

**Міністерство освіти і науки України
Чернігівський національний технологічний університет**

В.Г. Дубенець, О.В. Савченко

Механіка деформівного твердого тіла

(Курс лекцій. Частина 1)

Чернігів – ЧНТУ – 2016

ЛЕКЦІЯ 1

ВСТУП ДО КУРСУ "Механіка деформівного твердого тіла"

1.1 Дискретизація математичних моделей у МДТТ

Символічно математичну модель можна записати у вигляді *операторного рівняння*¹

$$LU = F, \quad (1.1)$$

де L – деякий оператор;

U – вектор-функція, яка розшукується;

F – заданий вектор параметрів.

Декілька слів про поняття "*оператор*" (докладніше див. Додатки у [5]).

Оператором L у математиці називають правило, згідно з яким кожній функції $y(x)$, заданій на множині $K = \{y(x)\}$ ставиться у відповідність єдина функція $z = z(x)$.

Символічно ця відповідність записується у вигляді

$$z = Ly, \text{ або } z = L(y).$$

Множину K функцій $y(x)$, на якій означений оператор L , називають областю означення оператора, а функції $y \in K$ – допустимими.

Наприклад, для функцій, які мають першу похідну, символ $\frac{d}{dx}$ можна назвати оператором диференціювання ($L \equiv \frac{d}{dx}$ – оператор диференціювання).

Аналогічно вводяться більш складні оператори, наприклад, оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Оператор називають лінійним, якщо виконуються умови:

$$L(\alpha U) = \alpha L(U)$$

$$L(U + V) = L(U) + L(V)$$

Оператори можуть бути не тільки диференційними, а й алгебраїчними, матричними, інтегральними.

Дуже важливим є поняття симетричного, або самоспряженого оператора. Якщо ввести поняття скалярного добутку функцій

¹ (Победря Б.Е. О вычислительной механике деформируемого твердого тела // У кн. "Математические методы механики деформируемого твердого тела" - М.: Наука, 1986).

$$(U, V) = \int_{\omega} UV d\omega,$$

то умовою симетрії є рівність

$$(LU, V) = (LV, U).$$

Якщо $(LU, U) \geq 0$ і $(LU, U) = 0$ тільки при $U \equiv 0$, оператор називають *додатнім*.

Дискретним називають оператор, означений на множині чисел. Очевидно, результатом дії оператора L_K є також числа з області значень оператора.

Дискретний алгебраїчний оператор можна завжди записати у вигляді матричного оператора. Симетричність оператора у цьому випадку означає $L \equiv L^T$.

У більшості випадків операторне рівняння має форму диференціальних або інтегральних рівнянь, тобто описує так звану "континуальну модель". Будемо вважати, що сюди входять також початкові і граничні, або якісь додаткові умови, які забезпечують єдиний розв'язок задачі.

Оскільки на ЕОМ обчислення реалізуються шляхом операцій зі скінченним набором чисел, тобто шляхом алгебраїчних операцій, континуальну задачу необхідно звести до дискретної (алгебраїчної).

$$L_K(q_K) = f_K, \quad (1.2)$$

де L_K – оператор, який діє у скінченно-вимірному просторі і апроксимує оператор L ;

q_K – невідомі;

f_K – вектор заданих параметрів, які апроксимують функцію f .

Пошук методу розв'язку цієї "скінченно-вимірної" задачі полягає у реалізації операції знаходження оберненої матриці L_k^{-1}

$$q_K = L_K^{-1} \cdot f_K. \quad (1.3)$$

Як проблема дискретизації моделі, так і проблема розв'язку мають специфіку, обумовлену предметністю задачі, і потребують для успішної реалізації знання не тільки методів математики, але і методів механіки і інформатики.

На вибір чисельного методу пошуку розв'язку впливають можливості обчислювальних машин, наявність відповідного програмного забезпечення, математична і предметна підготовка користувача. У більшості випадків весь цикл побудови моделі та її аналізу проводиться безпосередньо інженером. Цьому сприяє і наявність спеціалізованих програмних продуктів, розроблених на допомогу інженерам, програмних комплексів САЕ (іноді їх називають пакетами програм). САЕ-комплекси у значній мірі полегшують роботу інженера (особливо на останніх двох етапах розрахунку), гарантуючи необхідні характеристики закладених у них програм.

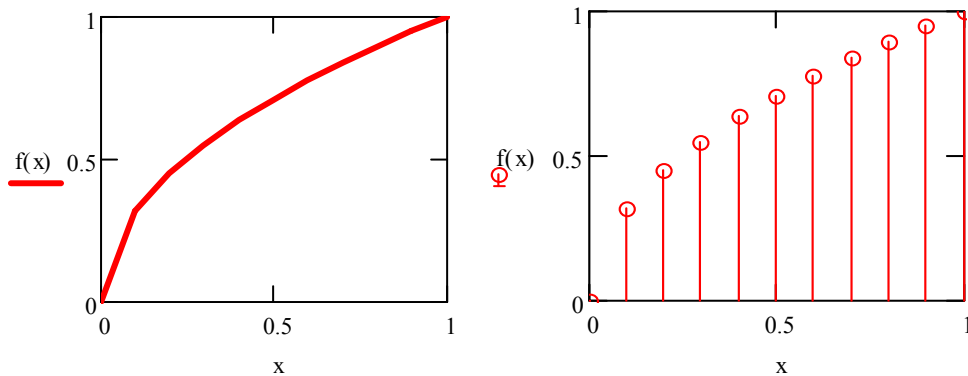
Останній етап полягає в аналізі одержаного розв'язку, обґрунтуванні коректності й прийнятності використаної математичної моделі. Обґрунтування моделі повинно дати відповідь про точність одержаних результатів. Для цього необхідно проаналізувати можливі похибки розв'язку, які складаються з похибок, пов'язаних з *побудовою моделі, дискретизацією і розв'язком*.

Для того, щоб зробити висновок про *прийнятність моделі*, необхідні досвід та інтуїція механіка, спеціаліста у предметній області, а, крім того, знання особливостей проведення операцій на ЕОМ. Як відомо, точність арифметичних операцій, які виконуються ЕОМ, обмежена скінченною кількістю розрядів, у той час як чисельне подання більшості дійсних чисел потребує нескінченно великої кількості розрядів. Наприклад, такі фундаментальні константи як π або e ніколи не можуть бути введені у ЕОМ точно; очевидно, що результати усіх операцій з ними також будуть наближеними. Операції з цілими числами також у більшості випадків приводять до наближеного результату. Наприклад частка від ділення 2 на 3 уже буде наближеним числом. Похибки, які при цьому виникають, називають похибками округлення. Окремі похибки у процесі обчислень, накопичуючись, можуть суттєво вплинути на остаточний результат. При цьому округлення до ближчого числа, що вміщується у розрядній сітці, може частково нейтралізувати похибки, однак середньоквадратичне відхилення буде зростати зі збільшенням кількості операцій, залишаючи можливість великої похибки у остаточному результаті. Якщо ж використати відкидання останніх цифр, це приводить до зміщення похибок в одному напрямку. Окрім цих похибок, можлива також небезпека катастрофічної втрати значущих цифр, якщо два числа відрізняються тільки в останніх знаках.

Похибки, пов'язані з дискретизацією, обумовлені неточною апроксимацією геометричних форм, припущеннями щодо розмірів і характеристик дискретних елементів. В основі багатьох чисельних методів лежать ітераційні процеси, результат яких залежить від збіжності методу і кількості ітерацій. Необхідність врахування і зменшення похибок розрахунків стимулює розробку більш ефективних чисельних методів, що є прерогативою, у першу чергу, математиків. При цьому важливо також, щоб програмне забезпечення, яке реалізує ці методи, враховувало вимоги щодо мінімізації похибок і забезпечення ефективності розрахункового процесу. Необхідність використання ЕОМ привела до переоцінки ефективності багатьох методів математики. У той же час можна стверджувати, що неякісне програмне забезпечення може дискредитувати найбільш ефективний математичний метод. З урахуванням наведених зауважень очевидними видаються рекомендації використовувати існуючі програми САЕ, оскільки вони розробляються колективами математиків, програмістів та інженерів, доводяться і удосконалюються впродовж багатьох років. Більшість із них є багатоваріантними, тобто надають інженеру можливість вибору, а це, у свою чергу, вимагає необхідної підготовки з математики, інформатики, а також предметних знань з тих розділів механіки, до яких відноситься проблема. Більш

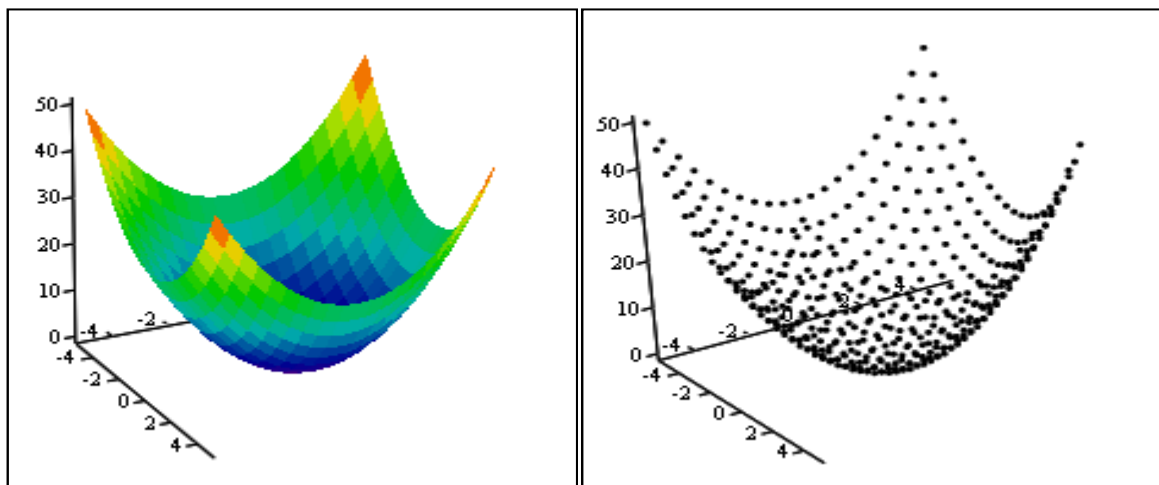
повні відомості про можливості деяких існуючих (і доступних) програмних комплексів наводяться в останній лекції. Нижче наведено приклади дискретизації континуальних (неперервних) об'єктів.

$$f(x) := x^{0.5}$$



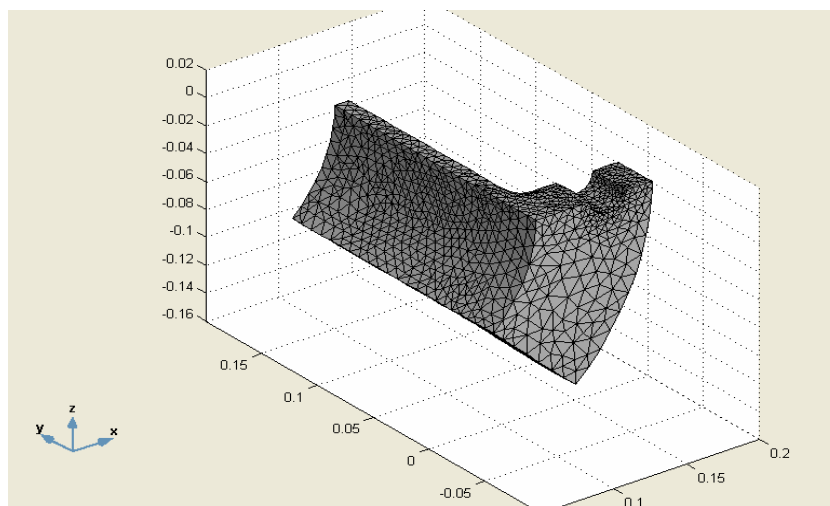
Функція двох змінних (а – континуальна, б – дискретна)

$$FF(x, y) := x^2 + y^2$$

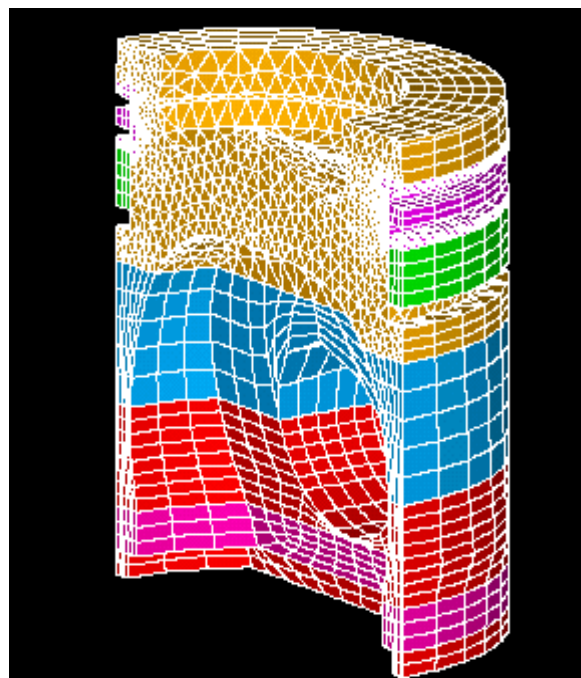
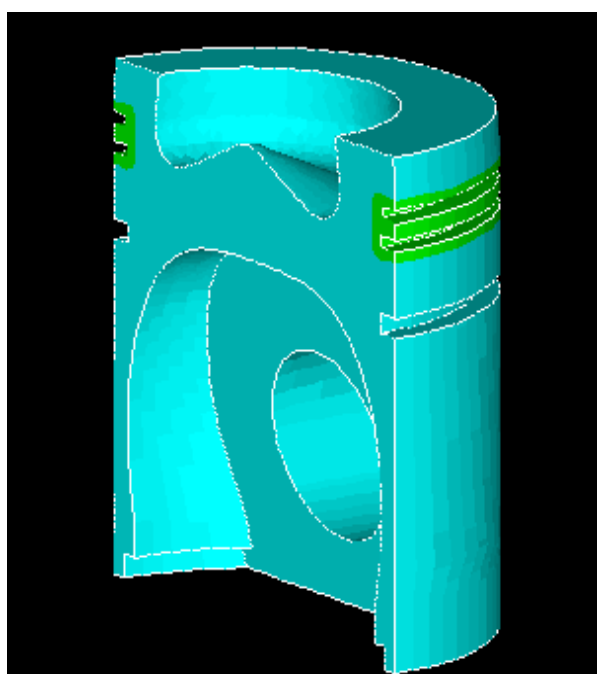


FF

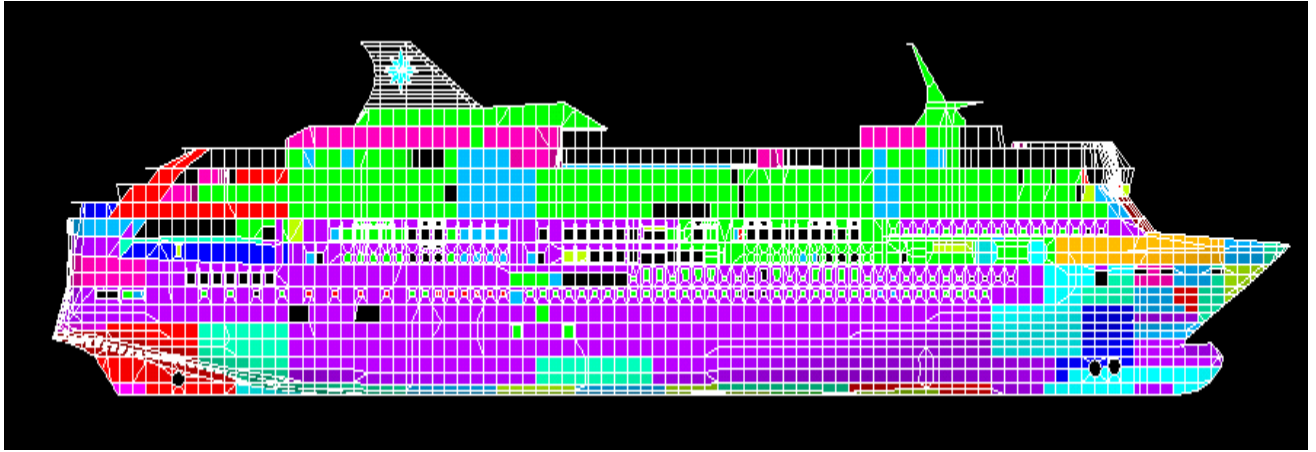
FF



Дискретизація елемента конструкцій (частина труби з фланцем)



Дискретизація деталей машин (поршень двигуна)



Дискретна (скінченно-елементна) модель пасажирського лайнера (47000 оболонкових і стержневих елементів, 16 масових елементів. 118000 ступенів вільності (тобто 118000 невідомих переміщень. Матриця коефіцієнтів системи рівнянь мала розмір $118000 \times 118000 = 13.92$ мільярдів елементів).

ЛЕКЦІЯ 2

ОСНОВИ МЕХАНІКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМІВНОГО ТІЛА

2.1 Навантаження і напруження. Тензор напружень

Розглянемо довільне тіло з накладеними на нього в'язями, яке знаходиться під дією поверхневих і об'ємних навантажень (рис. 2.1).

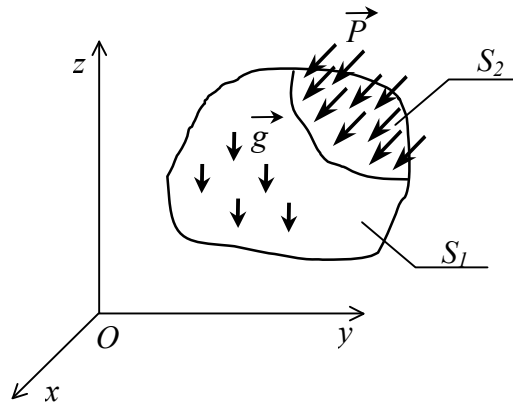


Рис. 2.1 – Довільне тіло під дією навантажень

Поверхневі і масові сили визначаються інтенсивностями, які в загальному випадку залежать від координат x , y , z , пов'язаних з тілом. Проекції поверхневих сил на осі координат позначимо p_x , p_y , p_z , а проекції масових сил – q_x , q_y , q_z .

Під дією масових навантажень у тілі з'являються внутрішні сили взаємодії – *напруження*. Напруження є умовними силами, які введені у механіці суцільного середовища як заміна атомних і молекулярних сил. Напруження діють у кожній площадці, виділеній в об'ємі, залежать від орієнтації площадки, проведеної через дану точку, і визначаються у деякій точці K як границя відношення середньої сили, діючої у площадці, до величини цієї площадки, якщо остання стягується у точку K :

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}.$$

Означене таким чином напруження є вектором.

Множина напружень у площадках, проведених через дану точку, називається напруженим станом у точці.

Напружений стан у точці можна описати, задаючи вектори напружень у трьох взаємно перпендикулярних площадках, проведених через дану точку (рис. 2.2, а-в). Для зручності й наочності замість цих трьох площадок розглядають грані куба, виділеного в околі точки (рис. 2.2, г). Розкладаючи

вектори напружень у кожній з граней на складові по координатних осях, одержимо дев'ять компонент напружень, що діють на гранях куба, і складаємо матрицю

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

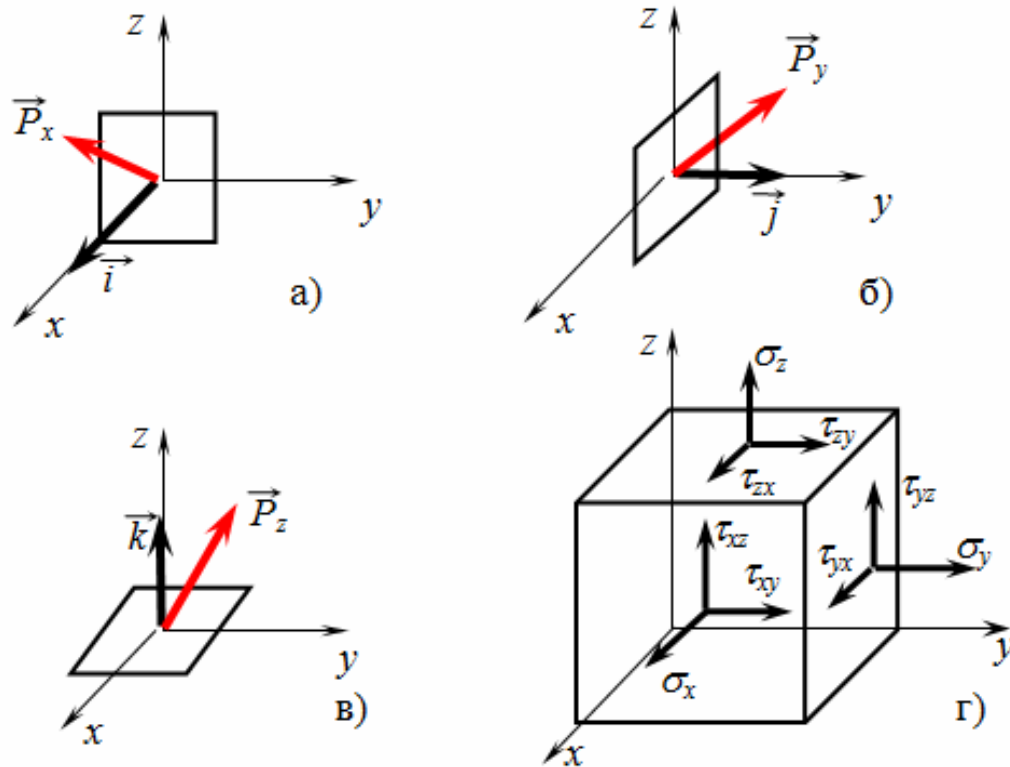


Рис. 2.2 – Моделювання напруженого стану у точці

Додатні напрямки напружень збігаються з напрямками координатних осей.

Оскільки через точку можна провести нескінченну кількість площадок, то в одній і тій самій точці можна записати нескінченну кількість матриць типу (2.1). Кожну з цих матриць можна розглядати як проекції деякого математичного об'єкта – тензора. У тривимірній системі координат тензор має своїми компонентами вектори напружень, діючих у трьох взаємно перпендикулярних площадках (тобто на гранях умовного куба (рис. 2.2, г)).

У векторній нотації:

$$\vec{T}_\sigma = \vec{P}_x \vec{i} + \vec{P}_y \vec{j} + \vec{P}_z \vec{k}.$$

Таким чином, можна говорити, що напружений стан у точці визначається тензором \vec{T}_σ , а напружений стан у кожній площадці, яка проведена через цю точку, – вектором \vec{P}_n , де \vec{n} – вектор нормалі до площадки.

Покажемо, як за однією проекцією тензора (тобто матрицею \mathbf{T}_σ) можна знайти всі інші проекції. Розглянемо дві ортогональні декартові системи координат $Oxyz, Ox'y'z'$ (рис. 2.3). Взаємне положення осей визначимо матрицею напрямних косинусів

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(x', x), & \alpha_{12} &= \cos(x', y), & \alpha_{13} &= \cos(x', z), \\ \alpha_{21} &= \cos(y', x), & \alpha_{22} &= \cos(y', y), & \alpha_{23} &= \cos(y', z), \\ \alpha_{31} &= \cos(z', x), & \alpha_{32} &= \cos(z', y), & \alpha_{33} &= \cos(z', z). \end{aligned}$$

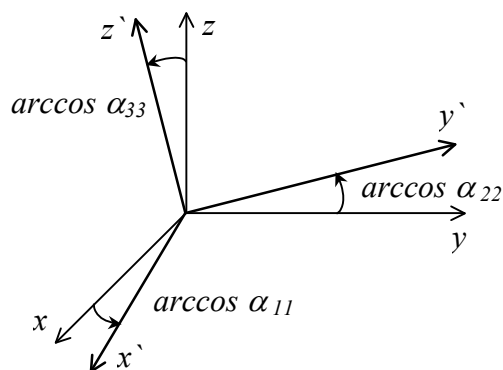


Рис. 2.3 – Декартова система координат при повороті осей

Згідно з правилом перетворення декартових тензорів другого рангу [16], компоненти тензора напружень у двох системах координат пов'язані співвідношенням

$$\mathbf{T}'_\sigma = \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}_\sigma \mathbf{\Lambda}^T, \quad (2.3)$$

Маючи одну з проекцій тензора напружень, можна також знайти вектор напружень у довільній площадці (рис. 2.4) з вектором напрямної нормалі \vec{n} . Розглянемо для цього елементарний тетраедр з вершиною в точці O . Очевидно, площі граней, що збігаються з координатними площинами, дорівнюють dSn_x, dSn_y, dSn_z , де $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \cos \beta$, $n_z = \cos \gamma$.

Рівняння рівноваги сил, що діють на тетраедр (див. рис. 2.4),

$$\vec{P}dS = \vec{P}_x dSn_x + \vec{P}_y dSn_y + \vec{P}_z dSn_z, \quad (2.4)$$

у матричній формі

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}, \quad (2.5)$$

де $\mathbf{p} = \{X \ Y \ Z\}^T$; X, Y, Z – проекції вектора \vec{p} на осі x, y, z ; $\mathbf{n} = \{n_1 \ n_2 \ n_3\}^T$.

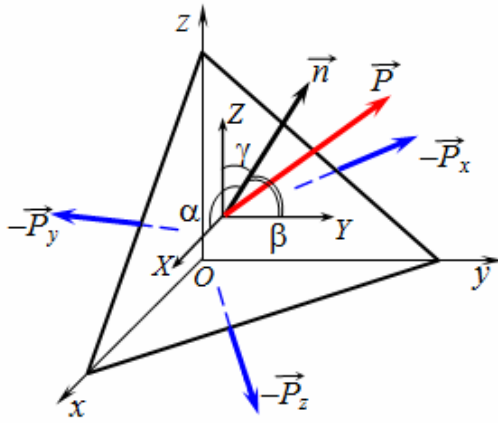


Рис. 2.4 – Напруження у довільній площадці

Таким чином, щоб визначити компоненти вектора напружень у площадці, необхідно помножити матрицю тензора напружень на вектор напрямних косинусів нормалі до площадки. Компоненти вектора \mathbf{p} , паралельні осям x, y, z , не перпендикулярні й не дотичні до площадки, а отже не зовсім зручні для характеристики напружень у площадці. Тому знайдемо нормальні й дотичні компоненти вектора \mathbf{p} . Проекція вектора \mathbf{p} на нормаль визначається як скалярний добуток

$$\sigma_n = \vec{p} \cdot \vec{n},$$

або у матричній формі

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Дотичні напруження

$$\tau_n = \sqrt{\vec{p}^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n})^2} \quad (2.7)$$

Для визначення напружень у площадці і компонент тензора напружень у нових координатних осях згідно з (2.5), (2.6), (2.7) можна скористатись безпосередньо операторами системи MathCAD.

2.2 Головні напруження і головні площадки

З нескінченної кількості похилих площадок можна знайти такі, на яких відсутні дотичні напруження, тобто діють лише нормальні напруження. Ці площадки, а також напруження, що діють у них, називають *головними*. Для кожної такої площадки можна записати

$$\vec{p} = \sigma \vec{n}, \quad (2.8)$$

де σ – модуль вектора напружень.

Враховуючи (2.5), з (2.8) дістанемо

$$(\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{E}) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Матричне рівняння (2.9) містить три скалярні рівняння. Система однорідних рівнянь (2.9) має ненульові розв'язки лише тоді, коли $\det(\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{E}) = 0$. Розкривши визначник, отримуємо многочлен третього степеня відносно σ (характеристичне рівняння матриці \mathbf{T}_σ)

$$\sigma^3 - \Sigma_1 \sigma^2 + \Sigma_2 \sigma - \Sigma_3 = 0, \quad (2.10)$$

де $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ – інваріанти напруженого стану:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ \Sigma_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}; \\ \Sigma_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Корені рівняння (2.10) є власними значеннями матриці \mathbf{T}_σ і головними напруженнями, які відшукуються. Можна показати, що три головні напруження діють у взаємно перпендикулярних площадках, а матриця тензора напружень у головних осях має вигляд

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

У загальному випадку рівняння (2.10) має три дійсні корені $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Оскільки, як буде показано далі, матриця \mathbf{T}_σ симетрична відносно головної діагоналі, характеристичне рівняння (2.10) завжди має дійсні корені, хоча серед них можуть бути й нульові.

Якщо $\Sigma_3 = 0$, то рівняння (2.10) має один нульовий корінь, а два інші визначаються з квадратного рівняння

$$\sigma(\sigma^2 - \Sigma_1 \sigma + \Sigma_2) = 0, \quad (2.13)$$

звідки

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \frac{\Sigma_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Sigma_1}{2}\right)^2 - \Sigma_2}. \quad (2.14)$$

Якщо $\Sigma_3 = \Sigma_2 = 0$, то рівняння (1.10) має лише один ненульовий корінь $\sigma = \Sigma_1$.

Напружений стан, при якому одне з трьох головних напружень дорівнює нулю, називають *плоским*, а якщо два напруження нульові – *лінійним*, або *одновісним*. У загальному випадку напружений стан називають *об'ємним*.

Для визначення головних напружень, можна скористатися програмами розв'язування кубічного рівняння (2.10) або методами визначення власних

значень матриці \mathbf{T}_σ , не пов'язаними з утворенням характеристичного рівняння, так званими методами обертань [37], що приводять матрицю до діагонального вигляду.

Кожному з головних напружень відповідає напрям, для якого напрямні косинуси подаються як розв'язки системи рівнянь

$$(\mathbf{T}_\sigma - \sigma_i \mathbf{E}) \mathbf{n}_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.15)$$

де $\mathbf{n}_i = \{n_{1i} \ n_{2i} \ n_{3i}\}^T$ – вектори напрямних косинусів площадок з головним напруженням σ_i , \mathbf{E} – одинична матриця.

Наприклад, вектор напрямних косинусів до площадки, де діє головне напруження σ_1 , є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)n_{11} + \tau_{xy}n_{21} + \tau_{xz}n_{31} &= 0; \\ \tau_{yx}n_{11} + (\sigma_y - \sigma_1)n_{21} + \tau_{yz}n_{31} &= 0; \\ \tau_{zx}n_{11} + \tau_{zy}n_{21} + (\sigma_z - \sigma_1)n_{31} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

за умови

$$n_{11}^2 + n_{21}^2 + n_{31}^2 = 1.$$

У розрахунках на міцність широко використовуються дві характерні складові тензора напружень: *шаровий тензор* $\vec{\mathbb{I}}_\sigma$ і *тензор-девіатор* $\vec{\mathbb{D}}_\sigma$, матриці яких мають вигляд

$$\mathbf{I}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Скористаємось виразами для інваріантів тензора напружень і запишемо інваріанти цих двох тензорів

$$\begin{aligned} I_1^{III} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_c, \quad I_2^{III} = 3\sigma_c^2, \quad I_3^{III} = \sigma_c^3, \\ I_1^D &= 0, \quad I_2^D = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)], \\ I_3^D &= \left[\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

У теорії пластичності широко використовується поняття інтенсивності дотичних напружень τ_i , яка визначається як

$$\tau_i = \sqrt{I_2^D} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (2.19)$$

2.3 Переміщення і деформації

При навантаженні тіла у ньому відбувається зміна відносного положення точок об'єму. Кожна точка переміщується на деяку величину, проекції якої на осі координат, пов'язані з тілом, позначимо u, v, w .

Матрицю $\{u \ v \ w\}^T$ називають вектором переміщень у точці.

Відносні деформації у кожній точці об'єму можна описати за допомогою *тензора деформацій*, який будується за аналогією з тензором напружень. Матриця тензора деформацій має вигляд

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – подовжні відносні деформації у напрямках x, y, z ,

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – кутові деформації у площадках Oxy, Oyz, Oxz .

За аналогією з теорією напруженого стану можна показати, що в кожній точці мають місце три взаємно перпендикулярних напрямки, в яких об'єм тільки розтягується або стискається, а деформації зсуву відсутні. Ці деформації називають головними. Вони визначаються як корені кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0, \quad (2.21)$$

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

Матриця шарового тензора деформації –

$$\mathbf{Ш}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (2.23)$$

Матриця девіатора –

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_c \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Шаровий тензор деформацій характеризує об'ємну деформацію у точці тіла, а девіатор – деформацію зміни форми. Зокрема, перший інваріант шарового тензора

$$I_1^{\text{III}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.25)$$

характеризує відносну зміну об'єму.

Другий інваріант девіатора деформацій –

$$I_2^D = \frac{1}{6}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (2.26)$$

Перший інваріант шарового тензора можна зв'язати з осьовою деформацією в напрямку, перпендикулярному октаедричній площадці

$$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_c = I_1/3, \quad (2.27)$$

а другий інваріант девіатора I_2^D – з кутом зсуву на цій же площадці

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (2.28)$$

У теорії пластичності використовується поняття інтенсивності деформацій зсуву γ_i , яке визначається як

$$\gamma_i = 2\sqrt{I_2^D} = \sqrt{\frac{2}{3}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]}, \quad (2.29)$$

а також інтенсивності подовжніх деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (2.30)$$

2.4 Основні рівняння теорії пружності

У теорії пружності об'єктом дослідження є тіла із суцільного, однорідного і пружного матеріалу. Вважається, що для матеріалу справедливий закон Гука, а деформації достатньо малі, щоб нехтувати їх квадратами.

Основні рівняння теорії пружності складаються із статичних, геометричних і фізичних рівнянь.

2.4.1 Статичні рівняння

Щоб одержати залежності між напруженнями у довільній точці об'єму, розглянемо елементарний паралелепіпед, виділений в околі точки (рис. 2.6). Внаслідок змінності напружень вздовж осей x , y , z , вектори напружень у площадках, віддалених від координатних на відстані dx , dy , dz , відрізнятимуться від тих, що діють у координатних площадках, на величину приросту, пов'язаного з приростом відповідних координат. Крім напружень, у площадках на елемент можуть діяти й масові сили, вектор яких $\vec{p} dx dy dz$. Оскільки елемент в об'ємі перебуває в рівновазі, його можна виділити окремо й виконати відповідну заміну в'язей (у даному разі напруженнями на площадках і об'ємними силами). Ця операція ґрунтується на аксіомі звільнення від в'язей, яка розглядається в курсі теоретичної механіки.

Умови рівноваги елемента (рівність нулю головного вектора і головного момента сил, які діють на нього) приводять до таких рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{p}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{p}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{p}_z + \vec{p} = 0, \quad (2.31)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

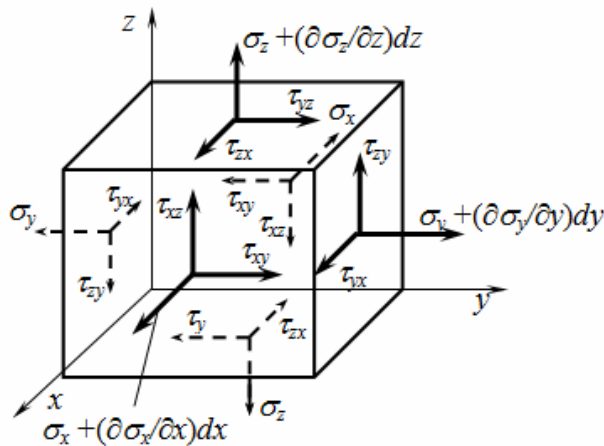


Рис. 2.6 – Елементарний паралелепіпед в околі точки

Перше і називають, власне, рівнянням рівноваги. У матричній формі його можна записати так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (2.32)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}.$$

Останні рівності називаються *законом парності дотичних напружень*. З нього випливає, що з дев'яти компонент матриці тензора напружень лише шість є незалежними (матриця \mathbf{T}_σ симетрична відносно головної діагоналі). Це дає змогу записати незалежні компоненти тензора напружень у формі вектора-стовпця

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T. \quad (2.33)$$

З урахуванням цього позначення рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}, \quad (2.34)$$

де $\mathbf{p}_V = \{X_V \quad Y_V \quad Z_V\}^T$,

\mathbf{A} – матриця диференційних операторів

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T. \quad (2.35)$$

2.4.2 Геометричні рівняння

Проекції переміщень точок об'єму, що деформується, на координатні осі x , y , z позначимо відповідно u , v , w :

$$\mathbf{u} = \{u \quad v \quad w\}^T.$$

Переміщення u , v , w є функціями координат, тобто в різних точках неоднакові. Неоднаковість переміщень у сусідніх точках у загальному випадку призводить до появи деформації.

Розглянемо переміщення елементарного квадрата на площині XOY (рис. 2.6). Якщо переміщення точки A у напрямках осей x , y позначити відповідно u і v , то переміщення точок B і C на сторонах квадрата відрізнятимуться від u і v на величини, зумовлені приростом координат x і y на dx і dy при переході від A до B і C .

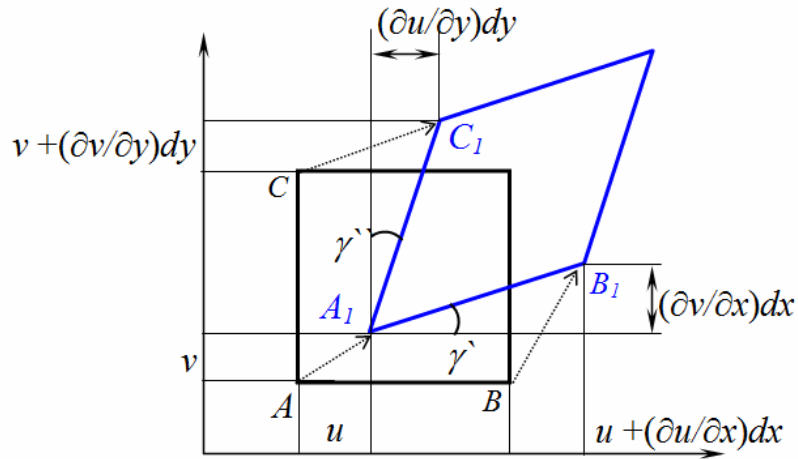


Рис. 2.7 – Переміщення елементарного квадрата

Абсолютні деформації вздовж осей x і y

$$\varepsilon_{AB} = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$$\varepsilon_{AC} = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v = \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Відносні деформації в тих самих напрямках

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{AB}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_{AC}}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.36)$$

Крім лінійних деформацій, як видно з рисунку 2.7, змінюються кути у виділеному квадраті. Позначивши γ_{xy} зміну кута у вершині A , знайдемо

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy}. \quad (2.37)$$

Розглянувши так само переміщення й деформації квадратів, виділених паралельно площинам XOZ і YOZ , запишемо

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.38)$$

Таким чином, маємо шість залежностей, які пов'язують деформації та переміщення у точках об'єму тіла, що деформується. Ці залежності називають *формулами Коші*. Шість деформацій можна розглядати як компоненти тензора деформацій з матрицею (2.20)

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Матриця \mathbf{T}_ε симетрична відносно головної діагоналі. Оскільки тензор \vec{T}_ε , так само як і тензор напружень \vec{T}_σ , є тензорами другого рангу, і структура їх однакова, усі формули й висновки, одержані раніше для \vec{T}_σ , можна записати і для \vec{T}_ε . Зокрема, деформацію у точці можна записати у вигляді вектора

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\}^T. \quad (2.39)$$

Останнє позначення дає змогу записати залежності між деформаціями й переміщеннями в матричній формі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (2.40)$$

2.4.3 Умови сумісності деформацій

Якщо потрібно знайти переміщення за відомими деформаціями, формули Коші необхідно розв'язати відносно переміщень. Але в цьому разі три невідомі виражаються через шість деформацій і для однозначності розв'язку необхідно накласти на деформації такі умови [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ці залежності називають рівняннями Сен-Венана. Якщо вони задовольняються, то в кожній точці об'єму переміщення є однозначними функціями, тобто при деформуванні об'єму не виникає розривів і пустот. У матричній формі вони мають такий вигляд:

$$\mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

де \mathbf{B} – матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial_{yy} & \partial_{xx} & 0 & -\partial_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{zz} & \partial_{yy} & 0 & -\partial_{yz} & 0 \\ \partial_{zz} & 0 & \partial_{xx} & 0 & 0 & -\partial_{xz} \\ 2\partial_{yz} & 0 & 0 & -\partial_{xz} & \partial_{xx} & -\partial_{xy} \\ 0 & 2\partial_{zx} & 0 & -\partial_{yz} & -\partial_{yx} & \partial_{yy} \\ 0 & 0 & 2\partial_{xy} & \partial_{zz} & -\partial_{zx} & -\partial_{zy} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\partial_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \partial_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{ тощо.}$$

2.4.4 Фізичні залежності

Зв'язок між напруженнями і деформаціями описується так званими *фізичними залежностями*. Їх вигляд визначається властивостями матеріалу, а також умовами навантаження. Найпростішою формою зв'язку є лінійна залежність між деформаціями й напруженнями. Для одновісного напруженого стану ізотропного матеріалу залежність між напруженнями і деформаціями відома як закон Гука:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad (2.44)$$

(E – модуль пружності (модуль Юнга), Pa).

У загальному випадку об'ємного напруженого стану для ізотропного матеріалу ці залежності зручно записати у матричній формі, маючи на увазі векторні позначення для напружень і деформацій:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.46)$$

Матрицю \mathbf{C} називають матрицею пружних модулів і подають у вигляді

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Обернена до неї матриця матиме вигляд

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, $G = E/2(1 + \nu)$ – модуль зсуву,
 $\lambda = 2\nu G/(1 - 2\nu)$ – параметр Ляме.

Обидві матриці є симетричними відносно головної діагоналі, компоненти залежать від двох констант – модуля пружності E і коефіцієнта Пуассона ν , – або величин, похідних від цих двох. Зауважимо, що для анізотропних матеріалів кількість констант збільшується і в загальному випадку може дорівнювати 21 [16].

2.5 Потенційна енергія деформації

При спробах змінити об'єм чи форму тіла, виготовленого з пружного матеріалу, виникають напруження, які протидіють цим змінам. Таким чином, у деформованому пружному тілі завжди є внутрішні сили – напруження, які за відповідних умов виконують роботу. Можна сказати, що в деформованому тілі за рахунок пружних деформацій нагромаджується потенціальна енергія. Якщо вона зосереджується в одиничному кубі, на гранях якого діють головні напруження, цю енергію можна знайти як суму робіт усіх сил, що діють на його гранях:

$$a = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3,$$

або
$$a = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.49)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3\}^T$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3\}^T$.

Вираз (2.49) можна використати і в загальному випадку, коли розглядається довільна система координат. При цьому $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ будуть шестивимірними векторами. Потенціальну енергію для тіла в цілому можна обчислити об'ємним інтегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.50)$$

2.6 Загальна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла

Задача механіки деформівного твердого тіла (МДТТ) полягає у визначенні напружень, деформацій і переміщень тіла, на яке діють зовнішні навантаження. Таким чином, у цій задачі 15 невідомих: по шість компонент векторів напружень і деформацій і три компоненти вектора переміщень. Для визначення цих невідомих маємо 15 рівнянь:

– рівноваги (рівняння Нав'є) (2.34)

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0};$$

– кінематичні (рівняння Коші) (1.40)

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon};$$

– фізичні (рівняння Гука) (2.45)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Знайдені з цих рівнянь 15 невідомих мають задовольняти граничним умовам. Якщо на контурі діють поверхневі сили, граничні умови можна дістати з рівнянь (2.5), сумістивши з поверхнею похилу площадку. В цьому випадку вектор \mathbf{p} буде зовнішнім навантаженням \mathbf{p}_S . У матричній формі ці умови матимуть вигляд

$$\mathbf{A}_S^T \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}_S, \quad (2.51)$$

де

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \cos\beta & 0 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & 0 & \cos\alpha & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \cos\gamma & 0 & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

α, β, γ – кути нормалі до поверхні у даній точці у системі координат, пов'язаних із тілом.

Крім силових граничних умов на частині поверхні можуть бути задані переміщення (кінематичні граничні умови).

Систему рівнянь (2.34), (2.40), (2.45), (2.51) можна записати в переміщеннях, напруженнях, або у змішаному вигляді. У першому випадку матимемо три диференціальних рівняння другого порядку в частинних похідних:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}. \quad (2.53)$$

Граничні умови записуємо також у переміщеннях:

$$\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{p}_S. \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$$

Рівняння в напруженнях складніші й тут не розглядаються. Зауважимо лише, що для їх одержання необхідно врахувати умови сумісності деформацій (2.41).

2.7 Варіаційна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла

Традиційним методом аналізу напружено-деформованого стану є використання рівнянь рівноваги. Для абсолютно жорстких конструкцій ці рівняння будуть алгебраїчними; для деформівних конструкцій напружено-деформівний стан може бути визначеним на основі диференціальних рівнянь.

Альтернативний підхід базується на використанні варіаційних принципів. **Варіаційні принципи декларують існування функціоналів, екстремальні (мінімальні) значення яких мають забезпечувати пошук функцій, які визначають стан конструкції.** Тобто визначальні функції для конструкції, навантаженої силами, можна знайти не тільки як розв'язок диференціальних рівнянь, а і як розв'язок варіаційних рівнянь. Варіаційні методи розглядаються у курсі варіаційного обчислення. Фундаментальним у варіаційному обчисленні є поняття функціонала.

Під функціоналом розуміють оператор, який ставить у відповідність кожній функції з деякої множини функцій число, тобто це є скалярна функція, аргументом якої є функції з деякого класу функцій, прийнятних для даної задачі.

У загальному випадку стан деформівної системи описується умовою екстремальності або стаціонарності деякого функціонала. Умови стаціонарності функціонала еквівалентні диференціальним рівнянням даної задачі.

Суттєвою перевагою використання варіаційних принципів є можливість одержання наближених розв'язків задачі за допомогою так званих **прямих методів розв'язку варіаційних задач.**

У курсі варіаційного обчислення розглядаються задачі на екстремум функціоналів. Частинним випадком функціонала є визначений інтеграл, числове значення якого залежить від однієї або декількох функцій, що входять до підінтегрального виразу.

Розглянемо функціонал, який залежить від функцій однієї змінної та її похідної:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

із заданими граничними умовами для функції $y(x)$.

Вважатимемо, що $F(x, y, y')$ – неперервна функція своїх аргументів, та існують похідні F від двох останніх аргументів. Необхідною умовою екстремуму інтеграла є рівність нулю його варіації, обчисленої на

екстремальній функції $y_0(x)$ (тобто функції, яка забезпечує максимум або мінімум (екстремум) інтеграла $J(y)$):

$$\delta J(y) = 0.$$

Варіація функціонала δJ – це головна, лінійна відносно варіації δy , частина його приросту ΔJ . Варіація $\delta J(y)$ обумовлена варіацією функції $y(x)$ і її похідної $y'(x)$. $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$, $y'(x) = y_0'(x) + \delta y'(x)$, причому $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, тобто варіації функцій на кінцях інтервалу дорівнюють нулю.

Варіація функції означає нескінченно малу зміну функції $y(x)$ при фіксованому значенні незалежної змінної x (рис. 3.1).

$$\delta y(x) = y_1(x) - y(x)$$

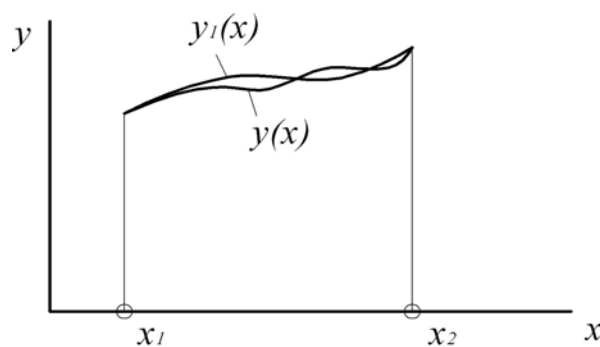


Рис. 3.1 – Варіація функції

Для одержання варіації функціоналу, обумовленої варіацією функції $y_0(x)$ необхідно розкласти підінтегральний вираз у ряд Тейлора і утримати тільки лінійні члени:

$$\delta J(y_0) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_0 + \delta y, y_0' + \delta y') = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

Умову стаціонарності функціоналу J можна знайти у вигляді рівності нулю його першої варіації:

$$\delta J = 0.$$

Функцію $y_0(x)$, яка забезпечує стаціонарне значення функціонала $J(x, y, y')$ можна знайти двома способами:

розв'язанням диференціальних рівнянь, які можна одержати з умови $\delta J = 0$;

за допомогою прямих методів варіаційного обчислення.

Розглянемо перший спосіб. Для одержання диференціального рівняння проінтегруємо частинами другий доданок в умові $\delta J(y_0) = 0$

$$\left(\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v dx \right).$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y^I} \delta y^I \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^I} \right) \delta y dx.$$

Враховуючи, що функція $y(x)$ фіксована на кінцях інтервалу, а значить її варіації $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, одержимо

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y^I} \right) \delta y dx = 0.$$

Оскільки варіація δy є довільною, інтеграл може дорівнювати нулю тільки за умови

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y^I} = 0.$$

Це диференційне рівняння називають **рівнянням Ейлера**. Розв'язком рівняння є функція F , яка надає функціоналу $J(x, y, y^I)$ стаціонарне значення. Цю функцію називають екстремаллю.

Поняття «стаціонарне значення» функціонала забезпечується умовою $\delta J = 0$. При цьому функціонал не обов'язково має екстремум. Для класифікації екстремуму необхідно, як і для функцій, знайти другу варіацію $\delta^2 J$ (для функцій – другу похідну). Якщо $\delta^2 J > 0$ матимемо максимум, при $\delta^2 J < 0$ – мінімум, при $\delta^2 J = 0$ – стаціонарне значення.

Таким чином, першим способом для знаходження екстремалі є одержання і розв'язання рівняння Ейлера для функціонала, який описує дану задачу.

У механіці деформівного твердого тіла велике значення має функціонал енергії, який визначається як сума інтегралів

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \iint_S \mathbf{u}^T \mathbf{p}_S ds - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV. \quad (2.55)$$

Перший інтеграл – потенційна енергія деформацій, другий – робота зовнішніх поверхневих сил, третій – робота зовнішніх об'ємних сил.

Відносно функціоналу енергії Лагранжем сформульовано варіаційний принцип, який носить його ім'я. Згідно з цим принципом для тіла, яке знаходиться у рівновазі, сума робіт усіх діючих на нього внутрішніх і зовнішніх сил на довільній системі можливих переміщень дорівнює нулю.

Запишемо математичне формулювання варіаційного принципу Лагранжа для деформівного тіла у загальному випадку напруженого стану. Для цього розглянемо об'єм V , обмежений поверхнею S (рис. 2.8), на який діють об'ємні сили $\mathbf{p}_V = \{X_V \ Y_V \ Z_V\}^T$ з компонентами X_V, Y_V, Z_V – проекціями вектора на координатні осі x, y, z . Поверхню S , яка обмежує об'єм V , розіб'ємо на дві частини S_1 і S_2 .

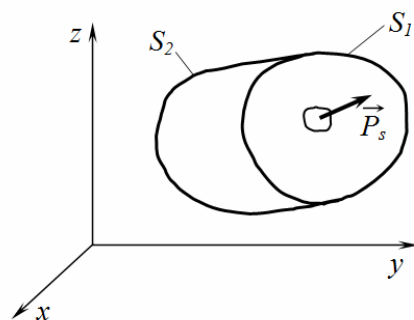


Рис. 2.8 – Об'єм V

На S_1 діють поверхневі навантаження \mathbf{p}_s , а на S_2 – задані переміщення \mathbf{u}_s :

$$\mathbf{p}_s = \{X_s \ Y_s \ Z_s\}^T, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{u}_s = \{u_s \ v_s \ w_s\}^T. \quad (2.57)$$

У кожній точці об'єму напружений стан визначається векторами напружень $\boldsymbol{\sigma}$ і деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}$. Припустимо, що переміщення тіла набули малих приростів, сумісних з геометричними й кінематичними в'язями, накладеними на тіло. Тоді, згідно з принципом Лагранжа, для тіла, що перебуває в рівновазі, сума варіацій робіт усіх зовнішніх і внутрішніх зусиль, що діють на нього, на довільній системі можливих переміщень дорівнює нулю

$$-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_s dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_v dV = 0. \quad (2.58)$$

Перший інтеграл – це варіація роботи внутрішніх зусиль, другий і третій – варіації роботи поверхневих і об'ємних сил на відповідних переміщеннях.

Можна показати, що рівняння (2.58) еквівалентне рівнянням рівноваги та граничним умовам на частині поверхні S_1 . Якщо за допомогою рівнянь Коші і фізичних залежностей записати (2.58) через переміщення, то одержимо

$$-\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_s dS_1 + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_v dV = 0. \quad (2.59)$$

Рівняння (2.59) можна записати у дещо іншому вигляді, інтегруючи перший доданок

$$\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV = \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_s \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dS_1 - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV. \quad (2.60)$$

Підставивши (2.60) у (2.59), одержимо

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV - \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_s \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dS_1 - \mathbf{p}_s) dS - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_v dV = 0. \quad (2.61)$$

З урахуванням незалежності варіацій $\delta \mathbf{u}$ звідси можна одержати рівняння теорії пружності у переміщеннях і граничні умови на площі S_1

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{p}_v = \mathbf{0}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{A}_s^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{p}_s = \mathbf{0}. \quad (2.63)$$

Таким чином, можна стверджувати, що варіаційна й статична постановки задачі МДТТ еквівалентні.

Разом з тим, у більшості випадків варіаційна постановка виявляється більш корисною, оскільки дає можливість наближеного розв'язку задач теорії пружності зокрема і механіки деформівного твердого тіла взагалі. Суттєвою перевагою варіаційних рівнянь і, зокрема, рівняння Лагранжа (2.59), є більш низький порядок похідних, які входять у рівняння, що дає можливість розшукувати розв'язок у класі функцій з меншими вимогами до їх гладкості, тобто диференційованості.

За допомогою рівнянь (2.59), (2.61) можна одержати наближені розв'язки без звернення до диференціальних рівнянь рівноваги (2.53). Методи, що ґрунтуються на використанні рівняння (2.59), називають прямими варіаційними методами.

Розглянуте вище формулювання принципу Лагранжа справедливе для довільного закону зв'язку між компонентами напружень і деформацій, при довільних залежностях між деформаціями і переміщеннями. Він може використовуватись і у випадку дії неконсервативних зовнішніх сил, тобто сил, робота яких залежить від історії навантаження тіла. У цьому випадку рівняння (2.59) не відповідає класичній постановці задач варіаційного обчислення, для яких характерні наявність функціоналу і питання про його екстремальність.

Такий функціонал можна побудувати на основі принципу можливих переміщень, якщо ввести припущення про консервативність зовнішніх сил, тобто про наявність потенціалу зовнішніх сил

$$\Pi = -\int_S \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS - \int_V \mathbf{P}_V^T \mathbf{u} dV. \quad (2.64)$$

Тоді повна енергія деформованого тіла і діючого навантаження складається з потенціальної енергії деформації тіла (потенціал внутрішніх сил) U і енергії зовнішніх сил (потенціал зовнішніх сил) Π .

$$E = U + \Pi. \quad (2.65)$$

Величина E є функціоналом, значення якого визначається функціями переміщень – компонентами вектора \mathbf{u} . Умова стаціонарності функціоналу E –

$$\delta E = 0, \text{ тобто } \delta(U + \Pi) = 0. \quad (2.66)$$

Рівність (2.66) показує, що для консервативних систем з усіх можливих переміщень дійсними будуть ті з них, при яких функціонал повної енергії E приймає стаціонарне значення. При цьому можливі такі положення рівноваги:

$$\delta E = 0, \delta^2 E > 0 \rightarrow E = E_{\min} \text{ (стійке положення рівноваги);}$$

$$\delta E = 0, \delta^2 E < 0 \rightarrow E = E_{\max} \text{ (нестійке положення рівноваги);}$$

$$\delta E = 0, \delta^2 E = 0 \rightarrow E = \text{const} \text{ (байдуже положення).}$$

Методи використання варіаційного рівняння Лагранжа розглядаються у наступних лекціях.

Лекція 3 Дискретизація задач МТДТ

3.1 Метод Рітца

Зазначимо, що одержана відповідність між функціоналом і диференціальним рівнянням існує для порівняно вузького класу задач, які описуються лінійними, самоспряженими рівняннями. Усі інші варіаційні рівняння (варіаційні принципи) не є чисто варіаційними, а є еквівалентними різним варіантам методу зважених нев'язок, зокрема методу Бубнова-Галеркіна. У зв'язку з тим, що лінійні самоспряжені задачі зустрічаються на практиці порівняно рідко, більш продуктивним є другий підхід, який базується на так званих прямих методах варіаційного обчислення. Одним із таких методів є метод Рітца.

Як вказувалося у попередній лекції, розв'язок задач МТДТ можна одержати, скориставшись або рівняннями статички, або варіаційними рівняннями. В обох випадках для одержання точного розв'язку необхідно розшукувати розв'язок диференціальних рівнянь з відповідними граничними і початковими умовами. Складність таких, так званих крайових, задач змушує звертатися до наближених методів, які або спрощують початкові диференціальні рівняння, або використовують деякі вірогідні функції, які з більшою або меншою точністю апроксимують точний розв'язок.

Розглянемо тіло, завантажене об'ємними \mathbf{p}_V і поверхневими \mathbf{p}_S силами на частині поверхні тіла S_1 . На поверхні $S_2 = S - S_1$ прикладені геометричні в'язі

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S. \quad (3.2)$$

Згідно з варіаційним принципом Лагранжа

$$\delta E = \delta \left(- \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_1} \mathbf{u}^T \mathbf{p}_S dS_1 + \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV \right) = 0. \quad (3.3)$$

У відповідності з методом Рітца, розв'язок рівняння (3.3) будемо розшукувати у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (3.4)$$

де $\mathbf{u} = \{u \ v \ w\}^T$ – вектор переміщень ;

\mathbf{q} – вектор невідомих констант – узагальнених координат;

\mathbf{N} – матриця апроксимаційних функцій.

Кожна з функцій \mathbf{N} повинна задовольняти кінематичні умови (3.2). Усі функції \mathbf{N} повинні задовольняти умови лінійної незалежності і повноти. Лінійна незалежність передбачає, що сума

$$\alpha_1 \mathbf{N}_1 + \alpha_2 \mathbf{N}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{N}_n$$

дорівнює нулю, тільки якщо всі коефіцієнти α_i дорівнюють нулю. Умова повноти вимагає, щоб ряд $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots$ був повний, що забезпечувало б виконання умови збіжності розв'язку (3.4) до точного при збільшенні членів ряду, тобто

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i q_i \rightarrow \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

$$n \rightarrow \infty.$$

Крім того, функції \mathbf{N}_i повинні бути диференційованими до порядку $p-1$, якщо найбільший порядок похідної у рівнянні Лагранжа – p , і неперервними по об'єму тіла.

Після підстановки (3.4) у вираз для функціоналу (3.1) і інтегрування, одержимо функцію невідомих коефіцієнтів.

$$E = E(\mathbf{q}).$$

Умова стаціонарності функціоналу (3.3) реалізується прирівнюванням нулю похідних

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial E}{\partial q_n} = 0.$$

Рівняння (3.6) складають систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів q_i . Таким чином, метод Рітца можна розглядати як один із методів дискретизації рівнянь МДТТ. Наведений підхід є класичним варіантом методу Рітца, що використовується при наявності функціонала задачі.

У більш загальному випадку, коли функціонал (3.3) не існує (зокрема, при наявності неконсервативних сил), необхідно використати варіаційне рівняння Лагранжа, розшукуючи розв'язок у відповідності з методом Рітца. Рівняння Лагранжа має вигляд

$$-\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_S dS_1 + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV = 0. \quad (3.7)$$

У цьому випадку достатньо підставити (3.4) у рівняння (3.7). Після перетворень одержимо

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_V) = 0, \quad (3.8)$$

де

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{A} \mathbf{N})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N} dV, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}_S = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_S dS, \quad \mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p}_V dV. \quad (3.10)$$

Матриця \mathbf{K} називається матрицею жорсткості системи, матриці \mathbf{p}_S і \mathbf{p}_V – векторами відповідно поверхневих і об'ємних сил.

Враховуючи довільність варіацій $\delta \mathbf{q}$, з (3.8), одержимо систему алгебраїчних рівнянь відносно узагальнених переміщень

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V. \quad (3.11)$$

Розв'язок цієї системи алгебраїчних рівнянь розшукують за допомогою методів лінійної алгебри (див. Додатки 2, 3 у [5]).

Обидва ці підходи: перший – класичний, другий – некласичний, будемо називати методом Рітца, хоча, як побачимо далі, некласичний варіант відповідає одному з варіантів методу зважених нев'язок.

Таким чином, алгоритм метода Рітца виявляється достатньо простим і складається з наступних кроків:

- 1) вибір координатних функцій N у розв'язку (3.4) для переміщень u ;
- 2) підстановку (3.4) у варіаційне рівняння (3.7);
- 3) одержання системи алгебраїчних рівнянь (3.11);
- 4) розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (3.11) відносно узагальнених координат q ;
- 5) визначення переміщень за формулою (3.4);
- 6) визначення необхідних компонент напружень і деформацій за відомими компонентами переміщень з використанням відповідних формул теорії пружності.

Приклад 3.1 Визначимо лінію прогину шарнірно закріпленої на кінцях балки, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $p(x) = const$.

Розшукуємо пружну лінію балки $w(x)$ у вигляді ряду

$$w(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{q}.$$

Як вказувалось вище, функції $\mathbf{N}(x)$ повинні задовольняти умовам повноти, бути лінійно незалежними, задовольняти кінематичним граничним умовам і не накладати додаткових в'язей на балку. Крім того, необхідно, щоб вони мали похідні $p-1$ порядку, де p – порядок найвищої похідної у варіаційному рівнянні Лагранжа. Зазначимо, що вибір координатних функцій є дуже відповідальним етапом у методі Рітца. Правильно підібрана система координатних функцій дозволяє обмежитись у розв'язку малим числом членів ряду і суттєво скоротити об'єм обчислень.

У даному випадку граничним умовам

при $x = 0$, $x = l$, $w = 0$ задовольняють гармонічні функції

$$\mathbf{N}_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Прогин $w(x)$ матиме вигляд

$$w(x) = \left[\sin \frac{\pi x}{l} \quad \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \dots \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}.$$

Матрицю жорсткості для стержня одержимо, підставляючи у (3.9) значення функції $\mathbf{N}(x)$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \left[\sin \frac{\pi x}{l} \quad \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \dots \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \right],$$

а також матриці диференційних операторів \mathbf{A} і модулів пружності \mathbf{C} . Для плоского згину стержня варіаційне рівняння можна одержати з варіаційного рівняння Лагранжа (3.7), підставляючи відповідні залежності для деформацій і напружень.

$$-\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV + \int_0^L \delta u^T p dx = 0,$$

де p – навантаження, розподілене по довжині стержня.

При плоскому згині деформація і напруження визначаються формулами

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2}, \text{ тобто } \mathbf{A} = -z \frac{d^2}{dx^2},$$

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ тобто } \mathbf{C} = E.$$

У результаті підстановки у рівняння Лагранжа одержимо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad K_{ii} = \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2EI},$$

$$K_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\mathbf{p}_s = \frac{2ql}{\pi} \left[1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad \dots \right].$$

Для коефіцієнтів q_i маємо

$$q_k = \begin{cases} \frac{4ql^4}{EI k^5 \pi^5}, & \text{при } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{при } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Вираз для пружної лінії балки остаточно

$$w(x) = \frac{4ql^4}{\pi^2 EI} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Якщо у цій сумі залишити один член ряду, прогин балки посередині буде таким

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4}{\pi^5} \frac{ql^4}{EI} \approx 0.013071 \frac{ql^4}{EI}.$$

Точний розв'язок

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \approx 0.0130298 \frac{ql^4}{EI}.$$

Похибка складає усього 0.4%.

У МДТТ, окрім принципу Лагранжа, використовують ряд інших варіаційних принципів, зокрема принципи Кастільяно, Рейснера, Вашидзу та ін., однак принцип Лагранжа виявився найбільш прийнятним для більшості задач МДТТ, особливо для фізично нелінійних задач статичної, динамічної та стійкості. На основі варіаційного принципу Лагранжа побудовано найбільш поширений метод дискретизації аналітичних математичних моделей конструкцій – метод скінченних елементів у варіанті методу переміщень.

3.2 Методи зважених нев'язок

Метод зважених нев'язок використовують для побудови наближеного розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$L\mathbf{u} = \mathbf{P}_V, \mathbf{x} \in V,$$

з граничними умовами

$$L_{S_1}\mathbf{u} = \mathbf{P}_S, \mathbf{x} \in S_1,$$

$$\mathbf{u}_{S_2} = \mathbf{u}_0, \mathbf{x} \in S_2,$$

де \mathbf{x} – просторові координати (x, y, z) ; S_1 – зовнішня поверхня, де діють навантаження; S_2 – зовнішня поверхня, де задані переміщення, L – лінійний диференціальний оператор.

Розшукуємо розв'язок системи (3.12)-(3.14) у вигляді ряду

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot f_i,$$

у матричному вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q},$$

де

$$\mathbf{N} = [f_1 f_2 \dots f_N]$$

де q_i - невідомі параметри, f_i - лінійно-незалежні функції, які належать до **повної** послідовності.

Функції f_i у загальному випадку можуть не задовольняти ні рівняння (3.12), ні граничні умови (3.13), (3.14).

При підстановці (3.16) у (3.12)-(3.14) одержимо так звані нев'язки, тобто

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = L\mathbf{N}\mathbf{q} - \mathbf{P}_V \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in V$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = L_S\mathbf{N}\mathbf{q} - \mathbf{P}_S \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in S_1$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \mathbf{N}_S\mathbf{q} - \mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in S_2.$$

Зазначимо, що для точного розв'язку всі нев'язки будуть дорівнювати нулю.

Приймемо умову, щоб ці нев'язки дорівнювали нулю “у середньому”. Це означає що нулю повинні дорівнювати інтеграли від добутку нев'язок на деякі вагові функції $\mathbf{f} = [f_1 f_2 \dots f_n]^T$

² Функції \mathbf{f} повинні бути лінійно-незалежними (див. Додаток у [5]).

$$\int_V \mathbf{f}^T (L\mathbf{N}\mathbf{q} - \mathbf{P}_v) dV + \int_{S_1} \mathbf{f}^T (L_S \mathbf{N}\mathbf{q} - \mathbf{P}_S) dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{f}^T (\mathbf{N}_S \mathbf{q} - \mathbf{u}_0) dS_2 = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Після інтегрування, матимемо систему n рівнянь відносно n невідомих компонент вектора \mathbf{q} . Якщо система базових функцій, задовольняє граничним умовам, то у рівнянні залишається тільки інтеграл по об'єму

$$\int_V \mathbf{f}^T (L\mathbf{N}\mathbf{q} - \mathbf{P}_v) dV = \mathbf{0}.$$

У залежності від вибору функцій МЗН використовується у декількох варіантах.

3.2.1 Метод колокацій

У цьому варіанті вагові функції приймаються у вигляді $\mathbf{f} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T$, де $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ – дельта-функція Дірака, яка має за означенням такі властивості:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i,$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \infty, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_i,$$

$$\int_{\xi < \xi_i}^{\xi > \xi_i} G(\xi) \delta(\xi - \xi_i) d\xi = G(\xi_i). \quad (3.21)$$

Вибір таких вагових функцій означає, що нев'язка прирівнюється до нуля в окремих точках об'єму. Система рівнянь для визначення коефіцієнтів розв'язку має вигляд

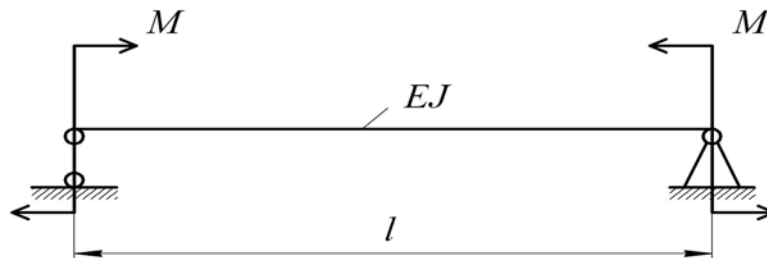
$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) (L\mathbf{f}\mathbf{q} - \mathbf{P}) dV = \mathbf{0},$$

$$\text{або } (L\mathbf{f}\mathbf{q} - \mathbf{P}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} = \mathbf{0}.$$

Розглядаючи цей результат, робимо висновок, що для одержання рівнянь для визначення невідомих компонент вектора \mathbf{q} необхідно підставити у диференційні рівняння задачі функції апроксимації \mathbf{f} , після чого підставити координати точок колокації в одержане рівняння.

Результатом є система алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора \mathbf{q} .

Приклад 3.2 Визначення прогину балки з моментами на кінцях.



Задача є одновимірною (прогин w залежить тільки від однієї змінної x). Прийmemo апроксимуючу функцію у вигляді $w = qx(l - x)$ (граничні умови задовольняються). Точкою колокації візьmemo $x_K = \frac{l}{2}$.

Диференційне рівняння згину балки має вигляд $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}$, отже оператор $L = \frac{d^2}{dx^2}$, а $M(x) \equiv M$, EJ – жорсткість поперечного перерізу.

Підставивши ці вирази у диференційне рівняння згину, одержимо

$$\frac{d^2}{dx^2}(xl - x^2) \Big|_{x=x_K} \cdot q_k - \frac{M}{EJ} = 0,$$

звідки

$$q_k = -\frac{M}{2EJ},$$

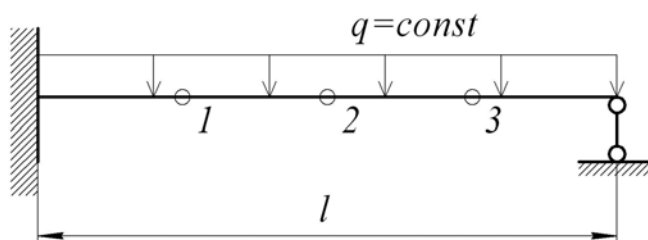
і крива прогину, згідно з прийнятим виразом для w , має вигляд

$$w(x) = -\frac{M}{2EJ}(l - x)x,$$

зокрема,

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Ml^2}{8EJ} \text{ (точне значення).}$$

Приклад 3.3 Визначення прогину для статично невизначуваної балки.



Рівняння згину балки $EJw^{IV}(x) = q = const$ при граничних умовах

$$x = 0, w = w' = 0,$$

$$x = l, w = w'' = 0.$$

У закріпленні прогин w і кут повороту (перша похідна прогину), а на кінці балки і згинаючий момент (момент є пропорційним другій похідній прогину) дорівнюють нулю.

Пружну лінію балки задаємо у вигляді ряду

$$w(x) = \sum_{K=0}^N a_K \left(\frac{x}{l}\right)^K.$$

Прийнята функція не задовольняє ні диференційне рівняння, ні граничні умови. Кількість членів ряду повинна дорівнювати або бути більшою кількості

граничних умов плюс прийнята кількість точок колокації. Якщо вибрати три точки, рівномірно розміщені на балці, у сумі $w(x)$ необхідно залишити сім перших доданків (чотири граничні умови і три точки колокації).

$$w(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_3 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_4 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + a_5 \left(\frac{x}{l}\right)^5 + a_6 \left(\frac{x}{l}\right)^6.$$

Вносячи $w(x)$ в граничні умови, одержимо

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0, \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 + 30a_6 = 0.$$

Підставляючи розв'язок $w(x)$ у рівняння рівноваги, і записуючи умови рівності нулю у точках колокації $x_1 = \frac{l}{4}$, $x_2 = \frac{l}{2}$, $x_3 = \frac{3l}{4}$, одержимо ще три рівняння

$$24a_4 + 30a_5 + 22.5a_6 = \frac{ql^4}{EJ}, \\ 24a_4 + 60a_5 + 90a_6 = \frac{ql^4}{EJ}, \\ 24a_4 + 90a_5 + 202.5a_6 = \frac{ql^4}{EJ}.$$

Розв'язуючи систему семи рівнянь відносно a_i , одержимо

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{ql^4}{16EJ}; \quad a_3 = -\frac{5ql^4}{48EJ}; \quad a_4 = \frac{ql^4}{24EJ}; \quad a_5 = 0; \quad a_6 = 0.$$

Остаточно одержаний вираз для прогину балки є точним.

$$w(x) = \frac{ql^4}{EJ} \left[\frac{1}{16} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{5}{48} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right].$$

3.2.4 Метод Бубнова – Галеркіна

Цей метод є частинним випадком МЗН коли вагові функції співпадають з функціями апроксимації.

Розв'язок розшукується у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q},$$

де функції N_i у матриці \mathbf{N} задовольняють граничним умовам. Визначальні рівняння записують у вигляді

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{p}) dV = 0, \quad (3.25)$$

де $\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\delta \mathbf{q}$ – варіації переміщень \mathbf{u} .

Підставляючи варіації $\delta \mathbf{u}$ у рівняння (3.25) і враховуючи довільність варіацій, визначальну систему рівнянь можна записати у вигляді

$$\int_V [\mathbf{N}]^T (\mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{q} - \mathbf{p}) dV = \mathbf{0}.$$

Якщо прийняті базові функції не задовольняють силові граничні умови, рівняння методу Бубнова-Галеркіна (у цьому випадку його називають узагальненим методом Бубнова-Галеркіна) записують у вигляді

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{p}_V) dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{p}_S) dS_1 = 0, \quad (3.27)$$

або

$$\int_V \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} - \mathbf{p}_V) dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T (\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} - \mathbf{p}_S) dS_1 = 0. \quad (3.28)$$

Рівняння для визначення елементів вектора \mathbf{q} одержимо при умові $\delta \mathbf{q}^T \neq 0$.

$$\int_V \mathbf{N}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} - \mathbf{p}_V) dV + \int_{S_1} \mathbf{N}^T (\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} - \mathbf{p}_S) dS_1 = 0, \quad (3.29)$$

або

де

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} dV, \quad \mathbf{K}_S = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q} dS_1, \quad \mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p}_V dV, \\ \mathbf{F}_{S_1} &= \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_S dS_1. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Приклад 3.4 Знайдемо прогин балки, шарнірно закріпленої на кінцях і завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням p . Жорсткість поперечного перерізу на згин EJ .

Цей приклад розглядався вище із застосуванням методу Рітца.

Диференційне рівняння згину балки:

$$EJw^{IV}(x) - p_S = 0$$

Граничні умови: $w(0) = 0$, $w''(0) = 0$, $w(l) = 0$, $w''(l) = 0$.

Розшукуємо прогин у вигляді ряду

$$w = \sum_{n=1}^N q_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Функції ряду задовольняють граничним умовам. Рівняння для знаходження коефіцієнтів ряду має вигляд

$$\int_0^l [EJw^{IV}(x) - p_S] \sin \frac{i\pi x}{l} dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Після інтегрування і визначення коефіцієнтів ряду вираз для прогину матиме вигляд

$$w(x) = \frac{4p_S l^4}{\pi^5 EJ} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Прогин посередині балки

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4p_S l^4}{\pi^5 EJ}.$$

Точна формула для прогину

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{p_S l^4}{EJ}.$$

Результат розрахунку співпадає з одержаним методом Рітца з використанням варіаційного рівняння Лагранжа.

Приклад 3.5 Знайдемо прогин шарнірно закріпленої по контуру пластини розмірами $a \times b$, завантаженої нормальними до поверхні силами $p = p(x, y)$.

Шарнірне закріплення дозволяє прийняти функцію прогину у вигляді добутку тригонометричних функцій

$$f_i = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3.$$

Диференціальне рівняння прогину пластини

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - p = 0.$$

Рівняння Бубнова – Галеркіна для однієї базисної функції

$$\int_0^b \int_0^a \left[-D \left(\frac{\pi^4 m^4}{a^4} + \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \right] dx dy q_{mn} - \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0.$$

Враховуючи значення інтегралів, одержимо

$$q_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^2 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2},$$

де

$$P_{mn} = p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Метод Бубнова-Галеркіна є одним з найбільш поширених методів, що використовуються у МДТТ. Різні варіанти методу застосовуються у численних задачах статички і динаміки конструкцій, гідромеханіки, теорії теплопровідності, акустики і т.п. Фактично, будь-яка задача, для якої можна записати визначальне рівняння, може бути розв'язана методом Бубнова-

Галеркіна. Разом з тим, необхідно вказати на дві **особливості** (можна сказати *недоліки*) методу. *По-перше*, одержання диференційного або інтегрального рівнянь, якими здебільшого описуються математичні моделі, зокрема у МДТТ, не є тривіальною проблемою. *По-друге*, пробні функції, які використовуються для апроксимації розв'язку, повинні мати похідні, порядок яких удвічі вищий ніж цього потребують варіаційні рівняння, що ускладнює як підбір функцій, так і визначення матриць жорсткості, мас і зовнішніх сил в алгебраїчних рівняннях дискретизованої моделі.

Як видно, апроксимація розв'язку пробними функціями, тобто вибір цих функцій є найбільш важким і відповідальним кроком на етапі дискретизації диференційних рівнянь, що описують стан конструкції. У зв'язку з цим, ще раз зупинимося на вимогах, яких необхідно дотримуватись при виборі функцій апроксимації.

По-перше, функції, які використовуються для апроксимації розв'язку, повинні задовольняти кінематичні граничні умови, тобто обмеження на переміщення точок конструкції. Крім того, вони повинні мати похідні відповідного порядку, бути лінійно незалежними і задовольняти умови повноти, тобто ряд не повинен мати пропущених членів³.

³ Останньої вимоги в окремих випадках можна не дотримуватися.

Лекція 4

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

4.1 Інтерполяція

У багатьох випадках виникає необхідність пошуку функції $f(x)$, яка задана дискретним рядом значень, тобто таблицею $f(x_i), (i=1,2,\dots,n)$. Сама функція невідома, що не дозволяє знайти її значення в інших точках (при інших значеннях аргумента x). Зрозуміло, що у зв'язку з обмеженою кількістю значень, точний вид функції знайти неможливо, тобто мова може йти тільки про пошук апроксимуючої функції, яка більш або менш точно співпадає з точною на заданому інтервалі заданих ординат. Побудову такої функції називають інтерполяцією. Необхідність інтерполяції виникає також у випадках, коли функція відома, але операції з нею потребують великого об'єму обчислень (наприклад, визначення інтеграла від такої функції). Заміна функції $f(x)$ наближеною $\varphi(x)$ дозволяє спростити обчислення.

Частіше усього для інтерполяції використовують алгебраїчні поліноми. Це пов'язано з тим, що основні математичні операції з поліномами простіше реалізувати ніж з іншими класами функцій. Алгебраїчна інтерполяція функції $f(x)$, яка задана своїми значеннями у точках інтерполяції, полягає у заміні (наближенні) цієї функції многочленом $P_n(x)$ степеня n , який співпадає зі значеннями функції $f(x)$ у цих точках, тобто $P_n(x_i) = f(x_i)$, при $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Можна показати, що такий многочлен n -го степеня існує і є єдиним [40]. Запишемо цей многочлен у вигляді

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Записуючи умови рівності значень цього многочлена у вузлах x_i заданим значенням функції $f(x_i) \equiv y_i$, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнта a_i .

$$a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0,$$

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1,$$

.....

$$a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n.$$

Ця система має єдиний розв'язок, якщо серед вузлів інтерполяції немає таких, що співпадають. Розв'язавши цю систему, знайдемо коефіцієнти полінома $\varphi(x)$. Поліном можна записати у декількох варіантах. Найбільш широко використовується поліном Лагранжа:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Можна пересвідчитись, що множники при y_i у цій формулі дорівнюють нулю в усіх вузлах інтерполяції окрім i -го, де вони дорівнюють одиниці. Із загального виразу полінома можна одержати вирази для лінійної ($n = 1$) і квадратичної ($n = 2$) інтерполяції.

Зазначимо, що поліном Лагранжа степеня більше двох використовується рідко у зв'язку з тим, що зі зростанням степеня погіршується апроксимація функції у проміжних точках. Широко використовуються також інтерполяційні поліноми Ерміта. Для їх побудови, окрім значень функції у вузлах інтерполяції, задають також значення перших похідних у цих точках. Степінь многочлена відповідно збільшується. Задача полягає у тому, щоб знайти многочлен $\varphi(x)$ степеня $2n+1$, значення якого і його першої похідної задовольняють умови

$$\varphi(x_i) = y_i, \varphi'(x_i) = y'_i, i = 0, 1, \dots, n.$$

У цьому випадку також існує єдиний розв'язок, якщо усі x_i різні.

Зокрема, для інтервалу, на кінцях якого задані значення функції y_0, y_1 та її похідних y'_0, y'_1 , інтерполяційний поліном Ерміта має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & y_0 \left(1 - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3} \right) + y'_0 \left(x - 2 \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} \right) + \\ & + y_1 \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3} \right) + y'_1 \left(-\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Труднощі інтерполяції глобально означеним поліномом на ділянці $[0, x_n]$ привели до появи методів інтерполяції кусково-означеними функціями, тобто функціями, які не дорівнюють нулю тільки на окремих відрізках $[x_{i-1}, x_i]$. Такі функції можна побудувати з використанням згаданих вище поліномів Лагранжа, Ерміта, а також за допомогою так званих сплайнів – многочленів, які є неперервними разом зі своїми $n-1$ похідними у вузлах інтерполяції. Найчастіше використовують кубічні сплайни:

$$\begin{aligned} S(x) = & a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + \\ & + d_i(x - x_{i-1})^3, x_{i-1} \leq x \leq x_i. \end{aligned}$$

Для побудови сплайнів, тобто визначення коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i на усіх n відрізках, необхідно записати $4n$ рівнянь. Ці рівняння визначаються з умов рівності значень функції та її перших $n-1$ похідних на кінцях відрізків.

Інтерполяція локально означеними функціями виявилась надзвичайно ефективним варіантом вибору пробних функцій як при використанні варіаційних методів, так і методів зважених нев'язок. Цей варіант одержав назву «метод скінченних елементів».

4.2 Локальні функції

Основна складність при застосуванні методу Рітца і методів зважених нев'язок пов'язана з вибором базисних функцій, які повинні задовольняти граничні умови і бути означеними в усій області, де розшукується розв'язок. У зв'язку зі складністю геометрії конструкції підбір таких функцій виявляється дуже складним.

Як наголошувалось вище, прогресивною виявилась ідея локалізації базисних функцій, тобто використання кусково-неперервних функцій, які описуються різними виразами на окремих ділянках області. Такий підхід характерний для *методу скінченних елементів (МСЕ)*, який з математичної точки зору є *методом Рітца (або варіантом методу зважених нев'язок) з кусково-неперервними базисними функціями*. У цьому випадку інтеграли у варіаційному рівнянні обчислюються як сума інтегралів на окремих підобластях.

Особливість методу скінченних елементів полягає в тому, що підобласті мають порівняно просту форму, і базисні функції для них однотипні. Таким чином, постає питання, чи не можна обійтись локально означеними функціями, які б забезпечували відповідний зв'язок між собою і задовольняли б граничні умови?

(Локально означена – функція, яка не дорівнює нулю тільки в невеликій області з усього об'єму тіла. Стосовно стержня – це функція, яка не дорівнює нулю тільки на окремій ділянці. Глобально означена має ненульові значення по всьому об'єму, або на усій довжині, хоча при цьому не виключаються нульові ординати у окремих точках).

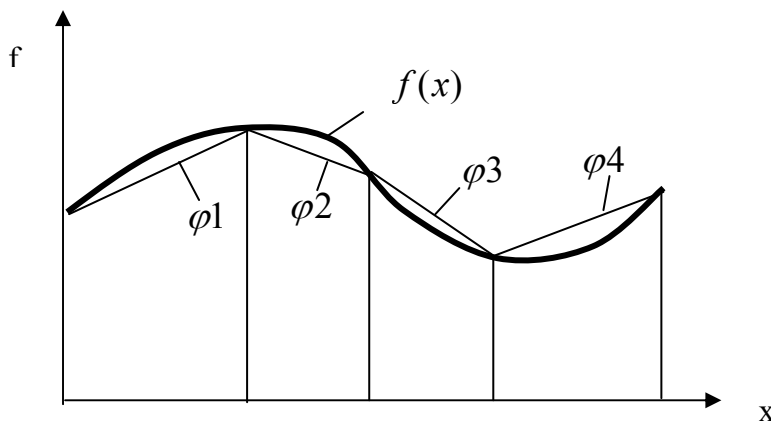


Рис. 4.1 – Глобальна $f(x)$ і локальні $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ функції

З математичної точки зору на вибір локальних функцій, які апроксимують (тобто наближено описують) розподілення розшукуваної величини по об'єму, накладається ряд умов, серед яких, мабуть, головною є *умова повноти*, тобто забезпечення неперервності функцій і відповідної кількості їх похідних на границях з'єднання з сусідніми локальними функціями. Важливою є також

поведінка цих локальних функцій при зменшенні області, на якій вони означені. Необхідно, щоб при цьому не виникало порушення неперервності початково встановлених похідних.

Умова повноти забезпечує мінімум похибки при зменшенні до нуля розмірів області. Це досягається використанням поліноміальних функцій, у яких повинні бути представлені доданки усіх степенів від нульового до прийнятого найвищого.

Крім цього, функції апроксимації повинні допускати переміщення області як твердого тіла, а також сталі компоненти тензора деформацій.

Для забезпечення збіжності розв'язку до точного при зменшенні ділянок необхідно, щоб функції апроксимації були **нерозривні і мали похідні** до порядку $p - 1$ включно (p – найбільший порядок похідної у варіаційному рівнянні задачі). Похідні p -го порядку можуть мати розриви першого роду.

Розглянемо задачу побудови інтерполяційного полінома для стержня, який розтягується силою F (рис. 4.2).

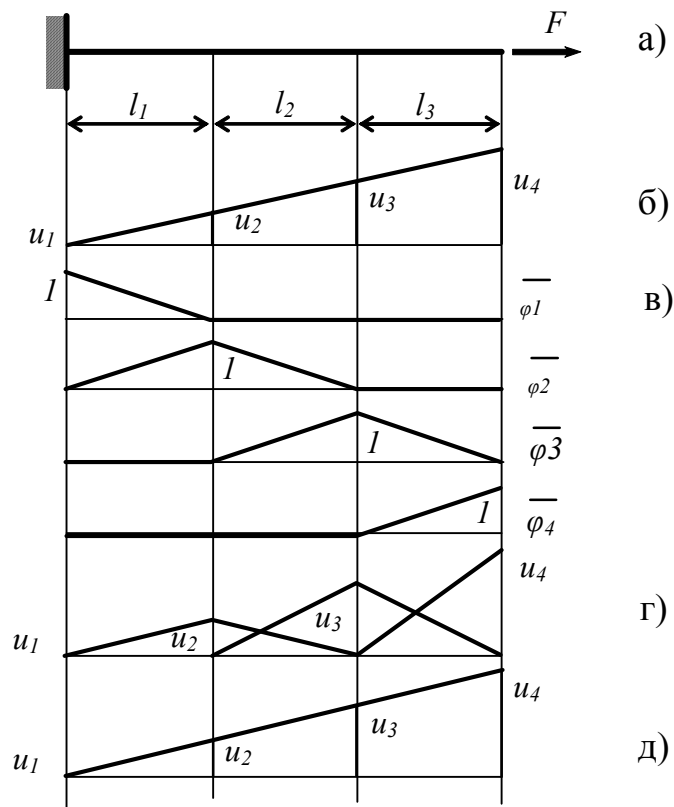


Рис. 4.2

Варіаційне рівняння розтягу-стиску можна одержати з варіаційного рівняння Лагранжа, підставляючи відповідні залежності для деформацій і напружень.

$$-\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV + \int_0^L \delta u^T p dx = 0,$$

p – навантаження, розподілене по довжині стержня. (У даному випадку $p = R\delta x - F\delta(x-l)$, де $\delta(x)$ – функція Дірака, а $a = L/4$. Деформація $\varepsilon = du/dx$, напруження $\sigma = E du/dx$ (E – модуль пружності матеріалу).

Після підстановки і інтегрування по площі поперечного перерізу A , одержимо

$$-EA \int_0^L \delta \left(\frac{du}{dx} \right)^T \frac{du}{dx} dx + \int_0^L \delta u^T p dx = 0.$$

Як видно, найвищий порядок похідної функції переміщень $p = 1$. Це означає, що мінімальний степінь апроксимуючого полінома на k -тій ділянці може бути перший.

$$p^{(x)} = \alpha_0 + \alpha_1 x.$$

Умова повноти виконується, оскільки це є повний поліном. Переміщення кожної ділянки як цілого забезпечується першим доданком. Таким чином, функція апроксимації задовольняє встановлені вище вимоги.

Невідомі коефіцієнти визначають прирівнюючи значення полінома і функції $u(x)$ на границя ділянок. Для k -тої ділянки, зокрема:

$$p^k(x_{k-1}) = u(x_{k-1}),$$

$$p^k(x_k) = u(x_k),$$

Підставляючи поліном у ці умови, одержимо

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_{k-1} = u(x_{k-1}),$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_k = u(x_k),$$

звідки

$$\alpha_0 = \frac{u(x_{k-1})x_k - u(x_k)x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad \alpha_1 = \frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Після компоновки доданків, поліном матиме вигляд

$$p^k(x) = u(x_{k-1}) \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} + u(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Як видно, це є поліном Лагранжа першого степеня.

Функцію апроксимації для стержня у цілому (при наявності трьох ділянок однакової довжини) можна записати у вигляді суми

$$u(x) = \sum_{k=1}^3 p^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^4 \bar{\varphi}_i(x_i) u_i(x),$$

$$\text{де } \bar{\varphi}_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ 0 & (x_2 \leq x \leq x_n) \end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_i(x) = \begin{cases} 0 & (x_1 \leq x \leq x_i) \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x_{i-1} \leq x \leq x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \\ 0 & (x_{i+1} \leq x \leq x_n) \end{cases} \quad (i = 2, 3)$$

$$\bar{\varphi}_4 = \begin{cases} 0 & (x_1 \leq x \leq x_3) \\ \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} & (x_3 \leq x \leq x_4). \end{cases}$$

Функції $\bar{\varphi}_i(x_i)$ мають вид трикутників з одиничними ординатами (рис. 4.2, в).

Як видно, координатні функції $\bar{\varphi}_i(x_i)$ є локальними, відмінними від нуля тільки по обидві сторони відповідної граничної (вузлової) точки, а у вузлах вони дорівнюють одиниці. Збільшуючи кожен з ординат у $u_i(x)$ разів, одержимо дійсні переміщення (рис. 4.2, г, д).

Якщо далі підставити пробну функцію у варіаційне рівняння Лагранжа, і обчислити інтеграли з урахуванням локальності функцій $\bar{\varphi}_i(x_i)$, одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення вузлових переміщень u_i .

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F},$$

де \mathbf{K} – матриця жорсткості, \mathbf{q} – вектор вузлових переміщень, \mathbf{F} – вектор вузлових сил.

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix}.$$

Подальший аналіз пов'язаний з розв'язанням цієї системи рівнянь, з урахуванням умов закріплення стержня. До цього етапу повернемося пізніше, а зараз розглянемо дещо іншу методику складання рівнянь рівноваги, яка базується *на визначенні матриць жорсткості для окремих ділянок* з подальшим їх з'єднанням у повну матрицю конструкції.

Покажемо, що матрицю жорсткості можна синтезувати з матриць жорсткості окремих ділянок, які назвемо *скінченними елементами*. Матриці жорсткості для кожної ділянки можна одержати незалежно *у локальних осях*, пов'язаних із цією ділянкою. Переміщення точок j -ї ділянки – скінченного елемента запишемо у вигляді

$$\mathbf{u} = [N_1 N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

де N_1, N_2 – локальні функції інтерполяції для i -тої ділянки (рис. 4.3):

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l_i}, \quad N_2(x) = \frac{x}{l_i}, \quad (4.4)$$

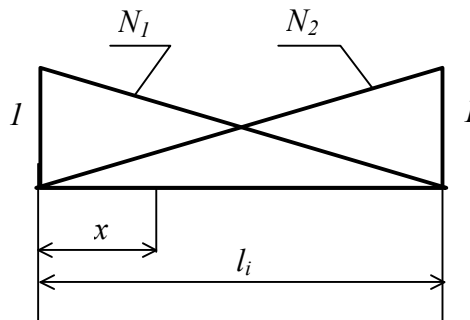


Рис. 4.3 – Локальні функції для i -тої ділянки

Після виконання операцій, аналогічних наведеним вище для стержня, одержимо матрицю жорсткості одного скінченного елемента.

$$\mathbf{K}_i = \frac{EA_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

($\frac{EA_i}{l_i}$ – жорсткість ділянки стержня).

Продовжимо розв'язок, використовуючи матрицю жорсткості (4.5) для кожної ділянки стержня. Наступним етапом має бути одержання матриці жорсткості стержня. Матриці кожного скінченного елемента необхідно поєднати, щоб одержати матрицю для стержня. Для цього розглянемо скінченно-елементну модель стержня і окремий скінченний елемент і прирівняємо відповідні переміщення у точках з'єднання (вузлових точках) (рис. 4.4).

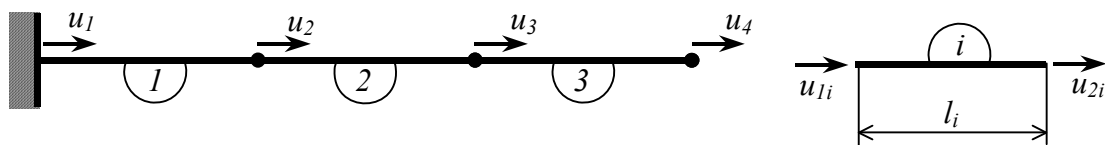


Рис. 4.4 – Скінченно-елементна модель стержня і окремий скінченний елемент

Це можна виконати за допомогою таблиці, яку називають матрицею індексів.

Таблиця 4.1. Матриця індексів

№ елемента	Переміщення елемента	
	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

У відповідності з цією таблицею індекси елементів матриці жорсткості необхідно змінити на глобальні. Наприклад, для першого елемента

$$K_{11}^{(1)} = K_{11}, \quad K_{12}^{(1)} = K_{12}, \quad K_{22}^{(1)} = K_{22}, \quad K_{21}^{(1)} = K_{21}.$$

Для другого елемента

$$K_{11}^{(2)} = K_{22}, \quad K_{12}^{(2)} = K_{23}, \quad K_{22}^{(2)} = K_{33}, \quad K_{21}^{(2)} = K_{32}.$$

Для третього елемента

$$K_{11}^{(3)} = K_{33}, \quad K_{12}^{(3)} = K_{34}, \quad K_{22}^{(3)} = K_{44}, \quad K_{21}^{(3)} = K_{43}.$$

Складаючи компоненти з однаковими індексами, одержимо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Після обчислення інтегралів матриця \mathbf{K} матиме такий вигляд:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

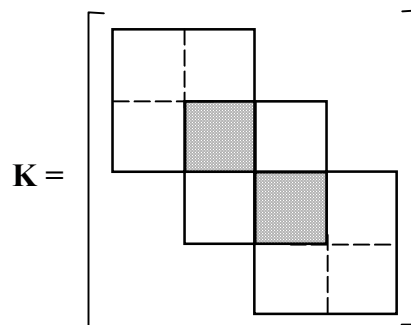


Рис. 4.5 – Структура матриці жорсткості системи

Для того, щоб врахувати закріплення, треба реалізувати умову $u_1 = 0$. Це можна було зробити, викресливши у матриці жорсткості стержня (4.5) перші рядок і стовпець. Відповідно видалимо перші елементи матриць переміщень і зовнішніх навантажень. Зазначимо, що після такої операції необхідно виконати перенумерацію невідомих (у даному випадку друге переміщення стане першим і т.д.). У системі MathCAD така перенумерація проводиться автоматично. Рівняння для визначення невідомих переміщень з урахуванням значень коефіцієнтів матриць жорсткості елементів (усі елементи прийняті однаковими) матиме вигляд

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (4.8)$$

де

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

Розв'язок рівняння (4.8) буде точним, оскільки степінь апроксимуючих поліномів відповідає дійсному

$$q_1 = 0, \quad q_4 = \frac{Fl}{EA}, \quad q_3 = \frac{2}{3}q_4, \quad q_2 = \frac{1}{3}q_4. \quad (4.10)$$

Сили у вузлах можна знайти, помноживши матрицю (4.7) на вектор знайдених переміщень

$$\mathbf{R} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Таким чином, ми одержали розв'язок задачі розтягу стержня силою за допомогою методу скінченних елементів. Цей варіант МСЕ називають методом скінченних елементів у переміщеннях, у зв'язку з тим, що невідомими тут є переміщення. Далі буде розглядатися саме цей варіант МСЕ, як найбільш поширений у практиці розрахунків. Саме у можливості побудови повної матриці жорсткості конструкції з матриць жорсткості елементів, одержаних незалежно від конструкції в цілому, і полягає основна особливість методу скінченних елементів. Згідно з МСЕ, спочатку розглядають кожний елемент, і будують його матрицю жорсткості, після чого елементи об'єднують з урахуванням умов нерозривності і граничних умов. У більшості випадків використовують елементи однакової форми, що дозволяє будувати матрицю жорсткості тільки один раз.

4.3 Алгоритм методу скінченних елементів

Узагальнюючи розглянуту методику, можна сформулювати таку послідовність використання МСЕ (алгоритм):

- 1) дискретизація конструкції, тобто подання її як сукупності скінченних елементів;
- 2) побудова матриць жорсткості елементів;
- 3) побудова загальної матриці жорсткості та вектора навантажень для усієї області;
- 4) накладення граничних умов і редукція (тобто відповідне зменшення розмірів) матриць жорсткості, векторів невідомих і навантаження;
- 5) розв'язок системи рівнянь відносно вузлових переміщень;
- 6) визначення інших необхідних величин, які залежать від вузлових невідомих.

Розглянемо ці етапи спочатку в загальних рисах. Конкретні реалізації подані в наступних лекціях.

4.3.1 Дискретизація конструкції

Розділення конструкції на окремі скінченні елементи є дуже відповідальним етапом розрахунку. Від правильного розділення залежить як точність розрахунку, так і його трудомісткість. Оскільки ця операція не має теоретичного обґрунтування, ефективність її повністю залежить від інженерних навичок того, хто нею займається. Використання малих елементів хоча й підвищує точність розрахунку, але збільшує кількість невідомих і порядок рівнянь для їх визначення. У зв'язку з цим, необхідно вибирати розміри елементів у відповідності з градієнтами тих величин, які визначаються. У місцях, де розшукувана величина змінюється швидко, розміри елементів зменшують.

У МСЕ використовуються елементи різних форм і розмірів. Вибір елемента залежить від характеру задачі, від точності розв'язку, яку треба забезпечити.

При заміні конструкції сукупністю дискретних елементів важливо забезпечити якомога більшу відповідність між моделлю і конструкцією.

Найпростішими є одновимірні (стержневі) елементи (рис. 4.6). Площа поперечного перерізу елемента може бути сталою по довжині. Найчастіше такий елемент зустрічається у розрахунках стержневих конструкцій. Елемент може мати два і більше вузлів.

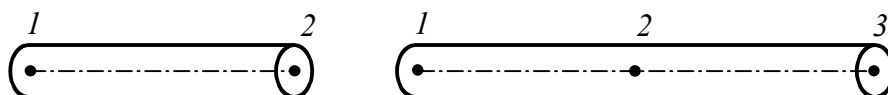


Рис. 4.6 – Одновимірні скінченні елементи

Для побудови дискретної моделі двовимірної області використовуються двовимірні скінченні елементи (рис. 4.7). Найчастіше використовуються трикутники і чотирикутники з різною кількістю вузлів.

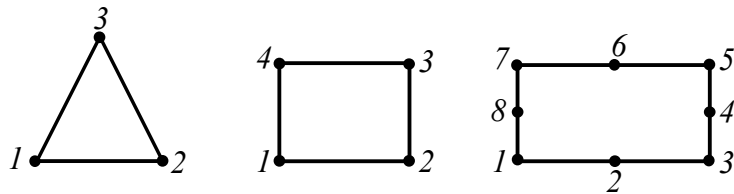


Рис. 4.7 – Двовимірні скінченні елементи

Тривимірні тіла моделюють такими елементами, як тетраедр і паралелепіпед (рис. 4.8).

Для дискретизації осесиметричних тіл широко використовують осесиметричні скінченні елементи, створені обертанням плоскої фігури відносно осі.

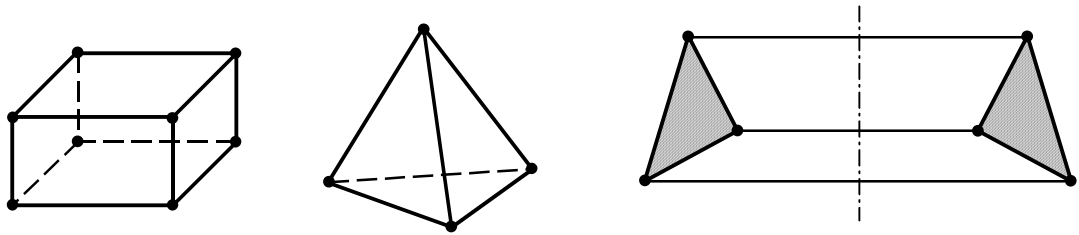


Рис. 4.8 – Об'ємні скінченні елементи

Процес дискретизації може бути розділений на два етапи: розділення тіла на елементи і нумерація елементів і вузлів. Найбільш простим є розділення стержневих конструкцій на одновимірні елементи. Наприклад, конструкцію ферми (рис. 6.9) можна розділити на скінченні елементи – стержні ферми з вузлами у вузлах ферми.

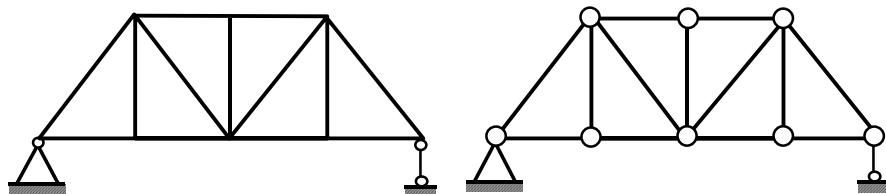


Рис. 4.9 – Скінченно-елементна модель ферми

Для двовимірних конструкцій найбільш раціональним є розділення на трикутні й прямокутні елементи.

Загальні рекомендації щодо етапу дискретизації зводяться до таких:

1) розміри елементів повинні забезпечувати необхідну точність описання переміщень і напружень, для чого вони повинні змінюватись у відповідності з величиною градієнтів переміщень і напружень;

2) тип елементів, що використовується, повинен забезпечити адекватність роботи конструкції та її скінченно-елементної моделі, а також достатню точність апроксимації форми й умов закріплення конструкції;

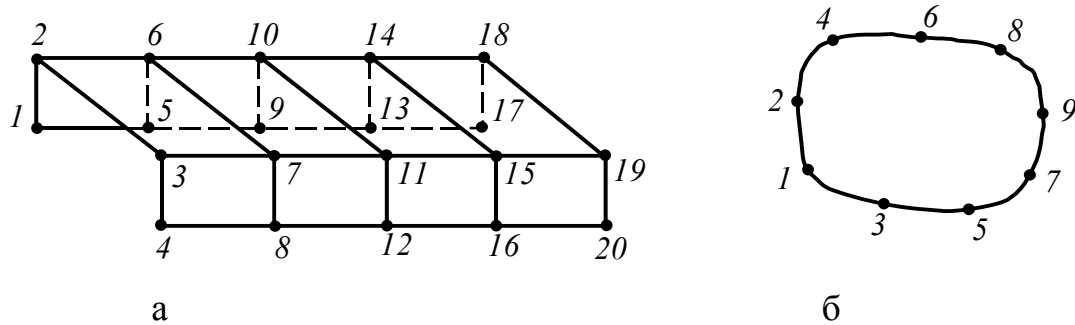


Рис. 4.10 – Послідовність нумерації вузлів

3) нумерація повинна забезпечувати мінімальну частину стрічки глобальної матриці жорсткості. Чим менше ширина стрічки, тим зручніше для розв'язку одержана система рівнянь МСЕ. Для цього нумерація повинна проводитись уздовж поперечного перерізу конструкції (рис. 4.10, а). Для замкнутих контурів нумерація проводиться симетрично відносно початкового вузла (рис. 4.10, б).

В усіх випадках необхідно намагатись зменшити різницю між номерами сусідніх вузлів.

В існуючих програмних комплексах, які використовують МСЕ, операція розділення на елементи, як правило, автоматизована. Для цього використовуються різні методи побудови сітки на поверхні або в об'ємі конструкції. Огляд цих методів можна знайти у [15]. Детальніше методика дискретизації розглядається у лекції 7.

4.3.2 Побудова матриць жорсткості елементів

У більшості випадків при розрахунках конкретних конструкцій користуються готовими матрицями жорсткості, які наводяться у довідниках [31, 36] або у бібліотеках відповідних програмних комплексів. Однак, іноді необхідно самостійно обчислювати матриці жорсткості, зокрема у випадках, коли компоненти матриць визначаються чисельним способом.

Для побудови матриць жорсткості елементів використовують варіаційне рівняння Лагранжа або рівняння методу зважених нев'язок, записаних для одного елемента. Основним етапом тут є вибір функцій апроксимації, що описують дійсне поле переміщень в елементі. Ці функції повинні, як і координатні функції у методі Рітца, задовольняти умови допустимості і повноти для даної задачі. Допустимість передбачає неперервність функцій та їх похідних до $p-1$ порядку (p – порядок найвищої похідної у варіаційному рівнянні) і коректність визначення параметрів в умовах варіаційного формулювання. Для виконання умов повноти функції апроксимації повинні задовольняти умову незмінності похідних, згідно з якою похідні у варіаційному рівнянні повинні ставати незмінними зі зменшенням розмірів елемента. Похідні

p -го порядку можуть мати розриви першого роду, але при зменшенні розмірів елемента повинні залишатись сталими.

Якщо виконуються умови допустимості й повноти, розв'язок за методом скінченних елементів буде наближатись до точного при зменшенні розмірів елемента.

4.3.3 Синтез скінченно-елементної моделі конструкції

Синтезом називають процес складання елементів у зв'язану скінченно-елементну модель конструкції. Оскільки сили, що діють у вузлах, є коефіцієнтами матриці жорсткості елементів, а у вузлі сходиться декілька елементів, синтез зводиться до складання по кожному з напрямків вузлових переміщень відповідних коефіцієнтів матриць жорсткості декількох елементів і розміщення цієї суми у відповідній клітинці глобальної матриці жорсткості. Формально операцію синтезу можна провести за допомогою розглянутої вище матриці індексів. Розглянемо цю процедуру докладніше.

Під набором індексів для кожного елемента розуміють номери локальних узагальнених переміщень, які ті приймають при глобальній нумерації переміщень для конструкції у цілому.

Глобальна нумерація визначається при дискретизації системи на скінченні елементи. Локальна нумерація пов'язана з вибором функцій апроксимації і є однаковою для однотипних елементів.

Для побудови матриці індексів спочатку складається топологічна матриця, яка встановлює відповідність між локальною нумерацією вузлів кожного елемента і глобальною (рис. 4.11)

$$\mathbf{Top} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 & 10 & 11 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 12 & 13 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

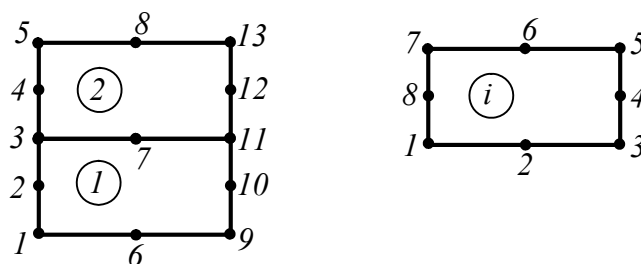


Рис. 4.11 – Глобальна і локальна нумерації вузлів

Оскільки для збирання глобальної матриці необхідні номери узагальнених координат, а не вузлів, необхідно домовитись про відповідність нумерації вузлів і узагальнених переміщень. При невеликій кількості вузлів можна записати матрицю індексів, яка задає відповідність між номерами глобальних і локальних узагальнених координат елемента, безпосередньо (рис. 4.12, таблиця 4.2).

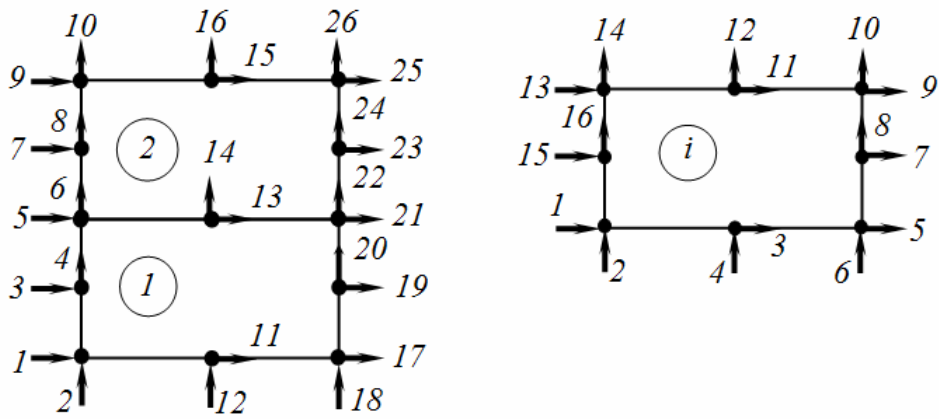


Рис. 4.12 – Глобальна і локальна нумерації вузлових переміщень

Таблиця 4.2 – Матриця індексів до рис. 4.12

№ елемента	Індекси вузлових переміщень															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	11	12	17	18	19	20	21	22	13	14	5	6	3	4
2	5	6	13	14	21	22	23	24	25	26	15	16	9	10	7	8

Після того, як повністю описана геометрія конструкції, необхідно задати граничні умови. Для МСЕ у формі методу переміщень, який розглядається у даному курсі лекцій, найпростіше задати граничні умови відносно переміщень, і це вигідно відрізняє цей варіант МСЕ від інших. При формулюванні граничних умов у переміщеннях найчастіше зустрічаються випадки жорсткого закріплення у відповідних напрямках. Врахування нульового значення проводиться заміною нулем відповідного переміщення у матриці індексів і перенумерацією всіх залишених ненульових глобальних переміщень. Це рівнозначно викреслюванню з глобальної матриці жорсткості стовпця і рядка з номером координати, яка прирівнюється до нуля, що приводить до зменшення розміру глобальної матриці жорсткості. Оскільки цей спосіб приводить до незручностей, пов'язаних з необхідністю перенумерації переміщень, раціональнішим виявляється інший. На перетині головної діагоналі і рядка або стовпця з номером заданої координати ставиться одиниця, а у векторі навантажень системи рівнянь у відповідному рядку записується нуль або задане ненульове переміщення, інші коефіцієнти у відповідних рядку і стовпці прирівнюються до нуля.

Недолік цього варіанту полягає в тому, що одержана після такої операції матриця жорсткості стає несиметричною. Симетрію можна зберегти,

використавши спосіб Пейна-Айронса [25]: якщо задається умова $q_i = \bar{q}_i$, то діагональний елемент у i -му рядку матриці множиться на дуже велике число, а i -й елемент у векторі навантажень замінюється добутком того ж самого числа, значень \bar{q}_i і діагонального елемента.

4.3.4 Розв'язок систем рівнянь МСЕ

Оскільки розв'язок системи рівнянь МСЕ займає основну частину часу розрахунку задачі, вибір методу розв'язання є дуже важливим кроком. Проблемі розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь присвячена величезна кількість робіт, існує багато готових програм. При виборі методу необхідно враховувати особливості МСЕ. Матриці жорсткості у МСЕ є рідко заповненими, що дозволяє при раціональній нумерації привести всі ненульові коефіцієнти ближче до головної діагоналі (стрічкова структура матриці). Існують програми, які враховують стрічкову структуру і суттєво зменшують час розв'язання системи рівнянь з такою матрицею [5].

Способи розв'язку систем лінійних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні. Найбільш поширені прямі методи, серед яких найчастіше використовуються варіанти методу Гауса. Характерним представником ітераційних методів є метод Гауса-Зайделя (метод послідовної релаксації) [37, 38].

Розв'язок задач динаміки залежить від виду правої частини диференційного рівняння коливань. При нульовій частині розв'язок зводиться до визначення власних частот і форм коливань і називається задачею на власні значення матриці динамічної жорсткості. При ненульовій правій частині приходимо до задач вимушених коливань. Докладно методи розв'язання задач статички і динаміки розглядаються у Додатках А2, А3 у [5], (див. також [11, 35]).

4.3.5 Обробка результатів

У МСЕ у варіанті методу переміщень безпосередньо одержують переміщення вузлів. Маючи переміщення, можна одержати всі інші параметри розв'язку, зокрема сили у вузлах, напруження в точках об'єму.

Для визначення вузлових сил необхідно розв'язати рівняння рівноваги типу (4.5), записане для кожного скінченного елемента, відносно правої частини.

При визначенні напружень використовують формули зв'язку між напруженнями, деформаціями і переміщеннями.

Зазначимо, що оскільки деформації й напруження визначають за відомими переміщеннями з використанням операції диференціювання (згадайте формули Коші), точність їх визначення порівняно з переміщеннями погіршується. Рекомендується визначати напруження у вузлових точках як середнє від значень для кожного елемента.

Для ізопараметричних елементів (Лекція 9) найменша похибка у визначенні переміщень буде в точках інтегрування, яке у цьому випадку здійснюється чисельним способом.

Розглянута послідовність реалізації алгоритму методу скінченних елементів демонструється на рис. 4.13 на прикладі розрахунку об'єму, завантаженого силою у площині симетрії (рис. 4.13-1). Симетричність об'єму дозволяє розглянути одну його половину (рис. 4.13-2). Дискретну модель об'єму після побудови сітки скінченних елементів показано на рис. 4.13-3. Після побудови скінченно-елементної моделі встановлюються закріплення (рис. 4.13-4). У площині симетрії необхідно забезпечити умови з'єднання з другою симетричною половиною. На наступному етапі (рис. 4.13-5) будуються (або вибираються з довідника) матриці жорсткості елементів, формується глобальна матриця для об'єму і знаходиться розв'язок одержаної системи алгебраїчних рівнянь відносно переміщень. Для одержання інших параметрів, зокрема напружень, використовуються відповідні залежності, у даному випадку – закон Гука. Останній етап – вивід результатів (рис. 4.13-6) реалізується, як правило, за допомогою відповідного графічного редактора, а також у вигляді табличних даних. Необхідно наголосити, що наведений варіант методу скінченних елементів не єдиний, хоча і найбільш поширений. Існують варіанти МСЕ, де невідомими є сили у вузлах, або частково сили і переміщення. Однак більшість програмних комплексів, які реалізують МСЕ, використовують саме варіант МСЕ у переміщеннях.

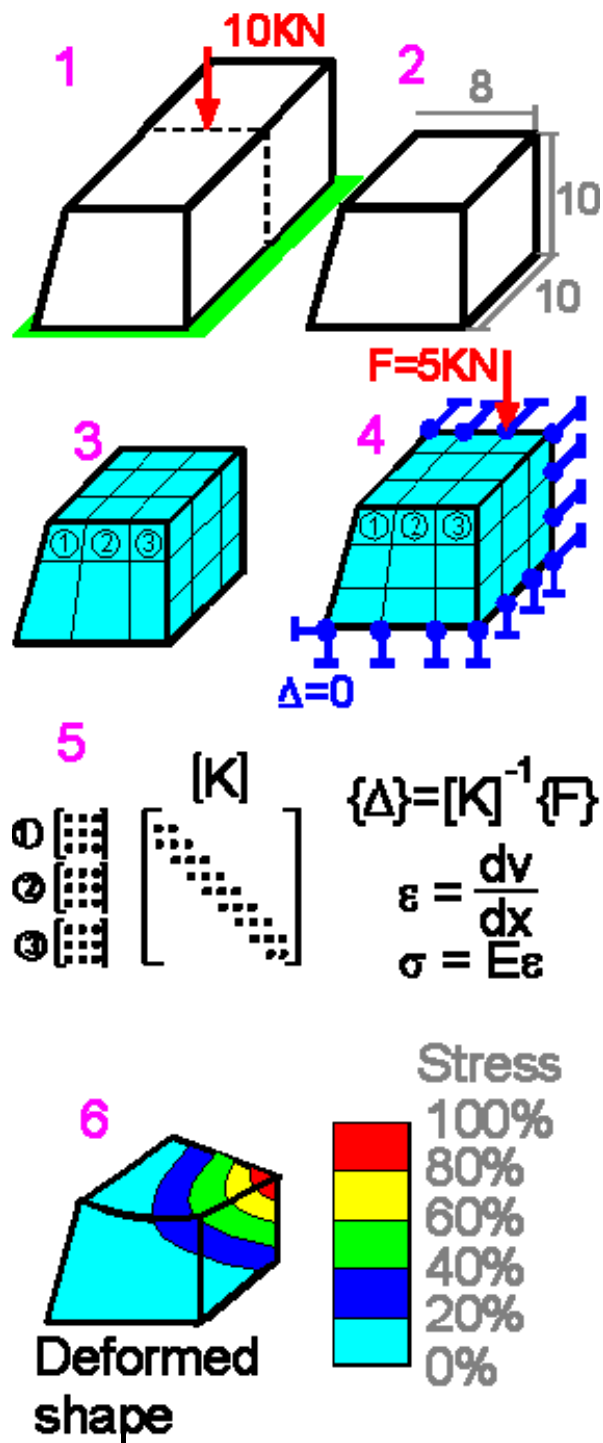


Рис. 4.13

Лекція 5

ВИКОРИСТАННЯ МСЕ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНІВ І БАЛОК

Прийmemo таку послiдовнiсть розгляду: спочатку одержимо матрицi жорсткостi для характерних стержневих елементiв, пiсля чого обговоримо методику складання (синтезу) конструкцiй з елементiв i реалiзацiю одержаних рiвнянь для визначення необхідних параметрiв. На закінчення розглянемо декiлька прикладiв розрахунку стержнiв i стержневих конструкцiй.

5.1 Побудова матриць жорсткостi i зовнiшнiх сил для стержневих елементiв

5.1.1 Елементи, якi працюють на розтяг-стиск

Розглянемо елемент стержня, завантажений поздовжнiми силами, розподiленими по довжинi за довiльним законом $p(x)$. Площу поперечного перерiзу A вважатимемо сталою. Побудуємо iнтерполяцiйний полiном для цього елемента. Найвищий степiнь полiнома визначається як $n = 2m - 1$, де $2m$ – степiнь диференцiального рiвняння, яке описує дану задачу, або число ступенiв вiльностi елемента. Для розтягу-стиску диференцiйне рiвняння має вигляд

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = p(x), \quad (5.1)$$

тобто $2m = 2$, i тому степiнь полiнома $m = 1$, тобто вiн буде таким:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (5.2)$$

Умова повноти передбачає наявнiсть усiх степенiв змiнної x i в даному випадку виконується. Невiдомi коефiцiєнти α_1, α_2 визначаються з умов на торцях елемента (рис. 5.1)

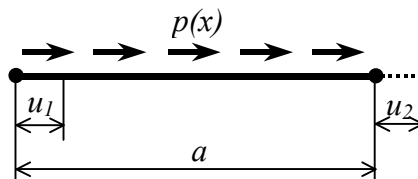


Рис. 5.1 – Двовузловий стержневий елемент

$$u(0) = u_1, \quad u(a) = u_2, \quad \text{або} \quad \begin{cases} \alpha_1 = u_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 a = u_2. \end{cases}$$

З цієї системи рiвнянь маємо

$$\alpha_1 = u_1, \quad \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{a}.$$

Підставляючи це у вираз для u , одержимо

$$u = u_1 \frac{a-x}{a} + u_2 \frac{x}{a}. \quad (5.3)$$

Цей вираз можна розглядати як суму Рітца, де u_1, u_2 – невідомі коефіцієнти, а

$$N_1 = 1 - \frac{x}{a}, \quad N_2 = \frac{x}{a} \quad (5.4)$$

координатні функції, або функції форми.

Можна відмітити характерні для локальних координатних функцій особливості:

1) кожна координатна функція є поліном того ж степеня, який прийнятий для апроксимації переміщень у скінченному елементі;

2) координатні функції приймають значення $N_i = 1$ у відповідних вузлових точках, в інших вузлах – $N_i = 0$.

Запишемо інтеграли роботи зовнішніх сил і потенціальної енергії деформації

$$U = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad W = \int_0^a \delta \mathbf{u}^T p dx \quad (5.5)$$

і підставимо сюди вираз для переміщень, використавши формули для напружень і деформацій при розтягу-стиску стержнів

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \sigma = E \frac{du}{dx}, \quad (5.6)$$

$$U = \int_V E \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) dV = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},$$

$$W = \int_0^a \delta \mathbf{u}^T p dx = \mathbf{q}^T \mathbf{F}, \quad (5.7)$$

де \mathbf{q} – вектор вузлових переміщень

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad u_2]^T,$$

\mathbf{K} – матриця жорсткості елемента

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

\mathbf{F} – матриця зовнішніх сил, вигляд якої залежить від навантаження $p(x)$. Для трьох частинних випадків навантаження (рис. 5.2) відповідно матимемо

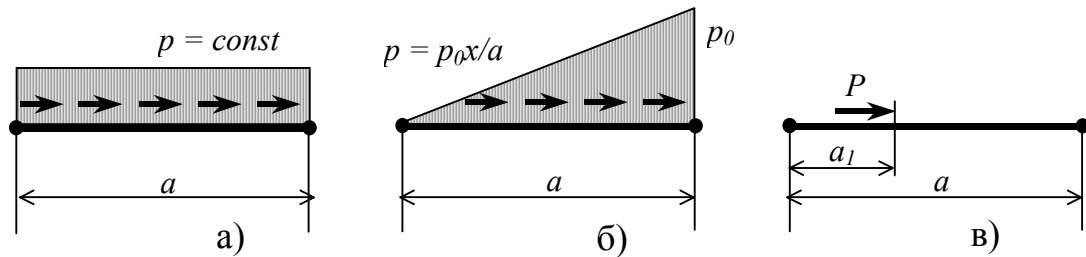


Рис. 5.2 – Схеми навантажень

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \mathbf{F} &= \frac{pa}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} &
 \text{б) } \mathbf{F} &= pa \begin{Bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} &
 \text{в) } \mathbf{F} &= p \begin{Bmatrix} \frac{a - a_1}{a} \\ \frac{a_1}{a} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Якщо підставити варіації потенціальної енергії роботи зовнішніх сил у рівняння Лагранжа

$$-\delta U + W = 0,$$

одержимо знайоме матричне рівняння

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F},$$

яке можна розглядати як залежність між силами, діючими у вузлах елемента, і переміщеннями цих вузлів.

Таким чином, для одержання матриць жорсткості і зовнішніх сил необхідно записати інтеграли потенціальної енергії і роботи зовнішніх сил, підставити вирази для переміщень і одержати такі форми:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad W = \mathbf{q}^T \mathbf{F}. \quad (5.10)$$

Коефіцієнти при координатах \mathbf{q} , а саме \mathbf{K} і \mathbf{F} , і є відповідно матрицями жорсткості і зовнішніх сил.

Зазначимо, що прийнята апроксимація з двома вузловими переміщеннями і перший порядок інтерполяційного полінома є мінімально необхідними, і порядок поліномів може бути прийнятий вищим. У цьому випадку скінченні елементи будуть мати більше, ніж два вузли.

Визначимо матриці жорсткості і зовнішніх сил для елемента з трьома вузлами (Рис. 5.3).

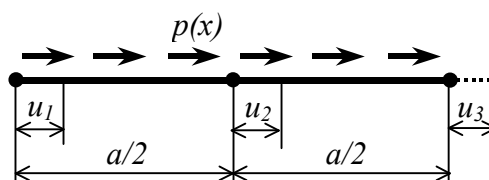


Рис. 5.3 – Стержневий елемент з трьома вузлами

Функцію переміщень запишемо у вигляді квадратичного полінома

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2. \quad (5.11)$$

Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ визначаються із таких умов:

$$x = 0, u = u_1; \quad x = \frac{a}{2}, u = u_2; \quad x = a, u = u_3. \quad (5.12)$$

Після підстановки (5.11) в умови (5.12), одержимо

$$u = u_1 \left(1 - 3 \frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2} \right) + u_2 \left(4 \frac{x}{a} - 4 \frac{x^2}{a^2} \right) + u_3 \left(-\frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2} \right), \quad (5.13)$$

тобто функції форми мають такий вигляд:

$$N_1 = 1 - 3 \frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2}, \quad N_2 = 4 \frac{x}{a} - 4 \frac{x^2}{a^2}, \quad N_3 = \left(-\frac{x}{a} + 2 \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (5.14)$$

Згідно з (5.5), (5.7), матриця жорсткості елемента буде такою:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

а матриця зовнішніх сил при рівномірно розподіленому навантаженні –

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} pa \\ \frac{2}{3} pa \\ \frac{1}{6} pa \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Для елемента з чотирма ступенями вільності (Рис. 5.4) з апроксимаційним поліномом

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

приходимо до такого виразу для переміщення:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4, \quad (5.17)$$

де

$$N_1 = 1 - \frac{11x}{2a} + 9 \frac{x^2}{a^2} - \frac{9x^3}{2a^3}, \quad N_2 = 9 \frac{x}{a} - \frac{45x^2}{2a^2} + \frac{27x^3}{2a^3},$$

$$N_3 = -\frac{9x}{2a} + 18 \frac{x^2}{a^2} - \frac{27x^3}{2a^3}, \quad N_4 = \frac{x}{a} - \frac{9x^2}{2a^2} + \frac{9x^3}{2a^3}.$$

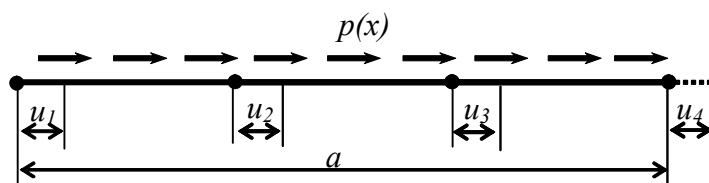


Рис. 5.4 – Стержневий елемент з чотирма вузлами

Матриця жорсткості в цьому випадку матиме вигляд

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{37}{40} & -\frac{189}{40} & \frac{27}{40} & -\frac{13}{40} \\ \frac{10}{189} & \frac{40}{54} & \frac{20}{297} & \frac{40}{27} \\ -\frac{40}{27} & \frac{5}{297} & \frac{40}{54} & \frac{20}{189} \\ \frac{20}{40} & \frac{40}{20} & \frac{5}{40} & \frac{40}{10} \\ -\frac{13}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{189}{40} & \frac{37}{10} \\ -\frac{40}{40} & \frac{20}{20} & \frac{40}{40} & \frac{10}{10} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Матриця сил при сталому навантаженні $p(x) = const$

$$\mathbf{F} = \left[\frac{1}{8}pa \quad \frac{3}{8}pa \quad \frac{3}{8}pa \quad \frac{1}{8}pa \right]^T. \quad (5.19)$$

Прийняті у попередніх прикладах функції апроксимації передбачали невідомими коефіцієнтами значення функцій у вузлах. Такі елементи називають лагранжевими.

5.1.2 Елемент, що працює на кручення

Запишемо матриці жорсткості й вузлових сил для елемента стержня, що працює на кручення (рис. 5.5).

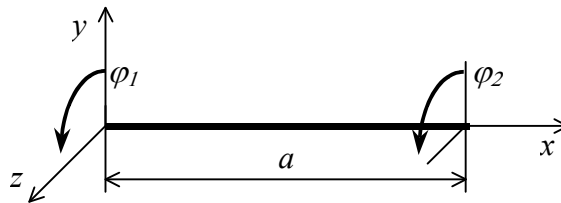


Рис. 5.5 – Елемент стержня при крученні

Потенціальна енергія деформації для стержня при крученні

$$U = \frac{1}{2} \int_V \gamma \tau dV, \quad (5.20)$$

де

$$\gamma = \frac{\varphi}{a} \rho, \quad \tau = G \frac{\varphi}{a} \rho$$

(φ – кут закручування, G – модуль зсуву).

Для двохвузлового елемента кут закручування визначаємо через вузлові переміщення φ_1 і φ_2

$$\varphi = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2, \quad (5.21)$$

де N_1, N_2 – лінійні функції апроксимації (5.4).

Після підстановки (5.21) у (5.20) і інтегрування одержимо

$$\mathbf{K} = \frac{GI_k}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_k = \int_A \rho^2 dA \quad (5.22)$$

(GI_k – жорсткість стержня при крученні).

Вектор вузлових навантажень одержимо з виразу для роботи зовнішніх сил – моментного навантаження m_x

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \phi m_x dx. \quad (5.23)$$

$$\text{Якщо } m_x = \text{const}, \quad \mathbf{F} = \frac{m_x a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Якщо } m_x = m_0 \frac{x}{a}, \quad \mathbf{F} = \frac{m_0 a}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

5.2.1 Елемент при плоскому згині

Елемент завантажений вузловими силами $\mathbf{R} = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4\}^T$.

Вектор переміщень – $\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T$. Додатні напрямки компонентів векторів \mathbf{R} і \mathbf{q} позначені на рисунку 5.6.

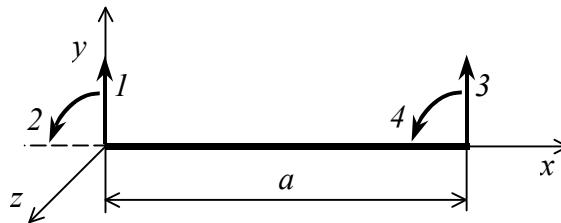


Рис. 7.6 – Елемент стержня при плоскому згині

Потенціальна енергія деформації стержня при згині

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \sigma dV, \quad (5.25)$$

де $\epsilon = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$, $\sigma = E\epsilon$ (v – прогин балки).

Знайдемо розв'язок для прогину у вигляді

$$v = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (5.26)$$

де \mathbf{N} – матриця інтерполяційних функцій. У даному випадку доцільно прийняти за невідомі параметри не тільки значення функцій, але й їх похідних у

вузлах. Для визначення інтерполяційних функцій запишемо апроксимаційний поліном

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (5.27)$$

Порядок полінома забезпечує неперервність похідних другого порядку, які входять в підінтегральні функції (5.25). Поліном має чотири коефіцієнти, для визначення яких використаємо умови щодо переміщень і їх перших похідних (кутів повороту) у крайніх (вузлових) перерізах

$$v(0) = q_1, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = q_2, \quad v(a) = q_3, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=a} = q_4. \quad (5.28)$$

Функція переміщень матиме вигляд

$$v = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 + N_4 q_4, \quad (5.29)$$

де

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}, & N_2 &= x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}, \\ N_3 &= 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}, & N_4 &= -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

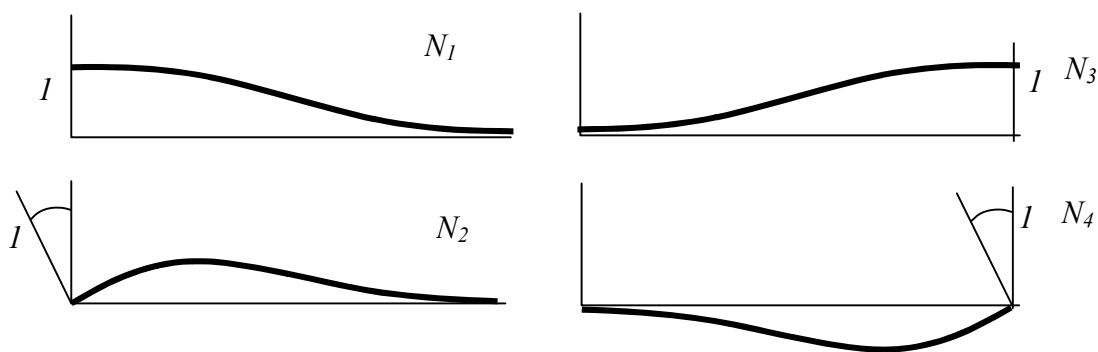


Рис. 5.7 – Функції Ерміта

Це так звані функції Ерміта, які задовольняють умови

$$\begin{aligned} N_1(0) &= 1 & N_1'(0) &= 0 & N_1(a) &= 0 & N_1'(a) &= 0 \\ N_2(0) &= 0 & N_2'(0) &= 1 & N_2(a) &= 0 & N_2'(a) &= 0 \\ N_3(0) &= 0 & N_3'(0) &= 0 & N_3(a) &= 1 & N_3'(a) &= 0 \\ N_4(0) &= 0 & N_4'(0) &= 0 & N_4(a) &= 0 & N_4'(a) &= 1. \end{aligned}$$

Графіки цих функцій зображені на рис. 5.7.

Після підстановки переміщення v (5.29) у формулу (7.25) одержимо

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (5.31)$$

де

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{a} \begin{bmatrix} \frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{3}{a} \\ & 2 & -\frac{3}{a} & 1 \\ & & \frac{6}{a^2} & -\frac{3}{a} \\ \text{сим.} & & & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Для визначення вектора вузлових навантажень скористаємось формулою для роботи зовнішніх сил

$$W = \int_0^a v p dx, \quad (5.33)$$

звідки для $p = p_0 = const$

$$\mathbf{F} = \frac{p_0 a}{2} \left\{ 1 \quad \frac{a}{6} \quad 1 \quad -\frac{a}{6} \right\}^T, \quad (5.34)$$

для $p = p_0 \frac{x}{a}$

$$\mathbf{F} = \frac{p_0 a}{2} \left\{ 3 \quad \frac{2a}{3} \quad 7 \quad -a \right\}^T. \quad (5.35)$$

5.2.4 Елемент стержня, який працює на згин з розтягом-стиском

На елемент стержня довжиною a і жорсткістю на згин EI_z і на розтяг EA діє поперечне $p_y(x)$ і подовжнє $p_x(x)$ навантаження (рис. 5.8). Осі y і z – головні осі поперечного перерізу стержня. Елемент має 6 ступенів вільності. Потенціальна енергія деформації:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV, \quad (5.36)$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad \sigma = E\varepsilon \quad (5.37)$$

(u – переміщення вздовж осі x , v – переміщення в напрямку осі y).

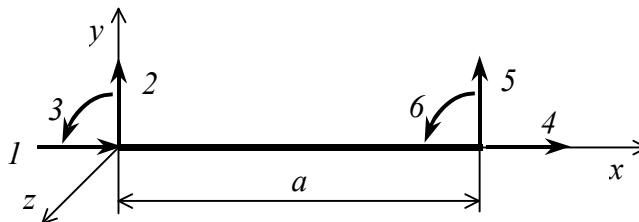


Рис. 5.8 – Елемент стержня при згині з розтягом-стиском

Апроксимації осевого переміщення і прогину

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_4 = \mathbf{N}_p \mathbf{q}_p, \quad (5.38)$$

$$v = N_3 q_2 + N_4 q_3 + N_5 q_5 + N_6 q_6 = \mathbf{N}_3 \mathbf{q}_3, \quad (5.39)$$

$N_1 = 1 - \frac{x}{a}$, $N_2 = \frac{x}{a}$, N_3, \dots, N_6 – функції Ерміта (5.30).

Підставляємо u , v у (5.37), (5.36) і з урахуванням вибору осей y , z , знаходимо

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}_p^T \left(EA \int_0^a \left(\frac{d}{dx} \mathbf{N}_p \right)^T \left(\frac{d}{dx} \mathbf{N}_p \right) dx \right) \mathbf{q}_p + \frac{1}{2} \mathbf{q}_3^T \left(EI_z \int_0^a \left(\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}_3 \right)^T \left(\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N}_3 \right) dx \right) \mathbf{q}_3,$$

або

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},$$

де

$$\mathbf{q} = \{q_p \quad q_3\}^T, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{a} & 0 & 0 & -\frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & 0 & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ -\frac{EA}{a} & 0 & 0 & \frac{EA}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & 0 & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Вектор вузлових навантажень одержимо за аналогією з попередніми. Для сталих $p_x = const$, $p_y = const$

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{p_x a}{2} \quad \frac{p_y a}{2} \quad -\frac{p_y a^2}{12} \quad \frac{p_x a}{2} \quad \frac{p_y a}{2} \quad \frac{p_x a^2}{12} \right\}^T. \quad (5.41)$$

5.2.5 Матриці жорсткості елементів у глобальних координатах

У розрахунку стержневих конструкцій необхідно будувати матриці жорсткості елементів з довільною орієнтацією по відношенню до глобальної системи координат. Глобальною будемо називати систему, загальну для усієї конструкції. На відміну від глобальної, локальні системи координат будуть пов'язані з кожним елементом. Одержані вище матриці жорсткості стержневих елементів записані у локальних координатах.

Розглянемо елемент стержня, який працює на розтяг-стиск, у глобальних координатах \bar{x} , \bar{y} (рис. 5.9).

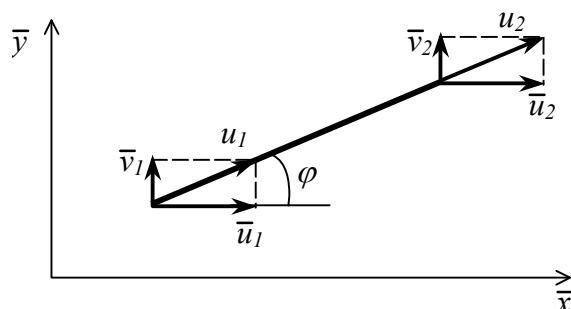


Рис. 5.9 – Елемент стержня у глобальних координатах

Вектор вузлових переміщень у локальних координатах –

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad u_2\}^T, \quad (5.42)$$

у глобальних –

$$\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2\}^T. \quad (5.43)$$

Очевидно, зв'язок між компонентами переміщень \mathbf{q} і $\bar{\mathbf{q}}$ є таким:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & 0 \\ t_{x\bar{y}} & 0 \\ 0 & t_{x\bar{x}} \\ 0 & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix},$$

або

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{q}}, \quad (5.44)$$

де

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{x\bar{y}} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$t_{x\bar{x}} = \cos(\alpha), \quad t_{x\bar{y}} = \sin(\alpha).$$

Вузлові сили пов'язані аналогічними співвідношеннями

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{F}}. \quad (5.46)$$

Запишемо залежності між вузловими силами і переміщеннями у двох системах координат

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}}. \quad (5.47)$$

З урахуванням (5.45), (5.47) матрицю жорсткості можна записати так:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}. \quad (5.48)$$

Розглянемо елемент стержня з шістьма ступенями вільності при деформуванні його у площині $\bar{x}O\bar{y}$ (Рис. (5.10)).

Вектор вузлових переміщень у локальних координатах

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad v_1 \quad \vartheta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \vartheta_2\}^T. \quad (5.49)$$

Вектор вузлових переміщень у глобальних координатах

$$\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\vartheta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\vartheta}_2\}^T. \quad (5.50)$$

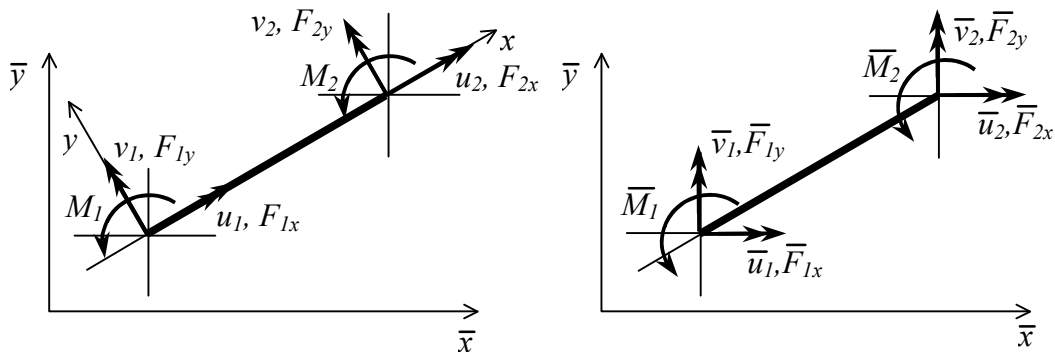


Рис. 5.10 – Вузлові переміщення

Встановимо зв'язок між цими векторами.

Складові переміщень пов'язані залежностями (рис. 5.11)

$$\bar{u} = u \cos(\alpha) + v \sin(\alpha), \quad \bar{v} = -u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha). \quad (5.51)$$

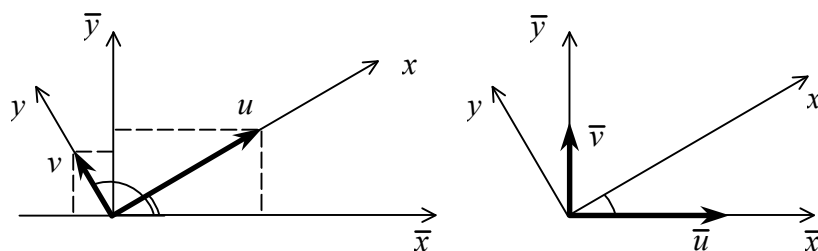


Рис. 5.11

З урахуванням введених вище позначень одержимо

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ g \end{Bmatrix}. \quad (5.52)$$

Для вузлових переміщень

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\mathbf{q}. \quad (5.53)$$

Матрицю, яка пов'язує вектори \mathbf{q} і $\bar{\mathbf{q}}$, можна записати у вигляді

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{x\bar{x}} & t_{y\bar{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{x\bar{y}} & t_{y\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.54)$$

Якщо врахувати, що вузлові сили пов'язані такою ж залежністю, як і переміщення

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}\mathbf{F}, \quad (5.55)$$

для матриці жорсткості у глобальній системі матимемо такий вираз:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^T. \quad (5.56)$$

Цю залежність можна одержати, записуючи вираз для потенціальної енергії як квадратичної форми (7.10). Оскільки значення енергії не залежить від системи координат, маємо рівність

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}^T\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}}.$$

Зробивши заміну $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\mathbf{q}$, одержимо

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}\mathbf{q}.$$

Очевидно,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{T}.$$

Якщо врахувати, що обернену залежність між $\bar{\mathbf{q}}$ і \mathbf{q} можна записати у вигляді

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{q}},$$

то залежність між матрицями $\bar{\mathbf{K}}$ і \mathbf{K} буде такою

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^T.$$

5.3 Синтез скінченно-елементних моделей стержневих конструкцій

Після того, як конструкцію розділено на окремі скінченні елементи, і для кожного з них знайдені матриці жорсткості та вектори вузлових навантажень, тобто одержані залежності

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (5.67)$$

усі елементи необхідно пов'язати в єдину конструкцію. Оскільки кожен вузол перебуває у рівновазі під дією сил, що сходяться у цьому вузлі (враховуючи й зовнішнє навантаження), то необхідні рівняння зв'язку можна було б одержати, записавши умови рівноваги кожного вузла. Очевидно, до цих рівнянь, як невідомі, входять переміщення вузлів.

На практиці застосування рівнянь рівноваги вузлів для визначення залежностей між переміщеннями і зовнішніми навантаженнями (внутрішні сили за допомогою матриць жорсткості кожного елемента виключаються з рівнянь) приводить до громіздких перетворень і ускладнює процес програмування. Рациональнішою є методика, заснована на прирівнюванні у кожному вузлі переміщень елементів, які в цьому вузлі з'єднуються. Для цього в кожному вузлі позначають і нумерують ненульові переміщення у додатних напрямках глобальних осей координат. Після цього записують умови рівності глобальних переміщень, що пронумеровані, і локальних для кожного елемента.

Розглянемо побудову глобальної матриці жорсткості на прикладі скінченно-елементної моделі стержня (Рис. 5.15).

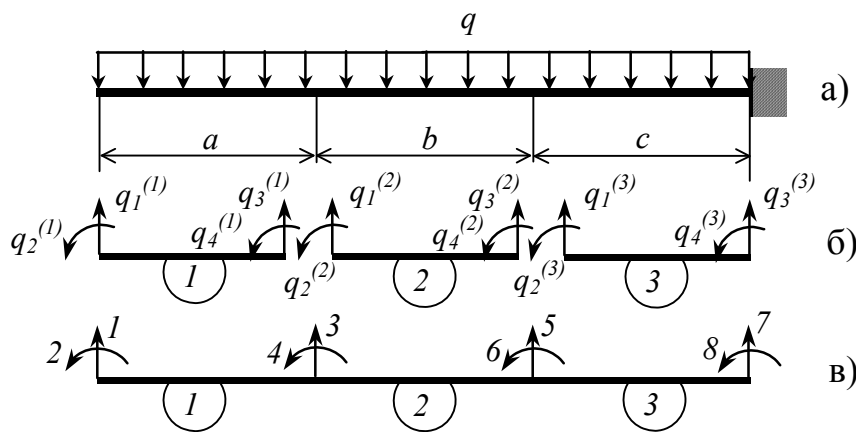


Рис. 5.15 – Скінченно-елементна модель стержня

Нумерацію для окремих елементів (локальну) показано на рис. 5.15, б, а глобальну – на рис. 5.15, в. Порівнюючи локальні і глобальні номери, одержимо

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= q_1, & q_2^{(1)} &= q_2, & q_3^{(1)} &= q_3, & q_4^{(1)} &= q_4, \\ q_1^{(2)} &= q_3, & q_2^{(2)} &= q_4, & q_3^{(2)} &= q_5, & q_4^{(2)} &= q_5, \\ q_1^{(3)} &= q_5, & q_2^{(3)} &= q_6, & q_3^{(3)} &= 0, & q_4^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Ці залежності можна записати для кожного елемента у вигляді

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{q}, \quad (5.69)$$

де \mathbf{q} – вектор глобальних переміщень системи;

\mathbf{q}_i – вектор локальних переміщень;

\mathbf{T}_i – матриця переходу для i -того елемента.

У даному випадку

$$\begin{cases} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ q_3^{(1)} \\ q_4^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{cases} = \mathbf{T}_1 \mathbf{q},$$

$$\begin{cases} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \\ q_3^{(2)} \\ q_4^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{cases} = \mathbf{T}_2 \mathbf{q}, \quad (5.70)$$

$$\begin{cases} q_1^{(3)} \\ q_2^{(3)} \\ q_3^{(3)} \\ q_4^{(3)} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{cases} = \mathbf{T}_3 \mathbf{q}.$$

Матрицю жорсткості і вектор вузлових навантажень балки одержимо у вигляді

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{T}_i, \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^T \mathbf{F}_i.$$

Схематично ця операція показана на рис. 5.16.

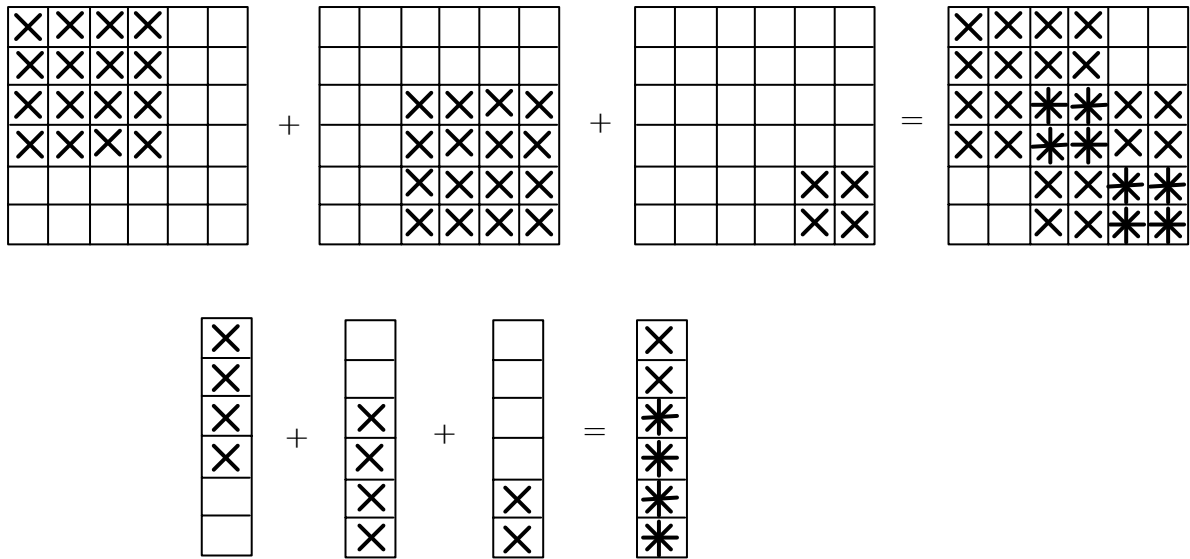


Рис. 5.16 – Схема синтезу матриці жорсткості

Недоліком такого варіанту синтезу, як уже вказувалось вище, є необхідність перемноження і додавання нульових елементів у (5.71). Більш раціональним є метод, який використовує матрицю індексів [28]. У даному випадку вона має вигляд

Таблиця 5.1 – Матриця індексів

№ елементів	Локальні переміщення елемента			
	1	2	3	4
	Глобальні переміщення			
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	0	0

Згідно з цією таблицею індекси визначаються через локальні індекси даного елемента такими залежностями:

$$IG = mi(IL, NE), \quad JG = mi(JL, NE), \quad (5.72)$$

де IG – глобальний номер рядка матриці mi ;
 JG – глобальний номер стовпця матриці;

IL – локальний номер рядка матриці жорсткості елемента;
 JL – локальний номер стовпця матриці жорсткості елемента
 NE – номер елемента.

Компоненти матриць з однаковими глобальними індексами додаються. У даному випадку маємо

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= K_{11}^{(1)}, & K_{12} &= K_{12}^{(1)}, & K_{22} &= K_{22}^{(1)}, & K_{21} &= K_{21}^{(1)}, \\
 K_{13} &= K_{13}^{(1)}, & K_{14} &= K_{14}^{(1)}, & K_{23} &= K_{23}^{(1)}, & K_{24} &= K_{24}^{(1)}, \\
 K_{33} &= K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)}, & K_{34} &= K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)}, & K_{44} &= K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)}, \\
 K_{43} &= K_{34}, & K_{35} &= K_{13}^{(2)}, & K_{36} &= K_{14}^{(2)}, & K_{45} &= K_{23}^{(2)}, \\
 K_{46} &= K_{24}^{(2)}, & K_{56} &= K_{34}^{(2)} + K_{12}^{(3)}, & K_{65} &= K_{56}, & K_{66} &= K_{44}^{(2)} + K_{22}^{(3)}, \\
 F_1 &= F_1^{(1)}, & F_2 &= K_2^{(1)}, & F_3 &= F_3^{(1)} + F_1^{(2)}, & F_4 &= F_4^{(1)} + F_2^{(2)}, \\
 F_5 &= F_3^{(2)} + F_1^{(3)}, & F_6 &= F_4^{(2)} + F_2^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

Операція перейменування індексів і синтезу глобальної матриці жорсткості дуже легко програмується. У системі MathCAD це можна зробити одним рядком

$$\mathbf{K}_{\mathbf{mi}_{i,j}, \mathbf{mi}_{i,k}} := \mathbf{K}_{\mathbf{mi}_{i,j}, \mathbf{mi}_{i,k}} + \mathbf{Ke}(i)_{j,k}, \tag{5.74}$$

де \mathbf{mi} – матриця індексів

$$\mathbf{mi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

i – кількість елементів;

j, k – кількість локальних переміщень в одному елементі;

$\mathbf{Ke}(i)$ – матриця жорсткості i -того елемента.

Для вектора сил

$$\mathbf{F}_{\mathbf{mi}_{i,j}} = \mathbf{F}_{\mathbf{mi}_{i,j}} + \mathbf{Fe}(i)_j. \tag{5.75}$$

Система алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих переміщень буде такою

$$\mathbf{K}_{8 \times 8} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F}_{8 \times 1}. \tag{5.76}$$

Матриці $\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{q}$ у (5.76) вміщують компоненти, пов'язані з нульовими переміщеннями q_7 і q_8 . Для того, щоб врахувати граничні умови $q_7 = 0$ і $q_8 = 0$, достатньо викреслити в цих матрицях відповідні стовпці й рядки, після чого матимемо

$$\mathbf{K}_{6 \times 6} \mathbf{q} = \mathbf{F}_{6 \times 1}. \tag{5.77}$$

Розв'язок цього рівняння дасть переміщення вузлів балки

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}. \quad (5.78)$$

5.4 Алгоритм використання методу скінченних елементів для аналізу стержневих систем

Послідовність визначення переміщень і напружень у стержневих системах за допомогою МСЕ (алгоритм МСЕ) буде такою:

1) Систему розбивають на скінченні елементи, для яких можна знайти залежності між зусиллями у вузлах \mathbf{F}_i і вузловими переміщеннями \mathbf{q}_i у формі

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{q}_i,$$

де \mathbf{K}_i – матриця жорсткості i -го скінченного елемента. Щоб побудувати це співвідношення, можна скористатись бібліотекою скінченних елементів, де наводяться відповідні матриці жорсткості. Для елементів, відсутніх у довідниках, матриці жорсткості будують згідно з наведеною вище методикою, записуючи квадратичну форму потенціальної енергії деформації для елемента.

2) Нумерують вузли системи і переміщення у вузлах. Послідовність нумерації значною мірою впливає на структуру матриці жорсткості системи, що в свою чергу впливає на трудомісткість розв'язку системи рівнянь МСЕ. Найпростіша рекомендація тут така: нумерація має бути такою, щоб найбільша різниця між номерами переміщень у сусідніх вузлах була мінімальною.

3) Складають матриці топології та індексів. Перша вказує на положення кожного елемента у скінченно-елементній моделі конструкції, друга дає співвідношення між локальними номерами переміщень вузлів кожного елемента і глобальними номерами скінченно-елементної моделі. У багатьох випадках топологічної матриці виявляється достатньо для побудови й матриці індексів.

4) Складають матрицю жорсткості системи та матрицю зовнішніх навантажень. Для стержневих систем у багатьох випадках виявляються відомими зовнішні сили, діючі у вузлах, що полегшує складання вектора зовнішніх сил. Якщо сили діють не у вузлах, то можна виконати звичайну операцію приведення їх до вузлів. При побудові матриці жорсткості одночасно вирішується проблема врахування умов закріплення за однією з методик, наведених вище.

5) Знаходять розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

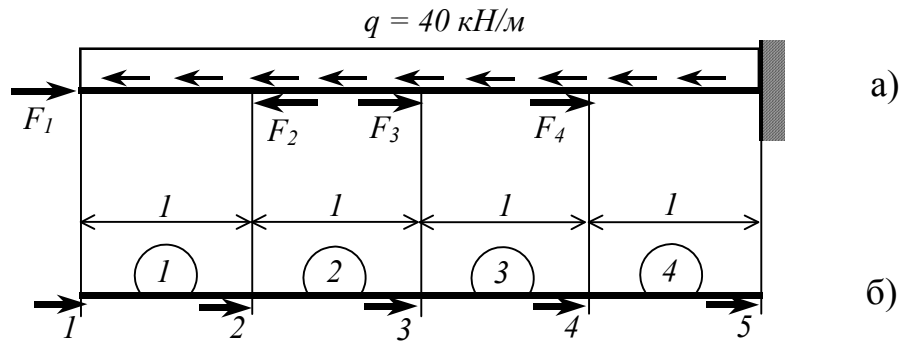
$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}.$$

У програмах МСЕ, як правило, не використовують операцію знаходження оберненої матриці \mathbf{K}^{-1} , а шукають розв'язок, використовуючи метод Гауса та аналогічні йому методи.

6) Одержаний вектор переміщень вузлів використовують, при необхідності, для знаходження інших параметрів і зусиль у вузлах, напружень тощо.

Приклад 5.1. Визначити сили й переміщення поперечних перерізів для стержня.

а) схема стержня, б) скінченно-елементна модель).



Площа поперечного перерізу на ділянках $A = 0.01\text{м}^2$; діючі сили (кН): $P_1 = 20$, $P_2 = 30$, $P_3 = 40$, $P_4 = 50$, $q = 20\text{кН/м}^2$; модуль пружності матеріалу (кН/м²): $E = 2 \cdot 10^8$; довжини ділянок: $l = 1\text{м}$.

Вхідні дані $l := 1$ $E := 2 \cdot 10^8$ $A := 0.01$ $q := 20$

$P1 := 20$ $P2 := 30$ $P4 := 40$ $P3 := 50$

Кількість скінченних елементів: $ii := 1..4$

Матриця жорсткості елемента, який працює на розтяг-стиск

$$K_{el}(ii) := E \cdot \frac{A}{l} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця індексів $mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$

Визначення компонент матриці жорсткості $KK_{5,5} := 0$

$i := 1..4$ $k := 1..2$ $j := 1..2$

$$KK_{mi_j, j, mi_i, k} := KK_{mi_j, j, mi_i, k} + K_{el}(i)_{j, k}$$

Для врахування умов закріплення стержня необхідно вилучити з матриці жорсткості стержня п'яти рядок і стовпець. Це можна зробити за допомогою функції submatrix.

$$KR := \text{submatrix}(K, 1, 4, 1, 4)$$

$$KR = \begin{pmatrix} 2 \times 10^6 & -2 \times 10^6 & 0 & 0 \\ -2 \times 10^6 & 4 \times 10^6 & -2 \times 10^6 & 0 \\ 0 & -2 \times 10^6 & 4 \times 10^6 & -2 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -2 \times 10^6 & 4 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Вектор зовнішніх сил з урахуванням приведення навантаження:

$$F := \left[\left(20 - q \cdot \frac{1}{2} \right) \quad (30 - q \cdot l) \quad (-40 - q \cdot l) \quad (50 - q \cdot l) \right]^T$$

Розв'язок рівняння рівноваги відносно невідомих переміщень вузлів

$$U := \text{if}(|KR|, KR^{-1} \cdot F, 0)$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-5} \\ -1.5 \times 10^{-5} \\ -2.5 \times 10^{-5} \\ -5 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Повна матриця переміщень

$$UA := \text{stack}(U, 0)$$

$$UA = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-5} \\ -1.5 \times 10^{-5} \\ -2.5 \times 10^{-5} \\ -5 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Визначення усіх вузлових сил, у тому числі і реакції

$$R := K \cdot UA$$

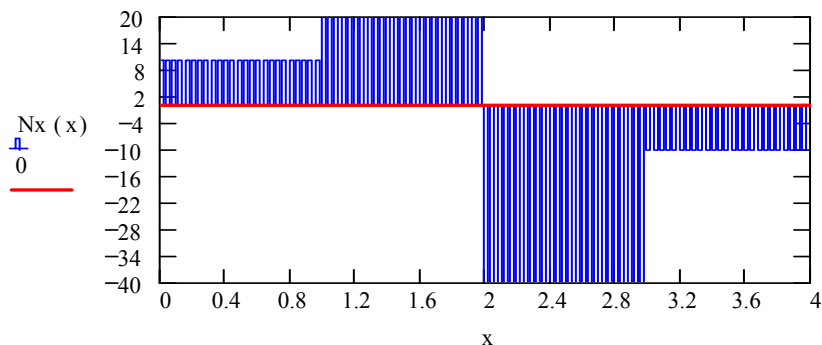
$$R = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Побудова графіків сил і переміщень у перерізах стержня $j := 1..5$

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

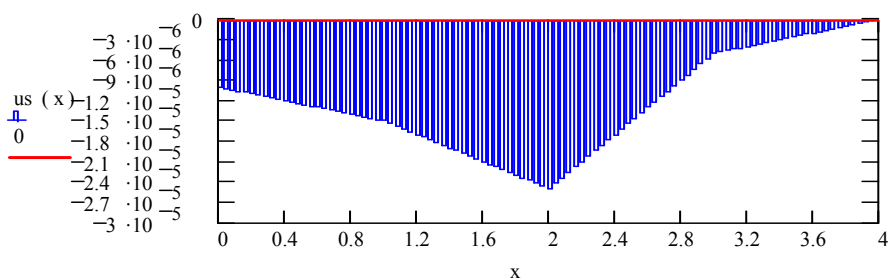
$$x := 0, 0.01 \cdot 4 \cdot 1..4 \cdot 1$$

$$Nx(x) := \sum_j R_j \cdot \Phi(x - a_j)$$



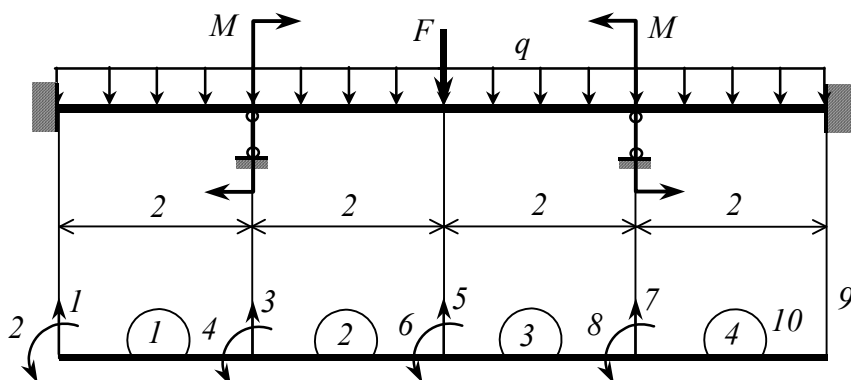
Епюра подовжніх сил

$$vx := (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5)^T \quad us(x) := \text{linterp}(vx, UA, x)$$



Епюра переміщень

Приклад 5.2 Визначити прогини і внутрішні сили у статично-невизначуваній балці (а) схема стержня, б) скінченно-елементна модель).



Модуль пружності матеріалу (кН/м^2): $E = 2 \cdot 10^8$; момент інерції площі поперечного перерізу: $I = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; навантаження: $M = 2 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $F = 20 \cdot 10^3 \text{ Н}$, $q = 20 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$; довжини ділянок: $l = 2\text{м}$.

Вхідні дані:

$$I := 2 \cdot 10^{-4} \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad M := 20 \cdot 10^3 \text{ (Нм)}$$

$$F := 20 \cdot 10^3 \text{ (Н)} \quad q := 20 \cdot 10^3 \text{ (Н/м)}$$

Розбиваємо балку на чотири скінченних елементи $ke := 4 \quad i := 1..4 \quad l_i :=$
 Довжина балки 8 метрів, довжина кожного елемента 2 метри.

2
2
2
2

Матриця жорсткості елемента балки, який працює на згин,

$$K_{el(i)} := \begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{l_i}$$

Матриця індексів $m_i := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

Формування матриці жорсткості балки

$$K := \left(\begin{array}{l} K_{10,10} \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } i < 5 \\ \quad K_{e} \leftarrow K_{el(i)} \\ \quad \text{for } il \in 1..4 \\ \quad \quad ig \leftarrow m_{i,il} \\ \quad \quad \text{for } jl \in 1..4 \\ \quad \quad \quad jg \leftarrow m_{i,jl} \\ \quad \quad \quad K_{ig,jg} \leftarrow K_{ig,jg} + K_{el(i)}_{il,jl} \\ \quad i \leftarrow i + 1 \\ K \end{array} \right)$$

Умови закріплення: $u_1 := 0 \quad u_2 := 0 \quad u_3 := 0 \quad u_7 := 0 \quad u_9 := 0 \quad u_{10} := 0$

У відповідності з умовами закріплення, з матриці K треба вилучити таі рядки і стовпці: 1, 2, 3, 7, 9, 10.

$$m := 1..4 \quad n := 1..4 \quad nr := (4 \ 5 \ 6 \ 8)$$

Редуційована матриця жорсткості

$$KR_{m,n} := K_{(nr_1,m, nr_1,n)}$$

$$KR = \begin{pmatrix} 1.6 \times 10^8 & -6 \times 10^7 & 4 \times 10^7 & 0 \\ -6 \times 10^7 & 1.2 \times 10^8 & 0 & 6 \times 10^7 \\ 4 \times 10^7 & 0 & 1.6 \times 10^8 & 4 \times 10^7 \\ 0 & 6 \times 10^7 & 4 \times 10^7 & 1.6 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

При визначенні компонентів матриці вузлових сил використовується операція приведення розподілених сил до вузлів у відповідності з відомою методикою. Для визначення приведених сил у вузлах кожного елемента необхідно розглянути його як балку, жорстко закріплену на кінцях, і визначити реакції у закріпленнях.

Ці реакції, взяті з протилежними знаками, і будуть приведеними вузловими силами.

$$PR := [-M \ -(q \cdot l_2 + F) \ 0 \ M]^T \quad PR = \begin{pmatrix} -2 \times 10^4 \\ -6 \times 10^4 \\ 0 \\ 2 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Визначення невідомих ненульових переміщень вузлів

$$UR := KR^{-1} \cdot PR$$

$$UR = \begin{pmatrix} -5 \times 10^{-4} \\ -1 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 5 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Повний вектор переміщень

$$U := (0 \ 0 \ 0 \ UR_1 \ UR_2 \ UR_3 \ 0 \ UR_4 \ 0 \ 0)^T$$

$$k := 1..4 \quad i := 1..4 \quad U_{e_{k,i}} := U_{(m_{i,k})}$$

$$U_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -5 \times 10^{-4} & 0 & 5 \times 10^{-4} \\ 0 & -1 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ -5 \times 10^{-4} & 0 & 5 \times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}$$

Кожен стовпець цієї матриці вміщує переміщення вузлів відповідного елемента

Сили, діючі у вузлах кожного окремого елемента, знайдемо, помноживши матрицю жорсткості кожного елемента на відповідний вектор вузлових переміщень.

Повний вектор вузлових сил

$$P := K \cdot U$$

$$P = \begin{pmatrix} -3 \times 10^4 \\ -2 \times 10^4 \\ 6 \times 10^4 \\ -2 \times 10^4 \\ -6 \times 10^4 \\ 4.064 \times 10^{-12} \\ 6 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \\ -3 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

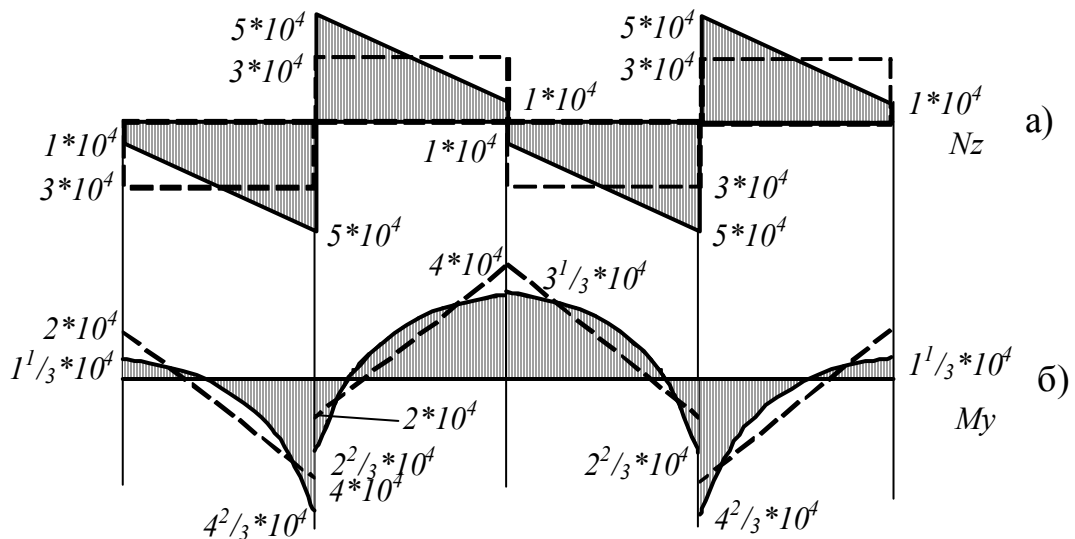
Матриця внутрішніх сил у вузлах кожного елемента

$$R(i) := K_{el}(i) \cdot U_e^{(i)}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} -3 \times 10^4 \\ -2 \times 10^4 \\ 3 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(2) = \begin{pmatrix} 3 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \\ -3 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(3) = \begin{pmatrix} -3 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \\ 3 \times 10^4 \\ -2 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad R(4) = \begin{pmatrix} 3 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 \\ -3 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

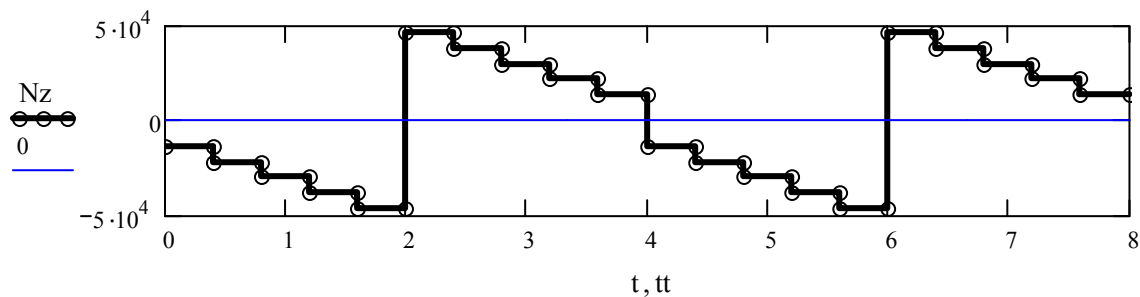
Для побудови епюр внутрішніх сил необхідно до знайдених для кожного елемента вузлових сил додати сили, які діють на кожній ділянці від розподіленого навантаження, у припущенні, що на кінцях ділянки жорсткі закріплення.

Епюри поперечних сил N_z і згинаючих моментів M_y , побудовані згідно з одержаними векторами зусиль, наведені нижче на рисунках.

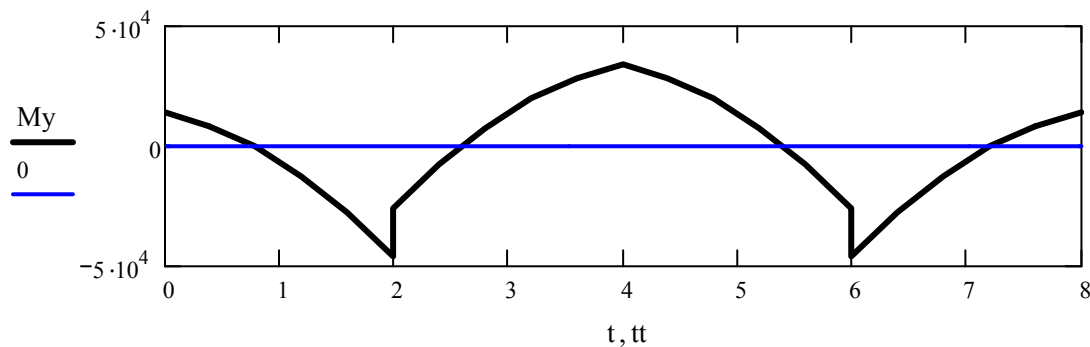


Епюри внутрішніх зусиль

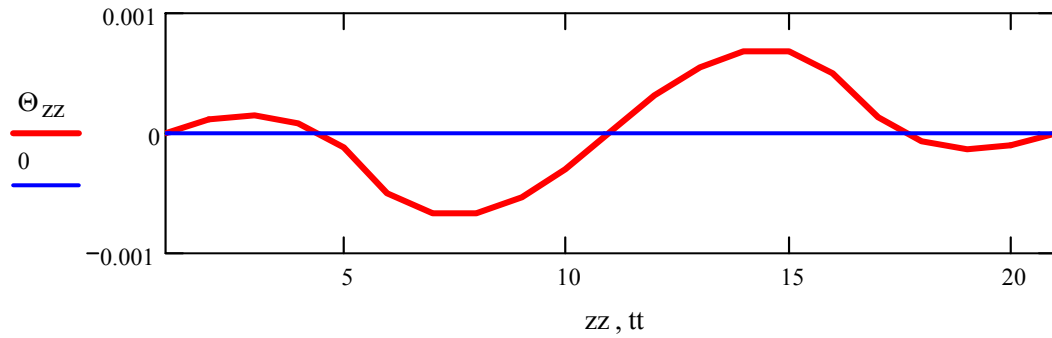
Уточнення розв'язку можна досягти збільшивши кількість елементів. Нижче подані графіки зусиль і переміщень у перерізах цієї ж балки, одержані при розділенні на 20 елементів. Графіки згинаючого момента, кутових переміщень і прогинів практично співпадають з точними. Графік поперечної сили більш реалістичний ніж при розділенні на 4 елементи, але все ж потребує уточнення. Для цього можна скористатись функціями інтерполяції, які є у пакеті MathCAD. Приклад використання функцій інтерполяції наведено у [5].



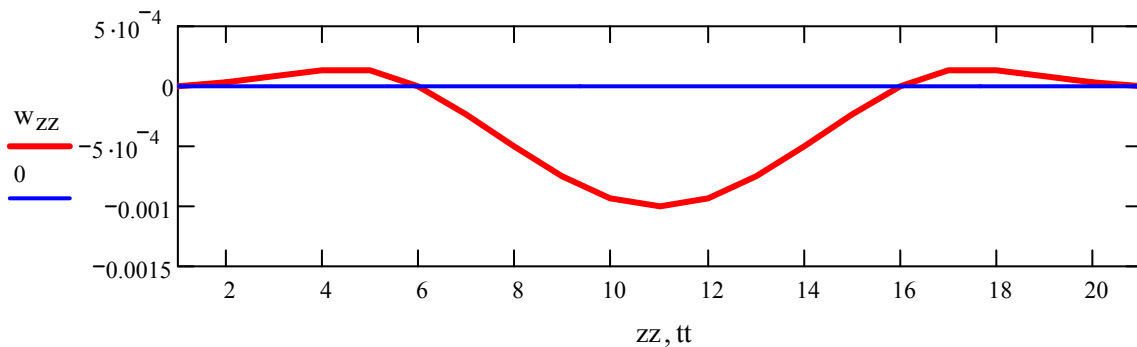
Графік поперечних сил



Графік згинаючих моментів



Графік кутів повороту перерізів



Графік прогинів

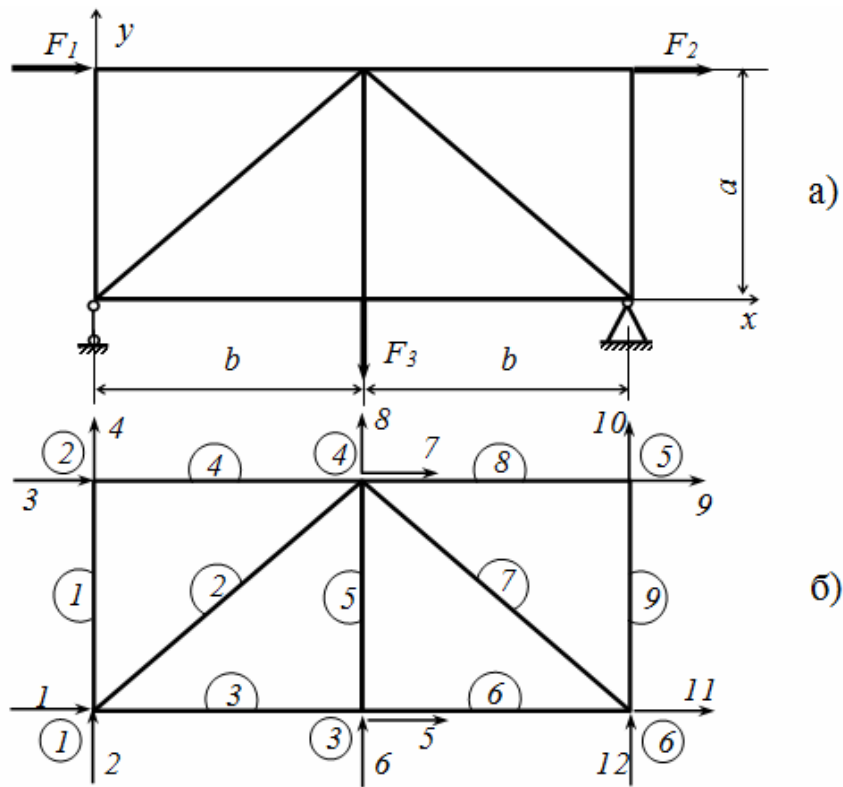
Як видно, збільшення кількості елементів приводить до уточнення епюр внутрішніх сил і відкидає необхідність введення поправок на розподілене навантаження, які використовувались у попередньому прикладі.

Приклад 5.3 Побудувати епюри внутрішніх сил у перерізах ферми і схему деформування ферми. Схема навантаження і скінченно-елементна модель ферми наведені нижче на рисунку.

Вхідні дані: a, b – довжини вертикального і горизонтального стержнів (m); E – модуль пружності матеріалу (Pa); A_i – площі поперечних перерізів стержнів (m^2); F_i – зовнішні сили.

$$a := 2 \quad b := 2.5 \quad A := 4 \cdot 10^{-4} \quad E := 2 \cdot 10^{11}$$

$$F1 := 10 \cdot 10^3 \quad F2 := 40 \cdot 10^3 \quad F3 := 20 \cdot 10^3$$



$n_e := 4$ - кількість узагальнених координат в елементі
 $n := 9$ - кількість елементів $n_v := 2$ - кількість вузлів у елементі
 $k := 1..n_e$ $jj := 1..n_e$ $j := 1..n_v$ $ie := 1..n$ $A_{ie} := E_{ie} :=$

Топологічна матриця

$$\text{Top} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 4 & 6 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T$$

Координати вузлів

$$\text{Nodes} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & b & 2 \cdot b & 2 \cdot b \\ 0 & a & 0 & a & a & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A	E
A	E
A	E
A	E
A	E
A	E
A	E
A	E
A	E

Координати вузлів кожного елемента згідно з матрицею Top

$$X_{n_j, ie} := \text{Nodes}_{1, \text{Top}_{ie, j}} \quad Y_{n_j, ie} := \text{Nodes}_{2, \text{Top}_{ie, j}}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 5 \\ 0 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Довжини стержнів $l_{ie} := \sqrt{(X_{n_2, ie} - X_{n_1, ie})^2 + (Y_{n_2, ie} - Y_{n_1, ie})^2}$

Синус і косинус кутів нахилу стержнів до осі x

$$s(ie) := \frac{Y_{m2,ie} - Y_{n1,ie}}{l_{ie}} \quad c(ie) := \frac{X_{m2,ie} - X_{n1,ie}}{l_{ie}}$$

Матриця направляючих косинусів
для переводу елемента в глобальну
систему координат

$$T(ie) := \begin{pmatrix} c(ie) & s(ie) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(ie) & s(ie) \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів з використанням матриці Top

$$m_{ie,2,j} := 2 \cdot Top_{ie,j} \quad m_{ie,(2 \cdot j - 1)} := 2 \cdot Top_{ie,j} - 1$$

Матриця жорсткості
скінченного елемента

$$K_e(ie) := E_{ie} \cdot \frac{A_{ie}}{l_{ie}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента
в глобальній системі координат

$$K_{\alpha}(ie) := T(ie)^T \cdot K_e(ie) \cdot T(ie)$$

$$m_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Формування матриці жорсткості ферми

$$KS_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$KS_{m_{ie,jj}, m_{ie,k}} := KS_{m_{ie,jj}, m_{ie,k}} + K_{\alpha}(ie)_{jj,k}$$

Записуючи вектор зовнішніх вузлових навантажень, невідомі реакції опор
тимчасово покладаємо рівними нулю

$$R1 := 0 \quad R2 := 0 \quad R3 := 0$$

$$FS := (0 \ R1 \ F1 \ 0 \ 0 \ -F2 \ 0 \ 0 \ F3 \ 0 \ R2 \ R3)^T$$

Умови закріплення ферми: $u_2 = u_{11} = u_{12} = 0$

Відповідна редукція матриць жорсткості й вузлових сил

$$m := 1..9 \quad n := 1..9 \quad m_r := (1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)$$

$$KR_{m,n} := KS_{(m_r1,m), (m_r1,n)} \quad FR_m := FS_{(m_r1,m)}$$

$$FR^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \times 10^4 & 0 & 0 & -4 \times 10^4 & 0 & 0 & 2 \times 10^4 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи рівнянь відносно невідомих вузлових переміщень

$$U := KR^{-1} \cdot FR$$

Компоненти повного вектора переміщень вузлів ферми

$$\begin{aligned} US_1 &:= U_1 & US_2 &:= 0 & US_3 &:= U_2 & US_4 &:= U_3 & US_5 &:= U_4 \\ US_6 &:= U_5 & US_7 &:= U_6 & US_8 &:= U_7 & US_9 &:= U_8 & US_{10} &:= U_9 \\ US_{11} &:= 0 & US_{12} &:= 0 \end{aligned}$$

Матриця переміщень вузлів кожного елемента

$$k := 1..4 \quad UE_{ie,k} := US_{mi_{ie,k}} \quad UE := UE^T$$

Сили у вузлах кожного елемента у глобальній системі координат

$$RE(ie) := K\alpha(ie) \cdot UE^{(ie)}$$

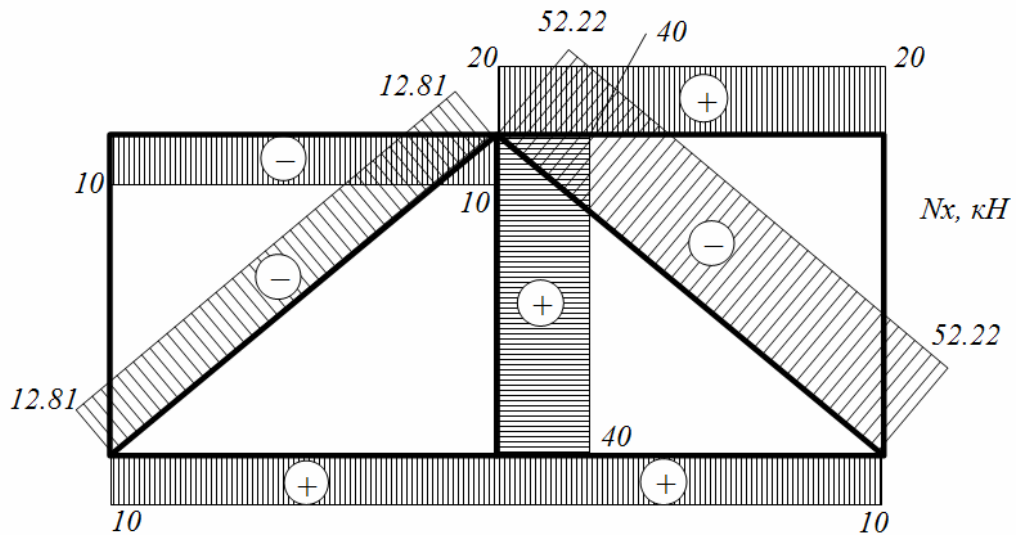
$$\begin{aligned} RE(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & RE(2) &= \begin{pmatrix} 10 \times 10^3 \\ 8 \times 10^3 \\ -10 \times 10^3 \\ -8 \times 10^3 \end{pmatrix} & RE(3) &= \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 0 \\ 10 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ RE(4) &= \begin{pmatrix} 1 \times 10^4 \\ 0 \\ -1 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} & RE(5) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \times 10^4 \\ 0 \\ 4 \times 10^4 \end{pmatrix} & RE(6) &= \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 0 \\ 10 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ RE(7) &= \begin{pmatrix} 4 \times 10^4 \\ -3.2 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \\ 3.2 \times 10^4 \end{pmatrix} & RE(8) &= \begin{pmatrix} -2 \times 10^4 \\ 0 \\ 2 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} & RE(9) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Сили у вузлах елементів у локальних координатах кожного елемента

$$RE\alpha(ie) := T(ie) \cdot RE(ie)$$

$$\begin{aligned} RE\alpha(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & RE\alpha(2) &= \begin{pmatrix} 1.281 \times 10^4 \\ -1.281 \times 10^4 \end{pmatrix} & RE\alpha(3) &= \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 10 \times 10^3 \end{pmatrix} \\ RE\alpha(4) &= \begin{pmatrix} 1 \times 10^4 \\ -1 \times 10^4 \end{pmatrix} & RE\alpha(5) &= \begin{pmatrix} -4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 \end{pmatrix} & RE\alpha(6) &= \begin{pmatrix} -10 \times 10^3 \\ 10 \times 10^3 \end{pmatrix} \\ RE\alpha(7) &= \begin{pmatrix} 5.122 \times 10^4 \\ -5.122 \times 10^4 \end{pmatrix} & RE\alpha(8) &= \begin{pmatrix} -2 \times 10^4 \\ 2 \times 10^4 \end{pmatrix} & RE\alpha(9) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

За одержаними значеннями будемо епюру внутрішніх сил.



Побудова схеми деформованої ферми
 $W := US$

$$W = \begin{pmatrix} -6.25 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 9.845 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -3.125 \times 10^{-4} \\ -3.442 \times 10^{-3} \\ 6.72 \times 10^{-4} \\ -2.442 \times 10^{-3} \\ 1.297 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

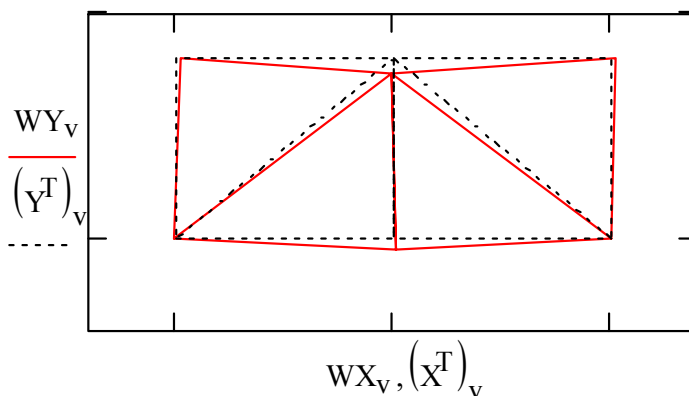
$$X := (0 \ 5 \ 5 \ 0 \ 0 \ 5 \ 5 \ 10 \ 5 \ 10 \ 10)$$

$$Y := (0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 4 \ 4 \ 0 \ 0 \ 4 \ 4 \ 0)$$

$W_{x1} := W_1$	$W_{x7} := W_7$	$W_{y1} := W_2$	$W_{y7} := W_8$
$W_{x2} := W_7$	$W_{x8} := W_{11}$	$W_{y2} := W_8$	$W_{y8} := W_{12}$
$W_{x3} := W_5$	$W_{x9} := W_5$	$W_{y3} := W_6$	$W_{y9} := W_6$
$W_{x4} := W_1$	$W_{x10} := W_9$	$W_{y4} := W_2$	$W_{y10} := W_{10}$
$W_{x5} := W_3$	$W_{x11} := W_{11}$	$W_{y5} := W_4$	$W_{y11} := W_{12}$
$W_{x6} := W_5$		$W_{y6} := W_6$	

$$v := 1..11$$

$$WX := (W_x^T \cdot 100 + X)^T \quad WY := (W_y^T \cdot 100 + Y)^T$$



Приклад 5.4. Визначити внутрішні сили і переміщення у рамі (а) рама, б) скінченно-елементна модель).

Модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; площа поперечного перерізу стержнів $A = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$; момент інерції площі $I = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; довжина $a = 1 \text{ м}$; зовнішнє навантаження $q = 25 \text{ кН/м}$, $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $P = 30 \text{ кН}$.

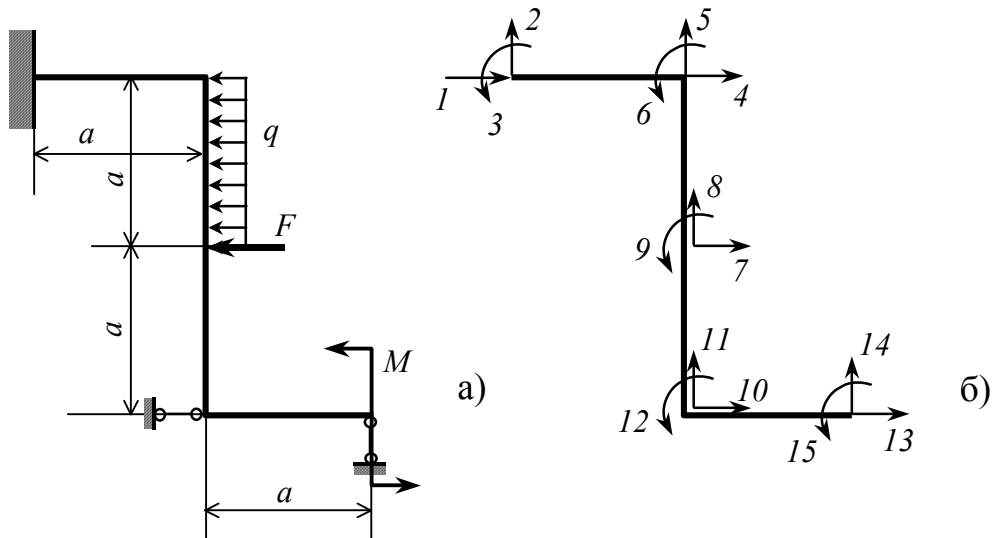
Вхідні дані:

$$a := 1 \quad I := 1 \cdot 10^{-4} \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad A := 1 \cdot 10^{-2}$$

$$q := 25 \quad P := 30 \quad M := 30$$

Матриця координат вузлів $N_c := \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & a \\ 2 \cdot a & 2 \cdot a & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Топологічна матриця $T_{op} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$



Плоска рама а) і її скінченно-елементна модель б)

$$k_e := \text{rows}(T_{op}) \quad \text{кількість елементів} \quad k_e = 4$$

$$k_n := \text{cols}(T_{op}) \quad \text{кількість вузлів у кожному елементі} \quad k_n = 2$$

Обчислюємо координати вузлів кожного елемента у глобальній системі координат

$$i := 1..k_e \quad j := 1..k_n$$

$$X_{n_j, i} := N_{c1, (T_{op}_{i, j})} \quad Y_{n_j, i} := N_{c2, (T_{op}_{i, j})}$$

$$\text{Довжини елементів} \quad l_i := \sqrt{(X_{n_2, i} - X_{n_1, i})^2 + (Y_{n_2, i} - Y_{n_1, i})^2}$$

Елементи матриці направляючих косинусів

$$s(i) := \frac{Y_{n2,i} - Y_{n1,i}}{l_i} \quad c(i) := \frac{X_{n2,i} - X_{n1,i}}{l_i}$$

Матриця направляючих косинусів

$$T(i) := \begin{pmatrix} c(i) & s(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s(i) & c(i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(i) & s(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s(i) & c(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Формування матриці індексів

$$m_{i,(3 \cdot j - 2)} := 3 \cdot \text{Тор}_{i,j-2}$$

$$m_{i,(3 \cdot j - 1)} := 3 \cdot \text{Тор}_{i,j-1}$$

$$m_{i,3 \cdot j} := 3 \cdot \text{Тор}_{i,j}$$

Матриця індексів:

$$m_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Матриця жорсткості елемента

$$Ke(i) := \frac{E}{l_i} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & 6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 0 & 12 \cdot \frac{I}{(l_i)^2} & -6 \cdot \frac{I}{l_i} \\ 0 & 6 \cdot \frac{I}{l_i} & 2 \cdot I & 0 & -6 \cdot \frac{I}{l_i} & 4 \cdot I \end{bmatrix}$$

Обчислення компонентів матриці жорсткості елемента у глобальній системі координат

$$Ke\alpha(i) := T(i)^T \cdot Ke(i) \cdot T(i)$$

Побудова матриці жорсткості рами:

$$K_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$k := 1..6 \quad ik := 1..6 \quad \max(mi) = 15$$

$$K_{mi, ik, mi, k} := K_{mi, ik, mi, k} + Ke\alpha(i)_{ik, k}$$

Будуємо редуційовану матрицю жорсткості рами, виключаючи рядки і стовпці з номерами переміщень, які не допускаються накладеними на раму в'язями.

$$m := 1..(\max(mi) - 5) \quad n := 1..(\max(mi) - 5)$$

$$mr := (4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 11 \ 12 \ 13 \ 15)$$

$$KR_{m, n} := K_{mr1, m, mr1, n}$$

Матриця вузлових сил:

$$F := \left[-q \cdot \frac{a}{2} \quad 0 \quad \left(-q \cdot \frac{a^2}{12} \right) \quad \left[\left(-q \cdot \frac{a}{2} \right) - P \right] \quad 0 \quad q \cdot \frac{a^2}{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad M \right]^T$$

Визначення вузлових переміщень: $U := KR^{-1} \cdot F$

Повна матриця переміщень вузлів рами (з урахуванням нульових переміщень):

$$US := (0 \ 0 \ 0 \ U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ 0 \ U_7 \ U_8 \ U_9 \ 0 \ U_{10})^T$$

Матриця вузлових сил

$$R := K \cdot US$$

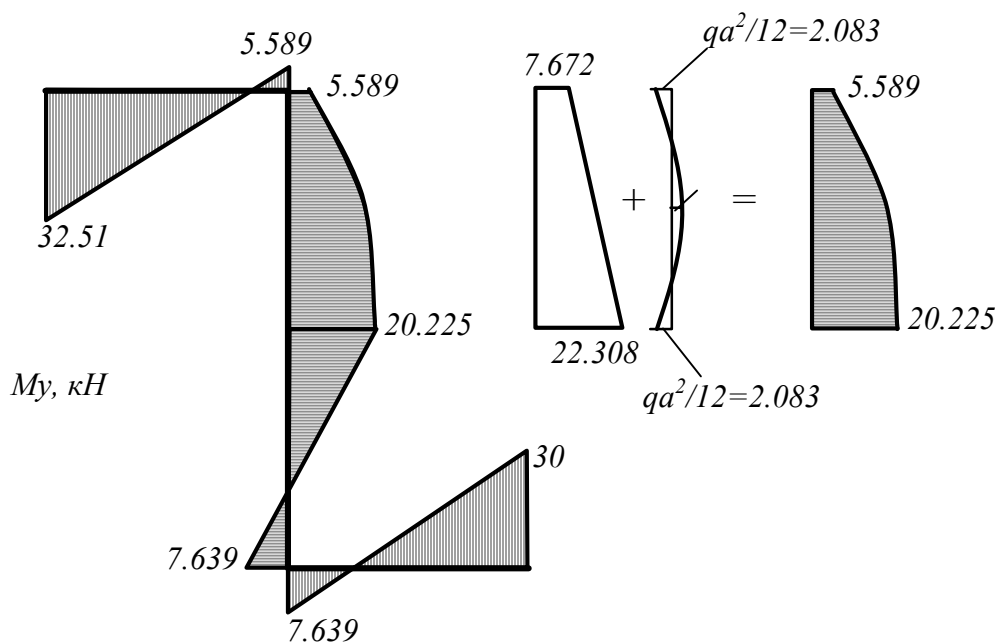
$$U = \begin{pmatrix} -1.357 \times 10^{-8} \\ -4.876 \times 10^{-7} \\ -6.616 \times 10^{-7} \\ -3.614 \times 10^{-7} \\ -5.064 \times 10^{-7} \\ 8.794 \times 10^{-8} \\ -5.252 \times 10^{-7} \\ 4.026 \times 10^{-7} \\ 0 \\ 9.616 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 27.136 \\ 37.639 \\ 32.051 \\ -12.5 \\ -1.215 \times 10^{-13} \\ -2.083 \\ -42.5 \\ 2.118 \times 10^{-13} \\ 2.083 \\ 27.864 \\ -1.173 \times 10^{-13} \\ -1.037 \times 10^{-15} \\ 0 \\ -37.639 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Вузлові сили для кожного елемента

$$US_{k,i} := US_{mi,k} \quad N(i) := Ke \alpha(i) \cdot US_{e(i)}$$

$$N(1) = \begin{pmatrix} 27.136 \\ 37.639 \\ 32.051 \\ -27.136 \\ -37.639 \\ 5.589 \end{pmatrix} \quad N(2) = \begin{pmatrix} 14.636 \\ 37.639 \\ -7.672 \\ -14.636 \\ -37.639 \\ 22.308 \end{pmatrix} \quad N(3) = \begin{pmatrix} -27.864 \\ 37.639 \\ -20.225 \\ 27.864 \\ -37.639 \\ -7.639 \end{pmatrix} \quad N(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 37.639 \\ 7.639 \\ 0 \\ -37.639 \\ 30 \end{pmatrix}$$

У відповідності із значеннями вузлових сил у кожному елементі будемо епюри внутрішніх сил. На ділянці, де прикладене розподілене навантаження, необхідно зробити поправку.



Епюра згинаючих моментів

Побудова деформованої рами

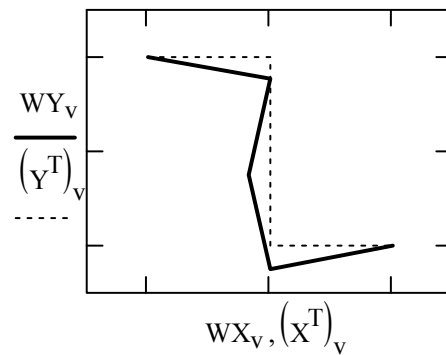
$$W := US$$

$$a := 2 \quad X := (0 \ a \ a \ a \ 2 \cdot a) \quad Y := (2 \cdot a \ 2 \cdot a \ a \ 0 \ 0)$$

$$W_{x1} := W_1 \quad W_{y1} := W_2 \quad W_{x3} := W_7 \quad W_{x4} := W_{10} \quad W_{y4} := W_{11}$$

$$W_{x2} := W_4 \quad W_{y2} := W_5 \quad W_{y3} := W_8 \quad W_{y5} := W_{14} \quad W_{x5} := W_{13}$$

$$v := 1..8 \quad WX := W_x^T \cdot 1000000 + X^T \quad WY := W_y^T \cdot 1000000 + Y^T$$



З урахуванням поправок еюра моментів буде точною. Ще раз зауважимо, що необхідність у поправці пов'язана з невеликою кількістю елементів при побудові скінченно-елементної моделі.

Лекція 6

ДВОВИМІРНІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ ПЛОСКОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

6.1 Основні залежності плоскої задачі напруженого стану

У тонкостінних елементах конструкцій, зокрема пластин, при дії сил, прикладених по контуру, має місце плоский напружений стан. Уявимо собі плоску пластину, завантажену силами у її площині (Рис. 6.1, а). Товщину пластин h вважаємо малою порівняно з габаритними розмірами a і b .

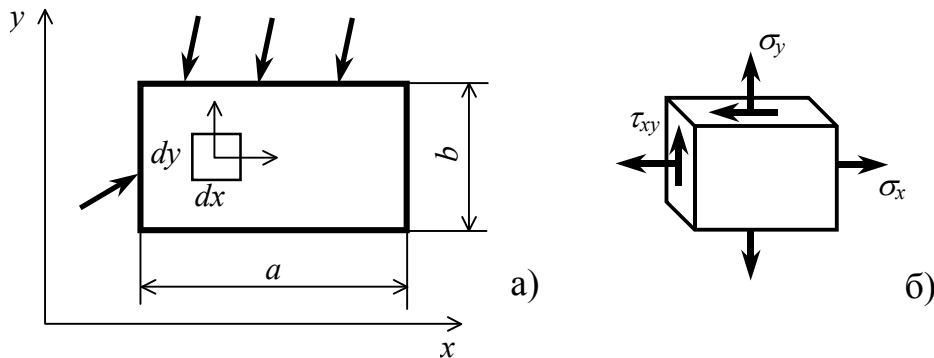


Рис. 6.1 – Плоский напружений стан

Якщо виділити у пластині елемент з розмірами dx , dy , h , то на його гранях у загальному випадку будуть діяти напруження σ_x , σ_y і τ_{xy} (рис. 6.1, б). Напруження σ_z , τ_{xz} , τ_{zy} будуть нульовими на поверхнях елемента. Припустимо, що ці напруження будуть нульовими і у внутрішніх точках елемента. Такий напружений стан називають плоским. Напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} рівномірно розподілені по товщині пластини h , якщо h – мала величина. Схему плоского напруженого стану приймають і у випадках не малої товщини h , і якщо навантаження нерівномірно розподілене по товщині, однак симетричне відносно серединної площини. При цьому знайдені напруження вважають середніми по товщині (узагальнений плоский напружений стан).

Задача про визначення напруженого стану є двовимірною, оскільки напруження і переміщення u і v залежать від двох координат x і y .

Використовуючи узагальнений закон Гука, з урахуванням введених припущень, одержимо

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), & \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, & \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Наявність поперечної деформації $\varepsilon_z \neq 0$ приводить до появи переміщення у напрямку, перпендикулярному поверхні пластини. Однак, у зв'язку з малою товщиною пластини, це переміщення буде малим, і можна стверджувати, що точки пластини переміщуються в основному вздовж осей x і y .

Рівняння рівноваги і граничні умови на поверхні тіла матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}_V &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_S^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{P}_S, \end{aligned} \quad (6.2)$$

де \mathbf{A} – матричний диференціальний оператор для плоского напруженого стану;

\mathbf{A}_S – матриця направляючих косинусів нормалі до поверхні, де діє навантаження \mathbf{P}_S ;

\mathbf{P}_V – вектор масових сил;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_V = \begin{bmatrix} X_V \\ Y_V \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_S = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$n_x = \cos(x, n), \quad n_y = \cos(y, n).$$

Геометричні рівняння (рівняння Коші) приймають вигляд

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (6.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T, \quad \mathbf{u} = \{u \quad v\}^T.$$

З шести рівнянь сумісності деформацій у даному випадку залишається тільки одне

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Закон Гука, записаний відносно напружень, приймає вигляд

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.5)$$

де \mathbf{C} – матриця пружних модулів

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Необхідно відрізнити плоский напружений стан від плоскої деформації. Якщо для пластини, навантаженої у своїй площині, створюються такі умови, що деформація по товщині неможлива (це може бути у двох випадках: у тілі

великої довжини, коли кожний умовно виділений шар не може деформуватись по товщині, або при закріпленні тонкого шару (Рис. 6.2а, б)), має місце плоска деформація.

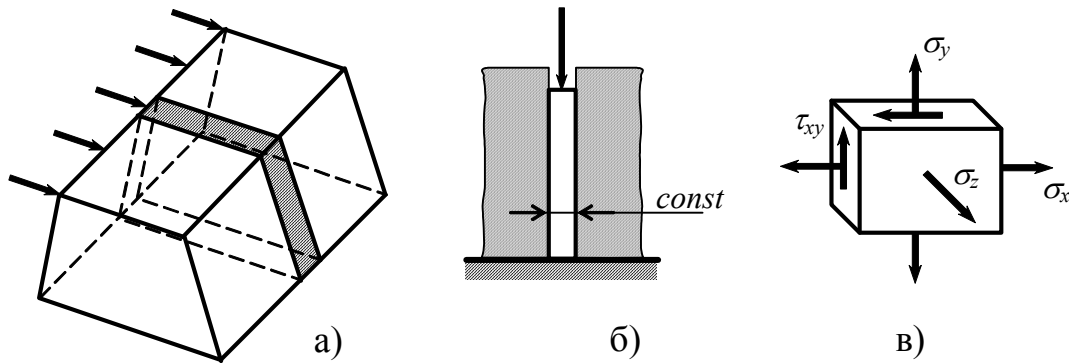


Рис. 6.2 – Плоска деформація

Згідно із законом Гука, при $\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Напружений стан, зображений на рисунку 6.2в, є об'ємним, але він повністю визначається трьома напруженнями, що залежать від двох координат x і y , тому задача плоскої деформації залишається двовимірною. Для плоскої деформації усі рівняння плоского напруженого стану залишаються незмінними окрім рівнянь закону Гука. У зв'язку з наявністю напруження σ_z для плоскої деформації у матриці C (6.6) необхідно ввести нові умовні константи пружності $\nu_1 = \nu/(1 - \nu)$, $E_1 = E/(1 - \nu^2)$ і $G = E_1/[2(1 + \nu_1)]$.

6.2 Скінченні елементи для моделювання плоскої задачі

Задача плоского напруженого стану, як видно з (6.2), (6.3), відноситься до класу задач, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку ($2m = 2$). У зв'язку з цим для забезпечення збіжності МСЕ інтерполяційні поліноми повинні задовольняти умовам неперервності по всій області. Найвищий степінь полінома повинен бути не менший, ніж $2m - 1 = 1$. Таким чином, переміщення в елементі (рис. 6.4) апроксимуємо такими функціями:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_3x + \alpha_5y, v(x, y) = \alpha_2 + \alpha_4x + \alpha_6y. \quad (6.7)$$

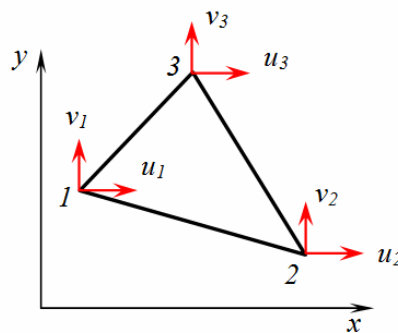


Рис. 6.4 – Плоский трикутний елемент

Для визначення шести коефіцієнтів маємо шість умов для переміщень у вузлах

$$u(x_i, y_i) = u_i, \quad v(x_i, y_i) = v_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.8)$$

Як і раніше, переміщення записуємо у вигляді добутку функцій інтерполяції на невідомі коефіцієнти – переміщення вузлових точок

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (6.9)$$

де

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}^T, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3) \frac{1}{2S},$$

$$N_2 = y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1) \frac{1}{2S},$$

$$N_3 = y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2) \frac{1}{2S},$$

$$2S = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23},$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Компоненти вектора деформацій згідно із залежностями (6.4)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{q}, \quad (6.11)$$

де

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & -y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & x_{21} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & x_{21} & -y_{21} \end{bmatrix} - \quad (6.12)$$

матриця деформацій.

Використовуючи далі фізичні залежності (6.5), одержимо вираз для напружень

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.13)$$

де

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T, \quad \mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Після підстановки $\boldsymbol{\varepsilon}$ з (6.11) одержимо

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{C}_0\mathbf{q}, \quad (6.14)$$

де

$$\mathbf{C}_\sigma = \frac{E}{2S(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{23} & -\nu x_{23} & y_{31} & -\nu x_{31} & -y_{21} & \nu x_{31} \\ \nu y_{23} & -x_{23} & \nu y_{31} & -x_{31} & -\nu y_{21} & x_{21} \\ -a_1 x_{23} & a_1 y_{23} & -a_1 x_{31} & a_1 y_{31} & a_1 x_{21} & -a_1 y_{21} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$a_1 = \frac{G}{E}(1-\nu^2).$$

Матрицю жорсткості \mathbf{K} одержимо з виразу для потенціальної енергії деформації як квадратичної форми

$$\mathbf{U} = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (6.16)$$

Після підстановки напружень і деформацій в інтеграл енергії

$$U = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (6.17)$$

і порівняння одержаного виразу з (6.16) отримаємо матрицю жорсткості \mathbf{K} з компонентами

$$\begin{aligned} K_{11} &= \bar{E}(y_{23}^2 + a_1 x_{23}^2), & K_{12} &= K_{21} = \bar{E}(a_1 + \nu)x_{32}y_{23}, \\ K_{13} &= K_{31} = \bar{E}(y_{23}y_{31} + a_1 x_{23}x_{31}), & K_{14} &= K_{41} = \bar{E}(a_1 x_{32}y_{31} + \nu x_{13}y_{23}), \\ K_{15} &= K_{51} = \bar{E}(a_1 x_{12}x_{23}), & K_{16} &= K_{61} = \bar{E}(a_1 x_{32}y_{12} + \nu x_{21}y_{23}), \\ K_{22} &= \bar{E}(x_{23}^2 + a_1 y_{23}^2), & K_{23} &= K_{32} = \bar{E}(a_1 x_{13}y_{23} + \nu x_{32}y_{31}), \\ K_{24} &= K_{42} = \bar{E}(x_{23}x_{31} + a_1 y_{23}y_{31}), & K_{25} &= K_{52} = \bar{E}(a_1 x_{21}y_{23} + \nu x_{32}y_{12}), \\ K_{26} &= K_{62} = \bar{E}(x_{12}x_{23} + a_1 y_{12}y_{23}), & K_{33} &= \bar{E}(y_{31}^2 + a_1 x_{31}^2), \\ K_{34} &= K_{43} = \bar{E}(a_1 + \nu)x_{13}y_{31}, & K_{35} &= K_{53} = \bar{E}(a_1 x_{12}x_{31} + \nu y_{12}y_{31}), \\ K_{36} &= K_{63} = \bar{E}(a_1 x_{13}y_{12} + \nu x_{21}y_{31}), & K_{44} &= \bar{E}(x_{31}^2 + a_1 y_{31}^2), \\ K_{45} &= K_{54} = \bar{E}(a_1 x_{21}y_{31} + \nu x_{13}y_{12}), & K_{46} &= K_{64} = \bar{E}(x_{12}x_{31} + a_1 y_{12}y_{31}), \\ K_{55} &= \bar{E}(y_{12}^2 + a_1 x_{12}^2), & K_{56} &= K_{65} = \bar{E}(a_1 + \nu)x_{21}y_{12}, \\ K_{66} &= \bar{E}(x_{12}^2 + a_1 y_{12}^2), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\bar{E} = \frac{Eh}{4S(1-\nu^2)}, \quad S = \frac{1}{2}(x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}),$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Якщо елемент навантажений діючими у його площині поверхневими $\mathbf{P}_S = \{X_S \ Y_S\}$ і об'ємними $\mathbf{P}_V = \{X_V \ Y_V\}$ силами, еквівалентні вузлові навантаження можна визначити, скориставшись виразами для роботи сил на переміщеннях точок їх прикладення

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{P}_V dV, \quad \mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{P}_S dS. \quad (6.19)$$

При достатньо малих розмірах скінченного елемента можна ввести середні значення інтенсивностей по полю скінченного елемента

$$X_S = X_S^O, \quad Y_S = Y_S^O, \quad X_V = X_V^O, \quad Y_V = Y_V^O.$$

Тоді вектор вузлових навантажень матиме вигляд

$$\mathbf{F} = \{P_1 \quad P_2 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_1 \quad P_2\}^T, \quad (6.20)$$

де

$$P_1 = \frac{X_S^O + hX_V^O}{3} S, \quad P_2 = \frac{Y_S^O + hY_V^O}{3} S,$$

S – площа елемента.

Зазначимо, що при визначенні компонентів матриці жорсткості доцільно координати вузлів елемента записувати зразу в глобальній системі координат, щоб виключити потім приведення локальної системи кожного елемента у глобальну.

Побудуємо матрицю жорсткості для прямокутного елемента (рис. 6.5).

Приймаємо вектор вузлових переміщень у вигляді

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}^T. \quad (6.21)$$

Індекси у переміщеннях u і v позначають номер вузла, функція, що апроксимує поле переміщень, визначається поліномом

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v &= \alpha'_1 + \alpha'_2 x + \alpha'_3 y + \alpha'_4 xy. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Якщо локальна система координат має початок у центрі ваги елемента (рис. 6.5), умови для визначення коефіцієнтів мають вигляд

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_3, v = v_3; & \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_2, v = v_2; \\ \left. \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_1, v = v_1; & \quad \left. \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{array} \right\} u = u_4, v = v_4. \end{aligned} \quad (6.23)$$

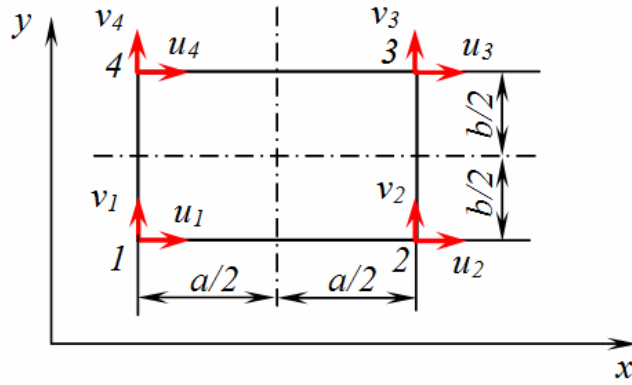


Рис. 6.5 – Прямокутний елемент

Після визначення коефіцієнтів матимемо залежність

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad (6.24)$$

де

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}, & N_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab}, \\ N_3 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}, & N_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Деформації визначаються залежністю

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (6.26)$$

де

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{N}, \quad (6.27)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b\left(-\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & 0 & b\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) & 0 \\ 0 & a\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & 0 & a\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) \\ x\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & b\left(-\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & a\left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) & b\left(-\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\begin{bmatrix} b\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & 0 & b\left(-\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) & 0 \\ 0 & a\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & 0 & a\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) \\ a\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right) & b\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{b}\right) & a\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a}\right) & b\left(-\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) \end{bmatrix}.$$

Вектор напружень згідно з (6.13), (6.26),

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (6.29)$$

Матриця жорсткості

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV. \quad (6.30)$$

Компоненти матриць жорсткості і сил для системи елементів визначаються за такою ж методикою, що і для стержневих систем, – з використанням матриці індексів.

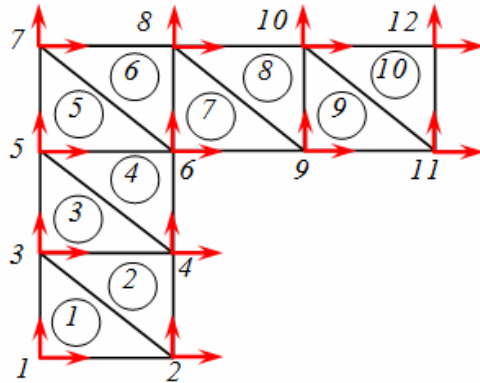
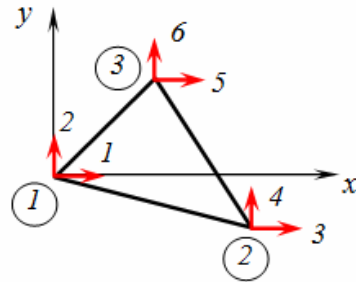
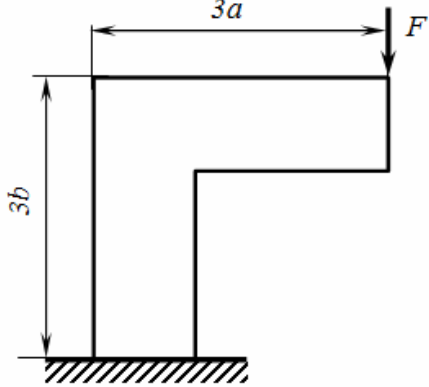
Більш складним виявляється врахування ненульових граничних умов. Якщо j – напрямок, у якому вузлове значення переміщення задається явно, наприклад, $u_j = u_0$, то в j -й рядок матриці системи вносяться нулі, крім діагональної позиції, де ставиться 1, а в j -й рядок матриці \mathbf{F} вводиться значення u_0 .

Згідно з другим варіантом, діагональний елемент у j -ому рядку множиться на дуже велике число, а j -й елемент у матриці \mathbf{F} замінюється добутком того ж числа на u_0 і діагональний елемент K_{jj} . Приклади використання одержаних матриць для плоских скінченних елементів наведені нижче.

Приклад 6.1. Визначити вузлові переміщення і напруження для пластини, завантаженої силою в її площині. Схема навантаження, скінченний елемент і схема розділення на скінченні елементи показані нижче на рисунку.

Вхідні дані

$$\begin{aligned}
 a &:= 1 & b &:= 1 & h &:= 0.02 & E &:= 2 \cdot 10^{11} & \nu &:= 0.3 & jj &:= 1..15 \\
 x &:= 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 2 \cdot a \ 2 \cdot a \ 3 \cdot a \ 3 \cdot a^T & G &:= \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \\
 y &:= 0 \ 0 \ b \ b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b^T \\
 xd &:= a \ a \ 0 \ 0 \ 3 \cdot a \ 3 \cdot a \ a^T \\
 yd &:= 3 \cdot b \ 0 \ 0 \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b^T
 \end{aligned}$$



$$\text{Nod} := \text{augmen}(x, y)^T \quad \text{nv} := \text{cols}(x) \quad \text{jj} := 1..nv$$

Матриця координат вузлів

$$\text{Nod} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Топологічна матриця

$$\begin{aligned}
 \text{Top} &:= \begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 7 & 6 & 8 & 9 & 10^T \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 9 & 9 & 11 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10 & 12 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Кількість елементів $\text{ne} := \text{rows}(\text{Top})$

Кількість вузлів у елементі $\text{nve} := \text{cols}(\text{Top})$

$$\text{j} := 1..nve \quad \text{i} := 1..ne \quad nve = 3 \quad ne = 10$$

Координати вузлів кожного елемента

$$X_{j,i} := \text{Nod}_{1, \text{Top}_{i,j}} \quad Y_{j,i} := \text{Nod}_{2, \text{Top}_{i,j}}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Формування матриці жорсткості елемента

$$\begin{aligned} x12(i) &:= X_{1,i} - X_{2,i} & x13(i) &:= X_{1,i} - X_{3,i} & x23(i) &:= X_{2,i} - X_{3,i} \\ x31(i) &:= -x13(i) & x21(i) &:= -x12(i) & x32(i) &:= -x23(i) \\ y12(i) &:= Y_{1,i} - Y_{2,i} & y23(i) &:= Y_{2,i} - Y_{3,i} & y13(i) &:= Y_{1,i} - Y_{3,i} \\ y21(i) &:= -y12(i) & y32(i) &:= -y23(i) & y31(i) &:= -y13(i) \end{aligned}$$

$$A(i) := \frac{x23(i) \cdot y31(i) - x31(i) \cdot y23(i)}{2}$$

$h := 0.02$ Товщина пластини

$$B(i) := \begin{pmatrix} y23(i) & 0 & y31(i) & 0 & y12(i) & 0 \\ 0 & x32(i) & 0 & x13(i) & 0 & x21(i) \\ x32(i) & y23(i) & x13(i) & y31(i) & x21(i) & y12(i) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot A(i)}$$

Матриця пружних модулів $D := \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{1-\nu^2}$

Матриця жорсткості елемента $Ke(i) := B(i)^T \cdot D \cdot B(i) \cdot h \cdot A(i)$

Формування матриці індексів

$$\begin{aligned} m_{i,(2 \cdot j - 1)} &:= 2 \cdot \text{Top}_{i,j} - 1 \\ m_{i,2 \cdot j} &:= 2 \cdot \text{Top}_{i,j} \\ i &:= 1 \dots 10 \\ k &:= 1 \dots 6 \\ jj &:= 1 \dots 6 \end{aligned} \quad m_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 7 & 8 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 11 & 12 & 15 & 16 \\ 11 & 12 & 17 & 18 & 15 & 16 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 18 & 21 & 22 & 19 & 20 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

Формування матриці жорсткості пластини

$$K_{24,24} := 0 \quad K_{m_i, j_j, m_i, k} := K_{m_i, j_j, m_i, k} + Ke(i)_{j_j, k}$$

Вектор зовнішніх навантажень

$$FS := 0 \ -1^T$$

Граничні умови: U1,U2,U3,U4 еkv 0

$$m := 1..20 \quad n := 1..20 \quad KS_{m,n} := K_{(m+4),(n+4)}$$

$$\text{Переміщення вузлів: } U := KS^{-1} \cdot FS \quad \text{Nul} := (0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$\text{Повний вектор переміщень} \quad US := \text{augment}(\text{Nul}, U^T)^T$$

Побудова схеми переміщень вузлів пластини $s := 1..12$

$$X := 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 0 \ a \ 2 \cdot a \ 2 \cdot a \ 3 \cdot a \ 3 \cdot a^T$$

$$Y := 0 \ 0 \ b \ b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b^T$$

$$Xd := 2 \cdot a \ a \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a \ a \ a \ a \ a \ 2 \cdot a \ 3 \cdot a^T$$

$$Yd := 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ b \ 0 \ 0 \ b \ 2 \cdot b \ 3 \cdot b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b \ 2 \cdot b^T$$

$$Xp := \text{augment}(X^T, Xd^T)^T \quad Yp := \text{augment}(Y^T, Yd^T)^T$$

$$Ux_s := US_{2 \cdot s - 1} \quad Uy_s := US_{2 \cdot s}$$

$$Uxd := (Ux_{10} \ Ux_8 \ Ux_7 \ Ux_5 \ Ux_3 \ Ux_1 \ Ux_2 \ Ux_4 \ Ux_6 \ Ux_8 \ Ux_6 \ Ux_9 \ Ux_{11})$$

$$Uyd := (Uy_{10} \ Uy_8 \ Uy_7 \ Uy_5 \ Uy_3 \ Uy_1 \ Uy_2 \ Uy_4 \ Uy_6 \ Uy_8 \ Uy_6 \ Uy_9 \ Uy_{11})$$

$$Uxg := \text{augment}(Ux^T, Uxd) \quad Uyg := \text{augment}(Uy^T, Uyd)$$

$$XG := Xp^T + Uxg \cdot 10^8 \cdot 0.5$$

$$YG := Yp^T + Uyg \cdot 10^8 \cdot 0.5$$

$$Fx := \left[(XG^T)_{12} \ (XG^T)_{12} \ (XG^T)_{12} - 0.1 \ (XG^T)_{12} \ (XG^T)_{12} + 0.1 \right]^T$$

$$Fy := \left[(YG^T)_{12} + 1 \ (YG^T)_{12} \ (YG^T)_{12} + 0.1 \ (YG^T)_{12} \ (YG^T)_{12} + 0.1 \right]^T$$

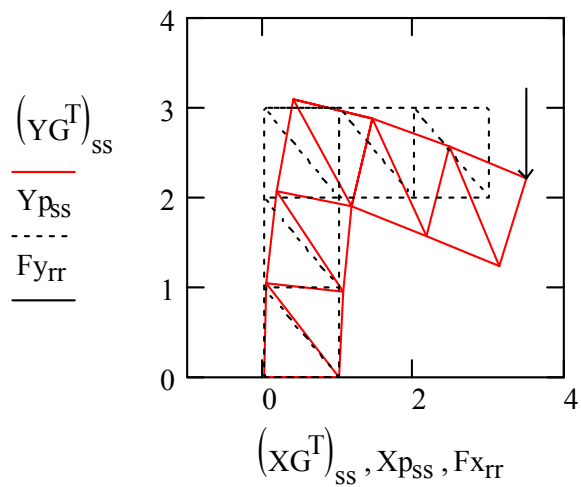
$U_{x_s} =$

0
0
$8.244 \cdot 10^{-10}$
$8.947 \cdot 10^{-10}$
$3.403 \cdot 10^{-9}$
$3.409 \cdot 10^{-9}$
$8.144 \cdot 10^{-9}$
$8.7 \cdot 10^{-9}$
$2.991 \cdot 10^{-9}$
$9.234 \cdot 10^{-9}$
$2.843 \cdot 10^{-9}$
$9.529 \cdot 10^{-9}$

$U_{y_s} =$

0
0
$6.215 \cdot 10^{-10}$
$-1.098 \cdot 10^{-9}$
$1.21 \cdot 10^{-9}$
$-2.164 \cdot 10^{-9}$
$1.639 \cdot 10^{-9}$
$-2.42 \cdot 10^{-9}$
$-8.642 \cdot 10^{-9}$
$-8.775 \cdot 10^{-9}$
$-1.565 \cdot 10^{-8}$
$-1.6 \cdot 10^{-8}$

$ss := 1..25$ $rr := 1..5$



Визначення напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$$a1 := \frac{(1-\nu)}{2} \quad \nu := 0.3$$

$$E_{\sigma}(i) := \frac{E}{2 \cdot A(i) \cdot (1-\nu^2)} \cdot \begin{pmatrix} y23(i) & -\nu \cdot x23(i) & y31(i) & -\nu \cdot x31(i) & -y21(i) & \nu \cdot x21(i) \\ \nu \cdot y23(i) & -x23(i) & \nu \cdot y31(i) & -x31(i) & -\nu \cdot y21(i) & x21(i) \\ -a1 \cdot x23(i) & a1 \cdot y23(i) & -a1 \cdot x31(i) & a1 \cdot y31(i) & a1 \cdot x21(i) & -a1 \cdot y21(i) \end{pmatrix}$$

$$j := 1..6 \quad Nul := (0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad US := \text{augmen}(Nul, U^T)^T$$

$$W_{i,j} := US_{mi,j} \quad WT := W^T \quad \sigma^{(i)} := E_{\sigma}(i) \cdot WT^{(i)}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 40.976 & -56.913 & 54.237 & -68.875 & 29.728 & 105.234 & -108.648 & 108.648 & -41.472 & 41.472 \\ 136.588 & -236.588 & 133.912 & -233.912 & 94.766 & -19.624 & -83.789 & 6.106 & -38.93 & -58.528 \\ 63.412 & -63.412 & 66.088 & -66.088 & 105.234 & 94.766 & -91.352 & -8.648 & -58.528 & -41.472 \end{pmatrix}$$

У матриці σ перший рядок – напруження σ_x , другий – σ_y , третій – τ_{xy} .

Лекція 7
СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛАСТИН І
ОБОЛОНОК

7.1 Основні рівняння згину прямокутних пластин

Розглянемо тонку* пластину, віднесену до прямокутної системи координат x, y, z (рис. 7.1).

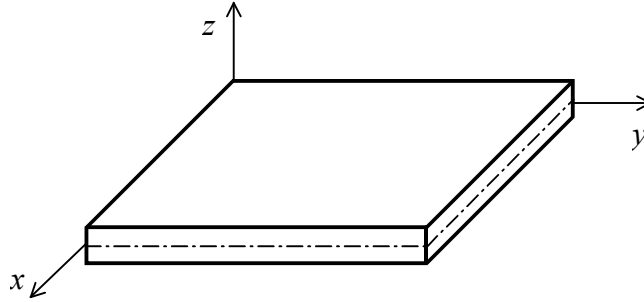


Рис. 7.1 – Тонка пластина

Координатною будемо називати площину, рівновіддалену від зовнішніх площин, що утворюють пластину. Рівняння, що описують переміщення точок пластини, будуться на основі таких гіпотез:

1) Нормальний до серединної площини прямолінійний елемент у процесі деформування залишається прямолінійним, нормальним до деформованої серединної поверхні і зберігає свою довжину. Звідси випливає, що деформації $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \epsilon_z$ є нульовими;

2) Нормальні напруження σ_z малі порівняно з другими компонентами тензора напружень, і їх можна не враховувати у фізичних залежностях.

У зв'язку з тим, що прогини вважаються малими, і задача лінійною, серединна поверхня пластини при згині залишається недеформованою у своїй площині, тобто $u_0 = v_0 = 0$.

На основі першої гіпотези маємо

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7.1)$$

Інтегруючи перші два рівняння, знайдемо вирази для переміщень шару, що відстоїть від серединного на відстані z

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + C_1(x, y), \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + C_2(x, y). \quad (7.2)$$

* Тонкою можна вважати пластину, у якої товщина не перевищує 1/10 від меншого габаритного розміру.

З урахуванням недеформованості серединної площини ($u_0 = v_0 = 0$) рівняння (7.2) спрощуються

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (7.3)$$

Відносні деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ визначаються з рівнянь Коші

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7.4)$$

З урахуванням гіпотези про малість напруження σ_z , рівняння закону Гука будуть такими:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{zy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Інтегруванням по товщині одержимо згинаючі моменти M_x, M_y і момент кручення M_{xy}

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (7.6)$$

Після підстановки (7.5) у (7.6) одержимо

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Порівнюючи (7.5) і (7.7), одержимо напруження

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (7.8)$$

Розглянемо рівновагу елемента пластини (Рис. 7.2). Вздовж осі z на пластину діє поперечне розподілене навантаження p_z . На гранях елемента діють згинаючі моменти і момент кручення, а також поперечні сили Q_x і Q_y .

Рівняння рівноваги елемента, зокрема сума проєкцій на вісь z , має вигляд

$$-p_z dx dy + \partial Q_x dy + \partial Q_y dx = 0. \quad (7.9)$$

Розділивши на $dx dy$, одержимо

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = p_z \cdot \quad (7.10)$$

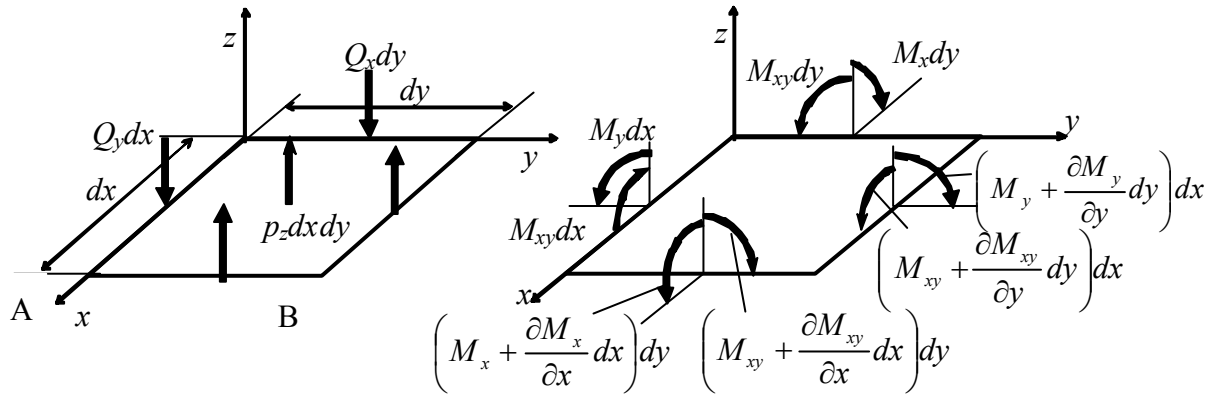


Рис. 7.2 – Внутрішні сили у поперечних перерізах пластини

Ще два рівняння одержимо, записуючи рівність нулю сумарного моменту усіх сил відносно осей AB і BC . Зокрема, умова $\sum m_{AB} = 0$ запишеться так:

$$(Q_x dy) dx - \partial M_x dy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy dx + p_z dx dy \frac{dx}{2} = 0. \quad (7.11)$$

Відкинувши останній доданок як нескінченно малу величину другого порядку малості і розділивши на $dx dy$, одержимо

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y. \quad (7.12)$$

Щоб одержати рівняння для прогину, підставимо значення моментів M_x, M_y, M_{xy} у рівняння (7.12), після чого одержані вирази Q_x і Q_y через прогин підставимо у (7.10).

У результаті матимемо таке рівняння:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}, \quad (7.13)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

При розв'язанні цього рівняння необхідно враховувати граничні умови (рис. 7.3)

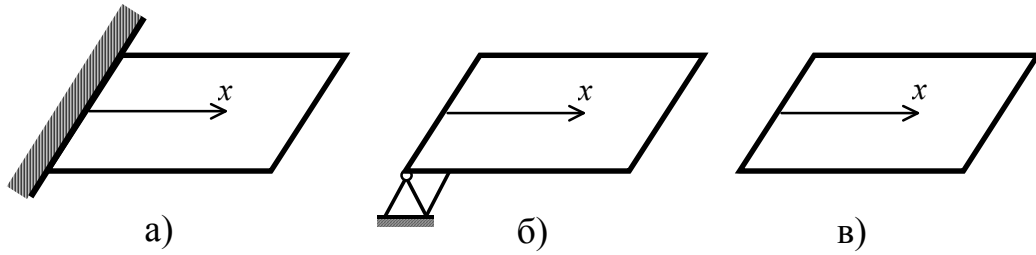


Рис. 7.3 – Схеми закріплення: а) жорстке закріплення; б) шарнірне закріплення; в) вільний край

Для жорсткого закріплення краю (Рис. 7.3,а)

$$x = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Для шарнірного закріплення краю (Рис. 7.3,б)

$$x = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Граничні умови для інших способів закріплення формулюються складніше. Наприклад, для вільного краю (Рис. 7.3,в) записується рівність нулю приведеної поперечної сили, що враховує саму силу Q_x і момент кручення M_{xy}

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (7.14)$$

Такі ж умови можна записати для країв $y = 0, x = a, y = b$ (a, b – розміри пластини).

Розв'язок рівняння (7.13) в аналітичній формі для пластин складної конфігурації одержати важко. Тільки для деяких умов закріплення пластин прямокутної форми можна побудувати розв'язок у формі ряду. Наприклад, для шарнірно закріпленої пластини, завантаженої тиском p_z , можна знайти розв'язок у вигляді ряду

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.15)$$

Для цього необхідно навантаження p_z розкласти в подвійний ряд Фур'є

$$p_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.16)$$

Для $p_z = const$ коефіцієнти ряду $p_{mn} = 16p / m\pi^2$.

Коефіцієнти A_{mn} одержимо після підстановки (7.15) і (7.16) у рівняння (7.13)

$$A_{mn} = \frac{16p}{m\pi^2 D} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-2}. \quad (7.17)$$

Значення моментів і напружень визначаються після підстановки виразу для w відповідно у формули (7.5) і (7.7).

Аналітичний розв'язок можна одержати також у випадку, коли два протилежних краї прямокутної пластини мають шарнірні опори (Рис. 7.4).

Якщо опори розміщені на краях $y=0$ і $y=b$, то розв'язок приймають у формі одинарного ряду

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.18)$$

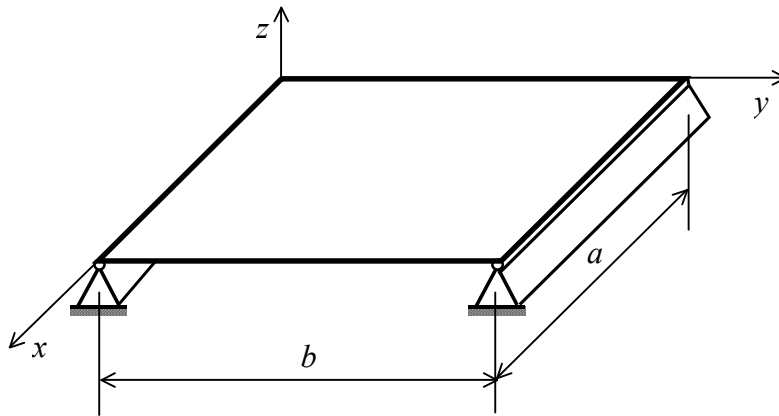


Рис. 7.4 – Пластина з двома шарнірно закріпленими краями

Записуючи у такій же формі і навантаження і підставляючи у рівняння (7.13), після скорочення на $\sin \frac{n\pi y}{b}$ одержимо для кожного w_n звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 w_n}{dx^2} + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 w_n = \frac{p_z}{D}. \quad (7.19)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$w_n = C_{1n} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + C_{2n} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + C_{3n} x \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{a} + C_{4n} x \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} + w_{nr}. \quad (7.20)$$

Частинний розв'язок w_{nr} залежить від вигляду правої частини рівняння (7.19). Для навантаження, що не змінюється вздовж осі y ,

$$w_{nr} = p_n b^4 / (n^4 \pi^4 D),$$

де p_n – коефіцієнт розкладення в ряд навантаження p_z .

Сталі $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ визначаються з умов закріплення країв $x=0, x=a$.

Загальний розв'язок знаходиться згідно з (7.20).

7.2 Застосування МСЕ до розрахунку пластин

При використанні МСЕ для розв'язку задач згину пластин застосовується така ж дискретизація, яка розглядалась вище у плоскій задачі теорії пружності: пластину моделюють у вигляді сукупності плоских скінченних елементів. Найчастіше використовують прямокутні й трикутні елементи.

7.2.1 Прямокутний елемент пластини з 12 ступенями вільності

У кожній вузловій точці елемента (Рис. 7.5) вводять по три узагальнені переміщення: переміщення у напрямку осі z і два кутових відносно осей x і y (позначені подвійними стрілками).

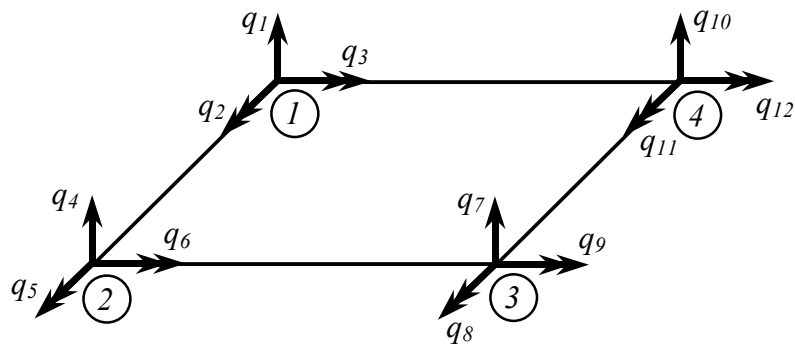


Рис. 7.5 – Скінченний елемент пластини

Таким чином, положення серединної поверхні прямокутного елемента пластини визначиться 12 узагальненими координатами. Прогин пластини можна апроксимувати поліномом з 12 невідомими параметрами

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (7.21)$$

Використання цього полінома забезпечує неперервність переміщень, але приводить до порушення неперервності кутів повороту суміжних елементів [36].

Якщо визначити коефіцієнти α_i через узагальнені координати, скориставшись умовами

$$q_1 = w(0,0), \quad q_2 = \frac{\partial w}{\partial y}(0,0), \quad q_3 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0,0), \quad \dots, \quad q_{12} = -\frac{\partial w}{\partial x}(0,b), \quad (7.22)$$

одержимо після підстановки значень α_i і компонування виразу (5.21) відносно q_i

$$w(x, y) = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (7.23)$$

де \mathbf{N} – матриця функцій Ерміта;

\mathbf{q} – вектор вузлових переміщень;

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{12}]$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$N_2 = a \left(\frac{y}{b} - 1\right) \left(\frac{x}{a} - 1\right) \frac{x}{a}, \quad N_3 = b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{y}{b},$$

$$N_4 = 2 \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x}{a} \left(\frac{3x}{2a} + \frac{1y}{2b} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$N_5 = a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x^2}{a^2}, \quad N_6 = b \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \frac{x}{a} \frac{y}{b},$$

$$N_7 = \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(3 \frac{x}{a} + 3 \frac{y}{b} - 1 - 2 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y^2}{b^2}\right), \quad (7.24)$$

$$N_8 = -a \frac{x^2}{a^2} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad N_9 = b \frac{y^2}{b^2} \frac{x}{a} \left(\frac{y}{b} - 1\right),$$

$$N_{10} = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + 3 \frac{y}{b} - 2 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$N_{11} = a \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2, \quad N_{12} = -b \frac{y^2}{b^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

$$\mathbf{q} = \left\{ w_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_1, w_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_2, w_3 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_3, w_4 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}_4 \right\}^T =$$

$$= \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{12}\}^T. \quad (7.25)$$

Матрицю жорсткості елемента одержимо, записуючи потенціальну енергію деформації у вигляді квадратичної форми

$$\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (7.26)$$

Напруження і деформації визначаються через прогин залежностями (7.4), (7.5). Підставляючи їх значення у (7.26), після інтегрування по z одержимо

$$\mathbf{K} = \int_0^a \int_0^b D \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (7.27)$$

Складові вузлових сил, відповідні навантаженню p ,

$$\mathbf{F} = \int_0^a \int_0^b \mathbf{N}^T p \, dx dy. \quad (7.28)$$

Компоненти матриць одержимо після визначення похідних та інтегрування (7.27) і (7.28). Згідно з [36], матриця \mathbf{K} має такий вигляд:

$$\mathbf{K} = \frac{D}{ab} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_2 & a_{15} & a_7 & a_{16} & a_{17} & a_{10} & a_{18} & a_{17} & a_{13} & a_{19} & a_{17} & \\ a_3 & -a_8 & a_{17} & a_{20} & -a_{11} & a_{17} & a_{21} & a_{14} & a_{17} & a_{17} & a_{12} & \\ a_1 & a_4 & -a_5 & a_{12} & a_{13} & -a_{14} & a_9 & a_{10} & -a_{11} & & & \\ a_2 & -a_{15} & -a_{13} & a_{19} & a_{17} & -a_{10} & a_{18} & a_{17} & & & & \\ a_3 & -a_{14} & a_{17} & a_{22} & a_{11} & a_{17} & a_{21} & & & & & \\ a_1 & -a_4 & -a_5 & a_6 & -a_7 & -a_8 & & & & & & \\ a_2 & a_{15} & -a_7 & a_{16} & a_{17} & & & & & & & \\ a_3 & a_8 & a_{17} & a_{20} & & & & & & & & \\ a_1 & -a_4 & a_5 & & & & & & & & & \\ a_2 & -a_{15} & & & & & & & & & & \\ a_3 & & & & & & & & & & & \\ \text{сум.} & & & & & & & & & & & a_3 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -4 \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) + 2\nu + \frac{28 D_k}{5 D}, \\ a_2 &= \left(\frac{4}{3} m^2 + \frac{8 D_k}{25 D} \right) b^2, \quad a_3 = \left(\frac{4}{3 m^2} + \frac{8 D_k}{5 D} \right) a^2, \\ a_4 &= \left(2m^2 + \nu + \frac{2 D_k}{5 D} \right) b, \quad a_5 = - \left(\frac{2}{m^2} + \nu + \frac{2 D_k}{5 D} \right) a, \\ a_6 &= 2m^2 - \frac{4}{m^2} - 2\nu - \frac{28 D_k}{5 D}, \\ a_7 &= \left(m^2 - \nu - \frac{2 D_k}{5 D} \right) b, \quad a_8 = - \left(\frac{2}{m^2} + \frac{2 D_k}{5 D} \right) a, \\ a_9 &= -m^2 - \frac{2}{m^2} + 2\nu + \frac{28 D_k}{5 D}, \\ a_{10} &= \left(m^2 - \frac{2 D_k}{5 D} \right) b, \quad a_{11} = \left(-\frac{1}{m^2} + \frac{2 D_k}{5 D} \right) a, \\ a_{12} &= -4m^2 + \frac{2}{m^2} - 2\nu - \frac{28 D_k}{5 D}, \quad a_{13} = \left(2m^2 + \frac{2 D_k}{5 D} \right) b, \\ a_{14} &= \left(-\frac{1}{m^2} + \nu + \frac{2 D_k}{5 D} \right) a, \quad a_{15} = -\nu ab, \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned}
a_{16} &= \left(\frac{2}{3} m^2 - \frac{8}{5} \frac{D_k}{D} \right) b^2, \quad a_{17} = 0, \\
a_{18} &= \left(\frac{1}{3} m^2 - \frac{2}{15} \frac{D_k}{D} \right) b^2, \quad a_{19} = \left(\frac{2}{3} m^2 - \frac{2}{15} \frac{D_k}{D} \right) b^2, \\
a_{20} &= \left(\frac{2}{3m^2} - \frac{2}{15} \frac{D_k}{D} \right) a^2, \quad a_{21} = \left(\frac{1}{3m^2} + \frac{2}{15} \frac{D_k}{D} \right) a^2, \\
a_{22} &= \left(\frac{2}{3m^2} - \frac{8}{15} \frac{D_k}{D} \right) a^2, \\
m &= \frac{a}{b}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_k = \frac{Gh^3}{12},
\end{aligned}$$

E, G – модулі пружності.

Значення вузлових сил при дії навантаження $p(x, y)$

$$F_i = \int_0^a \int_0^b p(x, y) N_i(x, y) dy dx. \quad (7.31)$$

Для $p(x, y) = p_0 = const$

$$\mathbf{F} = \frac{p_0 ab}{4} \left\{ 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6} \right\}^T. \quad (7.32)$$

Для зовнішньої сили P , прикладеної в центрі елемента,

$$\mathbf{F} = \frac{P}{4} \left\{ 1, \frac{b}{4}, -\frac{a}{4}, 1, -\frac{b}{4}, \frac{a}{4}, 1, -\frac{b}{4}, \frac{a}{4}, 1, \frac{b}{4}, -\frac{a}{4} \right\}^T. \quad (7.33)$$

Для визначення напружень скористаємось формулами

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{12z}{h^3} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \mathbf{E} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \mathbf{E} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{N} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{N} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{N} \end{Bmatrix} \mathbf{q}, \quad (7.34) \\
\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 \\ D\nu & D & 0 \\ 0 & 0 & D_k \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

У розгорнутому вигляді вирази для напруження у вузлових точках можна знайти у [36].

При невеликих розмірах скінченних елементів для оцінки напружень у кожному елементі можна скористатись середньоарифметичними значеннями напружень у вузлах елемента [36].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{6Dz}{h^3 ab} \begin{bmatrix} 0 & -va & b & 0 & -va & -b & 0 & va \\ 0 & -a & vb & 0 & -a & -vb & 0 & a \\ 4\frac{D_k}{D} & 2b\frac{D_k}{D} & -2a\frac{D_k}{D} & -4\frac{D_k}{D} & -2b\frac{D_k}{D} & -2a\frac{D_k}{D} & 4\frac{D_k}{D} & -2b\frac{D_k}{D} \\ -b & 0 & va & b \\ -vb & 0 & a & vb \\ 2a\frac{D_k}{D} & -4\frac{D_k}{D} & 2b\frac{D_k}{D} & 2a\frac{D_k}{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_{12} \end{Bmatrix}. \quad (7.35)$$

Розглянутий елемент має таку особливість. На границях елементів виконується неперервність функцій w та їх похідних $\frac{\partial w}{\partial x}$ і $\frac{\partial w}{\partial y}$, але не

забезпечується неперервність змішаних похідних $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Якщо додати у вузлах

ще по одній узагальненій координаті $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(a,0)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0,b)$,

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(a,b)$, одержимо елемент з 16 ступенями вільності, який більш точно

апроксимує прогин у пластині. Матриця жорсткості для цього елемента будується аналогічно попередній і подається у [36]. Там же наведені компоненти матриці жорсткості елемента трикутної форми.

7.3 Скінченно-елементні моделі оболонок обертання

У зв'язку з широким розповсюдженням оболонок у техніці та складністю аналітичних розв'язків скінченно-елементному моделюванню оболонок приділяється дуже багато уваги [7, 18, 31].

Необхідність моделювання форми поверхні оболонки приводить до значних ускладнень і при скінченно-елементному моделюванні. Зважаючи на навчальний напрямок видання, обмежимося розглядом осесиметричних оболонок. Як відомо, до тонкостінних оболонок відносяться тіла, які обмежуються двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина h) набагато менше габаритних розмірів. Співвідношення між товщиною і радіусом кривизни тонкостінних оболонок $h/R \leq 1/20$.

В основу прикладної теорії оболонок покладені гіпотези Кірхгофа-Лява, згідно з якими:

1) прямолінійний елемент, перпендикулярний до серединної поверхні, при деформації залишається прямолінійним і перпендикулярним до деформованої серединної поверхні і зберігає свою довжину;

2) нормальні напруження на площадках, паралельних серединній поверхні, малі порівняно з напруженнями на площадках, перпендикулярних цій поверхні.

Ці гіпотези дозволяють привести тривимірну задачу розрахунку просторових тіл, якими є оболонки, до двовимірної задачі рівноваги і деформування серединної поверхні.

Оболонкою обертання будемо називати оболонку, серединна поверхня якої утворюється обертанням деякої кривої, яка називається кривою меридіана, навколо осі, яка є віссю симетрії оболонки.

Якщо оболонка обертання навантажена осесиметричним навантаженням (наприклад, силами тиску), то, як відомо, диференціальні рівняння, що описують напружений стан оболонки, є одновимірними, тобто всі величини залежать від однієї координати s – дуги меридіана. Для моделювання таких оболонок найчастіше застосовують конічні скінченні елементи (Рис. 7.6).

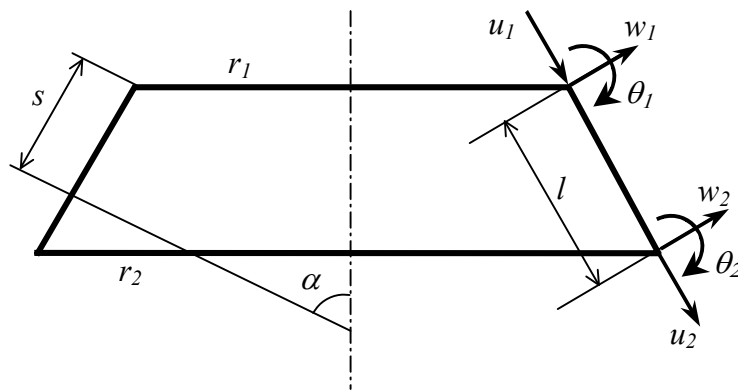


Рис. 7.6 – Конічний елемент оболонки

При осесиметричній деформації оболонок обертання переміщення довільної точки визначається двома компонентами: нормальним прогином w і переміщенням по дотичній до меридіана u .

Розглянемо конічний елемент оболонки з шістьма ступенями вільності (Рис. 7.6). Вектор вузлових переміщень має такий вигляд

$$\mathbf{q} = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T. \quad (7.36)$$

Розшукуємо апроксимації переміщень у вигляді поліномів

$$u = a_1 + a_2 s, \quad w = b_1 + b_2 s + b_3 s^2 + b_4 s^3. \quad (7.37)$$

Враховуючи, що у вузлових точках переміщення і кути повороту дорівнюють $u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2$ і $\theta = -dw/ds$, знайдемо коефіцієнти рівнянь (7.37)

$$\begin{aligned}
u &= u_1 \left(1 - \frac{s}{l}\right) + u_2 \frac{s}{l}, \\
w &= w_1 \left(1 - 3 \frac{s^2}{l^2} + 2 \frac{s^3}{l^3}\right) + \theta_1 \left(-s + 2 \frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) + \\
&+ w_2 \left(3 \frac{s^2}{l^2} - 2 \frac{s^3}{l^3}\right) + \theta_2 \left(\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right),
\end{aligned} \tag{7.38}$$

або у матричній формі

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \tag{7.39}$$

де

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{s}{l}\right) & 0 & 0 & \frac{s}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - 3 \frac{s^2}{l^2} + 2 \frac{s^3}{l^3}\right) & \left(-s + 2 \frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) & 0 & \left(3 \frac{s^2}{l^2} - 2 \frac{s^3}{l^3}\right) & \left(\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) \end{bmatrix}.$$

Деформації у серединній поверхні $\boldsymbol{\varepsilon}$ і зміни кривизни \mathbf{e} для осесиметричної оболонки

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_1\mathbf{u}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{A}_2\mathbf{u}, \tag{7.40}$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2\}^T$, $\mathbf{e} = \{e_1 \ e_2\}^T$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2}{dr^2} \\ 0 & \cos\alpha \frac{d}{dr} \end{bmatrix}. \tag{7.41}$$

Індекс 1 відноситься до меридіональних, а 2 – до кільцевих деформацій і кривизни.

Залежності, які пов'язують вектори деформацій з вузловими переміщеннями,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_1\mathbf{q}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{B}_2\mathbf{q}, \tag{7.42}$$

де $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{N}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_2 = & \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \alpha}{r} \left(1 - \frac{s}{l}\right) & \frac{\sin \alpha}{r} \left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \frac{\sin \alpha}{r} \left(-s + 2\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) \\ \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \alpha}{r} \frac{s}{l} & \frac{\sin \alpha}{r} \left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) & \frac{\sin \alpha}{r} \left(\frac{s^2}{l} - \frac{s^3}{l^2}\right) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_2 = & \begin{bmatrix} 0 & \left(6\frac{1}{l^2} - 12\frac{s}{l^3}\right) & \left(-4\frac{1}{l} + 6\frac{s}{l^2}\right) \\ 0 & \frac{\cos \alpha}{r} \left(6\frac{s}{l^2} - 6\frac{s^2}{l^3}\right) & \frac{\cos \alpha}{r} \left(1 - 4\frac{s}{l} + 3\frac{s^2}{l^2}\right) \\ 0 & \left(-6\frac{1}{l^2} + 12\frac{s}{l^3}\right) & -\left(2\frac{1}{l} - 6\frac{s}{l^2}\right) \\ 0 & \frac{\cos \alpha}{r} \left(-6\frac{s}{l^2} + 6\frac{s^2}{l^3}\right) & \frac{\cos \alpha}{r} \left(-2\frac{s}{l} + 3\frac{s^2}{l^2}\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Після підстановки (7.42) у формулу для потенціальної енергії деформації елемента

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V z^2 \mathbf{e}^T \mathbf{D} \mathbf{e} dV,$$

одержимо матриці жорсткості аналогічно попереднім прикладам

$$\mathbf{K} = 2\pi \int_0^l \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1 r ds + 2\pi \int_0^l \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 r ds,$$

$$\text{де } \mathbf{D}_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}.$$

Перший доданок у матриці \mathbf{K} відповідає деформаціям розтягу-стиску в серединній площині, другий – деформаціям згину і кручення. При наявності поверхневого навантаження \mathbf{p} вектор вузлових сил визначається інтегралом

$$\mathbf{F} = 2\pi \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{p} r ds,$$

де $\mathbf{p} = \{q_u \ q_w\}^T$; q_u , q_w – складові навантаження, дотичні та перпендикулярні твірній конуса.

При синтезі оболонки з окремих скінченних елементів необхідно записати матриці жорсткості й сил у глобальній системі координат z, r (Рис. 7.7). Вектор переміщень у глобальній системі

$$\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{u}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{\theta}_2\}^T. \quad (7.44)$$

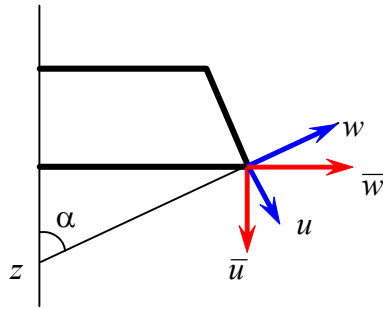


Рис. 7.7 – Глобальні і локальні переміщення точок вузлової лінії

Залежність між векторами \mathbf{q} і $\bar{\mathbf{q}}$ та вузловими силами \mathbf{F} і $\bar{\mathbf{F}}$

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{F}},$$

де

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обернені формули

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T.$$

Матриця жорсткості у глобальних координатах

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}.$$

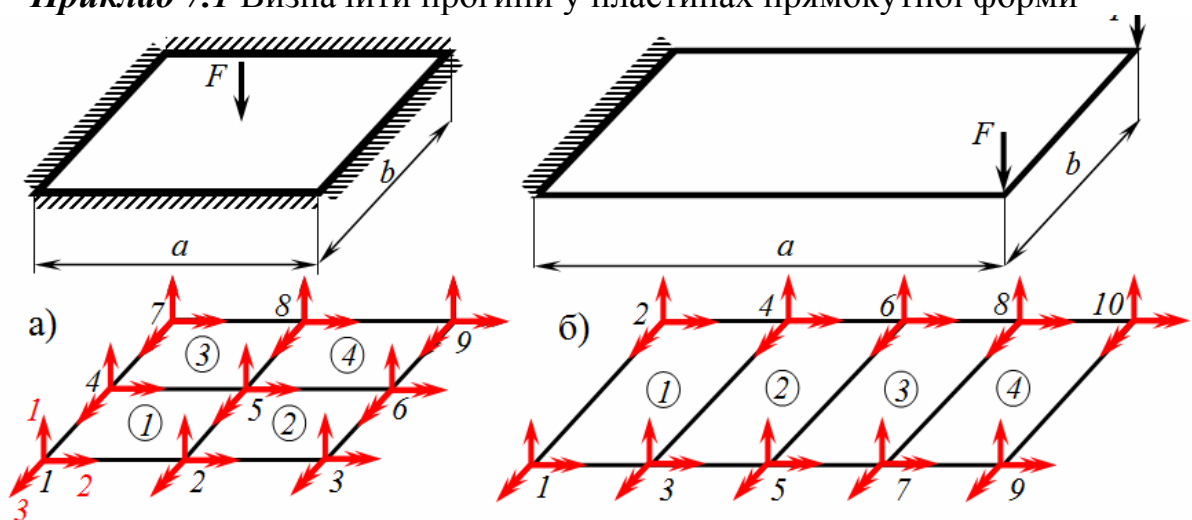
Одержані залежності дозволяють моделювати осесиметричні оболонки при осесиметричних навантаженнях, зокрема при $\alpha = 0$ матимемо елемент для круглої пластини, при $\alpha = 90^\circ$ – елемент циліндричної оболонки. Для цих випадків компоненти матриць можна одержати у явному вигляді.

Для циліндричного елемента матрицю жорсткості можна записати у вигляді суми двох матриць, одна з яких (\mathbf{K}_1) відповідає мембранним силам, а друга (\mathbf{K}_2) – згинаючим моментам і моментам кручення.

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi E h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{R}{l} & -\frac{\nu}{2} & \frac{\nu l}{12} & -\frac{R}{l} & -\frac{\nu}{2} & -\frac{\nu l}{12} \\ & \frac{13 l}{35 R} & -\frac{11 l^2}{210 R} & \frac{\nu}{2} & \frac{9 l}{70 R} & \frac{13 l^2}{420 R} \\ & & \frac{1 l^3}{105 R} & -\frac{\nu l}{12} & -\frac{13 l^2}{420 R} & -\frac{1 l^3}{140 R} \\ & & & \frac{R}{l} & \frac{\nu}{2} & \frac{\nu l}{12} \\ & & & & \frac{13 l}{35 R} & \frac{11 l^2}{210 R} \\ \text{сум.} & & & & & \frac{1 l^3}{105 R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{2\pi E h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h^2 R}{l^3} & -\frac{h^2 R}{2l^2} & 0 & -\frac{h^2 R}{l^3} & -\frac{h^2 R}{2l^2} & 0 \\ & \frac{h^2 R}{3l} & 0 & \frac{h^2 R}{2l^2} & \frac{h^2 R}{6l} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{h^2 R}{l^3} & \frac{h^2 R}{2l^2} & 0 \\ \text{сум.} & & & & \frac{h^2 R}{3l} & 0 \end{bmatrix}$$

Приклад 7.1 Визначити прогини у пластинах прямокутної форми



$$a := 2 \quad b := 1 \quad i := 1..4 \quad a_i := \quad b_i :=$$

Розміри елементів

a	b
a	b
a	b
a	b

Функції форми (функції інтерполяції)

$$f1(x, y, i) := \left[\left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \left[1 + \frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} - 2 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} - 2 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] \right]$$

$$f3(x, y, i) := a_i \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1\right) \cdot \left(\frac{x}{a_i} - 1\right)^2 \cdot \frac{x}{a_i} \quad f2(x, y, i) := b_i \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right)^2 \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f4(x, y, i) := 2 \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{a_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b_i} - \frac{x^2}{(a_i)^2} - \frac{y^2}{(b_i)^2} \right]$$

$$f6(x, y, i) := a_i \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} \quad f5(x, y, i) := b_i \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right)^2 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f10(x, y, i) := 3 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} + \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} - 2 \cdot \frac{y^3}{(b_i)^3} - 3 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} - 3 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i} + 2 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y^3}{(b_i)^3} + 2 \cdot \frac{x^3}{(a_i)^3} \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f9(x, y, i) := a_i \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \quad f12(x, y, i) := -a_i \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^2 \cdot \frac{y}{b_i}$$

$$f11(x, y, i) := -b_i \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \quad f8(x, y, i) := b_i \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1\right)$$

Похідні функцій форми

$$yy1(x, y, i) := -2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)}{b_i} \cdot \left[\frac{1}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] - 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{y}{b_i}\right)}{(b_i)^2}$$

$$yy2(x, y, i) := 2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)}{(b_i)^2} \cdot y - 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{y}{b_i}\right)}{b_i}$$

$$yy4(x, y, i) := \frac{-4}{b_i} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot b_i} - 2 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] - 2 \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x}{a_i \cdot (b_i)^2}$$

$$yy5(x, y, i) := \frac{2}{(b_i)^2} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot y - 4 \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x}{a_i \cdot b_i} \quad yy3(x, y, i) := 0$$

$$yy7(x, y, i) := 2 \cdot \frac{x}{a_i \cdot b_i} \cdot \left[\frac{3}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] - 4 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{(b_i)^3} \quad yy6(x, y, i) := 0$$

$$yy8(x, y, i) := \frac{2}{b_i} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1 \right) + \frac{4}{(b_i)^2} \cdot y \cdot \frac{x}{a_i} \quad yy9(x, y, i) := 0$$

$$yy10(x, y, i) := \frac{6}{(b_i)^2} - 12 \cdot \frac{y}{(b_i)^3} - 6 \cdot \frac{x}{a_i \cdot (b_i)^2} + 12 \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \frac{y}{(b_i)^3}$$

$$yy11(x, y, i) := \frac{-2}{b_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i} \right) + \frac{4}{(b_i)^2} \cdot y \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) \quad yy12(x, y, i) := 0$$

$$xy1(x, y, i) := \frac{1}{a_i \cdot b_i} \cdot \left[1 + \frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} - 2 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} - 2 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] - \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i} \right)}{b_i} \cdot \left[\frac{1}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] \dots$$

$$+ \frac{1}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i} \right) \cdot \left[\frac{1}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right]$$

$$xy2(x, y, i) := \frac{2}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i} \right) \cdot \frac{y}{b_i} - \frac{1}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i} \right)^2$$

$$xy3(x, y, i) := \frac{2}{b_i} \cdot \left(\frac{x}{a_i} - 1 \right) \cdot \frac{x}{a_i} + \frac{1}{b_i} \cdot \left(\frac{x}{a_i} - 1 \right)^2$$

$$xy4(x, y, i) := \frac{-2}{b_i \cdot a_i} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{a_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b_i} - \frac{x^2}{(a_i)^2} - \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] - \frac{2}{b_i} \cdot \frac{x}{a_i} \cdot \left[\frac{3}{2 \cdot a_i} - 2 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] \dots$$

$$+ \frac{\left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i} \right)}{a_i} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot b_i - 2 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right]$$

$$xy7(x, y, i) := \frac{1}{a_i \cdot b_i} \cdot \left[3 \cdot \frac{x}{a_i} + 3 \cdot \frac{y}{b_i} - 1 - 2 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^2} - 2 \cdot \frac{y^2}{(b_i)^2} \right] + \left[\begin{array}{l} \frac{x}{a_i \cdot b_i} \cdot \left[\frac{3}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \right] \dots \\ + \frac{1}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} \cdot \left[\frac{3}{b_i} - 4 \cdot \frac{y}{(b_i)^2} \right] \end{array} \right]$$

$$xy8(x, y, i) := \frac{2}{b_i} \cdot \frac{y}{a_i} \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1 \right) + \frac{1}{(b_i)^2} \cdot \frac{y^2}{a_i} \quad xy9(x, y, i) := \frac{2}{a_i} \cdot \frac{x}{b_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i} \right) - \frac{1}{(a_i)^2} \cdot \frac{x^2}{b_i}$$

$$\begin{aligned}
xy10(x,y,i) &:= \frac{1}{a_i \cdot b_i} - \frac{6}{a_i} \cdot \frac{y}{(b_i)^2} - 6 \cdot \frac{x}{(a_i)^2 \cdot b_i} + \frac{6}{a_i} \cdot \frac{y^2}{(b_i)^3} + 6 \cdot \frac{x^2}{(a_i)^3 \cdot b_i} \\
xy11(x,y,i) &:= \frac{2}{b_i} \cdot \frac{y}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) - \frac{1}{(b_i)^2} \cdot \frac{y^2}{a_i} \quad xy12(x,y,i) := \frac{-\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)^2}{b_i} + 2 \cdot x \cdot \frac{\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)}{b_i \cdot a_i} \\
xx1(x,y,i) &:= \frac{-2}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot \left[\frac{1}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2}\right] - 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{y}{b_i}\right)}{(a_i)^2} \\
xx3(x,y,i) &:= 2 \cdot \frac{\left(\frac{y}{b_i} - 1\right)}{(a_i)^2} \cdot x + 4 \cdot \left(\frac{y}{b_i} - 1\right) \cdot \frac{\left(\frac{x}{a_i} - 1\right)}{a_i} \\
xx4(x,y,i) &:= 2 \cdot \frac{\left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i}\right)}{a_i} \cdot \left[\frac{3}{2 \cdot a_i} - 2 \cdot \frac{x}{(a_i)^2}\right] - 2 \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{y}{b_i}\right) \cdot \frac{x}{(a_i)^3} \\
xx6(x,y,i) &:= \frac{-4}{(a_i)^2} \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \cdot x + \frac{2}{a_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b_i}\right) \quad xx2(x,y,i) := 0 \\
xx7(x,y,i) &:= \frac{2}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} \cdot \left[\frac{3}{a_i} - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^2}\right] - 4 \cdot \frac{x}{(a_i)^3} \cdot \frac{y}{b_i} \quad xx5(x,y,i) := 0 \\
xx9(x,y,i) &:= \frac{2}{a_i} \cdot \frac{y}{b_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) - \frac{4}{(a_i)^2} \cdot x \cdot \frac{y}{b_i} \quad xx8(x,y,i) := 0 \\
xx10(x,y,i) &:= \frac{-6}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i} + 12 \cdot \frac{x}{(a_i)^3} \cdot \frac{y}{b_i} \quad xx11(x,y,i) := 0 \\
xx12(x,y,i) &:= 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) \cdot \frac{y}{b_i \cdot a_i} - 2 \cdot \frac{x}{(a_i)^2} \cdot \frac{y}{b_i}
\end{aligned}$$

Параметри матриці модулів пружності

$$\begin{aligned}
h &:= 1 \cdot 10^{-2} \quad v := 0.3 \quad E := 2 \cdot 10^{11} \quad c11 := \frac{E \cdot h^3}{(1 - v^2) \cdot 12} \quad c33 := \frac{(1 - v)}{2} \\
c12 &:= v \cdot c11 \quad c22 := c11 \quad c21 := c12 \quad c13 := 0 \quad c23 := 0 \quad c31 := 0 \quad c32 := 0
\end{aligned}$$

Матриці других похідних функцій форми

$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix}
 xx1(x, y, i) \\
 xx2(x, y, i) \\
 xx3(x, y, i) \\
 xx4(x, y, i) \\
 xx5(x, y, i) \\
 xx6(x, y, i) \\
 xx7(x, y, i) \\
 xx8(x, y, i) \\
 xx9(x, y, i) \\
 xx10(x, y, i) \\
 xx11(x, y, i) \\
 xx12(x, y, i)
 \end{matrix} \right)^T &
 \begin{matrix}
 yy(x, y, i) := \\
 \left. \begin{matrix}
 yy1(x, y, i) \\
 yy2(x, y, i) \\
 yy3(x, y, i) \\
 yy4(x, y, i) \\
 yy5(x, y, i) \\
 yy6(x, y, i) \\
 yy7(x, y, i) \\
 yy8(x, y, i) \\
 yy9(x, y, i) \\
 yy10(x, y, i) \\
 yy11(x, y, i) \\
 yy12(x, y, i)
 \end{matrix} \right)^T &
 xy(x, y, i) := \\
 \left. \begin{matrix}
 xy1(x, y, i) \\
 xy2(x, y, i) \\
 xy3(x, y, i) \\
 xy4(x, y, i) \\
 xy5(x, y, i) \\
 xy6(x, y, i) \\
 xy7(x, y, i) \\
 xy8(x, y, i) \\
 xy9(x, y, i) \\
 xy10(x, y, i) \\
 xy11(x, y, i) \\
 xy12(x, y, i)
 \end{matrix} \right)^T
 \end{matrix}$$

Підінтегральний вираз матриці жорсткості елемента

$$\begin{aligned}
 k(x, y, i) := & c11 \cdot ((xx(x, y, i)))^T \cdot xx(x, y, i) + c22 \cdot (yy(x, y, i))^T \cdot yy(x, y, i) \dots \\
 & + c33 \cdot (xy(x, y, i))^T \cdot xy(x, y, i) \cdot 4 + c12 \cdot (xx(x, y, i))^T \cdot yy(x, y, i) \dots \\
 & + c12 \cdot (yy(x, y, i))^T \cdot xx(x, y, i) + c13 \cdot (xx(x, y, i))^T \cdot xy(x, y, i) \cdot 2 \dots \\
 & + c13 \cdot (xy(x, y, i))^T \cdot xx(x, y, i) \cdot 2 + c23 \cdot (yy(x, y, i))^T \cdot xy(x, y, i) \cdot 2 \dots \\
 & + 2 \cdot c23 \cdot (xy(x, y, i))^T \cdot yy(x, y, i)
 \end{aligned}$$

Чисельне визначення матриці жорсткості елемента

$$\begin{aligned}
 z1 &:= 0.5773502692 & z2 &:= -0.5773502692 \\
 w1 &:= 1 & w2 &:= 1 \\
 zx1(i) &:= \frac{(a_i \cdot z1 + a_i)}{2} & zy1(i) &:= \frac{(b_i \cdot z1 + b_i)}{2} & zx2(i) &:= \frac{(a_i \cdot z2 + a_i)}{2} \\
 zy2(i) &:= \frac{(b_i \cdot z2 + b_i)}{2}
 \end{aligned}$$

$$K(i) := a_i \cdot \frac{b_i}{4} \cdot \left(\begin{matrix}
 w1 \cdot w1 \cdot k(zx1(i), zy1(i), i) + w1 \cdot w2 \cdot k(zx1(i), zy2(i), i) \dots \\
 + w2 \cdot w1 \cdot k(zx2(i), zy1(i), i) \dots \\
 + w2 \cdot w2 \cdot k(zx2(i), zy2(i), i)
 \end{matrix} \right)$$

Розрахунок переміщень для пластини (варіант а)

Матриця індексів

$$mi := \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 & 10 & 11 & 12 \\
 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 16 & 17 & 18 & 13 & 14 & 15 \\
 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 22 & 23 & 24 & 19 & 20 & 21 \\
 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 25 & 26 & 27 & 22 & 23 & 24
 \end{pmatrix}$$

Одержання матриці жорсткості пластини

$$i := 1..4 \quad j := 1..12 \quad k := 1..12 \quad KS_{\max(mi), \max(mi)} := 0$$

$$KS_{(mi_i, j, mi_i, k)} := KS_{(mi_i, j, mi_i, k)} + K(i)_{j, k}$$

Редукція матриці жорсткості у відповідності з умовами закріплення

$$KR := \text{submatrix}(KS, 13, 15, 13, 15)$$

$$\text{Вектор зовнішніх навантажень } F := (10 \cdot 10^3 \ 0 \ 0)^T$$

Визначення вузлових переміщень

$$U := KR^{-1} \cdot F \quad U = \begin{pmatrix} 0.016 \\ 9.263 \times 10^{-9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розрахунок переміщень для пластини (варіант б)

$$mi1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

$$i := 1..4 \quad j := 1..12 \quad k := 1..12 \quad KS1_{\max(mi1), \max(mi1)} := 0$$

$$KS1_{(mi1_i, j, mi1_i, k)} := KS1_{(mi1_i, j, mi1_i, k)} + K(i)_{j, k}$$

$$KR1 := \text{submatrix}(KS1, 7, 30, 7, 30)$$

Компоненти вектора навантажень

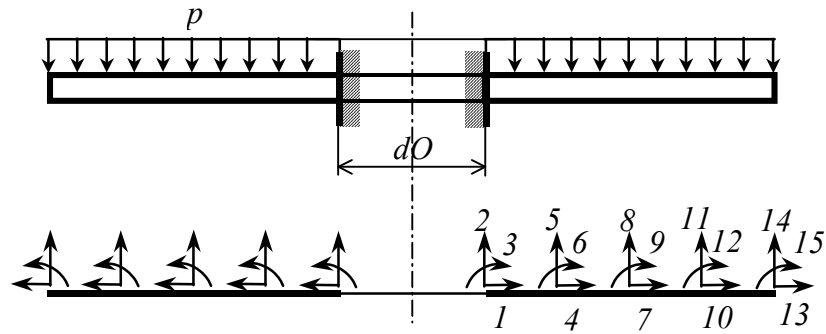
$$F1_{19} := 10^2 \quad F1_{22} := 10^2 \quad F1_{24} := 0$$

$$U1 := KR1^{-1} \cdot F1$$

	1	
1	0.164	
2	0.018	
3	-0.16	
4	0.167	
5	-0.012	
6	-0.163	■
7	0.613	
8	0.018	
9	-0.28	
10	0.625	
11	$5.326 \cdot 10^{-3}$	
12	-0.286	

	1	
13	1.252	
14	0.027	
15	-0.351	
16	1.276	
17	0.02	
18	-0.358	■
19	1.987	
20	0.037	
21	-0.375	
22	2.024	
23	0.037	
24	-0.382	

Приклад 7.2 Визначити переміщення кругової пластини



$ke := 4$ $i := 1..ke$ - кількість елементів

$p1 := 10$ - навантаження, Па $r0 := 1$ - початковий радіус, м

$E := 2 \cdot 10^{11}$

модуль пружності, Па $li :=$ $r0i :=$ - параметри елементів

0.5	r0
0.5	r0 + 0.5
0.5	r0 + 1
0.5	r0 + 1.5

Матриця інтерполяційних функцій для i -го елемента

$$F(s, i) := \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{li} & 0 & 0 & \frac{s}{li} & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - 3 \cdot \frac{s^2}{(li)^2} + 2 \cdot \frac{s^3}{(li)^3} \right] & \left[-s + 2 \cdot \frac{s^2}{li} - \frac{s^3}{(li)^2} \right] & 0 & \left[3 \cdot \frac{s^2}{(li)^2} - 2 \cdot \frac{s^3}{(li)^3} \right] & \left[\frac{s^2}{li} - \frac{s^3}{(li)^2} \right] \end{bmatrix}$$

Матриці, які пов'язують вектори деформацій i -го елемента з вузловими переміщеннями

$$B1(s, i) := \begin{bmatrix} \frac{-1}{li} & 0 & 0 & \frac{1}{li} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r0i + s} \cdot \left(1 - \frac{s}{li} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{r0i + s} \cdot \frac{s}{li} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B1T(s, i) := B1(s, i)^T$$

$$B21(s, i) := \begin{bmatrix} 0 & \left[\frac{6}{(li)^2} - 12 \cdot \frac{s}{(li)^3} \right] & \left[\frac{-4}{li} + 6 \cdot \frac{s}{(li)^2} \right] \\ 0 & \frac{1}{r0i + s} \cdot \left[6 \cdot \frac{s}{(li)^2} - 6 \cdot \frac{s^2}{(li)^3} \right] & \frac{1}{r0i + s} \cdot \left[1 - 4 \cdot \frac{s}{li} + 3 \cdot \frac{s^2}{(li)^2} \right] \end{bmatrix}$$

$$B22(s, i) := \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} -6 \cdot \frac{1}{(l_i)^2} + 12 \cdot \frac{s}{(l_i)^3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 \cdot \frac{1}{l_i} + 6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} \end{bmatrix} \\ 0 & \frac{1}{r0_i + s} \cdot \begin{bmatrix} -6 \cdot \frac{s}{(l_i)^2} + 6 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^3} \end{bmatrix} & \frac{1}{r0_i + s} \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot \frac{s}{l_i} + 3 \cdot \frac{s^2}{(l_i)^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$B2(s, i) := \text{augment}(B21(s, i), B22(s, i)) \quad B2T(s, i) := B2(s, i)^T$$

Фізичні залежності

$$\mu := 0.3$$

$$D := \left(\frac{E}{1 - \mu^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$

Жорсткості на згин і розтяг-стиск

$$h := 0.003 \quad \text{- товщина оболонки}$$

$$D2 := D \cdot \frac{h^3}{12} \quad D1 := D \cdot h$$

Формування матриць жорсткості елементів

$$k := 1..2 \quad q := 1..6 \quad p := 1..6 \quad n := 1..2$$

$$K1_{24, 24} := 0 \quad K2_{24, 24} := 0$$

$$K1_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := K1_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} \dots$$

$$+ 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_k \sum_n B1T(s, i)_{q, k} \cdot D1_{k, n} \cdot B1(s, i)_{n, p} \cdot (r0_i + s) \, ds$$

$$K2_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} := K2_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)} \dots$$

$$+ 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_k \sum_n (B2T(s, i)_{q, k}) \cdot D2_{k, n} \cdot B2(s, i)_{n, p} \cdot (r0_i + s) \, ds$$

$$KS := K1 + K2$$

Матриці навантажень

$$FT(s, i) := F(s, i)^T \quad m := 1..1 \quad PS_{24} := 0 \quad p(s, i) := \begin{pmatrix} 0 \\ p1 \end{pmatrix}$$

$$PS_{q+6 \cdot (i-1)} := PS_{q+6 \cdot (i-1)} + 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{l_i} \sum_m \sum_k FT(s, i)_{q, k} \cdot p(s, i)_{k, m} \cdot (r0_i + s) \, ds$$

Матриця індексів

$$mi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Побудова матриці жорсткості і навантажень для пластини

$$i := 1..4 \quad q := 1..6 \quad p := 1..6$$

$$KK_{15,15} := 0 \quad PP_{15} := 0$$

$$KK_{m_i, q, m_i, p} := KK_{m_i, q, m_i, p} + KS_{q+6 \cdot (i-1), p+6 \cdot (i-1)}$$

$$PP_{m_i, q} := PP_{m_i, q} + PS_{q+6 \cdot (i-1)} \quad Pt := PP^T$$

Редукція матриць у відповідності з умовами закріплення

$$m := 1..12 \quad n := 1..12$$

$$K_{m,n} := KK_{(m+3), (n+3)} \quad P_m := PP_{m+3}$$

Вектор зовнішніх вузлових навантажень

$$PV := [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0] \quad P := P + PV$$

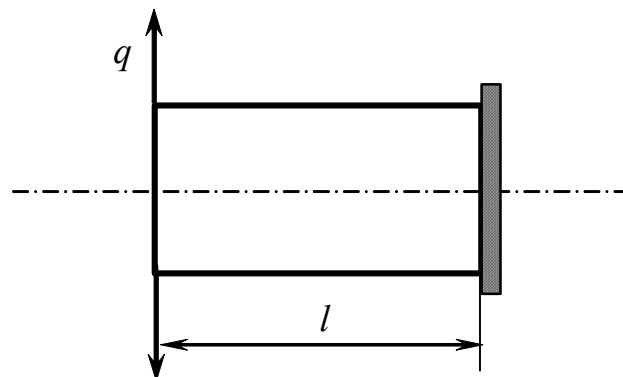
Сумарний вектор вузлових навантажень

$$P := [0 \ 47.124 \ -0.524 \ 0 \ 62.832 \ -0.524 \ 0 \ 78.54 \ -0.524 \ 10 \ 44.768 \ 3.665]$$

Розв'язок системи рівнянь відносно переміщень вузлів від навантаження, прикладеного у вузлах

$$U := K^{-1} \cdot P \quad U = \begin{pmatrix} 4.844 \times 10^{-10} \\ 5.829 \times 10^{-3} \\ -0.02 \\ 8.734 \times 10^{-10} \\ 0.018 \\ -0.026 \\ 1.224 \times 10^{-9} \\ 0.031 \\ -0.026 \\ 1.555 \times 10^{-9} \\ 0.043 \\ -0.025 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{вузлові переміщення} \\ U2 := K^{-1} \cdot PV \end{matrix} \quad U2 = \begin{pmatrix} 4.844 \times 10^{-10} \\ 0 \\ 0 \\ 8.734 \times 10^{-10} \\ 0 \\ 0 \\ 1.224 \times 10^{-9} \\ 0 \\ 0 \\ 1.555 \times 10^{-9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Приклад 7.3 Визначити переміщення точок середнього перерізу для циліндричної оболонки навантаженої радіальними силами інтенсивністю q на торці.



Вхідні дані:

$$E := 2 \cdot 10^{11}$$

модуль пружності, Па

$$\mu := 0.3$$

коефіцієнт Пуассона

$$R := 0.15$$

радіус оболонки

$$\delta := 0.002$$

товщина стінки

$$l_i := 0.01$$

довжина скінченного елемента

$$ke := 40 \quad i := 1..ke$$

кількість елементів

$q=1000$ Н/м - радіальне погонне навантаження на торці оболонки

Матриці жорсткості елемента оболонки

$$K1(i) := \begin{bmatrix} \frac{R}{l_i} & \frac{-\mu}{2} & \mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{-R}{l_i} & \frac{-\mu}{2} & -\mu \cdot \frac{l_i}{12} \\ \frac{-\mu}{2} & \frac{13}{35} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{-11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{\mu}{2} & \frac{9}{70} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} \\ \mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{-11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{1}{105} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} & -\mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{-13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{-1}{140} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} \\ \frac{-R}{l_i} & \frac{\mu}{2} & -\mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{R}{l_i} & \frac{\mu}{2} & \mu \cdot \frac{l_i}{12} \\ \frac{-\mu}{2} & \frac{9}{70} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{-13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{\mu}{2} & \frac{13}{35} \cdot \frac{l_i}{R} & \frac{11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} \\ -\mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{13}{420} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{-1}{140} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} & \mu \cdot \frac{l_i}{12} & \frac{11}{210} \cdot \frac{(l_i)^2}{R} & \frac{1}{105} \cdot \frac{(l_i)^3}{R} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{E \cdot \delta \cdot 2 \cdot \pi}{1 - \mu^2} \right)$$

$$K2(i) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & -\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} & 0 & -\delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & \left[\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} \right] \\ 0 & -\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} & \delta^2 \cdot \frac{R}{3 \cdot l_i} & 0 & \delta^2 \cdot \frac{R}{\left[2 \cdot (l_i)^2 \right]} & \left(\delta^2 \cdot \frac{R}{6 \cdot l_i} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & \delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^2 \cdot 2} & 0 & \delta^2 \cdot \frac{R}{(l_i)^3} & \frac{R \cdot \delta^2}{2 \cdot (l_i)^2} \\ 0 & \left[\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} \right] & \left(\delta^2 \cdot \frac{R}{6 \cdot l_i} \right) & 0 & \left[\delta^2 \cdot \frac{R}{2 \cdot (l_i)^2} \right] & \delta^2 \cdot \frac{R}{3 \cdot l_i} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \delta \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{1 - \mu^2}$$

$$\text{Top}^{(i)} := \begin{pmatrix} i \\ i+1 \end{pmatrix} \quad \text{Top} := \text{Top}^T \quad \text{топологічна матриця}$$

Побудова матриці індексів

$$s := 1..2 \quad m_{i,(3\cdot s-2)} := 3 \cdot \text{Top}_{(i,s)} - 2 \quad m_{i,(3\cdot s-1)} := 3 \cdot \text{Top}_{(i,s)} - 1 \quad m_{i,(3\cdot s)} := 3 \cdot \text{Top}_{(i,s)}$$

Побудова матриці жорсткості оболонки і матриці навантажень

$$ne := 6 \quad Ke(i) := K1(i) + K2(i) \quad KS_{123,123} := 0 \quad j := 1..ne \quad k := 1..ne$$

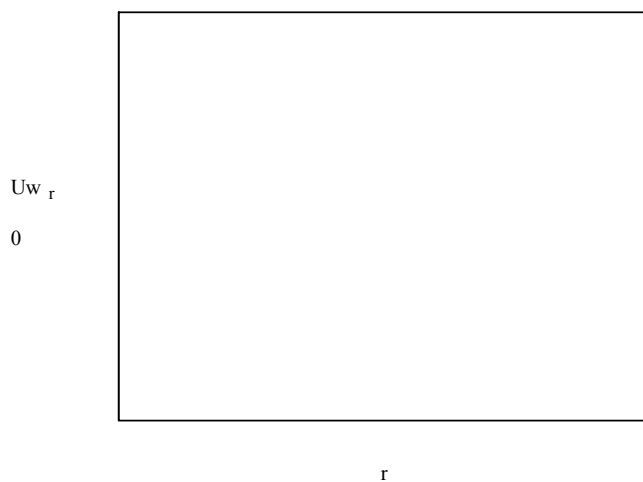
$$KS_{m_{i,j},m_{i,k}} := KS_{m_{i,j},m_{i,k}} + Ke(i)_{j,k}$$

$$K := \text{submatrix}(KS, 1, 120, 1, 120) \quad PS_{120} := 0 \quad PS_2 := q$$

Розв'язок відносно переміщень $U := K^{-1} \cdot PS$

Графік прогинів (радіальних переміщень)

$$r := 1..32 \quad U_{w_r} := U_{3,r-1}$$



Точні значення переміщень

$$D := \frac{E \cdot \delta^3}{(1 - \mu^2) \cdot 12}$$

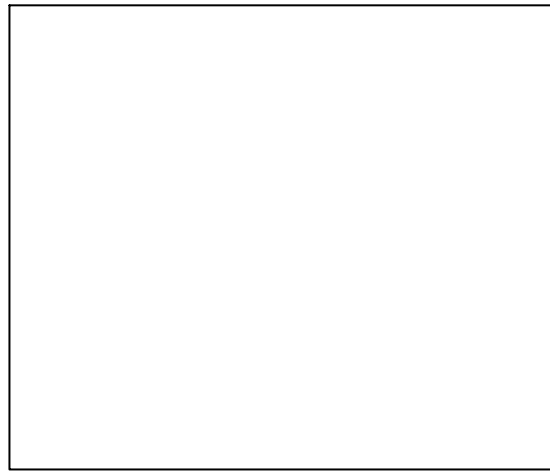
$$k := \sqrt[4]{3 \cdot \frac{(1 - \mu^2)}{R^2 \cdot \delta^2}}$$

$$w(x) := \frac{PS_2}{k^3 D \cdot 2} \cdot e^{-k \cdot x} \cdot \cos(k \cdot x)$$

$$x := 0, 0.001.. 0.4$$

$w(x)$

0



x

Лекція 8

ОБ'ЄМНІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ. МОДЕЛЮВАННЯ МАСИВІВ

Об'ємні або тривимірні елементи використовують для аналізу задач тривимірної теорії пружності. Складність таких задач не дозволяє ефективно використати аналітичні методи, і МСЕ є практично єдиним ефективним методом їх розв'язання. Основні тривимірні елементи є узагальненням двовимірних елементів.

Скінченно-елементні моделі масивних тіл приводять до необхідності розв'язання задач великої розмірності, у зв'язку з чим на перший план виходить проблема економічності та ефективності основних за трудомісткістю етапів алгоритму МСЕ, а саме:

- 1) операцій введення і виведення даних;
- 2) розділення реальної конструкції на скінченні елементи і побудови глобальної матриці жорсткості;
- 3) методів розв'язку систем рівнянь великої розмірності.

Складність і трудомісткість розв'язку просторових задач теорії пружності привели до розробки великої кількості скінченних елементів, однак основними залишаються найпростіші: тетраедр і паралелепіпед, а також їх ізопараметричні узагальнення [7].

8.1 Тетраедральний скінченний елемент

Розглянемо елемент у вигляді тетраедра (рис. 8.1). Введемо у кожній вершині по три невідомі переміщення u_i, v_i, w_i відповідно у напрямку осей x, y, z . Пронумеруємо вузли, для чого присвоюємо четвертий номер довільному вузлу, а інші три нумеруємо, обходячи їх за годинниковою стрілкою (1, 2, 3).

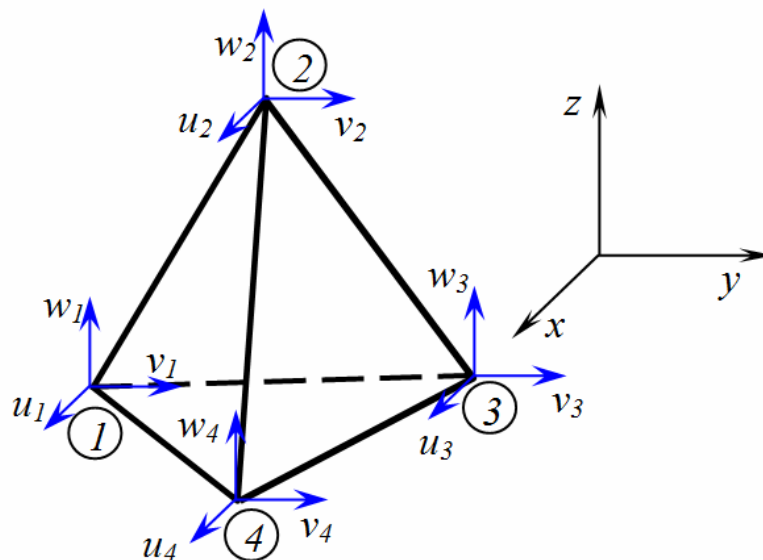


Рис. 8.1 – Просторовий скінченний елемент – тетраедр

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T.$$

Після підстановки (8.2) у (8.4), з урахуванням (8.3), одержимо

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (8.5)$$

де

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 \\ c_1 & b_2 & 0 & c_2 & b_3 & 0 & c_3 & b_4 & 0 & c_4 & b_1 & 0 \\ 0 & d_2 & c_3 & 0 & d_3 & c_4 & 0 & d_4 & c_1 & 0 & d_1 & c_2 \\ d_1 & 0 & b_3 & d_2 & 0 & b_4 & d_3 & 0 & b_1 & d_4 & 0 & b_2 \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Напруження для ізотропного матеріалу згідно із законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8.7)$$

де

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{сим.} & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\nu}{(1-\nu)}, \quad \mu = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}. \quad (8.8)$$

Матриця жорсткості

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV. \quad (8.9)$$

Вузлові сили, обумовлені дією поверхневих навантажень, визначаються векторами навантажень, відповідних кожній з граней елемента

$$\mathbf{F} = \frac{S_{123}}{3} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{S_{234}}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} + \frac{S_{341}}{3} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} + \frac{S_{412}}{3} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8.10)$$

Навантаження на кожній із граней (S_{ijk} – площа грані, яка лежить проти вузла P) розподіляються порівну між вузлами, які відносяться до даної грані.

Якщо мають місце температурні деформації

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (8.11)$$

з'являються додаткові вузлові сили

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 V. \quad (8.12)$$

8.2 Об'ємний елемент у формі паралелепіпеда

Введемо у кожному вузлі елемента (Рис. 8.2) по три невідомі переміщення u_i, v_i, w_i . Загальна кількість невідомих – 24. Апроксимації переміщень в об'ємі елемента матимуть вигляд

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 x^2, \\ v(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} xz + \alpha_{15} yz + \alpha_{16} y^2, \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$w(x, y, z) = \alpha_{17} + \alpha_{18} x + \alpha_{19} y + \alpha_{20} z + \alpha_{21} xy + \alpha_{22} xz + \alpha_{23} yz + \alpha_{24} z^2$$

або у матричній формі

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\alpha}. \quad (8.14)$$

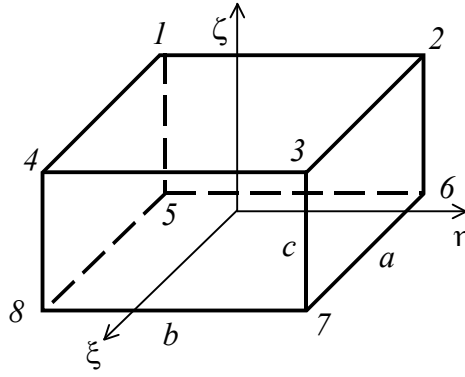


Рис. 8.2 – Просторовий елемент – паралелепіпед

Введемо координатні осі ξ, η, ζ , паралельні сторонам паралелепіпеда, і підставимо значення вузлових переміщень у відповідних вузлах.

Одержимо систему рівнянь, що зв'яже вузлові переміщення і коефіцієнти

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (8.15)$$

Вектор переміщень

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (8.16)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & & & & & & & N_8 \\ & N_1 & & & & & & N_8 \\ & & N_1 & & & & & N_8 \\ & & & N_1 & & & & N_8 \\ & & & & \dots & & & N_8 \\ & & & & & N_1 & & & N_2 \\ & & & & & & & & N_2 \\ & & & & & & & & N_8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_8 \ v_8 \ w_8\}^T.$$

Функції форми N_i визначаються формулами

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), & N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta), & N_6 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), & N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta), & N_8 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\ \xi &= 2x/a, & \eta &= 2y/b, & \zeta &= 2z/c, \end{aligned} \quad (8.17)$$

a, b, c – розміри граней паралелепіпеда.

Компоненти вектора деформацій

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{q}. \quad (8.18)$$

Компоненти напружень

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}. \quad (8.19)$$

Матриця жорсткості

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV. \quad (8.20)$$

Вектор зовнішніх навантажень визначається у вузлах кожної грані в залежності від навантаження на грань

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{P} dS. \quad (8.21)$$

8.3 Кільцевий елемент з трикутним перерізом

Розглянемо кільцевий елемент трикутного поперечного перерізу (Рис. 8.3). Переміщення кожного вузла складається з трьох компонентів $\mathbf{q}_i = \{u_i, v_i, w_i\}^T$, ($i = 1, 2, 3$); дев'ять вузлових переміщень складають вектор

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T\}^T.$$

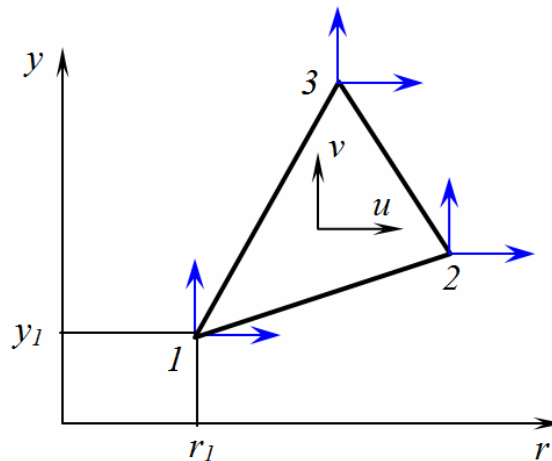


Рис. 8.3 – Переріз кільцевого елемента

Розглянемо симетричне навантаження елемента. Для апроксимації переміщень по площі елемента скористаємось залежністю

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (8.22)$$

де $\mathbf{u} = \{u \quad v\}^T$ – вектор переміщень довільної точки елемента з координатами y, r ; \mathbf{N} – матриця функцій форми

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \quad (8.23)$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_1 & y_1 \\ 1 & r_2 & y_2 \\ 1 & r_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$N_i = a_i + b_i r + c_i y,$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= r_2 y_3 - r_3 y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= r_2 - r_3, \\
a_2 &= r_3 y_1 - r_1 y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= r_3 - r_1, \\
a_3 &= r_1 y_2 - r_2 y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= r_1 - r_2.
\end{aligned}
\tag{8.24}$$

Для осесиметричного випадку залежність між деформаціями і переміщеннями має вигляд

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{ry} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix}.
\tag{8.25}$$

Як видно, враховуються усі лінійні деформації і кутова деформація у площині rOy .

З використанням функцій переміщень (8.23), (8.24) одержимо

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{Bmatrix},
\tag{8.26}$$

де

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}.
\tag{8.27}$$

Оскільки матриця \mathbf{B} залежить від координат r і y , деформації в елементі не будуть сталими.

Матрицю жорсткості одержимо, обчислюючи інтеграл

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV,
\tag{8.28}$$

де для ізотропного матеріалу

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{сим.} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Оскільки об'ємний інтеграл береться по усій кільцевій області, одержимо

$$\mathbf{K} = 2\pi \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dy. \quad (8.30)$$

Обчислити цей інтеграл можна чисельним способом. Найпростіший метод полягає у визначенні матриці $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ для центра ваги елемента з координатами

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad r_0 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

і підстановки в наближений вираз для інтеграла \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = 2\pi \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 r_0 S. \quad (8.31)$$

Можна використати і більш точні методи, коли обчислюється підінтегральний вираз у декількох точках.

Якщо на сторону 1–2 скінченного елемента (Рис. 10.4) діє рівномірне навантаження p_0 , необхідно перейти до проекцій p_r, p_y

$$\mathbf{p}_0 = \{p_r \ p_y\}^T. \quad (8.32)$$

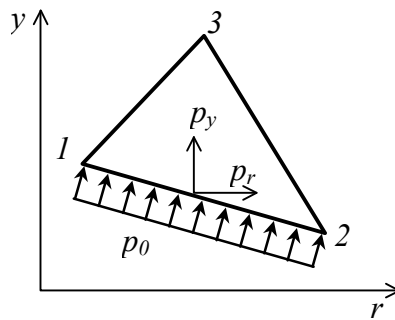


Рис. 8.4 – Навантаження елемента

Вектор вузлових навантажень, відповідний такому навантаженню

$$\mathbf{F}_{1,2} = 2\pi \int_{l_{1,2}} \bar{\mathbf{N}}^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_y \end{Bmatrix} r dl, \quad (8.33)$$

($\bar{\mathbf{N}}$ – значення функцій інтерполяції на стороні $l_{1,2}$).

При наявності температурних деформацій відповідні вузлові сили обчислюються за формулою

$$\mathbf{F}_0 = 2\pi \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r dr dy, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \{\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 0\}^T. \quad (8.34)$$

З урахуванням $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \text{const}$ інтеграл (10.28) можна обчислити точно

$$\mathbf{F}_0 = 2\pi \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r_0 S, \quad (8.35)$$

де \mathbf{B}_0, r_0 – значення у точці – центрі мас трикутника.

Після визначення переміщень з умов рівноваги, записаних для системи у цілому, можна знайти напруження у кожному елементі за формулою

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{q} - \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0.$$

Напруження змінюються по площі поперечного перерізу, і тому краще визначати усереднені напруження і відносити їх до центра ваги елемента. Матриця $\bar{\mathbf{B}}$ у цьому разі відноситься до центра ваги елемента з координатами

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad r = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Аргирис Дж.* Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Стройиздат, 1968. – 210 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИ строительной механики, 1993. – 374 с.
3. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
4. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
5. *Дубенец В.Г., Хильчевский В.В., Савченко О.В.* Основы методу скінченних елементів. – Чернігів, ЧДТУ.– 2007. – 346 с.
6. *Ершов И.Ф., Шахверди Г.Г.* Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. – Л.: Судостроение, 1984. – 235 с.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 541с.
8. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 308 с.
9. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
10. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. – М.: 1977. – Т.2. – 544 с.
11. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. – 319 с.
12. *Коннор Дж., Бреббиа.* Метод конечных элементов в механике жидкостей. – Л.: Судостроение, 1979. – 263 с.
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
14. *Корнеев В.Г.* Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости // Известия ВНИИГ. – 1967. – Т. 83. – С. 31-47.
15. Математика и САПР. – М.: Мир, 1988. – Кн. 2. – 206 с.
16. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
17. Метод конечных элементов / Под ред. *П.М.Варвака.* – Киев: Вища школа, 1981. – 170 с.
18. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общей ред. *А.С.Сахарова, И. Альтенбаха.* – Киев: Вища школа, 1982. – 479 с.
19. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / Под ред. *В.А.Постнова.* – Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.

20. *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 215 с.
21. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 475 с.
22. *Молчанов И.Н., Николенко Л.Д.* Основы метода конечных элементов. – К.: Наукова думка, 1989. – 289 с.
23. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
24. *Мышкис А.Д.* Математика для втузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
25. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 394 с.
26. Опір матеріалів: Підручник / За ред. *Г.С.Писаренка*. – К.: Вища школа, 1993. – 655 с.
27. *Отнесс Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
28. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 279 с.
29. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
30. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов / Руководитель авт. кол. *В.Г.Пискунов*. – К.: Вища школа, 1987. – 200 с.
31. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
32. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.
33. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. – 392 с.
34. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1988. – 229 с.
35. *Синицын А.П.* Метод конечных элементов в динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1978. – 231 с.
36. Справочник по строительной механике корабля / Под ред. *В.А.Постнова*. – Л.: Судостроение, 1982. – Т. 2. – 463 с.
37. *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применение. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
38. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
39. *Усюкин В.И.* Строительная механика конструкций космической техники. – М.: Машиностроение, 1988. – 389 с.
40. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М., Л.: Наука, 1963. – 735 с.
41. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. – М.: Мир, 1989. – 352 с.

42. *Харрис С.М., Крид Ч.М.* Справочник по ударным нагрузкам. – Л.: Судостроение, 1980. – 346 с.
43. *Цзе С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т.* Механические колебания. – М.: Машиностроение, 1968. – 507 с.
44. *Шабров Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей силовых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1983. – 209 с.
45. *Шайдунов В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
47. *Можаровский Н.С.* Теория пластичности и ползучести в инженерном деле. – К.: Вища школа, 1991. – 293 с.