КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

ЗМІСТ

Тема 1 Особливості сучасного етапу розвитку науки про системи. Основні підходи до дослідження систем.

План

1) Основні поняття та історія виникнення і розвитку науки про системи.
2) Основні підходи до дослідження систем.
3) Особливості розвитку науки про системи.

1 Основні поняття та історія виникнення і розвитку науки про системи

Напочатку розглянемо деякі поняття, використовувані в курсі, що вивчається.

Моделювання - це метод вивчення об'єктів за допомогою створення і дослідження їх моделей. Існує багато визначень поняття математи́чна модель. Найбільш загальними і використовуваними в цьому курсі являються наступні визначення.

Математи́чна модель - математичне представлення реальності, один з варіантів моделі, як системи, дослідження якої дозволяє отримувати інформацію про деяку іншу систему. Найбільш загальне визначення математичної моделі, як сукупності співвідношень, що описують поведінку об'єкту дослідження відповідно до мети дослідження і в певний інтервал часу.

Процесс побудови і вивчення математичних моделей називається **математичним моделюванням**. Усі природні і суспільні науки, що використовують математичний апарат, по суті, займаються математичним моделюванням: замінюють об'єкт дослідження його математичною моделлю і потім вивчають останню. Зв'язок математичної моделі з реальністю здійснюється за допомогою послідовності гіпотез, ідеалізацій і спрощень. За допомогою математичних методів описується, як правило, ідеальний об'єкт, побудований на етапі змістовного моделювання.

Центральним поняттям цього курсу є поняття " **система**". Нині це поняття широко використовується як в науковому так і на інтуїтивному рівні і служить позначенням таких понять як " ціле", "складене з частин", "множина елементів", "єдине ціле, що утворює порядок", "об'єднення множини елементів".

Так, з кінця 30-х років 20-того століття " система" є предметом вивчення математиків, що розглядають вивчення систем " взагалі" як логіко-математичну дисципліну, що займається ізоморфізмом системних понять, законів і моделей в різних предметних областях.

Окрім вказаних понять, в цьому курсі використовується поняття "загальна система", яку вперше ввів Людвіг фон Берталанфі на прикінці 30-х років двадцятого століття. Пізніше поняття "загальна система" отримало розвиток в роботах А. Раппопорта. У свою чергу, американський учений англійського походження Кенет Боулдинг у своїй книзі "Загальна теорія систем - скелет науки. Дослідження по загальній теорії систем", що вийшла у світ в 1969 році, розглядав системи як деякий рівень теоретичної побудови моделі, що лежить між високо узагальненими конструкціями чистої математики і конкретними теоріями спеціальних дисциплін.

Теорія, пов'язана з інформаційними процесами в системах зв'язку і управління сформульована на прикінці 40-х, - 50 -х років минулого століття отримала назву " Кібернетика" (в основі даного наукового напряму лежать роботи Норберта Вінера, Уільяма Роса Эшби, Клода Шеннона та ін.). У 60-і роки виникла теорія, яка грунтується на припущенні, що будь-яку систему можна представити у вигляді відношень на сімействі множин" (в основі роботи М. Месаровича, Я. Такахары). В 60-70 е роки минулого століття у зв'язку з необхідністю проведення міждисциплінарних досліджень при вивченні складних об'єктів різної фізичної природи виникла і оформилася в самостійний науковий напрям методологія виділення і рішення системних завдань, автором якої є Дж Клір.

2 Основні підходи до дослідження систем

Прийнято виділяти наступні основні підходи до дослідження систем :

1) підхід, при якому теорія систем розглядається як розширення і узагальнення теорії управління. Авторами цього напряму є такі вчені як М. Месарович, А. Летов, К. Боулдинг;

2) структуралістський підхід - це підхід, в основу якого покладено вивчення структурних характеристик системи, що описують її поведінку при цьому не розглядаються такі функції системи як " лінійність", " стаціонарність", " гладкість". Великий внесок у розвиток цієї теорії внесли такі учені як Норберт Вінер, Уільям Рос Эшби, Клод Шеннон, А.Н. Колмогоров та ін.;

3) лінгвістичний підхід. Суть цього підходу полягає в узагальненні особистого досвіду. Цим підходом займалися такі учені як Р. Якобсон, Р. Барт та ін.

3 Особливості розвитку науки про системи

Однієї з найважливіших особливостей розвитку науки про системи являється виникнення дуже складної ієрархії спеціалізованих дисциплін. Головною причиною, що породила тенденцію до роздроблення науки на вузькі спеціальності, являється, на сам перед, обмеженість можливостей людини. Оскільки обсяг знань став більш того, який людина в змозі сприйняти, всяке збільшення знань призводить до того, що людина може охопити все меншу його частину. Чим глибше це знання, тим більше спеціалізованим воно має бути. Поглиблення спеціалізації по дисциплінах властиво не лише природним наукам. У інших областях людської діяльності, наприклад в техніці, медицині, гуманітарних науках, мистецтві, спостерігається та ж тенденція. Так, техніка з однієї дисципліни перетворилася на спектр інженерних галузей, таких, як механіка, електротехніка, хімічне машинобудування або атомна техніка, і кожна з них, у свою чергу, підрозділяється на множину вузьких спеціальностей.

Однією з головних особливостей науки другої половини двадцятого століття є поява ряду споріднених наукових напрямів, таких, як кібернетика, загальносистемні дослідження, теорія інформації, теорія управління, математична теорія систем, теорія прийняття рішень, дослідження операцій, штучний інтелект. Усі ці області, поява і розвиток яких тісно пов'язаний з виникненням і прогресом комп'ютерної технології, мають одну загальну властивість - вони мають справу з такими системними задачами, в яких головуючими є інформаційні, реляційні і структурні аспекти, тоді як тип сутностей, що утворюють систему, має значно менше значення. Стає усе більш очевидним, що корисно було б подивитися на ці взаємозв'язані інтелектуальні розробки як на частини загальнішого поля досліджень, що зазвичай називається наукою про систем.

Якщо наука про системи є наукою в звичайному сенсі, то в ній слід розрізняти три основні компоненти:

1) область дослідження;

2) сукупність знань про цю область;

3) методологію (сукупність погоджених методів) накопичення нових знань про цю область і використання цих знань для вирішення задач, що відносяться до неї.

Предметом будь-якої наукової дисципліни є певний **клас систем.** Термін система є одним з найпоширеніших термінів, використовуваних при описі робіт в самих різних наукових дисциплінах, особливо останнім часом. Згідно з тлумачним словником "**система - множина елементів, що знаходяться в співвідношеннях або зв'язках один з одним, які утворюють цілісність або органічну єдність**". Термін відношення використовується в найширшому сенсі, що включає увесь набір споріднених понять, таких, як обмеження, структура, інформація, організація, зчеплення, зв'язок, з'єднання, взаємозв'язок, залежність, кореляція і т. д.

Скажімо, система представляє, таким чином, впорядковану пару

$$S=(A,R),$$

де A- множина елементів,

R- множина відношень між елементами множини A.

Введемо класи впорядкованих пар за допомогою одного з двох фундаментальних критеріїв відмінності:

а) виділення систем, що базуються на певних типах елементів;

б)виділення систем, що базуються на певних типах відношень.

. Класифікаційні критерії а) і б) можна розглядати як ортогональні. Прикладом критерію а) служить традиційний підрозділ науки і техніки на дисципліни і спеціальності, причому кожна з них займається певним типом елементів (фізичних, хімічних, біологічних, політичних, економічних і т. д.). При цьому ніякий певний тип відношень не фіксується. Оскільки елементи різних типів вимагають різних експериментальних (інструментальних) засобів для збору даних, ця класифікація по суті має експериментальну основу.

Критерій б) дає абсолютно іншу класифікацію. Найбільшими класами систем виділених за критерієм б) являються класи, що описують різні **епістемологічні рівні**, тобто рівні знань відносно даних феноменів (тобто відношень в системах). Далі вони уточнюються за допомогою різних методологічних відмінностей. Кожен клас систем, заданий певним епістемологічним рівнем і конкретними методологічними відмінностями, підрозділяється далі на ще менші класи. Кожен з цих класів складається з систем, еквівалентних з точки зору конкретних, практично істотних сторін визначених в них відношень. Така еквівалентність називається **ізоморфізмом,** а визначені по ній класи еквівалентності - **ізоморфними класами**. Залежно від характеристик відношень, відносно яких вимагається ізоморфність систем, одні ізоморфні класи є підмножинами інших. Найменшими ізоморфними класами є такі класи, в яких системи ізоморфні, відносно усіх характеристик визначених на них відношень.

Оскільки системи в кожному конкретному ізоморфному класі еквівалентні тільки з точки зору деяких характеристик їх відношень, то вони можуть базуватися на абсолютно різних типах елементів. Якщо розглядати тільки характеристики відношень в системах, то достатньо кожен клас ізоморфних систем замінити однією системою, що представляє цей клас. Оскільки вибір цих представників в принципі довільний, то важливо, щоб для усіх ізоморфних класів використовувався один і той же критерій вибору. Для наших цілей вибиратимемо в якості представників системи, в яких множина елементів є абстрактна (не інтерпретована) множина однієї природи, а відношення описані у відповідній стандартній формі. Представників ізоморфних класів, що задовольняють цим вимогам, при певній інтерпретації терміну "стандартний" називатимемо загальними системами. Отже, **загальна система - це стандартна і не інтерпретована система, вибрана в якості представника класу систем, еквівалентних (ізоморфних) відносно деяких практично істотних характеристик відношень.** У цьому визначенні термін " стандартна" використовується для посилання на опис, що задовольняє певним умовам, які визначаються, в першу чергу, застосуванням цієї системи. Наприклад, відповідна форма представлення системи в обчислювальній машині може бути визначена в якості її стандартного опису.

Ортогональність класифікаційних критеріїв а) і б) показана на рис. 1. Класи систем, що містять різні типи елементів (множина А), зображуються горизонтальними лініями; класи систем, що містять різні відношення (множина R) - вертикальними.

Усі дослідження властивостей систем і пов'язані з цим задачі, що виникають з цієї класифікації, дістали зараз загальну назву "науки про системи".

У цьому сенсі **наукою про системи** називається наукова діяльність в основному теоретичного плану, яка, таким чином, доповнює експериментальні дослідження традиційної науки.

В **галузь науки про системи** входять усі типи властивостей відношень, істотні для окремих класів систем або в окремих випадках істотні для всіх систем. Вибрана класифікація систем за відношеннями визначає спосіб розбиття області досліджень науки про системи на підобласті точно так, як і традиційна наука підрозділяється на підобласті - різні дисципліни і спеціальності.

. **Знання в науці про системи**, тобто знання, що відносяться до різних класів властивостей відношень в системах, можна отримувати або за допомогою математики, або за допомогою експериментів з моделями систем на комп'ютерах. Якщо говорити про знання, отримані експериментальним шляхом, то лабораторією для науки про системи являється комп'ютер.

Третій компонент науки про системи - **системна методологія**- це струнка сукупність методів вивчення властивостей різних класів систем і рішення **системних задач**, тобто задач, що стосуються відношень в системах і є контекстно незалежними. **Головна задача системної методології** - надання в розпорядження потенційних користувачів, що представляють різні дисципліни і предметні області, методів рішення усіх визначених типів системних задач.

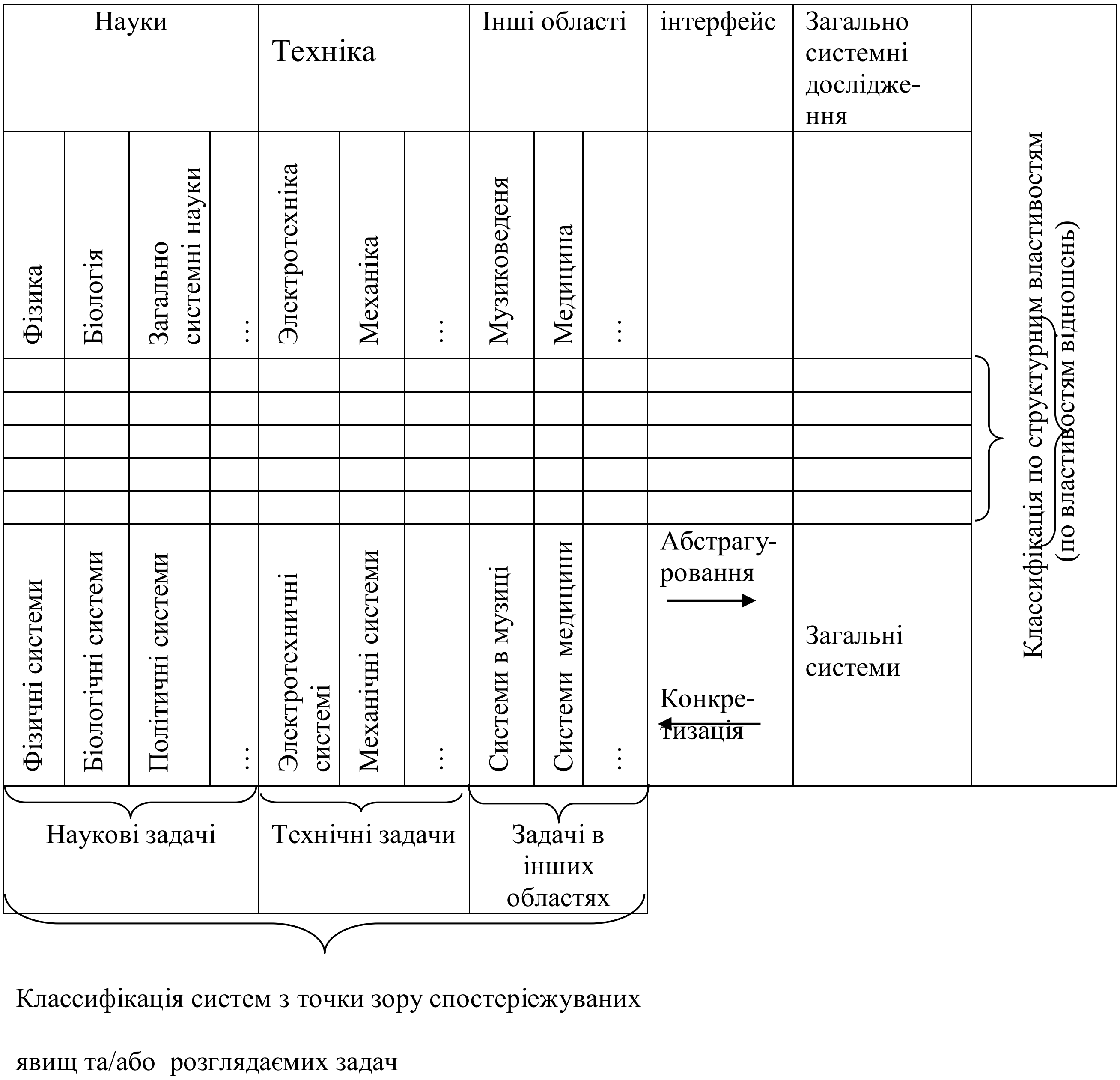


Рис. 1 - Два способи класифікації систем

Якщо проаналізувати розділення традиційної науки на дисципліни, то стане очевидним, що наука про системи носить міждисциплінарний характер. Цей факт має, принаймні, два слідства. По-перше, системні знання і методологія в принципі можуть бути використані практично в усіх розділах традиційної науки. По-друге, наука про системи має гнучкість, що дозволяє вивчати властивості відношень в таких системах і, отже, в задачах, де фігурують характеристики, досліджувані зазвичай в самих різних галузях традиційної науки. Це дозволяє вивчати подібні системи і вирішувати такі задачі в цілому, а не розглядати їх як набір незв'язаних предметних підсистем і підзадач.

Два виміри в науці, які відображає двовимірна класифікація систем, показана на рис.1, є взаємодоповнююча. Їх поєднання в наукових дослідженнях стає потужнішим засобом, ніж використання кожного з напрямів окремо. Традиційний вимір науки визначає сенс і місце будь-якого дослідження. З іншого боку, системний вимір дозволяє змістовно працювати з будь-якою наперед вибраною системою, незалежно від того, чи обмежена вона рамками однієї традиційної наукової дисципліни або ні.

Представляється, що з точки зору властивостей науки в історії людства можна природним чином виділити три основні періоди.

1. Донаучний період (приблизно до XVI ст.). Характерними рисами періоду є здоровий глузд, теоретизування, метод проб і помилок, ремісничі навички, дедуктивні міркування і опора на традицію.

2. Одновимірна наука (початок XVII - середина XX ст.). Характерні риси: об'єднання теорій, дедуктивні міркування, особлива увага до експерименту, яка привела до виникнення дисциплін, що базуються на експерименті, і спеціальностей в науці.

3. Двовимірна наука (розвивається приблизно з середини XX ст.). Характерні риси: виникнення науки про системи, що займається властивостями відношень, а не експериментальними властивостями досліджуваних систем, і її інтеграція з грунтованими на експерименті традиційними науковими дисциплінами.

Таким чином, головне в розвитку науки в другій половині XX століття - це перехід від одновимірної науки, що в основному спирається на експериментування, до науки двовимірної, в якій наука про системи, що базується, передусім, на відношеннях, поступово входить в якості другого виміру.

Наукові дослідження дозволяють виявляти і досліджувати неявні якості та закономірності властиві досліджуваним об'єктам. До таких об'єктів, найбільш часто ставляться певні системи і процеси. Особливий інтерес для науки і прикладних задач являє автоматизація наукових досліджень, тобто створення автоматизованих систем наукових досліджень (АСНД).

В курсі будуть розглянуті загальні принципи формалізації довільних систем, отримання емпіричних даних в ході моделювання, основи дослідження систем. Тобто принципи побудови та застосування АСНД.

Тема 2. Концептуальна схема розв'язку системних задач.

Відомо, що множина різноманітних задач наукових досліджень є нескінченним, але може бути зведена до кінцевого числа добре визначених типів системних задач, що означає, можливість розробки методів розвя'зання того чи іншого типу задач. У загальному випадку концептуальна схема розвя'зання системних задач може бути представлена наступним чином (рис. 2).

На схемі видно два альтернативних процеси - абстрагування та інтерпретації, які пов'язують автоматизовану систему із зовнішньою середою, тобто конкретною предметною областю. Абстрагування, означає формування моделі досліджуваного об'єкта, використовуючи поняття характерні для автоматизованої системи. Інтерпретація, означає трактування отриманих результатів, використовуючи поняття характерні для досліджуваного об'єкта. Підкреслимо, що ця схема є загальною схемою для проведення наукових досліджень на об'єкті будь-які природи.

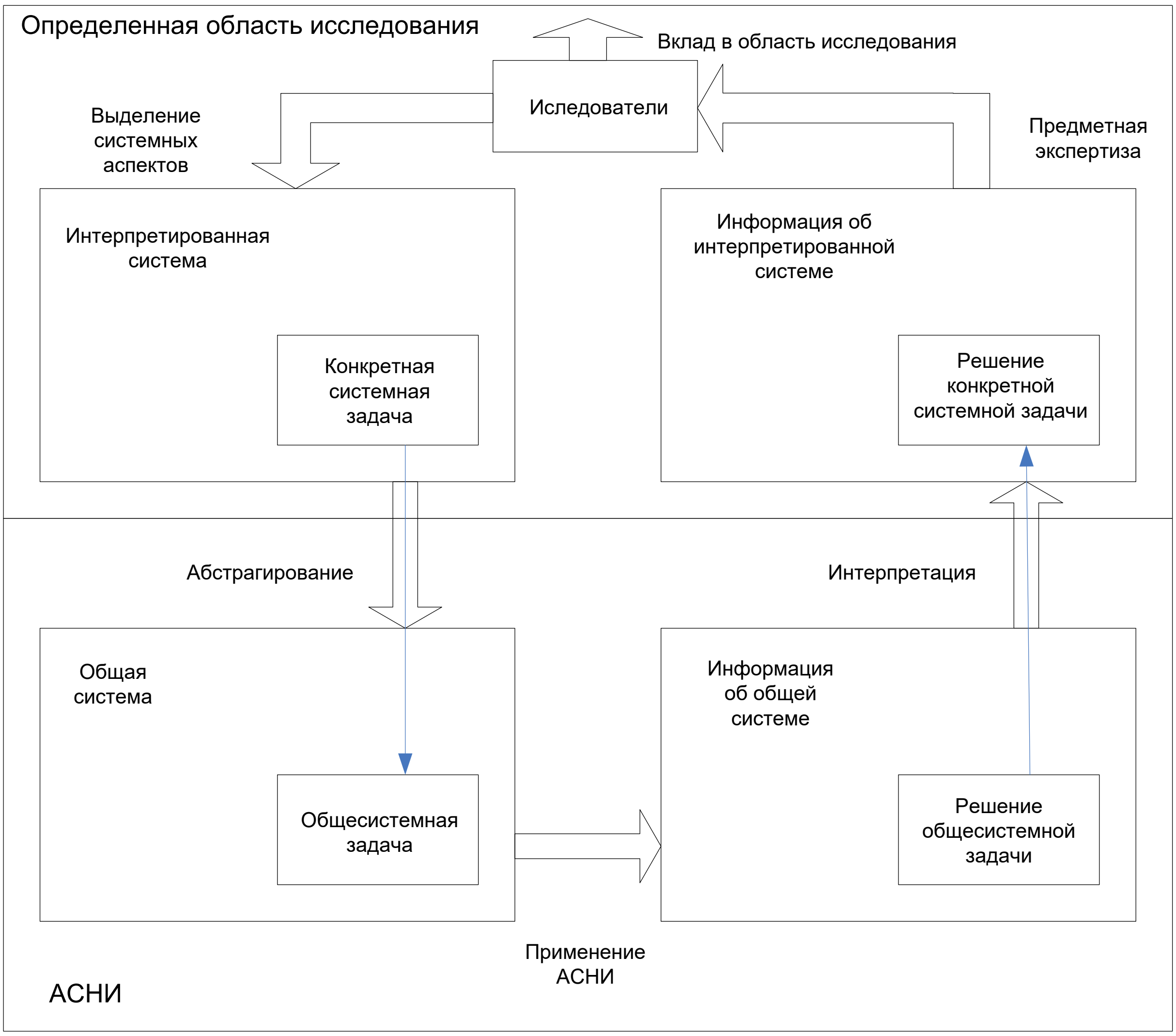


Рис.2 - Концептуальна схема розвя'зання системних задач

.

Ієрархія епістемологічних рівнів систем утворює основу опису і представлення систем. Ієрархічні рівні розрізняються знаннями дослідника про розглядаємий феномен. Типи систем можуть бути зображені на наступній ієрархічній схемі, рис. 3.

Прийнято виділяти дометодологічний рівень дослідження (нульовий епістемологічний рівень дослідження систем) і дослідження в межах розглядаємої методики.

Нульовий (нижній) рівень ієрархії (рис. 3.) включає три примітивні системи: **систему на об'єкті O, конкретну $\dot{I}$ і загальну I примітивні системи**. З них дві перші примітивні системи відносяться до дометодологічного рівня дослідження, а третя - розглядається як інтерфейс між предметною областю й універсальним розв'язувачем системних задач який дозволяє автоматизувати процес наукових досліджень. Системи нульового епістемологічного рівня прийнято називати **ісходними (**вихідними) **системами** та означати S. Вихідні системи являють собою формальний опис об'єктів зовнішнього світу. Після доповнення ісходної системи S дійсними станами виділених змінних і параметрів, формується нова система, визначена на першому епістемологічному рівні і названа системою даних D. Системи даних, припускають засоби для опису даних різної природи, отриманих від об'єкта.

Більш високі епістемологічні рівні містять знання про деякі інваріантні параметрам характеристики відношень на розглянутих змінних, за допомогою яких можна генерувати дані при відповідних початкових і граничних умовах на повній параметричній множині.

Системи, у яких стани основних змінних можуть породжуватися на повній параметричній множині, називаються породжуючими системами та означаються F, і утворять другий епістемологічний рівень дослідження систем. Породжуючі системи включають в себе засоби породження даних адекватних об'єкту дослідження.

Розв'язання проблеми цілого і частини знаходить своє відображення на третьому епістемологічному рівні, коли системи, визначені як породжуючі, називаються підсистемами загальної системи і при цьому можуть мати деякі загальні змінні або взаємодіяти якось інакше. Системи цього рівня називаються структурованими системами. Структуровані системи складаються з наборів систем більш низького рівня.

На четвертому епістемологічному рівні системи складаються із набору систем, визначених на більш низьких епістемологічних рівнях, і деякої інваріантної параметрам характеристики, що описує зміни в системах більш низького рівня. Визначені в такий спосіб системи називаються метасистемами.

На п'ятому рівні допускається, що метахаракетристика може змінювати множину параметрів, відповідно до інваріантної параметрам характеристики більш високого рівня. Такі системи називаються мета-метасистемами або метасистемами другого порядку. У системах більш високого рівня використовуються системи більш низьких рівнів, і, крім того, містяться знання недоступні більш низьким рівням. Таким чином, ісходна система міститься на всіх більш високих рівнях.

Рис.3 Ієрархічна схема типів систем

К.Р. № 1

Охарактеризуйте загальну схему роботи АСНД, и ієрархічні типи систем.

Тема 3 Формування вихідної системи

1. Загальні поняття та визначення

1.1 Об'єкти і системи об'єктів

В даному курсі під *об'єктом* розуміємо частину світу, що виділяється як єдине ціле протягом відчутного проміжку часу.

Згідно цьому визначенню об'єкти можуть бути як

а) матеріальними, так і

б) абстрактними.

В свою чергу *матеріальні об'єкти* поділити на *природні* (такі, як шматок скелі, клітина організму, сонце) і *створені людиною* (такі, як аеропорт, обчислювальний центр). *Абстрактні об'єкти* (такі, як музичний твір, конспект або конституція України) зазвичай створюються людиною, однак деякі з них можна розглядати і як природні, принаймні, до деякої міри (наприклад, українську чи будь-яку іншу природну мову).

В більшості випадків об'єкти мають практично нескінченне число властивостей, кожну з яких можна цілком осмисленно вивчати. Отже, будь-який об'єкт неможливо вивчити повністю. Це означає, що необхідно відібрати обмежене (і зазвичай досить мале) число суттєвих характеристик, що найкращим чином описують даний об'єкт як явище. Суттє вими характеристиками прийнято називати характеристики об'єкту, які виділяються згідно з ціллю дослідження. Для виділення суттєвих характеристик об'єкту дослідник може застосовувати експертні методи: метод безпосереднього ранжирування або попарних порівнянь. Після того як відбір суттєвих характеристик зроблений, необхідно визначити процедуру кількісного виміру кожної властивості. Що означає, введення абстрактних змінних, які представляють певні властивості.

На об'єкті дослідження система задається набором відповідних властивостей об'єкта, кожному з яких призначаємо певну змінну, яка може бути зафіксована і виміряна.

Таким чином, система завжди розглядається не як реальний об'єкт, а як абстрагування або відображення деяких (суттєвих) властивостей (характеристик)об'єкта тобто система - це не предмет, а список змінних..

Нагадаємо, що термін «змінна» використовується тут для позначення деякої властивості. Тому, щоб можна було визначити її точно, потрібно спочатку розібратися, що ж таке властивість.

1.2 Базові властивості

Зауважимо, що з кожною властивістю пов'язана множина її проявів. Так, наприклад, якщо властивістю є успішність студента, то проявленням цієї властивості можуть бути відповідні оцінки (2, 3, 4, 5) або бали (0,1,...,100).У випадку якщо властивістю є напрям руху транспорту на регульованому перехресті, то проявленням цієї властивості будуть відповідні кольори світлофора (красний, жовтий, зелений).

При одиничному спостереженні властивість має одне конкретне проявлення. Для визначення можливих проявів цієї властивості, потрібно реалізовувати множину спостережень цієї властивості. Для того щоб розрізняти спостереження, здійснювані за допомогою однієї і тієї ж процедури, потрібно щоб кожне спостереження чимось відрізнялося від інших. Будь-яка суттєва властивість, *що використовується* для визначення відмінностей у спостереженнях однієї і тієї ж властивості, будемо називати **базою**.

Наприклад, в машинному експерименті отримуємо емпіричну вибірку, прояви виділеної змінної, шляхом отримання набору випадкових чисел. Кожне конкретне вимірювання можна відрізнити від іншого , наприклад, за часом початку проведення вимірювання. Слід підкреслити, що поняття базової властивості завжди супроводжує вивчення деякої суттєвої властивості.

У деяких випадках різні спостереження однієї і тієї ж ознаки за часом невиразні (тобто або зроблені одночасно, або час взагалі не має значення), зате відрізняються положенням в **просторі,** де зроблені спостереження. Наприклад, різні властивості, що характеризують стан різних промислових роботів деякого автоматизованого виробництва, розташованих в різних точках простору.

Час і простір не єдино можливі бази. Багаторазові спостереження однієї і тієї ж властивості можуть відрізнятися один від одного за індивідумом якоїсь **групи**,на якій визначена дана властивість. Це може бути соціальна група, наприклад група студентів, на якій розглядається властивість успішності; група вироблених товарів певного типу, множина слів в якомусь тексті і т. д.

Бази трьох основних типів - **час, простір, група** - можна комбінувати. Хоча в принципі можливі будь-які комбінації, особливо важливі й поширені комбінації час - простір і час - група.

Приклад часу-групи: властивості, що характеризують положення в економіці, політиці та суспільстві різних країн, спостерігаються різними організаціями.

Крім особливого використання часу, простору і груп в якості баз, вони можуть виступати і як властивості. Наприклад, щоденне спостереження максимального часу запізнення студентів на пари.

1.3 Обмеження на вибір баз

Наведені приклади показують, що вибір відповідних баз досить гнучкий, проте абсолютно не довільний. Обмеження при цьому виборі досить точно виражені в описаних нижче вимогах, яким повинні задовольняти правильно обрані бази.

Перше, *бази повинні бути застосовні до всіх властивостей системи,* для якої вони визначені. Наприклад, простір не застосовний для характеристики властивостей музичного твору.

Друге, *бази системи повинні відповідати призначенню, для якого визначається дана система.* Так, наприклад, при спостереженні за студентами після введення нових навчальних нормативів спостерігають за відповідними ознаками. Ясно, що єдиними придатними для цього базами є час і група.

Третє, *спостереження всіх властивостей системи повинні однозначно визначатися базами системи,* тобто кожен елемент базової множини (значення певного моменту часу, точка простору, елемент групи або відповідна комбінація елементів) визначає один і тільки один появ будь-якої з властивостей.

Наприклад, при дослідженні властивостей слів тексту цілком розумною базою є група слів, що входять в цей текст. Очевидно, що така база застосовна до цих властивостей і відповідає меті дослідження. Однак вона не задовольняє вимогам однозначного розрізнення спостережень. Справді, одне і те ж слово може перебувати в одній і тій же позиції і мати ту ж функцію в декількох реченнях в даному тексті. Для того щоб відрізнити спостереження, нам потрібно звернутися в даному випадку до одновимірного абстрактного простору, точкою якого є положення слова в тексті.

1.4 Формальне визначення системи на об'єкті

Виходячи з усього вищесказаного, **система на об'єкті** може бути визначена як множина властивостей, з кожною з яких пов'язана множина її проявів і множина баз, з кожною з яких пов'язана множина її значень.

∆ Формально **система на об'єкті** має вид

$$O = \left(\left\{ \left(a_{i,} A_i \right) \middle| i \in N_n \right\}, \left\{ b_j, B_j \middle| j \in N_m \right\} \right) \tag{1.1}$$

де $N_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, а $N_m=\{1, 2, \ldots, m\}$ (буквою N с додатнім цілим індексом тут завжди позначається множина значень цілих додатних чисел від 1 до значення цього індексу); через a_i і A_i позначені відповідно властивість і множина її проявів, b_j і B_j— база і множина її значень., а **O** - система на об'єкті.

Для деяких властивостей властивостей і баз множини A_i і B_j з рівняння (1 .1) визначаються досить добре. У науці, однак, у багатьох випадках ці множини невідомі і можуть бути визначені тільки за допомогою філософських побудов. Проте, незалежно від обставин їх можна пов'язати з добре визначеними множинами за допомогою конкретних процедур спостереження або вимірювання. ▲

К.Р. № 2

Охарактеризуйте поняття базової властивості, приведіть докладний приклад.

Виберіть деяку систему, і формалізує її.

1.5 Змінні і параметри

Змінною називається операційне представлення властивості, тобто образ властивості, який визначається конкретною процедурою спостереження або вимірювання. Кожна змінна має певне ім'я, що відрізняє її від інших змінних, які розглядаються, і пов'язується з певною множиною величин, через які вона себе проявляє. Ці величини, зазвичай, називають *станами,* (або значеннями) змінної, а всю множину - *множиною станів.*

Аналогічно *параметром* називається операційне представлення бази. Кожен параметр має унікальне ім'я, або мітку і з ним зв'язується множина; яку будемо називати - *параметричною множиною,* а її елементи - *значеннями параметра.*

За аналогією з властивостями і базами припускається, що різні спостереження однієї і тієї ж змінної розрізняються за значенням параметрів. Якщо використовуються два і більше параметра, то їх загальною параметричною множиною є декартовий добуток окремих параметричних множин. Необхідно, щоб кожне конкретне значення параметра (із загальної параметричної множини) ідентифікувало одне і тільки одне спостереження відповідних змінних.

На окремих множинах станів або параметричних множин можуть бути визначені деякі математичні відношення, скажімо, відношення порядку або відстань. Найпростішим прикладом ставлення порядку, є відношення між числами розташованими на звичайній числової осі. Подібні відносини відображають фундаментальні характеристики властивостей і баз в тій мірі, в якій вони притаманні відповідним вимірювальним процедурам.

Відмінності в подібних властивостях серед змінних або параметрів, які мають істотне методологічне значення, тобто впливають на методи досліджень, будемо називати *методологічними відмінностями.* Вони розглядаються пізніше.

На додаток до конкретних, змінних і параметрів, що представляють відповідно певну ознаку або базу, будемо також розглядати узагальнені змінні і параметри. Останні є абстрактні величини,тобто величини, не визначені через які-небудь властивості або бази. Їх множини станів і параметричні множини, а також різні відносини, визначені на цих множинах, представляються якимсь відповідним стандартним чином.

1.6 Узагальнені змінні і параметри. Формалізація.

На додаток до конкретних, змінних і параметрів, що представляють відповідно певну ознаку або базу, будемо також розглядати узагальнені змінні і параметри. Останні є абстрактні величини,тобто величини, не визначені через які-небудь властивості або бази. Їх множини станів і параметричні множини, а також різні відносини, визначені на цих множинах, представляються якимсь відповідним стандартним чином.

Введення узагальнених змінних, в основному, обумовлено поліпшенням уявлення деяких даних. Наприклад, нехай деяка змінна визначена на множині цілих чисел. Тоді деяким інтервалам цілих чисел, можуть бути поставлені у відповідність деякі якісні характеристики. Останні і будуть представляти узагальнені змінні. Сенс узагальнених змінних уточнюється нижче.

Узагальненій змінній дається інтерпретація, коли множина її станів відображається ізоморфно (тобто відображається взаємооднозначно один до одного зі збереженням усіх істотних математичних відношень, визначених на ньому) в елементи множини станів конкретної змінної; те ж стосується щодо узагальнених і конкретних параметрів і їх параметричних множин. Будь-яке ізоморфне відображення такого роду будемо називати *конкретизацією* узагальненої змінної (або узагальненого параметра), а зворотне відображення назвемо *абстрагуванням* конкретної змінної (або конкретного параметра).

Δ Для формалізації понять узагальнених і конкретних змінних і їх параметрів введемо такі позначення в додаток до введених в попередньому розділі.

v_i, V_i, V_i означають відповідно узагальнену змінну, її множину станів і множину математичних властивостей, визначених для неї;

$\dot{v}_i$, $\dot{V}_i$, $\dot{\mathrm{V}}_i$ ті ж характеристики конкретної змінної, що є конкретизацією змінної v_i;

w_j, W_j и W_j відповідно узагальнений параметр, його множина станів і множина математичних властивостей, визначених на параметрі w_j;

$\dot{w}_j, \dot{W}_j$ и $\dot{\mathrm{W}}_j$ — ті ж характеристики конкретного параметра, отримані конкретизацією параметра w_j.

Автоматизована система наукових досліджень (АСНД) працює, в основному, тільки з узагальненими змінними і параметрами. Задана узагальнена змінна v_i, конкретизується змінною $\dot{v}_i$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$e_i : V_i \rightarrow \dot{V}_i ,(1.2)$$

існує і ізоморфна щодо математичних властивостей. Аналогічно узагальнений параметр w_j конкретизується параметром $\dot{w}_j$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$\varepsilon_j :\ W_j \rightarrow \dot{W}_j , (1.3)$$

існує і ізоморфна щодо W_j.

Кожен конкретний ізоморфізм e_i (або ε_j) задає конкретизацію v_i за допомогою $\dot{v}_i$ (або відповідно w_j за допомогою $\dot{w}_j$).

Функції, зворотні e_i *та* ε_j, тобто

$$e^{-1}{}_i : \dot{V}_i \rightarrow V_i , \qquad (1.4)$$

$$\varepsilon^{-1}{}_j :\ \dot{W}_j \rightarrow W_j , \qquad (1.5)$$

задають абстрагування відповідно $\dot{v}_i$ і $\dot{w}_j$. ▲

К.Р. № 3

Для деякої системи опишіть конкретні і узагальнені змінні і параметри.

1.7 Канали спостереження

Назвемо *каналом спостереження* будь-яку операцію, що вводить конкретну змінну як відображення (або конкретизацію) властивості.

Канал спостереження, за допомогою якого властивість a_i представляється змінною $\dot{v}_i$, реалізується функцією

$$o_i : A_i \rightarrow \dot{V}_i , \qquad (1.6)$$

Ця функція гомоморфна щодо передбачуваних властивостей V_i і множин A_i і $\dot{V}_i$.

Аналогічна функція, скажімо

$$\omega_j : B_j \rightarrow \dot{W}_j , \qquad (1.7)$$

задає представлення бази b_j, параметром $\dot{w}_j$, вона також повинна бути гомоморфною щодо відповідних властивостей бази (наприклад, часу) і безлічі W_j.

Для деяких властивостей і баз канали спостереження можуть представляти собою явно задані функції o_i и ω_j Однак в інших випадках, коли множини А і В невідомі. При цьому уявлення властивостей і баз вводяться фізично (операційно), а не за допомогою математичних визначень.

За винятком тривіальних випадків, коли функції o_i $і$ ω_j, визначені ясно, канал спостереження являє собою фізичний пристрій і процедуру, що описує його застосування. Цей пристрій зазвичай називається вимірювальним приладом або інструментом. Процедура являє собою набір команд, визначаючих те, як слід використовувати інструмент у різних умовах.

Будь-який вимірювальний інструмент повинен вміти взаємодіяти з вимірюваним властивістю і перетворювати цю взаємодію в вигляд, що безпосередньо представляє стани відповідної змінної (наприклад, показання покажчика на шкалі буквено-цифрового дисплея або просто запис значень).

Незважаючи на те, що вимірювальні інструменти та процедури, що утворюють канали спостереження, повинні відповідати деяким загальним принципам вимірювання, вони істотно залежать від того, що вони вимірюють. Тому їх вивченням, створенням і користуванням займаються, головним чином, в рамках традиційних наукових дисциплін.

Канали спостереження враховуються в схемі АСНД тільки як компоненти, необхідні для повного визначення будь-якої реально існуючої системи. У АСНД вони досить часто вже не включаються.

Приклад 1.1. Для ілюстрації введених понять покладемо, що a_i — це встановлений щорічний дохід платника податку деякої країни за останній рік, як повідомляється в його податковій декларації за цей рік. Тоді A_i – це всілякі суми грошей від нуля до максимально уявимої суми, скажімо до 100000.00 одиниць. Ця множина звичайно, так як мінімальна грошова величина - 0.1 одиниці. Ми розуміємо також, що ця множина повністю (лінійно) упорядкована. Для обчислення прибуткового податку досить розглядати лише діапазони оподатковуваного доходу, де кожному діапазону відповідає певний відсоток доходу, який слід виплатити в якості прибуткового податку. Для спрощення будемо цими діапазонами вважати діапазони 0—4999.99, 5000.00 —9999.99, ... 90000.00 —94999.99, 95000.00—100000.00 і нехай множиною станів $\dot{V}_i$, конкретною змінною $\dot{v}_i$, що представляє властивість a_i , буде множина мінімальних значень цих діапазонів . Змістовне уявлення a_i за допомогою $\dot{v}_i$ можна ввести за допомогою функції o_i, яка для кожного діапазону будь-якому значенню з діапазону привласнює мінімальне значення в цьому діапазоні, наприклад o_i (52357) =50 000 або o_i (796) =0. Очевидно, що функція o_i гомоморфна відносно повного упорядкування A_i, так як для будь-якої пари

$\alpha, \beta \in A_i$, якщо $\alpha \le \beta$, $o_i(\alpha,) \le o_i(\beta)$. З методичних міркувань узагальнена змінна v_i може бути для конкретної змінної $\dot{v}_i$ визначена за допомогою абстрагуючої функції $e^{-1}{}_i : \dot{V}_i \to V_i$. Ця функція повинна бути изоморфною відносно упорядкування на $\dot{V}_i$. Припустимо, що потрібно, щоб множина V_i являла собою набір значень цілих чисел. Тоді $e^{-1}{}_i$ можна, ймовірно, найбільш природнім чином, задати наступним рівнянням:

$$e^{-1}{}_i\ (5000k)=k\ \ (k=0,1,\ldots,19)$$

Базою в цьому прикладі є множина платників податків певної категорії, скажімо множина жителів міста X. Дана множина не володіє ніякими математичними властивостями. Таким чином, $\omega_j : B_j \rightarrow \dot{W}_j$ може бути будь-якою взаємно однозначною функцією, яка кожному платнику податків ставить у відповідність унікальний ідентифікатор. Методологічно зручне абстрагування $\varepsilon^{-1}{}_j{:}\dot{W}_j \rightarrow W_j$ представити у вигляді взаємно однозначної функції, що ставить у відповідність цілим числам з множини N_n, де n — число платників податків у цій групі.

1.8 Нечіткі канали спостереження

Зупинимося детальніше на понятті каналу спостереження. До цих пір ми його визначали через функції o_i та ω_j , визначені відповідно в рівняннях (1.6) і (1.7). Ці функції припускають розбиття множин A_i і B_j на деякі підмножини, позначимо їх відповідно A_i/o_i та B_j/ω_j. Елементи будь-якої підмножини в цьому розбитті еквівалентні в тому сенсі, що вони не розрізняються з точки зору введеної процедури спостереження. У такому розбитті кожна підмножина цілком являє один стан змінної $\dot{v}_i$ або одне значення параметра $\dot{w}_j$. Коли спостереження властивості A_i , проводиться при деякому значенні параметра, то спостережувана властивість отримує певний прояв (значення) із множини A_i. Це явище є елементом однієї і тільки однієї підмножини A_i/o_i. Функція o_i привласнює його певному стану змінної $\dot{v}_i$. Таким чином, передбачається, що будь-яке спостереження дозволяє нам визначити, до якої підмножини A_i/o_i належить даний прояв, навіть якщо окремий прояв і не можна ідентифікувати.

Припущення про те, що різниця підмножин A_i/o_i може бути виявлено за результатами спостережень, виправдовується тільки в тому випадку, коли помилки спостереження виключені. Подібні випадки, як показано в прикладі 1.1, зустрічаються, але відносно нечасто. При цьому підмножина A_i/o_i правильно визначається у всіх випадках, крім тих, коли фактичний прояв виявляється близько від границі між підмножинами, тобто в межах очікуваної помилки спостереження.

Оскільки властивості (принаймні деякі з них) не контролюються дослідником, неможливо запобігти проявлення властивостей в небажаної близькості від границь між підмножинами A_i/o_i і, отже, можна тільки скоротити можливість визначення неправильних підмножин за спостереженнями завдяки правильному вибору каналу спостереження o_i . Виключити таку можливість повністю не можна.

В результаті появи можливості помилок вимірювання з проявляннями біля границь між підмножинами A/o_i пов'язана визначена недостовірність спостереження. Є два варіанти інтерпретації цієї недостовірності. Тут ми розглянемо, і будемо дотримуватися одного з них.

Розбиття множини A_i задається функцією o_i. Це те ж саме розбиття A_i/o_i що розглядалося вище. Достовірно невідомо, до якої підмножини A_i/o_i належить заданий елемент A_i.. Ця недостовірність може бути задана функцією, що зіставляє будь-якій парі (елемент A_i, підмножина $A_i\,/o_i$) число (зазвичай між 0 и 1 – деякий аналог ймовірності).

Визначене таким чином число в заданому контексті виражає ступінь достовірності того, що даний елемент належить даній підмножині.

Іншими словами все вище сказане означає, що, роблячи якесь спостереження, ми можемо стверджувати, що ми спостерігали, саме такі факти, лише з деякою ймовірністю.

Формально вищезгадана функція достовірності спостережень може бути записана наступним чином

$$\tilde{O}_i : A_i \times A_i / o_i \to [0, 1]. \qquad (1.8)$$

Однак, оскільки кожна підмножина A_i/o_i однозначно представляється (позначається) станом із множини $\dot{V}_i$ (відповідно до функції o_i), функцію $\tilde{O}_i$ можна задати в більш зручному вигляді

$$\tilde{O}_i : A_i \times \dot{V}_i \to [0, 1]. \qquad (1.9)$$

Визначена в рівнянні (1.9) функція $\tilde{O}_i$ характеризує спостереження властивості a_i в сенсі їх недостовірності. У цьому сенсі $\tilde{O}_i$ можна назвати *нечітким каналом спостереження*. Щоб уникнути непорозумінь o_i будемо називати *чітким каналом спостереження* .

Ясно, що для визначення нечіткого каналу спостереження необхідно спочатку задати чіткий канал спостереження o_i. Чіткий канал спостереження можна також розглядати як окремий випадок нечіткого. Справді, якщо

$$\tilde{O}_i(x,y)=\begin{cases} 1, \text{якщо } o_i(x)=y, \\ 0 \text{ у противному} \end{cases}$$

то $\tilde{O}_i$ задає чітку функцію з A_i в $\dot{V}_i$, ідентичну o_i .

При розгляді баз можна ввести функцію

$$\tilde{\omega}_j : B_j \times \dot{W}_j \to [0, 1], \qquad (1.10)$$

подібну функції (1.9) и основану на співвідношенні (1.7). Тут $\tilde{\omega}_j(x, y)$ — ступінь достовірності того, що x належить підмножині B_j/ω_j, яка представлена значенням y параметра $\dot{w}_j$. На практиці, однак, ця функція не використовується.

Для будь-яких практичних потреб достатньо використовувати чіткий канал спостереження ω_j для баз, будь то група, час або простір. Однак для властивостей застосовні як чіткі, так і нечіткі канали спостереження (o_i и $\tilde{O}_i$), і за різних обставин більш відповідним може бути той чи інший тип каналу.

Приклад 1.2 . Нехай властивістю a_i вік людини з групи B_j. І нехай елементами A_i будуть номери років у діапазоні від 0 до 100. Покладемо, що $\dot{V}_i$. = { дуже молодий, молодий, середніх років, старий, дуже старий }, и нехай o_i — це взаємно однозначна функція $A_i / o_i \to \dot{V}_i$, визначена наступним чином:

{0, 1, …, 14} - дуже молодий,
{15, 16, …, 29} - молодий,
{30, 31, …, 49} - середніх років,
{50, 51, …, 74} - старий,

{75, 76, …, 100} - дуже старий.

При використанні чіткого каналу спостереження дуже погано описуються люди, чий вік близький до границь між блоками A_i /o_i. Наприклад, 49-річний чоловік позначається як людина середніх років, а 50-річний, як старий. При використанні нечіткого каналу o_i, наприклад такого, який описаний на рис. 1.1, наведений виявляється більш відповідним, оскільки не дає таких різких стрибків. Важливо відзначити, що нечіткий канал спостереження дає не один стан $\dot{V}_i$ для одного спостереження, як чіткий канал, а набір значень $\tilde{O}_i$ (x, y) для всіх $\dot{V}_i$. Так, наприклад, при спостереженні 25-річної людини через нечіткий канал будуть отримані наступні 5 значень:

$\tilde{O}_i$(25, дуже молодий) = 0.1

$\tilde{O}_i$(25, молодий) = 0.97

$\tilde{O}_i$(25, старий) = 0

$\tilde{O}_i$(25, дуже старий) = 0.

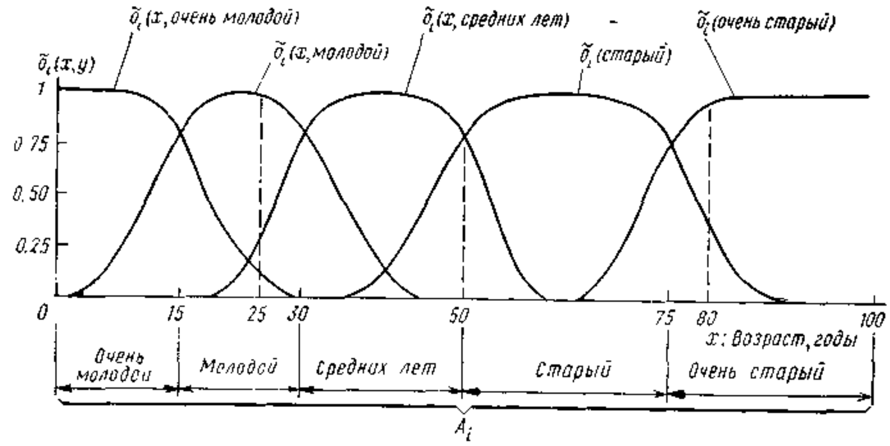


Рис. 1.1. Чіткий і нечіткий канали спостереження для повністю впорядкованої ознаки «вік людини»

К.Р. № 4

Наведіть приклад систем з чіткими і нечіткими каналами спостереження, формалізуйте їх.

1.9 Методологічні відмінності

Термін *методологічна відмінність* використовується тут для опису особливостей системних задач, за якими відрізняються рівні типи задач усередині одного типу моделей систем. Методологічні відмінності стосуються як систем, так і вимог до них.

Типи задач, які відрізняються тільки деякими методологічними відмінностями, вимагають різних методів рішення, але мають один і той же статус в ієрархії типів моделей систем. Таким чином, методологічні відмінності являють собою вторинні критерії класифікації завдань наукових досліджень.

У даному розділі розглядаються методологічні відмінності, що відносяться до змінних і їх параметрів. Так як змінні і параметри є компонентами будь-якої системи незалежно від її типу, ці відмінності застосовні до систем всіх типів моделей.

Методологічні відмінності для змінних і параметрів - це характеристики їх множин станів і, відповідно, параметричних множин. Якщо змінна (або параметр) представляє властивість (або базу), то ці властивості не можуть бути довільними. Всяка змінна пов'язана з одним або декількома параметрами, і зміни станів змінної спостерігаються на повній параметричній множині. Таким чином, комбінація властивостей множини станів і повної параметричної множини визначає самий елементарний тип методологічних відмінностей.

Якщо є більше одного параметра, то повна параметрична множина являє собою декартовий добуток параметричних множин. Для представлення розпізнаваємих властивостей цього декартового добутку, властивості окремих параметрів повинні поєднуватися відповідним чином. Будемо спочатку для простоти вважати, що ми маємо справу з однією параметричною множиною незалежно від того, є вона окремою параметричною множиною або декартовим добутком декількох, і що виділеними властивостями володіють вся ця множина.

Одним з фундаментальних методологічних відмінностей являється *відсутність математичних властивостей* у множині станів або відповідної параметричної множини. Це крайній випадок, і він погано підходить для змінної (або параметра), призначеної для представлення властивості (або бази) і маючий явно виражені і суттєві для задачі характеристики. У літературі по вимірах змінні такого роду звичайно називають *змінними з номінальною шкалою* .

Найбільш фундаментальним з виділених властивостей множин станів і параметричних множин є *впорядкованість* . Методологічно слід розрізняти два типи впорядкованості - часткову і лінійну.

Часткова впорядкованість - це бінарне відношення на множині (у нашому випадку на множині станів або параметричній), що є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним. *Лінійна впорядкованість* сильніше часткової, так як це часткова впорядкованість, що володіє властивістю зв'язності (тобто будь-яка пара елементів множини так чи інакше впорядкована).

Δ Формально часткова впорядкованість Q, наприклад, множини V_i — це бінарне відношення

$$Q \subset V_i \times V_i \text{ ,(1.11)}$$

задовольняє наступним вимогам:

1. $(x, x) \in Q$ (рефлективність);
2. якщо $(x, y) \in Q$ и$(y, x) \in Q$, то $x = y$ (антисиметричність);
3. якщо $(x, y) \in Q$ и $(y, z) \in Q$, то $(x, z) \in Q$ (транзитивність).

Якщо $(x , y) \in Q$ то x називається *попередником* y, а y — *наступником* x. Якщо $(x , y) \in Q$ и не існує, $z \in Q$, такого, що $(x, z) \in Q$ и $(z, x) \in Q$, то x називається *безпосереднім попередником* y, а y — *безпосереднім наступником* x. У доповнення до вимог рефлективності, антисиметричності і транзитивності відношення лінійної впорядкованості задовольняє наступній вимозі зв'язності: для всіх $x, y \in V_i$, якщо $x \neq y$, то або $(x, y) \in Q$ або $(y, x) \in Q$. ▲

Прекрасним прикладом впорядкованості параметричної множини є час. Змінні з лінійно впорядкованими множинами станів називаються *змінними з упорядкованою шкалою* .

Одним з найбільш істотних властивостей є відстань між парою елементів досліджуваної множини. Ця міра визначається функцією, що ставить у відповідність будь-якій парі елементів цієї множини число, що визначає, на якій відстані один від одного знаходяться ці елементи з погляду деякого фундаментального упорядкування.

Δ Для даної множини, скажімо множини V_i, відстань визначається функцією виду

$\delta : V_i \times V_i \rightarrow \mathbf{R}$, (1.12)

Однак для того, щоб ця функція відповідала інтуїтивному уявленню про відстань, вона повинна відповідати таким умовам для всіх $x, y, z \in V_i$:

(δ1) δ(x, y) ≥ 0 (умова невід'ємності);

(δ2) δ(x, y) = 0 тоді і тільки тоді, коли $x = y$ (умова нульової відстані, зване також умовою невиродженності);

(δ3) δ(x, y) = δ(y, x) (симетричність);

(δ4) δ(x, y) ≤ δ(x, y) + δ(y, z) (нерівність трикутника).

Будь-яка функція, що задовольняє умовам (δ1) - (δ4), називається *метричною відстанню* на множині V_i, а пара (V_i, δ) — *метричним простором*. Метрична відстань можна, звісно, визначити як на множині станів, так і на параметричній множині. ▲

Прикладами змінних з вираженими і суттєвими метричними відстанями є майже всі змінні в фізиці, наприклад довжина, маса. Цілком очевидно, що і простір, і час - це параметри, до яких цілком природно застосовне поняття метричної відстані. Проте рідко вдається визначити метричну відстань на групах. Одним з таких прикладів є група студентів, лінійно впорядкована за показниками їх успішності. Змінні, з множиною станів яких пов'язане метрична відстань, зазвичай називаються *метричними змінними*.

Ще однією властивістю множин станів і параметричних множин, які мають велике значення як методологічна відмінність, є *безперервність*. Це поняття добре відомо з математичного аналізу, і немає необхідності розглядати його тут докладно.

Найкращим прикладом безперервного часткового упорядкування є ставлення «менше або дорівнює», визначене на множині дійсних чисел або на його декартових добутках. Фактично саме поняття *безперервної змінної* (або *безперервного параметра*) спирається на вимогу, щоб відповідна множина станів (або параметрична множина) була ізоморфною множині дійсних чисел.

З цього випливає, що множина станів будь-якої безперервної змінної або параметрична множина будь-якого параметра нескінченна і незліченна. Тим самим альтернативою безперервним змінним і параметрам є змінні і параметри, задані на скінченних множинах або, можливо, на нескінченних рахункових множинах. Останні називаються *дискретними змінними або параметрами*.

1.10 Методологічні відмінності на рівні змінних і параметрів

Для нас такі властивості, як впорядкованість, метрична відстань і безперервність множин станів і параметричних множин, представляють основу для визначення найбільш істотних методологічних відмінностей на рівні змінних і параметрів. Наведемо список перенумерованих альтернатив для цих властивостей:

	0 — впорядкованості немає
Впорядкованість:	1 — часткова впорядкованість
	2 — лінійна впорядкованість
Відстань:	0 — не визначена
	1 — визначена
Безперервність:	0 — дискретно
	1 — безперервно

Статус будь-якої змінної (або параметра) для цих трьох властивостей може бути однозначно охарактеризований триплетом (упорядкованість, відстань, безперервність), в якому кожна властивість представляється його певним значенням (або його ідентифікатором). Так, наприклад, триплет (2, 1, 0) описує дискретну змінну з лінійно впорядкованою множиною станів, на якому визначено метричну відстань.

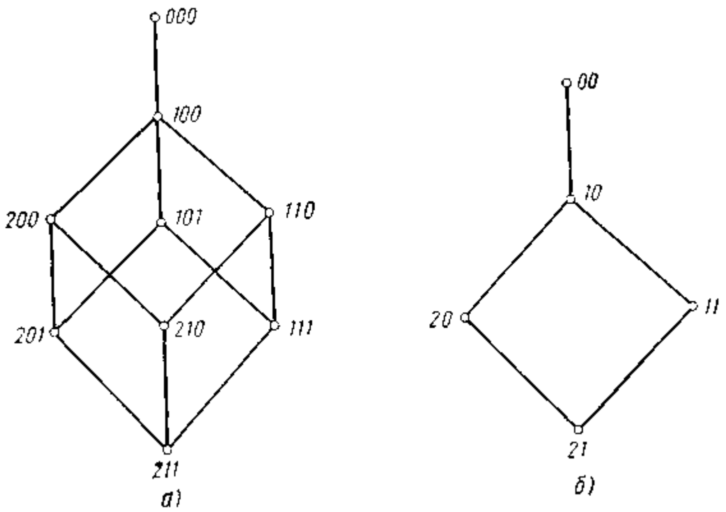


Рис. 1.2. Решітки методологічних типів змінних або параметрів

Хоча дані три властивості в принципі визначають 12 можливих комбінацій, три з них (0, 0, 1), (0, 1, 0) і (0, 1, 1) сенсу не мають. Справді, якщо на множині не визначена впорядкованість, то на ній не можна ні змістовно визначити метричний відстань, ні розглядати її як безперервну. Таким чином, є дев'ять осмислених комбінацій. Будемо називати ці комбінації методологічними типами змінних і параметрів. Вони можуть бути частково впорядковані за допомогою відношення «бути методологічно більш визначеним ніж». На рис. 1.2, а це часткове впорядкування, що утворить решітку,представлено у вигляді діаграми Хассе. Спрощена решітка на рис. 1.2, б задає схему для властивостей впорядкованості і відстані, але без безперервності.

Тепер припустимо, що є m параметрів. Вони можуть бути одного, двох, трьох (незалежно від порядку) і т.д. типів. Припустимо, що (це досить розумне припущення), тоді загальне число методологічних типів повного параметра визначається сумою

$C_1^9 + C_2^9 + ... + C_m^9$,(1.13)

При поєднанні цієї суми з дев'ятьма методологічними типами змінних ми отримаємо загальне число можливих методологічних відмінностей однієї змінної і її параметра, це число визначається формулою

$9 \times \sum_{i=1}^{m} C_i^9$.(1.14)

Алгоритм формалізації систем об'єкта

1. Визначаються властивості a_i і множини їх проявів A_i .
2. Визначаються бази b_j і множини їх проявів B_j .
3. Визначається система об'єкта $O = (\{(a_i, A_i) | i \in N_n\}, \{b_j, B_j | j \in N_m\})$, де N_n={1, 2, …, n}, а N_m={1, 2, …, m}.

К.Р. № 5

Опишіть дві системи із різними методологічними відмінностями.

Лекція 6

2. Представляючі та ісходні системи

2.1 Формалізація представляючих та ісходних систем

Властивості, конкретні і загальні змінні, а також бази, Конкретні і загальні параметри є компонентами відповідно трьох примітивних систем - системи об'єкта, конкретної представляючої системи і загальної представляючої системи, які разом з відносинами між ними утворюють початкову систему.

Одна з цих трьох систем введена раніше і формально визначається рівнянням (.1). Інші дві примітивні системи мають той же вигляд, що і система об'єкта, але їх компонентами є змінні і параметри, а не властивості і бази.

Δ Нехай $\dot{I}$ і I — це, відповідно конкретна і загальна представляюча системи. Тоді $\dot{I} = (\{\dot{v}_i, \dot{V}_i) | i \in N_n\}, \quad \{(\dot{w}_j, \dot{W}_j) | j \in N_m\})$, (2.1)

$I = (\{(v_i, V_i) | i \in N_n\}, \{(w_j, W_j) | j \in N_m\})$, (2.2)

де відповідні символи мають той же зміст, що й раніше.

Тепер потрібно визначити відносини між трьома примітив ними системами $O, \dot{I}, I$. Для спрощення нотації домовимося, що для будь-яких $i \in N_n$ и $j \in N_m$ властивість a_i відповідає змінним $\dot{v}_i$, v_i , а база b_j – параметрам $\dot{w}_j$, w_j .

Відношення між системою об'єкта і конкретною представляючою системою задається у вигляді повного каналу спостереження, що складається з окремих каналів спостереження, що складається з окремих каналів спостереження. Позначимо через Q *чіткий повний канал спостереження.* Тоді

$Q = (\{(A_i, \dot{V}_i, o_i) | i \in N_n, o_i$ визначається рівнянням (1. 6) і повинні бути *гомоморфні* щодо властивостей A_i и $\dot{V}_i$ }, $\{(B_j, \dot{W}_j, \omega_j) | j \in N_m$ $, \omega_j$ визначаються рівнянням (1. 7) і повинні бути *гомоморфні* щодо властивостей B_j и W_j }) (2.3)

де всі символи мають той же зміст, що й раніше.

Нечіткий повний канал спостереження, скажімо $\tilde{Q}$, можна отримати, замінивши o_i з (1.6) на $\tilde{O}_i$, визначене рівнянням (1 .9). Функції ω_j також можна було б замінити на функції $\tilde{\omega}_j$, заданні рівнянням (1 .10), проте така заміна, з певних міркувань, тут опущеним, схемою АСНД не передбачено.

Відношення між конкретною і загальною представляючими системами задаються набором відображень конкретизації (абсрагування, по одному для кожної змінної і параметра з цих систем). Будемо називати цей набір *каналом конкретизації абстрагування* і позначати його ξ. Тоді

$\xi = (\{\dot{V}_i, V_i, e_i) \mid i \in N_n,$ e_i визначаються рівнянням (1. 2) і повинні бути *ізоморфні* щодо властивостей $\dot{V}_i$ і $V_i\}$, $\{(\dot{W}_j, W_j, \varepsilon_j) \mid j \in N_m, \varepsilon_j$ визначаються рівнянням (1. 3) і повинні бути ізоморфні щодо властивостей $\dot{W}_j, W_j\})$,(2.4)

Можна розглянути канал спостереження з системи об'єкта безпосередньо в загальну представляючу систему. Однак цей канал можна отримати з двох каналів, що визначаються рівнянням (2. 3) і (2. 4). Він складається з триплетів

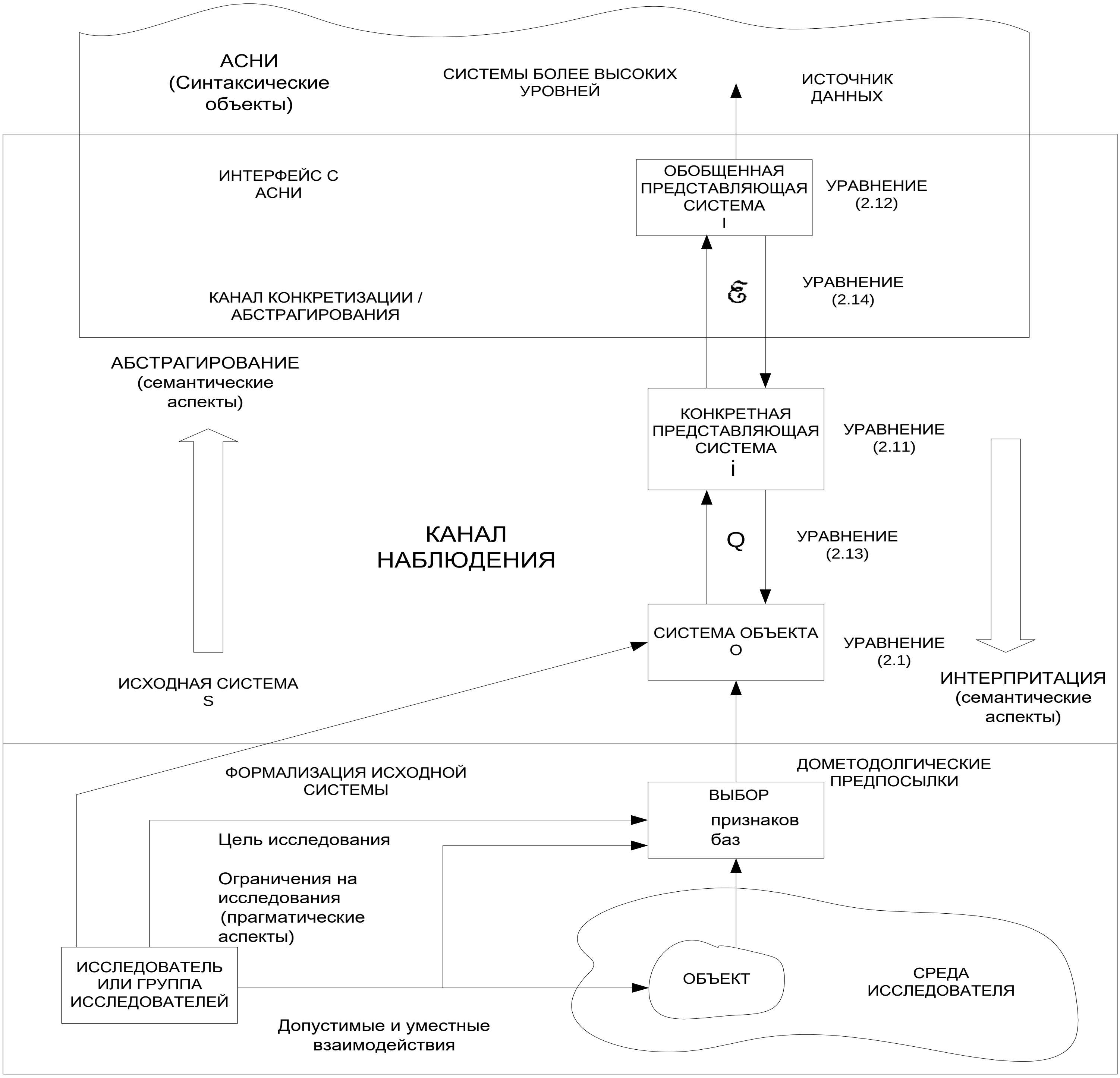
$(A_i, V_i, o_i \mathrm{O} e_i^{-1})$ и $(B_j, W_j, \omega_j \mathrm{O} \varepsilon_j^{-1})$,(2.5)

де символ O позначає композицію.

Тепер можна визначити *ісходну систему,* як п'ятірку

$S = (O, \dot{I}, I, Q, \xi)$,(2.6) ▲

На рис. 1 .3 зображені ці п'ять компонентів, а також їх зв’язки з дометодологічними посилками (дослідник, об'єкт, мета дослідження і т. д.) і з



системами більш високих рівнів..

Рис 2. 1. Концептуальні елементи, які використовуються для визначення ісходної системи.

2.2 Системи з вхідними та вихідними змінними

Вихідні змінні початкової системи розглядаються дослідником як змінні, значення яких при відповідних значеннях параметрів визначаються всередині системи, на відміну від *вхідних змінних,* значення яких задаються ззовні. Всі фактори, що впливають на визначення вхідних змінних, зазвичай називаються *середовищем системи.*

Системи з вхідними та вихідними змінними будемо називати *спрямованими системами,* а системи, у яких змінні не класифіковані таким чином, *нейтральними.*

Нехай, наприклад, для деякої системи зроблено оголошення за допомогою функції

$u : N_n \to \{0,1\}$,(2.7)

такий, що якщо $u(i) = 0$ або, $u(i) = 1$ то це означає, що змінна v_i є відповідно вхідною чи ісходною. Любий n -мірний вектор-рядок

$u = (u(1), u(2), ..., u(n))$,(2.8)

що задає певний статус для всіх змінних системи, назвемо *визначником входу-виходу.* Ясно, що для *n* змінних всього може бути 2^n оголошень входів-виходів.

Δ Позначимо спрямовані аналоги нейтральних систем тими ж символами, але з додаванням знака ^. Тоді

$\hat{O} = (\{a_i, A_i) \mid i \in N_n\} u\{(b_j, B_j) \mid j \in N_m\}),$ (2.9)

$\hat{\dot{I}} = (\{\dot{v}_i, \dot{V}_i) \mid i \in N_n\} u\{(\dot{w}_j, \dot{W}_j) \mid j \in N_m\}),$ (2.10)

$\hat{I} = (\{v_i, V_i) \mid i \in N_n\} u\{(w_j, W_j) \mid j \in N_m\}),$ (2.11)

де $\hat{O}, \hat{\dot{I}}, \hat{I}$ — спрямовані аналоги нейтральних систем $O, \dot{I}, I$. Спрямована ісходна система визначається п'ятіркою

$\hat{S} = (\hat{O}, \hat{\dot{I}}, \hat{I}, Q, \xi)$. (2.12) ▲

Відмінність вхідних і вихідних змінних на рівні вихідних систем виражене не дуже ярко. Воно стає більш явним для більш високих типів, на яких описуються різного роду відносини між змінними.

К.Р. № 6

Опишіть формально деякі представляючу і вихідну системи з вхідними та вихідними змінними.

Лекція 7

<u>2.3 Вироджені типи спрямованих систем</u>

Вихідні змінні спрямованої системи також можуть впливати на її вхідні змінні, але цей вплив, якщо воно має місце, здійснюється НЕ через систему, а, як це показано на рис. 2.2, а, через середовище.

Існує два типи вироджених спрямованих систем.

1. Спрямовані системи без вихідних змінних (рис. 2.2, б), тобто Системи з $u = (0,0,...,0)$. Ці системи методологічно марні. Справді, будь-яка така система має тільки вхідні змінні, які за визначенням повністю задаються середовищем, і, отже, їх властивості неможливо уявити і досліджувати всередині самої системи. Таким чином, у системі нічого описувати і вивчати будь-яке твердження, яке можна сформулювати усередині системи, безглуздо, оскільки воно містить тільки умову, але не слідство. Отже, для *n* змінних є тільки $2^n - 1$ осмислених оголошень входу-виходу.

2. Спрямовані системи без вхідних змінних (рис. 2.2, в), тобто системи з $u=(1,1,\ldots,1)$. Ці системи методологічно цікаві, оскільки для них можна сформулювати змістовні твердження. Однак ці твердження не можуть бути умовними, оскільки в таких системах немає вхідних змінних, на яких можна було б сформулювати ці умови.

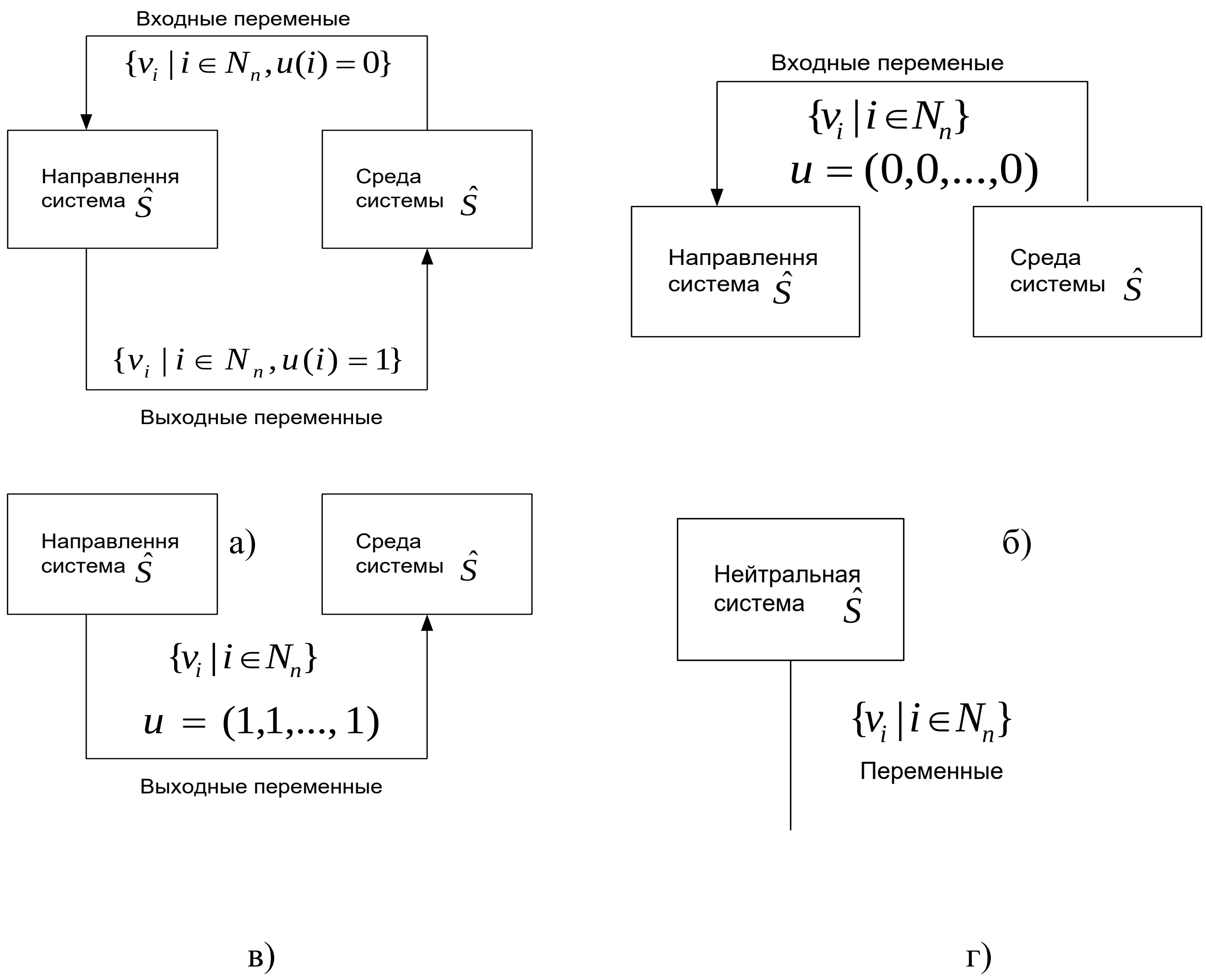


Рис.2.2. Методологічні відмінності спрямованих і нейтральних вихідних систем.

Для нейтральних систем ніякого середовища немає (рис. 2.2, г). При заміні нейтральної системи на спрямовану вводиться середа, і якщо $u \neq (1,1,...,1)$, якась інформація, яка містилася в системі, переміщається в середовище. Таким чином, отримана спрямована система містить менше інформації, ніж ісходна нейтральна.

Відмінності між нейтральними і спрямованими системами і між чіткими і нечіткими каналами спостереження - це ще два методологічних відмінності вихідних систем. Будь-яка ісходна система є або нейтральною, або спрямованої, а канали спостереження її змінних або всі чіткі, або всі нечіткі, чи різних типів. Таким чином, нові відмінності дають 2x3 = 6 можливостей. Крім того, у ісходну систему можуть входити змінні різних методологічних типів. Позначимо загальне число методологічних відмінностей, визначених для рівня вихідних систем, через #S. Тоді при цілком розумному припущенні, що число параметрів не перевищує 9 $(m \leq 9)$, ми отримаємо

$$\#S = 6 \times \sum_{i=1}^{k} C_i^9 \times \sum_{j=1}^{m} C_j^9, \quad (2.13)$$

де $k = \min(9, n)$.

Методологічні відмінності, визначені для вихідних систем, вельми важливі, оскільки вони можуть бути застосовані і до всіх систем більш високих типів.

Приклад 2.1. Нехай об'єктом дослідження є деякий обчислювальний центр, що здійснює розподілені обчислення. Кожен елемент даного обчислювального центру характеризується певними властивостями. Припустимо, що якісні показники якоїсь обчислювальної процедури залежать від набору задіяних обчислювальних засобів із заданого комплексу. Для поточних обчислень використовуються елементи, що є оптимальними з точки зору спеціально підготовленого обслуговуючого персоналу.

Мета визначення ісходної системи для даного об'єкта - отримання характеристик комплексу в цілому, їх оцінка та розробка більш підходящих і точних посібників для найкращого використання обчислювальних засобів. Базою в даному прикладі є група елементів, здатних здійснювати деякі операції з даними. Нехай кожен досліджуваний елемент позначається цілим числом. тоді функція ω дає відображення «один в один», так само як і функція ε.

Нехай для дослідження об'єкта було відібрано чотири властивості. Наведемо їхні описи і визначимо відповідні змінні. Сукупність (множина) елементів, на які покладено функції контролю обчислювальних операцій: властивість a_1. Для дослідження в даному обчислювальному комплексі, виділено лише чотири класи множин. Отже, для представлення цієї властивості потрібна конкретна змінна з чотирма станами. На рис. 2.3, а визначена функція o_1, що зв'язує властивість з цією змінною. На тому ж малюнку визначається функція e_1, яка, як завжди, являє собою просту схему переозначення. множини A_1 і $\dot{V}_1$ ніякими властивостями не володіють, і, отже, всілякі властивості цілих чисел з множини V_1 не можуть бути використані. Канал спостереження є чітким, тобто безпосередньо представляється функцією o_1.

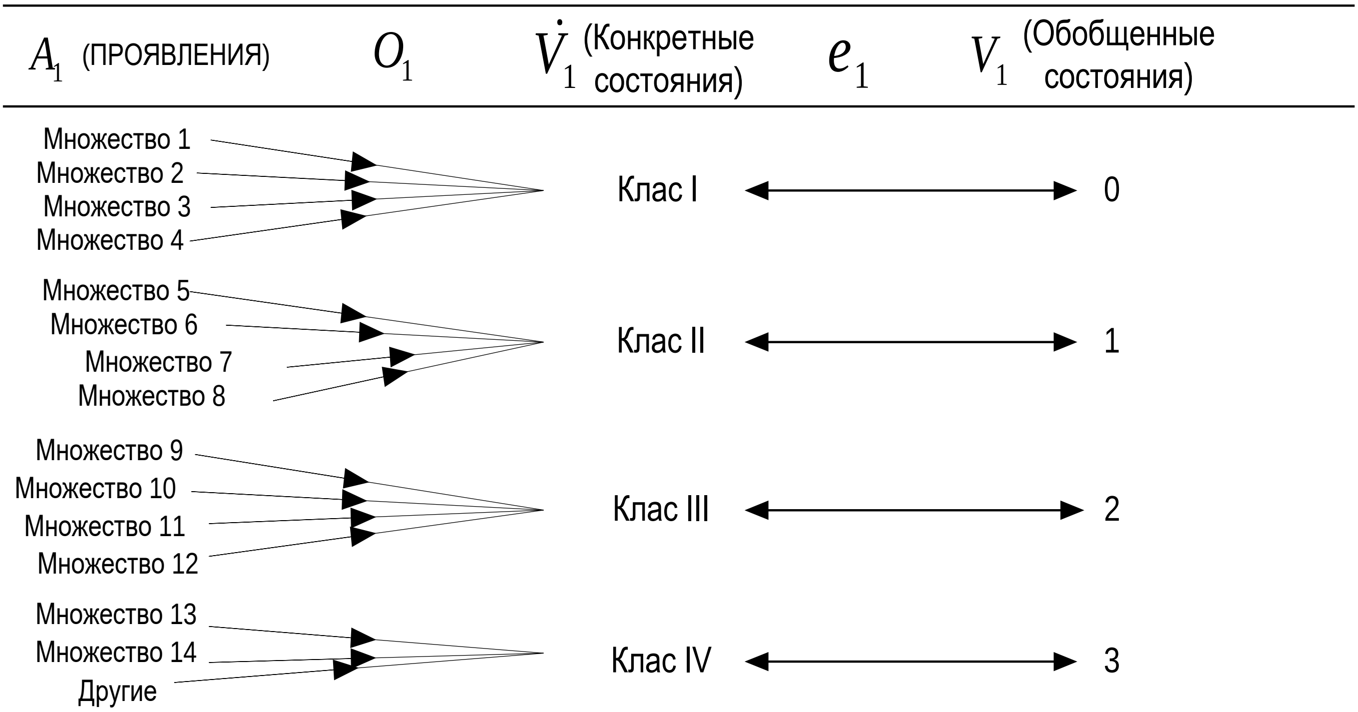


Рис. 2.3, а. Визначення змінних для ознак a_1.

Максимально можлива ефективність елементарних обчислювальних операцій (у відносних одиницях): властивість a_2. Припустимо, що для даного представлення досить дати якісну характеристику, тобто розбити кількісний критерій всього на п'ять категорій. Вони визначаються на рис. 2.3, б разом з функціями o_2 и e_2. Незважаючи на те, що біля границь блоків розбиття A_2/o_2 може мати місце деяка нечіткість вимірювання, канал спостереження o_2 можна розглядати як чіткий, так як ця нечіткість для даного дослідження не істотна. Множини $A_2, \dot{V}_2, V_2$ можна розглядати як лінійно впорядковані з метричною відстанню, і, отже, якщо потрібно, то можна для множини V_2 скористатися властивостями цілих чисел.

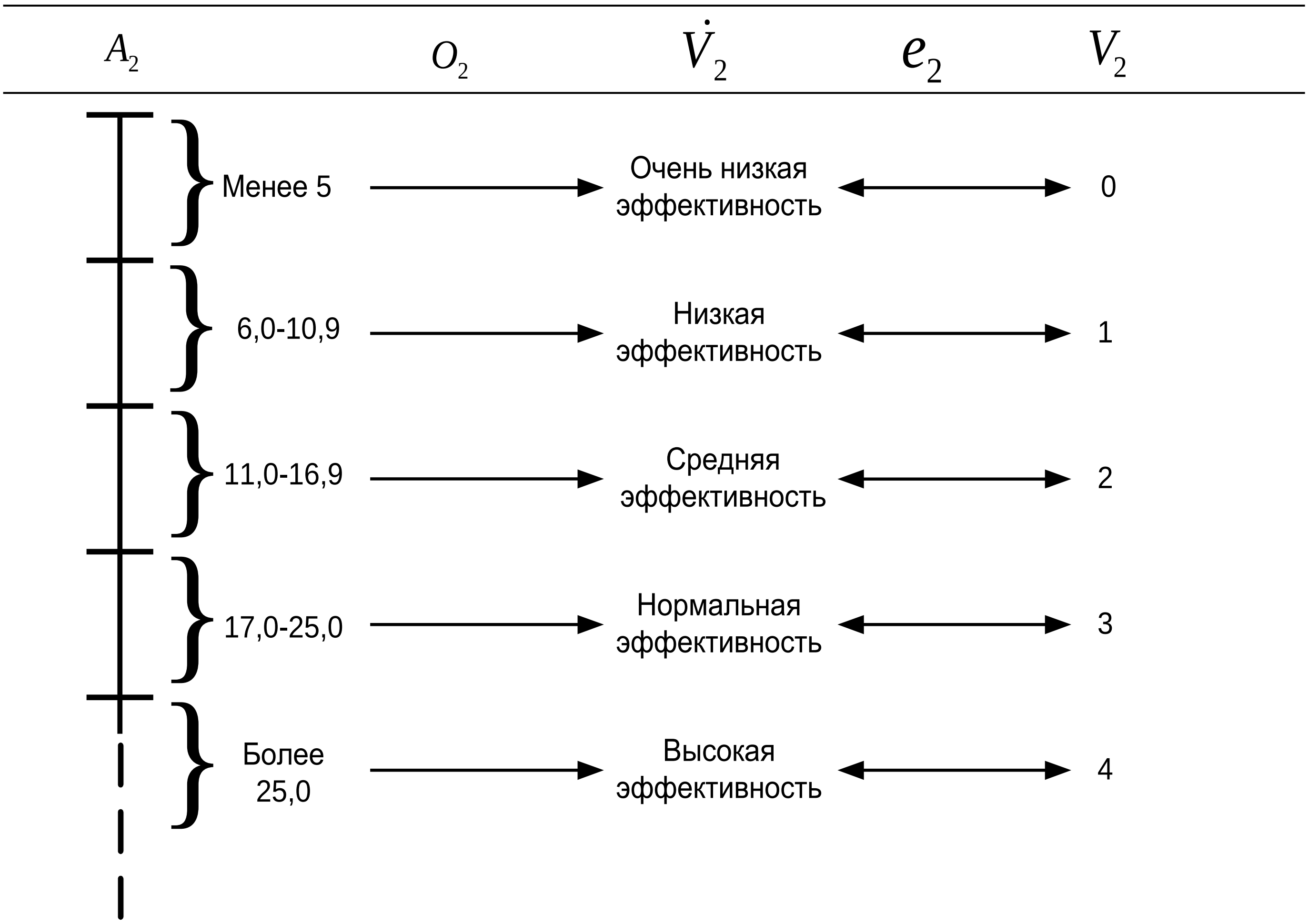


Рис. 2.3, б. Визначення змінних для ознак a_2.

Завантаженість центру в цілому: властивість a_3. Оцінюється за допомогою деяких кількісних характеристик. Проте в даному розгляді передбачається деяка неточність, отриманих оцінок. Тобто нечіткий канал спостереження. Множина V_3 має властивість лінійної впорядкованості з метричною відстанню.

Ефективність центру для даної обчислювальної процедури: властивість a_4. Виходить на базі наукової підготовки обслуговуючого персоналу. Властивість припускає тільки два стани. Тобто або істинність, або його хибність. Множина V_4 ніякими властивостями не володіє.

Ми бачимо, що певна в цьому прикладі ісходна система є нейтральною. Однак для формулювання правил оптимального використання обчислювальних засобів, система повинна бути перевизначена як спрямована з вхідними змінними $v_1 - v_3$ і ісходної змінної v_4. Один канал спостереження нечіткий, а решта чіткі, тому у ісходній системі змішані чіткі і нечіткі змінні. Множина параметрів властивостями не володіє, а множини станів мають два, а, можливо, і три типи: без властивостей, лінійно впорядковані і, лінійно впорядковані з метричною відстанню.

Алгоритм формалізації представляючих систем

1. Визначаються v_i, V_i, V_i що означають відповідно узагальнену змінну, її множину станів і множину математичних властивостей, визначених для неї.
2. Визначаються $\dot{v}_i$, $\dot{V}_i$, $\dot{\mathrm{V}}_i$ те же характеристики конкретної змінної, що є конкретизацією змінної v_i .
3. Визначаються w_j, W_j и W_j відповідно узагальнений параметр, його множина станів і множина математичних властивостей, визначених на параметрі w_j.
4. Визначаються $\dot{w}_j, \dot{W}_j$ и $\dot{\mathrm{W}}_j$ — ті ж характеристики конкретного параметра, отримані конкретизацією параметра w_j.
5. Визначаються $\dot{I}$ и I — відповідно конкретна і загальна представляюча системи: $\dot{I} = (\{\dot{v}_i, \dot{V}_i) \mid i \in N_n\}, \ \{(\dot{w}_j, \dot{W}_j) \mid j \in N_m\})$, $I = (\{(v_i, V_i) \mid i \in N_n\}, \{(w_j, W_j) \mid j \in N_m\})$.

<u>*Для спрямованих систем, додатково*</u>

   1. Визначається $u : N_n \to \{0,1\}$, якщо $u(i) = 0$ або, $u(i) = 1$ то це означає, що змінна v_i є відповідно вхідною або вихідною.
   2. Спрямовані аналоги нейтральних систем: $\hat{O} = (\{a_i, A_i) \mid i \in N_n\} u \{(b_j, B_j) \mid j \in N_m\})$,
   $\hat{\dot{I}} = (\{\dot{v}_i, \dot{V}_i) \mid i \in N_n\} u \{(\dot{w}_j, \dot{W}_j) \mid j \in N_m\})$, $\hat{I} = (\{v_i, V_i) \mid i \in N_n\} u \{(w_j, W_j) \mid j \in N_m\})$.

Алгоритм формалізації вихідних систем

1. Визначається канал спостереження, за допомогою якого властивість a_i представляється змінною $\dot{v}_i$: $O_i : A_i \to \dot{V}_i$.
2. Визначається представлення бази b_j, параметром $\dot{w}_j$: $\omega_j : B_j \to \dot{W}_j$.
3. Визначається функція e_i ,що конкретизує узагальнену змінну v_i , ізоморфна щодо математичних властивостей V_i: $e_i : V_i \to \dot{V}_i$.
4. Визначається функція ε_j ,що конкретизує узагальнений параметр w_j , ізоморфна щодо математичних властивостей W_j: $\varepsilon_j : W_j \to \dot{W}_j$.
5. Визначається чіткий повний канал спостереження: $Q = (\{(A_i, \dot{V}_i, o_i) \mid i \in N_n, o_i$ повинні бути *гомоморфні* відносно властивостей A_i і $\dot{V}_i\}$, $\{(B_j, \dot{W}_j, \omega_j) \mid j \in N_m$ $, \omega_j$ повинні бути *гомоморфні* відносно властивостей B_j і $W_j\}$).
6. Визначається каналом конкретизації абстрагування: $\xi = (\{\dot{V}_i, V_i, e_i) \mid i \in N_n$, e_i повинні бути *ізоморфні* відносно властивостей $\dot{V}_i$ і $V_i\}$, $\{(\dot{W}_j, W_j, \varepsilon_j) \mid j \in N_m, \varepsilon_j$ повинні бути *ізоморфні* відносно властивостей $\dot{W}_j, W_j\})$.
7. Визначається віхидна система: $S = (O, \dot{I}, I, Q, \xi)$. Для спрямованих систем $\hat{S} = (\hat{O}, \hat{\dot{I}}, \hat{I}, Q, \xi)$.

К.Р. № 7

Наведіть детальний приклад виродженої системи.

Лекція 8

3. Системи даних

3.1 Формалізація систем даних

Ісходна система - це схема, за якою можуть бути зроблені спостереження відібраних ознак. Якщо канал спостереження чіткий, то будь-яке реальне спостереження представляється у вигляді упорядоченої пари, що складається із значення повного параметра, при якому було зроблено спостереження, і зафіксованого повного стану змінних.

.

Δ Передбачається, що дані повинні бути представлені як узагальнені параметри і змінні. Отже, при формалізації поняття даних ми можемо обмежитися розглядом тільки узагальненої направляючої системи I, як вона визначена в (2.1 1).Нехай

$$W = W_1 \times W_2 \times .... \times W_m, (3.1)$$

$$V = V_1 \times V_2 \times .... \times V_n. (3.2)$$

Тоді *чіткі дані* представляються функцією

$$d : W \to V, (3.3)$$

Функція *d* будь-якому значенню повного параметра ставить в відповідність один повний стан змінних.

Представляюча система I описує тільки потенційні стани змінних, в той час як функція *d* дає інформацію про їх дійсних станах при необмеженій параметричній множині. Тобто фактично відповідає дослідним даним. Систему I з функцією *d* можна розглаядати як систему більш високого типу (рівня 1). Будемо називати таку систему *системою даних,* і позначати D. Тоді

$$D = (I, d), (3.4)$$

Проте для будь-якого конкретного застосування у формулюванні повинен бути відображений і сенс даних *d*. Це можна зробити, замінивши представлючу систему I в рівнянні (3. 4) відповідною ісходною системою S. Отриману в результаті цієї заміни систему назвемо *системою даних з семантикою* і позначимо ^{S}**D.** Таким чином,

$$^S D = (S, d), (3.5)$$

У даному випадку функція *d* пов'язана з системою S наступним чином: якщо спостереження, що описується за допомогою

$$o_i \mathrm{O} e^{-1}(x_i) = y_i, (3.6)$$

для всіх $i \in N_n$ (де x_i—передбачуваний прояв властивості a_i, а y_i — відповідний стан змінної v_i), зв'язується зі значенням повного параметра $w \in W$, то

$$d(w) = v, (3.7)$$

де $v = (y_1, y_2, ..., y_n) \in V$.

Залежно від розглянутої задачі функція *d* може бути визначена трьома способами. По-перше, вона може бути результатом спостережень або вимірювань.По-друге, її можна вивести з систем більш високих рівнів. По-третє, вона може бути визначена самим дослідником (в задачах проектування систем).

Системи даних D і ^{S}**D** нейтральні. Перетворення цих систем в їх направлені аналоги $\hat{D}$ і $^{S}\hat{D}$ праці не представляє. Потрібно тільки замінити I на $\hat{I}$, а S на $\hat{S}$.Таким чином,

$$\hat{D} = (\hat{I}, d) ,(3.8)$$

$$^{S}\hat{D} = (\hat{S}, d) ,(3.9)$$

- Це спрямовані системи даних без подання сенсу даних і з останнім відповідно. ▲

3.2 Системи даних з нечіткими каналами спостереження

Δ Якщо змінні визначаються через нечіткі канали спостереження, то кожне спостереження записується як упорядкована пара, що складається із значення повного параметра, з яким зв'зано спостереження, і вектора $(h_1, h_2, ..., h_n)$ функцій

$$h_i : V_i \to [0,1], i \in N_n \ ,(3.10)$$

де $h_i(y)$ виражає рівень впевненості в тому, що y є спостереженним станом змінної v_i .

Формалізуємо поняття нечітких даних. Нехай

$$\tilde{V} = \{V_1 \to [0,1]\} \times \{V_2 \to [0,1]\} \times .... \times \{V_n \to [0,1]\} .(3.11)$$

Тоді *нечіткі дані* представляються функцією

$$\tilde{d} : W \to \tilde{V} . (3.12)$$

Для будь-якого значення повного параметра $w \in W$

$$\tilde{d}(w) = h ,(3.13)$$

де $h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \tilde{V}$. ▲

3.3 Представлення даних

Δ З яким типом даних - чітким чи нечітким - ми маємо справу, завжди ясно з контексту. Чіткі дані можуть бути представлені в самому різному виді. Нехай стандартною формою представлення дискретних змінних і параметрів буде матриця

$$d = [v_{i,w}] ,(3.14)$$

елементами якої $v_{i,w}$ є стани змінних v_i, спостереженні при відповідних значеннях повного параметра w (рис. 3.1,*а*). Кожен стовпець матриці d задає повний стан, спостережений при даному w, а кожен рядок - усі спостереження однієї змінної на параметричній множині W. Якщо W лінійно впорядковано, то і стовпці в матриці d повинні бути впорядковані таким же чином. Якщо використовуються декілька параметрів, то може виявитися, що зручніше використовувати інші форми подання.

Для нечітких даних стандартною формою уявлення, подібної матриці d , є тривимірний масив

$$\tilde{d} = [\tilde{d}_{i,j_i,w}] ,(3.15)$$

елементами якого є значення рівня впевненості в тому, що при заданому значенні параметра w спостерігався стан j_i змінної v_i, де $i \in N_n, j_i \in V_i, w \in W$, а $d_{i,j_i,w} \in [0,1]$. Масив являє собою набір матриць (рис. 3.1, *б*), по одній для кожної змінної. Стовпець w в матриці змінної v_i задає функцію h_i, яка визначається рівнянням (3.10). ▲

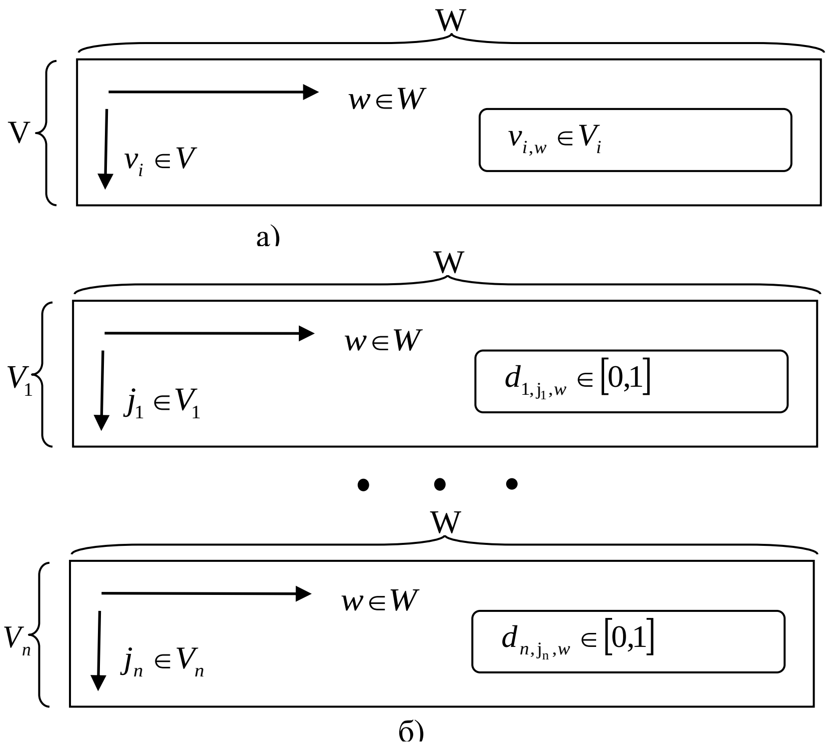


Рис. 3. 1 Стандартні форми подання даних для дискретних змінних а) чіткі дані б) нечіткі дані

К.Р. № 8

Опишіть формально деяку систему даних з нечіткими каналами спостереження.

Наведіть приклад представлення даних.

Алгоритм формалізації систем даних

1. Визначається функція $d : W \to V$, де $W = W_1 \times W_2 \times .... \times W_m$, $V = V_1 \times V_2 \times .... \times V_n$.
2. Визначається система даних $D = (I, d)$.Система даних с семантикою ${}^S D = (S, d)$. Спрямовані аналоги $\hat{D} = (\hat{I}, d)$, ${}^S \hat{D} = (\hat{S}, d)$.

Для систем даних з нечіткими каналами спостереження

1. Визначаються функції $h_i : V_i \to [0,1], i \in N_n$, де $h_i(y)$ висловлює ступінь впевненості в тому, що y є спостереженим станом змінної v_i.
2. Нечіткі дані представляються функцією $\tilde{d} : W \to \tilde{V}$, де $\tilde{V} = \{V_1 \to [0,1]\} \times \{V_2 \to [0,1]\} \times .... \times \{V_n \to [0,1]\}$.

Лекція 9

4. Породжуючі системи

4.1 Системи з поведінкою

Термін *поведінка* використовується для характеристики загального параметрично інваріантного обмеження на змінні узагальненої представляючої системи і, можливо, на деякі додаткові абстрактні змінні. Додаткові змінні визначаються на параметричній множині за допомогою *правил зсуву*.

Так як опис параметрично інваріантного обмеження на розглянуті змінні може бути використаний для породження станів змінних при даній параметричній множині, системи, що містять такі обмеження, називаються *породжуючими системами*. Поведінка являє собою одну з форм завдання цього обмеження.

Для заданої узагальненої представляючої системи діапазон можливих типів параметрично інваріантних обмежень залежить від властивостей, приписуваних параметричній множині. Якщо на цій множині ніяких властивостей не визначено (як це часто буває для груп), то стани змінних можуть обмежувати тільки один одного. Однак якщо параметрична множина впорядкована, стани змінних можуть обмежуватися не тільки іншими станами, але і станами обраного *сусідства* для кожного конкретного значення параметра.

Сусідство на впорядкованій параметричній множині зазвичай називається маскою і визначається через змінні, параметричну множину і набір правил зсуву на параметричній множині. Правило зсуву, скажімо правило r_j,— це однозначна функція

$$r_j : W \to W \text{ , (4.1)}$$

яка кожному елементу W ставить у відповідність інший (причому єдиний) елемент W. Якщо, наприклад, параметрична множина повністю впорядкована (як у випадках, коли розглядається час або одночасний простір) і являє собою множину послідовних цілих додатних чисел, то будь-яке правило зсуву може бути задано простим рівнянням

$$r_j(w) = w + \rho \text{ , (4.2)}$$

де ρ— ціла константа (додатна, від'ємна або нуль). При $\rho = 0$ r_j називається *тотожним правилом зсуву*.

Все вище сказане, можна пояснити наступним чином. Для того щоб система, була здатна генерувати дані, з вихідних даних, потрібно визначити деякі правила по яких будуть виходити нові дані. У вузькому сенсі це будуть деякі функції. Наприклад, лінійна функція однієї змінної - геометрично пряма. Ця функція перетворює значення аргументу, в деяке значення. У більш широкому сенсі це параметрично інваріантне обмеження.

4.2 Вибіркові змінні і маски

Нехай задана узагальнена представляюча система **I**, обумовлена рівнянням (2.12). Позначимо через **V** множину змінних з **I**, а через *R* набір правил зсуву, що розглядаються для цих змінних. Тоді множина змінних

$$S = \{s_1, s_2, ...\} \text{ ,(4.3)}$$

що називається *вибірковими змінними,* може бути введено за допомогою рівнянь

$$s_{k,\omega} = v_{i,\, r_j(w)} \text{ ,(4.4)}$$

для деяких змінних $v_i \in V$ і правил зсуву $r_j \in R$; $s_{k,\omega}$ позначає стан вибіркової змінної s_k при значенні параметра **w,** а $v_{i, j_i}(w)$ — стан змінної v_i при значенні параметра $r_j(w)$, тобто при значенні, що отримали для заданого **w**, при застосуванні правила зсуву r_j. Для повністю впорядкованої параметричної множини, правила зсуву якої мають вигляд (4.2), рівняння (4.4) може бути переписано в більш визначеному виді

$$s_{k,w} = v_{i,\mathrm{w}+\rho} \text{ ,(4.5)}$$

Так як будь-яке правило зсуву з набору *R* може бути застосоване до будь-якої змінної з множини *V*, то множина всіх можливих так, що всякої парівибіркові змінні, що характеризуються відношенням

$M \subseteq V \times R$, (4.6)

так, що для всякої пари $(v_i, \mathrm{r_j}) \in M$ відповідає одне рівняння з (4.4). Відношення *M* представляє схему сусідства на параметричній множині, в термінах якого визначені вибіркові змінні. Ця схема зазвичай називається *маскою*.

Для введення ідентифікаторів вибіркових змінних *k* повинна бути введена якась однозначна функція (кодування).

$\lambda : M \to N_{|M|}$, (4.7)

де $|M|$— це кількість елементів множини *M.*

Якщо вибіркова змінна s_k визначена через змінну v_i і деяке правило зсуву згідно рівняння (4.4), то множина станів s_k, очевидно, та ж сама, що і множина станів v_i тобто V_i. Однак для зручності позначень будемо множину станів вибіркової змінної позначати S_k; сенс любого $S_k (k \in N_{|M|})$ однозначно визначається маскою в термінах однієї з множин $V_i (i \in N_n)$. Таким чином, декартовий добуток

$C = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{|M|}$,(4.8)

являє собою повну множину станів вибіркових змінних.

<u>4.3 Маски у випадку повністю впорядкованих параметричних множин</u>

Розглянемо спочатку поняття маски і пов'язану з ним поведінку представляючих систем для повністю впорядкованих параметричних множин, а потім поширимо його на частково впорядковані параметричні множини. Позначимо повністю впорядковані параметричні множини *T*, а їх елементи $t (t \in T)$. При цьому рівняння (4.4) дещо зміниться:

$s_{k,i} = v_{\mathrm{i,t+\rho}}$, (4.9)

Для повністю впорядкованих параметричних множин маска може бути зображена у вигляді вирізки з матриці, що представляє декартовий добуток $V \times R$. Це показано на рис.4.1,*а*, на якому рядки позначені ідентифікаторами *i*

Состояние d
для M при t=7

$s_{1,7}$	=	$v_{1,6}$	=	2
$s_{2,7}$	=	$v_{1,7}$	=	0
$s_{3,7}$	=	$v_{2,7}$	=	3
$s_{4,7}$	=	$v_{2,8}$	=	2
$s_{5,7}$	=	$v_{3,5}$	=	1
$s_{6,7}$	=	$v_{3,6}$	=	1
$s_{7,7}$	=	$v_{3,7}$	=	0
$s_{8,7}$	=	$v_{4,5}$	=	3
$s_{9,7}$	=	$v_{4,7}$	=	0
$s_{10,7}$	=	$v_{5,7}$	=	2

k

Маска М

Справочник

$\rho =$	-2	-1	0	1
i=1		1	2	
2			3	4
3	5	6	7	
4	8		9	
5			10	

в) а)

t=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
v_1	0	0	1	2	2	2	0	1	1	
v_2	3	2	2	1	2	3	3	2	0	
v_3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	
v_4	0	0	1	2	3	0	0	1	2	
v_5	2	2	2	0	1	2	2	2	1	

Матрица данных d

Справочник

б)

Рис.4.1. Пояснення поняття маски для повністю впорядкованих параметричних множин.

Змінних з множини *V,* а стовпці - цілими константами ρ, пов'язаними з правилами зсуву типу (4.2). Елементи матриці або порожні, або являють собою ідентифікатори *k* вибіркових змінних, приписані парам (i,ρ) згідно (4.6); порожні елементи матриці відповідають елементам $V \times R$, що не входять в маску. У візуальному представленні стає ясно, чому використовується термін «маска».

Часто буває зручно розбити маску *М* на підмаски *М,* кожна з яких пов'язана з однією змінною і, з подібної системи. Формально

$$M_i = \{(\alpha,\beta) \mid (\alpha,\beta) \in M, \alpha = v_1\}, \; (4.10)$$

У візуальному (матричному) представленні *М* підмаски M_i являють собою рядки. У будь-якій масці один стовпець відповідає тотожному правилом зсуву $(\rho = 0)$. Цей стовпець має особливе значення, оскільки пов'язані з ним вибіркові змінні ідентичні базовим змінним заданої представляючої системи. Будемо цей стовпець у масках називати *довідником.* Якщо маска поміщена на матрицю даних таким чином, що довідник збігається з певним значенням *t,* то маска виділить тільки деяку підмножину елементів, а саме елементи, що представляють повний стан вибіркових змінних при даному значенні *t.* Так, наприклад, на рис. 4.1,*б* зображена маска (визначена на рис. 4.1,*а*), поміщена на матрицю даних *d* при *t=7* (довідник маски співпадає з *t=7).* Повний стан вибіркових змінних для цього положення маски показано на рис. 4.1, *в.* Стани довідника вибіркових змінних $s_2, s_3, s_7, s_9, s_{10}$ в точності ті ж (для будь-якого *t*), що і стан базових змінних відповідно v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

Решта вибіркових змінних являють собою стани з параметричного сусідства в *t.* Для будь-якої маски при будь-якому *t* схема сусідства зберігається. Якщо *t* — час, то змінна s_4 буде представляти майбутнє (відносно значення *t,* що розглядається*)* стан змінної v_2, а змінні s_5 і s_4 будуть представляти, минулі стани змінної v_3 люба маска представляє певну точку зору, відповідно до якої представляються обмеження на базові змінні.

К.Р. № 9

Опишіть систему з поведінкою у разі повністю впорядкованих параметричних множин. (Обов'язково необхідно вказати маски і вибіркові змінні.)

Лекція 10

4.4 Функції поведінки. Породжуючі і породжувані змінні.

Найпростіший спосіб завдання певної маски - це перерахування всіх повних станів відповідних вибіркових змінних. У загальному вигляді подібний перелік є підмножиною декартового добутку $\mathbf{C}$, тобто багатовимірним відношенням, визначеним на $\mathbf{C}$. Це відношення визначається функцією

$$f_B : C \to \{0,1\}, (4.11)$$

такий, що $f_B(c)=1$, якщо стан з входить до переліку, і $f_B(c)=0$ в іншому випадку.Така функція дає деякі відомості про поведінку вибіркових змінних, функцію f_B зазвичай називають *функцією поведінки.* Функція, що визначається рівнянням (4. 11), задає тільки один з існуючих типів функцій поведінки, різними способами описуючих обмеження на змінні.

Функція f_B визначає стани що зустрічаються з с, але не визначає значення параметра, при якому вони мають місце. Таким чином, ця функція є параметрично інваріантною.

Система F_B, що характеризує параметрично інваріантне обмеження на множину змінних через функції поведінки, визначається трійкою

$F_B = (I, M, f_B)$, (4.12)

де I — обобщенная узагальнена представляюча система; M - маска, визначення на I; f_B— функція поведінки, визначена через M і I. Будемо таку систему називати *системою з поведінкою*

Незважаючи на те, що будь-яка система з поведінкою, визначаєма (4 .1 2), деяким конкретним параметрично інвариантно описують обмеження на змінні представляючої системи, вона не містить опису того, як використовувати це обмеження для породження даних. Для розробки такого опису потрібно розбити вибіркові змінні на дві підмножини:

1) змінні, стани яких породжуються з обмеження; назвемо їх *породжуючими змінними;*

2) змінні, стани яких використовуються як умови в процесі генерації, назвемо їх *породжуючими змінними.*

Для заданої системи з поведінкою одним із способів визначення породжених і породжуючи змінних є визначення для даної маски M двох подмасок M_g и $M_{\bar{g}}$. Будемо

$M_G = (M, M_g, M_{\bar{g}})$, (4.13)

де

$M_g, M_{\bar{g}} \subset M, \quad M_g \cup M_{\bar{g}} = M, \quad M_g \cap M_{\bar{g}} = 0$,(4.14)

називати *маскою породження,* т. е. це маска M і її розбиття на породжувану підмаску M_g і породжуючу підмаску $M_{\bar{g}}$.

За аналогією з розбиттям M на M_g і $M_{\bar{g}}$ множина $M_{|M|}$ ідентификаторів k вибіркових змінних можна розбити на дві підмножини, скажімо K_g і $K_{\bar{g}}$, що представляють ідентифікатори відповідно породжуваних і породжуючих змінних. Для зручності позначень кодуюча функція (4. 7) може бути замінена двома функціями

$$\begin{aligned} \lambda_g &: M_g \to K_g, \\ \lambda_{\bar{g}} &: M_{\bar{g}} \to K_{\bar{g}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

за допомогою яких множина станів G і $\overline{G}$ відповідно породжуваних і породжуючих змінних задаються декартовими добутками

$$G = \underset{k \in K_g}{\times} S_k,$$
$$\overline{G} = \underset{k \in K_{\overline{g}}}{\times} S_k. \quad (4.16)$$

Тепер спосіб представлення стану породжуваних змінних (скажімо $g \in G$), що визначається за станом породжуючих змінних (скажімо, , $\tilde{g} \in G$), можна виразити функцією

$f_{GB} : \overline{G} \times \underline{G} \to \{0,1\}$, (4.17)

де

$$f_{GB}(\tilde{g}, g) = \begin{cases} 1, \text{если } g \text{ может иметь место или если имеет место } \overline{g} \\ 0, \text{если } g \text{ не может иметь место или если имет место } \overline{g}. \end{cases} ,(4.18)$$

Назвемо цю функцію *породжуючою функцією поведінки*.

Якщо маску M і функцію f_B з (4.11) замінити відповідно на M_G і функцію f_{GB}, то вийде альтернативна система

$F_{GB} = (\mathrm{I}, M_G, f_{GB})$. (4.19)

Будемо називати таку систему *породжуючою системою з поведінкою.*

Використання породжуючої системи з поведінкою для по народження даних включає наступні два етапи:

а) для деякого значення $t \in T$ задано стан $\tilde{g} \in \tilde{G}$; для визначення стану $g \in G$ при тому ж значенні використовується функція f_{GB} ;

б) значення t замінюється на нове і повторюється етап а).

<u>4.5 Особливості процедури породження даних</u>

1. На етапі а) неявно передбачається, що при заданому значенні t стан $\overline{g}$ відомо.Цей стан називається *початкова умова.* Однак після цього все повністю визначається самим процесом породження, тобто. станами $\overline{g}$ і g, пов'язаними з попереднім значенням t. При цьому передбачається, що значення t повинні на етапі *(б)*змінюватися відповідно до порядку, за даними на множині T. Таким чином, значення t замінюються або на $t + l$, або на t- 1. У першому варіанті початкова умова має бути визначена для найменшого можливого значення t, а в другому - для найбільшого можливого значення t.

2. З необхідності породження даних в одному з двох порядків випливає, що існує тільки два власник них розбиття маски M на M_g і $M_{\overline{g}}$, , Кожне з яких відповідає одному з двох порядків породження. Якщо дані породжуються в порядку зростання (спадання) t, то M_g містить рівно по одному елементу кожної підмаски $M_i (i \in N_n)$, визначеної в (4.10), елемент з найбільшим (найменшим) значенням ρ; інші елементи M входять в $M_{\overline{g}}$. <u>*Таким чином, графічно виходить, що* M_g *— це множина самих правих елементів М (правий край цієї маски) або, навпаки, множина самих лівих елементів М (лівий край маски).*</u>

3. Передбачається, що для будь-якого стану $\overline{g} \in \overline{G}$ є принаймні один стан $g \in G$, який допускається функцією f_{GB} [тобто $f_{GB}(\overline{g}, g) = 1$] Якщо допускається тільки один стан, то для будь-якої початкової умови дані породжуються однозначно; такі системи називаються *детермінованими.* Якщо допускається більш ніж один стан, то породження даних проблематично, так як породжений стан не завжди однозначно визначено. Для таких систем вибираючі функції поведінки не підходять. Більш змістовно вони описуються функціями поведінки інших типів, розглянутих нижче.Для детермінованих систем подання (4 .1 7) породжуючої функції поведінки f_{GB} може бути замінене більш простим

(4.20)

Приклад 4 .1. Для пояснення процесу породження даних породжаючою системою з поведінкою типу, що визначається рівнянням (4.12), покладемо, що подібна система складається з упорядкованої параметричної множини $T = N_{99}$ і п'яти змінних $v_1,...,v_5$, стани яких будуть визначені нижче. Скористаємося маскою, заданої на рис. 4.2. Дані можуть породжуватися або в порядку зростання, або в порядку убування значень параметра t . Обидва ці варіанти показані відповідно на рис. 4.2 і 4.3.

У першому випадку (рис. 4.2) породжувані вибіркові змінні- це змінні, відповідні правому краю маски, тобто. $s_2, s_4, s_7, s_9, s_{10}$; інші вибіркові змінні є породжуючі. Породження даних в матриці даних відбувається зліва направо. Нехай породжуюча функція поведінки f_{GB}, , представлена у вигляді (4. 20), визначається рівняннями

$$s_{k,t} = s_{1,t} + s_{3,t} + s_{5,t} + s_{6,t} + s_{8,t} \pmod k$$

при цьому множини станів породжуваних змінних визначаються цими рівняннями, а множини станів породжуючих змінних - їх становищем у масці. Наприклад, множина станів породжуємої змінної s_4 — це 0, 1, 2, 3, так як рівняння для s_4 берется по модулю 4; породжуюча змінна s_3 має ту ж множину станів, що і s_4, оскільки обидві ці змінні визначені через одну і ту ж змінну представляючої системи (тобто $S_3 = S_4 = V_2$).

t=	1	2	3	4	5	6	…	
v_1		1	1					
v_2			1	1				
v_3	1	1	4					
v_4	1	1	5					
v_5 Довідник			5					

а)

t=	1	2	3	4	5	6	7	
v_1		1	1	1				
v_2			1	1 2	1			
v_3	1	1	5	0				
v_4	1	1	5	9				
v_5 Довідник			5	9				

б)

t=	1	2	3	4	5	6	…
v_1		1	1	1	0		
v_2			1	1	1	2	
v_3	1	1	5	2	0		
v_4	1	1	6	0	5		
v_5			6	9	4		Довідник

в)

T=	1	2	3	4	5	6	7	8	…
v_1			1	1	0				
v_2			1	1	1	0	0		
v_3	1	1	5	2	4	4			
v_4	1	1	5	0	4	4			
v_5			5	9	4	4	Довідник		

г)

t=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
v_1		1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	
v_2			1	1	1	2	0	1	0	3	0	0	1	0	0	2	2	
v_3	1	1	5	2	0	4	2	5	0	5	5	6	2	5	0	3	3	
v_4	1	1	5	0	5	4	0	3	7	3	3	4	7	3	5	1	1	
v_5			5	9	4	4	9	2	7	2	2	3	6	2	4	0	0	

д)

Рис. 4. 2. Дані, породжені в порядку зростання значення параметра t (Приклад 3.1).

Першою осмисленої позицією маски на матриці даних (позиція визначається положенням довідника маски) є позиція t = 3; позиції t = 1 і t = 2 сенсу не мають, так як з стану деяких вибіркових змінних для цих позицій не визначені ($t+\rho$ не входить в множину *T).* Початкова умова складається з шести елементів матриці даних: $v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,1}, v_{4,1}, v_{4,2}$. Нехай, наприклад, всі ці елементи дорівнюють 1. Ще п'ять елементів матриці даних — $v_{1,1}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{5,1}, v_{5,2}$ — не можуть бути породжені, а можуть бути задані користувачем, але для породження даних ці 00змінні не потрібні. На рис. 4 . *2, а, б, в, г* детально показано породження станів відповідно для t = 3, 4, 5, 6; кружками обведені породжені стани. На рис. 4. 2. *д* показано початкова умова і дещо більший фрагмент породженої матриці даних.

t=	…	94	95	96	97	98	99	
					1	1		v_1
						1	1	v_2
				5	1	1		v_3
				5	1	1		v_4
						5		v_5

Довідник

а)

t=	…	93	94	95	96	97	98	99	
					1	1	1		v_1
						1	1	1	v_2
				3	5	1	1		v_3
				0	5	1	1		v_4
						9	5		v_5

Довідник

б)

t=	…	93	94	95	96	97	98	99	
				1	1	1	1		v_1
					3	1	1	1	v_2
			3	3	5	1	1		v_3
			6	0	6	1	1		v_4
					4	9	5		v_5

в) Довідник

t=	…	93	94	95	96	97	98	99	
			0	1	1	1	1		v_1
				2	3	1	1	1	v_2
		4	3	3	5	1	1		v_3
		1	6	0	5	1	1		v_4
				10	4	9	5		v_5

г) Довідник

t=	…	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	
		0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1		v_1
		1	2	3	3	0	1	1	1	0	1	0	3	2	3	1	1	1	v_2
		5	3	2	5	5	5	2	3	0	3	4	3	3	5	1	1		v_3
		2	6	2	8	8	5	8	0	3	6	1	6	0	5	1	1		v_4
		9	7	0	4	9	6	6	5	8	9	1	4	10	4	9	5		v_5

Початкова умова

Рис. 4. 3. Дані, породжені в порядку убування значення параметра *t* (Приклад 3.1).

Якщо дані породжуються у порядку убування *t* (див. рис. 4 .3), то породжуючими змінними є змінні, що представляють лівий край маски, тобто змінні $s_1, s_3, s_5, s_8, s_{10}$.Дані в матриці даних породжуються справа наліво. Припустимо тепер, що f_{GB} визначається рівняннями

$$s_{k,t} = s_{2,t} + s_{4,t} + s_{6,t} + s_{7,t} + s_{9,t} (\mathrm{mod}\ k+1)$$

при k = 1, 3, 5, 8, 10. Породження даних при t = 98, 97, 96, 95 детально показано на рис.4 .3, *а* , *б,* *в* і *г* На рис. 4.3, *д* показана початкова умова і дещо більший фрагмент породженої матриці.

К.Р. № 10

Для деякої системи з поведінкою, опишіть функції поведінки. Наведіть приклад процедури породження даних.

Лекція 11

4.6 Функції породження для недетермінірованних систем

Параметрично інваріантне обмеження на множину вибраних змінних може бути охарактеризоване різними способами. Простий опис, розглянутий в розд. 3.3, може обмежитися завданням функції вибору, визначеної на відповідній множині станів. Хоча функція вибору є, ймовірно, найбільш підходящим формальним апаратом для завдання обмежень в детермінованих системах, в яких породження даних зручно описувати за допомогою функції (4.20), для роботи з недетермінованими системами функції вибору не годяться. Традиційно з недетермінованими системами працюють методами теорії ймовірностей. При цьому основним поняттям при описі обмежень на змінні є поняття імовірнісної міри. З теорії ймовірностей добре відомо, що будь імовірнісна міра, скажімо міра *p,* однозначно визначається функцією розподілу

$f_B : \mathrm{C} \to [0,1]$, (4.21)

При цьому породжуюча функція поведінки f_{GB} має вигляд

$f_{GB} : \overline{G} \times G \to [0,1]$,(4.22)

де $f_{GB}(\bar{g}, g)$— умовна ймовірність за умови $\bar{g}$. Щоб підкреслити, що f_{GB} задає умовні ймовірності, для позначення ймовірності g при заданому $\bar{g}$ замість $f_{GB}(\bar{g}, g)$ вікористовується стандартне позначення $f_{GB}(g \mid \bar{g})$.

4.7 Спрямовані системи з поведінкою

Дотепер ми розглядали тільки нейтральні системи з поведінкою (базові і породжують). Для опису їх спрямованих аналогів необхідно розбити відповідну множину вибіркових змінних на дві підмножини:

1) вибіркові змінні, які визначаються середовищем, тобто вхідні змінні [змінні v_i, для яких $u(i) = 0$];

2) решта вибіркових змінних, пов'язані з розглянутою маскою. Ці дві підмножини вибіркових змінних можна визначити, розбивши задану маску *M* на дві підмаски. Нехай підмаска M_e визначає вибіркові змінні, що задаються середовищем, а підмаска $M_{\bar{e}}$ — решту. Тоді трійка

$\widehat{M} = (M, M_e, M_{\bar{e}})$, (4.23)

для якої справедливо, що

$M_e, M_{\bar{e}} \subset M$,

$M_e \cup M_{\bar{e}} = M$, (4.24)

$M_e \cup M_{\bar{e}} = \emptyset$,

визначає маску спрямованої системи з поведінкою.

Δ Згідно розбиття *M* на $M_{\bar{e}}$ і M_e множину $N_{|M|}$ ідентифікаторів вибіркових змінних, що визначаються *M*, розіб'ється на підмножини K_e і $K_{\bar{e}}$. Кодуюча функція (3.6) буде замінена відповідно на дві функції

$$\begin{aligned} &\lambda_e : M_e \to K_e, \\ &\lambda_{\bar{e}} : M_{\bar{e}} \to K_{\bar{e}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

і будуть визначені наступні дві множини станів:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E} = \underset{k \in K_e}{\times} S_k, \\ &\overline{\mathrm{E}} = \underset{k \in K_{\bar{e}}}{\times} S_k, \end{aligned} \quad (4.26)$$

необхідні для спрямованих систем. Функція поведінки спрямованих систем має вигляд

$\hat{f}_B : \mathrm{E} \times \overline{\mathrm{E}} \to [0,1]$,(4.27)

де - це умовна ймовірність і, отже, замість запису $f_B(e, \bar{e})$ можна використовувати стандартну форму $f_B(\bar{e} \mid e)$. Тепер можна визначити *спрямовану систему з поведінкою* як трійку

$\widehat{\mathrm{F}}_{\mathrm{B}} = (\widehat{\mathrm{I}}, \widehat{M}, \widehat{f}_B)$.(4.28)

Породжуюча функція поведінки для спрямованих систем може бути введена за допомогою розбиття $M_{\bar{e}}$ на дві підмножини M_g і $M_{\bar{g}}$, відповідних породжуваним і породжуючим змінним. Робиться це точно так само, як було описано для *M*. Таким чином, породжуюча маска для спрямованих систем задається четвіркою

$$\widehat{M}_G = (M, M_e; M_g, M_{\bar{g}}),(4.29)$$

де $\{M_e, M_g, M_{\bar{g}}\}$ — це розбиття *M*. Знову визначаються кодуючі функції (4.15), але $\{M_g, M_{\bar{g}}\}$ розглядається тепер як розбиття $M_{\bar{e}}$. Множини G і $\overline{G}$ визначаються формулами (4.16).

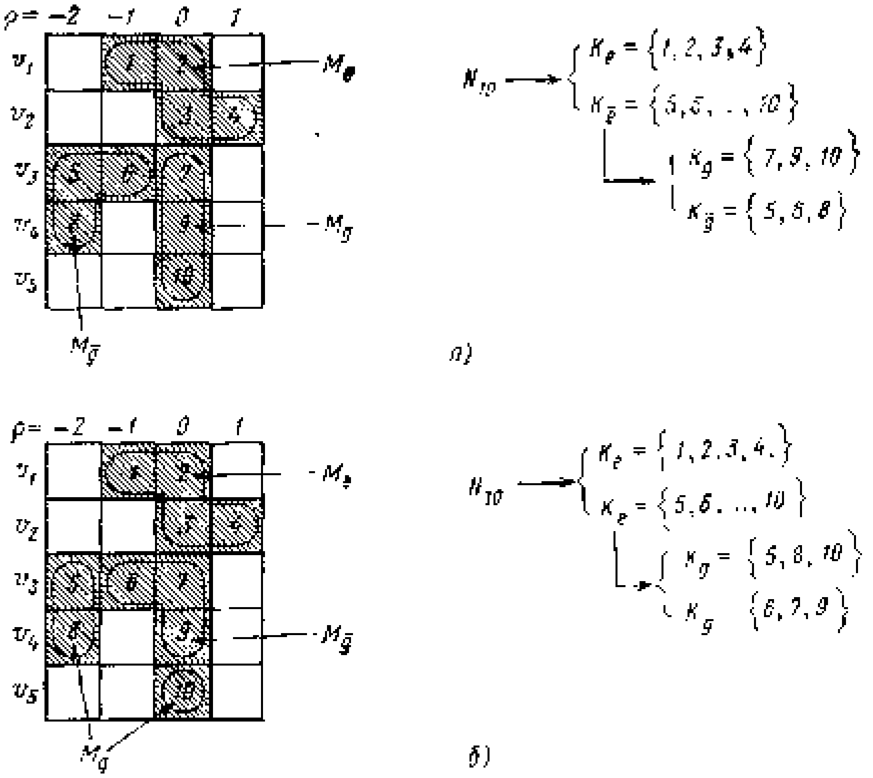


Рис. 4.4. Розбиття маски для спрямованої представляючої системи з повністю впорядкованою параметричною множиною і $u = (0,0,1,1)$ для обох можливих порядків породження даних

Тепер

$$\widehat{f}_{GB} : \mathrm{E} \times \overline{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \to [0,1],(4.30)$$

де $f_{GB}(e, g, \bar{g})$ — це умовна ймовірність, і, отже, відповідно до традиції її можна записати у вигляді $f_{GB}(g \mid e, \bar{g})$. Для детермінованих систем f_{GB} можна переписати в більш зручному вигляді

$$\widehat{f}_{GB} : \mathrm{E} \times \overline{\mathrm{G}} \to \mathrm{G},(4.31)$$

який являє собою спрямований аналог породжуючої функції поведінки, визначенної (4.20). Якщо припустити, що сенс f_{GB} визначений, то спрямована породжуюча система з поведінкою визначається трійкою

$$\widehat{\mathrm{F}}_{GB} = (\widehat{\mathrm{I}}, \widehat{M}_G, \widehat{f}_{GB}).(4.32)\ \blacktriangle$$

На рис. 4.4 показано розбиття маски на три підмаски $M_e, M_g, M_{\bar{g}}$ (і відповідне розбиття ідентифікаторів вибіркових змінних) у припущенні, що v_1 і v_2 — це вхідні змінні. На рис. 4.4,*а* і *б* показані два варіанти, що відповідають породженню даних у порядку зростання і зменшення значень параметра.

К.Р. № 11

Опишіть функції поведінки для недетермінірованних спрямованих систем.

Лекція 12

<u>4.8 Перехід від систем даних до систем з поведінкою</u>

Важливий клас системних задач, часто званий індуктивним моделюванням систем. Усі задачі цього класу характеризуються наступним загальним описом:

1. дана конкретна система x, визначеного ієрархічного типу;

2. множина всіх конкретних систем більш високого ієрархічного типу, сумісних з системою x (тобто основаних на тій же представляючій системі, з тими ж методологічними відмінностями) позначимо Y;
3. набір відповідних вимог Q щодо якихось властивостей систем з множини Y, причому одним з цих вимог є вимога, щоб дана система x була апроксимована якомога точніше системою більш високого типу і потрібно визначити Y_Q — підмножина Y, таку, щоб будь-яка система із Y_Q задовольняла всім вимогам, що визначені в наборі Q.

Набір вимог Q може складатися із:
1) підмножини Y_r множини Y, визначеної АСНД (як вибір за замовчуванням);
2) вимоги, щоб неузгодженість між відповідними змінними заданої системи даних та системи з поведінкою з Y_Q була якомога меншою;
3) вимога, щоб ступінь невизначеності при породженні даних системою з поведінкою з підмножини Y_Q була якомога меншою;
4) вимогою, щоб система з підмножини Y_Q була якомога простішою;
5) переваги вимоги 2 вимогам 3 і 4.

У цій загальному формулюванні вимога 1 зводиться до визначення множини допустимих масок.

4.9 Особливості переходів, в залежності від властивостей параметричної множини

Якщо параметрична множина не впорядкована, то поняття параметричного сусідства не визначене, і, отже, існує тільки одна осмислена маска. Ця маска, обумовлена тотожним правилом зсуву; вона називається маскою без пам'яті. Оскільки в цьому випадку є тільки одна прийнятна маска, задача виявляється досить тривіальною [вимоги 3, 4 і 5 просто незастосовні]. Ця задача зводиться до визначення для заданих даних функції розподілу ймовірностей, що задовольняють вимогу 2. Вона вирішується повним перебором даних за допомогою маски без пам'яті (в даному випадку порядок вибору не важливий) і визначення для кожного стану вибіркових змінних з (в даному випадку вони збігаються з основними змінними) числа N(с) їх появ у даних. Числа N (с) для всіх $c \in C$ зазвичай називаються частотами станів с. Вони використовуються для обчислення за деякими правилами відповідних функцій ймовірностей або можливостей. Обчислювати розподіл ймовірності по частотах можна різними способами. Так, наприклад, якщо ймовірності розглядаються як характеристики даних, то зазвичай обчислюються відносні частоти, тобто відношення $N(c)$ до загального числа наявних вибірок з даних по масці що використовується. Звідси

$$f_B(c) = \frac{N(c)}{\sum_{\alpha \in C} N(\alpha)}. \qquad (4.33)$$

Крім реалізації різних варіантів обчислення розподілу ймовірностей необхідно також включати в обчислення якусь додаткову інформацію, пов'язану з обмеженнями на змінні. Будемо цю інформацію, що не входить у дані, називати додатковою. Вона може приймати самі різні форми.

Припустимо тепер, що параметрична множина повністю упорядкована. У цьому випадку з однієї і тієї ж системи даних можна отримати безліч систем з поведінкою, що відрізняється масками. Якщо для заданих даних вони визначені досить коректно, то вони однаково добре відповідають вимозі узгодженості. Точніше, вираз «досить коректно» означає, що функція поведінки добре узгоджується з даними (і, можливо, з деякою додатковою інформацією) з точки зору маски і типу обраних обмежень.

Як уже пояснювалося вище, для маски без пам'яті функцію поведінки, що добре узгоджується з даними і додатковою інформацією, можна отримати з частот станів (тобто відповідних вибіркових змінних) для даних, відображених за допомогою розглянутої маски. Всяка маска являє собою деяке вікно, через яке відбираються дані що розглядаються з матриці даних (або з масиву більш високого порядку). При русі цього вікна уздовж всієї матриці даних частоти станів відповідних вибіркових змінних визначаються підрахунком того, як часто спостерігається кожний стан. Якщо всі вибіркові позиції перебираються, то напрямок руху маски по матриці даних не має значення, однак зручніше здійснювати цей рух відповідно до встановленого на параметричній множині порядком (зліва направо або навпаки).

Для конкретних цілей одні маски можуть підходити краще, ніж інші, але ніяка маска не є правильною або неправильною.

4.10 Особливості побудови масок

Якщо розглянута маска являє собою один стовпець (маска без пам'яті), то вибірки за всіма значеннями параметра є повними. Однак, якщо маска складається з більш ніж одного стовпчика, то деякі вибірки на початку і наприкінці параметричної множини (лівий і правий краї матриці даних) виявляться неповними (див. рис. 4.2 та 4.3). Точніше, кількість неповних вибірок для кожного краю матриці даних дорівнює числу стовпців в масці мінус 1. Число стовпців в масці М будемо називати глибиною маски і позначати ΔM . Тоді

$\Delta M = 1 + \max \rho - \min \rho$,(4.34)

де оператори max і min застосовані до всіх цілих $(v_i, t+\rho) \in M$. Так, наприклад, для маски, визначеної на рис. 4.1, $\Delta M = 4$, для масок без пам'яті $\Delta M = 1$.

Є два міркування, за якими застосування масок з великою глибиною в загальному випадку небажано.

1. якщо маска використовується для породження даних, то чим більше її глибина, тим більша потрібна початкова умова. Це, взагалі кажучи, не бажано.
2. якщо маска використовується для вибірки даних, то число неповних вибірок дорівнює $2(\Delta M - 1)$. Це означає, що із зростанням глибини маски все менше наявних даних використовується для визначення функції поведінки. Отже, зі збільшенням глибини маски звужується емпірична основа, на якій будується функція поведінки. Це, зрозуміло, також небажано.

Обидва ці міркування, а також практичні міркування, пов'язані зі складністю обчислень, призводять до того, що глибина маски зазвичай вибирається не дуже велика. Таким чином, представляється доцільним визначити обмеженість глибини маски як вимога 1 для розглянутого типу задач. Це можна зробити, визначивши *найбільшу допустиму маску,* скажімо маску *M* як декартовий добуток

$$M = V \times R, \quad (4.35)$$

де $R = \{(t+\rho) \mid \rho_1 \le \rho \le \rho_2\}$.

Подібна маска може бути представлена у вигляді повної матриці з *n* строками та $1+\rho_2-\rho_1 (= \Delta M)$ стовпцями. Будемо називати її М-*матрицею.* Якщо спочатку задано тільки ΔM , але не конкретні значення ρ_1 і ρ_2, то доцільно вибрати для них якісь стандартні значення, наприклад $\rho_2 = 0$, а $\rho_1 = 1 - \Delta M$.

4.11 Змістовні підмаски

При заданій найбільшій допустимій маски М всі її *змістовні подмаскі* утворюють обмежену множину Y_r систем з поведінкою. Термін «змістовна підмаска» характеризує підмаски М, що задовольняють наступним вимогам:

(l) в підмаску входить принаймні один елемент з кожної підмаски M_i, що визначена рівнянням (4.10) (тобто один елемент з кожного рядка М-матриці);

(2) в підмаску потрібно включити принаймні один елемент з правилом зсуву $t+\rho_2$ (крайній правий елемент із М-маски).

Вимога (1) необхідна для покриття даної системи даних, тобто для того, щоб гарантувати, що будь-яка базова змінна із заданої системи даних була б включена в будь-яку з систем з поведінкою з обмеженої множини Y_r. Вимога (2) перешкоджає дублюванню еквівалентних підмасок, тобто підмасок, що перетворюються одна в іншу тільки за допомогою додавання константи до правилу зсуву $t+\rho$ (зсув ряду в М-масці).

Можна легко отримати формулу для числа $N(n, \Delta M)$ змістовних підмасок найбільшої допустимої маски, де n — число базових змінних, а ΔM — глибина маски М:

$N(n, \Delta M) = (2^{\Delta M} - 1)^n - (2^{\Delta M - 1} - 1)^n$.(4.36)

Перший член вираження (4.36) задає число підмасок М, що задовольняють умові (l), а другий член — число масок, що порушують умову (2). В табл. 4.1 наведені значення $N(n, \Delta M)$ при *n*, $\Delta M \le 10$.

Таблиця 4.1. Число змістовних масок $N(n, \Delta M)$, обчислене за формулою (3.36)

ΔM *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
2	1	8	40	176	736	3,008	12,160	48,896	196,096	785,408
3	1	26	316	3,032	26,416	220,256	1.8×10^6	1.5×10^7	1.2×10^8	$\sim 10^9$
4	1	80	2,320	48,224	872,896	1.5×10^7	$\sim 2.4 \times 10^8$	$\sim 10^9$	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^{12}$
5	1	242	16,564	742,568	$\sim 2.7 \times 10^7$	$\sim 9.6 \times 10^8$	$\sim 10^{10}$	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{13}$	$\sim 10^{15}$
6	1	728	116,920	$\sim 1.1 \times 10^7$	$\sim 8.8 \times 10^8$	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{14}$	$\sim 10^{16}$	$\sim 10^{18}$
7	1	2,186	821,356	$\sim 1.7 \times 10^8$	$\sim 10^{10}$	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{13}$	$\sim 10^{17}$	$\sim 10^{19}$	$\sim 10^{21}$
8	1	6,560	$\sim 5.8 \times 10^6$	$\sim 10^9$	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{14}$	$\sim 10^{17}$	$\sim 10^{19}$	$\sim 10^{21}$	$\sim 10^{24}$
9	1	19,682	$\sim 4 \times 10^7$	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^{13}$	$\sim 10^{16}$	$\sim 10^{19}$	$\sim 10^{21}$	$\sim 10^{24}$	$\sim 10^{27}$
10	1	59,048	$\sim 2.8 \times 10^8$	$\sim 10^{12}$	$\sim 10^{15}$	$\sim 10^{18}$	$\sim 10^{21}$	$\sim 10^{24}$	$\sim 10^{27}$	$\sim 10^{30}$

Ця таблиця розділена на три області, для яких розміри найбільшої допустимої маски представляються: а) легко піддаються обчислювальній обробці (ліва верхня область); б) в принципі піддаються обробці, що потребують тривалої роботи дуже потужного комп'ютера (середня область); в) не піддаються обчислювальної обробці (права нижня область). Ці області показані тільки для найбільш типового випадку. Так, наприклад, якщо є в розпорядженні потужна система паралельних обчислень, то область випадків, що піддаються обчислювальній обробці, може бути розширена майже вдвічі.

Якщо число змістовних масок виявляється занадто велике, щоб піддаватися обчислювальній обробці, АСНД повинні враховувати можливі додаткові обмеження, що накладаються на найбільшу допустиму маску. Такими обмеженнями можуть бути, наприклад, такі:

1. фіксація множини породжуваних вибіркових змінних;
2. фіксація числа обраних змінних;
3. фіксація верхньої межі числа вибіркових змінних;
4. обмеження, при якому розглядаються тільки маски без пропусків (прикладом пропуску є елемент, ідентифікований координатами $i = 4$, $\rho = -1$ в масці, зображеної на рис. 4.1,*а*).

Подібні обмеження або їх комбінації істотно скорочують множину Y_r, і таким чином, збільшують розмір найбільших допустимих масок, що піддаються обчислювальній обробці.

К.Р. № 12

Виходячи із деякої системи даних, побудувати функцію поведінки, у разі масок без пам'яті.

Лекція 13

4.12 Міри нечіткості

Ступінь недетермінованості повинна вимірюватися узагальненої нечіткістю, супутньої породженню даних. А значить, вона повинна бути визначена через породжують функції поведінки f_{GB} і f_{GB} для нейтральних і спрямованих систем з поведінкою. Якщо ці функції є функції розподілу ймовірностей, то міра узагальненої нечіткості добре відома - це *Шеннонівська ентропія*

$$H(f(x) \mid x \in X) = -\sum_{x \in X} f(x) \log_2 f(x), \quad (4.37)$$

Вона вимірює нечіткість в одиницях, званих *бітами.*

Якщо припустити, що будь-яке кінцеве безліч *X розглянутих* альтернативних вихідних значень характеризується певним розподілом ймовірностей, то зручніше спростити позначення і писати $H(X)$ замість $H(f(x) \mid x \in X)$.

Легко бачити, що

$$0 \le H(X) \le \log_2 |H|, \quad (4.38)$$

Нижня межа $H(X) = 0$ досягається в тому випадку, коли ймовірності всіх вихідних значень, за винятком одного, рівні 0; верхня межа досягається тоді, коли ймовірності всіх подій однакові, т. е. рівні $1/|X|$. Ставлення ентропії до її верх ній кордоні

$$\mathrm{H}(X) = H(X)/\log_2 |X|, \quad (4.39)$$

називається нормалізованої ентропією; зрозуміло, що

$$0 \le H(X) \le 1, \quad (4.40)$$

У нашому випадку множинами виходів є безлічі $\mathrm{C}, \mathrm{G}, \overline{\mathrm{G}}, \mathrm{E}$, а розподілу ймовірностей представляються функціями поведінки $f_B, f_{GB}, \hat{f}_B, \hat{f}_{GB}$, обумовленими відповідно фор мулами (4.11), (4.17), (4.27), (4.30). Для спрощення запису опустимо індекси *B* і *GB,* а також знак ^ . Таким чином,

$$f(c),\ f(g \mid \overline{g}),\ f(\overline{e}, e),\ f(g \mid e, \overline{g}), \quad (4.41)$$

позначають ймовірності, що визначаються відповідно формулами (4.11), (4.17), (4.27), (4.30); сенс будь-якого з цих визначень однозначно визначається укладеними в дужки аргументами. Крім того, визначимо безумовні ймовірності

$$f(\overline{g}) = \sum_{c \succ \overline{g}} f(c), \quad (4.42)$$

де $c \succ \overline{g}$ вказує на те, що $\overline{g}$ є підмножиною стану **з** (підстанів **з**); формально, якщо

$$\mathrm{c} = (\mathrm{c}_k \mid k \in N_{|\mathrm{c}|}), \quad (4.43)$$

$$\overline{g} = (\overline{g}_j \mid j \in Z, Z \subset N_{|\mathrm{c}|}), \quad (4.44)$$

то $\overline{g} < \mathrm{c}$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{g}_j = c_j$ для всіх $j \in Z$. Для спрямованих систем безумовні ймовірності обчислюються за трохи зміненою формулою

$$f(\overline{g} \mid e) = \sum_{\overline{e} \succ \overline{g}} f(\overline{e} \mid e), \quad (4.45)$$

Умовні ймовірності, що характеризують процес породження даних, пов'язані з основними (спільними) і безумовними ймовірностями наступним чином:

$$f(g \mid \overline{g}) = f(\mathrm{c}) / f(\overline{g}); \quad (4.46)$$

$$f(g \mid e, \overline{g}) = f(\overline{e} \mid e) f(\overline{g} \mid e). \quad (4.47)$$

Перша формула описує цей зв'язок для нейтральних, а друга - для спрямованих систем.

4.13 Методи обчислень нечіткості

При заданій породжуючій масці для нейтральної системи, через яку визначаються множини станів $G, \overline{G}$ генерованих і генеруючих обраних змінних, *породжуюча нечіткість*

$H(G|\overline{G})$ визначається як середня нечіткість, що базується на ймовірностях $f(g|\overline{g})$, зважених ймовірностями $f(\overline{g})$ породжуючих умов:

$$H(G|\overline{G}) = -\sum_{\overline{g}\in\overline{G}} f(\overline{g}) \sum_{g\in G} f(g|\overline{g}) \log_2 f(g|\overline{g}). \quad (4.48)$$

Це значення визначає *ступінь детермінованості* даної нейтральної породжуючої системи з поведінкою.

Для спрямованих систем породжуюча нечіткість $H(G|E\times\overline{G})$ обчислюється за формулою

$$H(G|E\times\overline{G}) = -\sum_{e\in E}\sum_{\overline{g}\in\overline{G}} f(e,g) \sum_{g\in G} f(g|e,\overline{g}) \log_2 f(g|e,\overline{g}), (4.49)$$

яку можна безпосередньо застосовувати в тому випадку, коли можна і має сенс визначати ймовірності $f(\mathbf{e}|\overline{\mathbf{g}})$, тобто коли спрямована система отримана з нейтральної. Якщо ми не володіємо ймовірностями станів елементів множини E або ці ймовірності несуттєві, тоді в якості базових ймовірностей беруться ймовірності $f(\overline{\mathbf{e}}|\mathbf{e})$ [аналог ймовірностей f(c) для нейтральних систем], виходячи з яких обчислюються решта необхідних ймовірностей. У цьому випадку нечіткість $H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}})$ обчислюється за формулою (4.50)

$$H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}) = -\frac{1}{|\mathbf{E}|}\sum_{\mathbf{e}\in\mathbf{E}}\sum_{\overline{\mathbf{g}}\in\overline{\mathbf{G}}} f(\overline{\mathbf{g}}|\mathbf{e}) \sum_{\mathbf{g}\in\mathbf{G}} f(\mathbf{g}|\mathbf{e},\mathbf{g}) \log_2 (\mathbf{g}|\mathbf{e},\mathbf{g})$$

де ймовірності $f(\overline{\mathbf{g}}|\mathbf{e})$ і $f(\mathbf{g}|\mathbf{e},\overline{\mathbf{g}})$ обчислюється по заданих ймовірностям $f(\overline{\mathbf{e}}|\mathbf{e})$ згідно формулам (4.45) і (4.47).

Δ Формули (4.48), (4.49) і (4.50) можна замінити іншими, більш зручними для обчислення. Наприклад, рівняння (4.48) можна модифікувати наступним чином:

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{G}|\overline{\mathbf{G}}) &= -\sum_{\overline{\mathbf{g}}} f(\mathbf{g}|\overline{\mathbf{g}}) \log_2 f(\mathbf{g}|\overline{\mathbf{g}}) \\
&= -\sum_{\overline{\mathbf{g}}}\sum_{\mathbf{g}} f(\overline{\mathbf{g}}) f(\mathbf{g}|\overline{\mathbf{g}}) \log_2 f(\mathbf{g}|\overline{\mathbf{g}}) \\
&= -\sum_{\overline{\mathbf{g}}}\sum_{\mathbf{g}} f(\mathbf{c}) [\log_2 f(\mathbf{c})/f(\overline{\mathbf{g}})] \\
&= H(\mathbf{C}) + \sum_{\overline{\mathbf{g}}}\sum_{\mathbf{g}} f(\mathbf{c}) \log_2 f(\overline{\mathbf{g}}) \\
&= H(\mathbf{C}) + \sum_{\overline{\mathbf{g}}} \log_2 f(\overline{\mathbf{g}}) \sum_{\mathbf{g}} f(\mathbf{c}) \\
&= H(\mathbf{C}) + \sum_{\overline{\mathbf{g}}} f(\overline{\mathbf{g}}) \log_2 f(\overline{\mathbf{g}}) \\
&= H(\mathbf{C}) - H(\overline{\mathbf{G}}) \quad \blacktriangle
\end{aligned} \quad ,(4.51)$$

Таким чином, $H(\mathbf{G}|\overline{\mathbf{G}})$ можна обчислити, не використовуючи умовні ймовірності, за формулою

$$H(\mathbf{G}|\overline{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{C}) - H(\overline{\mathbf{G}}). \quad (4.52)$$

Точно також рівняння (3.49) і (3.50) можна замінити відповідно рівняннями

$$H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{C}) - H(\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}),$$

$$H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}) = \frac{1}{|\mathbf{E}|}\left[\sum_{\mathbf{e}\in\mathbf{E}} H(\overline{\mathbf{E}}|\mathbf{e}) - \sum_{\mathbf{e}\in\mathbf{E}} H(\overline{\mathbf{G}}|\mathbf{e})\right]. \quad (4.53)$$

Максимальне значення породжуючої нечіткості будь-якого типу дорівнює $\log_2|\mathbf{G}|$; отже, нормалізована породжуюча нечіткість виходить розподілом породжуючої нечіткості на її максимальне значення. Наприклад,

$$H(\mathbf{G}|\bar{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{G}|\bar{\mathbf{G}})/\log_2|\mathbf{G}|. \quad (4.54)$$

Приклад 4.2. На рис. 4.5,*а* показана імовірнісна функція поведінки $f(\mathbf{c})$ для чотирьох обраних змінних s_1, s_2, s_3, s_4, кожна з двома станами — 0 і 1. Стани з нульовою ймовірністю в таблиці не приводяться. Вибіркові змінні визначені через дві базові змінні v_1, v_2 за допомогою маски, зображеної на рис. 3.7,а. Оскільки вибіркові змінні s_2, s_3 суть зрушення однієї і тієї ж базової змінної v_1, розподілу ймовірностей їх станів повинні бути однакові; вони й справді однакові; обидва мають ймовірності 0.7 і 0.3 відповідно для станів 0 і 1. Аналогічно змінні s_1, s_4 (зсуви v_2) мають однаковий розподіл ймовірностей: 0.6 і 0,4 відповідно для станів 0 і 1. Отже, для даної маски наведена функція розподілу ймовірностей є коректною функцією поведінки.

Якщо дана система інтерпретується як нейтральна, її породжуюча нечіткість $H(\mathbf{G}|\bar{\mathbf{G}})$ може бути обчислена за формулою (4.52). Для першого члена формули ми маємо

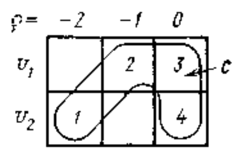
$$H(\mathbf{C}) = -2\times 0.2\log_2 0.2 - 6\times 0.1\log_2 0.1 =$$
$$= 0.9288 + 1.9932 = 2.922.$$

Значення другого члена залежить від порядку породження і від відповідної маски. На рис. 4.5,*в* і *г* показані два можливих порядку породження. Для породження зліва направо маємо

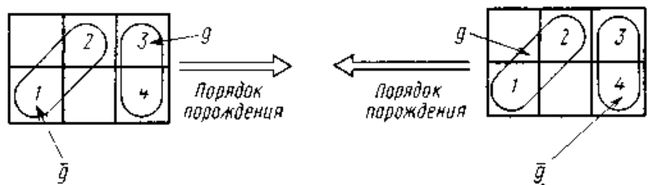
$$H(\bar{\mathbf{G}}) = -0.5\log_2 0.5 - 0.1\log_2 0.1 -$$
$$-2\times 0.2\log_2 0.2 = 0.5 + 0.3322 + 0.9288 = 1.761,$$
$$H(\mathbf{G}|\bar{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{C}) - H(\bar{\mathbf{G}}) = 2.922 - 1.761 = 1.161.$$

	s_1	s_2	s_3	s_4	$f(c)$
$c =$	0	0	0	0	0.2
	0	0	0	1	0.2
	0	0	1	0	0.1
	0	1	0	1	0.1
	1	0	0	0	0.1
	1	0	1	0	0.1
	1	1	0	1	0.1
	1	1	1	0	0.1

а)



б)



$\bar{g}$: s_1	s_2	$f(\bar{g})$
$g =$ 0	0	0.5
0	1	0.1
1	0	0.2
1	1	0.2

в)

$\bar{g}$: s_3	s_4	$f(\bar{g})$
$\bar{g} =$ 0	0	0.3
0	1	0.4
1	0	0.3

г)

Рис. 4.5 Імовірнісна нейтральна система

Для другого порядку породження (рис. 4.5,*г*) ми отримаємо

$$H(\bar{\mathbf{G}}) = -2\times 0.3\log_2 0.3 - 0.4\log_2 0.4 = 1.0422 + 0.5288 = 1.571,$$
$$H(\mathbf{G}|\bar{\mathbf{G}}) = 2.922 - 1.571 = 1.351.$$

Отже, нам можна вибрати один з двох порядків породження; перший порядок краще, так як має більш низьку породжувану нечіткість. Оскільки в даному прикладі $\log_2|\mathbf{G}| = 2$, то нормалізовані значення обчислювальних породжуючих нечіткостей отримуються розподілом їх на два.

У деяких випадках застосовується лише один порядок породження. Якщо, наприклад, параметром є час, то в кожному випадку має сенс тільки один з порядків, який визначається метою використання системи з поведінкою. Якщо вона використовується для *передбачення,* то стани повинні породжуватися в порядку зростання часу (зліва направо); якщо ж вона використовується для *ретроспекції,* то стани повинні народжуватися в порядку убування часу. У даному прикладі, якщо параметром є час, то виявляється легше передбачати майбутні стани системи, ніж визначати минулі.

Припустимо тепер, що v_1 інтерпретується як вхідна змінна і що по функції поведінки на рис. 4.5,*а* визначена відповідна спрямована система. Тепер для обчислення породжуючої нечіткості можна скористатися формулою (4.53). Нечіткість $H(\mathbf{C})$ вже була обчислена раніше; $H(\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}})$ залежить від порядку народження. У всякому разі множина Е представляється станами змінних s_2, s_3; $\bar{\mathbf{G}}$ представляється або станами s_1 (в порядку зростання параметра) або станами s_4 (в порядку убування параметра). У першому випадку нечіткість $H(\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}})$ пов'язана з змінними s_1, s_2, s_3

$$H(\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}}) = -0.4\log_2 0.4 - 6\times 0\ 1\log_2 0.1 = \\ = 0.5288 + 1.9932 = 2.522;$$

$$H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}} = H(\mathbf{C}) - H(\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}}) = 0.922 - 2.522 = 0.4.$$

У другому випадку вона являє нечіткість змінних s_2, s_3, s_4:

$$H(\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}}) = -0.3\log_2 0.3 - 3\times 0.2\log_2 0.2 - 0.1\log_2 0.1 = \\ = 0.5211 + 1.3932 = 2.2465;$$

$$H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}}) = 2.922 - 2.2465 = 0.6755.$$

Таким чином, знову виявляється, що передбачати майбутні стани легше, ніж визначати минулі.

Припустимо тепер, що ми не володіємо жодною інформацією щодо вхідної змінної v_1 або що ця інформація не істотна (наприклад, в тому випадку, коли v_1 контролюється користувачем). Тоді всі обчислення повинні проводитися для наведених на рис. 4.6,*а* умовних ймовірностей. Як показано на цьому малюнку, список ймовірностей розбитий $f(\bar{\mathbf{e}}|\mathbf{e})$ на чотири частини, відповідні різним станам е. Нечіткості для кожного стану також наведені на рис. 4.6,а. Тут же показано розбиття маски на $\{M_e, M_{\bar{e}}\}$.

Ситуація при породженні станів зліва направо, включаючи значення $H(\bar{\mathbf{G}}|\mathbf{e})$ для кожного стану е, показана на рис. 4.6,*в*.

З формули (4.53) отримаємо

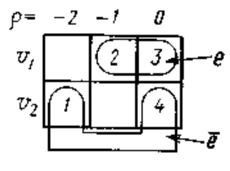
$$H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}}) = 1/4(3.522 - 2.7219) = 0.200025$$

Інший порядок породження зображений на рис. 4.8,*г*. Для нього маємо

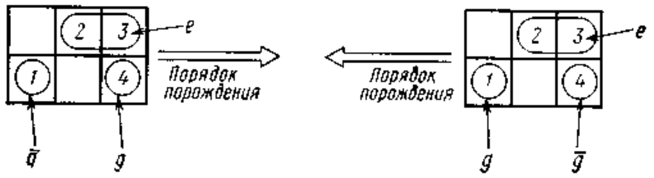
$$H(\mathbf{G}|\mathbf{E}\times\bar{\mathbf{G}}) = 1/4(3.522 - 0.971) = 0,63775.$$

s_2	s_3	s_1	s_4	$f(\bar{e}\|e)$	$H(\bar{E}\|e)$
	e		$\bar{e}$		
0	0	0	0	0 4	1 522
0	0	0	1	0 4	
0	0	1	0	0 2	
0	1	0	0	0 5	1 0
0	1	1	0	0 5	
1	0	0	1	0 5	1 0
1	0	1	1	0 5	
1	1	1	0	1 0	0 0

а)



б)



s_2	s_3	s_1	$f(\bar{g}\|e)$	$H(\bar{G}\|e)$
	e	$\bar{g}$		
0	0	0	0 8	0 7219
0	0	1	0 2	
0	1	0	0 5	1 0
0	1	1	0 5	
1	0	0	0 5	1 0
1	0	1	0 5	
1	1	1	1 0	0 0

в)

s_2	s_3	s_4	$f(g\|e)$	$H(\bar{G}\|e)$
	e	$\bar{g}$		
0	0	0	0 6	0 971
0	0	1	0 4	
0	1	0	1 0	0 0
1	0	1	1 0	0 0
1	1	0	1 0	0 0

г)

Рис. 4.6 Імовірнісна спрямована система

К.Р. № 13

Розрахувати породжуючу нечіткість для випадку спрямованої і нейтральної системи з поведінкою. Розглянути обидва порядку породження.

Лекція 14

4.14 Вибір підходящих систем з поведінкою

Дана система даних **D** з повністю впорядкованою параметричною множиною і з найбільшою допустимою маскою **M**, сумісної з **D**; потрібно визначити всі системи з поведінкою, що задовольняють вимогам узгодженості, детермінованості і простоти, причому вимога узгодженості більш пріоритетна, ніж інші дві.

Будь-яка найбільш допустима маска **M** містить набір коректних масок, кожна з яких є підмножиною **M**. Для кожної маски може бути визначена функція поведінки, що добре узгоджується з даними, за допомогою розрідженій вибірки даних. Однак на практиці досить провести вибірку тільки для маски **M**. Функції поведінки для її підмасок можуть бути отримані обчисленням проекцій функції поведінки відповідної маски **M**.

Для заданої функції f_B, визначеної через повні стани деяких обраних змінних, кожна з її проекцій також є функцією поведінки, відповідної f_B, що заснована на певній підмножині обраних змінних. Нехай $s_k (k \in N_{|M|})$— вибіркові змінні, через які визначаються стани f_B; **M**— маска, через яку вибираються значення обраних змінних. Нехай $[f_B \downarrow \bar{Z}]$ — проекція f_B, де підмножина множини $N_{|M|}$ ідентифікаторів обраних змінних, тобто $Z \subset N$. Тоді

$$[f_B \downarrow \bar{Z}] : \times_{k \in Z} S_k \to [0, 1], \quad (4.55)$$

так що

$$[f_B \downarrow Z](\mathbf{x}) = a(\{f(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \succ \mathbf{x}\}), \quad (4.56)$$

де *a* — якась агрегуюча функція, обумовлена характером функції f_B. Наприклад,

$$[f_B \downarrow Z](\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{c} \succ \mathbf{x}} f_B(\mathbf{c}), \quad (4.57)$$

де f_B— розподіл ймовірностей.

Будемо в контексті будь-якої конкретної задачі через ${}^1f_B$ позначати функцію поведінки для найбільш прийнятної маски *M* . Через ${}^if_B$ $(i=2, 3, \ldots)$ будемо позначати функції поведінки для її різних осмислених підмасок ${}^iM$, кожна з яких пов'язана з множиною ${}^iZ \subset N_{|M|}$ ідентифікаторів вибіркових змінних.

За винятком дуже великих наборів даних, з точки зору обчислень простіше визначати функції поведінки за допомогою проекцій, а не через вибірки даних. Таким чином, краще робити вибірку тільки одного разу для найбільш прийнятної маски, а потім визначати функції поведінки для всіх змістовних підмасок як відповідні проекції.

Приклад 4.3. Визначимо проекцію ймовірнісної функції поведінки, наведеної на рис. 4.5,*a* для $Z=\{1, 2\}$. Застосувавши формулу (4.57) для ймовірнісної функції, отримаємо:

	s_1	s_2	$[f \downarrow \{1, 2\}](\mathbf{x})$
$\mathbf{x} =$	0	0	$0.5(=0.2+0.2+1)$
	0	1	0.1
	1	0	$0.2(=0.1+0.1)$
	1	1	$0.2(=0.1+0.1)$

4.15 Впорядкування за складністю та нечіткістю

Для заданої системи даних **D** і найбільш допустимої маски **M** вимога відповідності призводить до обмеженої множини

$$Y_r=\{{}^i\mathbf{F}_B=(\mathbf{I}, {}^i\mathbf{M}, {}^if) \mid i=1, 2, \ldots, (N(n, \Delta\mathbf{M})\}, \quad (4.58)$$

що містить по одній системі з поведінкою для кожної осмисленої маски ${}^iM \subseteq \mathbf{M}$; нехай для зручності ${}^1M=\mathbf{M}$. Наступним кроком рішення розглянутої задачі повинно бути обчислення ступенів недетермінованості і складності для всіх систем з множини Y_r.

Як було показано *ступінь детермінованості* задається відповідною мірою *породжуючої нечіткості,* яка визначається для імовірнісних систем шеннонівскої ентропією.

Що стосується *міри складності,* то тут можливо багато варіантів. Візьмемо для прикладу просту, але змістовну міру, яку часто використовують в АСНД - розмір (потужність) маски.

Нехай ${}^iq_u$ $(i=1, 2, \ldots)$— значення відповідних породжуючих нечіткостей для систем з поведінкою ${}^i\mathbf{F}_B$ з обмеженої множини Y_r Оскільки будь-яка система $\mathbf{F}_B$ однозначно ідентифікується своєю маскою *M,* потужність якої $|{}^iM|$ задає її складність, статус системи ${}^i\mathbf{F}_B$ в сенсі породжуючої нечіткості і складності зручно описувати парою $(|{}^iM|, {}^iq_u)$.

Чисельне впорядкування масок ${}^iM$, ідентифікуючих системи з Y_r по їх потужності, задає *впорядкування складності* $\overset{c}{\leqslant}$ на множині Y_r. Чисельне упорядкування значень ${}^iq_u$ визначає *впорядкування по нечіткості* $\overset{u}{\leqslant}$ на множні Y_r. У той час, як впорядкування по складності повністю визначається самими масками, впорядкування по нечіткості може бути визначене тільки після оцінки масок. Для будь-якої множини породжуючих масок ми можемо визначити часткове впорядкування ${}^iM_G \leqslant {}^jM_G$ тоді і тільки тоді, коли

$${}^i\mathbf{g} = {}^j\mathbf{g} \text{ и } {}^i\bar{\mathbf{g}} \prec {}^j\bar{\mathbf{g}}. \quad (4.59)$$

(або ${}^i\mathbf{e} \prec {}^j\mathbf{e}$ для спрямованих систем), яке ми будемо називати *упорядкуванням підмасок.*

Приклад впорядкованості за складністю і впорядкованості подмасок для найбільшої допустимої маски M при n=3 і$\Delta \mathbf{M} = 2$ наведено на рис. 3.10. При цьому передбачається, що дані породжуються зліва направо. Всі змістовні підмаски зображуються своїми матрицями і помічені в лівому верхньому кутку своїми ідентифікаторами i. За складністю вони розбиті на чотири групи. Маски з однаковою складністю розташовані на одному рівні. Наприклад, маски з ідентифікаторами 2-7 утворюють групу зі складністю 5, маски 8-19 - іншу групу зі складністю 4 і т.д. З погляду упорядкованості за складністю будь-яка маска деякого рівня є безпосереднім наступником будь-якої маски найближчого більш високого рівня і не посереднім попередником будь-якої маски найближчого нижчого рівня. На рис. 4.7 стрілками показано впорядкування по підмаскам. З цього прикладу видно, що впорядкування за складністю - це зв'язне квазіупорядкування (рефлексивне і транзитивне ставлення, визначене для будь-якої пари систем).

Впорядкування по підмаскам - це часткове впорядкування, але решітки воно не утворює. Однак воно являє собою набір решіток по одній для кожної множини породжуваних вибіркових змінних (у нашому прикладі це крайні праві елементи масок).

Впорядкування по нечіткості зв'язне, але через те, що кілька різних систем можуть мати однакову породжуючу нечіткість, це відношення не є антисиметричним. Отже, в загальному випадку це зв'язне квазіупорядкування, яке в деяких окремих випадках виявляється повним упорядкуванням.

Таким чином, на множині Y_r визначені два пов'язаних квазіупорядкування - по складності і по нечіткості. Оскільки для розглянутого типу задач потрібно, щоб і складність, і породжуюча нечіткість систем у множині рішень Y_Q була мінімізована, відповідне *об'єднане впорядкування* $\overset{*}{\leq}$ визначається наступним чином: ${}^iF_B \overset{*}{\leq} {}^jF_B$ тоді і тільки тоді, коли

$$|{}^iM| \overset{r}{\leqslant} |{}^jM| \text{ и } {}^iq_u \overset{u}{\leqslant} {}^jq_u, \quad (4.60)$$

де ${}^i\mathbf{F}_B, {}^j\mathbf{F}_B \in Y_r$. Це впорядкування не є зв'язковим, оскільки пари ${}^i\mathbf{F}_B, {}^j\mathbf{F}_B$, для яких $|{}^iM| < |{}^jM|$ і ${}^iq_u > {}^jq_u$ або $|{}^iM| >> |{}^jM|$ и ${}^iq_u < {}^jq_u$ (подібні пари, зрозуміло, можуть існувати), непорівнянні. Воно також не антисиметрично, оскільки не виключена можливість того, що

$$|{}^iM| = |{}^jM| \text{ и } {}^iq_u = {}^jq_u, \quad (4.61)$$

для деяких $i \neq j$. Отже, об'єднане впорядкування - це загального вигляду квазівпорядкування (рефлексивне і транзитивне відношення) на Y_r.

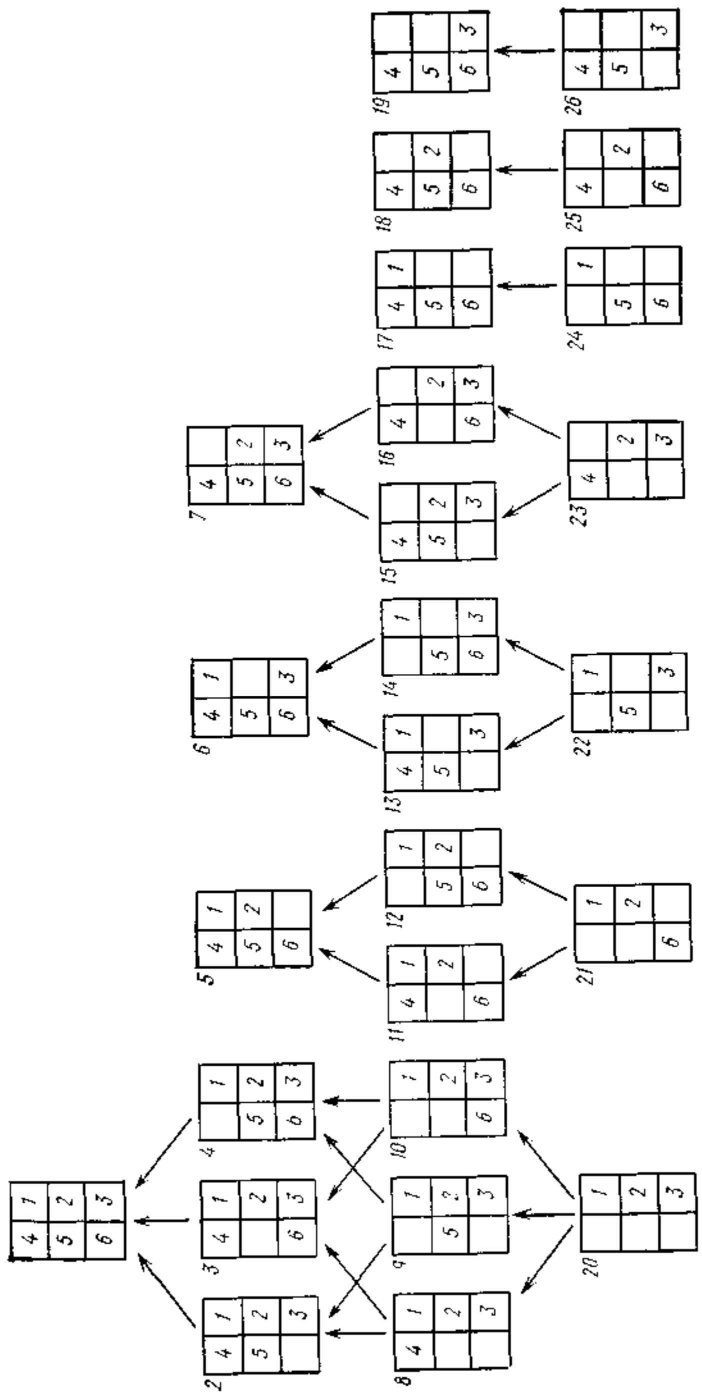


Рис. 4.7 Змістовні маски для $n = 3, \Delta M = 2$ класифіковані згідно впорядкованості за складністю підмасок

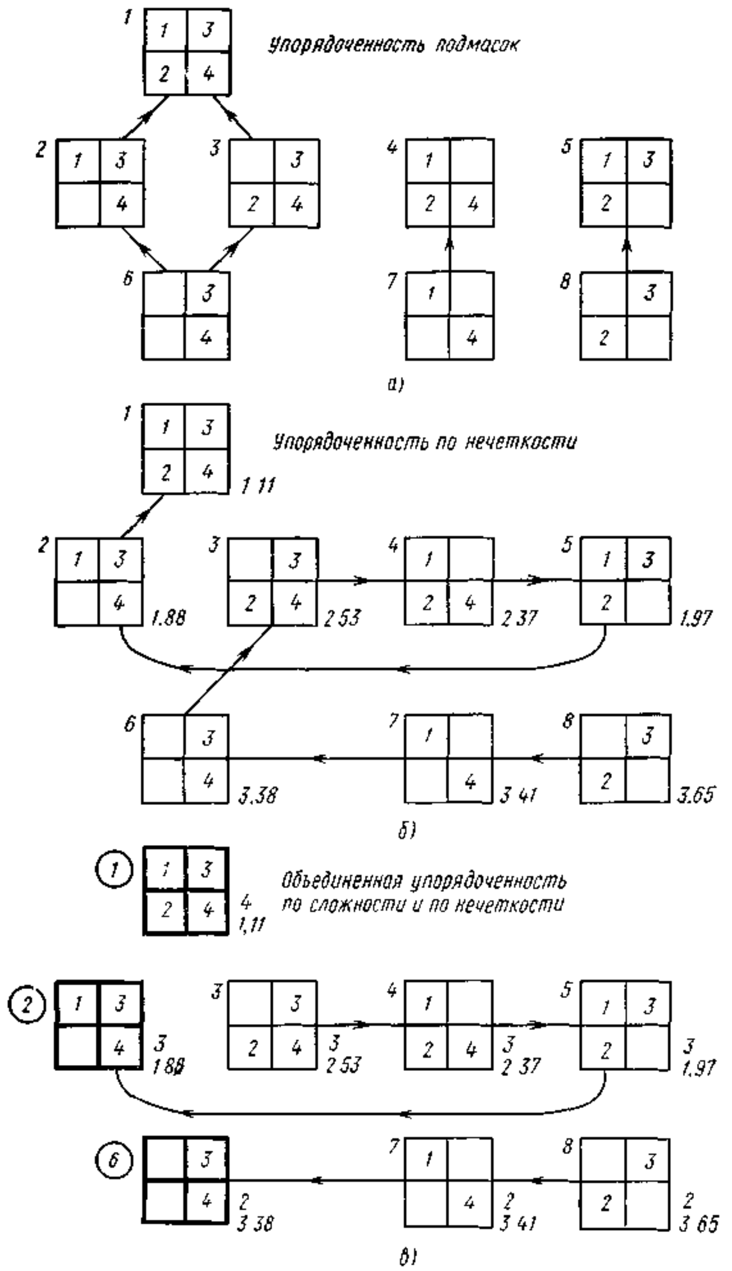


Рис. 4.8

Тепер множина рішень Y_Q можна визначити як множину всіх систем з Y_r, які або еквівалентні, або непорівнянні щодо об'єднаного впорядкування (4.60). Дві системи з Y_r, скажімо системи ${}^iF_B$ і ${}^jF_B$, непорівнянні в сенсі об'єднаного впорядкування, якщо виконано одну з наступних умов:

(а) ${}^iF_B$ більш складна і більш детермінована, ніж ${}^jF_B$ фбо ${}^iF_B$ менш складна і менш детермінована, ніж ${}^jF_B$. Формально

$$Y_Q = \{{}^i\mathbf{F}_B \in Y_r \mid (\forall {}^j\mathbf{F}_B \in Y_r)({}^j\mathbf{F}_B \overset{*}{\leqslant} {}^i\mathbf{F}_B \Rightarrow {}^i\mathbf{F}_B \overset{*}{\leqslant} {}^j\mathbf{F}_B)\}. \quad (4.62)$$

Системи з множини рішень Y_Q будемо називати *підходящими системами з поведінкою* для типу завдань, що розглядається.

Приклад 4.4. Щоб пояснити різні питання, що вивчаються в даному розділі, розглянемо деяку систему даних. Визначимо всі підходящі в сенсі (4.62) системи з поведінкою для цієї системи даних в припущенні, що необхідно отримати описи імовірнісних систем з поведінкою і використовувати їх для передбачення.

Припустимо спочатку, що $\Delta\mathbf{M}=2$. Тоді є вісім змістовних масок, які разом з їх упорядкуванням підмасок і зазначенням трьох рівнів складності зображені на рис. 4.8, а. Після виконання вичерпної вибірки для найбільшої прийнятної маски ${}^1M=\mathbf{M}$ за певною формулою, по частотах $N(c)$ обчислюються ймовірності $f_B(c)$, а породжує чіткість обчислюється або за формулою (4.48). Якщо для обчислення ймовірностей використовується формула (4.31), то породжуюча нечіткість дорівнює 1.11. Потім для решти семи змістовних масок за формулою (4.57) визначаються відповідні проекції і обчислюються їх породжуючі нечіткості. Результати цих обчислень показані на рис. 4.8, б (у правому нижньому кутку масок). На рис. 4.8, б також зображено впорядкування масок по нечіткості. У цьому прикладі упорядкування є повним, оскільки значення нечіткості у всіх різні. Об'єднане впорядкування по складності та нечіткості (3.60) зображено на рис. 4.8, в. Як ми бачимо, мінімальними з точки зору об'єднаного впорядкування є маски

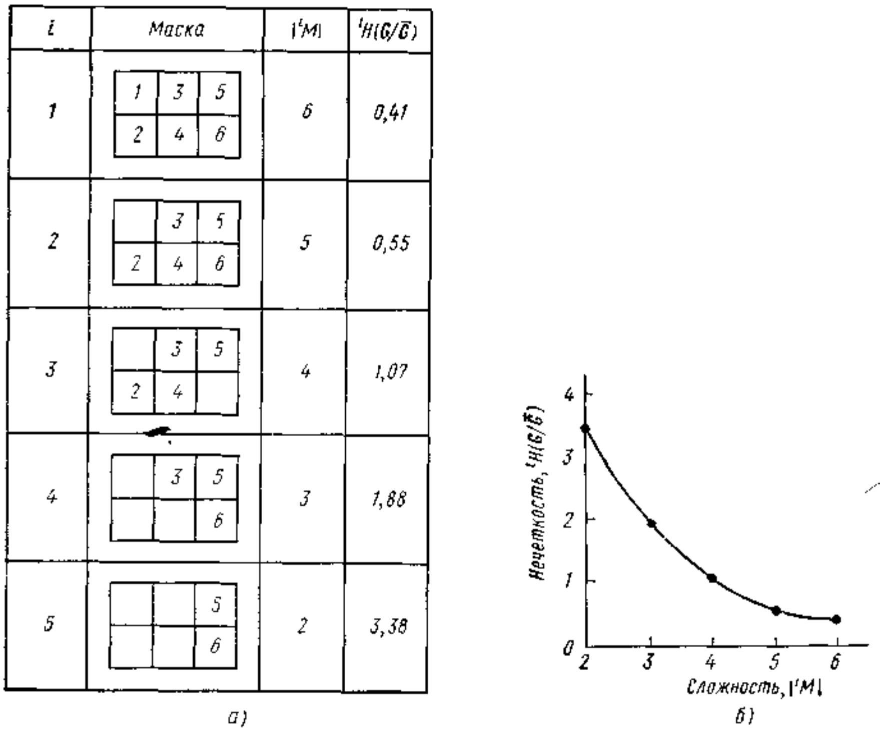


Рис. 4.9 Підходящі системи з поведінкою з прикладу 4.4

з ідентифікаторами 1, 2, 6. Отже, $V_Q=\{{}^1\mathbf{F}_B,\ {}^2\mathbf{F}_B,\ {}^6\mathbf{F}_B\}$. Припустимо тепер, що ΔM =3. Тоді згідно з формулою (4.36) є 40 змістовних масок. Після їх обробки, аналогічної обробці для випадку $\Delta\mathbf{M}=2$, ми отримаємо п`ять підходящих систем з поведінкою, маски яких, значення складності та породжуючі нечіткості наведено на рис. 4.9, а. Решта 35 масок гірше з точки зору їх складності, як і з точки зору чіткості, і, отже, їх зовсім не потрібно розглядати. Рис. 4.9, а - це типовий приклад відповіді АСНД. При відповідних запитах можуть також видаватися різні додаткові характеристики, множини рішень, такі, як графік залежності нечіткості від складності, зображений на рис. 4.9, б.

Описаний тут пошук відповідних систем з поведінкою може бути реалізований самими різними способами. *Основний принцип полягає в тому, що змістовні маски виходять за допомогою деякого алгоритму з найбільшої прийнятною маски в порядку зменшуваною складності.* Серед масок однакової складності вибираються тільки маски з мінімальною породжуючою нечіткістю. При цьому якщо значення цієї мінімальної нечіткості менше або дорівнює значенню нечіткості для попереднього рівня складності, то всі раніше прийняті системи відкидаються. В результаті застосування цієї процедури у нас залишаються тільки підходящі системи.

К.Р. № 14

Для деякої системи даних впорядкувати маски за складністю та нечіткості.

Лекція 15

<u>4.16 Системи зі змінними станами</u>

Припустимо, що знову задана система даних з повністю впорядкованою параметричною множиною. Як було показано, система даних може бути описана параметрично інваріантно через множину підходящих систем з поведінкою, що узгоджуються з системою даних і задовольняють висунутим вимогам. Незважаючи на те, що системи з поведінкою абсолютно адекватно описують повне обмеження на досліджувані вибіркові змінні, існує й інша форма представлення цього обмеження, часто представляюча кінцевому дослiднику більш підходящою. Ця форма зазвичай називається *відношенням зміни стану* або скорочено ST-відношенням. Це відношення визначається не на окремих станах, а на послідовних парах станів; породжуючі системи, в яких використовується ця формула представлення станів, називаються *системами зі змінними станами або* ST-*системами.*

Δ Для ST-систем маски вибіркові змінні, множини станів вибіркових змінних і їх декартовий добуток **C** визначаються точно так само, як і для систем з поведінкою, за винятком двох відмінностей

(1) к ST-системам незастосовно розділення вибіркових змінних на породжувані і породжуючі, і

(2) змістовні маски у ST-системах мають додаткові обмеження. Аналогами функцій поведінки в ST-системах є функції *зміни стану (або* ST-функції). Для нейтральних систем вони визначені на $\mathbf{C}^2=\mathbf{C}\times\mathbf{C}$, а не на **C**, а для спрямованих систем на $\mathbf{E}^2\times\overline{\mathbf{E}^2}$, а не на $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$.

Для нейтральних систем аналогами функцій поведінки, що визначаються формулами (4.11), (4.20), (4.17), є наступні ST-функції:

$$f_S:\mathbf{C}^2\to[0,\ 1], \quad (4.63)$$

де $f(\mathbf{c},\ \mathbf{c}')$— це ймовірність стану $\mathbf{c}'$, наступного безпосередньо за станом **c** (відповідно до обраного порядку породження);

$$f_{GS}:\mathbf{C}^2\to[0,\ 1], \quad (4.64)$$

де $f_{GS}(\mathbf{c},\ \mathbf{c}')$— умовна ймовірність того, що при поточному стані **c** наступним станом буде стан $\mathbf{c}'$; будемо тому використовувати загальноприйнятий запис $f_{GS}(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$:

$$f_{GS}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}, \quad (4.65)$$

де $f_{GS}(\mathbf{c})=\mathbf{c}'$, тобто наступний стан однозначно визначається поточним станом **c**; функція спеціального виду (4.65) застосовна, зрозуміло, тільки до детермінованих систем. Будемо f_{GS} називати *породжуючими ST-функціями.*

Аналогами нейтральних систем с поведінкою є відповідно *ST-система*

$$\mathbf{F}_S=(\mathbf{I},\ M,\ f_S), \quad (4.66)$$

и *породжуюча ST-система*

$$\mathbf{F}_{GS}=(\mathbf{I},\ M_G,\ f_{GS}), \quad (4.67)$$

де **I**, M і M_G мають той же сенс, що в системах з поведінкою.

Для заданих системи даних і маски ST-функція f_{ST} ,що добре узгоджується з системою даних і маскою, може бути визначена за допомогою повної вибірки даних аналогічно тому, як це робилося для функції поведінки f_B. Єдина відмінність полягає в тому, що в результаті вибірки виходять частоти $N(\mathbf{c},\ \mathbf{c}')$ пар послідовних станів, а не частоти ***N(c)*** окремих станів.

Пара $(\mathbf{c},\ \mathbf{c}')\in\mathbf{C}^2$ називається *переходом* із стану **c** в інший стан $\mathbf{c}'$ згідно з оголошеним в параметричній множині порядку породження. Однією з найважливіших властивостей ST-функцій є те, що переходи в якийсь стан повинні знаходитися в рівновазі з переходами з цього стану. Якщо використовуються ймовірності, то для будь-якого стану $x\in C$ маємо

$$\sum_{\mathbf{c}\in\mathbf{C}} f_S(\mathbf{c},\ \mathbf{x})=f_B(\mathbf{x}),$$

$$\sum_{\mathbf{c}'\in\mathbf{C}} f_S(\mathbf{x},\ \mathbf{c}')=f_B(\mathbf{x}), \quad (4.68)$$

і, отже,

$$\sum_{\mathbf{c}\in\mathbf{C}} f(\mathbf{c},\ \mathbf{x})=\sum_{\mathbf{c}'\in\mathbf{C}} f_S(\mathbf{x},\ \mathbf{c}'), \quad (4.69)$$

що і визначає *рівновагу переходів*.

Стани **c**, **c'** можуть розглядатися як стани, що визначаються двома взаємопов'язаними масками ***M***, ***M'***. Маски пов'язані між собою простим зсувом у відповідності з наступними правилами зсуву:

$(v_i, \rho) \in M$ тоді і тільки тоді, коли $(v_i, \rho+1) \in M'$, (4.70)

якщо дані породжуються в порядку зростання параметра, або

$(v_i, \rho) \in M$ тоді і тільки тоді, коли $(v_i, \rho-1) \in M'$, (4.71)

якщо дані породжуються в зворотному порядку.

Маски M, M' використовуються разом для опису пар станів $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$.

Щоб уникнути протиріч і неповноти при породженні даних, змістовні маски в ST-системах повинні задовольняти наступній вимозі (на додаток до вимог для масок в системах з поведінкою):

для заданої маски ***M***, якщо $(v_i, \rho_1) \in M$ і $(v_i, \rho_2) \in M$ і $\rho_1 < \rho_2$, то $(v_i, \rho) \in M$ для всіх цілих ρ, таких, що $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$

Це означає що маски в ST-системах не повинні містити «прогалини», подібні елементам $(v_4, -1)$ на рис. 4.1. Маски, що задовольняють цій додатковій вимозі, називатимемо *компактними масками*.

Для обґрунтування цієї вимоги припустимо, що маска *M* ST-системи некомпактна. Тоді існує принаймні одна пара елементів з маски *M,* скажімо пара $(v_i, \rho_1) \in M$, $(v_i, \rho_2) \in M$, така, що $\rho_1 < \rho_2$,

$(v_i, \rho_1+1) \notin M$, $(v_i, \rho_2+1) \notin M$, (4.72)

и $\rho_2 \geqslant \rho$ для всіх $(v_i, \rho) \in M$. З (4.70) маємо

$(v_i, \rho_1+1) \in M'$ и $(v_i, \rho_2+1) \in M'$ (4.73)

Позначимо вибіркові змінні, що базуються на цих елементах M', через s_1 і s_2. Стани s_1, s_2 являються компонентами $\mathbf{c}'$. Тим самим вони повинні бути або визначені для кожного значення параметра за станом **c**, або породжуватися відповідно до розподілу ймовірностей і можливостей $f_{GS}(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$ для кожного конкретного **c**. Проте жоден з цих варіантів для s_1 неможливий. Через (4.72) він не може бути визначений за станом c, не може бути й коректно породжений при будь-якому значенні параметра *t,* так як

$s_{1,t} = s_{2,\, t+\rho_1-\rho_2}$ >,(4.74)

і таким чином, s_1 визначається станом s_2 при значенні параметра $t-(\rho_2-\rho_1)$. Немає ніякої гарантії, що породжений стан s_1 відповідатиме цьому заздалегідь певному стану. З іншого боку, якщо стан s_1 породжується, то $\mathbf{c}'$ стає неповним, оскільки раніше визначений

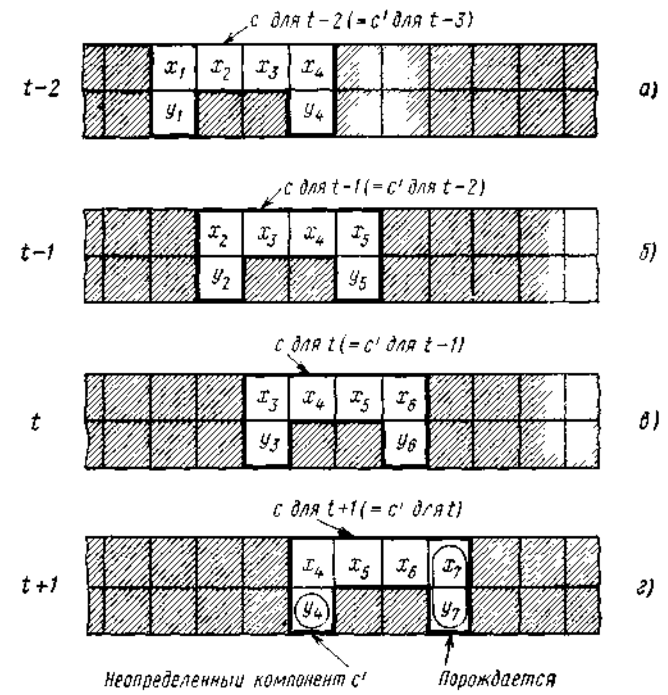


Рис. 4.10. Приклад неузгодженості або неповноти ST-систем з компактними масками

стан невідомо (тобто він не є компонентом **c**). Отже, при будь-якому значенні t стан s_i не може бути не визначений з **c**, ні породжений з допомогою породжуючої ST-функції.

Ілюстрацією до доказу того, що маски з «прогалинами» неприпустимі в ST-системах, служить рис. 4.10; компонент наступного стану **c'** при значені параметра $t+1$ не може бути не визначений зі стану **c** в момент часу t (рис. 4.10,*в*), ні породжений за допомогою ST-функції, так як вже породжений при значенні параметра t—3 (рис. 4.10,*а*).

Зручно представляти ST-функції (4.63) і (4.64) у вигляді квадратних матриць, рядки і стовпці яких пов'язані відповідно з **c** и $\mathbf{c}'$. Елементами цих матриць є значення відповідно $f_S(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$ або $f_{GS}(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$. ▲

Приклад 4.5. Одним з підходів до оцінки продуктивності обчислювальної техніки є постійний контроль за апаратним забезпеченням. Значення цього підходу буде зростати в міру зростання складності оцінюваних обчислювальних систем. При контролі апаратного забезпечення спостерігаються певні ключові змінні, що зазвичай описують стан окремих компонентів обчислювальної системи. Робиться це протягом певного часу обслуговування системи користувачами за допомогою так званих апаратних моніторів. Дані обробляються апаратним монітором і аналізуються з метою виявлення вузьких місць в системі і пошуку способів підвищення продуктивності, яка також має бути якимось чином визначена.

Зазвичай до складу апаратних моніторів входять лічильники, які в процесі збору даних або рахують число подій, що відбулися (режим рахунку), або вимірюють тривалість подій (часовий режим). Це означає, що зазвичай апаратний монітор надає досліднику не фактичні дані, а узагальнені. Наприклад, монітор визначає, що центральний процесор (ЦП) обчислювальної системи був завантажений протягом 43% часу спостереження, що канал був зайнятий у 15% всіх спостережень, але не дає фактичної послідовності подій, які б можна було потім обробляти і аналізувати.

При цьому часто втрачається важлива інформація, що сприяє кращому розумінню питань, пов'язаних з продуктивністю комп'ютера. Наприклад, абсолютно випадають з аналізу динамічні аспекти роботи комп'ютера.

Згідно з концепцією АСНД всі спостереження повинні бути зафіксовані, а потім оброблені будь-яким підходящим способом. У даному прикладі за часом було зроблено 409610 спостережень для чотирьох змінних v_1, v_2, v_3, v_4. Кожна змінна має два стани 0 і 1, що характеризують стан конкретного компонента апаратного забезпечення: 0 означає, що компонент був неактивний під час спостереження, а 1 - що активний. Змінна v_1 описує роботу ЦП, а інші три змінних - роботу трьох важливих каналів зв'язку системи. Для отримання ймовірнісної ST-функції з цього величезного набору даних, що перевищує 1,6 млн. біт, за допомогою маски без пам'яті була зроблена вибірка для двох послідовних станів. Це дало 15 станів (див. табл. 4.2, а) і 113 переходів. Стани 7-15 з'являються дуже рідко: ймовірність того, що система знаходиться в одному з цих станів 0.009. Якщо для спрощення ST-функції, об'єднати ці стани в один, що зручно для дослідника, вийде матричне уявлення породжуючої ST-функції, наведене в табл. 4.2, б. Елементами матриці є умовні ймовірності $f_{GB}(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$. Позначення ~0 використовується для ймовірностей, якими можна знехтувати; через 0 позначені переходи, які взагалі не спостерігалися. У матриці підкреслені елементи, відповідні переходу зі стану знову в цей стан. У табл. 4.2, б також наведено вектор-стовпець значень $f_B(\mathbf{c})$ функції поведінки f_B при тій же масці (маска без пам'яті),

Таблиця 4. 2 ST-функція для дослідження з оцінки продуктивності обчислювальної системи *а)*

c	v_1	v_2	v_3	v_4	c	v_1	v_2	v_3	v_4
1	1	0	0	0	9	0	1	0	1
2	1	0	0	1	10	1	0	1	1
3	1	1	0	1	11	1	1	1	0
4	1	1	0	0	12	1	1	1	1
5	0	0	0	0	13	0	1	1	0
6	1	0	1	0	14	0	0	1	0
7	0	1	0	0	15	0	0	1	1
8	0	0	0	1					

б)

c = \ c′ =	1	2	3	4	5	6	7–15	$f_B(\mathbf{c})$
1	<u>0.844</u>	0.064	0.004	0.057	0.028	0.002	0.001	0.458
2	0.173	<u>0.757</u>	0.049	0.011	0.003	~ 0	0.007	0.175
3	0.022	0.093	<u>0.725</u>	0.155	~ 0	0	0.005	0.092
4	0.109	0.008	0.059	<u>0.816</u>	0.001	~ 0	0.007	0.242
5	0.755	0.056	0.002	0.036	<u>0.146</u>	0.001	0.004	0.016
6	0.103	0.007	0	~ 0	~ 0	<u>0.811</u>	0.079	0.008
7–15	0.050	0.141	0.054	0.170	0.002	0.063	0.520	0.009

$f_{GS}(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$ $\qquad$ $f_B(\mathbf{c})$

яка зазвичай і є результатом контролю роботи апаратного забезпечення. Зрозуміло, що

$$f_S(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = f_{GS}(\mathbf{c}'|\mathbf{c}) \cdot f_B(\mathbf{c}), \quad (4.75)$$

У деяких випадках переважніше представляти ST-функції у вигляді діаграм. Така діаграма являє собою набір вузлів, по одному для кожного стану спостережених вибіркових змінних, і орієнтованих зв'язків між вузлами, відповідних реально існуючим переходам. Вузли на діаграмі повинні бути позначені відповідними ідентифікаторами стану **c**, а зв`язку помічені значеннями $f_S(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$ або $f_{GS}(\mathbf{c}'|\mathbf{c})$; в останньому випадку бажано також помітити вузли значеннями $f_B(\mathbf{c})$ так, щоб значення $f_S(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$ можна було вирахувати при необхідності з рівняння (4.75).

К.Р. № 15

Опишіть ST-функцію для системи з змінними станами.

Лекція 16

4.17 Взаємозв'язок ST-систем і систем з поведінкою

Δ Будь-яку ST-систему легко можна перетворити в ізоморфну систему з поведінкою. Щоб показати, як це робиться, візьмемо довільну ST-систему

$$\mathbf{F}_S = (\mathbf{I}, M, f_S), \quad (4.76)$$

де ***M***, зрозуміло, компактна маска. Припустимо, що будь-який наступний стан відповідає більшому значенню параметра, ніж попередній.

Розглянемо тепер систему з поведінкою

$$\mathbf{F}_B = (\mathbf{I}, M^+, f_B), \quad (4.77)$$

де M^+ визначається через ***M*** наступним чином:

$$(v_i, \rho) \in M^+, \text{ если } (v_i, \rho) \in M \text{ или } (v_i, \rho - 1) \in M. \quad (4.78)$$

Тоді для будь-якого набору даних із загальної представляючої системи **I** всі вибірки даних, що дають одну пару станів для маски ***M***, скажімо пару $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$, чи дають один і той же стан для маски M^+, скажімо стан **c+**. Якщо дані повністю вибираються за допомогою обох масок, то частоти $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ і $\mathbf{c}^+$ повинні бути однакові. Отже,

$$f_S(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = f_B(\mathbf{c}^+), \quad (4.79)$$

де стан $\mathbf{c}^+$ складається з **c** і породжуємої частини $\mathbf{c}'$, назвемо її $\mathbf{c}'_g$. Таким чином, функція поведінки еквівалентна ST-функції при однозначній відповідності

$$\gamma: \mathbf{c}^2 \to \mathbf{C}^+, \quad (4.80)$$

де $\gamma(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = \mathbf{c}^+$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{c}^+ = \mathbf{c}, \mathbf{c}'_g$.

Маску M^+ (4.78) будемо називати *розширеною маскою М.* Вона визначена в припущенні, що стани породжуються в порядку зростання параметра. При зворотному порядку альтернативна розширена маска, скажімо маска ^+M, визначається дещо інакше:

$$(v_i, \rho) \in {}^+M, \text{ если } (v_i, \rho) \in M \text{ или } (v_i, \rho-1) \in M. \quad (4.79)$$

Можна аналогічно тому, як це було показано для ***M***+, показати, що система з поведінкою

$$\mathbf{F}_B = (\mathbf{I}, {}^+M, f_B) \quad ,(4.80)$$

ізоморфна ST-системі, визначеної для тієї ж представляючої системи **I** і маски ***M***.

Відповідність між масками M, M^+ і масками $M, {}^+M$ показано відповідно на рис. 4.11*а* і *б*. На рисунку також показана однозначна відповідність і її аналог для маски ^+M і $^+\mathbf{c} \in {}^+\mathbf{C}$.

Для заданої системи з поведінкою

$$\mathbf{F}_B = (\mathbf{I}, \mathbf{M}_{\bar{g}}, f_S), \quad (4.81)$$

Ізоморфна ST-система при тій же представляючій системі **I** існує тільки тоді, коли ***M*** — компактна маска і $|M_i| \geqslant 2$ для любої підмаски M_i. Якщо ці умови виконані, то зрозуміло, що ST-система

$$\mathbf{F}_S = (\mathbf{I}, M_{\bar{g}}, f_S), \quad (4.82)$$

де $M_{\bar{g}}$ - породжувана частина (згідно з визначеним порядком породження), яка ізоморфна при відповідній однозначній відповідності між множинами станів **C** (заснованій на *M)* і $\bar{\mathbf{G}} \times \bar{\mathbf{G}}$ (заснованій на $M_{\bar{g}}$). Дане перетворення з системи з поведінкою в ізоморфну ST-систему для одного з порядків породження показане на рис. 4.11,*в*.

Для спрямованих систем що змінюють стан аналогами функцій поведінки будуть відповідно наступні ST-функції:

$$\hat{f}_S : \mathbf{E}^2 \times \bar{\mathbf{E}}^2 \to [0, 1], \quad (4.83)$$

де **E** має той же зміст, що й для систем з поведінкою, і $\hat{f}_S(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{e}}' \mid \mathbf{e}, \mathbf{e}')$ — умовна ймовірність, сенс якої однозначно визначається її узвичаєним позначенням

$$\hat{f}_{GS} : \mathbf{E}^2 \times \bar{\mathbf{E}}^2 \to [0, 1], \quad (4.84)$$

де $\hat{f}_{GS}(\bar{\mathbf{e}}' \mid \mathbf{e}, \mathbf{e}', \bar{\mathbf{e}})$— породжуючі умовні ймовірності;

$$\hat{f}_{GS} : \mathbf{E}^2 \times \bar{\mathbf{E}} \to \bar{\mathbf{E}}, \quad (4.85)$$

де $\hat{f}_{GS}(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}', \bar{\mathbf{e}}) = \bar{\mathbf{e}}'$.

Змінюючими стан аналогами для спрямованих систем з поведінкою будуть відповідно *спрямована ST-система*

$$\hat{\mathbf{F}}_S = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{M}}, \hat{f}_{GS}), \quad (4.86)$$

і спрямована породжуюча ST-система

$$\hat{\mathbf{F}}_S = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{M}}_G, \hat{f}_{GS}), \quad (4.87)$$

де $\hat{\mathbf{I}}$ і $\hat{\mathbf{M}}_G$ визначаються так само, як і для систем з поведінкою.

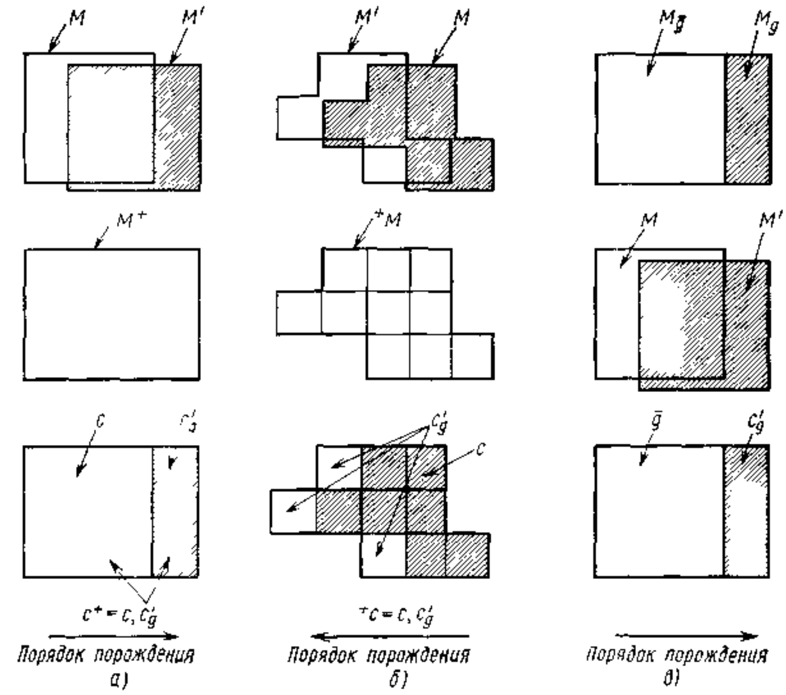
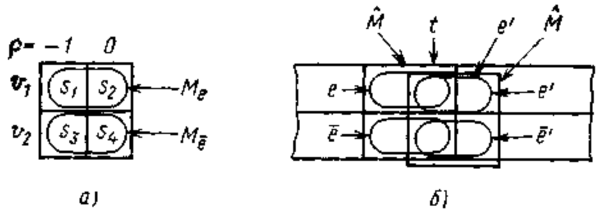


Рис. 4.11. Ізоморфізм між системами з поведінкою і ST-системами



$\bar e'$ =	00	01	10	11	
$\bar e$ = 00	0,1	0	0	0	
01	0	0	0 15	0 25	e = 01
10	0 2	0 2	0	0	e' = 10
11	0	0	0 05	0.05	

$\bar e'$ =	00	01	10	11	
$\bar e$ = 00	1	0	0	0	
01	0	0	0 375	0 625	e = 01
10	0.5	0 5	0	0	e' = 10
11	0	0	0 5	0 5	

$\bar e'$ =	00	01	10	11	
$\bar e$ = 00	0	0.3	0	0	
01	0	0	0 2	0	e = 10
10	0.1	0.1	0	0	e' = 01
11	0	0	0.2	0.1	

в)

$\bar e'$ =	00	01	10	11	
$\bar e$ = 00	0	1	0	0	
01	0	0	1	0	e = 10
10	0 5	0.5	0	0	e' = 01
11	0	0	2/3	1/3	

г)

Рис. 4.12. Тривимірний масив, що представляє спрямовану ST-систему

Функції (4.83) і (4.84) зручно представляти у вигляді масивів квадратних матриць (тривимірних масивів) по одній матриці для кожної умови **e**, **e′**. Зручні також діаграми, подібні діаграмам для нейтральних ST-систем. Для напрямних систем зв'язку на діаграмах позначаються не тільки значеннями відповідної ST-функції, але й умовами **e**, **e′**. Функції (4.85) можна представляти у вигляді матриць, рядки яких відповідають станам **e**, стовпці - станам **e′**, а елементами є відповідні стани **e′**. Ці функції надаються також у вигляді діаграм, таблиць і в деяких випадках за допомогою алгебраїчних формул. ▲

Приклад 4.6. На рис. 4.12 наведена проста спрямована ST-система (без інтерпретації). Її представляюча система складається з вхідної змінної v_1 і ісходної змінної v_2, кожна має два стани 0 і 1. Маска системи ***M*** показана на рис. 4.12,*а*, а на рис. 4.12,*б* наведені відповідні компоненти станів, породжені двома її послідовними положеннями на матриці даних. На рис. 4.12, *в* і *г* показані відповідно функції f_S і f_{GS} у вигляді тривимірних масивів. У даному прикладі масив складається з двох матриць.

К.Р. № 16

Наведіть приклад переходу від деякої ST-системи до ізоморфоной системи з поведінкою.

Лекція 17

4.18 Види породжуючих систем

системи з поведінкою

1. базові -
   a. рівняння (4.12)— нейтральні;
   b. рівняння (4.28)— спрямовані;
2. породжуючі :
   a. рівняння (4.19)— нейтральні;
   b. рівняння (4.32)— спрямовані;

ST-системи

1. базові :
   a. рівняння (4.66) — нейтральні,
   b. рівняння (3.93)— спрямовані;
2. породжуючі:
   a. рівняння (4.86) — нейтральні;
   b. рівняння (4.87)— спрямовані.

Як було показано, будь-яка ST-система може бути перетворена в ізоморфну систему з поведінкою, в той час як зворотне перетворення можливо тільки при певному типі масок. Отже, системи з поведінкою більш загальні, ніж ST-системи.

Два основних недоліки ST-систем очевидні: обмеженість через використання тільки компактних масок і власна надмірність, що виникає з накладення поточного і наступного станів.

ST-системи, коли вони застосовні, представляють для дослідників певні переваги. Мабуть, ST-функції зрозуміліше людині, ніж аналогічні функції поведінки.

Для породжуючих систем виділені різні відмінності. Це відмінності, виділені для систем нижчих рівнів, і деякі нові. Серед перших найбільш істотними є:

1. впорядкованість параметричної множини, що дозволяє ввести важливе поняття маски;
2. впорядкованість множин станів, що відіграє істотну роль у спрощенні процедур для породжуючих систем і при роботі з не повністю визначеними наборами даних;
3. відмінність чітких і нечітких каналів спостереження, що дають відповідно чіткі і нечіткі дані і вимагають застосування різних методів обробки даних;
4. відмінність між нейтральними і спрямованими системами, з якими слід звертатися по-різному.

Відмінностями, що відносяться до породжуючих систем, але не до систем даних і вихідним системам, є:

1. детермінованість і не детермінованість систем;
2. по використовуваній масці розрізняються породжуючі системи без пам'яті і системи, що залежать від минулого.

Зрозуміло, ці методологічні відмінності характеризують і системи більш високих рівнів.

4.19 Спрощення породжуючих систем

На деякому етапі обробки заданої системи даних часто бажано буває спростити відповідні цій системі даних породжуючі системи.

Існує два основні методи одночасного спрощення систем даних і відповідних породжуючих систем:

1) спрощення за рахунок виключення деяких змінних з відповідної подібної системи;

2) спрощення за рахунок визначення класів еквівалентності станів деяких змінних.

Δ Нехай множина змінних породжуючої системи V складається з n змінних и будь-яка підмножина V, за винятком порожньої множини, являє змістовне спрощення першого роду. Отже, є $2^n - 2$ нетривіальних спрощення першого роду. Вони частково впорядковані по відношенню «підмножина». Якщо для зручності включити вихідну множину V і порожню множину, тоді множина спрощень з частковим упорядкуванням утворює решітку. Назвемо цю решітку *решіткою змінних або V-решіткою* і позначимо $\mathscr{L}_V$. Зрозуміло, що V - решітка може бути описана або як

$$\mathscr{L}_V = (\mathscr{P}(V), \subseteq),$$

або як

$$\mathscr{L}_V = (\mathscr{P}(V), \cap, \cup). \quad (4.88)$$

Позначимо через f_B функцію поведінки заданої системи з поведінкою зі змінними, що складають множину V. При спрощенні цієї системи за допомогою скорочення множини V до підмножини V' нова (спрощена) функція поведінки f_B визначається проекцією

$$f'_B(\beta) = [f_B \downarrow V'](\beta) \quad ,(4.89)$$

визначеної рівнянням (4.57).

Скорочення другого роду зводяться до зменшення числа станів, що виділяються для окремих змінних. Одним із способів їх опису є визначення функції

$$\sigma_{i,j} : V_i \to V'_i, \quad (4.90)$$

де V_i — задана множина станів (змінної v_i); V'_i — спрощена (скорочена) множина станів тієї ж змінної; $\sigma_{i,j}(x)$ — новий стан, присвоєний вихідному стану x, а j — це ідентифікатори, за допомогою яких розрізняються різні функції виду (4.90), застосовані до множини станів однієї і тієї ж змінної. Якщо $\sigma_{i,j}(x) = \sigma_{i,j}(y)$, то стани x і y з V_i при спрощенні виявляються нерозрізненими. Функція (4.90) повинна бути голоморфна щодо всіх математичних властивостей ісходної множини V_i, які вважаються істотними з погляду розглянутої задачі. Будемо функцію (4.90), що є гомоморфізмом в описаному вище сенсі, називати *спрощуючою функцією.*

Будь-яка спрощуюча функція індукує розбиття на множині V_i. Будь-яке розбиття $V_i/\sigma_{i,j}$ складається з груп станів V,, які не відрізняються при даному спрощенні. Будемо таке розбиття (яке зберігає істотні властивості V_i) називати *роздільною формою.*

Роздільні форми визначені на якійсь множині станів V_i, можуть бути впорядковані за допомогою звичайного відношення уточнення, визначеного на розбитті даної множини. Добре відомо, що таке відношення уточнення є відношенням часткового порядку і утворює решітку. Для двох заданих розбиттів, скажімо X і У, визначених на одній й тій самій множині, будемо говорити, що X є *уточненим розбиттям Y* тоді і тільки тоді, коли для будь-якої групи x з X існує група y з У, така, що $x \subseteq y$. Якщо X, уточнююче розбіття У, то У називається *укрупненим розбиттям X.* Решітку роздільних форм, визначених на множині станів V_i, будемо називати *роздільною решіткою* і позначати $\mathscr{L}_{V_i}$. Будь-яка роздільна решітка множини станів V_i може бути визначена або у вигляді

$$\mathscr{L}_{V_i} = (\{V_i/\sigma_{i,j}\}, \leqslant), \quad (4.91)$$

або у вигляді

$$\mathscr{L}_{V_i} = (\{V_i/\sigma_{i,j}\}, \times, +), \quad (4.92)$$

де $\times$ і $+$ позначають відповідно добуток і суму розбиттів.

Якщо розглянута множина станів не володіє математичними властивостями, які повинні бути збережені, то в якості роздільної форми прийнятно будь-яке розбиття.

У цьому випадку роздільна решітка містить всі розбиття, які можуть бути визначені на цій множині станів. Якщо множина станів складається з m станів, то число дозвільних форм в решітці, визначається формулою

$$\Lambda_m = \sum_{i=0}^{m-1} C_i^{m-1} \Lambda_i, \Lambda_0 = 1 \quad (4.93)$$

Нижче показане величезне число дозвільних форм навіть для невеликого числа станів:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ_m	2	5	15	52	203	877	4 140	21 147	115 975

Оскільки найменша уточнена роздільна форма (всі стани в одному блоці) сенсу не має, а найбільше уточнення дає спрощення, то число осмислених спрощень дорівнює $\Lambda_m — 2$.

Якщо множина станів повністю упорядкована і потрібно зберегти цю впорядкованість при спрощеннях, то число роздільних форм істотно менше числа, що задається формулою. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — це стани і $x_k < x_{k+1} (k = 1,\ldots, m-1)$. Тоді для будь-якого $k \leqslant m-1$ x_k і x_{k+1} або об'єднуються в одну групу або ні. Тільки ці рішення визначають конкретне розбиття. Таким чином, для m станів приймається m—1 бінарне рішення. Отже, для повністю впорядкованих множин станів

$\Lambda_m = 2^{m-1}$. (4.94)

Очевидно, що ця решітка для m станів ізоморфна булевій решітці для впорядкування підмножин будь-якої множини з m-1 елемента. У наступній таблиці наводяться значення Λ_m, обчислені за формулою (3.94); в цьому випадку число дозвільних форм істотно менше, ніж у випадку невпорядкованих множин станів:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ_m	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Число змістовних спрощень знову дорівнює $\Lambda_m — 2$. ▲

Приклад 4.7. Розглянемо змінну, станами якої є кольори світлофора: червоний, жовтий, зелений. Оскільки вони не впорядковані, всі розбиття множини станів прийнятні у якості дозвільних форм. Діаграма Хассе для цієї решітки наведена на рис. 4.13. букви *к, ж, з* означають відповідно червоний, жовтий і зелений кольори. Групам в окремих дозвільних формах показані рисками над відповідними літерами. Стрілки на діаграмі вказують напрям уточнення розбиття. Для спрощення ісходної системи потрібно рухатися в напрямку, зворотному стрільцям.

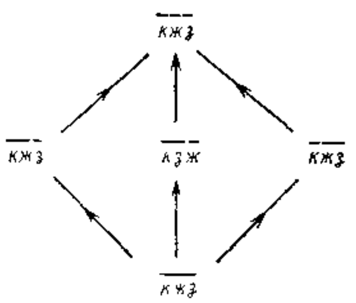


Рис. 4.13. Решітки роздільних форм.

Якщо обрано кілька змінних, то будь-яка роздільна форма для однієї змінної може бути об'єднана з будь-якою роздільною формою іншої змінної. Всі ці комбінації можна включити в одну решітку, що представляє обраний набір змінних. Будемо називати її *об'єднаною роздільною решіткою.* Математично вона являє собою добуток окремих роздільних решіток.

Δ Нехай $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ — множини елементів окремих роздільних решіток вибраних змінних, а $\mathbf{X}$ — множина елементів відповідної роздільної решітки. Зрозуміло, що загальне число елементів об'єднаної роздільної решітки дорівнює добутку числа елементів окремих роздільних решіток, тобто

$$|\mathbf{X}| = \prod_{j=1}^{n} |X_j|, \qquad (4.95)$$

однак тільки деякі з них є змістовними спрощеннями. Зокрема, будь-яка комбінація, в яку входить найменша уточнена роздільна форма (розбиття на одну групу) однієї з роздільних решіток, є безглуздою. Комбінація всіх найбільш уточнених роздільних форм також не представляє спрощення. Отже, загальне число елементів об'єднаної решітки, що представляють змістовні спрощення, $|X_S|$ визначається за формулою

$$|X_S| = \prod_{j=1}^{n} (|X_j| - 1) - 1. \qquad (4.96)$$

В окремому випадку, коли всі окремі решітки однакові і кожна складається з Λ_m роздільних форм, ми отримуємо

$$|X_S| = (\Lambda_m - 1)^n - 1. \qquad (4.97)$$

Більш того, якщо всі роздільні решітки побудовані на повністю впорядкованій множині з m станами, то

$$|X_S| = (2^{m-1} - 1)^n - 1. \blacktriangle \qquad (4.98)$$

Вимоги, що спрощують породжуючі системи:

1) щоб системи були якомога простіше;
2) щоб ступінь породжуючої нечіткості систем була якомога менше.

Будемо називати вимогу 1 *вимогою простоти*, а вимогу 2 *вимогою чіткості.*

Щоб конкретизувати вимогу простоти для систем з поведінкою слід задати певну міру складності. Нехай, наприклад, складність системи з поведінкою оцінюється числом реальних станів системи, тобто числом станів, що мають ненульові ймовірності або можливості. Це дуже проста міра, але, можливо, найбільш змістовна.

Алгоритми формалізації породжуючих систем

<u>*Системи з поведінкою*</u>

1. Визначається правило зсуву $r_j : W \to W$ (Якщо параметрична множина повністю упорядкована $r_j(w) = w + \rho$).
2. Визначаються вибіркові змінні $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$, де $s_{k,\omega} = v_{i,\, r_{j_i}(w)}$. $s_{k,\omega}$ позначає стан вибіркової змінної s_k при значенні параметра **w**, а $v_{i,j_i}(w)$ — стан змінної v_i при значенні параметра $r_j(w)$.
3. Визначається маска $M \subseteq V \times R$. Для введення вибіркових змінних визначається функція $\lambda : M \to N_{|M|}$.
4. Визначається функція поведінки $f_B : C \to \{0,1\}$, де $C = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{|M|}$. $f_B(c) = 1$, якщо стан **c** має місце бути, і $f_B(c) = 0$ в іншому випадку.
5. Визначається система з поведінкою $F_B = (I, M, f_B)$.

<u>*Породжуючі системи з поведінкою*</u>

1. Визначаються підмаски M_g і $M_{\bar{g}}$ маски *M*. Породжувана підмаска M_g і породжуючи маска $M_{\bar{g}}$. $M_G = (M, M_g, M_{\bar{g}})$ - маска породження.

2. Для зручності визначаються функції $\lambda_g : M_g \to K_g$, $\lambda_{\bar g} : M_{\bar g} \to K_{\bar g}$. Множини станів G і $\overline{G}$ відповідно породжуваних і породжуючих змінних
   $G = \times_{k \in K_g} S_k$, $\overline{G} = \times_{k \in K_{\bar g}} S_k$.
3. Визначається породжуюча функція поведінки $f_{GB} : \overline{G} \times \underline{G} \to \{0,1\}$.
4. Визначається породжуюча система з поведінкою $F_{GB} = (\mathrm{I}, M_G, f_{GB})$.

Для недетермінованих систем з поведінкою

Функція поведінки приймає вигляд $f_B : \mathrm{C} \to [0,1]$ закону розподілу ймовірностей.

У випадку породжуючих систем з поведінкою $f_{GB} : \overline{G} \times G \to [0,1]$.

Спрямовані системи з поведінкою

1. Визначаються підмаски M_e і $M_{\bar e}$ маски *M*. Нехай підмаска M_e визначає вибіркові змінні, що задаються середовищем, а підмаска $M_{\bar e}$ — решту. $\widehat{M} = (M, M_e, M_{\bar e})$ - маска спрямованої системи з поведінкою.
2. Для зручності визначаються функції $\lambda_e : M_e \to K_e$, $\lambda_{\bar e} : M_{\bar e} \to K_{\bar e}$. Також
   $\mathrm{E} = \times_{k \in K_e} S_k$, $\overline{\mathrm{E}} = \times_{k \in K_{\bar e}} S_k$.
3. Визначається функція поведінки $\hat{f}_B : \mathrm{E} \times \overline{\mathrm{E}} \to [0,1]$.
4. Визначається спрямована система з поведінкою $\widehat{\mathrm{F}}_{\mathrm{B}} = (\widehat{\mathrm{I}}, \widehat{M}, \widehat{f}_B)$.

Спрямовані породжуючі системи з поведінкою

1. Породжуюча маска для спрямованої системи з поведінкою
   $\widehat{M}_G = (M, M_e; M_g, M_{\bar g})$. $\{M_g, M_{\bar g}\}$ розглядається як розбиття $M_{\bar e}$.
2. Визначається функція поведінки $\widehat{f}_{GB} : \mathrm{E} \times \overline{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \to [0,1]$.
3. Визначається спрямована породжуюча система з поведінкою $\widehat{\mathrm{F}}_{GB} = (\widehat{\mathrm{I}}, \widehat{M}_G, \widehat{f}_{GB})$.

Системи зі змінними станами

1. визначаються функції $f_S : C^2 \to [0,1]$, де $f_S(c, c')$ — це ймовірність стану c', наступного безпосередньо за станом c (відповідно до обраного порядку породження); $f_{GS} : C^2 \to [0,1]$, де $f_{GS}(c, c')$ — умовна ймовірність того, що при поточному стані c наступним станом буде стан c'.
2. Визначаються аналоги нейтральних систем з поведінкою, ST-система $F_S = (I, M, f_S)$, и породжуюча ST-система $F_{GS} = (I, M_G, f_{GS})$. Де I, M і M_G мають той же сенс, що в системах з поведінкою.

К.Р. № 17

Для деякої породжуючої системи наведіть приклади можливих спрощень.

Лекція 18

Дослідження і проектування за допомогою АСНД

В цілому АСНД призначені для вирішення завдань наступних двох типів. Задачею *дослідження систем* є накопичення знань про різних наборах змінних і параметрів, визначених з конкретними цілями на існуючих об'єктах. Завданням *проектування систем* є використання накопичених знань для створення нових об'єктів, для яких на певні змінні накладені відомі обмеження. Вся розглянута вище теорія формалізує і надає можливі шляхи створення АСНД загального вигляду для довільної предметної області.

Існує два основні підходи використання АСНД. При одному підходящі породжуючі системи (або системи більш високих рівнів), що базуються на певних вимогах, виводяться з заданої системи даних. Цей підхід зазвичай називається *методом відкриття*.

При іншому підході гіпотетична породжуюча система (або система більш високого рівня) постулюється, а потім її правильність перевіряється порівнянням породжуваних нею (при відповідних початкових умовах) даних з емпіричними даними. Якщо система не проходить перевірки, заснованої на конкретному критерії правильності (критерії збігу), то вона відкидається і постулюється нова система. Цей підхід до дослідження систем зазвичай називається *методом постулювання*.

При використанні методу відкриття будь-яка породжуюча система, отримана безпосередньо із системи даних, є певним економним поданням якихось аспектів системи даних. Те, які саме аспекти представляються породжуючої системою, залежить від її маски і характеру функції поведінки або ST-функції. Якщо породжуюча система детермінована, то це економний опис всієї системи даних свого роду «стенографічний» опис.

Таким чином, проектування систем в запропонованому варіанті АСНД завжди являє собою процес підйому по ієрархії систем. Він починається з визначення або породжуючої системи, або системи даних і набору вимог щодо структури систем. Дослідження за допомогою АСНД здійснюється за допомогою:

1. підйому по ієрархії за допомогою виявлення систем більш високих рівнів, для яких системи більш низьких рівнів мають певні властивості (метод відкриття);
2. постулювання породжують систем або систем більш високого рівня і відкидання тих з них, які не задовольняють перевірці на відповідність між емпіричними і породженими даними (метод постулювання);
3. будь-якій комбінації методу відкриття та методу постулювання, наприклад підйому по ієрархії до певного рівня і постулювання систем на більш високому рівні.