

МОДУЛЬ №1.

Лекція 2.

Поле гравітаційних сил. Пружні сили. Механічні коливання та хвилі

2.1 Гравітаційне поле

Гравітаційні сили належать до фундаментальних сил, фізична природа яких пов'язана з скривленням всесвітнього простору тілами дуже великої маси. І. Кеплер (1571 – 1630 рр.), узагальнюючи спостереження астрономів, встановив закони планетних рухів, які привели І. Ньютона до відкриття закону всесвітнього тяжіння. Ньютон сформулював закон всесвітнього тяжіння, згідно з яким:

Будь-які два тіла притягуються одне до одного з силою, що спрямована по з'єднуючій їх лінії, прямо пропорційна масам обох тіл і зворотно пропорційна квадрату відстані між ними

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}, \quad (2.1)$$

де $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$ - одиничний вектор, що визначає напрямок сили, G – гравітаційна стала

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

Для гравітаційного поля слушний принцип суперпозиції полів. Відповідно до цього принципу, гравітаційне поле, що створюється будь-якою масою, не залежить від наявності інших мас. Крім того, гравітаційне поле, що створюється декількома тілами, дорівнює геометричній сумі гравітаційних полів, створюваних цими тілами окремо. Пояснення гравітаційної взаємодії дано А. Ейнштейном і пов'язано з викривленням простору, в якому знаходяться взаємодіючі тіла. Для якісного опису гравітаційної взаємодії, згідно з Ейнштейном, можна ввести мирові лінії – умовні лінії, еквівалентні лініям рівного потенціалу гравітаційного поля, який знаходять згідно з визначенням потенціальної енергії поля

$$U(r) = -\int_{-\infty}^r F(r) dr = -\frac{GMm}{r}. \quad (2.2)$$

При обчислюванні інтегралу (2.2) треба зважити на те, що потенціальна енергія дорівнює нулю на нескінченності: $U(\infty)=0$.

Потенціал можна визначити як потенціальну енергію, що запасена одиничною масою m

$$\varphi(r) = \frac{1}{m} U(r) = -\frac{GM}{r} \quad (2.3)$$

Тоді сила, діюча на одиничну масу, має сенс напруженості гравітаційного поля $g(r)$:

$$g(r) = \frac{F(r)}{m} = -\frac{GM}{r^2} \quad (2.4)$$

або напруженість гравітаційного поля дорівнює

$$g = -\frac{d\varphi}{dr} = -\text{grad}\varphi,$$

де $\text{grad}\varphi$ - векторна похідна скаляра, спрямована завжди в сторону максимальної зміни потенціалу.

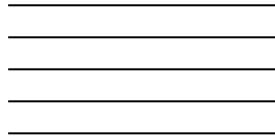


Рис. 2.1. Мирові лінії в пустому просторі.

Пустий простір мирові лінії заповнюють з постійною густиною паралельно одна до одної, тоді градієнт потенціалу дорівнює нулю і напруженість гравітаційної сили теж дорівнює нулю.

Інакше відбувається заповнення простору мировими лініями, якщо в цей простір потрапляє якесь тіло масою M (рис. 2.2).

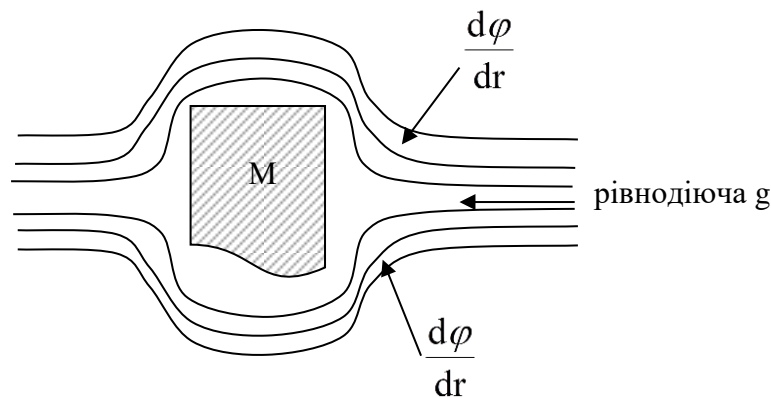


Рис. 2.2. Скривлення мирових ліній поблизу тіла масою M .

Мирові лінії обгинають тіло, що потрапило у простір, виникає градієнт потенціалу гравітаційного поля, а з ним і результуюча напруженість гравітаційного поля g , спрямована до тіла M . Якщо в такий скривлений простір потрапить інше тіло масою m , на нього буде діяти сила

$$F = mg$$

в напрямку найбільшої густини мирових ліній, тобто в напрямку тіла M , яке створює гравітаційне поле.

Гравітаційні сили нехтовно малі, коли іде мова про взаємодію елементарних частинок. Але вони є основними силами, що керують рухом небесних тіл, маси яких дуже великі. Електричні сили, як і сили всесвітнього

тяжіння, є силами далекодії, і зменшуються також обернено пропорційно квадрату відстані. Однак, на рух небесних тіл електричні сили не впливають, тому що вони зарядозалежні. А тому що всі тіла у вищому ступені електрично нейтральні, то дія позитивних зарядів компенсується рівною і протилежно спрямованою дією від'ємних зарядів. Гравітаційні сили, на відміну від електричних - це завжди сили притягання. Ця відмінність і робить гравітаційні сили єдиними силами, які керують рухом небесних тіл.

Сила тяжіння біля земної поверхні спрямована до центру Землі та, якщо не враховувати відцентрову силу, пов'язану з обертанням Землі, збігається з вагою тіла P

$$F = P = G \frac{mM_3}{R_3^2}, \quad (2.5)$$

де M_3, R_3 – маса і радіус Землі, m – маса тіла.

Вага тіла може бути записана у вигляді $P = mg$

де

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2},$$

прискорення сили тяжіння. Тоді потенціальна енергія у полі Землі набуває вигляду:

$$U = Pz = mgz. \quad (2.6)$$

2.2 Неінерціальні системи відліку

2.2.1 Сили інерції. Принцип еквівалентності

Розглянемо прискорений поступальний рух системи K' відносно нерухомої системи K . На рис. 2.3 зображені дві системи відліку, з яких система K є інерціальною, а система K' рухається відносно K з деяким прискоренням a , тобто неінерціальна.

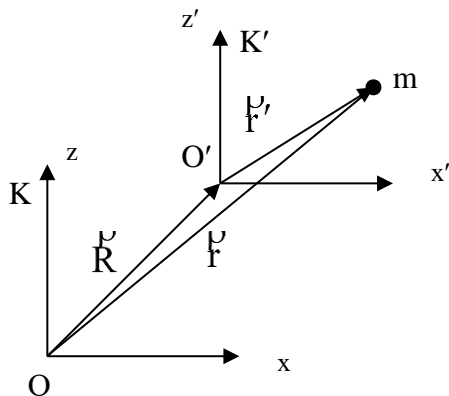


Рис. 2.3. Рух частинки m в системах відліку K і K' .

Вектор \vec{R} визначає положення початку координат системи K' відносно системи K (\vec{r} - радіус вектор-частинки в системі K , \vec{r}' - радіус-вектор в системі K').

Показані на рисунку радіус-вектори пов'язані співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'.$$

Двократне диференціювання цього співвідношення за часом приводить до рівності

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}' \quad (2.7)$$

Сенс похідних \vec{v} , \vec{v}_R і \vec{v}' очевидний: перша дає прискорення частинки \vec{a} в системі K , друга - прискорення $\vec{\omega}$ системи K' відносно системи K , третя - прискорення частинки \vec{a}' в системі K' , тоді співвідношення (2.7) можна представити у вигляді

$$\vec{a} = \vec{\omega} + \vec{a}' \quad (2.8)$$

Помножимо (2.8) на масу частинки m і візьмемо до уваги, що добуток $m\vec{a}$ дає силу \vec{F} , з якою діють на частинку в інерціальній системі інші тіла. В результаті одержуємо рівняння

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{\omega}. \quad (2.9)$$

де $m\vec{a}'$ - це рівнодіюча сил, що діють на частинку в неінерціальній системі K' .

Таким чином, відносно системи K' на частинку, крім реальної сили \vec{F} , діє додаткова сила

$$\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{\omega}.$$

Ця сила називається силою інерції.

Реальною силою, що діє на частинки з боку навколишніх тіл, є, як і раніше, ньютонівська сила

$$\vec{F} = m\vec{a}'.$$

Сила інерції $\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{\omega}$ буде різною для різних систем відліку K' при одній і тій же силі \vec{F} , тобто сила $\vec{F}_{\text{ін}}$ є фіктивною силою, яка не пов'язана з впливом на частинку навколишніх тіл, а пов'язана лише з способом опису руху частинки, тобто з вибором неінерціальної системи відліку K' , в якій розглядається рух.

Використовуючи позначення сили інерції, напишемо рівняння (2.9) наступним чином:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ін}} \quad (2.10)$$

Це рівняння, слушне в неінерціальній системі відліку, за формою аналогічне рівнянню II-го закону Ньютона. Отже, введення сил інерції дозволяє описувати рух тіл в будь-яких системах відліку за допомогою одних і тих же рівнянь руху, що і виправдовує їх введення.

Відзначимо, що введення сил інерції не є необхідним. Будь-який рух можна розглядати відносно інерціальної системи відліку.

Характерною особливістю сил інерції є їх пропорційність масі тіла. В цьому відношенні сили інерції схожі з гравітаційними силами. Представимо собі, що ми знаходимося в закритій кабіні (в ліфті) настільки віддаленій від Землі і інших небесних тіл, що кабіна практично не піддається гравітаційному впливу і рухається відносно інерціальних систем з постійним прискоренням ($-\mathcal{g}$) у вертикальному напрямку нагору.

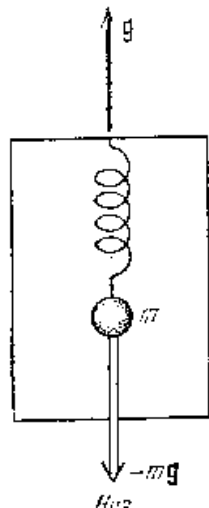


Рис. 2.4. В кабіні, що рухається нагору з прискоренням $-\mathcal{g}$, пружина розтягується так, ніби під кабіною була Земля.

Тоді на тіло масою m діє сила інерції $\mathbf{F}_{in} = -m\mathcal{g}$ спрямована проти руху кабіни. Пружина, до кінця якої підвішене тіло, розтягується так, щоб пружна сила врівноважила силу інерції (рис. 2.4). З іншого боку, такі ж явища спостерігалися б і в тому випадку, якби кабіна була нерухомою, а під нею знаходилася Земля. Знаходячись в кабіні, ніякими дослідами, що проводяться всередині кабіни, ми не могли б визначити, чим обумовлена сила $m\mathcal{g}$ - прискореним рухом кабіни або дією гравітаційного поля Землі. На цій підставі Ейнштейн висунув принцип еквівалентності сил інерції і сил тяжіння.

Згідно з цим принципом вплив гравітаційного поля тотожний або еквівалентний впливу сил інерції.

Це означає, що треба розрізняти інертну масу і масу гравітаційну, хоча вся сукупність дослідних фактів вказує на те, що інертна і гравітаційна маси строго пропорційні одна одній.

2.2.2 Відцентрова сила інерції

Розглянемо поведінку тіл в неінерціальній системі відліку K' , що обертається відносно інерціальної системи K з постійною кутовою швидкістю \mathcal{O} . Укріпимо на дискові радіальну напрямну, на яку надінемо кульку, прив'язану до вісі диска пружиною (рис. 2.5).

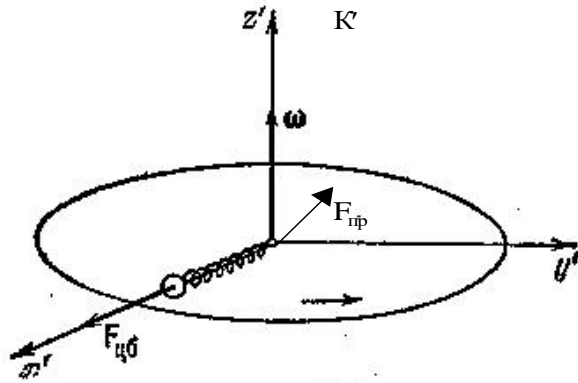


Рис. 2.5. Кулька може переміщуватися тільки вздовж радіуса диска, ковзаючи без тертя по тонкому стрижню.

Поки диск не обертається, пружина не деформована. При розкручуванні диска кулька розтягує пружину доти, доки пружна сила $\vec{F}_{\text{пр}}$ не стане рівною добутку маси кульки m на його кутове прискорення $a_n = -\omega^2 R$, де R – відстань шарика до вісі обертання системи K'

$$F_{\text{пр}} = -m\omega^2 R \quad (2.11)$$

Відносно системи відліку K' , пов'язаної з диском, кулька знаходиться у стані спокою. Це можна пояснити тим, що в системі K' , крім сили $\vec{F}_{\text{пр}}$, на кульку діє сила інерції (рис. 2.5)

$$F_{\text{відц}} = m\omega^2 R \quad (2.12)$$

спрямована вздовж радіуса від вісі обертання диска.

Така сила називається **відцентровою силою інерції**. Вона виникає у обертових системах відліку і не залежить від того, знаходиться тіло у стані спокою в цій системі чи рухається відносно неї з швидкістю v' .

Внаслідок добового обертання Земля подібна до гігантського обертового диска. Тому, розглядаючи поведінку тіл в системі відліку, пов'язаній з Землею, треба у розрахунках враховувати відцентрову силу інерції.

2.2.3 Сила Коріоліса

Розглянемо обертову систему відліку K' – диск, що обертається відносно системи K , в якій тіло також рухається з деякою швидкістю v_n відносно диска. При такому русі тіла крім відцентрової сили інерції виникає ще одна сила інерції, що називається **силою Коріоліса**.

Візьмемо горизонтально розташований диск, що обертається відносно інерціальної системи відліку з постійною швидкістю ω . Припустимо, що по колу радіуса R рівномірно рухається частинка з швидкістю v_n відносно диска (рис. 2.6).

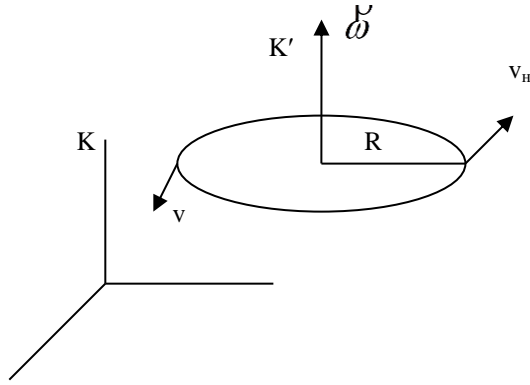


Рис. 2.6.

Лінійна швидкість точок диска в системі K' дорівнює $v_{\text{д}} = \omega R$. Якщо, крім лінійної швидкості ωR , уявити, що частинка рухається по колу з додатковою швидкістю v_{H} відносно неінерціальної системи, то модуль повної швидкості відносно інерціальної системи K , що містить лінійну швидкість обертання і швидкість переміщення буде дорівнювати

$$v_i = v_{\text{H}} + \omega R.$$

Прискорення частинки в системі K дорівнює

$$\omega_i = \frac{v_i^2}{R} = \frac{(v_{\text{H}} + \omega R)^2}{R} = \frac{v_{\text{H}}^2}{R} + 2\omega v_{\text{H}} + \omega^2 R$$

Рівняння руху в інерціальній системі має вигляд

$$m\omega_i = F = m \left[\frac{v_{\text{H}}^2}{R} + 2\omega v_{\text{H}} + \omega^2 R \right] \quad (2.13)$$

В неінерціальній системі відліку K' частинка обертається з кутовою швидкістю ω разом з системою. Тому в неінерціальній системі залишається тільки рух по колу з швидкістю v_{H} , при якому частинка має нормальне прискорення

$$\omega_{\text{H}} = \omega_i = \frac{v_{\text{H}}^2}{R},$$

яке визначає силу, що діє на частинку в неінерціальній системі

$$F_{\text{H}} = \frac{mv_{\text{H}}^2}{R}.$$

Тоді з рівняння (2.13) одержуємо зв'язок сили, що діє на частинку в інерціальній системі, з силою, що виникає в неінерціальній системі:

$$F_{\text{H}} = F - 2m\omega v_{\text{H}} - m\omega^2 R \quad (2.14)$$

Таким чином, в неінерціальній системі K' на частинку крім сили F , обумовленої реальними зовнішніми тілами, діють дві додаткові сили. Одна з них

$$F_{\text{вц}} = -m\omega^2 R$$

є відцентровою силою інерції, що спрямована по нормалі від центра обертання. Крім того, в рівнянні (2.14) є ще один доданок

$$F_{\text{к}} = -2m\omega v_{\text{н}} \quad (2.15)$$

який визначає додаткову силу, що діє в неінерціальній системі K' на тіло, що переміщується поступно в площині, перпендикулярній вісі обертання. Ця сила називається силою Коріоліса і має особливість, пов'язану з тим, що вона перпендикулярна як вісі обертання, тобто вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$, так і швидкості переміщення $\vec{v}_{\text{н}}$, тобто описується векторним добутком векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{v}_{\text{н}}$:

$$\vec{F}_{\text{н}} = 2m[\vec{v}\vec{\omega}] \quad (2.16).$$

Той факт, що сила Коріоліса перпендикулярна швидкості руху $v_{\text{н}}$ частинки у неінерціальній системі, означає, що сила Коріоліса роботи не здійснює, а тільки змінює напрямок швидкості $v_{\text{н}}$, але не її модуль. Прикладом прояву сили Коріоліса в неінерціальній системі Земля є підмив правих берегів річок, що течуть з півночі на південь, і навпаки, лівих берегів річок, що течуть з півдня на північ.

2.3 Пружні сили

Фізична природа пружних сил принципово відрізняється від гравітаційних сил. Пружні сили виникають як протидія пружній деформації, яка пов'язана з дією зовнішніх сил, що змінюють, тобто деформують, форму тіла. Деформація має назву пружної за умови, коли форма тіла після деформації відновлюється.

У деформованому тілі виникають пружні сили, які врівноважують зовнішні сили, що спричиняють деформацію (рис. 2.7.). Під дією зовнішньої сили $F_{\text{зовн.}}$ пружина подовжується на величину x , внаслідок чого, у пружині виникає пружна сила $F_{\text{пр.}}$, що врівноважує $F_{\text{зовн.}}$ (рис. 2.7.).

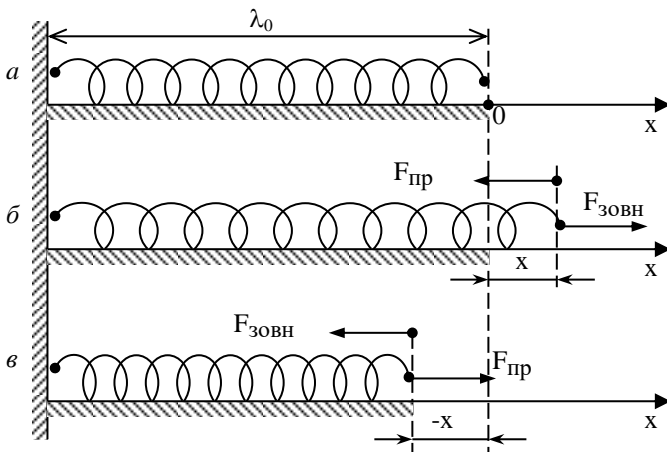


Рис. 2.7. *a* - Закріплена одним кінцем пружина довжини λ_0 лежить вільно на рівному столі; деформація відсутня. *б* - Під дією сили $F_{\text{зовн}}$ пружина отримала позитивне подовження x ($x > 0$). *в* - При іншому напрямку $F_{\text{зовн}}$ подовження пружини негативне ($x < 0$).

Пружні сили виникають по всій довжині деформованої пружини. Будь-яка частина пружини діє на сусідню із силою $F_{\text{пр.}}$. Експериментальний закон Гука стверджує, що при пружній деформації подовження пружини пропорційно зовнішній силі.

Експериментальний закон Гука стверджує, що при пружній деформації подовження пружини пропорційно зовнішній силі.

$$x = \frac{1}{k} F_{\text{зовн.}} \quad (2.17)$$

Величина k називається *жорсткістю* пружини.

Пружна сила відрізняється від зовнішньої тільки знаком. Тоді формула (2.17) приймає вигляд

$$x = -\frac{1}{k} F_{\text{пр}} \quad (2.18)$$

або

$$F_x = -kx. \quad (2.19)$$

де F_x – проекція пружної сили на вісь x , k – жорсткість пружини, x – подовження пружини.

Жорсткість пружини залежить від матеріалу і довжини пружини.

Однорідні стрижні при розтягуванні і однобічному стиску подібні пружині (рис.2.8).

Деформація спричиняє до виникнення у стрижні пружних сил. Ці сили характеризують напруженням σ , яке дорівнює модулю сили, віднесеному до площі поперечного перерізу стрижня S .

$$\sigma = F_{\text{пр},\perp} / S \quad (2.20)$$

Сила $F_{\text{пр}}$, спрямована перпендикулярно до перерізу стрижня, тому напруження має назву нормального.

Подовження стрижню $\Delta\lambda$ пропорційно напруженню σ :

$$\Delta\lambda = \frac{1}{k} \sigma. \quad (2.21)$$

Жорсткість k стрижня, як і пружини, залежить від властивостей матеріалу і довжини стрижня. Якщо розрізати стрижень, наприклад, на дві рівні частини, жорсткість k збільшується у два рази. Таким чином, можна записати, що

$$k = E / \lambda_0, \quad (2.22)$$

де E – величина, що характеризує пружні властивості матеріалу стрижня. Вона називається *модулем Юнга* і вимірюється у ньютонках на квадратний метр. Одиниця напруження (або тиску) також дорівнює ньютону на квадратний метр, і називається *Паскаль* (Па).

Позначивши відносний приріст довжини стрижня

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \varepsilon$$

одержуємо остаточну формулу

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma, \quad (2.23)$$

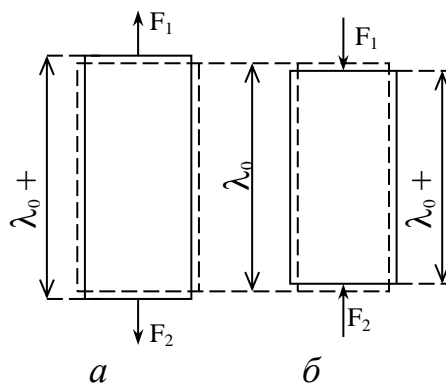


Рис. 2.8. *a* - Розтяг стрижня: $\Delta\lambda > 0$, $\lambda_0 + \Delta\lambda > \lambda_0$. *б* - Стиск стрижня: $\Delta\lambda < 0$, $\lambda_0 + \Delta\lambda < \lambda_0$.

згідно з якою відносно подовження стрижня прямо пропорційно напруженню і зворотно пропорційно модулю Юнга. Формула (2.23) називається законом Гука для стрижня.

2.4 Механічні коливання

2.4.1 Коливальний рух у полі пружних сил. Гармонічні коливання і їх характеристики

Періодичний рух тіла, при якому повторюються за часом його координати, називається коливальним. Коливальні процеси широко поширені в природі. Фізична природа коливань може бути різною, тому поділяють коливання на механічні, електромагнітні, оптичні та інші. Незважаючи на різницю фізичної природи коливань, математичні рівняння процесу коливань однакові для будь-якої коливальної системи.

Досліджуючи загальні види руху, раніше було відмічено, що фінітний рух частинки у потенціальній ямі є періодичним, тобто коливальним. Існує, однак, незлічена кількість різноманітних видів періодичних рухів, серед яких виділяють гармонічні коливання, які часто зустрічаються у фізичних системах. Розглянемо умови, за яких довільний періодичний рух може розглядатися як гармонічні коливання. Розглянемо потенціальну енергію, яка має мінімум у т.х₀ (рис. 2.9).

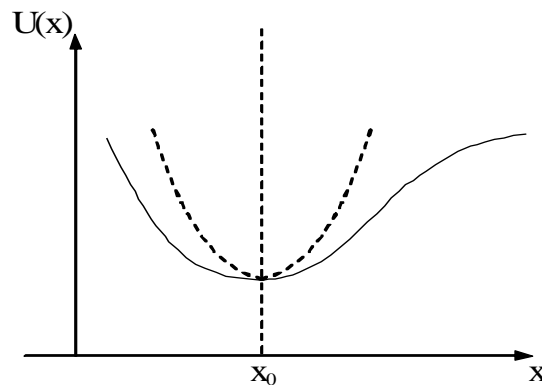


Рис.2.9. До розкладання довільної функції $U(x)$ у ряд біля точки $x=x_0$.

Розкладемо функцію $U(x)$ у ряд Тейлора по малим відхиленням від положення рівноваги $x=x_0$:

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{(x=x_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{(x=x_0)} \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

(2.24)

Враховуючи, що в точці мінімуму

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{(x=x_0)} = 0,$$

вводячи сталу

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{(x=x_0)} = k,$$

і переносячи точку мінімуму потенціальної енергії у центр системи відліку $x_0 = 0$, $U(x_0) = 0$, одержуємо, що при малих відхиленнях від положення рівноваги, коли можна знехтувати доданками більш високого порядку малості, потенціальна енергія описується параболою

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad (2.25)$$

що співпадає з полем пружних сил.

Таким чином, за умови малості коливань потенціальна енергія наближується до параболічної залежності (2.25), характерної для поля пружних сил:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} = -kx. \quad (2.26)$$

Рух частинки у полі пружних сил одержуємо з рівняння руху

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

або

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (2.27)$$

яке можна привести до вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.28)$$

Якщо ввести позначення

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (2.29)$$

рівняння руху

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.30)$$

переходить у рівняння гармонічних коливань. Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (2.31)$$

де $r_{1,2}$ - корені характеристичного рівняння

$$r^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (2.32)$$

$$r_{1,2} = \pm -i\omega_0,$$

а C_1, C_2 - довільні сталі. У випадку уявних характеристичних коренів загальний розв'язок рівняння (2.30) визначається тригонометричною функцією:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.33)$$

де A - амплітуда коливань – максимальне відхилення від положення рівноваги, ω_0 - кругова частота – число повних коливань, що відбуваються протягом 2π секунд. Частота ω_0 , яка називається циклічною частотою, пов'язана з періодом коливань T , який дорівнює часу одного повного коливання

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.34)$$

Частота ν - число повних коливань за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad (2.35)$$

φ - початкова фаза коливання, а $\omega_0 t + \varphi$ - повна фаза коливань. Графік гармонічного коливання зображений на рис. 2.10.

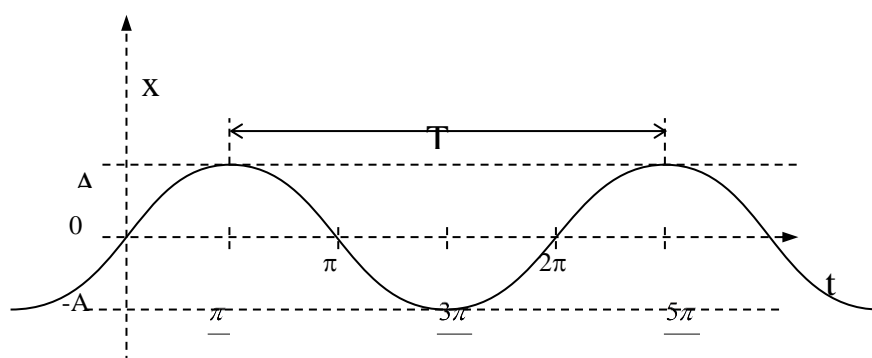


Рис.2.10. Гармонічне коливання.

Можна показати, що частота коливань залежить тільки від властивостей системи, що коливається. Для цього, знаючи закон коливань (2.33), знайдемо прискорення точки, що коливається

$$v = \dot{x} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.36)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.37)$$

а потім і силу:

$$F = ma = -\omega_0^2 A m \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 m x. \quad (2.38)$$

Порівнюючи вираз (2.38) з визначенням (2.26) $F = -kx$, знаходимо зв'язок частоти з жорсткістю системи і масою

$$\omega_0^2 m = k,$$

або

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.39)$$

Повна енергія частинки, що коливається, складається з кінетичної і потенціальної енергій

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \quad (2.40)$$

Використовуючи результати (2.33) і (2.36), для кінетичної енергії одержуємо:

$$E_{\text{кін}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.41)$$

для потенціальної

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.42)$$

і для повної енергії (рис. 2.11)

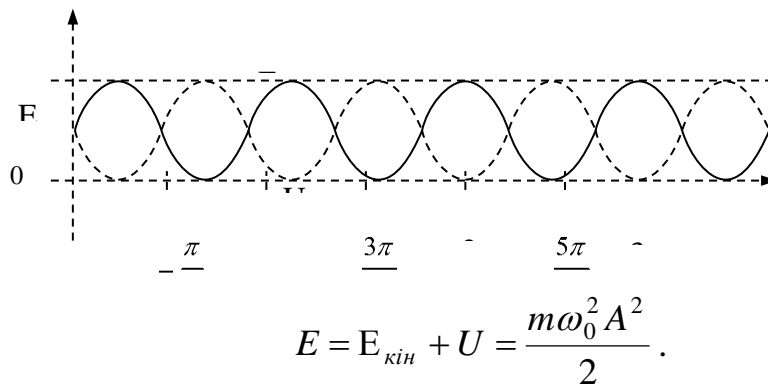


Рис.2.11. Взаємне перетворення кінетичної і потенціальної енергії у часі.

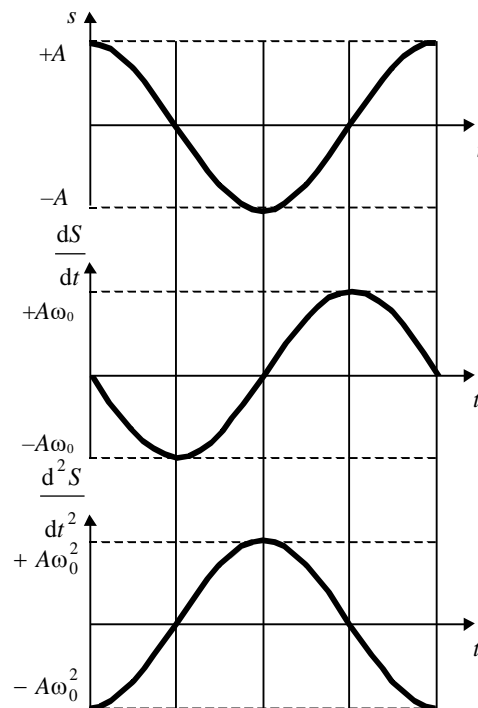


Рис. 2.12. Порівняння графіків залежності від часу переміщення, швидкості і прискорення.

Вдалим методом зображення гармонічних коливань вважають метод векторних діаграм. Для цього із довільної точки O , вибраної на вісі x під кутом φ , який дорівнює початковій фазі коливань, відкладають вектор \vec{A} , модуль якого дорівнює амплітуді A розглядуваного коливання (рис.2.13). Коли цей вектор обертає з кутовою швидкістю ω_0 , то проекція кінця вектора буде переміщуватися по вісі x і приймати значення від $-A$ до $+A$, а величина s буде відповідно змінюватися з часом за законом

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Таким чином, гармонічні коливання можна зображати проекцією на довільно вибрану вісь вектора s з амплітудою A , і з кутом нахилу до вісі, що дорівнює початковій фазі φ .

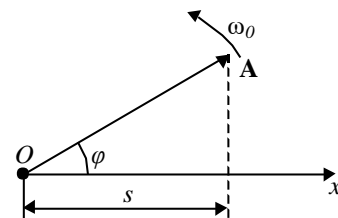


Рис. 2.13. Векторна діаграма коливання s

2.4.2 Математичний, фізичний та пружинний маятники

2.4.2.1 Математичний маятник

Розглянемо коливання матеріальної точки, яка вісить на нерозтяжній нитці довжиною λ . Сила тяжіння mg створює момент сил

$$M_z = F\lambda = -mg \sin \varphi \cdot \lambda \quad (2.43)$$

Математичний маятник обертається у площині підвісу навколо центру O згідно з рівнянням обертового руху

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z = -mg\lambda \sin \varphi. \quad (2.44)$$

Момент імпульсу точки дорівнює

$$L_z = mv\lambda = m\omega\lambda^2.$$

Тоді рівняння обертового руху приймає вигляд $(\omega = \frac{d\varphi}{dt})$,

$$\frac{d(m\omega\lambda^2)}{dt} = -mg\lambda \sin \varphi \quad (2.45)$$

або $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\lambda} \sin \varphi = 0$.

Якщо ввести позначення

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}, \quad (2.46)$$

одержимо рівняння коливань:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (2.47)$$

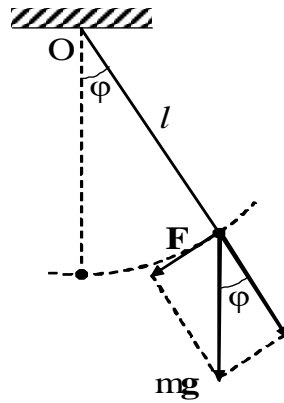


Рис. 2.14. Математичний маятник.

Це рівняння негармонічних коливань. Воно переходить у рівняння гармонічних коливань за умови малих кутів відхилення, коли

$$\sin \varphi \approx \varphi .$$

Тоді рівняння (2.32) приймає вигляд $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 .$

Період коливань математичного маятника дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.4.2.2 Фізичний маятник

Розглянемо коливання твердого тіла навколо горизонтальної вісі (рис.2.15), де O – точка підвісу твердого тіла, C – центр інерції твердого тіла.

Обертний момент сил створює сила тяжіння mg :

$$M_z = -mgh = -mga \sin \varphi$$

Рівняння руху твердого тіла має вигляд

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_z = -mga \sin \varphi ,$$

де I – момент інерції тіла. Тоді отримаємо рівняння руху фізичного маятника

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mga \sin \varphi = 0 ,$$

або при малих коливаннях $\sin \varphi \approx \varphi .$

Це рівняння руху переходить у рівняння гармонічних коливань.

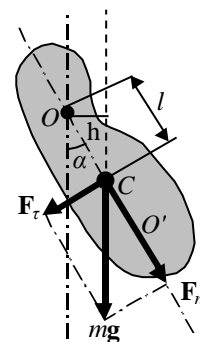


Рис. 2.15. Фізичний маятник.

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mga \varphi = 0,$$

або

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \quad (2.48)$$

- частота коливань фізичного маятника. Прирівнюючи (2.48) із частотою коливань математичного маятника (2.46) знаходимо, що рух фізичного маятника співпадає з рухом математичного маятника з довжиною

$$\lambda = \frac{I}{ma}.$$

Ця довжина називається зведеною довжиною фізичного маятника.

2.4.2.3 Пружинний маятник

Розглянемо пружинний маятник (рис. 2.16): вантаж m на пружині (λ - довжина недеформованої пружини, z - довжина пружини у даний момент). На вантаж діє пружна сила з боку пружини, яка дорівнює

$$F_{np} = -k(z - \lambda),$$

де k - стала пружності пружини, і сила тяжіння

$$F_m = mg.$$

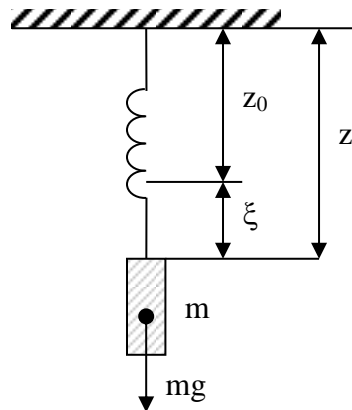


Рис.2.16.

Рівняння руху вантажу виходить з другого закону Ньютона

$$m\ddot{z} = -k(z - \lambda) + mg \quad (2.49)$$

Це диференціальне рівняння має розв'язок, який не залежить від часу, коли прискорення $\ddot{z} = 0$ дорівнює нулю:

$$z = z_0,$$

$$\text{де } z_0 = \lambda + \frac{mg}{k}$$

визначає стан рівноваги маятника. Пружна сила пружини при цьому врівноважує вагу вантажу. Введемо нову змінну ξ

$$z = z_0 + \xi, \quad (2.50)$$

ξ є зміщення вантажу з положення рівноваги. Підставляючи (2.50) в (2.49), одержуємо

$$m\ddot{\xi} + k\xi = 0.$$

Вводячи позначення

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

приходимо до рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (2.51)$$

розв'язок якого має такий же вигляд, що і (2.33).

Період гармонічних коливань пружинного маятника дорівнює

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

З точки зору теорії коливань, системи, що описуються рівняннями (2.51) і (2.30) еквівалентні одна одній, не дивлячись на те, що між ними є глибокі фізичні відмінності: сила, що повертає математичний (фізичний) маятник у положення рівноваги, є тангенціальна складова сили тяжіння і пропорційна його масі; для пружинного маятника такою „відновлюючою силою” є пружна сила пружини. Звідси відмінність залежності періода коливань математичного і пружинного маятника - у випадку математичного маятника аналогом сталої пружності „ k ” є прискорення вільного падіння g .

Якщо вантаж, що висить на пружині, зазнає з боку повітря силу тертя, пропорціональну швидкості

$$F_{\text{тертя}} = -h\dot{z}$$

де h – коефіцієнт тертя, то рівняння руху вантажу на пружині буде мати вигляд

$$m\ddot{z} = -k(z - \lambda) + mg - h\dot{z} \quad (2.52)$$

Як і раніше

$$z_0 = \lambda + \frac{mg}{k} -$$

тобто наявність сил тертя не впливає на положення рівноваги.

Введемо знову змінну

$$\xi = z - z_0$$

тоді рівняння (2.52) приймає вигляд

$$m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + k\xi = 0 \quad (2.53)$$

Замінюючи $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\delta = \frac{h}{m}$

Приведемо рівняння (2.53) до вигляду

$$s'' + 2\delta s' + \omega_0^2 s = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$s = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ - частота коливань.}$$

Період затухаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

більше періода вільних коливань

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Позначимо τ проміжок часу, за який амплітуда коливань зменшується у „ e ” разів. Тоді

$$e^{-\delta\tau} = e^{-1},$$

звідки

$$\delta\tau = 1, \quad \delta = \frac{1}{\tau}.$$

Таким чином δ - коефіцієнт затухання – обернений інтервалу часу, протягом якого амплітуда зменшується у „ e ” разів.

Нехай N – число коливань, протягом яких амплітуда зменшується у „ e ” разів, тоді

$$\tau = NT.$$

Відношення амплітуд коливань за період коливань T дорівнює ($t_{n+1} = t_n + N$)

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = e^{-\delta T}$$

Логарифм цього відношення називається логарифмічним декрементом затухання

$$-d = \lambda n \frac{s_{n+1}}{s_n} = -\delta T,$$

тобто логарифмічний декремент затухання

$$d = \delta T.$$

Якщо час τ затухання в e разів

$$\tau = NT,$$

то логарифмічний декремент буде дорівнювати

$$d = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

тобто логарифмічний декремент затухання d обернений числу коливань, по закінченню яких амплітуда зменшується в e разів.

Крім того, вживають добротність

$$Q = \frac{\pi}{d} = \pi N.$$

Добротність тим більша, чим довше тривають коливання маятника.

2.4.3 Дія синусоїдальної сили на незатухаючий гармонічний осцилятор

Припустимо, що на пружинний маятник діє зовнішня періодична сила

$$f(t) = F \cos \omega t,$$

де ω - частота зміни зовнішньої сили.

Диференціальне рівняння коливань тоді приймає вигляд

$$m \ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = F_0 \cos \omega t, \quad (2.54)$$

де $F_0 = \frac{F}{m}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли опір у середовищі відсутній: $\delta = 0$, тоді рівняння (2.54) приймає вигляд

$$m \ddot{s} + \omega_0^2 s = F_0 \cos \omega t \quad (2.55)$$

Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді правої частини

$$s = a \cos \omega t,$$

$$\dot{s} = -a\omega \sin \omega t$$

тоді

$$\ddot{s} = -a\omega^2 \cos \omega t,$$

підставляючи яке у (2.55), одержуємо

$$a(-\omega^2 + \omega_0^2) = F_0,$$

тобто

$$a = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$s = \frac{F_0 \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

де a – амплітуда вимушених коливань.

При $\omega = 0$ $a = \frac{F_0}{\omega_0^2},$

а при $\omega \rightarrow \omega_0$ $a \rightarrow \infty$. Така функція називається дельта-функцією (рис. 2.17)

Це випадок резонансу у відсутності опору.

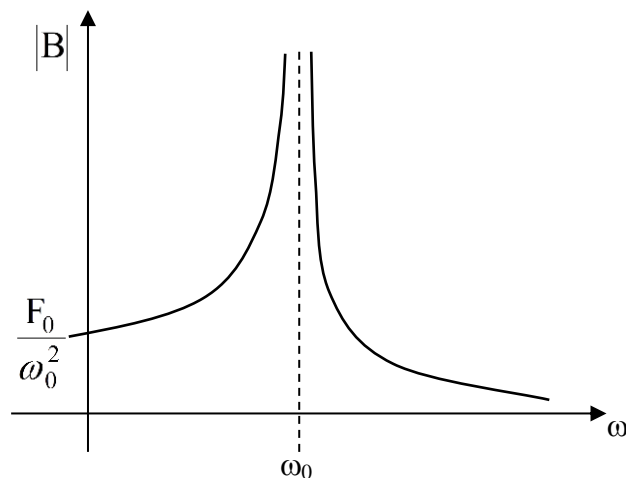


Рис. 2.17. Резонанс у відсутності опору.

2.4.4 Додавання гармонічних коливань одного напрямку і однакової частоти. Биття

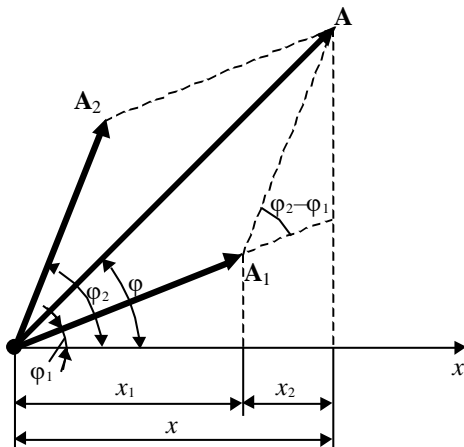


Рис. 2.18. Векторна діаграма двох гармонічних коливань одного напрямку і однакової частоти.

Коли тіло бере участь у кількох коливальних процесах, тоді необхідно знайти результуюче коливання, або коливання треба додати. Додамо гармонічні коливання одного напрямку і однакової частоти,

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

для чого збудуємо векторні діаграми цих коливань (рис.2.18).

Рівняння результуючого коливання має вигляд

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.56)$$

Амплітуда A та фаза φ мають такі значення, відповідно

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (2.58)$$

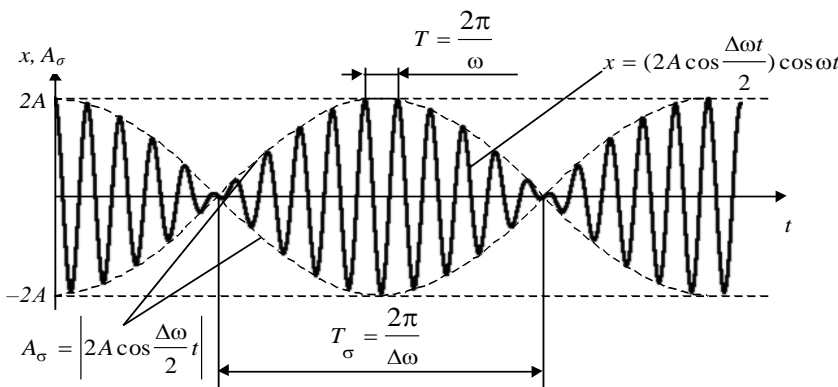


Рис. 2.19. Графік биття.

Таким чином, тіло, що бере участь у двох гармонічних коливаннях одного напрямку і однакової частоти, також здійснює гармонічні коливання з частотою доданих коливань. Амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ доданих коливань.

Якщо

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi (m=0, 1, 2, \dots),$$

то амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд

$$A = A_1 + A_2.$$

Якщо

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m+1)\pi (m = 0, 1, 2, \dots),$$

то амплітуда результуючого коливання дорівнює різниці амплітуд

$$A = A_1 - A_2.$$

Розглянемо додавання коливань однакової амплітуди і різних частот - ω та $\omega + \Delta\omega$ у тому випадку, коли різниця частот мала $\Delta\omega \ll \omega$:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}$$

Додаючи коливання, одержуємо

$$x = (2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cos \omega t. \quad (2.59)$$

Результуюче коливання виявляється гармонічним з частотою ω , амплітуда якого A змінюється за періодичним законом

$$A_\sigma = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (2.60)$$

Частота зміни амплітуди A_σ , тобто частота биття, дорівнює $\Delta\omega$.

Період биття має вигляд

$$T_\sigma = 2\pi / \Delta\omega$$

Графік залежності (2.59) зображений на рис 2.19, де суцільні жирні лінії зображують результуюче коливання, а обвідна лінія – графік повільно змінюваної амплітуди.

2.4.5 Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай коливання задані законами

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Скористаємося формулою

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B,$$

тоді

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 \left| \begin{array}{l} \cos \varphi_2 \\ A_1 \end{array} \right. \frac{x_1}{A_1} &= \cos \omega t \cdot \cos \varphi_1 - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_1, \\ \sin \varphi_1 \left| \begin{array}{l} \cos \varphi_1 \\ A_2 \end{array} \right. \frac{y}{A_2} &= \cos \omega t \cdot \cos \varphi_2 - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Помножимо перше рівняння у (2.62) на $\cos \varphi_2$, друге – на $\cos \varphi_1$ і віднімемо з першого друге:

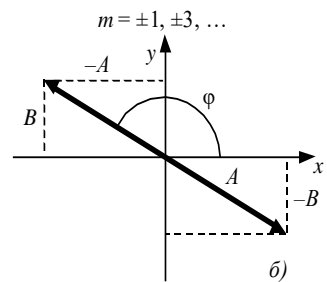
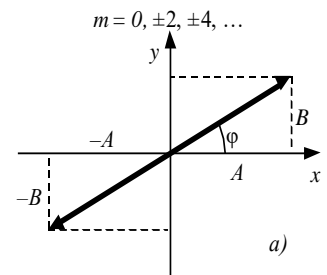


Рис. 2.20. Траєкторії частинки при різниці фаз $\varphi=0$ (а), $\pm\pi$ (б).

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = -\sin \omega t (\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \sin \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.63)$$

Помножимо тепер перше рівняння у (2.62) на $\sin \varphi_2$, друге на $\sin \varphi_1$ і віднімемо з першого – друге:

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.64)$$

Зведемо в квадрат рівняння (2.63) і (2.64) і додамо праву і ліву частини:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1\right)^2 = \\ = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Перетворюючи, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{A_1^2} (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) + \frac{y^2}{A_2^2} (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) - \frac{2xy}{A_1 A_2} \{\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1\} = \\ = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (2.66)$$

або, враховуючи формулу

$$\cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

маємо

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.67)$$

Це рівняння є рівнянням еліпса. Таким чином, у результаті додавання двох взаємно перпендикулярних векторів, утворюється вектор, кінець якого рухається по еліпсу.

Якщо різниця фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ кратна π (коливання знаходяться у протифазі), то (2.67) перетворюється до вигляду

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0, \quad (2.68)$$

або
$$y = -\frac{A_1}{A_2} x, \quad (2.69)$$

що представляє собою пряму.

Сумарне коливання стає при цьому лінійно-поляризованим. Якщо різниця фаз кратна $\pi | 2$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi / 2,$$

то рівняння (2.63) переходить у рівняння еліпса:

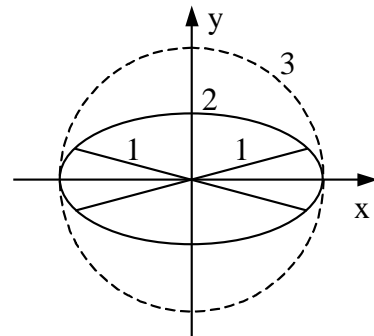


Рис. 2.21. Траєкторії вектора S . $\Delta \varphi = \pi$ (1), $\pi / 2$ (2), $A_1 = A_2 = A$ (3).

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

яке переходить у рівняння кола при $A_1 = A_2 = A$.

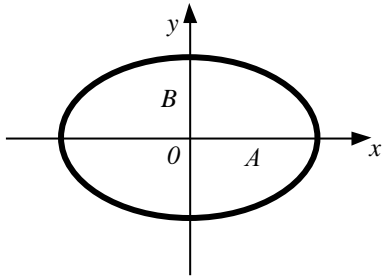


Рис. 2.23. Траєкторія частинки при різниці фаз $\pm \pi/2$

дорівнює відношенню числа перетинань фігур Ліссажу з прямими, паралельними осям координат. По вигляду фігур можна визначити невідому частоту по заданій частоті, або визначити співвідношення частот доданих коливань.

Якщо частоти доданих взаємно перпендикулярних коливань різні, то замкнені траєкторії результуючих коливань досить складні і називаються фігурами Ліссажу. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз доданих коливань. На рис. 2.22 наведені фігури Ліссажу для різних співвідношень частот (вказано ліворуч) і різниць фаз (вказано вгорі). Відношення частот доданих коливань

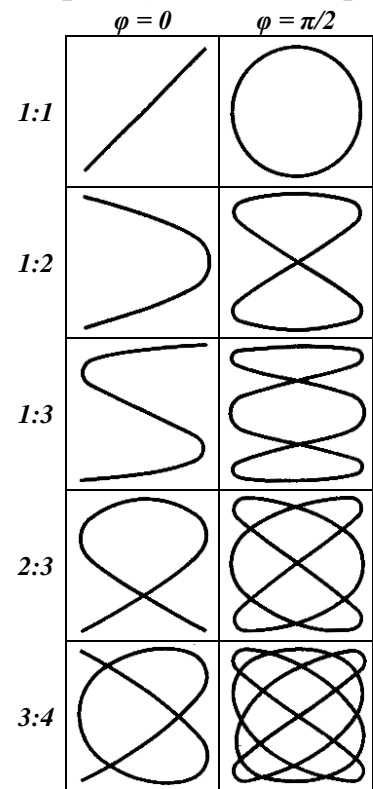


Рис. 2.22. Фігури Ліссажу

2.4.6 Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язання

Гармонічні коливання розглядалися не враховуючи опору середовища. Взаємодія тіла з середовищем приводить до переходу енергії тіла, що рухається, у внутрішню енергію середовища, тобто у теплову енергію і представляє собою розсіяння або дисипацію енергії. З механічної точки зору цей процес може бути описаний введенням додаткової сили, яка з'являється у результаті самого руху і спрямована протилежно йому. Цю силу називають силою тертя. При достатньо малих швидкостях руху вона пропорційна швидкості тіла

$$F_{mp} = -\beta \cdot v, \tag{2.70}$$

де β - стала, що характеризує взаємодію тіла з середовищем. Втрату енергії тілом при цьому визначимо, як роботу, що виконується силою тертя

$$dE = F_{mp} dx. \tag{2.71}$$

Зміщення за час dt визначається виразом

$$dx = v dt,$$

звідки втрата енергії

$$dE = -\beta v^2 dt. \tag{2.72}$$

Якщо v^2 у (2.72) помножити і поділити на масу m і на 2:

$$v^2 = \frac{2v^2}{2} \frac{m}{m} = \frac{2E}{m},$$

то зміну енергії (2.72) можна представити у вигляді:

$$dE = - \frac{\beta 2E}{m} dt = - 4\delta E dt, \quad (2.73)$$

де $2\delta = \frac{\beta}{m}$ - коефіцієнт опору.

Розділяючи у (2.73) змінні і інтегруючи, маємо

$$\frac{dE}{E} = d(\ln E) = - 4\delta dt,$$

звідки знаходимо остаточно

$$E = E_0 \lambda^{-4\delta t},$$

де E_0 - значення енергії при $t = 0$. Таким чином, сили тертя приводять до дисипації енергії за експоненціальним законом.

Рівняння затухаючих коливань одержимо з рівняння руху

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

де під силою F мається на увазі рівнодіюча сил

$$F = -kx - \beta v = -kx - \beta \dot{x}. \quad (2.74)$$

Рівняння затухаючих коливань приймає вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - kx - \beta \dot{x},$$

або остаточно

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.75)$$

де використані введені раніше позначення

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\delta = \frac{\beta}{m}$$

Для розв'язання рівняння (2.75) запишемо характеристичне рівняння

$$r^2 + 2\delta \cdot r + \omega_0^2 = 0$$

корені якого при

$$\omega_0 > \gamma$$

комплексні

$$r_{1,2} = - \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = - \delta \pm i\omega,$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

частота коливань при наявності опору середовища. Розв'язок рівняння (2.75) при цьому має вигляд

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.76)$$

і представляє собою гармонічне коливання з частотою

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

і амплітудою, яка зменшується за експоненціальним законом.

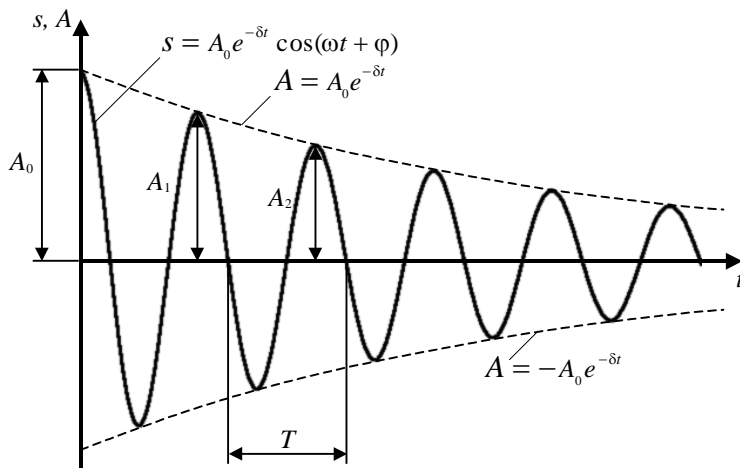


Рис.2.24. Графік затухаючого коливання.

$$A = A_0 e^{-\delta t}$$

A_0 — початкова амплітуда.

Час $\tau = 1/\delta$, протягом якого амплітуда згасаючих коливань зменшується у “e” разів, називається часом релаксації. Згасання порушує періодичність коливань, тому згасаючі коливання є неперіодичними, і, точно кажучи, до них непридатне

поняття періоду або частоти. Проте, якщо згасання мале, то умовно можна використовувати поняття періоду як відрізка часу між двома наступними максимумами (або мінімумами) коливального процесу фізичної величини. Тоді період згасаючих коливань дорівнює

$$T = 2\pi / \omega = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Якщо $A(t)$, $A(t + T)$ — амплітуди двох послідовних коливань, відповідних моментам часу, що відрізняються періодом, то відношення амплітуд

$$\frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\delta T}$$

називається **декрементом згасання**, а його логарифм

$$d = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} = \delta T = \frac{T}{t} = \frac{1}{N_e}$$

логарифмічним декрементом згасання; N_e — число коливань, що виконуються за час зменшення амплітуди у “e” разів.

Для характеристики коливальної системи користуються поняттям **добротності Q**, яке при малих значеннях логарифмічного декременту дорівнює:

$$Q = \frac{\pi}{d} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

(припускаємо, що T дорівнює T_0). З цієї формули випливає, що добротність пропорційна числу коливань N_e , що здійснюються системою за час релаксації. Підкреслимо, що при зростанні коефіцієнта згасання δ період згасаючих коливань зростає і при $\delta = \omega_0$ перетворюється на нескінченність, тобто рух

перестає бути періодичним.

2.4.7 Вимушені коливання

Для того, щоб у реальній коливальній системі отримати незгасаючі коливання, треба компенсувати втрати енергії. Така компенсація можлива за допомогою будь-якої періодичної змушуючої сили

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Тоді рівняння маятника (2.74) приймає вигляд

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

або приходимо до рівняння аналогічного (2.75)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0 / m) \cos \omega t. \quad (2.77)$$

Коливання, що виникають під дією зовнішньої періодичної сили, називаються **вимушеними механічними коливаннями**.

Розв'язання рівняння (2.77) будемо шукати у вигляді правої частини

$$x = Ae^{-i\omega t},$$

зважаючи, що

$$\sin \omega t = Im e^{-i\omega t}, \quad \cos \omega t = Re e^{-i\omega t}$$

де Im , Re – уявна та дійсна частини комплексної величини. Тоді рівняння (2.77) приймає вигляд

$$A(-\omega^2 - 2i\omega\delta + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m},$$

розв'язання якого дає амплітуду стаціонарних коливань

$$A(\omega) = Im \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta} \quad (2.78)$$

Якщо змушуюча частота наближується до нуля $\omega \rightarrow 0$, то для амплітуди статичного відхилення коливальної частинки, одержуємо

$$A(0) = x_0 = \frac{F_0}{2\omega_0^2} \quad (2.79)$$

Перетворюючи вираз (2.78), знаходимо залежність амплітуди стаціонарних коливань від частоти ω

$$\begin{aligned} A(\omega) &= Im \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) - 2i\omega\delta} = \frac{F_0}{2m\omega_0} Im \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i\delta} = \\ &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \cdot \frac{\delta^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2} \end{aligned}$$

де враховано, що поблизу резонансу

$$\omega_0 \rightarrow \omega (\omega_0 - \omega \ll \omega_0)$$

можна припустити, що $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$. При точному резонансі $\omega_0 = \omega$ амплітуда приймає вигляд

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\omega_0\delta} = \frac{\omega_0}{2\delta} \cdot \frac{F_0}{m\omega_0^2} = Q \cdot x_0, \quad (2.80)$$

де введена добротність $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$.

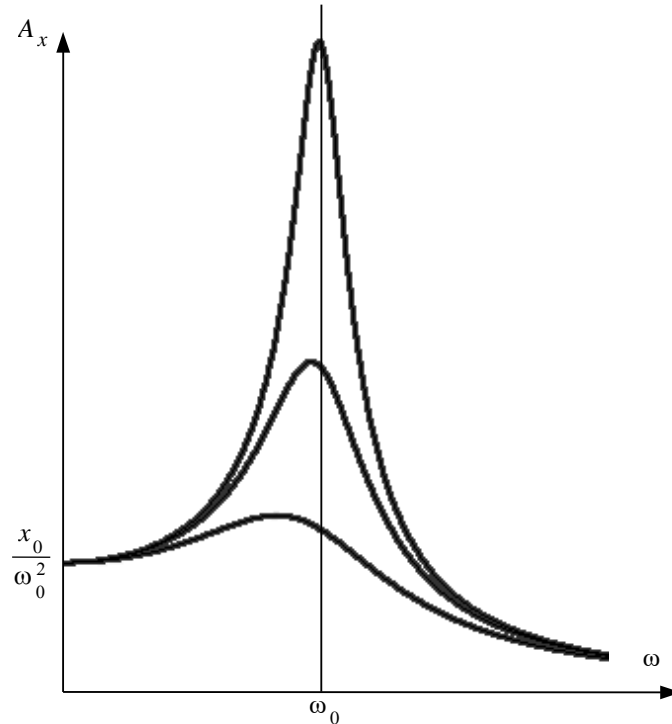


Рис. 2.25. Резонансні криві при різних значеннях δ

Таким чином, амплітуда змущених коливань зростає порівняно з статичним відхиленням x_0 у Q разів – чим більше добротність, тим більша амплітуда $A(\omega)$. Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань в умовах наближення частоти ω змущуючої сили до частоти власних коливань ω_0 **називається резонансом**. На рис. 2.25 наведена залежність амплітуди від частоти для декількох значень δ . Знайдемо ширину резонансної кривої на піввисоті, коли амплітуда дорівнює половині свого максимального значення

$$A(\omega) = \frac{1}{2} A(\omega_0)$$

Тоді

$$\frac{A(\omega)}{A(\omega_0)} = \frac{1}{2} = \frac{\delta^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2},$$

звідки напівширина резонансної лінії дорівнює

$$\omega_0 - \omega = \delta$$

Враховуючи, що напівширина резонансної лінії γ пов'язана з добротністю

$\delta = \frac{\omega_0}{2Q}$, знаходимо, що зростання добротності спричиняє до звуження резонансної лінії.

2.5 Хвилі деформації

2.5.1 Скалярні хвилі

Поширення коливань у просторі пов'язано з поняттям хвилі або з просторовим чергуванням максимумів і мінімумів будь-якої фізичної величини, наприклад, густини речовини, температури, які змінюються з часом. Хвилею називають також явище, при якому у просторі відбувається поширення короткочасного механічного або іншої якоїсь природи імпульсу або "поштовок". Розглянемо спочатку імпульс, який переміщується у просторі у вигляді довільної скалярної функції, залежної від лінійної комбінації часу і координат $t - \frac{x}{u}$:

$$S(t, x) = S\left(t - \frac{x}{u}\right).$$

Ця формула показує, що величина S у кожний момент часу має відмінні значення у точках різних перерізів $x = \text{const}$. З плином часу значення S на кожній з цих площин змінюється. Розглянемо графік залежності S від t у двох різних перерізах $x=0$ та $x=x_1$ (рис.2.26). Нехай залежність $S(t, 0)$ визначається деякою кривою.

$$S(t, 0) = S(t).$$

У точці $x=x_1$ імпульс має вигляд

$$S(t, x_1) = S\left(t - \frac{x_1}{u}\right).$$

$$S\left(t - \frac{x_1}{u}\right).$$

Функціональна залежність від часу S у точках площини $x=x_1$ точно відтворює залежність від часу S у точках площини $x=0$, і з співзнесенням на час $\frac{x_1}{u}$, де під u

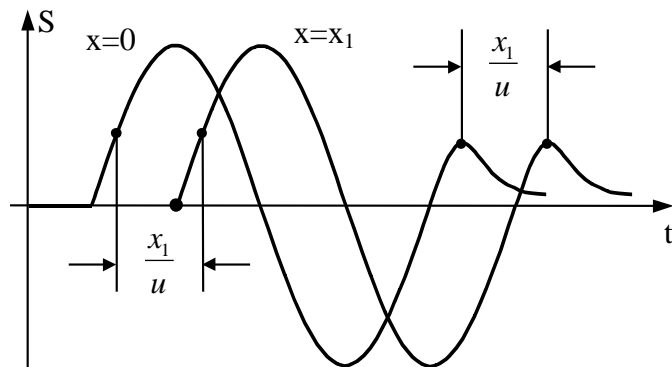


Рис. 2.26. Хвильовий імпульс. Криві відносяться до перерізів $x=0$, $x=x_1$.

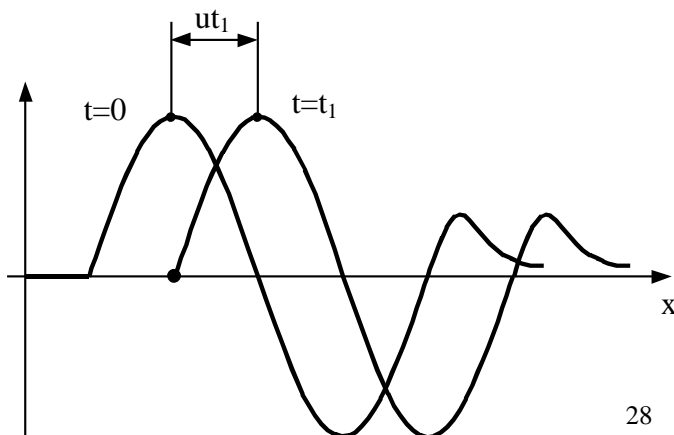


Рис.2.27. Миттєві знімки хвилі у моменти часу $t = 0$, $t = t_1$.

розуміють швидкість поширення імпульсу.

Розглянемо тепер миттєвий знімок хвилі у момент часу $t = 0$ (рис.2.27)

$$S(0, x) = S\left(-\frac{x}{u}\right).$$

У момент $t = t_1$ рівняння хвилі має вигляд

$$S(t, x) = S\left(t_1 - \frac{x}{u}\right) = S\left(\frac{t_1 u - x}{u}\right).$$

Порівняння цих формул показує, що миттєвий знімок хвилі у момент $t = t_1$, відрізняється від хвилі у момент $t = 0$ тільки переміщенням на відстань ut_1 .

Таким чином, імпульсна хвиля переміщується з швидкістю u , не змінюючи свого вигляду, в бік зростання координати x .

2.5.2 Плоска синусоїдальна хвиля

Нехай коливання $S = A \sin(\omega t + \varphi)$ виникає у якійсь точці пружного простору. При цьому коливання поширюються від однієї точки простору до другої з швидкістю u .

Закон коливань у різних точках простору x відбувається з однією і тією ж амплітудою і частотою, але з зміщеною фазою. Зміщення, або зсув, фази залежить від відстані x , яку проходить хвиля у просторі. Зсув фази пов'язаний з швидкістю хвилі. Справді, розглянемо коливання у т. $x = 0$:

$$S = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.81)$$

де початкова фаза $\varphi_0 = 0$ (рис.2.28).

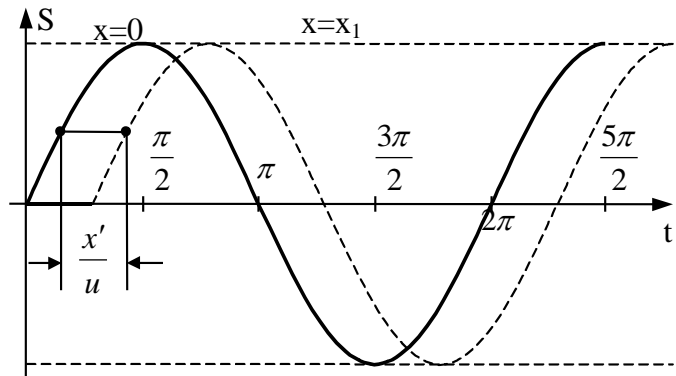


Рис.2.28. Плоска хвиля.

Колівання хвилі відповідають двом точкам простору $x = 0$, $x = x'$.

Нехай хвиля переміщується у точку $x = x'$. На це необхідний час

$$t' = \frac{x'}{u}, \quad (2.82)$$

де u - швидкість хвилі. Тоді у точці $x = x'$ коливання відбуваються за законом

$$S = A \sin(\omega(t - t')) = A \sin(\omega t - \omega t') = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega x'}{u}\right) = A \sin(\omega t - kx'), \quad (2.83)$$

де уведено хвильове число k :

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.84)$$

λ - довжина хвилі.

Таким чином, при поширенні хвилі виникає зсув фази на величину

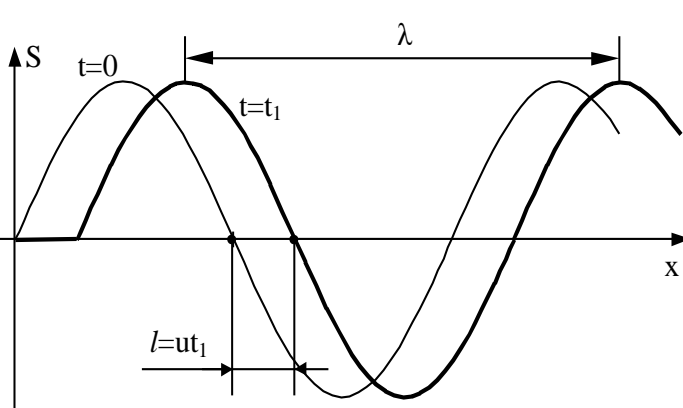


Рис.2.29. Хвиля у просторі x . Миттєві знімки хвилі у моменти часу $t = 0, t = t_1, \lambda = ut_1$.

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{\omega x'}{u}, \quad (2.85)$$

залежну від відстані x' , яку проходить хвиля. Різницю фаз між двома точками можна пов'язати з довжиною хвилі:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \quad (2.86)$$

Розглянемо тепер поширення хвилі в залежності від координати x . Миттєвий знімок хвилі в

момент $t = 0$ показує коливання (рис.2.29)

$$S = A \sin(-kx). \quad (2.87)$$

Миттєвий знімок тієї ж хвилі у момент $t = t_1$

$$S = A \sin(-kx + kut_1) = A \sin\{-k(x - ut_1)\}. \quad (2.88)$$

При цьому хвиля у момент $t = t_1$ відрізняється від хвилі у момент $t = 0$ тільки зміщенням праворуч на відстань $\lambda = ut_1$ (рис.2.29).

Таким чином, хвиля переміщується з швидкістю u , не змінюючи своєї форми, у напрямку зростання координати x .

Довжина хвилі λ - це відстань між двома точками хвилі, які коливаються з однаковою фазою, тобто λ - це така відстань, що при будь-якому x

$$S(x + \lambda) = S(x). \quad (2.89)$$

Між довжиною хвилі λ і періодом T (часом одного повного коливання) існує взаємозв'язок:

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

звідки

$$\frac{\lambda}{T} = u. \quad (2.90)$$

2.5.3. Типи синусоїдальних хвиль

Поширення в однородному середовищі хвиль деформації наочно описується на основі уявлень голландського фізика Гюйгенса (1629 – 1695 рр.) про фронт хвилі і вторинних хвиль. Якщо в деякій точці простору виникла

деформація пружного середовища, то, згідно з принципом Гюйгенса, ця деформація поширюється у вигляді сферичних хвиль. При цьому вводять поняття фронту хвилі:

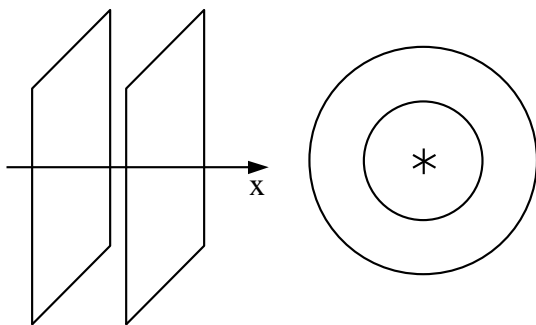


Рис. 2.30. Плоска і сферична хвилі.

Фронт хвилі – це хвильова поверхня, кожна точка якої коливається з однаковою фазою. Рівняння сталої фази $\omega t - kx = const$, то швидкість поверхні сталої фази (швидкість фронту хвилі) називається фазовою швидкістю.

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Фронт хвилі може бути площиною (плоска хвиля) або сферою (сферична

хвиля).

Поширення хвилі у просторі згідно з принципом Гюйгенса пояснюється тим, що кожна точка фронту хвилі є джерелом вторинних хвиль, обвідна яких дає новий фронт хвилі у наступній точці простору і в наступний момент часу.

Раніше розглядалися скалярні хвилі S . Хвиля може бути векторною величиною

$$\vec{V} = f(\omega t - kx).$$

Якщо вектор \vec{V} перпендикулярний до напрямку поширення (рис.2.31), тобто до вісі x , то хвиля називається поперечною, якщо вектор \vec{V} паралельний напрямку поширення, то хвиля називається повздовжною. У загальному випадку вектор має повздовжню і поперечну складові. Хвиля називається лінійно – поляризованою, якщо вектор \vec{V} коливається в одній площині, і поляризованим по колу (або еліпсу), якщо кінець вектора при коливанні описує траєкторію – гвинтову лінію. Синусоїдальна біжуча хвиля

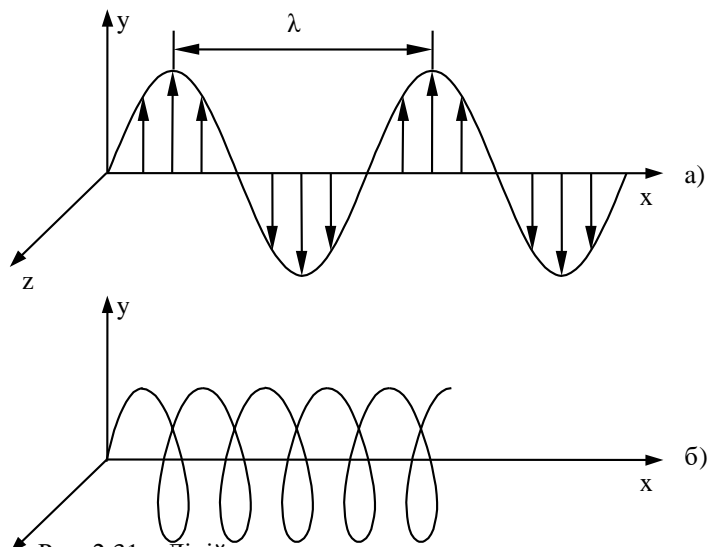


Рис. 2.31. Лінійно - поляризована хвиля .

Рис.2.32. Хвиля, поляризована по колу. Гвинтова лінія – геометричне місце кінців вектора \vec{V} , що відносяться до різних x при одному і тому ж t .

$$S = A \cos(\omega t - kx) \quad (2.91)$$

відповідає хвильовому рівнянню

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = u^2 \frac{d^2 S}{dx^2} \quad (2.92)$$

де $u = \frac{\omega}{k}$ - швидкість хвилі для пружного середовища, що підпорядковується закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.93)$$

де ε - відносне поширення,
 E - модуль Юнга.

Поширення пружної деформації в середовищі представляє собою пружні хвилі. Прикладом можуть служити звукові хвилі у твердих тілах, рідинах і газах. Цікавим є питання про швидкість поширення пружних збуджень у середовищі.

Розрахуємо швидкість поширення малих повздовжних збуджень у стрижні, що виникають у результаті дії постійної сили тиску F , прикладеної до вільного кінця стрижня (рис. 2.33)

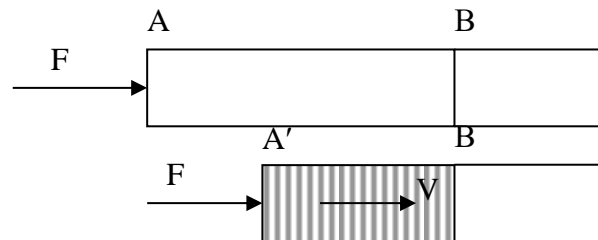


Рис. 2.33

У збуденій області стрижня вся речовина у будь-який момент часу t рухається з постійною швидкістю v . Якщо m – маса деформованої частини стрижня у момент t , то імпульс його буде mv . Приріст імпульсу дорівнює імпульсу сили

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \quad (2.94)$$

За час t збудення проходить шлях $\lambda = ct$,

де c – швидкість збудення, тобто маса збуденої області стрижня

$$m = \rho Sct$$

де S – площа поперечного перерізу стрижня, ρ - його густина.

Підставляючи масу у (2.94), маємо

$$\frac{d}{dt}(\rho Sct \cdot v) = PS$$

де P – тиск. Тому що $P = E \cdot \varepsilon$

маємо $\rho cv = P = E \cdot \varepsilon$.

Для знаходження відносного видовження ε , відмітимо, що $AA' = \Delta\lambda = vt$

Тоді
$$\varepsilon = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}$$

І тиск у стрижні дорівнює

$$P = E \frac{v}{c} = \rho c v,$$

звідки швидкість поширення пружної деформації у стрижні

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Якщо в деякий момент часу сила F припине свою дію, у стрижні утвориться збурена область, границя якої буде поширюватися праворуч з швидкістю c .

Густина кінетичної енергії у збуреній області

$$\omega_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Густина потенціальної енергії

$$\omega_{\text{пот}} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{E}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Таким чином

$$\omega_{\text{кін}} = \omega_{\text{пот}}.$$

У будь-якому бігучому пружному збуренні повна енергія розподіляється порівну між кінетичною і потенціальною.

Рідини і гази мають об'ємну пружність, але не пружність форми. Тому в них можуть поширюватися тільки повздовжні збурення, а не поперечні.

Визначимо, як зміна об'єму газу ΔV пов'язана з приростом його тиску ΔP . Якщо газ знаходиться у трубці, то при зміні тиску на поршень на величину ΔP довжина газового стовпа зміниться на $\Delta \lambda$.

$\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ - є відносний стиск газу. Тоді

$$\Delta P = -A \frac{\Delta \lambda}{\lambda},$$

де A - стала.

З іншого боку для стрижня

$$\Delta P = -E \frac{(\Delta \lambda)}{\lambda}$$

прирівнюючи формули, одержуємо, що у випадку газового стовпа $A = E$, тому що довжина стовпа газу пропорційна об'єму V

$$\Delta P = -E \frac{\Delta V}{V}.$$

З іншого боку

$$\Delta P = \frac{dP}{dV} dV = \left(-V \frac{dP}{dV} \right) \cdot \left(-\frac{\Delta V}{V} \right)$$

Порівнюючи з попередньою формулою, одержуємо

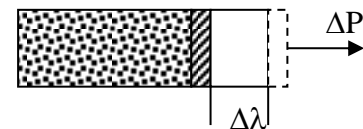


Рис. 2.34

$$E = -V \frac{dP}{dV} \quad (2.95)$$

якщо ввести масу тіла $m = V\rho$, де ρ - густина, то рівняння

$$V \cdot \rho = const \quad (2.96)$$

можна записати у вигляді

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

тому що інтегруючи, одержимо тотожність (2.96):

$$\lambda n V = -\lambda n \rho,$$

звідки

$$\lambda n V \cdot \rho = 0 = \lambda n 1$$

або $V\rho = 1$, що співпадає з (2.96)

Тоді з (2.95) маємо

$$E = -V \frac{dP}{dV} = \frac{VdP}{d\rho} \cdot \frac{\rho}{V} = \rho \frac{dP}{d\rho}$$

і швидкість звуку у газі і рідині дорівнює

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}.$$

2.5.4 Стоячі хвилі

Розглянемо суперпозицію двох хвиль з однаковою амплітудою, частотою, довжиною хвилі, що поширюються у протилежних напрямках:

$$S_1 = A \cos(\omega t + kx) \text{ і } S_2 = A \cos(\omega t - kx) \quad (2.97)$$

Тоді сума хвиль

$$S = S_1 + S_2$$

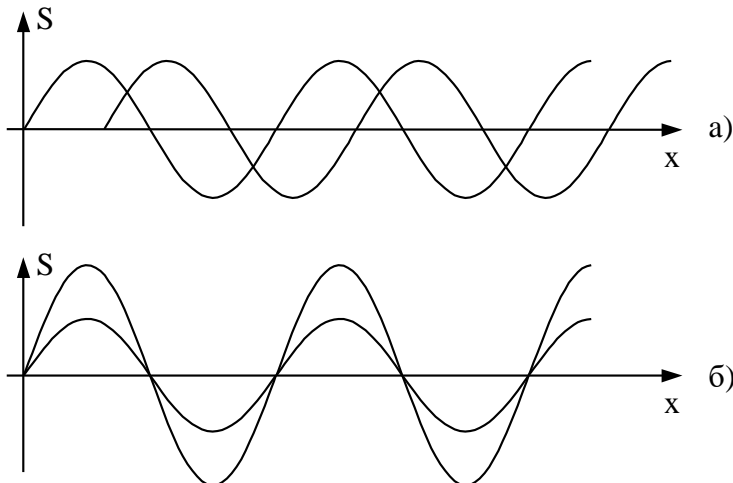


Рис. 2.36 Послідовні моментальні знімки хвилі у різні моменти часу: а) - біжуча хвиля, б) - стояча хвиля.

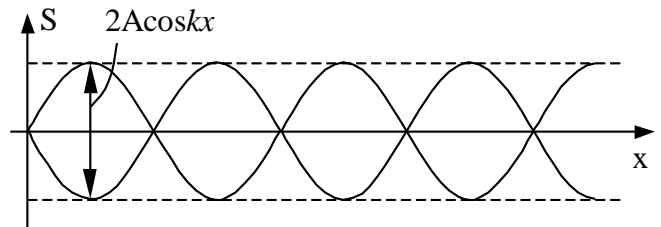


Рис.2.35 Стояча хвиля. Амплітуда коливань $2A \cos kx$ залежить від координати x

згідно формули

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

може бути надана у вигляді

$$S = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t. \quad (2.98)$$

Це рівняння стоячої хвилі.

При цьому величина s у всіх точках простору здійснює гармонічні коливання з однаковою частотою (рис.2.35). Але амплітуда коливання

$2A \cos kx$, на відміну від біжучої хвилі (рис.2.36) відмінна для різних точок простору.

Розміщення мінімумів або максимумів амплітуди знаходяться із умови:

$$kx_{\max} = n\pi,$$

$$kx_{\min} = (2n + 1)\pi/2. \quad (2.99)$$

При цьому ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) розміщення максимуму (пучності) хвилі відповідає умові

$$x_m = n \frac{\lambda}{2}, \quad (2.100)$$

а мінімуму (вузлу) хвилі - умові

$$x_{\min} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (2.101)$$

Таким чином, відстані між двома сусідніми максимумами

$$\Delta x_{\max} = \frac{\lambda}{2},$$

так і між двома вузлами стоячої хвилі

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2},$$

дорівнюють половині довжини хвилі.

Цікавий ефект виникає при русі випромінювача звуку (пружної деформації) з швидкістю, яка перевищує швидкість звуку у даному середовищі. Тоді обвідна фронту вторинних хвиль не повторює сферичну форму фронту хвилі, а представляє собою конус (рис. 2.37).

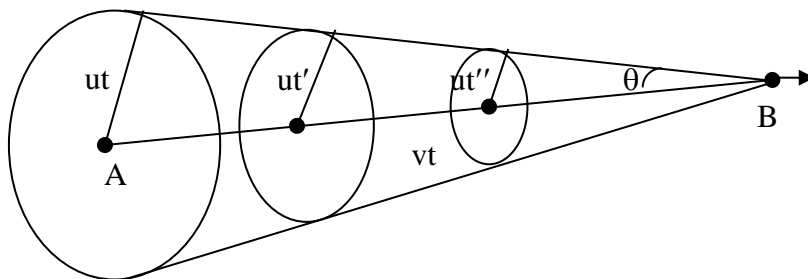


Рис. 2.37. Обвідна фронту хвиль при русі випромінювача звуку з швидкістю v .

Дійсно, нехай A – точка початку руху випромінювача з швидкістю v і звукової хвилі з швидкістю u . За один і той же час t хвиля пройде відстань ut , а випромінювач – відстань vt . Звукові хвилі, що виникають у наступні моменти часу t' , t'' , утворюють фронти, обвідна яких представляє собою конус з кутом θ :

$$\cos\theta = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v} < 1.$$

Конус, що утворився, розділяє області стисненого і розрядженого простору. Виникнення конусу при перевищенні швидкості v над швидкістю

звуку u супроводжується виникненням ударної хвилі стиску. Відношення $\frac{u}{v} = k$ називається числом Маха.

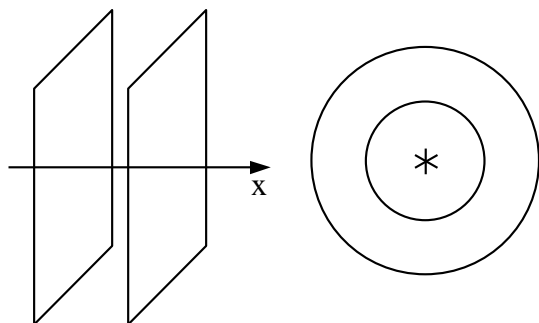


Рис. 2.30. Плоска і сферична хвилі.

Фронт хвилі – це хвильова поверхня, кожна точка якої коливається з однаковою фазою. Рівняння сталої фази $\omega t - kx = const$, то швидкість поверхні сталої фази (швидкість фронту хвилі) називається фазовою швидкістю.

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Фронт хвилі може бути площиною (плоска хвиля) або сферою (сферична

хвиля).

Поширення хвилі у просторі згідно з принципом Гюйгенса пояснюється тим, що кожна точка фронту хвилі є джерелом вторинних хвиль, обвідна яких дає новий фронт хвилі у наступній точці простору і в наступний момент часу.

Раніше розглядалися скалярні хвилі S . Хвиля може бути векторною величиною

$$\vec{V} = f(\omega t - kx).$$

Якщо вектор \vec{V} перпендикулярний до напрямку поширення (рис.2.31), тобто до вісі x , то хвиля називається поперечною, якщо вектор \vec{V} паралельний напрямку поширення, то хвиля називається поздовжньою. У загальному випадку вектор має поздовжню і поперечну складові. Хвиля називається лінійно – поляризованою, якщо вектор \vec{V} коливається в одній площині, і поляризованим по колу (або еліпсу), якщо кінець вектора при коливанні описує траєкторію – гвинтову лінію. Синусоїдальна біжуча хвиля

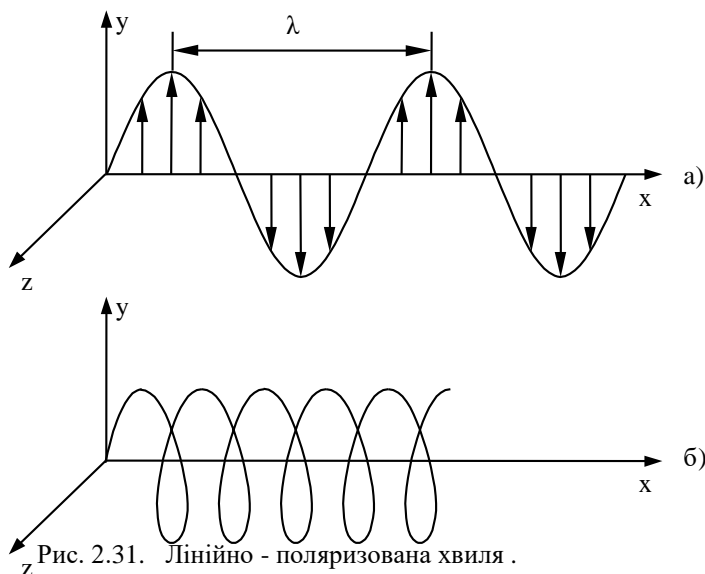


Рис. 2.31. Лінійно - поляризована хвиля .

Рис.2.32. Хвиля, поляризована по колу. Гвинтова лінія – геометричне місце кінців вектора \vec{V} , що відносяться до різних x при одному і тому ж t .

$$S = A \cos (\omega t - kx) \tag{2.91}$$

відповідає хвильовому рівнянню

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = u^2 \frac{d^2 S}{dx^2} \quad (2.92)$$

де $u = \frac{\omega}{k}$ - швидкість хвилі для пружного середовища, що підпорядковується закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.93)$$

де ε - відносне поширення,
 E - модуль Юнга.

Поширення пружної деформації в середовищі представляє собою пружні хвилі. Прикладом можуть служити звукові хвилі у твердих тілах, рідинах і газах. Цікавим є питання про швидкість поширення пружних збуджень у середовищі.

Розрахуємо швидкість поширення малих повздовжних збуджень у стрижні, що виникають у результаті дії постійної сили тиску F , прикладеної до вільного кінця стрижня (рис. 2.33)

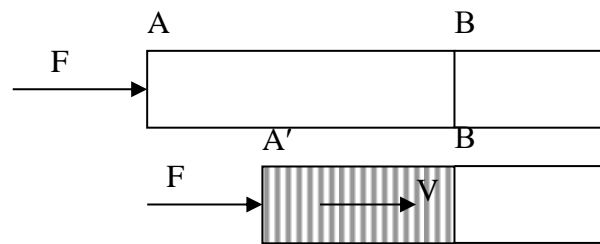


Рис. 2.33

У збуденій області стрижня вся речовина у будь-який момент часу t рухається з постійною швидкістю v . Якщо m – маса деформованої частини стрижня у момент t , то імпульс його буде mv . Приріст імпульсу дорівнює імпульсу сили

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \quad (2.94)$$

За час t збудення проходить шлях $\lambda = ct$,

де c – швидкість збудення, тобто маса збуденої області стрижня

$$m = \rho Sct$$

де S – площа поперечного перерізу стрижня, ρ - його густина.

Підставляючи масу у (2.94), маємо

$$\frac{d}{dt}(\rho Sct \cdot v) = PS$$

де P – тиск. Тому що $P = E \cdot \varepsilon$

маємо $\rho cv = P = E \cdot \varepsilon$.

Для знаходження відносного видовження ε , відмітимо, що $AA' = \Delta\lambda = vt$

Тоді
$$\varepsilon = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}$$

І тиск у стрижні дорівнює

$$P = E \frac{v}{c} = \rho cv,$$

звідки швидкість поширення пружної деформації у стрижні

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Якщо в деякий момент часу сила F припине свою дію, у стрижні утвориться збурена область, границя якої буде поширюватися праворуч з швидкістю c .

Густина кінетичної енергії у збуреній області

$$\omega_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Густина потенціальної енергії

$$\omega_{\text{пот}} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{E}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Таким чином

$$\omega_{\text{кін}} = \omega_{\text{пот}}.$$

У будь-якому бігучому пружному збуренні повна енергія розподіляється порівну між кінетичною і потенціальною.

Рідини і гази мають об'ємну пружність, але не пружність форми. Тому в них можуть поширюватися тільки повздовжні збурення, а не поперечні.

Визначимо, як зміна об'єму газу ΔV пов'язана з приростом його тиску ΔP . Якщо газ знаходиться у трубі, то при зміні тиску на поршень на величину ΔP довжина газового стовпа зміниться на $\Delta \lambda$.

$\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ - є відносний стиск газу. Тоді

$$\Delta P = -A \frac{\Delta \lambda}{\lambda},$$

де A – стала.

З іншого боку для стрижня

$$\Delta P = -E \frac{(\Delta \lambda)}{\lambda}$$

прирівнюючи формули, одержуємо, що у випадку газового стовпа $A = E$, тому що довжина стовпа газу пропорційна об'єму V

$$\Delta P = -E \frac{\Delta V}{V}.$$

З іншого боку

$$\Delta P = \frac{dP}{dV} dV = \left(-V \frac{dP}{dV} \right) \cdot \left(-\frac{\Delta V}{V} \right)$$



Рис. 2.34

Порівнюючи з попередньою формулою, одержуємо

$$E = -V \frac{dP}{dV} \quad (2.95)$$

якщо ввести масу тіла $m = V\rho$, де ρ - густина, то рівняння

$$V \cdot \rho = \text{const} \quad (2.96)$$

можна записати у вигляді

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

тому що інтегруючи, одержимо тотожність (2.96):

$$\lambda \ln V = -\lambda \ln \rho,$$

звідки $\lambda \ln V \cdot \rho = 0 = \lambda \ln 1$

або $V\rho = 1$, що співпадає з (2.96)

Тоді з (2.95) маємо

$$E = -V \frac{dP}{dV} = \frac{VdP}{d\rho} \cdot \frac{\rho}{V} = \rho \frac{dP}{d\rho}$$

і швидкість звуку у газі і рідині дорівнює

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}.$$

2.5.4 Стоячі хвилі

Розглянемо суперпозицію двох хвиль з однаковою амплітудою, частотою, довжиною хвилі, що поширюються у протилежних напрямках:

$$S_1 = A \cos(\omega t + kx) \text{ і } S_2 = A \cos(\omega t - kx) \quad (2.97)$$

Тоді сума хвиль

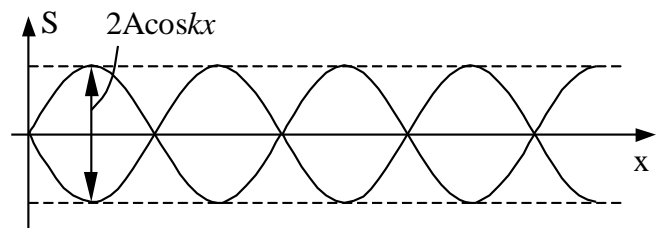


Рис.2.35 Стояча хвиля. Амплітуда коливань $2A \cos kx$ залежить від координати x

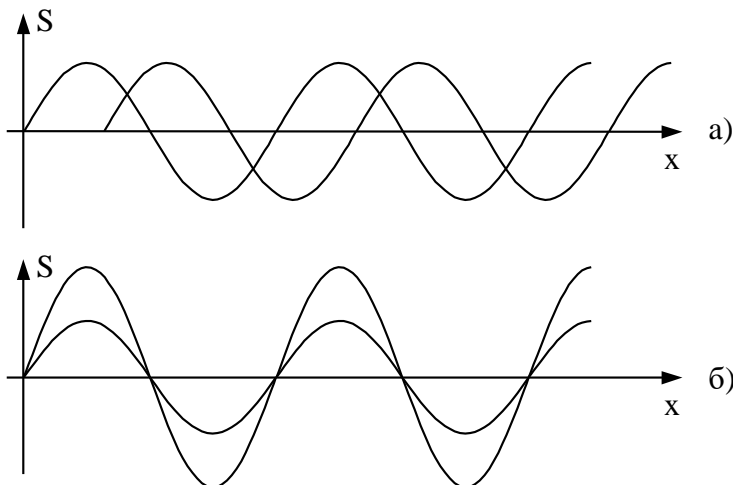


Рис. 2.36 Послідовні моментальні знімки хвилі у різні моменти часу: а) - біжуча хвиля, б) - стояча хвиля.

згідно формули $S = S_1 + S_2$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

може бути надана у вигляді

$$S = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t. \quad (2.98)$$

Це рівняння стоячої хвилі. При цьому величина s у всіх точках простору здійснює гармонічні коливання з

однаковою частотою (рис.2.35). Але амплітуда коливання $2A \cos kx$, на відміну від біжучої хвилі (рис.2.36) відмінна для різних точок простору.

Розміщення мінімумів або максимумів амплітуди знаходяться із умови:

$$kx_{\max} = n\pi,$$

$$kx_{\min} = (2n + 1)\pi/2. \quad (2.99)$$

При цьому ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$) розміщення максимуму (пучності) хвилі відповідає умові

$$x_m = n \frac{\lambda}{2}, \quad (2.100)$$

а мінімуму (вузлу) хвилі - умові

$$x_{\min} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (2.101)$$

Таким чином, відстані між двома сусідніми максимумами

$$\Delta x_{\max} = \frac{\lambda}{2},$$

так і між двома вузлами стоячої хвилі

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2},$$

дорівнюють половині довжини хвилі.

Цікавий ефект виникає при русі випромінювача звуку (пружної деформації) з швидкістю, яка перевищує швидкість звуку у даному середовищі. Тоді обвідна фронту вторинних хвиль не повторює сферичну форму фронту хвилі, а представляє собою конус (рис. 2.37).

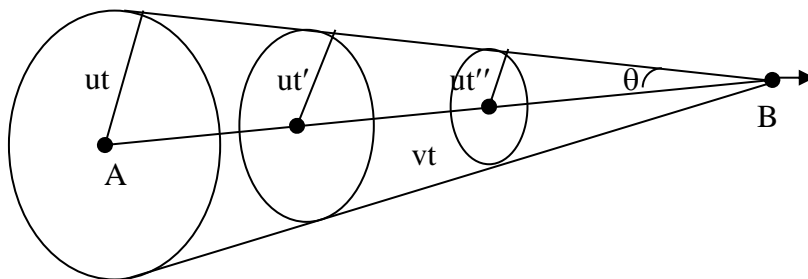


Рис. 2.37. Обвідна фронту хвиль при русі випромінювача звуку з швидкістю v .

Дійсно, нехай A – точка початку руху випромінювача з швидкістю v і звукової хвилі з швидкістю u . За один і той же час t хвиля пройде відстань ut , а випромінювач – відстань vt . Звукові хвилі, що виникають у наступні моменти часу t' , t'' , утворюють фронти, обвідна яких представляє собою конус з кутом θ :

$$\cos\theta = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v} < 1.$$

Конус, що утворився, розділяє області стисненого і розрядженого простору. Виникнення конусу при перевищенні швидкості v над швидкістю

звуку u супроводжується виникненням ударної хвилі стиску. Відношення $\frac{u}{v} = k$ називається числом Маха.