Аналіз катастроф стаціонарних станів нелінійної динамічної системи. Самостійна робота 2.

Аналіз дивергентної втрати стійкості стаціонарних станів модельної системи

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{kx}{\sqrt{1+(kx)^2}} + y = P(x,y); \\ y' = ax - by = Q(x,y). \end{cases} \qquad (1)$$

Система рівнянь $P(x,y)=0;\ Q(x,y)=0$, що визначає множину стаціонарних станів, має однин очевидний розв'язок – нульовий. Стаціонарним станам відповідають точки перетину кривих, які задаються рівнянням $P(x,y)=0;\ Q(x,y)=0$. В нашому випадку ці криві задаються системою (2):

$$\begin{cases} y = \dfrac{kx}{\sqrt{1+(kx)^2}}; \\ y = \dfrac{a}{b}x. \end{cases} \qquad (2)$$

При $k > a/b$ маємо три розв'язки, при $k < a/b$ – один (нульовий).

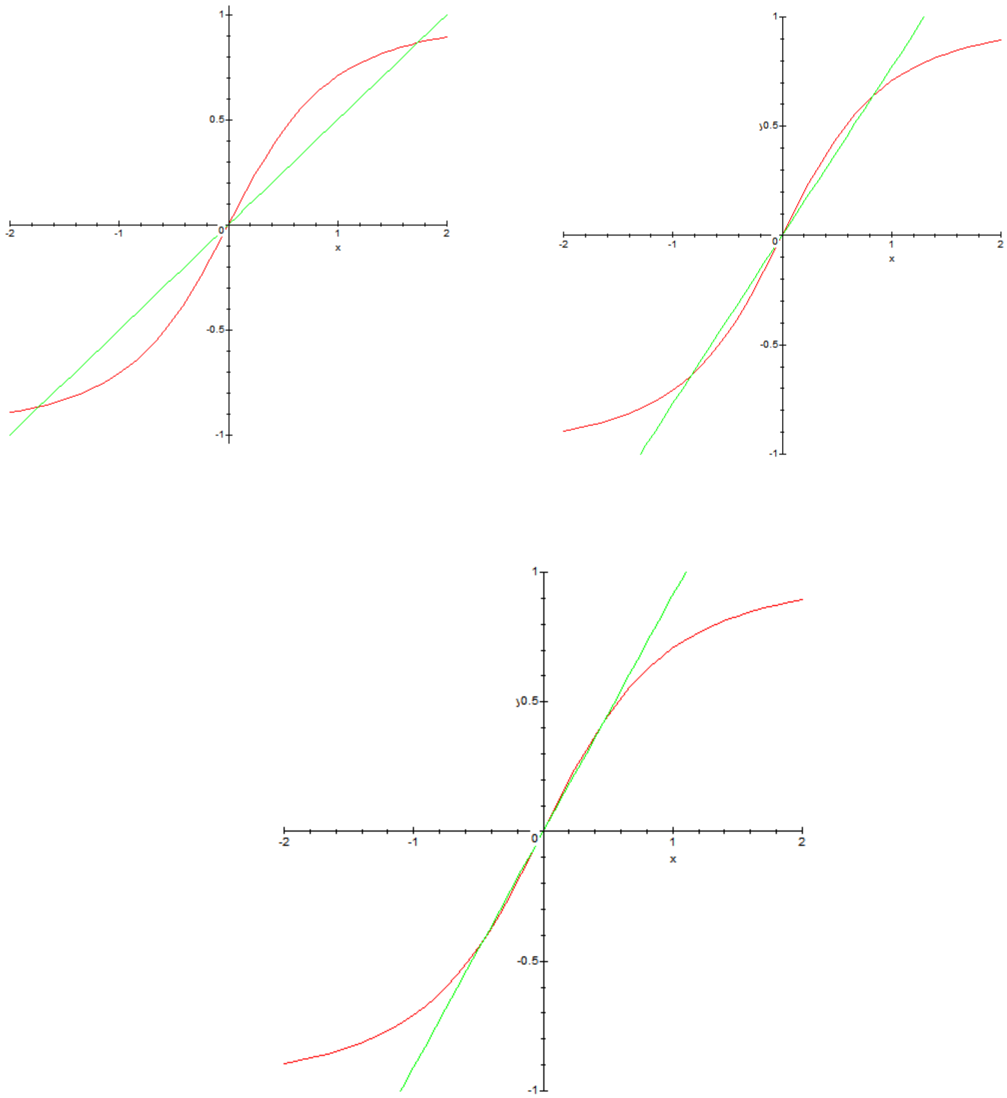


Рис.1.

На рис.1. представлена геометрична інтерпретація визначення стаціонарних станів системи (при $k > a/b$ система має три особливі точки);

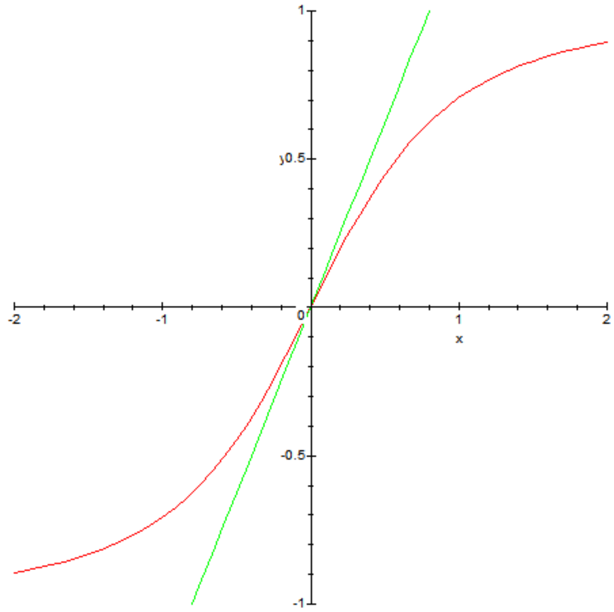


Рис.2.

при збільшені нахилу прямої ($k < a/b$) – одну.

Наступний графік ілюструє множину стаціонарних станів системи (x^*) при зміні параметра керування b:

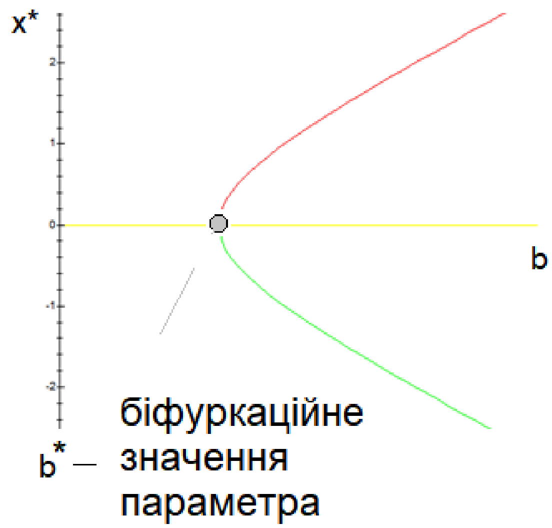


Рис.3.

Стійкість початку координат визначається за лінійним наближенням

$$x' = -kx + y;$$
$$y' = ax - by.$$

Асимптотична стійкість при $k > a/b$ (j=+1) і нестійкість при $k < a/b$ (j=-1). Стійкість (асимптотична) має місце тоді, коли нахил першої ізокліни перевищує нахил другої (на це вказують умови стійкості системи лінійного наближення). В цьому випадку вихідна нелінійна система, крім асимптотично стійкої особливої точки на початку координат має ще пару особливих точок (рис. 1). Якщо ж нахил другої ізокліни перевищить нахил першої, то у вихідної нелінійної системи лишається лише сідлова особа точка (j = -1) на початку координат фазової площини, пара особливих точок зникає.

Це свідчить про те, що зниклі особливі точки були сідловими. Дійсно, сумарний індекс Пуанкаре особливих точок не може змінитися при зміні параметрів, а у єдиної особливої точки, що залишилась, він дорівнює j = -1. Отже, сума індексів трьох особливих точок, одна з яких (на початку координат) мала індекс +1, дорівнює -1, тобто дві інші мали індекс -1.

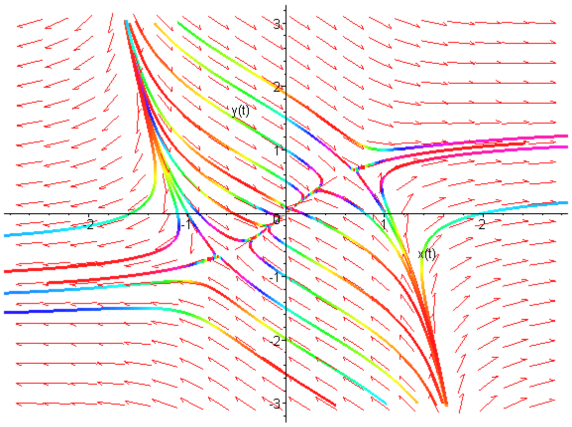


Рис.4

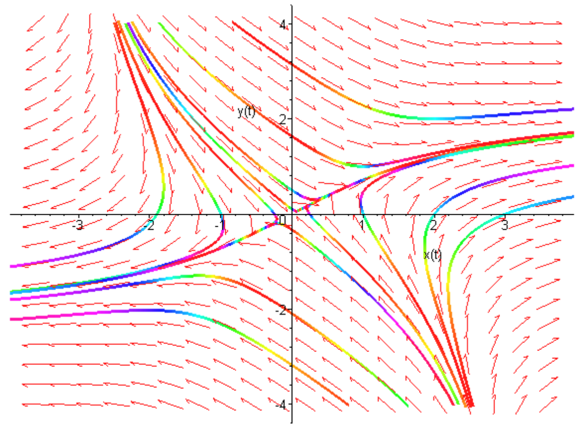


Рис.5

На рис.4 - 5 представлені фазові портрети системи: сідлові особливі точки при зменьшенні параметра b ($k > a/b$) наближаються до початку координат (стійкого вузла); при $k = a/b$ на початку координат з'являється трикратна особлива точка (критичний за Ляпуновим випадок одного нульового кореня); при ($k < a/b$) на початку координат лишається проста особлива точка - сідло.

Питання для самоконтролю.

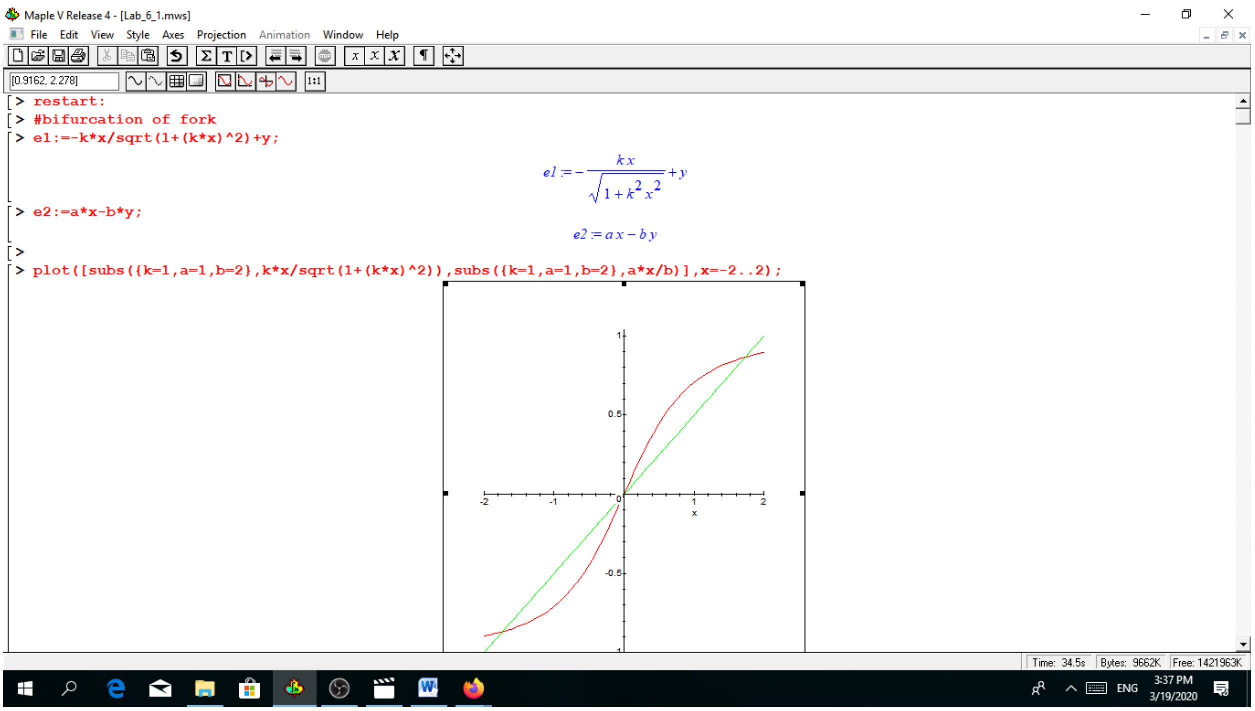
1. Як визначити систему лінійного наближення для ненульових стаціонарних станів.

2. Який індекс Пуанкаре мають ненульові стаціонарні стани.

3. Який тип особливої точки на початку координат при k*b>a.

4. Яку особливість у сенсі теорії катастроф має розглянута вище динамічна система.

Продовжити аналіз модельної динамічної системи в Maple V (Лаб. 6)

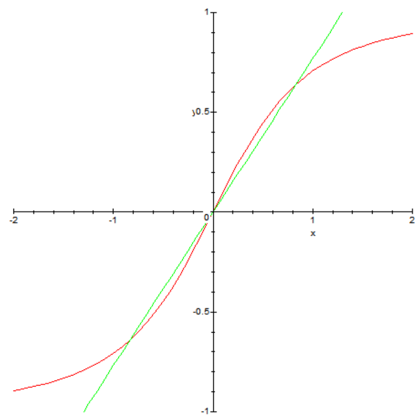


Maple V Release 4 - [Lab_6_1.mws]

File Edit View Insert Format Options Window Help

```
plot([subs({k=1,a=1,b=0.8},k*x/sqrt(1+(k*x)^2)),subs({k=1,a=1,b=0.8},a*x/b)],x=-2..2,y=-1..1);
```

```
> plot([subs({k=1,a=1,b=1.3},k*x/sqrt(1+(k*x)^2)),subs({k=1,a=1,b=1.3},a*x/b)],x=-2..2,y=-1..1);
```




```
> plot([subs({k=1,a=1,b=0.8},k*x/sqrt(1+(k*x)^2)),subs({k=1,a=1,b=0.8},a*x/b)],x=-2..2,y=-1..1);
```

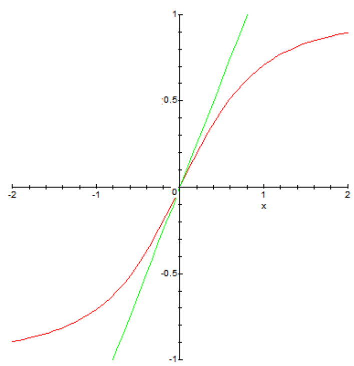
Time: 34.5s Bytes: 9662K Free: 1409931K

3:38 PM 3/19/2020

Maple V Release 4 - [Lab_6_1.mws]

File Edit View Insert Format Options Window Help

```
plot([subs({k=1,a=1},(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),subs({k=1,a=1},-(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),0],b=0..3);
```




```
> solve(k*x/sqrt(1+(k*x)^2)=a*x/b,x);
```

$$0, \frac{\sqrt{-a^2+k^2 b^2}}{a\,k}, -\frac{\sqrt{-a^2+k^2 b^2}}{a\,k}$$

```
> plot([subs({k=1,a=1},(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),subs({k=1,a=1},-(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),0],b=0..3);
```

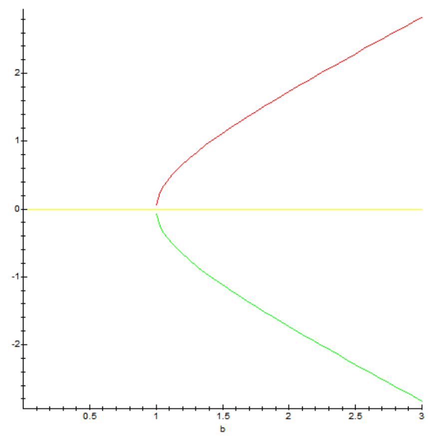
Time Touch keyboard 362K Free: 1406799K

3:39 PM 3/19/2020

Maple V Release 4 - [Lab_6_1.mws]

File Edit View Insert Format Options Window Help

```
plot([subs({k=1,a=1},(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),subs({k=1,a=1},-(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),0],b=0..3);
```




```
> ss1:={x = 0, y = 0};
```

$$ss1 := \{x = 0, y = 0\}$$

```
> with(linalg,jacobian):
```

Time: 3 2 new notifications (Quiet hours on)

3:39 PM 3/19/2020

Maple V Release 4 - [Lab_6_1.mws]

File Edit View Insert Format Options Window Help

```
plot([subs({k=1,a=1},(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),subs({k=1,a=1},-(-a^2+k^2*b^2)^(1/2)/(a*k)),0],b=0..3);
```


```
> Joo1:=subs(ss1,jacobian([e1,e2],[x,y]));
```

$$Joo1 := \begin{bmatrix} -k & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

```
> chp1:=linalg[charpoly](Joo1,lambda);
```

$$chp1 := \lambda^2 + \lambda\, b + k\,\lambda + k\, b - a$$

```
> collect(chp1,lambda);
```

$$\lambda^2 + (b + k)\,\lambda - a + k\, b$$

```
> #j1:=sign(q1);
> #j2:=sign(q2);
> #j3:=sign(q3);
>
```

Time: 3 2 new notifications (Quiet hours on)

3:40 PM 3/19/2020