &
\end{array}
$$

Встановлюючи взаємозв'язки між змінними прямої та двоїстої до неї задачі, отримаємо наступні:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3
\end{array}
$$

Знаючи взаємозв'язки між змінними, достатньо розв'язати одну з задач. Наприклад, розв'язуємо задачу з y-ками.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося симплекс-методом.

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_4	0	1	7	2	9	1	0	0
y_5	0	1	2	9	0	0	1	0
y_6	0	1	9	0	11	0	0	1
ЦФ		0	-1	-1	-1	0	0	0

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_4	0	2/9	0	2	4/9	1	0	-7/9
y_5	0	7/9	0	9	-22/9	0	1	-2/9
y_1	1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9
ЦФ		1/9	0	-1	2/9	0	0	1/9

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	-59/81
y_4	0	4/81	0	0	80/81	1	-2/9	-2/81
y_2	1	7/81	0	1	-22/81	0	1/9	1/9

y_1	1	1/9	1	0	11/9	0	0	1
ЦФ		16/81	0	0	-4/81	0	1/9	7/81

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_3	1	1/20	0	0	1	81/80	-9/40	-59/80
y_2	1	1/10	0	1	0	11/40	1/20	-9/40
y_1	1	1/20	1	0	0	-99/80	11/40	81/80
ЦФ		1/5	0	0	0	1/20	1/10	1/20

Таким чином, отримали оптимальний план:

$$y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*\right) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0,0,0\right)$$

$$f\left(y^*\right) = \frac{1}{5}$$

Відповідно до встановлених зв'язків між додатковими змінними, маємо:

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*\right) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0,0,0\right)$$

$$f\left(x^*\right) = \frac{1}{5}$$

Тоді знаходимо:

$$V' = \frac{1}{f\left(x^*\right)} = \frac{1}{f\left(y^*\right)} = 5;$$

$$p_i = V' \cdot x_i^* \ \left(i = \overline{1,3}\right), \qquad q_j = V' \cdot y_j^* \ \left(j = \overline{1,3}\right),$$

$$\begin{cases} p_1 = 5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \\ p_2 = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \\ p_3 = 5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = 5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \\ q_2 = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \\ q_3 = 5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Тоді: $p^* = \left(p_1, p_2, p_3\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $q^* = \left(q_1, q_2, q_3\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Отже, рішення гри з матрицею A':

$$\left(p^*, q^*, V'\right) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), 5\right)$$

Відповідь: Рішення гри з матрицею A (у якій $V = V' - 5$):

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), 0\right)$$

3. Чисельний метод рішеннязадач теорії игр – метод Брауна-Робінсон

Спосіб відшукання наближеного рішення прямокутних ігор був сформульований в роботі Г.В. Брауна, а збіжність процесу була доведена Джулією Робінсон в 1951 році.

Цей метод, званий ще ітеративним (**методом ітерацій**), є одним з найпростіших чисельних методів розв'язання ігор та спирається на традиційний статистичний принцип: засновувати майбутні рішення на відповідній передісторії.

Полягає він в послідовній процедурі "зближення" верхньої і нижньої ціни гри із заданою точністю.

<u>Ідея методу полягає в наступному</u>:

Розігрується «уявний експеримент», у якому сторони А і В по черзі застосовують один проти одного свої стратегії

$$A:\ A_1, A_2, \ldots, A_m \quad \Rightarrow \quad A_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$B:\ B_1, B_2, \ldots, B_n \quad \Rightarrow \quad B_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right),$$

прагнучи виграти побільше (для гравця А) і програти поменше (для гравця В).

Експеримент складається з ряду «партій» гри.

Починається він з того, що один з гравців (скажімо, А) вибирає довільно одну зі своїх стратегій A_i. Противник (В) відповідає йому тією зі своїх стратегій B_j, яка є найгіршою для А, тобто звертає його виграш при стратегії A_i в мінімум.

Далі знову черга гравця А - він відповідає В тією своєю стратегією A_k, яка дає максимальний виграш при стратегії B_j противника.

Далі – знову черга противника. Він відповідає нам тією своєю стратегією, яка є найгіршою не для останньої, застосованої нами, стратегії A_k, а для ***змішаної стратегії***, в якій досі застосовані стратегії A_i, A_k зустрічаються з рівними ймовірностями.

І так далі: на кожному кроці ітераційного процесу кожен гравець відповідає на черговий хід іншого *тією своєю стратегією, яка є оптимальною для нього щодо змішаної стратегії іншого, в яку всі застосовані до сих пір стратегії входять пропорційно частотам їх застосування.*

Замість того, щоб обчислювати кожен раз середній виграш, можна користуватися просто «накопиченим» за попередні ходи виграшем та вибирати ту свою стратегію, при якій цей накопичений виграш є максимальним (мінімальним).

Доведено, що такий метод сходиться: при збільшенні числа «партій» середній виграш на одну партію буде наближатися до ціни гри, а частоти застосування стратегій – до їх ймовірностей в оптимальних змішаних стратегіях гравців, тобто

$$p_i = \frac{N(i)}{K}, \quad q_j = \frac{N(j)}{K}.$$

де $N(i), N(j)-$ число номерів i или j, які співпали та були обрані в даній партії стратегій гравців А і В відповідно;

$K-$ загальне число ходів (партій).

Втім, найкраще можна зрозуміти ітераційний метод на конкретному прикладі.

Приклад: Розглянемо гру з матрицею 3×3:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Щоб не мати справу з матрицею, в якій є від'ємні елементи, скористаємося теоремою 5: додамо до кожного елементу матриці число 5 та отримаємо матрицю виду

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Ціна гри отриманої матриці відповідно до теореми 5 збільшиться на 5 одиниць.

Розв'язання гри:

1 хід: Гравець А обирає довільно стратегію з A_i, наприклад, стратегію A_3 з виграшами, що дорівнюють

$$\{9,0,11\}.$$

2 хід: Противник В відповідає йому тією зі своїх стратегій B_j, яка є найгіршою для гравця А, тобто звертає виграш гравця А в мінімум при обраній ним стратегії A_3, тобто

$$\min\{9, \underline{0}, 11\} = 0$$

відповідає стратегії B_2 гравця В.

Відповідно до обраної стратегії B_2 виграш гравця В складає

$$\{2, 9, 0\}.$$

3 хід: Гравець А відповідає йому тією зі своїх стратегій A_k, яка дає максимальний виграш при обраній стратегії B_2 гравця В, тобто

$$\max\{2, \bar{9}, 0\} = 9,$$

що відповідає стратегії A_2 гравця А з виграшем

$$\{2, 9, 0\}.$$

4 хід: Гравець В відповідає стратегією B_j, яка дає мінімальний виграш гравцю А, але не для останньої застосованої нами стратегії A_k, а для змішаної стратегії, в якій стратегії A_i та A_k зустрічаються з рівними ймовірностями $(p_i = p_k)$.

и т.д.

У таблиці 2 наведені перші 15 кроків ітераційного процесу за методом Брауна-Робінсон (розрахунки можна і продовжити).

Позначимо: k – номер партії (пари виборів);

i – номер обраної в даній партії стратегії гравця А;

j – номер обраної в даній партії стратегії гравця В;

$\underline{v}$ – нижня оцінка ціни гри;

$\bar{v}$ – верхня оцінка ціни гри;

v^* – середнє арифметичне між $\underline{v}$ та $\bar{v}$;

A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 – накопичений виграш гравця В та А відповідно за k партій;

Згідно таблиці 2, в першому стовпці наданий номер партії (пари виборів) k, у другому – номер i обраної в даній партії стратегії гравця А.

У наступних трьох стовпцях - «накопичений виграш» за перші k партій при тих стратегіях, які застосовували гравці в попередніх партіях та при стратегіях B_1, B_2, B_3 гравця В в даній партії (виходить додаванням елементів відповідного рядка до того, що було рядком вище).

Таблиця 2

k	i	Виграш гравця А, який платить йому гравець В			j	Виграш гравця В, який платить йому гравець А			$\underline{v}$	$\overline{v}$	Наближена оцінка гри v^*
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3			
1	3	9	0	11	2	2	9	0	0	9	4,5
2	2	11	9	11	2	4	18	0	4,5	9	6,75
3	2	13	18	11	3	13	18	11	3,67	6	4,84
4	2	15	27	11	3	22	18	22	2,75	5,50	4,13
5	1	22	29	20	3	31	18	33	4,00	6,60	5,30
6	3	31	29	31	2	33	27	33	4,84	5,50	5,17
7	1	38	31	40	2	35	36	33	4,43	5,14	4,79
8	2	40	40	40	2	37	45	33	5,00	5,61	5,30
9	2	42	49	40	3	46	45	44	4,45	5,11	4,78
10	1	49	51	49	1	53	47	53	4,90	5,30	5,10
11	3	58	51	60	2	55	56	53	4,64	5,09	4,87
12	2	60	60	60	2	57	65	53	5,00	5,41	5,20
13	2	62	69	60	3	66	65	64	4,61	5,07	4,84
14	1	69	71	69	1	73	67	73	4,93	5,21	5,07
15	3	78	71	80	2	75	76	73	4,74	5,06	4,90

З цих накопичених виграшів в таблиці 2 підкреслять мінімальний (якщо їх декілька, підкреслюються всі). Підкреслене число визначає відповідний вибір гравця В в даній партії – він обирає ту стратегію, яка відповідає підкресленому числу (якщо їх декілька, береться будь-яка). Таким чином, визначається номер j оптимальної (в даній партії) стратегії B (ставиться в наступному стовпці).

У наступних трьох стовпцях подається накопичений виграш за k партій відповідно при стратегіях A_1, A_2, A_3 гравця A (виходить додаванням елементів стовпця B_j до того, що було рядком вище). З цих значень в таблиці 2 «надкреслене» максимальне значення. Воно визначає вибір стратегії гравця А в наступній партії (рядком нижче).

В останніх трьох стовпцях таблиці 2 подані: $\underline{v}$ – нижня оцінка ціни гри, що дорівнює мінімальному накопиченому виграшу, поділеному на число партій k; $\overline{v}$ – верхня оцінка ціни гри, що дорівнює максимальному накопиченому виграшу, поділеному на k; v^* – середнє арифметичне між ними (воно служить кращою, ніж нижня та верхня, наближеною оцінкою ціни гри).

Як видно, величина v^* незначно коливається навколо ціни гри $v=5$. Підрахуємо за таблицею 2 частоти $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, $\widetilde{p}_3$, $\widetilde{q}_1$, $\widetilde{q}_2$, $\widetilde{q}_3$ стратегій гравців:

$$\widetilde{p}_1 = 4/15 \approx 0{,}266, \qquad \widetilde{p}_2 = 7/15 \approx 0{,}468, \qquad \widetilde{p}_3 = 4/15 \approx 0{,}266,$$
$$\widetilde{q}_1 = 2/15 \approx 0{,}133, \qquad \widetilde{q}_2 = 8/15 \approx 0{,}534, \qquad \widetilde{q}_3 = 5/15 \approx 0{,}333,$$

що не так вже сильно відрізняється від ймовірностей для першої, другої й третьої стратегій відповідно, отриманих за допомогою методів лінійного програмування:

$$p_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad p_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5, \quad p_3 = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$q_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad q_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5, \quad q_3 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Такі порівняно хороші наближення ми отримали вже при 15 ітераціях. На жаль, далі процес наближень буде йти не так жваво. Збіжність методу Брауна-Робінсон, як показує досвід, є дуже повільною.

Дуже важливою перевагою ітераційного методу розв'язання ігор є те, що його трудомісткість порівняно повільно зростає зі збільшенням розмірності гри $m \times n$, тоді як трудомісткість методів лінійного програмування зростає при збільшенні розмірності задачі набагато швидше.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5

Завдання. Розв‘язати матричну гру з платіжною матрицею A методом Брауна-Робінсон та зведенням до задач лінійного програмування

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & k & 3 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

(k—номер студента у журналі).

Порівняйте результати отримані методом Брауна-Робінсон та зведенням до задач лінійного програмування. Зробіть висновки.