Метод математичної індукції

Принцип математичної індукції. Якщо твердження, у формулюванні якого входить натуральне число n, істинне при $n=1$ і з його істинності при $n=k$ (де $k \in N$) випливає, що воно істинне і при $n=k+1$, то воно істинне при всіх натуральних значеннях n.

У ряді випадків необхідно довести справедливість деякого твердження не для всіх натуральних чисел, а лише для $n \geq p$, де p — фіксоване натуральне число. У цьому випадку принцип математичної індукції формулюється в такий спосіб: якщо твердження істинне при $n=p$ і з його істинності при $n=k$, де $k \geq p$, випливає, що воно істинне і при $n=k+1$, то твердження істинне для будь-якого $n \geq p$.

Доведення методом математичної індукції проводиться в такий спосіб. Спочатку твердження, що доводиться, перевіряється при $n=1$. Цю частину доведення називають *базою* індукції. Якщо при $n=1$ твердження істинне, то переходять до другої частини доведення, яка називається *індукційним кроком*. У цій частині доводиться справедливість твердження для $n=k+1$ у припущенні справедливості твердження для $n=k$ (припущення індукції).

Приклад 1

Довести, що при будь-якому натуральному n виконується рівність

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Розв'язання

Ця формула містить цілу послідовність тверджень:

T_1 $$1=\frac{1\cdot 2}{2},$$

T_2 $$1+2=\frac{2\cdot 3}{2},$$

T_3 $$1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2},$$

T_4 $$1+2+3+4=\frac{4\cdot 5}{2},$$

Перше твердження, звісно ж, істинне. Перевіримо, що з кожного істинного твердженням випливає також істинне.

Нехай твердження T_k істинне, тобто рівність

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

правильна. Додамо до обох частин цієї рівності число $k+1$, Одержимо

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Але це і є твердження T_{k+1}, яке безпосередньо випливає з твердження T_k.

Таким чином, ми довели, що з кожного істинного твердження випливає істинне. Згідно з принципом математичної індукції, наша рівність правильна для будь-якого натурального n.

Приклад 4

Знайдемо формулу для суми

$$S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1).$$

Розв'язання

Маємо:

$$S_1=-1,$$
$$S_2=-1+3=2,$$
$$S_3=-1+3-5=-3,$$
$$S_4=-1+3-5+7=4.$$

Розглянуті окремі випадки дозволяють зробити припущення, що $S_n=(-1)^n\cdot n$. Скориставшись методом математичної індукції, доведемо справедливість цього твердження, тобто доведемо, що

$$S_n=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1)=(-1)^n\cdot n.$$

1) Істинність рівності при $n=1,\ 2, 3, 4$ встановлена вище.
2) Припустимо, що

$$S_k=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^k\cdot(2k-1)=(-1)^k\cdot k,$$

і доведемо, що тоді

$$S_{k+1}=-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^k\cdot(2k-1)+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=(-1)^{k+1}\cdot(k+1).$$

Дійсно, маємо:

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=(-1)^k\cdot k+(-1)^{k+1}\cdot(2k+1)=$$
$$=(-1)^{k+1}\cdot(-k+2k+1)=(-1)^{k+1}\cdot(k+1).$$

За принципом математичної індукції робимо висновок, що наше твердження істинне для будь-яких $n\in N$.

Приклад 5

Знайдемо формулу для суми

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Розв'язання

Рівності $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$ приводять до індуктивного припущення, що

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{3}$$

Доведемо цю рівність методом математичної індукції.

1) Істинність при $n = 1$, 2, 3, встановлена вище.

2) Припустимо, що наше твердження справедливе при $n = k$:

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Тоді

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Але $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ — це рівність (3) при $n = k+1$.

За принципом математичної індукції робимо висновок, що рівність (3) істинна при всіх натуральних значеннях n.

Доведіть рівності:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

5. Застосування методу математичної індукції для доведення нерівностей

Приклад 7

Доведемо, що якщо $a > b$ і a, b — додатні числа, то $a^n > b^n$.

Розв'язання

При $n = 1$ твердження очевидне: $a^1 > b^1$. Припустимо, що $a^k > b^k$. Доведемо, що тоді $a^{k+1} > b^{k+1}$.

Справді, перемноживши почленно нерівності $a^k > b^k$ і $a > b$, одержимо: $a^{k+1} > b^{k+1}$.

Отже, на підставі принципу математичної індукції твердження доведене для будь-якого $n \in N$.

Приклад 8

Розв'яжемо нерівність

$$2^n > 2n+1 \qquad (5)$$

на множині натуральних чисел.

Розв'язання

Безпосередня перевірка показує, що числа $n=1$, $n=2$ не задовольняють нерівність (5), а значення $n=3$, $n=4$, $n=5$ задовольняють цю нерівність. Виникає припущення, що будь-яке число $n \ge 3$ задовольняє нерівність (5). Доведемо це твердження методом математичної індукції.

При $n=3$ нерівність правильна: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$. Припустимо, що $2^k > 2k+1$, і доведемо, що тоді $2^{k+1} > 2(k+1)+1$.

Справді, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1) = (2k+3)+(2k-1) > 2k+3$ (ми використовували той факт, що $2k-1 > 0$ при будь-якому натуральному значенні k).

Отже, $2^n > 2n+1$ при всіх $n \ge 3$, тобто множина розв'язків нерівності (5) така: $\{n \in N \mid n \ge 3\}$.

Приклад 9

Доведемо, що при $x > -1$ істинна нерівність

$$(1+x)^n \ge 1+nx. \qquad (6)$$

Розв'язання

1) При $n=1$ маємо істинну нерівність $1+x \ge 1+x$.
2) Припустимо, що нерівність $(1+x)^k \ge 1+kx$ істинна, і доведемо, що тоді нерівність $(1+x)^{k+1} \ge 1+(k+1)x$ теж істинна.

Оскільки $x > -1$, то $1+x > 0$. І тому маємо:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \ge (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x.$$

Отже, з істинності нерівності (6) при $n=k$ випливає її істинність при $n=k+1$. Виходить, на підставі принципу математичної індукції, що істинність нерівності (6) встановлена для всіх натуральних n. Ця нерівність

Приклад 10

Довести, що при всіх натуральних $n > 4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Розв'язання

База індукції. При $n = 5$ нерівність справедлива: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Крок індукції. Нехай

$$2^k > k^2, \tag{7}$$

де k – деяке натуральне число, більше, ніж 4. Доведемо,що тоді виконується й така нерівність $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Дійсно, помножимо обидві частини нерівності (7) на 2, одержимо

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

бо при $k > 4$ виконується така нерівність $k^2 > 2k + 1$ (вона еквівалентна такій $k(k-2) > 1$).Тому, використовуючи принцип математичної індукції, одержуємо, що для всіх натуральних $n \geq 5$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

6. Застосування методу математичної індукції до задач на подільність

Домовимося замість фрази «ділиться без остачі на» користуватися знаком «$\vdots$».

Приклад 12

Доведемо, що $\left(11^{n+2} + 12^{2n+1}\right) \vdots\, 133$.

Розв'язання

При $n = 1$ маємо:

$$11^3 + 12^3 = (11+12)\left(11^2 - 11\cdot 12 + 12^2\right) = 23\cdot 133.$$

Але $(23\cdot 133) \vdots\, 133$, а це означає істинність нашого твердження при $n = 1$.

Припустимо, що це твердження істинне при $n = k$, тобто що $\left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right) \vdots\, 133$. Доведемо, що тоді воно буде істинне і при $n = k + 1$, тобто що $\left(11^{(k+1)+2} + 12^{2(k+1)+1}\right) \vdots\, 133$, або $11^{k+3} + 12^{2k+3} \vdots\, 133$. Дійсно

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11\cdot 11^{k+2} + 12^2\cdot 12^{2k+1} = 11\cdot 11^{k+2} + 11\cdot 12^{2k+1} + 133\cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 11\left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right) + 133\cdot 12^{2k+1}.$$

Отримана сума ділиться на 133, тобто твердження істинне і при $n = k + 1$.

За принципом математичної індукції наше твердження доведене для будь-яких $n \in N$.

Доведіть:

а) $\left(6^{2n}-1\right)\vdots 35$;

б) $\left(4^{n}+15n-1\right)\vdots 9$;

в) $\left(2^{5n+3}+5^{n}\cdot 3^{n+2}\right)\vdots 17$;

7. Застосування методу математичної індукції для вивчення властивостей числових послідовностей

Приклад 13

Числова послідовність визначається наступними умовами: $a_0=2$, $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$. Знайдемо формулу n-го члена послідовності.

Розв'язання

Користуючись рекурентним співвідношенням, знаходимо:

$$a_2=3a_1-2a_0=3\cdot3-2\cdot2=5,\ a_3=3a_2-2a_1=9,\ a_4=3a_3-2a_2=17.$$

Зауважуємо, що $5=2^2+1$, $9=2^3+1$, $17=2^4+1$. Тому можна припустити, що $a_n=2^n+1$. Доведемо це твердження методом математичної індукції.

При $n=1$ твердження справедливе. Припустимо, що воно справедливе при будь-якому $n=k$, і доведемо, що тоді воно виконується і при $n=k+1$.

Справді, маємо:

$$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}=3\left(2^k+1\right)-2\left(2^{k-1}+1\right)=2^{k+1}+1.$$

Приклад 14

Послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ визначається наступними умовами: $a_0=1, a_1=1, \ldots, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$. Доведемо дві властивості цієї послідовності:

1) $a_{2n+2}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}+1$;

2) $a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^n$.

Розв'язання

1) Випишемо декілька перших членів послідовності. Маємо: $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=a_1+a_0=2$, $a_3=a_2+a_1=2+1=3$, $a_4=a_3+a_2=3+2=5$. При $n=1$ $a_{2n+2}=a_4=5=a_1+a_3+1$. Виходить, при $n=1$ твердження 1) істинне. Припустимо, що воно істинне при $n=k$, тобто

$$a_{2k+2}=a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1}+1 \tag{9}$$

Доведемо, що тоді воно істинне і для $n=k+1$, тобто $a_{2k+4}=a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1$.

Справді, скориставшись рекурентним співвідношенням, одержимо: $a_{2k+4} = a_{2k+3} + a_{2k+2}$. Застосувавши для a_{2k+2} формулу (9), одержимо:

$$a_{2k+4} = a_{2k+3} + \left(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1\right) = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1.$$

Отже, рівність, яку доводимо, виконується для всіх $n \in N$.

6. (9–10) Довести, що число, яке записується за допомогою 3^n одиниць, ділиться на 3^n. (Мається на увазі десятковий запис).

Розв'язання

Позначимо наші числа так: $x_n = \underbrace{11...11}_{3^n \text{ одиниць}}$, де n — натуральне число.

Нам потрібно довести, що $x_n \,\vdots\, 3^n$.

Застосуємо індукцію.

База індукції. При $n = 1$, маємо $x_1 = 111 \,\vdots\, 3$, за ознакою подільності на 3. Отже, $x_1 \,\vdots\, 3^1$.

Крок індукції. Нехай $x_n \,\vdots\, 3^n$ для деякого натурального n.

Доведемо, що $x_{n+1} \,\vdots\, 3^{n+1}$.

Дійсно,

$$x_{n+1} = \underbrace{11\ldots11}_{3^{n+1}} = \underbrace{11\ldots1}_{3^n}\underbrace{11\ldots1}_{3^n}\underbrace{11\ldots1}_{3^n} = \underbrace{11\ldots1}_{3^n} \cdot 10^{2\cdot 3^n} + \underbrace{11\ldots1}_{3^n} \cdot 10^{3^n} + \underbrace{11\ldots1}_{3^n} =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{3^n}\left(100^{3^n} + 10^{3^n} + 1\right) = x_n\left(100^{3^n} + 10^{3^n} + 1\right).$$

Оскільки $x_n \,\vdots\, 3^n$ за припущенням, а число $\left(100^{3^n} + 10^{3^n} + 1\right) \vdots\, 3$ (бо воно має вигляд 100...0100...01 і його сума цифр дорівнює 3), тому x_{n+1} ділиться на $3^n \cdot 3 = 3^{n+1}$, що і треба було довести.

13. (10–11) Доведіть, що для довільного натурального n справедлива рівність

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ знаків кореня}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Розв'язання

Скористаємось методом математичної індукції.

База. При $n = 1$ сформульоване твердження справедливе, бо $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Крок індукції. Припустимо, що твердження справедливе при $n = k$, і доведемо його справедливість при $n = k + 1$. Скористаємося тотожністю: $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Використовуючи припущення індукції, одержуємо:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{k+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cdot\cos\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

тобто при $n = k + 1$ твердження справедливе. Отже, зазначена в умові задачі рівність, справедлива при всіх $n \in \mathrm{N}$.