МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ – 1. МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ

для спеціальностей:

7.05050315, 8.05050315 – «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів»

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

КИЇВ

НТУУ «КПІ»

2013

Механіка суцільних середовищ – 1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках: Текст лекцій для студентів спеціальностей 7.05050315, 8.05050315 – «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / Уклад.: О.С. Сахаров, А. Я. Карвацький – К. : НТУУ «КПІ», 2013. – 231 с.

Гриф надано Вченою радою ІХФ
(Протокол № 8 від 30.09.2013 р.)

Навчальне видання

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ – 1. МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

Текст лекцій для студентів
спеціальностей 7.05050315, 8.05050315 – «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів»

Укладачі: Сахаров Олександр Сергійович,
доктор технічних наук, професор,
професор кафедри ХПСМ,
ІХФ, НТУУ "КПІ"
Карвацький Антон Янович,
доктор технічних наук, старший
науковий співробітник,
професор кафедри ХПСМ,
ІХФ, НТУУ "КПІ"

Відповідальний редактор: Панов Євген Миколайович,
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри ХПСМ,
ІХФ, НТУУ "КПІ"

Рецензенти: Крищук Микола Георгійович,
доктор технічних наук, професор,
професор кафедри динаміки і міцності
машин та опору матеріалів,
Механіко-машинобудівний інститут,
НТУУ "КПІ"

ЗМІСТ

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

$a^i, (i = 1,2,3)$ – компоненти вектора прискорення, м/с^2;
A – робота системи, Дж;
$\hat{c} = c_i^{j'} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_{j'}$ – тензор перетворення координат;
c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К);
C_v – об'ємна ізохорна теплоємність, Дж/(м^3·К);
$\overset{4}{\hat{C}} = C^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$ – тензор 4-го рангу фізичних констант або пружності, Па;
C_{ep}^{ijkl} – тензор 4-го рангу пружно-пластичності, Па;
$\hat{D}$ – девіатор деформації;
$\hat{\dot{D}}$ – девіатор швидкості деформації, с$^{-1}$;
$\mathbf{e}_i,\ i = 1, 2, 3$ – базис евклідового простору – тріедр або базисні вектори афінної системи координат;
E – модуль пружності при розтягу, Па;
E_a – енергія активації течії, Дж/моль;
E^3 – тривимірний евклідовий простір;
$\mathbf{f} = f^m \mathbf{e}_m$ – вектор масових сил, Н/кг;
$\mathbf{F} = F^m \mathbf{e}_m$ – вектор об'ємних сил, Н/м^3;
F – функція плинності матеріалу при ізотропному зміцненні; вільна енергія, Дж;
g_{ij} – коваріантні компоненти метричного тензора;
g^{ij} – контраваріантні компоненти метричного тензора;
G – модуль зсуву, Па;
H' – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, яка визначає залежність напруження від деформації при одновісному розтягу;
$\mathbf{i}_i,\ i = 1, 2, 3$ – базисні вектори ортогональної декартової системи координат;
I – інтенсивність напружень, Па;
$\mathbf{I}$ – одиничний тензор 2-го рангу;
J_1, J_2, J_3 – перший (Па), другий (Па^2) і третій (Па^3) інваріанти тензора напружень;
$J^i, (i = 1,2,3)$ – компоненти об'ємної сили інерції, Н/м^3;
k – постійна Больцмана, Дж/К;

K –	модуль об'ємного стиснення (модуль стисливості матеріалу), Па;
$\hat{K}$ –	тензор Кірхгофа, Па;
m –	маса, кг;
$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}^i$ –	вектор нормалі до поверхні;
n –	показник степеня, який визначає клас рідини;
$\hat{p}$ –	тензор Піоли або несиметричний тензор Лагранжа, Па;
$\mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i$ –	вектор зовнішнього зусилля, Па;
p –	зовнішній гідростатичний тиск, Па;
$\mathbf{q} = q_i \mathbf{e}^i$ –	вектор густини теплового потоку, Вт/м^2;
q_v –	об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти (енергія), що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи, Вт/м^3;
Q –	кількість теплоти, Дж;
$\vec{r}$ –	радіус-вектор, м;
r, θ, z –	циліндрична система координат;
R –	унівесальна газова стала, Дж/(кг·К);
S –	ентропія, Дж/К;
t –	час, с;
T –	абсолютна температура, К;
T_a –	температура активації течії, К;
$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ –	вектор переміщень, м;
U –	внутрішня енергія, Дж;
$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$ –	вектор швидкості, м/с;
V –	об'єм, м^3;
v –	коефіцієнт Пуассона;
w –	об'ємна кінетична енергія, Дж/м^3;
$x^i,\ i = 1, 2, 3$ –	ейлереві координати, м; декартові координати, м;
α –	коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м^2·К);
β –	коефіцієнт об'ємного температурного розширення, К$^{-1}$;
δ_i^k –	символ Кронекера;
$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ –	тензор деформацій 2-го рангу;
$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_i^i$ –	середня лінійна деформація;
ε_{ij}^e –	компоненти тензора пружних деформацій;

$\overset{3}{\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k$ – тензор 3-го рангу Леві-Чевіта;

ε_{ij}^T – компоненти тензора температурних деформацій;

$\hat{\dot{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$ – тензор швидкості деформацій 2-го рангу;

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненти тензора повної швидкості деформації, $с^{-1}$;

$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ep}$ – компоненти тензора швидкості в'язко-пластичної деформації, $с^{-1}$;

$\dot{\varepsilon}_{ij}^I$ – компоненти тензора швидкості початкової деформації, $с^{-1}$;

$\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ компоненти тензора швидкості непружної деформації, $с^{-1}$;

$\dot{\gamma}$ – швидкість деформації зсуву, $с^{-1}$;

η – ефективна в'язкість як функція другого інваріанта $\dot{\gamma}$ від $\dot{\hat{D}}$, Па·с;

$\Gamma_{ij;k}$ – символи Кристофеля 1-го роду;

Γ_{ij}^k – символи Кристофеля 2-го роду;

λ – теплопровідність, Вт/(м·К); коефіцієнт Ламе, Па;

μ – динамічна в'язкість, Па·с; коефіцієнт Ламе, Па;

θ – кут зсуву, рад; деформація зміни об'єму;

ρ – густина, кг/м^3;

ρ, φ, z – циліндричні координати;

$\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор напружень 2-го рангу, Па;

$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma^{ii}$ – середнє напруження, Па;

$\dot{\sigma}^{ij}$ – компоненти тензора швидкості зміни напружень, Па/с;

$\tilde{\sigma}^{ij}$ – фізична компонента тензора $\hat{\sigma}$, Па;

$\sigma_0 = \sigma_{\text{yield}}$ – границя пластичності матеріалу при одновісному навантаженні, Па;

$\hat{\omega}$ – тензор жорсткого повороту або лінійного повороту;

$\xi^i,\ i = 1, 2, 3$ – Лагранжеві координати, м;

Ψ – термодинамічний потенціал Гібса, Дж;

Основні індекси:

0 – стосується початкового значення або середнього значення;

$\wedge$ – стосується тензора 2-го рангу;

р – стосується рідини, навколишнього середовища;

E – стосується Ейлеревої системи відліку;
L – стосується Лагранжевої системи відліку;

Інші символи:
$\frac{d}{dt}$ – оператор матеріальної або тензорної похідної;
div – оператор дивергенції;
grad – оператор градієнта;
rot – оператор ротора;
$\mathbf{tr}(\ )$ – оператор сліду тензора 2-го рангу;
Δ – оператор Лапласа;
∇ – оператор Гамільтона (“набла”);
$\cdot$ – оператор скалярного добутку;
$\times$ – оператор векторного добутку;
$\otimes$ – оператор тензорного добутку;
: – оператор подвійного скалярного добутку двох тензорів. Якщо тензори мають однаковий ранг, то результат добутку є скаляр, в протилежному випадку – вектор.

Основні скорочення:
ГУ – граничні умови;
МСС – механіка суцільних середовищ;
НДС – напружено-деформований стан;
НТУУ «КПІ» – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»;
СРС – самостійна робота студентів;
ХПСМ – кафедра хімічного, полімерного та силікатного машинобудування.

ВСТУП

Кредитний модуль «Механіка суцільного середовища – 1 (МСС–1). Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках» входить до дисципліни «Механіка суцільних середовищ» (код ВП-05), яка відноситься до вибіркової частини навчальної програми (дисципліна за вибором вищого навчального закладу) і відноситься до циклу професійної та теоретично-практичної підготовки студентів. МСС–1 є найважливішою ланкою, яка логічно об'єднує розрізнені знання, здобуті студентами при вивченні окремих дисциплін, в єдину систему знань, що забезпечує високу якість при виконанні наукових та прикладних проектно-конструкторських розробок, носить теоретично-практичне спрямування при навчанні фахівців, що спеціалізуються в галузі машинобудування. Надає уміння комплексного використання придбаних знань з попередніх курсів при проектуванні машин та апаратів хімічних виробництв. Базується на знанні студентом математики, фізики, теоретичної механіки, опору матеріалів, термодинаміки, гідравліки, теплообміну, обчислювальної математики, програмування та інших наук. Є базовою для засвоєння студентами самостійної галузі знань – комп'ютерної механіки, яка поєднує сучасні інформаційні технології з числовими методами наукових досліджень для розв'язання параметричних задач та задач на міцність, що виникають при розрахунках машин і апаратів, з метою вдосконалення та підвищення ефективності обладнання. Загальний навчальний час, потрібний для вивчення дисципліни складає (разом з СРС) 144 год. (4 кредити ECTS) згідно з навчальним планом. Матеріал дисципліни викладається на 5-му (10 семестр) курсі навчання студента.

Метою кредитного модуля є підготовка фахівця, який має компетенції: – здатен до освоєння нових видів техніки і технології хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів; здатен виконувати наукові дослідження, включаючи обчислювальні.

Завданнями кредитного модуля МСС–1 є сформувати у студента систему знань і умінь:

– застосовувати методи комп'ютерного інжиніринга з використанням спеціального програмного забезпечення при проектуванні машин та апаратів хімічних виробництв;
– використовуючи результати аналізу умов роботи конструкції і враховуючи особливості технологічних процесів, що протікають в обладнанні, на основі відомих фізичних закономірностей та математичних залежностей, вибрати і обґрунтувати рівняння стану

конструкційних матеріалів та матеріалів, що знаходяться в стадії переробки;
- використовуючи результати аналізу умов роботи конструкції, за допомогою відомих фізичних та математичних залежностей, вибрати математичні моделі фізичних полів та середовищ, що взаємодіють з конструкціями;
- використовуючи розроблені математичні моделі за допомогою методів числового аналізу, програмного забезпечення, визначити для конструкції початкові і граничні умови та схему навантажень;
- використовуючи результати аналізу дії на конструкції зовнішніх фізичних полів та середовищ і враховуючи відомі рівняння стану, скласти розрахункову модель конструкції при статичних та динамічних термосилових навантаженнях.

Тематичний план кредитного модуля МСС-1 включає 9 тем, з яких теми 1–3 і 7–9 викладені в лекційному матеріалі, а теми 4–6 розраховані виключно на самостійну роботу студентів (СРС).

У додатках наведені питання для самоконтролю по кожній лекції і самостійної підготовки студентів та приклади розв’язання типових задач МСС. Причому питання до СРС, які включають всі 9 тем кредитного модулю, супроводжуються відповідним теоретичним супроводом кожного питання.

ТЕМА 1 ПРЕДМЕТ МСС. ВЛАСТИВОСТІ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Лекція 1.1(1) **Визначення МСС. Аксіоматика механіки суцільних середовищ. Основні методи та напрямки досліджень різних об'єктів МСС (твердих тіл, рідин та газів). Зв'язок курсу з іншими дисциплінами (опір матеріалів, гідравліка, термодинаміка, обчислювальна математика, програмування, технологічні розрахунки та розрахунки на міцність машин та апаратів). Загальна характеристика фізичних явищ та процесів, що протікають в твердих тілах, рідинах та газах. Фізичні моделі МСС. Закони термодинаміки**

Механіка суцільних середовищ – це наука, що вивчає напружено-деформований стан (НДС) твердих, рідких та газоподібних тіл при їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи (гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо).

Аксіоматика механіки суцільних середовищ. Основні положення МСС можна представити у вигляді аксіом або найважливіших теорем:

1. *Евклідність простору.* Простір, в якому розглядається рух тіла є тривимірний евклідовий простір E^3.
2. *Абсолютність часу* t. Плин часу не залежить від вибору системи відліку.
3. *Гіпотеза суцільності*. Матеріальне тіло це суцільне середовище – континуум у просторі E^3.
4. *Закон збереження маси*. Усяке матеріальне тіло V має скалярну невід’ємну характеристику – масу M, яка: а) не змінюється при будь-яких рухах тіла, якщо тіло складається з одних і тих самих матеріальних частинок; б) маса є адитивною величиною $M(V) = M(V_1) + M(V_2)$, де $V = V_1 + V_2$.
5. *Закон збереження імпульсу* (або зміни кількості руху).
6. *Закон збереження моменту імпульсу* (або зміни моменту кількості руху).
7. *Закон збереження енергії* (або перший закон термодинаміки).
8. *Аксіома про існування абсолютної температури* (або нульовий початок термодинаміки).
9. *Закон балансу ентропії* (або другий закон термодинаміки).

В некласичних моделях МСС ці аксіоми можуть замінюватись на інші. Наприклад, замість перших двох аксіом можуть використовуватися відповідні положення теорії ймовірності.

Основні методи та напрямки досліджень різних об'єктів МСС (твердих тіл, рідин та газів) при проектуванні промислового обладнання. Теоретичне та експериментальне дослідження руху і різноманітних фізико-хімічних процесів в деформованих тілах пов’язано з введенням, вивченням та використанням багатьох характерних понять, математичних методів описання і фундаментальних законів природи, що приводять до формулювання замкнутих систем рівнянь. При цьому постановка і розв’язання задач теоретичного опису різних явищ в оточуючому нас світі завжди пов’язані з введенням схематизованих моделей та ідеальних процесів, що відповідають спостереженням і дослідженням реальних тіл.

Як відомо, система диференціальних або взагалі функціональних рівнянь називається замкнутою, коли кількість незалежних рівнянь дорівнює кількості шуканих величин або функцій. Виділення фіксованих замкнутих систем рівнянь дозволяє ставити та вивчати багато класів задач. При теоретичному розв’язанні конкретних задач необхідно опиратися на замкнуту систему рівнянь і на різного роду додаткових умов, таких як: початкові і граничні умови, умови стаціонарності, умови неперервності і умови на розривах, умови на нескінченності та інше. Явне формулювання всіх рівнянь і додаткових умов, що визначають єдиний розв’язок, є постановкою задачі.

Необхідність врахування динамічних, теплових та інших фізичних ефектів та їх взаємодію є характерною особливістю сучасних інженерних задач, що виникають в процесі проектування промислових об’єктів.

До основних напрямків розрахунків в рамках теорії механіки суцільних середовищ можна віднести такі: *теорія пластичності і повзучості; механічні моделі полімерних пластичних матеріалів; механічні моделі композиційних матеріалів; рух твердих, рідких та газоподібних тіл з фазовими перетвореннями та хімічними реакціями; рух дуже сильно стиснутих рідин та газів або, навпаки, розріджених газів; рух рідких суспензій (сумішей), що наповнені газами і парами рідини, кавітація з утворенням та зникненням бульбашок в рідині; механіка сипучих матеріалів; газо- і гідродинаміка при русі рідин або газів через пористі структури; теорія руху плазми та ін.*

Зв'язок курсу з іншими дисциплінами (опір матеріалів, гідравліка, термодинаміка, обчислювальна математика, програмування, технологічні розрахунки та розрахунки на міцність машин та апаратів). Викладення дисципліни МСС базується на знаннях студентів, що були отримані при вивченні інших дисциплін:

– математика – частинна та повна похідна, теорія диференціальних рівнянь, поняття градієнта, ротора дивергенції та ін.;
– обчислювальна математика – методи скінчених різниць, скінчених елементів, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь та ін.;
– опір матеріалів – принцип Сен-Венана, закон Гука, механічні константи матеріалів, теорія пружності і пластичності, критерії міцності, розрахунки на міцність та ін.;
– теоретична механіка – поняття матеріальної точки, абсолютно твердого тіла, кінематика, статика, динаміка, векторне числення і диференціальна геометрія, рівняння Лагранжа, принцип найменшої дії, рівняння Гамільтона-Якобі та ін.;
– термодинаміка – термодинамічні параметри, перший та другий закони термодинаміки, рівняння стану, термодинамічні потенціали та ін.;
– гідравліка – закон Стокса, рівняння Бернуллі, ідеальна рідина та ін.;
– програмування – алгоритмізація, мови програмування високого рівня та ін.

Загальна характеристика фізичних явищ та процесів, що протікають в твердих тілах, рідинах та газах. Фізичне явище – це явище, при якому не утворюються нові речовини, а тільки змінюються його фізичні характеристики (наприклад, зміна агрегатного стану, розмірів, місця положення та ін.).

Фізичний процес – це послідовна зміна станів об'єкту тіла у часі.

Виходячи з визначень фізичного явища і процесу можна зазначити їх збіг між собою.

Прикладами фізичних явищ та процесів в твердих тілах, рідинах та газах можуть бути такі: деформація, плавлення і затвердіння, випаровування і конденсація, дифузія, теплопровідність, електропровідність, магнетизм, гравітація, пружність, в'язкість та ін.

Фізичні моделі МСС. До основних фізичних моделей МСС відносяться такі: пружного тіла; пружно-пластичного тіла; в'язкої рідини; ідеальної рідини; моделі в'язко-пружного тіла Максвела і Кельвіна.

Модель пружного тіла описується законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1.1}$$

де σ – напруження, Па; E – модуль пружності, Па; ε – деформація.

Модель пружного-пластичного тіла описується законом Гука, який в цьому випадку зв’язує прирощення напруження ($\dot{\sigma}^{ij}$) зі швидкістю повної деформації ($\dot{\varepsilon}_{ij}$)

$$\dot{\sigma}^{ij} = C_{ep}^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{1.2}$$

де $C_{ep}^{ijkl} = C^{ijkl} - C^{ijmn}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{rp}}C^{rpkl}\left(H' + \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}C^{ijkl}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}\right)^{-1}$ – компоненти тензора пружно-пластичних властивостей матеріалу або *тензор 4-го рангу пружно-пластичності*, Па; C^{ijkl} – компоненти *тензора 4-го рангу пружності*, Па; F – функція плинності матеріалу при ізотропному зміцненні; *H’* – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, яка визначає залежність напруження від деформації при одновісному розтягу; $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{n}$ – тензор повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ – пружна і $\dot{\varepsilon}_{ij}^{n} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{T} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ – непружна частини тензора повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{T}$ – швидкості пластичної і температурної деформації, відповідно, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ – швидкість початкової деформації, обумовленої іншими причинами, с$^{-1}$.

Модель в’язкої рідини описується законом Стокса

$$\sigma = \mu\dot{\varepsilon} - p, \tag{1.3}$$

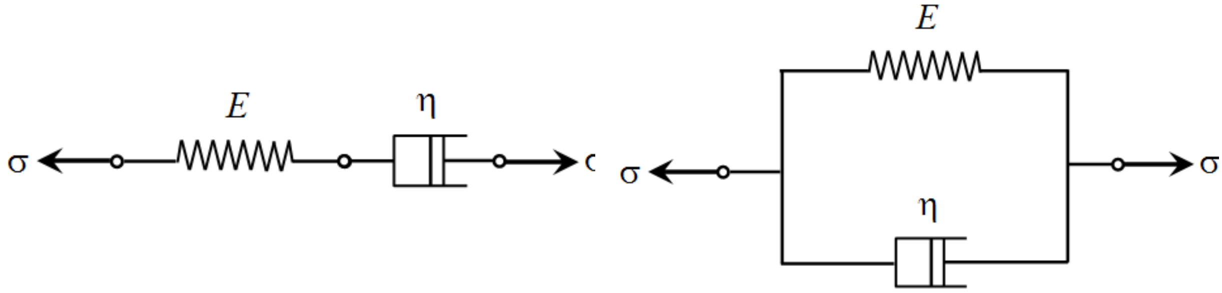
де μ – динамічна в’язкість, Па·с; $\dot{\varepsilon}$ – швидкість деформації, с$^{-1}$; p – зовнішній гідростатичний тиск, Па.

Модель ідеальної рідини. Ідеальною рідиною або ідеальним газом називають суцільне середовище, в якому тензор напружень σ^{ij} в кожній точці рідини є кульовим

$$\sigma^{ij} = -p\delta^{ij}, \tag{1.4}$$

де p – тиск рідини, Па; δ^{ij} – символ Кронекера.

Моделі в’язко-пружного тіла Максвела і Кельвіна показані на рисунку 2.1.



$a - \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \dfrac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}$ – Максвела – послідовна

б – $\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ – Кельвіна – паралельна

σ – напруження; $\dot{\sigma}$ – прирощення напруження; ε – деформація; $\dot{\varepsilon}$ – швидкість деформації; E – модуль пружності; η – в'язкість

Рисунок 2.1 – Приклад графічної інтерпретації та математичного запису фізичних моделей в'язко-пружного тіла

Закони термодинаміки. Перший закон термодинаміки або *закон збереження енергії*.

Розглянемо 4 формулювання І закону термодинаміки.

1. В будь-якій ізольованій системі кількість енергії не змінюється – формулювання Дж.П.Джоуля (1842 р.).

2. Кількість теплоти, що отримано системою, йде на зміну її внутрішньої енергії (U) і здійснення роботи (A) проти зовнішніх сил.

3. Зміна внутрішньої енергії системи при переході її із одного стану в інший дорівнює сумі роботи зовнішніх сил і кількості теплоти, переданого системі, тобто, кількість теплоти залежить тільки від початкового і кінцевого стану системи і не залежить від способу, яким здійснюється цей перехід. Це визначення особливо важливе для хімічної термодинаміки. Іншими словами, внутрішня енергія є функцією стану.

В циклічному процесі внутрішня енергія не змінюється

$$\oint dU = 0. \tag{1.5}$$

4. Елементарна зміна внутрішньої енергії системи (dU) в квазістатичному процесі дорівнює елементарній кількості теплоти δQ, що передається системі, в сумі зі зміною енергії, яка зв'язана з елементарною кількістю речовини dN при хімічному потенціалі μ, і роботи $\delta A'$, яка здійснена над системою зовнішніми силами і полями, за відрахуванням елементарної роботи δA, яка здійснена системою проти зовнішніх сил

$$dU = \delta Q - \delta A + \mu dN + \delta A' . \tag{1.6}$$

Розділення роботи на дві частини, одна з яких описує роботу, здійснену над системою, а друга – роботу, здійснену самою системою, підкреслює, що ці роботи можуть бути здійснені силами різної фізичної природи внаслідок різних джерел цих сил.

Важливо відмітити, що dU і dN є повними диференціалами, а δA і δQ – ні.

Другий закон термодинаміки.

Розглянемо 3 формулювання II закону термодинаміки.

1. Теплота спонтанно переходить лише від тіла з більшою температурою до тіла з меншою температурою і не може спонтанно переходити у зворотному напрямку – вперше сформулював Клаузіс.

2. Всі довільні (спонтанні) процеси в природі йдуть зі збільшенням ентропії. Ентропія S – міра хаотичності, неупорядкованості системи.

3. Неможливо побудувати перпетум мобіле (вічний двигун) другого роду, тобто теплову машину, яка, у відповідності з I законом, перетворювала би теплову енергію, що взята від джерела з найменшою температурою, в механічну роботу.

Всі процеси у природі поділяються на рівноважні (зворотні, що протікають без втрат енергії) та нерівноважні (незворотні, що протікають з втратою енергії).

Для багатьох нерівноважних процесів істотним є так званий принцип Онсагера, який полягає в такому: всі мікроскопічні взаємодії між елементарними частинками зворотні, незворотність проявляється тільки за рахунок статистичних законів вирівнювання середніх макроскопічних характеристик для великих сукупностей елементарних частинок.

За допомогою II закону термодинаміки вводиться поняття абсолютної температури і ентропії як макроскопічних характеристик.

Для малої частинки у випадку зворотних процесів ентропія визначається з точністю до адитивної постійної із рівності

$$dSdm = dS_m = \frac{\delta Q}{T}, \tag{1.7}$$

де T – абсолютна температура, К; δQ – зовнішній приток теплоти до частинки, Дж.

Так само, як і температуру, ентропію можна ввести статистичним шляхом. Ентропія вводиться як ймовірність відповідного макроскопічного стану середовища.

В статистичній фізиці для ентропії встановлюється наступна формула Больцмана

$$S = k \ln P, \tag{1.8}$$

де k – постійна Больцмана, а P – міра ймовірності стану, що розглядається, і визначається як число можливих макроскопічних станів, які відповідають даному макроскопічному стану.

Якщо процес незворотний, то із другого закону термодинаміки виводиться нерівність виду

$$dS_m > \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU_m + \delta A}{T}, \tag{1.9}$$

і, зокрема, при незворотних адіабатичних процесах ентропія росте.

На відміну від поняття температури, як і внутрішню енергію, ентропію можна визначити для термодинамічних нерівноважних станів.

Для різко виражених нерівноважних процесів поняття про температуру може втрачати свій зміст, коли для фізично малої частинки відсутнє статистичне вирівнювання енергії між різними степенями свободи. Наприклад, в деяких випадках при вельми різкій зміні стану частинки можна говорити про декілька температур: про температуру вібраційних рухів молекул і про температуру поступальних степенів свободи молекул. І тільки при наявності термодинамічної рівноваги в малих об’ємах тіла температура визначена однозначно.

Розглянемо незворотні процеси, в яких стан даної малої частинки характеризується певною абсолютною температурою T.

В цьому випадку відповідно до II закону термодинаміки для елементарного процесу рівність (1.7) повинна бути замінена на рівність

$$TdS_m = \delta Q + \delta Q', \quad \delta Q' > 0. \tag{1.10}$$

Позитивна величина $\delta Q'$ називається нескомпенсованим теплом. При зворотних процесах в даній частинці $\delta Q' = 0$. Рівняння (1.10) дістало назву об’єднаного рівняння термодинаміки.

ТЕМА 2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВИЗНАЧЕННЯ ТА ГІПОТЕЗИ МСС

Лекція 2.1(2) **Поняття континууму. Лагранжеві та Ейлереві координати для опису руху тіл, субстанціональна похідна за часом. Векторні базиси в початковій та актуальній конфігурації тіл. Гіпотези МСС і їх роль при розробці математичних моделей. Задачі механіки суцільного середовища**

Поняття континууму. Всі тіла складаються з окремих частинок (молекул, атомів і т.д.), але їх надто багато в будь-якому актуальному для нас об’ємі, тому тіло можна наближено розглядати як середовище, що заповнює простір суцільним чином, або інакше континуумом. Наприклад, повітря, вода, залізо та інші матеріальні середовища розглядаються як тіла, що всуціль заповнюють деяку частину простору.

Континуумом можна вважати не тільки звичайні матеріальні тіла, але й різноманітні поля, наприклад, електромагнітне поле.

Ідеалізація будови матеріальних тіл на базі введення поняття континууму, зокрема, необхідна для того, щоб при дослідженні руху деформівних середовищ використовувати апарат неперервних функцій, диференціальне і інтегральне числення.

Лагранжеві та ейлереві координати для опису руху тіл, субстанціональна похідна за часом. Під дією зовнішніх сил кожна частинка суцільного середовища отримує певну швидкість. Існує два еквівалентних підходи до опису руху матеріальних частинок суцільного середовища – підхід Лагранжа та підхід Ейлера.

В підході Лагранжа об’єктом є матеріальні частинки, зокрема зміна їх кінетичних характеристик (положення в просторі, швидкість, прискорення). Для опису руху в такій формі необхідно індивідуалізувати кожну частинку. Такими параметрами, що індивідуалізують кожну частинку середовища, є її координати $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ в початковий момент часу t_0. Координати частинки в нерухомому просторі (глобальній системі координат $Ox^1x^2x^3$) залежать від початкових координат частинки та часу

$$x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), \ \left(i = 1,2,3\right). \qquad (2.1)$$

Фіксуючи початкові координати і вважаючи змінним тільки час, ми отримуємо закон руху кожної частинки суцільного середовища. Якщо зафіксувати в формулах (2.1) час, то отримаємо розподіл матеріальних частинок в просторі в конкретний момент часу. Якщо ж вважати змінними і початкові координати і час, то отримаємо опис руху суцільного середовища.

Початкові координати $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$, що індивідуалізують кожну частинку, і час t називаються *змінними Лагранжа*.

Переміщення матеріальних точок визначаються як різниця між їх поточним (актуальним) і початковим значеннями:

$$\begin{cases} u^1 = x^1 - \xi^1; \\ u^2 = x^2 - \xi^2; \\ u^3 = x^3 - \xi^3. \end{cases} \tag{2.2}$$

Введемо поняття *супутньої системи координат*. Це рухома деформівна система координат, координатні лінії якої завжди асоційовані з одними і тими ж матеріальними частинками. В початковий момент часу координатні лінії прямолінійні та співпадають з координатними лініями декартової системи координат. В подальшому супутня координатна система переміщується і деформується разом з матеріальним середовищем Можна сказати, що вона «вморожена» в матеріальне середовище. Координатні лінії такої системи в загальному випадку при русі середовища стають криволінійними (рисунок 2. 1).

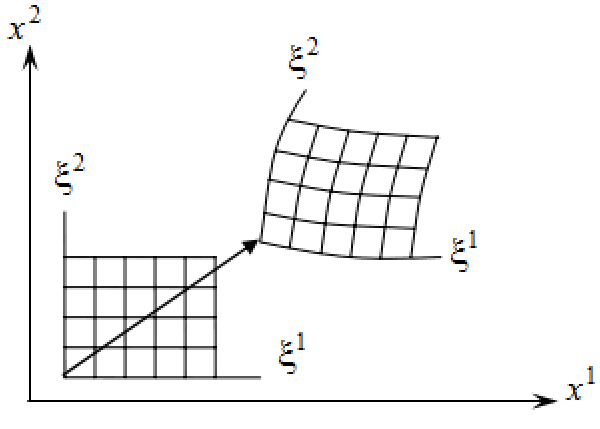


Рисунок 2.1 – Рух середовища і супутня система координат

В підході Ейлера об’єктом дослідження є нерухомий простір спостерігача, який заповнено середовищем, що рухається. Величини, які характеризують рух, вважаються функціями координат точки в нерухомому середовищі спостерігача і часу t. Ці змінні носять назву *змінних Ейлера*. Таким чином, об'єктом дослідження в підході Ейлера є різноманітні поля (тобто розподіл величин в просторі), що характеризують рух суцільного середовища. Рух суцільного середовища з точки зору Ейлера можна вважати заданим, якщо відомо розподіл компонент переміщень (u^i), $(i=1,2,3)$ або швидкості (v^i), $(i=1,2,3)$ суцільного середовища в нерухомому просторі спостерігача в залежності від змінних Ейлера:

$$\begin{cases} u^1 = u^1\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ u^2 = u^2\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ u^3 = u^3\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} v^1 = v^1\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ v^2 = v^2\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ v^3 = v^3\left(x^1, x^2, x^3, t\right). \end{cases} \tag{2.3}$$

Від змінних Лагранжа можна перейти до змінних Ейлера і навпаки. Розв'язуючи систему (1) відносно змінних Лагранжа, отримуємо

$$\xi^i = \xi^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right), \ (i=1,2,3). \tag{2.4}$$

Формули (2.4) дозволяють індивідуалізувати матеріальну частинку суцільного середовища (знайти її початкові координати), що знаходиться в даний момент часу в точці нерухомого простору з координатами $\left(x^1, x^2, x^3\right)$. Ці формули є альтернативним в порівнянні з формулами (2.1) способом завдання руху суцільного середовища за Ейлером.

Таким чином, опис руху суцільного середовища за Лагранжем визначає закони зміни переміщень, швидкості і прискорення для кожної індивідуальної частинки суцільного середовища, а опис руху за Ейлером – закони зміни тих самих величин, але для фіксованих точок простору.

Опис руху за Ейлером і Лагранжем механічно еквівалентний. В числових розрахунках використовується як Ейлеревий, так і Лагранжевий опис руху суцільного середовища.

Відмінність точок зору Лагранжа і Ейлера на вивчення руху суцільного середовища. Таким чином, з точки зору Лагранжа, ми цікавимося законами зміни швидкості, прискорення, температури та інших величин для даної індивідуальної точки суцільного середовища, а з точки зору Ейлера – швидкістю, прискоренням, температурою і т.д. в даному місці середовища. З точки зору Ейлера, ми виділяємо деяку область простору і хочемо знати всі дані про частинки, які в неї приходять.

Ясно, що математично точка зору Ейлера відрізняється від точки зору Лагранжа тільки тим, що в першій змінними є координати точок простору x^1, x^2, x^3 і часу t, а в другій – параметри ξ^1, ξ^2, ξ^3 є індивідуальними координатами частинок середовища, що змінюються у часі t.

У відповідності до описаних систем відліку, розрізняють відносну деформацію)[1] Коші (або показник Коші)

$$\xi = \frac{\Delta L}{L_0},$$

відносну деформацію Ейлера

$$\xi = \frac{\Delta L}{L},$$

логарифмічну деформацію або показник Генки (для великих деформацій)

$$\delta = \ln \frac{L}{L_0},$$

де $\Delta L = L - L_0$ – абсолютна деформація – різниця між кінцевою L і початковою L_0 відстанню між двома точками суцільного середовища.

При малих деформаціях (5–10 % від 1) показники Коші і Генки практично співпадають.

Субстанціональна похідна або індивідуальна і локальна похідна за часом. Розподіл температур можна задати як з точки зору Лагранжа – $T = T\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right)$, так і з точки зору Ейлера – $T = T\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$. Якщо розподіл T задано з точки зору Лагранжа, то обчислити зміну температури T в одиницю часу t в частинці суцільного середовища дуже просто

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}. \tag{2.5}$$

[1] Деформація – це таке зміщення частинок тіла одна відносно другої, при якому змінюється відстань між ними, але не порушується неперервність самого тіла. Розрізняють пружну деформацію, яка є зворотною, і незворотну – пластичну.

Як обчислити ту ж величину, якщо розподіл температури задано в залежності від змінних Ейлера $T\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$? Очевидно, для цього треба перейти від змінних Ейлера до змінних Лагранжа

$$T\left(x^1, x^2, x^3, t\right) = T\left[x^1\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), x^2\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), x^3\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), t\right] \qquad (2.6)$$

та скористатися правилом диференціювання складної функції. Тоді

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + \frac{\partial T}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \qquad (2.7)$$

де похідні $\dfrac{\partial x^1}{\partial t}, \dfrac{\partial x^2}{\partial t}, \dfrac{\partial x^3}{\partial t}$ беруться при постійних ξ^1, ξ^2, ξ^3 і, відповідно, є компонентами швидкості v^1, v^2, v^3. Тому можна записати, що

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}. \qquad (2.8)$$

Замітимо, що при заданій функції $T\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$ для обчислення $\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ не треба повністю знати закон руху суцільного середовища, необхідно знати тільки поле швидкості $\mathbf{v}$.

Похідна $\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ характеризує зміну температури з часом в даній точці суцільного середовища і називається індивідуальною, або субстанціональною, або матеріальною, або повною похідною температури T за часом t і позначається символом $\dfrac{dT}{dt}$. Похідна $\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i}$ характеризує зміну температури T в одиницю часу в даній точці простору x^1, x^2, x^3 і називається локальною похідною і позначається $\dfrac{\partial T}{\partial t}$. В загальному випадку індивідуальна похідна $\dfrac{dT}{dt}$ не дорівнює локальній $\dfrac{\partial T}{\partial t}$, а відрізняється від неї на величину, яка залежить від руху частинок і називається конвективною похідною. Отже

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}, \qquad (2.9)$$

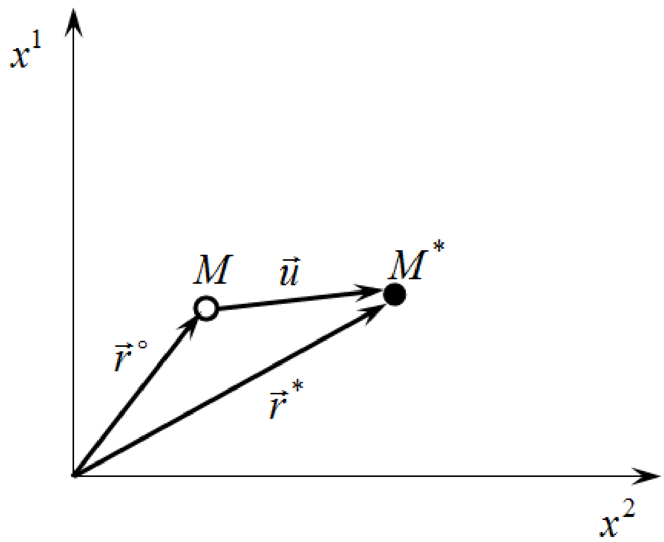
або

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} T. \qquad (2.10)$$

Векторні базиси в початковій та актуальній конфігурації тіл. Розглянемо початкову і актуальну (поточну) конфігурації тіла на прикладі переміщення його окремої частинки, тобто зміни її положення у просторі під дією зовнішніх або внутрішніх сил. Початкове і актуальне положення частинки тіла у просторі можна охарактеризувати відповідним радіусом вектором (рисунок 2.2).

У відповідності до рисунку 2.2 початковий векторний базис $\mathbf{e}_i^{\circ}$ частинки тіла M визначається співвідношенням

$$\mathbf{e}_i^{\circ} = \frac{\partial \mathbf{r}^{\circ}}{\partial x^i}. \qquad (2.11)$$



M° і M^* – точки, що характеризують початкове і актуальне положення частики тіла у просторі, відповідно; $\vec{r}^{\circ}$ і $\vec{r}^*$ – радіуси-вектори початкового і актуального положення частики тіла у просторі, відповідно; $\vec{u}$ – вектор переміщення; $\left(x^1, x^2\right)$ – система координат

Рисунок 2.2 – Початкове і актуальне положення частинки тіла у просторі

Тоді актуальний векторний базис $\mathbf{e}_i^*$ визначається як

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}^\circ}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}, \qquad (2.12)$$

де $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^\circ + \mathbf{u}$ – вектор переміщення, що спричинює зміну положення частинки тіла у просторі під дією зовнішніх або внутрішніх сил.

Початковий векторний базис $\mathbf{e}_i^\circ$ відповідає або відсутності напружень, або положенню рівноваги зовнішніх масових сил $\vec{F}^\circ = \overset{\circ}{f}{}^m \mathbf{e}_m^\circ$ з внутрішніми напруженнями $\hat{\sigma}^\circ = \overset{\circ}{\sigma}{}^{mn} \mathbf{e}_m^\circ \mathbf{e}_n^\circ$.

Актуальний векторний базис $\mathbf{e}_i^*$ відповідає довільному деформованому стану рухомого середовища під дією зовнішніх масових сил $\vec{F}^* = \overset{*}{f}{}^m \mathbf{e}_m^*$ з внутрішніми напруженнями $\hat{\sigma}^* = \overset{*}{\sigma}{}^{mn} \mathbf{e}_m^* \mathbf{e}_n^*$.

Скінчена деформація рухомого середовища відносно початкового фіксованого базису $\mathbf{e}_i^\circ$ у загальному випадку визначається як

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{mn} \mathbf{e}^{*m} \mathbf{e}^{*n}, \qquad (2.13)$$

де $\varepsilon_{mn} = \overset{*}{\varepsilon}_{mn} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}$ – компоненти тензора деформацій у початковій конфігурації тіла; $\overset{*}{\varepsilon}_{mn}$ – компоненти тензора деформацій рухомого середовища.

При відсутності напружень у початковому базисі маємо, що $\varepsilon_{mn} = \overset{*}{\varepsilon}_{mn}$.

Гіпотези МСС і їх роль при розробці математичних моделей. Основними гіпотезами МСС є такі: *гіпотеза суцільності; гіпотеза однорідності; гіпотеза ізотропності властивостей середовища; гіпотеза про природній ненапружений стан; гіпотеза про простір і час*.

І – гіпотеза суцільності: тіла складаються з нескінченно малих частинок, які суцільно заповнюють заданий об'єм порожнин, розривів та ін. Суцільне середовище це континуум в тривимірному евклідовому просторі E^3);

ІІ – гіпотеза однорідності: властивості тіл не залежать від положення точки (тобто є константами) або, якщо вони змінюються, то змінюються плавно без стрибків таким чином, що функції, які описують зміну властивостей є неперервними і диференційованими функціями;

III – гіпотеза ізотропності: передбачає рівність фізичних властивостей середовища в будь-якому напрямку;

IV – гіпотеза про природній ненапружений стан: передбачає відсутність напружень в тілі до прикладення навантаження. В дійсності такі напруження існують. Використання цієї гіпотези, по-перше, пов'язано з невизначеністю в загальному випадку таких напружень, а по-друге, з необхідністю визначення напружень, що пов'язані з конкретним зовнішнім навантаженням;

V – гіпотеза про простір і час: передбачає, що всі процеси розглядаються у просторі, в якому визначені відстані між точками, і розгортаються у часі, причому в класичній механіці МСС час не залежить від вибору системи відліку, а в релятивістській – простір і час зв'язується в єдиний простір-час.

Розглянуті гіпотези дозволяють застосовувати добре розроблений математичний апарат диференціального і інтегрального числення неперервних функцій для формулювання математичних моделей і методів розв'язання систем диференціальних рівнянь МСС.

Основні величини, які розглядаються в МСС (термодинамічні параметри):

1. напруження,
2. деформації,
3. температура,
4. переміщення,
5. швидкість переміщення та ін.

Крім того, розглядаються зовнішні та внутрішні (зусилля) сили.

Розглянемо визначення основних величин МСС.

Напруження є відношення внутрішніх сил, що діють на задану площу перерізу тіла до цієї площі, при умові, що площа є нескінченно малою (тобто прямує до нуля). Розрізняють *нормальні* та *дотичні* напруження. В залежності від дії внутрішніх сил на кожній площині може діяти 1 нормальне і 2 дотичних напружень. Вимірюється у системі СІ у Паскалях (Па).

Головним напруженням називають напруження, що діє на головній площині (де дотичні напруження дорівнюють нулю).

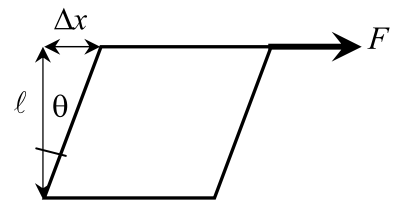
Розрізняють три види деформацій:

1. лінійну (безрозмірну);
2. зсуву;

3. об’ємну.

Лінійна деформація – це відношення приросту довжини тіла до його початкової довжини.

Деформація зсуву виникає тоді, коли на тіло, наприклад брусок, діє сила паралельна основі (рисунок 2.3). В цьому випадку виникає зміщення горизонтальних шарів в тілі відносно один одного без зміни їх розмірів.



ℓ – відстань між шарами; Δx – абсолютний зсув паралельних шарів тіла; θ – кут зсуву; F – сила, що діє паралельно основі бруска

Рисунок 2.3 – Деформація зсуву (дисторсія)

Відносна деформація зсуву визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\Delta x}{\ell},$$

де Δx – абсолютний зсув паралельних шарів тіла відносно один одного; ℓ – відстань між шарами (для малих кутів справедливо – $\mathrm{tg}\theta = \gamma$).

Кут θ вимірюється в радіанах. *Радіан* – це кут сектора, в якому довжина дуги дорівнює радіусу.

Об’ємна деформація – це відношення зміни об’єму тіла до його початкового значення.

Температура (від лат. *temperatura* — належне зміщення, нормальний стан) — скалярна фізична величина, яка характеризує середню кінетичну енергію частинок макроскопічної системи (середовища), що припадає на один ступінь свободи, і знаходиться в стані термодинамічної рівноваги. Вимірюється у системі СІ у Кельвінах (К).

Переміщення (в кінематиці) – це зміна місця положення фізичного тіла в просторі відносно вибраної системи відліку. Також *переміщенням* називають вектор, який характеризує цю зміну і має властивості адитивності. Довжина відрізку – це модуль переміщення, вимірюється в метрах (СІ). Можна визначити переміщення, як зміну радіус-вектора точки $d\mathbf{r}$.

Швидкість переміщення – це зміна переміщення у часі, вимірюється метрах за секунду в (СІ) – м/с.

Задачі механіки суцільного середовища. До задач МСС відносяться задачі дослідження напружено-деформованого стану твердих, рідких та газоподібних тіл при їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи – гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо, що безпосередньо витікає із визначення МСС як науки.

ТЕМА 3 ВВЕДЕННЯ В ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

Лекція 3.1(3) **Поняття вектора. Координатні системи. Представлення векторів в прямокутних і косокутних прямолінійних координатах. Основний і взаємний векторні базиси. Властивості змішаного добутку векторів. Німий, вільний, коваріантний і контраваріантний індекси. Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора. Дії над векторами**

Тензорний аналіз або тензорне числення є основою математичного апарату механіки суцільних середовищ. Використання цього апарату дає змогу значно спростити та стиснути об'єм інформації при записі математичних моделей МСС.

Вектор це геометрична величина, яка характеризується модулем і напрямком. Наприклад, вектор швидкості позначається як $\mathbf{v}$, а його модуль – $|\mathbf{v}|$.

Координатні системи. Координатні системи, які визначаються 3-а векторами поділяють на дві групи:

– *декартова* система координат (ортогональна, рисунок 3.1);
– *афінна* або *косокутна* система координат визначається будь-якими 3-а векторами, які не лежать в одній площині (рисунок 3.2).

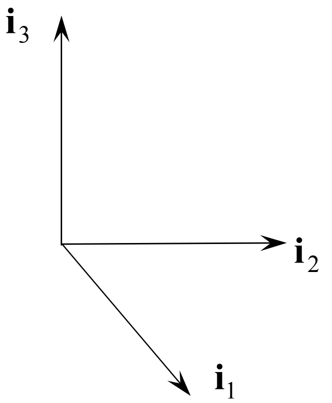


Рисунок 3.1 – Декартова система координат

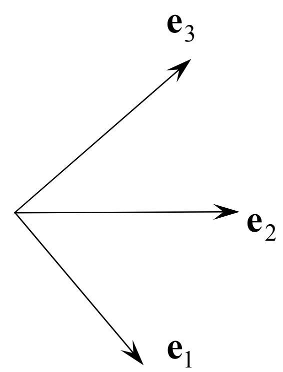


Рисунок 3.2 – Афінна система координат

Вектори, що визначають системи координат є базисними. Наприклад, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – базисні вектори ортогональної декартової системи координат, а $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базисні вектори афінної системи координат.

Представлення векторів в прямокутних і косокутних прямолінійних координатах. Основним призначенням координатних систем є розклад векторів за заздалегідь прийнятим базисним векторам системи координат (рисунки 3.3, 3.4).

Наприклад, тензор (вектор) **a** в декартовій системі координат (рисунок 3.3) можна розкласти за основним базисом $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, який позначається нижніми індексами

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{i}_1 + a^2\mathbf{i}_2 + a^3\mathbf{i}_3, \qquad (3.1)$$

де a^1, a^2, a^3 – компоненти вектора $\vec{a}$ в декартовій системі координат, які являють собою числа або скаляри.

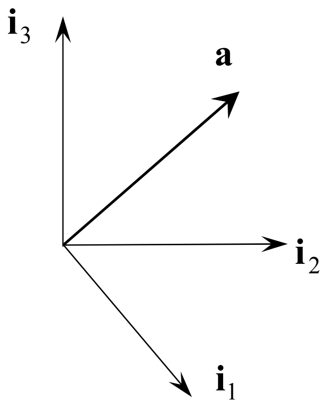


Рисунок 3.3 – Представлення вектора у декартовій (прямокутній) системі координат

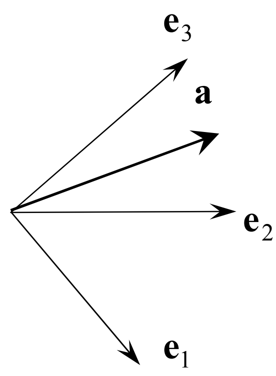


Рисунок 3.4 – Представлення вектора у афінній (косокутній) системі координат

Розклад тензору **a** в афінній (косокутній) системі координат (рисунок 3.4) за основним базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (який позначається нижніми індексами) записується як

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, \qquad (3.2)$$

де a^1, a^2, a^3 – компоненти вектора $\vec{a}$ в афінній системі координат.

Основний і взаємний векторні базиси. Основним базисом декартової системи координат є 3 орти $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Причому компоненти вектора $\vec{a}$

визначаються як скалярний добуток (який позначається знаком $\cdot$) вектора $\mathbf{a}$ на базисні вектори $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$

$$a^1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_1; \quad a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_2; \quad a^3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_3. \tag{3.3}$$

Основним базисом афінної системи координат є 3 орти $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Компоненти вектора $\vec{a}$ в афінній визначаються аналогічним чином (3.3).

В тензорному аналізі поряд з основним базисом було запропоновано ввести додатковий базис, який також складається з 3-х векторів і називається *взаємним*. *Взаємний базис* позначається верхніми індексами і визначається формулами:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{3.4}$$

де $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ – одночасний скалярний і векторний добуток, який називається *змішаним добутком*. При цьому спочатку виконується векторний добуток, а потім скалярний. Результатом змішаного добутку $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ є скаляр.

Властивості змішаного добутку векторів:
- змішаний добуток не залежить від розташування знаків векторного і скалярного добутку;
- якщо в змішаному добутку два з векторів мають однаковий напрям або збігаються, то змішаний добуток дорівнює нулю;
- циклічна заміна індексів не змінює результату змішаного добутку;
- при нециклічній зміні індексів векторів результатом будемо мати від'ємний знак.

Вектори взаємного базису так само як і вектори основного базису використовують для того, щоб визначення компонент розкладу вектора виконати шляхом скалярного добутку.

Розглянемо приклади розкладу вектора на взаємному базисі. Для коваріантних компонент вектора $\mathbf{a}$ (з нижніми індексами) маємо

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^1; \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2; \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^3, \\ \text{або } a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i \quad (i = 1,2,3). \tag{3.5}$$

Розклад вектора **a** на взаємному базисі можна записати через його коваріантні компоненти

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}^i \,, \tag{3.6}$$

де $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i \quad (i = 1,2,3)$.

Німий, вільний, коваріантний і контраваріантний індекси. Індекс, що повторюється у виразі називається *німим*, а індекс який не повторюється – *вільним*.

Німі індекси мають такі властивості:

1. по німим індексам виконується сумування, яке при записі виразів записується таким чином
   $$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}^i = a_i\mathbf{e}^i\,;$$
2. німі індекси можуть розташовуватись в різних положеннях: A_i^i, A_{ii};
3. німі індекси можна замінити на будь-який інший, який не зустрічається у виразі;
4. німі індекси можна одночасно змінювати з точки зору їх положення (коваріантні на контраваріантні і навпаки)
   $a_{\cancel{i}}^{i} - \mathbf{e}_i^{\cancel{i}}$.

Для вільних індексів є правило: якщо в лівій частині рівняння є вільний індекс, то він має бути і в правій його частині і в тому ж самому положенні; або погодження про ранг – всі вільні індекси, що зустрічаються тільки внизу або тільки вверху, пробігають значення від 1 до n, так що рівняння з R вільними індексами є скороченим записом n^R рівнянь. Як верхні, так і нижні індекси різних частин рівняння повинні співпадати.

Індекси, що знаходяться знизу називаються *коваріантними*, а зверху – *контраваріантними*.

Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора. Контраваріантні компоненти вектора $\vec{a}$ наведені в (3.1)–(3.3), а коваріантні – в (3.5), (3.6).

Дії над векторами:

– *від'ємний вектор* – це дія, яка полягає в тому, що модуль вектора залишається незмінним, а напрям змінюється на протилежний;

– *множення вектора на скаляр* – результатом є збільшення модуля вектора на цей скаляр;
– *сума векторів* – вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма побудованого на векторах, що складаються;
– *скалярний добуток* двох векторів **a** і **b** є скаляр (число) і дорівнює добутку модулів цих векторів на cos кута між ними – $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$. Скалярний добуток двох векторів можна також записати через їх компоненти

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_ib_i; \qquad (3.7)$$

– *векторний добуток* двох векторів **a** і **b** є вектор **c** (позначається знаком $\times$), модуль якого дорівнює добутку модулів на sin кута між ними, а напрям результуючого вектора збігається з напрямком нормалі векторів, що перемножуються при умові, що з кінця результуючого вектора видно рух від першого до другого вектора проти годинникової стрілки (правило правого буравчика, рисунок 3.5)

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \qquad (3.8)$$

а через компоненти векторів для векторного добутку двох векторів будемо мати

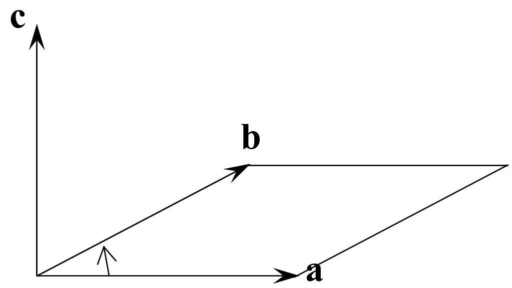
$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}^1+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}^2+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}^3; \qquad (3.9)$$

– *тензорне множення* 2-х векторів полягає в тому, що виникає нова величина, яка називається *діадою* і є елементарним тензором

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\mathbf{ab}. \qquad (3.10)$$

Наприклад, (матричне) множення вектора-стовпця на вектор-рядок дає їх тензорний добуток

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}. \qquad (3.11)$$



площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$

Рисунок 3.5 – До векторного добутку векторів

Кількість векторів, які беруть участь у тензорному добутку характеризують властивість, яку називають *рангом* тензора (більше 3-х – *поліада*, 3 – *тріада*, 2 – *діада*). Якщо перед векторами стоять скаляри, то скалярні величини перемножуються звичайним чином

$$(2\mathbf{a})\otimes(3\mathbf{b})=6\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}. \qquad (3.12)$$

Лекція 3.2(4) **Визначення тензора. Представлення тензорів через вектори основного і взаємного базисів, векторний супровід. Фундаментальні тензори систем координат: метричний, перетворення координат, Леві-Чівіти. Компоненти метричного тензора. Компоненти тензора перетворення координат**

Визначення тензора. Тензором називається геометрична величина, яка має n^r компонент, де n – розмірність простору, r – ранг тензора, і може бути представлена у вигляді $\hat{T}=t^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор 2-го рангу, (тут знак ^ вказує на те, що це тензор 2-го рангу) $\overset{3}{\hat{S}} = S^{ijk}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ – тензор 3-го рангу.

У відповідності з визначенням тензора, скаляр це тензором нульового рангу, а вектор – 1-го рангу.

Розглянемо запис *тензорного добутку* двох векторів з використанням базисних векторів

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=a^i\mathbf{e}_i\otimes b^j\mathbf{e}_j=\underline{a^ib^j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=t^{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=t^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\ . \qquad (4.1)$$

В результаті вираз $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ зведено до тензорного добутку базисних векторів, які називаються діадами (2), тріадами (3) і поліадами (>3). Величини, що стоять перед діадами називають *компонентами тензора* $t^{ij}=a^ib^j$, а діади, тріади, поліади – *векторним супроводом тензора*.

У випадку тріади для тензорного добутку маємо, що

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}=S^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}S^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\ \text{– 27 членів.} \qquad (4.2)$$

Представлення тензорів через вектори основного і взаємного базисів, векторний супровід. Наприклад, тензор напружень 2-го рангу $\hat{\sigma}$ представляється контраваріантними компонентами σ^{ij} через векторний супровід $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, який є векторами основного базису

$$\hat{\sigma}=\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\,, \qquad (4.3)$$

а тензор деформацій 2-го рангу $\hat{\varepsilon}$ представляється коваріантними компонентами ε_{ij} через векторний супровід $\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$, який є векторами взаємного базису

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\,. \qquad (4.4)$$

Фундаментальні тензори систем координат. До фундаментальних тензорів відносяться:

– *метричний* тензор

$$\hat{g}=g^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=g_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j=g_i^j\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i\,; \qquad (4.5)$$

– тензор *перетворення координат* – тензор, компоненти якого утворені базисними векторами різних систем координат

$$\hat{c}=c_i^{j'}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_{j'}=c_{j'}^{i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}^{j'}\,; \qquad (4.6)$$

– тензор *Леві-Чівіта*

$$\overset{3}{\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k . \qquad (4.7)$$

Компоненти метричного тензора. Розрізняють такі компоненти метричного тензору відносно основного базису

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ji} \text{ – коваріантні;}$$
$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ji} \text{ – контраваріантні;}$$
$$g_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \text{ – змішані,} \qquad (4.8)$$

тобто метричний тензор є симетричним.

Компоненти тензора перетворення координат:

$$\begin{aligned} c_i^{j'} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{j'} ; \\ c_{i'}^{j} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}^{j} , \end{aligned} \qquad (4.9)$$

тобто компоненти тензора перетворення координат завжди є змішаними.

Компоненти тензора Леві-Чівіти

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\right). \qquad (4.10)$$

Одиничний тензор. Істотне значення серед диадиків або тензорів 2-го рангу має тензор тотожного перетворення, який при скалярному добутку на вектор не змінює його. Внаслідок цієї властивості він також має назву одиничного тензора і позначається через $\mathbf{I}$. При використанні двох взаємних координатних базисів одиничний тензор може бути представлений рівністю

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_n\mathbf{e}^n . \qquad (4.11)$$

При скалярному добутку одиничного тензора $\mathbf{I}$ на вектор $\mathbf{a}$ отримуємо

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = \left(\mathbf{e}^n\mathbf{e}_n\right) \cdot \mathbf{a} = a_n\mathbf{e}^n = \mathbf{a} . \qquad (4.12)$$

Компоненти метричного тензора. Як було відмічено вище (4.8) змішані компоненти метричного тензора визначаються скалярним добутком коваріантного на контраваріантний базис

$$g_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j, \tag{4.13}$$

де $\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$ – символ Кронекера.

Визначимо скалярні добутки базисів:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3} = 1,$$
$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 1, \; \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 1,$$

всі інші $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = 0$ при $i \neq j$.

Властивість 1. Змішані компоненти метричного тензора є компонентами матриці символу Кронекера.

Властивість 2. Компоненти метричного тензора є компонентами розкладу векторів взаємного базису за векторами основного базису

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_i \tag{4.14}$$

$$\text{і } \mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^i, \tag{4.15}$$

навпаки, компонентами розкладу основного базису по взаємному базису. Тобто за допомогою метричного тензора виконуються операції опускання або підняття індексу.

Властивість 3. Метричний тензор дозволяє в будь-якій системі координат визначати відстань між двома точками заданих координатами або модуль вектору заданого компонентами. Нехай маємо вектор $\mathbf{a}$, заданий компонентами

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3,$$

тоді вектор можна записати через взаємний базис

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3.$$

Скориставшись узагальненою формулою Піфагора можна отримати модуль вектора

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} .$$

Тоді

$$(\mathbf{a})^2 = \left(a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3\right)^2 = a_1a_1\mathbf{e}^1\mathbf{e}^1 + a_1a_2\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2 + a_1a_3\mathbf{e}^1\mathbf{e}^3 +$$
$$+ a_2a_1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^1 + a_2a_2\mathbf{e}^2\mathbf{e}^2 + a_2a_3\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3 + a_3a_1\mathbf{e}^3\mathbf{e}^1 + a_3a_2\mathbf{e}^3\mathbf{e}^2 + a_3a_3\mathbf{e}^3\mathbf{e}^3$$

або

$$\left(\mathbf{a}^2\right) = a_i a_j g^{ij} .$$

Наслідком властивостей метричного тензора (4.14), (4.15) є можливість підняття і опускання індексів. Тобто скориставшись (4.15) отримаємо

$$c^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = c^{ij}g_{im}\mathbf{e}^m g_{jn}\mathbf{e}^n = c^{ij}g_{im}g_{jn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n = c_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n , \tag{4.16}$$

де $c_{mn} = c^{ij}g_{im}g_{jn}$.

Аналогічно можна записати для підняття індексів

$$c^{st} = c_{pq}g^{ps}g^{qt} . \tag{4.17}$$

Компоненти тензора перетворення координат. Використовуючи формули, які визначають тензор перетворення координат

$$\begin{aligned} c_i^{j'} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{j'} ; \\ c_{i'}^{j} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}^{j} , \end{aligned} \tag{4.18}$$

запишемо вирази для базисів при переході з однієї системи координат (з індексом i) в іншу (з індексом i')

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^{m}\mathbf{e}_m , \qquad \mathbf{e}_m = c_m^{s'}\mathbf{e}_{s'} , \tag{4.19}$$
$$\mathbf{e}^{i'} = c_n^{i'}\mathbf{e}^n , \qquad \mathbf{e}^n = c_{s'}^{n}\mathbf{e}^{s'} . \tag{4.20}$$

Використовуючи (4.19), (4.20) запишемо компоненти вектора **a** через базиси різних координатних систем

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i = a_i \mathbf{e}^{m'} c^i_{m'} = \underline{a_i c^i_{m'}} \mathbf{e}^{m'} = a_{m'} \mathbf{e}^{m'}, \tag{4.21}$$

де $a_{k'} = a_i c^i_{k'}$;
і зворотне перетворення компонентів вектора **a**

$$a_i = a_{k'} c^{k'}_i. \tag{4.22}$$

Через тензор перетворення координат також неважко записати вираз для компонент тензора для переходу з однієї системи координат в іншу. Наприклад, візьмемо тензор 3-го рангу для переходу від системи координат з індексами $(i', j', k' = 1,2,3)$ до другої системи з індексами $(p, q, z = 1,2,3)$

$$S^{pqz} = S^{i'j'k'} c^p_{i'} c^q_{j'} c^z_{k'} \qquad \text{(27 компонент)}. \tag{4.23}$$

Формула (4.23) також використовується для доведення твердження про те, що компоненти якоїсь заданої величини є компонентами тензора.

У відповідності з властивостями тензора перетворення координат і зокрема формулою (4.23) можна сформулювати друге визначення тензора. *Тензором* називається геометрична величина, яка має n^r компонент (n – розмірність простору, r – ранг тензора), який при зміні координатної системи перетворюється у відповідності до формул:

$$a^i = a^{m'} c^i_{m'}; \tag{4.24}$$

$$b^{kl} = b^{s't'} c^k_{s'} c^l_{t'}. \tag{4.25}$$

Лекція 3.3(5) **Компоненти тензора Леві-Чівіта. Унарні дії над тензором: транспонування, скалярна згортка, векторна згортка, слід тензора. Бінарні операції з тензорами: сума тензорів, скалярний добуток, подвійний скалярний добуток, векторний добуток, тензорний добуток. Диференціювання тензорів. Оператор Гамільтона. Градієнт тензора. Оператор дивергенції**

Компоненти тензора Леві-Чівіта. Компоненти тензора Леві-Чівіта або символу перестановки ε_{ijk}, ε^{ijk} можна представити таким чином:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}^k;\\ &\varepsilon_{ijk} = \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\right);\\ &\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j = \varepsilon^{ijk}\mathbf{e}_k. \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Наприклад, тензор (символ) Леві-Чівіти, який має 27 компонент, в будь-якій ортогональній системі координат визначається в такій формі:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3;\\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3;\\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i = j, \text{ або } j = k, \text{ або } k = i). \end{cases}$$

Тобто, скориставшись рисунком 5.1 нескладно записати:

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$

$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1,$

а всі інші 18 компонент, у яких символи повторюються, дорівнюють нулю.

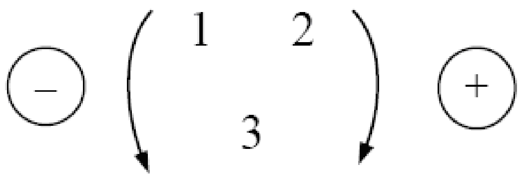


Рисунок 5.1 – До визначення ε_{ijk}

Унарні дії над тензором. Транспонування тензора виконується шляхом перестановки векторного супроводу тензора. При виконанні транспонування тензорів більшого рангу повинно бути вказано, які вектори мають бути переставлені.

Нехай маємо тензор другого рангу

$$\hat{M} = m^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \qquad (5.2)$$

де m^{ij} – компоненти тензора; $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – супровід тензора.

Результатом його транспонування буде

$$\hat{M}^T = m^{ji}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i, \tag{5.3}$$

де T – знак операції транспонування.

Скалярна згортка полягає в тому, що два з векторів супроводу тензора скалярно перемножуються між собою

$$a^{ij}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a^{ij}g_{ij} = a_i^i, \tag{5.4}$$

де $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ – коваріантні компоненти метричного тензору (див. лекцію №4).

Наприклад, згортка тензорів 2-го рангу за двома парами індексів

$E_{ij}F_{km}$ згортається в $E_{ij}F_{ij}$ або $\hat{E}{:}\hat{F}$ – в результаті отримуємо скаляр.

Операція скалярної згортки знижує ранг тензора на дві одиниці і може виконуватись для тензорів, починаючи з 2-го рангу. Якщо ранг тензора > 2, то повинні бути визначені вектори між якими відбувається скалярний добуток

$$\underset{1\cdot 3}{\overset{3}{\hat{P}}} = p^{krq}\underbrace{\mathbf{e}_k\mathbf{e}_r\mathbf{e}_q}_{1\cdot 3} = p^{krq}g_{kq}\mathbf{e}_r = p^{kr}_{\cdot\cdot k}\mathbf{e}_r. \tag{5.5}$$

Скалярна згортка одиничного тензора $\hat{I} = \mathbf{I} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^i$ дає значення

$$\underset{1\cdot 2}{\hat{I}} = 3.$$

Векторна згортка виконується так само як і скалярна тільки замість скалярного добутку між векторами супроводу виконується векторний добуток

$$\underset{1\otimes 2}{\overset{3}{\hat{P}}} = p^{krq}(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_q = p^{krq}\varepsilon_{krm}\mathbf{e}^m\mathbf{e}_k. \tag{5.6}$$

При векторному згортанні ранг тензора зменшується на одиницю.

При векторному згортанні одиничного тензора отримуємо нуль

$$\underset{1\otimes 2}{\hat{I}} = 0 .$$

Слід тензора (має відношення тільки до тензорів 2-го рангу) визначається підсумовуванням його діагональних компонент

$$\mathbf{tr}\left(\hat{T}\right) = T_{11} + T_{22} + T_{33} .$$

Бінарні операції з тензорами. (операції з двома тензорами) *Сума тензорів.* Тензори можна додавати один до одного, якщо вони мають однаковий ранг. При цьому компоненти результуючого тензора дорівнюють сумі відповідних компонент тензорів, що складаються. Нехай маємо два тензори 2-го рангу:

$$\hat{C} = c^{ip}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_p , \qquad \hat{F} = f^{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l .$$

Тоді можна записати, що

$$\begin{gathered}\hat{B} = \hat{C} + \hat{F} ;\ \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{F} ;\quad b^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = c^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + f^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j ;\\ b^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \left(c^{ij} + f^{ij}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j ,\end{gathered} \tag{5.7}$$

де $b^{ij} = c^{ij} + f^{ij}$ – компоненти результуючого тензора.

Скалярний добуток двох тензорів є тензор, ранг якого на дві одиниці менший від суми рангів тензорів, що перемножуються

$$\hat{A}\cdot\hat{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot b^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = a^{ij}b^{mn}\mathbf{e}_i\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_m\right)\mathbf{e}_n = a^{ij}b^{mn}g_{jm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_n , \tag{5.8}$$

де $g_{jm} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m$ – коваріантні компоненти метричного тензору (див. лекцію №4).

Наприклад, в декартовій системі координат результатом скалярного добутку двох тензорів другого рангу буде тензор другого рангу

$$\begin{aligned}\hat{C} = \hat{A}\cdot\hat{B} = \left(a^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right)\cdot\left(b^{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\right) = \left(a^{ij}b^{kl}\mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k\right)\mathbf{e}_l = \left(a^{ij}b^{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l\right)\delta_{jk} =\\ = a^{ij}b^{jl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l ,\end{aligned}$$

де $\delta_{jk} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = 1$ – символ Кронекера; $c_{il} = a^{ij} b^{jl}$ – декартові компоненти тензора $\hat{C}$.

Подвійний скалярний добуток двох тензорів однакового рангу (≥ 2) дає скаляр (або тензор нульового рангу) і визначається для тензорів 2-го рангу як

$$p = \hat{A} : \hat{B} = \left(a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) : \left(b^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l\right) = \left(a^{ij} b^{kl}\right)\left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k\right)\left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l\right) = \left(a^{ij} b^{kl}\right)\delta_{jk}\delta_{il} = a^{ij} b^{ji}. \quad (5.9)$$

Векторний добуток двох тензорів є тензор, ранг якого на одиницю менший від суми рангів тензорів, що перемножуються. В процесі векторного множення компоненти тензорів перемножуються між собою. Векторний супровід першого тензора записується перед векторним супроводом другого тензора і виконується векторне множення між останнім вектором лівого тензора і першим вектором правого тензора. Векторний добуток тензорів позначається так само як векторний добуток векторів

$$\begin{aligned} \overset{3}{\hat{A}} \times \overset{3}{\hat{B}} &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} = a^{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \times b^{mns} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \mathbf{e}_s = a^{ijk} b^{mns} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \left(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_m\right) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_s =, \\ &= \left(a^{ijk} b^{mns} \varepsilon_{kmq}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^q \mathbf{e}_n \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (5.10)$$

де ε_{kmq} – тензор Леві-Чівіта (див. лекцію №4); $a^{ijk} b^{mns} \varepsilon_{kmq}$ – компоненти векторного добутку 2-х тензорів.

Розглянемо також запис *векторного добутку двох векторів* через подвійний скалярний добуток з використанням тензора Леві-Чівіта

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\varepsilon^i_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k\right) : \left(b^l a^m \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m\right) = \\ &= \left(\varepsilon^i_{jk} b^l a^m \mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{e}^j \mathbf{e}^k\right) : \left(\mathbf{e}_l \mathbf{e}_m\right) = \left(\varepsilon^i_{jk} b^l a^m \mathbf{e}_i\right) \delta^j_l \delta^k_m = \\ &= \varepsilon^i_{jk} b^l a^m \mathbf{e}_i = \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right)\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тензорний добуток двох тензорів є тензор, ранг якого є сумою рангів тензорів, що перемножуються. Дана операція полягає в тому, що компоненти тензорів перемножуються, а векторний супровід лівого тензора записується перед векторним супроводом правого тензора і між ними виконується дія тензорного добутку (див. лекцію № 4)

$$\overset{3}{\hat{A}} \otimes \overset{3}{\hat{B}} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = a^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \otimes b^{mns}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s = a^{ijk}b^{mns}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s = \\ = a^{ijk}b^{mns}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s. \tag{5.12}$$

Диференціювання тензорів. Будемо вважати, що тензори є функціями координат. Нехай маємо тензор 2-го рангу

$$\hat{S} = \mathbf{S} = S^{mn},$$

тоді результат його диференціювання можна записати так

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} S^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = S^{mn}_{,i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n, \tag{5.13}$$

де $\dfrac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} = S^{mn}_{,i}$. Тут кома вказує на диференціювання по x^i.

$\dfrac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}$ – похідна від компонент тензора в прямолінійній системі координат є компонентами нового тензора, який є на один ранг вищий за тензор, що диференціюється. Тобто можна записати, що

$$\frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \mathbf{e}^i\frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \mathbf{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(S^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\right), \tag{5.14}$$

де $\mathbf{e}^i\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_i$ – оператор набла ∇ або *оператор Гамільтона*.

Тензор, який утворюється в результаті тензорного добутку оператора Гамільтона на тензор називається *градієнтом тензора*)[2]

---

[2] З математичної точки зору **градієнт** — це похідна скалярної функції, що визначена на векторному просторі, або *градієнтом* скалярної величини U називають вектор в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні в сторону збільшення U і чисельно рівний похідній від U за цим напрямком.

В декартовій системі координат градієнт скалярної величини U записується як

$\mathrm{grad}U = \dfrac{\partial U}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 + \dfrac{\partial U}{\partial x^2}\mathbf{e}_2 + \dfrac{\partial U}{\partial x^3}\mathbf{e}_3$; в циліндричній – $\mathrm{grad}U(r,\theta,z) = \dfrac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z$;

у сферичній – $\mathrm{grad}U(r,\theta,\varphi) = \dfrac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$.

З фізичної точки зору *градієнт*, наприклад, напруженість електростатичного поля є мінус градієнт електричного потенціалу, напруженість гравітаційного поля (прискорення вільного падіння) в класичній

$$\nabla \otimes \hat{S} = \nabla \otimes \mathbf{S} = \mathbf{e}^i \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \mathrm{grad}\,\hat{S} = \mathrm{grad}\,\mathbf{S}\,. \qquad (5.15)$$

Операція скалярного добутку (оператор дивергенції[3]). Скалярний добуток оператора Гамільтона на тензор

$$\nabla \cdot \hat{S} = \nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}^i \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \frac{\partial}{\partial x^i} S^{in}\mathbf{e}_n = \mathrm{div}\,\hat{S} = \mathrm{div}\,\mathbf{S}\,. \qquad (5.16)$$

В результаті застосування до тензора операції дивергенції його ранг зменшується на одиницю (в (5.16) індекс i є німим, тобто по ньому виконується підсумовування).

Лекція 3.4(6) **Ротор. Криволінійні координати. Диференціювання тензорів в криволінійних координатах. Властивості символів Кристофеля. Коваріантні похідні від тензора 2-го рангу заданого контраваріантними компонентами. Диференціювання тензора заданого коваріантними компонентами**

Ротор)[4]. Векторний добуток оператора Гамільтона на тензор називається ротором

$$\begin{aligned}\nabla \times \hat{S} &= \nabla \times \mathbf{S} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} S^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \\ &= \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\left(\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}_m\right)\mathbf{e}_n = \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\varepsilon^i_{mk}\mathbf{e}^k\mathbf{e}_n = \mathrm{rot}\,\hat{S} = \mathrm{rot}\,\mathbf{S}.\end{aligned} \qquad (6.1)$$

теорії гравітації є мінус градієнт гравітаційного потенціалу. Консервативна сила в класичній механіці є мінус градієнт потенціальної енергії.

[3] Дивергенція (від лат. *divergere* — виявляти розходження) — з математичної точки зору диференціальний оператор, який відображає векторне поле на скалярне (тобто операція диференціювання, в результаті застосування якої до векторного поля отримують скалярне поле), і який визначає (для кожної точки простору), «наскільки розходяться вхідні і вихідні потоки з малого околу даної точки поля».
З точки зору фізики дивергенція векторного поля є показником того, в якому ступені дана точка простору (точніше достатньо малий окіл точки) є джерелом або стоком цього поля: $\mathrm{div}\mathbf{F} > 0$ – точка поля є джерелом; $\mathrm{div}\mathbf{F} < 0$ – точка поля є стоком; $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$ – стік і джерело відсутні або компенсуються один одним.

[4] Ротор або вихор це векторний диференціальний оператор над векторним полем, результатом застосування якого є нове векторне поле. Ротор вказує наскільки і в якому напрямку закручене поле в кожній точці середовища.

Ротор не змінює ранг тензора.

Криволінійні координати. Загальне визначення координат є таким: координатами точки називаються три числа, які однозначно визначають положення точки у просторі.

Якщо з трьох чисел безперервно змінюється одне число, то замість точки отримуємо лінію – *координатну лінію*.

Якщо брати різні точки і змінювати першу координату, то отримаємо *сімейство координатних ліній*.

Якщо те саме повторити для другої координати – отримаємо друге сімейство.

Якщо одночасно змінювати 1 і 2 число координат, то отримаємо *координатну поверхню*.

Якщо одна з координатних ліній є кривою, то така система координат називається *криволінійною*.

Якщо одна з трьох координат поверхні є криволінійною, то така система координат також є криволінійною.

Оскільки в криволінійній системі координат виконувати математичні дії неможливо, то в криволінійній системі координат у кожній точці простору ставиться відповідна прямолінійна система координат, яка називається додатковою прямолінійною системою координат (рисунок 6.1).

Особливостями застосування криволінійної системи координат є те, що розклад тензорів і векторів ведеться в кожній точці простору координатного базису, який визначений в даній точці простору. Всі алгебраїчні операції над тензорами, включаючи їх представлення через компоненти в кожній точці простору виконуються за правилами, які були визначені в прямолінійній афінній координатній системі. За основним базисом в кожній точці простору визначається взаємний базис, що дає можливість визначити фундаментальні тензори (див. лекцію № 4).

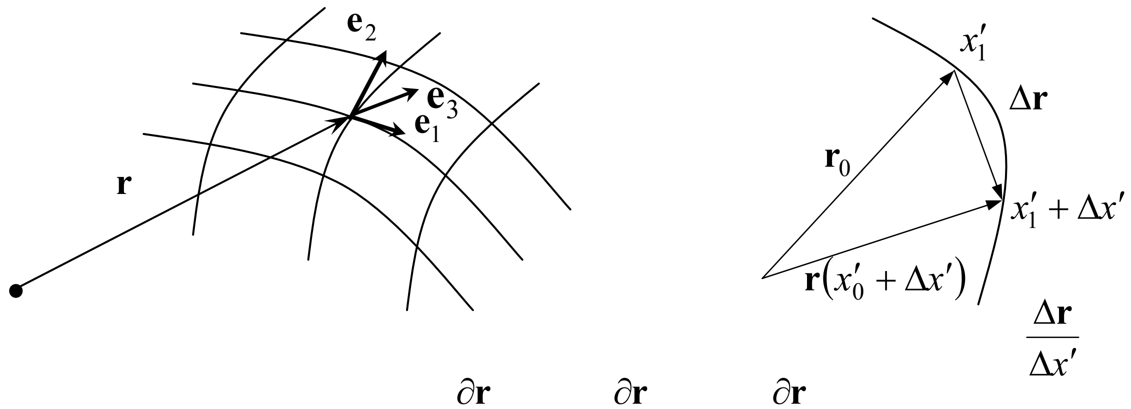
Диференціювання тензорів в криволінійних координатах. Нехай маємо тензор 1-го рангу (наприклад, вектор $\mathbf{a}$)

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i ,$$

тоді результат його диференціювання можна записати для 1-ї координати x^1 у виді

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(a^i \mathbf{e}_i\right) = \frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^1} = \frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^i \Gamma_{i1}^m \mathbf{e}_m , \tag{6.2}$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^1} = \Gamma_{i1}^{m}\mathbf{e}_m$ або $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^{m}\mathbf{e}_m$ – компоненти розкладу від базисних векторів називаються *символами Кристофеля 2-го роду*, які включають 27 компонент.



$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1};\ \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2};\ \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3}$$

Рисунок 6.1 – Додаткова прямолінійна система координат в криволінійній системі координат

Замінимо індекси в (6.2): i на m і навпаки

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^i\Gamma_{i1}^{m}\mathbf{e}_m = \frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^m\Gamma_{m1}^{i}\mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^1} + a^m\Gamma_{m1}^{i}\right)\mathbf{e}_i, \tag{6.3}$$

або

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^1} + a^m\Gamma_{m1}^{i}\right)\mathbf{e}_i = \nabla_1 a^i\mathbf{e}_i, \tag{6.4}$$

де $\nabla_1 a^i = \dfrac{\partial a^i}{\partial x^1} + a^m\Gamma_{m1}^{i}$ – коваріантна похідна від компонент вектора.

При диференціюванні вектора $\mathbf{a}$ по трьох координатах, маємо

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^m\Gamma_{mj}^{i}\right)\mathbf{e}_i = \nabla_j a^i\mathbf{e}_i = a^i_{,j}\mathbf{e}_i, \tag{6.5}$$

де $\nabla_j a^i = a^i_{,j} = \dfrac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^m \Gamma^i_{mj}$. Тут кома вказує на диференціювання по x^j.

Властивості символів Кристофеля. Символи Кристофеля не є тензорами, тому що при переході до нової системи координат вони також перетворюються

$$\Gamma^{r'}_{hk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^m} \Gamma^m_{ij} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{h'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^m}. \tag{6.6}$$

Символи Кристофеля симетричні по нижніх індексах

$$\Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji} \; – \text{(18 компонент)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^m_{ij} \mathbf{e}_m = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} = \Gamma^m_{ji} \mathbf{e}_m. \tag{6.7}$$

Коваріантні похідні від тензора 2-го рангу заданого контраваріантними компонентами. Нехай маємо тензор

$$\hat{T} = \mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

тоді для нього можна записати похідну виду

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(t^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{ij} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \mathbf{e}_j + t^{ij} \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m}, \tag{6.8}$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} = \Gamma^n_{jm} \mathbf{e}_n$ – символи Кристофеля.

Використовуючи заміну в (6.8) з використанням символів Кристофеля індексу i на n і навпаки, j на n і навпаки, запишемо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{ij} \Gamma^n_{im} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_j + t^{ij} \mathbf{e}_i \Gamma^n_{jm} \mathbf{e}_n = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{nj} \Gamma^i_{nm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{in} \Gamma^i_{nm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \\ &= \left(\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} + t^{nj} \Gamma^i_{nm} + t^{in} \Gamma^i_{nm}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla_m t^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = t^{ij}_{,m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \end{aligned} \tag{6.9}$$

де $\nabla_m t^{ij} = t^{ij}_{,m} = \dfrac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} + t^{nj}\Gamma^i_{nm} + t^{in}\Gamma^i_{nm}$ – коваріантна похідна.

Треба відзначити корисні властивості німих індексів, що були використані при перетвореннях в (6.9), які полягають в заміні індексів при векторах супроводу таким чином, щоб вони були єдиними для всіх доданків.

Коваріантна похідна будь-якого тензора складається з частини похідних від компонент + кількість додаткових елементів, яка дорівнює рангу тензора. Тобто маємо для тензора 3-го рангу

$$\nabla_m S^{ijk} = S^{ijk}_{,m} = \frac{\partial S^{ijk}}{\partial x^m} + S^{njk}\Gamma^i_{nm} + S^{ink}\Gamma^j_{nm} + S^{ijn}\Gamma^k_{nm}. \tag{6.10}$$

Диференціювання тензора заданого коваріантними компонентами. Розглянемо вектор

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^k, \tag{6.11}$$

тоді

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(a_i \mathbf{e}^i\right) = \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i + a_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}. \tag{6.12}$$

Тепер визначимо вираз для похідних від вектора взаємного базису

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} - ?, \tag{6.13}$$

$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = g^i_j = \delta^i_j$ – символи Кронекера $\delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$

Скориставшись останнім виразом запишемо, що

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} = 0, \tag{6.14}$$

тому що від константи диференціал дорівнює нулю, тоді

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}\mathbf{e}_j + \mathbf{e}^i \cdot \Gamma^s_{jm}\mathbf{e}_s = 0\,,$$

звідки

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}^i \cdot \Gamma^s_{jm}\mathbf{e}_s\,.$$

Значить, якщо замінити індекси, то будемо мати

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} = -\Gamma^i_{ms}\mathbf{e}^s\,. \tag{6.15}$$

Звідси витікає, що похідна від взаємного базису буде виражатись за допомогою тих самих компонент, але зі знаком «–».

При доведенні останнього рівняння (6.15) ми скористалися множенням на основний базисний вектор $\mathbf{e}_j$ виразу (6.13). Далі враховуючи те, що символи Кристофеля 2-го роду $\Gamma^i_{mn} = \Gamma^i_{nm}$ – симетричні відносно нижніх символів, то для (6.12) можна записати, замінюючи індекси

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^m} &= \frac{\partial}{\partial x^m}\left(a_i\mathbf{e}^i\right) = \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i + a_i\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} = \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i - a_i\Gamma^i_{mn}\mathbf{e}^n = \\ &= \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i - a_n\Gamma^n_{mi}\mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^m} - a_n\Gamma^n_{mi}\right)\mathbf{e}^i = \nabla_m a_i\mathbf{e}^i = a_{i,m}\mathbf{e}^i.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Тоді для тензора 2-го рангу заданого коваріантними компонентами $\hat{T} = \mathbf{T} = t_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$ можна отримати

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(t_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\right) = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j + t_{ij}\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}\mathbf{e}^j + t_{ij}\mathbf{e}^i\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^m} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j - t_{ij}\Gamma^i_{mn}\mathbf{e}^n\mathbf{e}^j - t_{ij}\mathbf{e}^i\Gamma^j_{mn}\mathbf{e}^n = \\
&= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^i - t_{nj}\Gamma^n_{mi}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j - t_{in}\Gamma^n_{mj}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \\
&= \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m} - t_{nj}\Gamma^n_{mi} - t_{in}\Gamma^n_{mj}\right)\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \nabla_m t_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = t_{ij,m}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j.
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

Для тензора третього рангу

$$\overset{3}{\hat{S}} = \mathbf{S} = S_{ijk}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k,$$

маємо, що

$$\nabla_m S_{ijk} = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x^m} - S_{njk}\Gamma^n_{im} - S_{ink}\Gamma^n_{jm} - S_{ijn}\Gamma^n_{km}. \tag{6.18}$$

Лекція 3.5(7) **Коваріантні похідні змішаних компонент тензорів. Перетворення компонент фундаментальних тензорів і символів Кристофеля при зміні системи координат. Скалярний добуток будь-якого тензора на метричний тензор. Зв'язок між метричними тензорами і символами Кристофеля. Символи Кристофеля 1-го роду. Фізичні компоненти тензорів. Матеріальна або тензорна похідна. Інваріантна форма запису рівнянь**

Коваріантні похідні змішаних компонент тензорів. Розглянемо змішаний тензор 3-го рангу

$$\overset{3}{\hat{S}} = S_{i\cdot k}^{\cdot j}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^k,$$

тоді його коваріантна похідна буде виражена співвідношенням

$$\nabla_m S_{i\cdot k}^{\cdot j} = \frac{\partial S_{i\cdot k}^{\cdot j}}{\partial x^m} - S_{n\cdot k}^{\cdot j}\Gamma^n_{im} + S_{i\cdot k}^{\cdot n}\Gamma^j_{nm} - S_{i\cdot n}^{\cdot j}\Gamma^n_{km}. \tag{7.1}$$

Коваріантні похідні від компонент тензора є компонентами нового тензора, ранг якого на одиницю вищий від рангу тензора, який диференціюється. Цей новоутворений тензор називається градієнтом

$$\nabla\hat{T} = \nabla\mathbf{T} = \nabla_m T^{ij} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = t^{ij}_{,m}\mathbf{e}^m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \left(\nabla_m = \mathbf{e}^m\frac{\partial}{\partial x^m}\right),$$

$$\nabla\hat{T} = \operatorname{grad}\hat{T}. \qquad (7.2)$$

Дивергенцію тензорного поля, утвореного тензором 2-го рангу, можна записати через скалярний добуток оператора Гамільтона на тензор

$$\nabla\cdot\hat{T} = \operatorname{div}\hat{T} = \nabla_m t^{mj}\mathbf{e}_j = t^{mj}_{,m}\mathbf{e}_j, \qquad (7.3)$$

а ротор – через векторний добуток

$$\nabla\times\hat{T} = \operatorname{rot}\hat{T} = \nabla_m t^{ij}\varepsilon^m_{ik}\mathbf{e}^k\mathbf{e}_j. \qquad (7.4)$$

Перетворення компонент фундаментальних тензорів і символів Кристофеля при зміні системи координат. Розглянемо метричний тензор

$$\hat{g} = g_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j, \qquad (7.5)$$

де $g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$.

Тензор перетворення координат можна записати як

$$\hat{C} = c_i^{j'}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_{j'}, \qquad (7.6)$$

де $c_i^{j'} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^{j'}$. Тут індекси j' – відносяться до іншої системи координат.

Компоненти метричного тензора при переході до нової системи координат повинні змінюватись згідно таким формулам:

$$\text{– коваріантні } g_{ij} = g_{k'l'}c_i^{k'}c_j^{l'}, \qquad (7.7)$$

$$\text{– контраваріантні } g^{ij} = g^{k'l'}c^i_{k'}c^j_{l'}. \qquad (7.8)$$

Якщо система координат є декартовою, то компоненти метричного тензору стають рівними символу Кроненкера

$$g_{k'l'} = g^{k'l'} = \delta_{k'}^{l'} = \begin{cases} 1 \text{ при } k' = l'; \\ 0 \text{ при } k' \neq l', \end{cases} \tag{7.9}$$

$$g_{ij} = c_i^{k'} c_j^{l'} \delta_{k'}^{l'} = c_i^{k'} c_j^{l'}, \tag{7.10}$$

$$\delta_{k'}^{l'} = \delta_{k'l'} = \delta^{k'l'}, \tag{7.11}$$

метричний тензор

$$g^{ij} = c_{k'}^i c_{k'}^j = \sum_{k=1}^{3} c_{k'}^i c_{k'}^j, \tag{7.12}$$

Символи Кристофеля

$$\Gamma_{mn}^i = \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial \left(c_n^{s'} \mathbf{e}_{s'} \right)}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} \mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^i + c_n^{s'} \frac{\partial \mathbf{e}_{s'}}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i, \tag{7.13}$$

враховуючи те, що

$$\mathbf{e}_n = c_n^{s'} \mathbf{e}_{s'}, \qquad \mathbf{e}^i = c_{k'}^i \mathbf{e}^{k'} \tag{7.14}$$

можна записати, що

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} \mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^i + c_n^{s'} \frac{\partial \mathbf{e}_{s'}}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} \mathbf{e}_{s'} \cdot c_{k'}^i \mathbf{e}^{k'} + c_n^{s'} \frac{\partial \mathbf{e}_{s'}}{\partial x^{p'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^m} \cdot c_{k'}^i \mathbf{e}^{k'} = \\
&= \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} c_{k'}^i \left(\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right) + c_n^{s'} \Gamma_{s'p'}^{q'} \mathbf{e}_{q'} c_m^{p'} \cdot c_{k'}^i \mathbf{e}^{k'} = \\
&= \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} c_{k'}^i \left(\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right) + c_n^{s'} \Gamma_{s'p'}^{q'} c_m^{p'} \cdot c_{k'}^i \left(\mathbf{e}_{q'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right) = \\
&= \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} c_{k'}^i \delta_{s'}^{k'} + c_n^{s'} c_m^{p'} c_{k'}^i \delta_{q'}^{k'} \Gamma_{s'p'}^{q'} = \\
&= \frac{\partial c_n^{k'}}{\partial x^m} c_{k'}^i + c_n^{s'} c_m^{p'} c_{k'}^i \Gamma_{s'p'}^{k'} = \Gamma_{mn}^i.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Тут $\delta_{s'}^{k'} = \left(\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right)$ і $\delta_{q'}^{k'} = \left(\mathbf{e}_{q'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right)$.

Висновки:

В результаті перетворення згідно до формули перетворень можна зробити висновок, що друга частина формули (7.15) відповідає закону перетворення компонент тензора і, якби була б тільки ця частина, то символи Кристофеля були б компонентами тензора 3-го рангу. Але, оскільки, крім другої частини є і перша (7.15), то символи Кристофеля не є компонентами тензора.

Якщо Γ^i_{mn} відповідає декартовій системі координат, то формула (7.15) спрощується до виду

$$\Gamma^i_{mn} = \frac{\partial c^{k'}_n}{\partial x^m} c^i_{k'}, \tag{7.16}$$

оскільки символи Кристофеля в декартовій системі координат дорівнюють нулю.

В (7.16) $c^{k'}_n$ є символами перетворення координат від декартової в будь-яку іншу систему координат.

Скалярний добуток будь-якого тензора на метричний тензор дорівнює самому тензору

$$\hat{g} = g_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = g_{ji}\mathbf{e}^j\mathbf{e}^i = g^j_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i = \delta^j_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i\mathbf{e}_j, \tag{7.17}$$

$$\hat{A}\cdot\hat{g} = A^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^m\mathbf{e}_m = A^{ij}\mathbf{e}_i\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^m\right)\mathbf{e}_m = A^{ij}\delta^m_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_m = A^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{7.18}$$

Розглянемо визначення тензора перетворення координат $c^{i'}_m$

$$c^{i'}_m = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m};$$

$$\mathbf{e}_j = c^{i'}_j\mathbf{e}_{i'}; \quad c^{i'}_j = \left(\mathbf{e}^{i'}\cdot\mathbf{e}_j\right),$$

де $\mathbf{e}_j = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}$, $\mathbf{e}^{i'} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{i'}}$, $\mathbf{r}$ – радіус-вектор або вектор положення точки у просторі.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i},$$

тоді

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \to c_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},\ c_{j'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}},\ c_j^{i'} = \left(\mathbf{e}^{i'} \cdot \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Зв'язок між метричним тензором і символами Кристофеля

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} &= \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} = \Gamma_{im}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \Gamma_{jm}^k \cdot \mathbf{e}_k = \\ &= \Gamma_{im}^k\left(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j\right) + \Gamma_{jm}^k\left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k\right) = \Gamma_{im}^k g_{kj} + \Gamma_{jm}^k g_{ik},\end{aligned} \tag{7.19}$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} = \Gamma_{im}^k \mathbf{e}_k$; $g_{kj} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j$; $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$.

Символи Кристофеля 1-го роду $\Gamma_{im,j}$ визначається як

$$\Gamma_{im}^k g_{kj} = \Gamma_{im,j} \text{ і } \Gamma_{im}^k = \Gamma_{im,j} g^{jk}. \tag{7.20}$$

Візьмемо співвідношення (7.20)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_i,$$

із нього отримаємо

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{im}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{im}^k g_{kj} \tag{7.21}$$

і аналогічно (зі зміною місць індексів i та m в чисельнику і знаменнику)

$$\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_m = \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{mi}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{mi}^k g_{kj}. \tag{7.22}$$

Складемо дві рівності (7.21) і (7.22) і скористаємось симетрією символів Кристофеля по нижніх індексах $\left(\Gamma_{im}^k = \Gamma_{mi}^k\right)$, рівністю $\left(\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} = \dfrac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^i}\right)$ і тим, що

$$\frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^j}\cdot\mathbf{e}_i+\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}\cdot\mathbf{e}_m=\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j},$$

отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i}-\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m}\cdot\mathbf{e}_i-\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i}\cdot\mathbf{e}_m=\Gamma^k_{im}g_{kj}+\Gamma^k_{mi}g_{kj}\rightarrow\\&\rightarrow\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i}-\frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^j}\cdot\mathbf{e}_i-\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}\cdot\mathbf{e}_m=2\Gamma^k_{mi}g_{kj}\rightarrow\\&\rightarrow\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}=2\Gamma^k_{mi}g_{kj},\end{aligned}\tag{7.23}$$

або через символи Кристофеля 1-го роду

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}=2\Gamma_{mi,j}.\tag{7.24}$$

Звідки з (7.24) маємо, що

$$\Gamma_{mi,j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}\right).\tag{7.25}$$

Згорнувши вираз (7.25) з $\frac{1}{2}g^{kj}$, отримаємо

$$\Gamma^k_{mi}=\Gamma_{mi,j}g^{kj}=\frac{1}{2}g^{kj}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}\right).\tag{7.26}$$

Співвідношення (7.25) і (7.26) є формулами для визначення символів Кристофеля 1,2-го родів через метричний тензор.

Фізичні компоненти тензорів. Вектор у довільній системі координат можна розкласти на компоненти у вигляді

$$\mathbf{a}=a^i\mathbf{e}_i=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3.\tag{7.27}$$

Коли розглядається тензор в довільній системі координат значення його компонент буде залежати від модулів базисних векторів $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Якщо, наприклад, збільшити модуль базисного вектора в 2 рази, то значення компоненти вектора зменшиться відповідно у 2 рази.

Тому виникає потреба зробити так, щоб базисні вектори мали одиничний модуль, щоб не змінювалися значення компонент вектора.

Компоненти, які приведені до одиничних модулів базисних векторів називаються *фізичними компонентами*

$$a^1\mathbf{e}_1 = a^1|\mathbf{e}_1|\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|} = \tilde{a}^1\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}, \tag{7.28}$$

де $\tilde{a}^1$ – фізична компонента вектора $\mathbf{a}$, $|\mathbf{e}_1| = \sqrt{g_{11}}$, $g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = |\mathbf{e}_1|^2$, g_{11} – компонента метричного тензора.

Тоді можна записати для фізичних компонент вектора $\mathbf{a}$ такі співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{a}^1 &= a^1|\mathbf{e}_1| = a^1\sqrt{g_{11}}, \\ \tilde{a}^2 &= a^2|\mathbf{e}_2| = a^2\sqrt{g_{22}}, \\ \tilde{a}^3 &= a^3|\mathbf{e}_3| = a^3\sqrt{g_{33}}, \end{aligned} \tag{7.29}$$

і, наприклад, для фізичних компонент тензора напружень $\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$

$$\begin{aligned} \sigma^{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 &= \sigma^{11}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_1|\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}, \\ \tilde{\sigma}^{11} &= \sigma^{11}|\mathbf{e}_1|^2 = \sigma^{11}g_{11}, \end{aligned} \tag{7.30}$$

де $\tilde{\sigma}^{11}$ – фізична компонента,

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma}^{22} = \sigma^{22}|\mathbf{e}_2|^2 = \sigma^{22}g_{22},\ \tilde{\sigma}^{33} = \sigma^{33}|\mathbf{e}_3|^2 = \sigma^{33}g_{33}, \\ \sigma^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \sigma^{12}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}\frac{\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|},\ \tilde{\sigma}^{12} = \sigma^{12}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2| = \sigma^{12}\sqrt{g_{11}g_{22}}, \\ \tilde{\sigma}^{13} = \sigma^{13}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_3| = \sigma^{13}\sqrt{g_{11}g_{33}},\ \tilde{\sigma}^{23} = \sigma^{23}|\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3| = \sigma^{23}\sqrt{g_{22}g_{33}}. \end{gathered} \tag{7.31}$$

Матеріальна або тензорна похідна (див. лекцію №2, субстанціональна похідна). Існує зв'язок між величинами, які використовуються в Ейлеревій і Лагранжевій системах координат. Наприклад, матеріальна похідна або тензорна похідна в будь-якій точці тіла визначається як

$$\frac{d\hat{A}}{dt}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\hat{A}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t}+\left.\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right|_{x^i=\mathrm{const}}=\frac{\partial\hat{A}}{\partial x^i}v^i+\left.\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right|_{x^i=\mathrm{const}}. \tag{7.32}$$

Два доданки в (7.32) виникають через те, що тензор $\hat{A}$ залежить від координати і від часу

$$\hat{A}=\hat{A}\left(x^1,x^2,x^3,t\right);\quad x^i=x^i(t)\quad (i=1,2,3). \tag{7.33}$$

Перший доданок (7.32) називається *конвективною похідною початку*, а другий – *локальною похідною початку* (див. лекцію №2).

Локальна похідна враховує зміну тензора з часом у фіксованій точці простору, а конвективна враховує рух точки в просторі.

Формула (7.32) дозволяє перехід від рівнянь записаних в Лагранжевій системі до рівнянь в Ейлеревій системі координат.

Інваріантна форма запису рівнянь. Якщо рівняння складені відносно тензорів, то перехід від декартових координат до будь-яких інших можна робити формально, заміняючи частинні похідні по координатах на коваріантні похідні

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\nabla_i. \tag{7.34}$$

Отримані таким чином рівняння є *інваріантними*, тобто не залежними від вибору системи координат.

ТЕМА 7 ФІЗИЧНІ РІВНЯННЯ ОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА

Лекція 7.1(8) **Фізичні рівняння стану. Фізичні закони для твердих тіл. Девіатор деформації і напружень. Ізотропні, ортотропні і анізотропні матеріали. Представлення фізичних рівнянь стану в тензорній формі. Тензор 4-го рангу фізичних констант. Властивості компонент тензорів 4-го рангу фізичних (пружних) констант. Перехід з однієї системи координат в іншу. Співвідношення між напруженням і швидкістю деформації для рідин і газів. Закон Нав'є-Стокса. Девіаторні та середні напруження в рідині**

Фізичні рівняння стану. Перші роботи, пов'язані з описанням поведінки твердих і рідких середовищ з'явились в XVII ст. (Гук, Ньютон)

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ – закон Гука (1612 р.)} \tag{8.1}$$

$$\text{або} \quad \sigma = \mu\dot{\gamma}, \tag{8.2}$$

де E – модуль пружності – коефіцієнт пропорційності в (8.1)[5], Па; μ – динамічна в'язкість – коефіцієнт пропорційності в (8.2), Па·с; $\dot{\gamma}$ – швидкість деформації зсуву, с$^{-1}$.

Фізичні закони для твердих тіл. На протязі наукових досліджень твердих і рідких тіл було виявлено, що вони працюють по різному при деформаціях (зміна форми і об'єму).

Як відомо, деформації відбуваються зі зміною об'єму і форми

$$\theta = \hat{\varepsilon} : \hat{g} = \varepsilon_{ij} g^{ij} = \varepsilon_i^i \text{ – скаляр,} \tag{8.3}$$

де θ – деформація зміни об'єму – відношення приросту об'єму до початкового об'єму; $\frac{1}{3}\theta = \varepsilon_0$ – середня лінійна деформація.

Деформація зміни форми (*девіатор деформації*)

$$\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0 \hat{g} = \hat{D}, \tag{8.4}$$

[5] Фізичний зміст *модуля пружності*: модуль пружності це фізична величина, яка характеризує опір матеріалу при розтягу/стисканні при пружній деформації і чисельно дорівнює напруженню, яке виникає у зразку, якщо його довжина збільшилась у два рази (тобто при деформації у 100%).

де $\hat{D}$ – девіатор деформації; $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_i^i$ – середня лінійна деформація.

Девіатор напружень визначається як

$$\hat{S} = \hat{\sigma} - \sigma_0 \hat{g}, \tag{8.5}$$

де $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma^{ij} g_{ij} = \frac{1}{3}\hat{\sigma} : \hat{g} = \frac{1}{3}\sigma_i^i$ – скаляр – середнє напруження це напруження еквівалентне усесторонньому стиску з від'ємним знаком.

Для твердих тіл зв'язок між напруженнями і деформаціями не завжди однаковий. В ізотропних тілах – відношення між напруженнями і деформаціями найбільш прості. Для *ізотропних* матеріалів достатньо знати 2 константи, для *ортотропних* – 9, а для *анізотропних* – 21.

В рідинах та газах властивості приймаються ізотропними, тобто однаковими в різних напрямах.

Представлення фізичних рівнянь стану в тензорній формі. Складність фізичних рівнянь полягає в тому, що їх можна визначити тільки експериментальним шляхом. Запишемо закон Гука у тензорній формі в декартовій системі координат для ізотропного середовища

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},\ \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23},
\end{gathered} \tag{8.6}$$

де μ, λ – коефіцієнти Ламе 1-го і 2-го родів, відповідно, Па.

Рівняння (8.6) можна об'єднати в одне

$$\sigma_{ij} = \left[\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\varepsilon_{kl}, \tag{8.7}$$

де δ – символи Кронекера.

Рівняння (8.6) також можна переписати у більш компактному вигляді

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \tag{8.8}$$

або у векторній формі

$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{\varepsilon} + \lambda\mathbf{I}\hat{\varepsilon}, \tag{8.9}$$

де $\mathbf{I}$ – одиничний тензор.

Записи (8.8), (8.9) дістали назву узагальненого закону Гука і справедливі тільки для декартової системи координат.

Перепишемо (8.7) через контраваріантні компоненти тензорів у вигляді

$$\sigma^{ij} = \left[\mu\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right) + \lambda\delta^{ij}\delta^{kl}\right]\varepsilon_{kl} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{8.10}$$

де C^{ijkl} – тензор 4-го рангу, тому що із властивостей скалярного добутку векторів витікає: якщо з трьох тензорів два є тензорами, то і третій також є тензором.

Вираз (8.10) також називається узагальненим законом Гука.

Перепишемо (8.10) у векторній формі

$$\hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}, \tag{8.11}$$

де $\overset{4}{\hat{C}}$ – *тензор 4-го рангу фізичних констант*, який вміщує 81 компоненту; $\overset{4}{\hat{C}} = \left(\mu\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right) + \lambda\delta^{ij}\delta^{kl}\right)\varepsilon_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$; $\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$; $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{kl}\mathbf{e}^k\mathbf{e}^l$.

Властивості компонент тензорів 4-го рангу фізичних (пружних) констант. Перехід з однієї системи координат в іншу. Для переходу із однієї системи координат в іншу використовується тензор перетворення координат $c_i^{j'}$

$$C^{p'q'r't'} = C^{ijkl}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'}. \tag{8.12}$$

Підставимо в (8.12) C^{ijkl} із (8.10), отримаємо

$$\begin{aligned} C^{p'q'r't'} &= \left(\mu\left(\delta^{ik}\delta^{jl}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'} + \delta^{il}\delta^{jk}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'}\right) + \right. \\ &+ \lambda\delta^{ij}\delta^{kl}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Введемо заміну

$$\begin{aligned} &\delta^{ik}c_i^{p'}c_k^{r'} = g^{p'r'}, \quad \delta^{il}c_i^{p'}c_l^{t'} = g^{p't'}, \quad \delta^{jl}c_l^{q'}c_l^{t'} = g^{q't'}, \\ &\delta^{jk}c_j^{q'}c_k^{r'} = g^{q'r'}, \quad \delta^{ij}c_i^{p'}c_j^{q'} = g^{p'q'}, \quad \delta^{kl}c_k^{r'}c_l^{t'} = g^{r't'}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

З врахуванням заміни (8.14) вираз (8.13) запишеться у вигляді

$$C^{p'q'r't'} = \mu\left(g^{p'r'}g^{q't'} + g^{p't'}g^{q'r'}\right) + \lambda g^{p'q'}g^{r't'}. \tag{8.15}$$

Вираз (8.15) є формулою для тензора 4-го рангу фізичних властивостей матеріалу для будь-якої системи координат.

Таким чином, співвідношення для довільної системи координат можна отримати за допомогою тензора перетворень координат.

Розглянемо зв'язок між коефіцієнтами Ламе 1-го і 2-го родів та модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона ν. Запишемо вираз для девіаторних напружень і середнього напруження

$$S^{ij} = \mu D^{ij}, \quad \sigma_0 = K\varepsilon_0,$$

де $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_i^i$ – середня лінійна деформація; $K = \frac{E}{1-2\nu}$ – модуль стисливості матеріалу; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; ν – коефіцієнт Пуасона)[6].

Девіаторні напруження також можна виразити через модуль зсуву

$$S^{ij} = GD^{ij},$$

де $G \equiv \mu$ модуль зсуву)[7], Па.

Запишемо співвідношення для компонент тензора деформації для ортотропних матеріалів через вектор модуля пружності $\vec{E}$, тензор коефіцієнта Пуассона $\hat{\nu}$ і тензор модуля зсуву $\hat{G}$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{33}; \qquad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2};$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{33}; \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3};$$

---

[6] Фізичний зміст *коефіцієнта Пуассона*: коефіцієнт Пуассона ізотропного матеріалу це фізична величина, яка характеризує пружні властивості матеріалу і визначається відношенням поперечного стискання до повздовжнього розтягу зразка матеріалу і лежить в межах ($0 < \nu \le 0{,}5$). Для абсолютно крихкого матеріалу $\nu = 0$, а для абсолютно пружного $\nu = 0{,}5$.

[7] Фізичний зміст *модуля зсуву*: модуль зсуву це фізична величина, яка чисельно дорівнює дотичному напруженню, яке виникло б у зразку при відносному зсуві рівному 100 % (при умові, що закон Гука виконується).

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33}; \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}; \qquad \varepsilon_{13} = \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13}; \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23},$$

де $G_{ij} = \dfrac{E_i}{2(1+\nu_{ij})}$ – компоненти тензора пружного модуля зсуву; E_i – компоненти вектора модуля пружності при розтягу; ν_{ij} – компоненти тензора коефіцієнта Пуассона.

При визначенні тензора деформації $\hat{\varepsilon}$ для ортотропних матеріалів необхідно знати 9 констант, які визначаються експериментально (3 компоненти модуля пружності при розтягу і 6 компонент коефіцієнта Пуассона $\hat{\nu}$).

Співвідношення між напруженням і швидкістю деформації для рідин і газів. Запишемо *закон Нав'є-Стокса*, який встановлює зв'язок між напруженнями і швидкістю деформації в декартовій системі координат

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu+\lambda)\dot{\varepsilon}_{11} + \lambda\dot{\varepsilon}_{22} + \lambda\dot{\varepsilon}_{33} - p, \\ \sigma_{22} &= \lambda\dot{\varepsilon}_{11} + (2\mu+\lambda)\dot{\varepsilon}_{22} + \lambda\dot{\varepsilon}_{33} - p, \\ \sigma_{33} &= \lambda\dot{\varepsilon}_{11} + \lambda\dot{\varepsilon}_{22} + (2\mu+\lambda)\dot{\varepsilon}_{33} - p, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{12},\ \sigma_{13} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{13}, \sigma_{23} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{23}, \end{aligned} \tag{8.16}$$

де p – зовнішній гідростатичний тиск, Па; μ – коефіцієнт в'язкості 1-го роду)[8], Па·с; λ – коефіцієнт в'язкості 2-го роду (пов'язаний зі швидкістю зміни об'єму), Па·с; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – тензор швидкості деформації, с$^{-1}$.

Запишемо *закон Нав'є-Стокса* у векторній формі через тензор фізичних властивостей рідини 4-го рангу

$$\hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\dot{\varepsilon}} - p\hat{g}, \tag{8.17}$$

де $\hat{g}$ – метричний тензор;

---

[8] Фізичний зміст *динамічної в'язкості* або коефіцієнта внутрішнього тертя: (з фізичної точки зору динамічна в'язкість представляє собою питому силу тертя при градієнті швидкості, рівному одиниці – у відповідності з законом в'язкості Ньютона $\sigma^{11} = -2\mu\dfrac{\partial v^1}{\partial x^1} + \dfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot(\mathbf{vI})$.

$\overset{4}{\hat{C}} = C^{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$; $C^{ijkl} = \mu\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \lambda g^{ij}g^{kl}$ – тензор 4-го рангу в'язкості.

Девіаторні напруження в рідині визначаються співвідношенням у векторній формі

$$\hat{S} = 2\mu\hat{D}. \qquad (8.18)$$

Середнє напруження

$$\sigma_0 = k\dot{\varepsilon}_0 - p,$$

де $\dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_i^i$ – швидкість середньої лінійної деформації; k – коефіцієнт швидкості зміни об'єму.

ТЕМА 8 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

Лекція 8.1(9) **Формула Остроградського-Гауса. Теорема про дивергенцію. Основні рівняння механіки суцільних середовищ. Закон збереження маси. Вивід рівняння нерозривності. Інваріантна форма рівняння збереження маси. Форма запису рівняння нерозривності в Ейлеревій і Лагранжевій системах координат**

Формула Остроградського-Гауса в декартовій системі координат для скаляра φ записується таким чином

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,dV = \iint\limits_S n_i \varphi\, dS\,, \tag{9.1}$$

де V – об’єм тіла, S – поверхня тіла, n_i – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні.

Формула (9.1) використовується для пониження кратності інтеграла з 3-х до 2-х кратного (тобто від об’ємного до поверхневого).

Якщо підінтегральна функція у (9.1) є тензором, то формула Остроградського-Гауса для будь-якої системи координат може бути отримана шляхом заміни частинної похідної на коваріантну похідну

$$\iiint\limits_V \nabla_i \varphi\, dV = \iint\limits_S n_i \varphi\, dS\,. \tag{9.2}$$

Теорема про дивергенцію – об’ємний інтеграл від дивергенції тензора дорівнює поверхневому інтегралу скалярного добутку нормалі вектора на тензор

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\hat{T}\, dV = \iint\limits_S \mathbf{n}\cdot\hat{T}\, dS\,, \tag{9.3}$$

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\hat{T}\, dV = \iint\limits_S d\mathbf{S}\cdot\hat{T}\,, \tag{9.4}$$

де $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$.

Основні рівняння механіки суцільних середовищ. Рівняння МСС витікають з фундаментальних законів природи:

1 закон збереження маси;

2 закон збереження імпульсу (кількості руху) – витікає із 2-го закону Ньютона;

3 закон збереження енергії – витікає із 1-го закону термодинаміки;

4 закон зростання ентропії – витікає із 2-го закону термодинаміки.

Закон збереження маси. Розглянемо елементарний об'єм суцільного середовища з точки зору Ейлера у декартовій системі координат (рисунок 9.1).

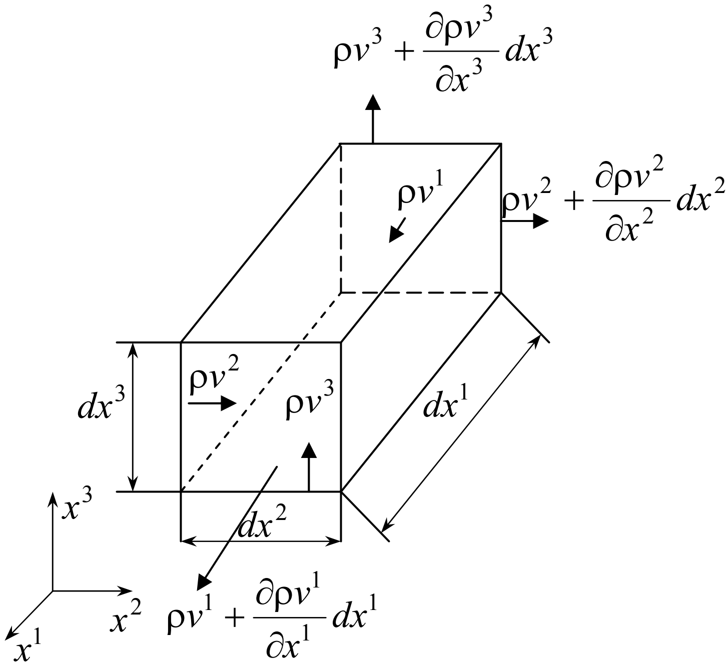


Рисунок 9.1 – До виводу рівняння збереження маси або нерозривності

В основі рівняння нерозривності лежить закон збереження маси. Для нерухомого елементарного об'єму $\left(dx^1 dx^2 dx^3\right)$, який виділено у потоці рідини (див. рисунок 9.1), закон збереження маси можна представити у такій формі

$$\begin{Bmatrix} \text{швидкість} \\ \text{накопичення} \\ \text{маси} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{швидкість} \\ \text{притоку} \\ \text{маси} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \text{швидкість} \\ \text{витоку} \\ \text{маси} \end{Bmatrix}. \tag{9.5}$$

Запишемо рівняння (9.5) для двох граней елементарного об'єму, перпендикулярних осі x^1 за елементарний час dt

$$\left[\rho v^1 dt - \left(\rho v^1 + \frac{\partial \rho v^1}{\partial x^1} dx^1\right) dt\right] dx^2 dx^3 = -\frac{\partial \rho v^1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3 dt\,. \tag{9.6}$$

Аналогічні вирази також запишемо для двох інших пар граней:
– перпендикулярних осі x^2 за елементарний час dt

$$\left[\rho v^2 dt - \left(\rho v^2 + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x^2} dx^2\right) dt\right] dx^1 dx^3 = -\frac{\partial \rho v^2}{\partial x^2} dx^1 dx^2 dx^3 dt\,; \tag{9.7}$$

– перпендикулярних осі x^3 за елементарний час dt

$$\left[\rho v^3 dt - \left(\rho v^3 + \frac{\partial \rho v^3}{\partial x^3} dx^3\right) dt\right] dx^1 dx^2 = -\frac{\partial \rho v^3}{\partial x^3} dx^1 dx^2 dx^3 dt\,. \tag{9.8}$$

Швидкість накопичення маси всього елементарного об’єму за елементарний час dt дорівнює

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx^1 dx^2 dx^3 dt. \tag{9.9}$$

Підставимо у (9.5) вирази (9.6)–(9.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx^1 dx^2 dx^3 dt = -\left(\frac{\partial \rho v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho v^3}{\partial x^3}\right) dx^1 dx^2 dx^3 dt$$

після скорочення на $dx^1 dx^2 dx^3 dt$, отримаємо рівняння нерозривності у змінних Ейлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho v^3}{\partial x^3}\right),$$

або

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^i}{\partial x^i} = 0 \ \ (i = 1,2,3). \tag{9.10}$$

Рівняння (9.10) є рівнянням збереження маси або нерозривності в декартовій системі координат. Оскільки всі величини в (9.10) є тензорними величинами, то це рівняння можна записати в будь-якій системі через коваріантну похідну

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i \right) = 0 . \tag{9.11}$$

Рівняння (9.11) є інваріантною формою рівняння збереження маси або нерозривності, яке є справедливим для будь-якої системи координат в тому числі і для Ейлерової.

Виконаємо диференціювання (9.11)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \nabla_i \rho + \rho \nabla_i v^i = 0 . \tag{9.12}$$

Використовуючи перехід від частинних похідних до матеріальної похідної (9.32), або навпаки

$$\frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + v^i \nabla_i (\ )$$

отримаємо, що

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \nabla_i \rho . \tag{9.13}$$

В результаті підстановки (9.13) в (9.12), отримуємо, що

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0 . \tag{9.14}$$

Форма запису рівняння збереження маси у вигдяді (9.14) описує швидкість зміни густини, якби її спостерігав дослідник, який рухається разом з середовищем.

Форми запису рівняння збереження маси (9.11) і (9.14) відносяться до форм запису Ейлера.

Інтегральну форму представлення рівняння збереження маси можна записати так

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0\,. \tag{9.15}$$

Представимо останнє рівняння в *лагранжевій системі*. Рівняння нерозривності також можна записати в *лагранжевій* або матеріальній формі. Для збереження маси вимагається, щоб виконувалося рівняння

$$\int_{V_0} \rho_0\left(\vec{\xi},0\right)dV_0 = \int_V \rho\left(\vec{x},0\right)dV\,, \tag{9.16}$$

де $\vec{\xi} = \left(\xi^i, \left(i = 1,2,3\right)\right)$ – змінні Лагранжа.

Тут обидва інтеграли взяті по одним і тим же частинкам, тобто V – це об’єм, який тепер займає середовище, яке заповнювало в момент $t = 0$ об’єм V_0. Використовуючи перетворення змінних Ейлера на змінні Лагранжа інтеграл у правій частині (9.16) можна перетворити таким чином

$$\int_{V_0} \rho_0\left(\vec{\xi},0\right)dV_0 = \int_{V_0} \rho\left(\vec{x}\left(\vec{\xi},t\right)\right)JdV_0 = \int_{V_0} \rho\left(\vec{\xi},t\right)JdV_0\,, \tag{9.17}$$

де $J = \left|\dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \mathbf{e}_1 \cdot \left(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\right)$ – якобіан переходу від системи відліку Ейлера до системи відліку Лагранжа, який визначається із співвідношення між об’ємами середовища

$$dV = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^1}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^2}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^3}d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = JdV_0\,,$$

де dV – об’єм елементарного паралелепіпеда обчислюється через змішаний добуток $dV = d\mathbf{x}^1 \times d\mathbf{x}^2 \cdot d\mathbf{x}^3 = \varepsilon_{ijk}dx^1 dx^2 dx^3$.

Співвідношення (9.17) повинно мати силу для довільного вибраного об’єму V_0, і тому

$$\rho_0 = \rho J\,. \tag{9.18}$$

Це означає, що добуток ρJ не залежить від часу, тому що об’єм V довільний, тому що

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0\,. \tag{9.19}$$

Рівняння (9.19) є *Лагранжевою диференціальною формою* запису рівняння нерозривності.

Лекція 8.2(10) **Рівняння руху. Форми запису диференціального рівняння руху. Рівняння рівноваги і тензори напружень в Лагранжевих змінних. Тензори Піоли та Коші-Ейлера**

Рівняння руху або рівняння рівноваги. Вивід диференціального рівняння руху базується на законі збереження кількості руху, який можна сформулювати таким чином: кількість руху не змінюється в процесі руху тіла, якщо на нього не діють зовнішні сили.

Розглянемо елементарний об’єм $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ з поверхнею dS (рисунок 10.1). Тоді умови рівноваги для dV можна сформулювати таким чином:

1. Головний вектор поверхневих і масових сил дорівнює нулю

$$\int_S \hat{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{F} dV = 0\,,$$

де $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\vec{n}$ – вектор зовнішньої нормалі; $\vec{F}$ – вектор масових сил; $\rho\vec{F} = \vec{f}$ – вектор об’ємних сил; ρ – густина.

2. Головний момент поверхневих і масових сил дорівнює нулю

$$\int_S \vec{r} \times (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \vec{r} \times \rho \vec{F} dV = 0\,,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор.

При виведенні рівняння руху будемо використовувати Ейлереву систему координат. Для одержання диференціальної форми рівняння рівноваги використаємо розкладання компонент тензора напружень σ^{ij} у ряд Тейлора до першого порядку малості.

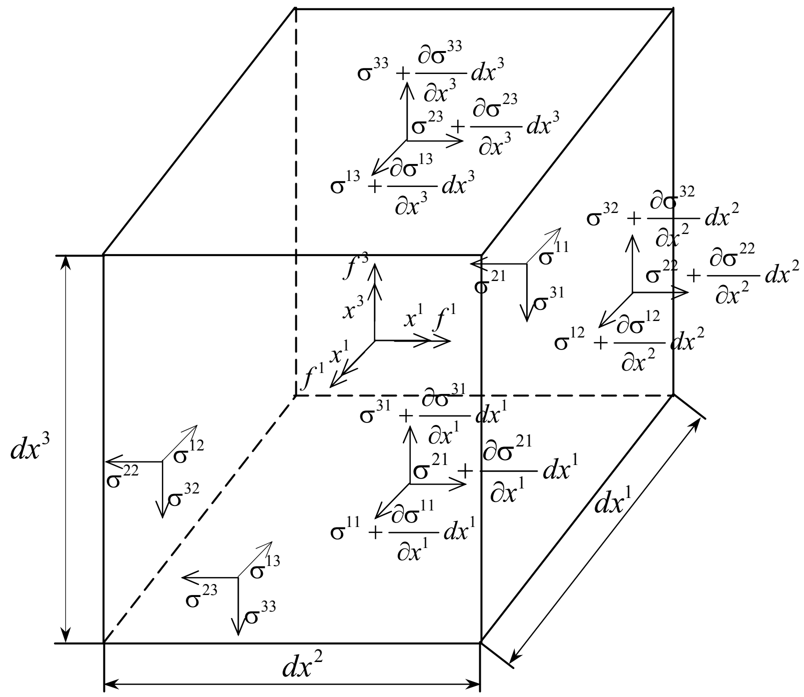
Для виводу диференціального рівняння руху розглянемо баланс сил на гранях елементарного об’єму $\left(dV = dx^1 dx^2 dx^3\right)$ (див. рисунок 10.1).

У відповідності з рисунком 10.1 для напрямку осі x^1 можна записати

$$-\sigma^{11}dx^2dx^3+\left(\sigma^{11}+\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2dx^3-$$

$$-\sigma^{12}dx^1dx^3+\left(\sigma^{12}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2}dx^2\right)dx^1dx^3-$$

$$-\sigma^{13}dx^1dx^2+\left(\sigma^{13}+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^3}dx^3\right)dx^1dx^2+f^1dx^1dx^2dx^3=0,$$



$\sigma^{11},\sigma^{22},\sigma^{33}$ – нормальні напруження, що діють вздовж осей декартової системи координат; $\sigma^{12}=\sigma^{21},\sigma^{13}=\sigma^{31},\sigma^{23}=\sigma^{32}$ – дотичні напруження, які згідно закону збереження моменту імпульсу задовольняють умові симетрії (закону парності дотичних напружень); f^1,f^2,f^3 – компоненти вектора інтенсивності

об'ємного навантаження; $\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}dx^j$ – прирощення напруження на гранях

dV, що отримано за допомогою розкладання σ^{ij} в ряд Тейлора до 1-го порядку малості

Рисунок 10.1 – До виводу диренціального рівняння руху

або після скорочення відповідних членів і ділення рівняння на $dx^1dx^2dx^3$

$$\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^3}+f^1=0. \qquad (10.1)$$

Рівняння (10.1) називається диференціальним рівнянням руху відносно осі x^1.

У відповідності з рисунком 10.1 для напрямку осі x^2 можна записати

$$-\sigma^{21}dx^2dx^3+\left(\sigma^{21}+\frac{\partial\sigma^{21}}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2dx^3-$$
$$-\sigma^{22}dx^1dx^3+\left(\sigma^{22}+\frac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2}dx^2\right)dx^1dx^3-$$
$$-\sigma^{23}dx^1dx^2+\left(\sigma^{23}+\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^3}dx^3\right)dx^1dx^2+f^2dx^1dx^2dx^3=0,$$

або після скорочення відповідних членів і ділення рівняння на $dx^1dx^2dx^3$

$$\frac{\partial\sigma^{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^3}+f^2=0. \qquad (10.2)$$

Рівняння (10.2) називається диференціальним рівнянням руху відносно осі x^2.

У відповідності з рисунком 10.1 для напрямку осі x^3 можна записати

$$-\sigma^{31}dx^2dx^3+\left(\sigma^{31}+\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2dx^3-$$
$$-\sigma^{32}dx^1dx^3+\left(\sigma^{32}+\frac{\partial\sigma^{32}}{\partial x^2}dx^2\right)dx^1dx^3-$$
$$-\sigma^{33}dx^1dx^2+\left(\sigma^{33}+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial x^3}dx^3\right)dx^1dx^2+f^3dx^1dx^2dx^3=0,$$

або після скорочення відповідних членів і ділення рівняння на $dx^1dx^2dx^3$

$$\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{32}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial x^3}+f^3=0. \qquad (10.3)$$

Рівняння (10.3) називається диференціальним рівнянням руху відносно осі x^3.

Згідно закону збереження моменту імпульсу можна записати, що

$$\Sigma M_{x^1} = 0;\ \Sigma M_{x^2} = 0;\ \Sigma M_{x^3} = 0.$$

Форми запису диференціального рівняння руху. З врахуванням правила Ейнштейна систему рівнянь (10.1)–(10.3) можна записати в компактній тензорній формі

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i = 0. \tag{10.4}$$

Оскільки у (10.4) входять тільки тензори, то його можна переписати в інваріантній формі (тобто, незалежній від координатної системи формі), замінюючи при цьому частинну похідну на коваріантну похідну

$$\nabla_j \sigma^{ij} + f^i = 0 \ \text{ або } \ \sigma^{ij}_{,j} + f^i = 0. \tag{10.5}$$

У векторній формі рівняння (10.5) має вигляд

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} = 0,\ \text{або}\ \operatorname{div}\hat{\sigma} + \mathbf{f} = 0. \tag{10.6}$$

Перевіримо правильність запису (10.6) за допомогою переходу до компонент тензора напружень:

$$\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e}_m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

$$\mathbf{f} = \vec{f} = f^i\mathbf{e}_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\hat{\sigma} = \nabla_m \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

Тобто, можна тепер записати

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i = 0, \quad \text{або}\ \sigma^{ij}_{,j} + f^i = 0,$$

що і треба було показати.

Рівняння рівноваги і тензори напружень в Лагранжевих змінних. Виведені диференціальні рівняння рівноваги (10.4) містять похідні компонент тензора напружень по ейлеревим змінним x^i. В нелінійній механіці деформованого твердого тіла доцільно перейти до змінних Лагранжа, в яких форма тіла, як правило, задана. Виконаємо цей перехід в інтегральній умові рівноваги в проекціях на осі Ox^j

$$\int_S \sigma^{ij} n_j dS + \int_V f^i(\vec{x}) dV = 0, \qquad (10.7)$$

де n_j – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла; $f^i = \rho(\vec{x}) F^i(\vec{x})$ – компоненти вектора об'ємної сили; F^i – компоненти вектора масової сили; V – об'єм тіла; S – поверхня тіла; $\vec{x} = \left(x^i, (i = 1,2,3)\right)$ – змінні Ейлера.

Звідки з врахуванням формули Остроградського-Гауса витікають вже відомі нам рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho F^i = 0. \qquad (10.8)$$

З іншого боку в формулі (10.7) можна перейти до інтегрування по області V_0 (тобто до початкового об'єму тіла)

$$\int_{S_0} p^{ij} n_j^0 dS_0 + \int_{V_0} \rho(\vec{\xi}) F^i(\vec{\xi}) J dV_0 = 0, \qquad (10.9)$$

де $J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \frac{dx}{d\xi} = \frac{\rho_0}{\rho}$ – якобіан переходу від системи відліку Ейлера до системи відліку Лагранжа, який визначається із співвідношення між об'ємами середовища $dV = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^3} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = J dV_0$; $\vec{\xi} = \left(\xi^i, (i = 1,2,3)\right)$ – змінні Лагранжа.

Рівність (10.9) виражає закон збереження маси $\rho_0 d\xi = \rho dx$, $\vec{n}^0$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S_0 до початку деформації і вводиться новий тензор p^{ij}, для компонент якого виконується рівність

$$p^{ij} n_j^0 dS_0 = \sigma^{ij} n_j dS, (i, j = 1,2,3). \tag{10.10}$$

Відмітимо, що компоненти густини масової сили F^i у формулах (10.7) і (10.9) лишаються однаковими, тільки в першому випадку вони розглядаються як функції ейлеревих змінних. а в другому – Лагранжевих.

Перепишемо (10.9) у вигляді

$$\int_{S_0} p^{ij} n_j^0 dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 F^i d\xi = 0, \tag{10.11}$$

і скористаємося теоремою Остроградського-Гауса. В результаті отримуємо диференціальне рівняння рівноваги в Лагранжевих змінних

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial \xi^j} + \rho_0 F^i = 0. \tag{10.12}$$

Тензор p^{ij} називається тензором Піоли або несиметричним тензором Лагранжа. Залежність між несиметричним тензором Піоли і симетричним тензором Коші-Ейлера має вигляд

$$p^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \sigma^{pj}, \tag{10.13}$$

або в матричній формі

$$\hat{p} = \frac{\rho_0}{\rho} J^{-1} \hat{\sigma}. \tag{10.14}$$

Окрім несиметричного тензора $\hat{p}$ вводиться симетричний тензор напружень Лагранжа або тензор Кірхгофа з компонентами

$$K^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \xi^i}{\partial x_p}\frac{\partial \xi^j}{\partial x_q}\sigma^{pq}, \qquad (10.15)$$

Тензор Піоли виражається через тензор Кірхгофа у вигляді співвідношення

$$p^{ij} = K^{ip}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^p}, \text{ або } \hat{p} = \hat{K}J. \qquad (10.16)$$

В лінійній теорії тензори Кірхгофа і Піоли практично не відрізняються від тензора Коші-Ейлера

$$K^{ij} \approx p^{ij} \approx \sigma^{ij}.$$

В завершенні відмітимо, що диференціальні рівняння рівноваги записані у ейлеревих змінних (10.8) і у змінних Лагранжа (10.12) можна представити в без індексній формі, яка витікає з інваріантної форми (10.5).

Рівняння рівноваги в Ейлеревих змінних в безіндексній формі має вигляд

$$\nabla_x\hat{\sigma} + \rho\vec{F} = 0, \qquad (10.17)$$

а у Лагранжевих змінних –

$$\nabla_\varsigma\hat{p} + \rho_0\vec{F} = 0. \qquad (10.18)$$

Лекція 8.3(11) **Зовнішні сили на поверхні тіла. Зв'язок між тензором напружень і вектором напружень. Нормальне зусилля і напруження на поверхні. Дотичне напруження на поверхні. Принцип Даламбера. Закон збереження кількості руху (імпульсу). Кількість руху, імпульс**

Зовнішні сили на поверхні тіла. У відповідності до ІІІ закону Ньютона відомо, що сума внутрішніх і зовнішніх сил на поверхні тіла дорівнює нулю (що є відображенням принципу парності сил, рисунок 11.1).

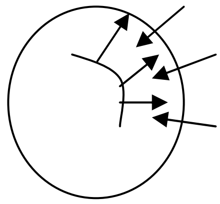
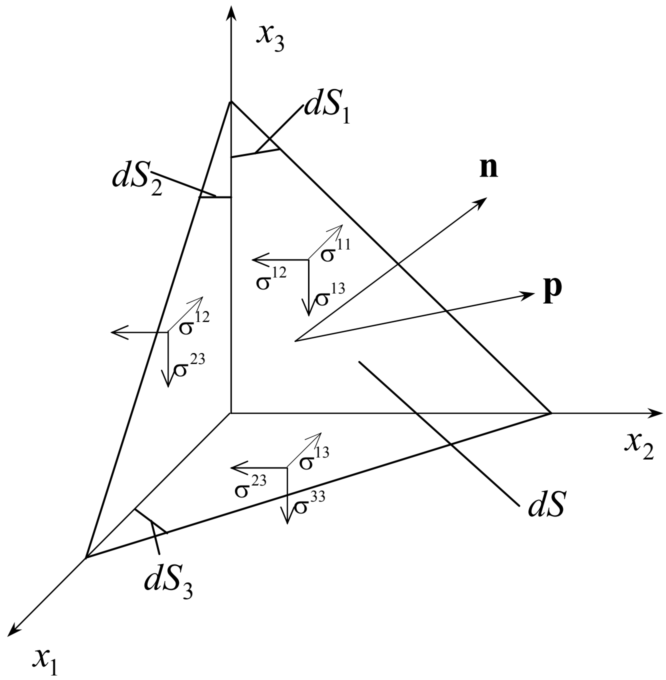


Рисунок 11.1 – Рівновага сил на поверхні тіла

Зв'язок між тензором напружень і вектором напружень. Визначення напружень на похилій площині. Розглянемо рисунок 11.2, за допомогою якого визначимо компоненти зусилля $\mathbf{p}$, яке задано на поверхні dS



dS – елементарна площа зовнішньої площини,
$dS_1 = n_1 dS$, $dS_2 = n_2 dS$, $dS_3 = n_3 dS$,
n_1, n_2, n_3 – проекції вектора нормалі на відповідні осі координат
Рисунок 11.2 – До визначення компонент зусилля $\mathbf{p}$,
заданого на поверхні dS

Запишемо рівняння для суми проекцій сили на координатні осі (див. рисунок 11.2):

– вісь x^1

$$\Sigma x^1 = -\sigma^{11} dS_1 - \sigma^{12} dS_2 - \sigma^{13} dS_3 + p^1 dS = 0, \tag{11.1}$$

де p^1 – проекція вектора $\mathbf{p}$ на вісь x^1;

підставимо значення складових dS, що записані через проекції нормалі n_1, n_2, n_3

$$-\sigma^{11}n_1 dS - \sigma^{12}n_2 dS - \sigma^{13}n_3 dS + p^1 dS = 0,$$

після скорочення останнього рівняння на dS, отримаємо

$$-\sigma^{11}n_1 - \sigma^{12}n_2 - \sigma^{13}n_3 = p^1; \tag{11.2}$$

– вісь x^2

$$\Sigma x^2 = -\sigma^{21}dS_1 - \sigma^{22}dS_2 - \sigma^{23}dS_3 + p^2 dS = 0,$$

де p^2 – проекція вектора $\mathbf{p}$ на вісь x_2;

$$\begin{gathered} -\sigma^{21}n_1 dS - \sigma^{22}n_2 dS - \sigma^{23}n_3 dS + p^2 dS = 0, \\ -\sigma^{21}n_1 - \sigma^{22}n_2 - \sigma^{23}n_3 = p^2; \end{gathered} \tag{11.3}$$

– вісь x^3

$$\Sigma x^3 = -\sigma^{31}dS_1 - \sigma^{32}dS_2 - \sigma^{33}dS_3 + p^3 dS = 0,$$

де p^3 – проекція вектора $\mathbf{p}$ на вісь x_3,

$$\begin{gathered} -\sigma^{31}n_1 dS - \sigma^{32}n_2 dS - \sigma^{33}n_3 dS + p^3 dS = 0, \\ -\sigma^{31}n_1 - \sigma^{32}n_2 - \sigma^{33}n_3 = p^3. \end{gathered} \tag{11.4}$$

Рівняння (11.2)–(11.4) перепишемо у компактному вигляді

$$\sigma^{ij}n_j\Big|_{S_p} = p^i, \tag{11.5}$$

де S_p – площа поверхні тіла, на якій задана зовнішня сила $\mathbf{p}$.

Векторна форма рівняння (11.5) записується як

$$\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\big|_{S_p}=\vec{p}\ \text{ або }\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\big|_{S_p}=\mathbf{p}. \qquad (11.6)$$

Перевірка правильності запису (11.6) з використанням тензорного супроводу:

$$\sigma^{ij}n_j=p^i\to\sigma^{ij}n_j\mathbf{e}_i=p^i\mathbf{e}_i,$$

$$\sigma^{ij}n_j=\sigma^{ij}\mathbf{e}_j\cdot n_m\mathbf{e}^m=\sigma^{ij}n_m\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^m\right)=\sigma^{ij}n_m\delta_j^m=\sigma^{ij}n_j,$$

тому що в декартовій системі координат $\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^m\right)=\delta_j^m$, де δ_j^m – символ Кронекера.

Тоді можна записати, що

$$\sigma^{ij}n_j\mathbf{e}_i=p^i\mathbf{e}_i\to\left(\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right)\cdot\left(n_m\mathbf{e}^m\right)=p^i\mathbf{e}_i\to\hat{\sigma}\cdot\vec{n}\big|_{S_p}=\vec{p},$$

тому що $\left(\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right)=\hat{\sigma}$, а $\left(n_m\mathbf{e}^m\right)=\vec{n}$.

Визначимо *нормальне зусилля на поверхні* dS

$$p_n=\sqrt{\left(p^1\right)^2+\left(p^2\right)^2+\left(p^3\right)^2};$$

нормальне напруження на поверхні dS

$$\sigma_n=p^in_i=p^1n_1+p^2n_2+p^3n_3\ \text{ або }\ \sigma_n=\left(\sigma^{ij}n_j\right)n_i;$$

дотичне напруження на поверхні dS

$$\tau_n=\sqrt{\left(p_n\right)^2-\left(\sigma_n\right)^2}.$$

З ІІ закону Ньютона витікає, що, якщо тіло рухається нерівномірно, то на нього діє зовнішня сила, яка дорівнює добутку маси m на прискорення $\mathbf{a}$.

Принцип Даламбера. Всі сили, що діють на тіло, будуть знаходитись у рівновазі, якщо до цих сил додати сили інерції, які дорівнюють

$$\vec{J}=m\vec{a}\ \text{ або }\ \mathbf{J}=m\mathbf{a},$$

тобто

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i + J^i = 0, \tag{11.7}$$

де

$$J^i = -\rho a^i = -\rho \frac{d^2 u^i}{dt^2}, \tag{11.8}$$

де a^i – проекція вектора прискорення на вісь x^i, u^i – проекція вектора переміщення на вісь x^i, ρ – густина, t – час.

З врахуванням (11.8) рівняння (11.7) приймає вигляд

$$\rho \frac{d^2 u^i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i. \tag{11.9}$$

Рівняння (11.9) називається диференціальним рівнянням руху суцільного середовища. Це рівняння є справедливим для тіл будь-якої природи: твердих тіл, рідин та газів.

Розглянемо рівняння для тіла в цілому

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i, \tag{11.10}$$

де $v^i = \dfrac{du^i}{dt}$ – компонента швидкості руху тіла.

Виконаємо інтегрування (11.10) по об'єму тіла V, отримаємо

$$\int_V \rho \frac{dv^i}{dt} dV = \int_V \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} dV + \int_V f^i dV. \tag{11.11}$$

Скориставшись формулою Остроградського-Гауса (див. лекцію №9, (9.1)) і (11.5) можна отримати:

при $\rho dV = const$ будемо мати

$$\int_V \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} dV = \int_S \sigma^{ij} n_j dS = \int_S p^i dS\,;$$
$$\rho \frac{dv^i}{dt} dV = \frac{d}{dt} v^i \rho dV\,;$$
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v^i dV = \int_V f^i dV + \int_S p^i dS\,. \tag{11.12}$$

Помножимо праву і ліву частини (11.12) на вектор супроводу тензора $\mathbf{e}_i$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v^i \mathbf{e}_i dV = \int_V f^i \mathbf{e}_i dV + \int_S p^i \mathbf{e}_i dS\,. \tag{11.13}$$

Оскільки $v^i \mathbf{e}_i = \vec{v} = \mathbf{v}$, $f^i \mathbf{e}_i = \vec{f} = \mathbf{f}$, $p^i \mathbf{e}_i = \vec{p} = \mathbf{p}$, то рівняння (11.13) дозволяє перейти до векторної форми запису

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{f} dV + \int_S \vec{p} dS\,, \tag{11.14}$$

або

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{p} dS\,, \tag{11.15}$$

де $\rho\mathbf{v}$ – *кількість руху*; $\int \rho\mathbf{v}$ – *імпульс*.

Вираз (11.14) є інтегральною формою формулювання закону *збереження кількості руху (або імпульсу)*.

Імпульс тіла при відсутності зовнішніх сил є константою, яка не залежить від процесів, що відбуваються в тілі.

Кількість руху не змінюється в процесі руху тіла, якщо на нього не діють зовнішні сили.

Лекція 8.4(12) **Закон збереження механічної енергії. Оператори подвійного (кратного) скалярного добутку двох тензорів. Симетричність тензорів напружень**

Закон збереження механічної енергії. Помножимо ліву і праву частини рівняння (11.10) (див. лекцію №11) на швидкість (коваріантну її компоненту), отримаємо

$$\rho\frac{dv^i}{dt}v_i=\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}v_i+f^iv_i. \tag{12.1}$$

Оскільки рівняння (11.7), (11.10) (див. лекцію №11) є виразом ІІ закону Ньютона $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, то можна стверджувати, що рівняння (12.1) є рівнянням потужності. Оскільки

сила × швидкість = потужність

або в одиницях вимірювання фізичних величин – Н·м/с=Дж/с=Вт.

Запишемо інтегральну форму рівняння (12.1)

$$\int_V\rho\frac{dv^i}{dt}v_idV=\int_V\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}v_idV+\int_V f^iv_idV. \tag{12.2}$$

Перепишемо ліву частину (12.2) у вигляді

$$\int_V\rho\frac{dv^i}{dt}v_idV=\frac{d}{dt}\int_V\rho\frac{v^iv_i}{2}dV, \tag{12.3}$$

де $\rho\dfrac{v^iv_i}{2}$ – об'ємна густина кінетичної енергії, Дж/м^3 .

Розглянемо похідну рівняння (12.2)

$$\begin{gathered}\frac{\partial\left(\sigma^{ij}v_i\right)}{\partial x^j}=\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}v_i+\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j},\ \text{звідки}\\ \frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}v_i=\frac{\partial\left(\sigma^{ij}v_i\right)}{\partial x^j}-\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}.\end{gathered} \tag{12.4}$$

Перепишемо рівняння (12.4) в інтегральній формі і застосуємо до нього формулу Остроградського-Гауса

$$\begin{aligned}&\int_V\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}v_idV=\int_V\frac{\partial\left(\sigma^{ij}v_i\right)}{\partial x^j}dV-\int_V\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}dV=\\ &=\int_V\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sigma^{ij}v_i\right)dV-\int_V\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}dV=\\ &=\int_S\sigma^{ij}v_in_jdS-\int_V\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV=\int_S p^iv_idS-\int_V\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV,\end{aligned} \tag{12.5}$$

де $\sigma^{ij} n_j = p^i$; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – тензор швидкості деформації.

Розглянемо більш детально звідки береться величина $\dot{\varepsilon}_{ij}$ (тут точка означає похідну за часом)

$$\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}=\frac{1}{2}\left(\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\sigma^{ji}\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{2}\left(\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\sigma^{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)=\sigma^{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right),$$

тоді можна записати, що $v_i=\dfrac{du^i}{dt}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)\right]=\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=\dot{\varepsilon}_{ij}, \qquad (12.6)$$

де $\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x^j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$ – тензор деформацій (тензор нескінченно малих деформацій Ейлера).

Підставимо (12.3) і (12.5) у (12.2)

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\frac{v^i v_i}{2}dV=-\int_V \sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dV+\int_V f^i v_i dV+\int_S p^i v_i dS. \qquad (12.7)$$

Інтегральне рівняння (12.7) є математичним формулюванням *закону збереження механічної енергії* – зміна (або швидкість зміни) кінетичної енергії дорівнює різниці між потужністю зовнішніх і внутрішніх сил.

Тут величина $\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ є енергією дисипації (енергетичним тензором), або частиною механічної енергії, яка переходь у теплову енергію.

Кінетична енергія залежить від процесів, які відбуваються в середені тіла.

Перепишемо (12.7) у векторній формі.

Розглянемо попередньо добутки з (12.7):

$$v^i v_i = v^i\mathbf{e}_i\cdot v_i\mathbf{e}^i=\vec{v}\cdot\vec{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}, \qquad (12.8)$$

$$\left.\begin{aligned} f^i v_i &= \vec{f}\cdot\vec{v}=\mathbf{f}\cdot\mathbf{v},\\ p^i v_i &= \vec{p}\cdot\vec{v}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}, \end{aligned}\right. \qquad (12.9)$$

$$\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\hat{\sigma}\cdot\cdot\hat{\dot{\varepsilon}}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \qquad (12.10)$$

Вираз (12.10) є представленням густини енергії деформації в тензорному вигляді. Тут оператори $(\cdot\cdot)$ або $(:)$ є *операторами подвійного (кратного) скалярного добутку двох тензорів*. Оскільки $\hat{\sigma}$ і $\hat{\dot{\varepsilon}}$ є тензорами 2-го рангу, то результатом їх подвійного скалярного добутку буде скаляр)[9]

$$
\begin{aligned}
s = \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} = \sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma^{11}\varepsilon_{11} + \sigma^{12}\varepsilon_{12} + \sigma^{13}\varepsilon_{13} + \\
\sigma^{21}\varepsilon_{21} + \sigma^{22}\varepsilon_{22} + \sigma^{23}\varepsilon_{23} + \\
\sigma^{13}\varepsilon_{31} + \sigma^{32}\varepsilon_{32} + \sigma^{33}\varepsilon_{33}.
\end{aligned} \tag{12.11}
$$

Тоді можна записати еквівалентні форми *закону збереження механічної енергії* у векторному вигляді:

$$
\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2} dV = -\int_V \hat{\sigma}\cdot\cdot\hat{\dot{\varepsilon}} dV + \int_V \vec{f}\cdot\vec{v} dV + \int_S \vec{p}\cdot\vec{v} dS, \tag{12.12}
$$

або

$$
\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2} dV = -\int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} dS. \tag{12.13}
$$

Симетричність тензорів напружень. Скористаємось формулою для головних моментів поверхневих і масових сил

$$
\int_S \vec{r} \times (\hat{\sigma}\cdot\vec{n}) dS + \int_V \vec{r} \times \rho\vec{F} dV = 0. \tag{12.14}
$$

де $\hat{\sigma}\cdot\vec{n} = \sigma^{ij} n_j = p^i$.

В проекції на вісь Ox^1 (12.14) перепишеться у вигляді

$$
\int_S \left(x^2 p^3 - x^3 p^2\right) dS + \int_V \rho\left(x^2 F^3 - x^3 F^2\right) dV = 0, \tag{12.15}
$$

[9] На відміну від тензорів однакового рангу, результатом подвійного (кратного) скалярного добутку двох тензорів різного рангу, наприклад, 2-го і 3-го буде вектор: $\mathbf{a} = \mathbf{T} : \mathbf{P}$ з компонентами $a_i = T_{jk} P_{jki}$. Такий добуток не є комутативним.

де $\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ p^1 & p^2 & p^3 \end{vmatrix} = x^2 p^3 - x^3 p^2$ і $\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = x^2 F^3 - x^3 F^2$.

Тепер скористуємося формулою Остроградського-Гауса і перетворимо інтеграл по поверхні в (12.15) на об’ємний

$$\int_S \left(x^2 p^3 - x^3 p^2\right) dS \to \int_V \left(x^2 \sigma^{i3} n_3 - x^3 \sigma^{j2} n_2\right) dS \to \int_V \left(\frac{\partial\left(x^2 \sigma^{i3}\right)}{\partial x^i} - \frac{\partial\left(x^3 \sigma^{j2}\right)}{\partial x^j}\right) dV.$$

Тому можна записати, що

$$\int_V \left(\frac{\partial\left(x^2 \sigma^{i3}\right)}{\partial x^i} - \frac{\partial\left(x^3 \sigma^{j2}\right)}{\partial x^j} + \rho\left(x^2 F^3 - x^3 F^2\right)\right) dV = 0. \qquad (12.16)$$

Виконаємо диференціювання і прийдемо до рівності

$$\int_V \left(x^2 \frac{\partial \sigma^{i3}}{\partial x^i} + \sigma^{23} - x^3 \frac{\partial \sigma^{j2}}{\partial x^j} - \sigma^{32} + \rho\left(x^2 F^3 - x^3 F^2\right)\right) dV = 0. \qquad (12.17)$$

Тепер виконаємо групування, що містять члени x^2 і x^3

$$\int_V \left[x^2 \left(\frac{\partial \sigma^{i3}}{\partial x^i} + \rho F^3 \right) + \sigma^{23} - x^3 \left(\frac{\partial \sigma^{j2}}{\partial x^j} + \rho F^2 \right) - \sigma^{32} \right] dV = 0. \qquad (12.18)$$

Вирази в круглих скобках (12.18) дорівнюють нулю в силу рівнянь рівноваги, тому отрмуємо, що

$$\int_V \left(\sigma^{23} - \sigma^{32}\right) dV = 0. \qquad (12.19)$$

Область V є довільною, тому можна записати, що $\sigma^{23} = \sigma^{32}$. Аналогічним чином можна отримати рівності $\sigma^{13} = \sigma^{31}$ і $\sigma^{12} = \sigma^{21}$. Таким чином $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$ – тензор напружень є симетричним.

Треба відмітити, що властивість симетрії тензора напружень називають законом парності дотичних напружень і формулюють так:

дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках та направлені по нормалі до лінії їх перетину, є рівними.

Якщо в умову рівноваги (12.14) ввести об'ємні та поверхневі моменти, то тензор напружень напружень буде вже несиметричним. Теорія суцільного середовища, в якій враховуються поверхеві або об'ємні моменти, називається моментною.

Лекція 8.5(13) **Закон збереження повної енергії. Теплоємність. Закон балансу ентропії. ІІ закон термодинаміки. Рівняння теплопровідності. Основна система рівнянь МСС. Фізичні рівняння стану. Геометричні рівняння. Закон Фур'є. Рівняння теплопровідності. Геометричні рівняння Коші. Швидкості деформації**

Закон збереження повної енергії. Математичне формулювання *закону збереження повної енергії* у векторній формі має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho w dV = \int_V \vec{f}\cdot\vec{v}dV + \int_S \vec{p}\cdot\vec{v}dS + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS\,, \qquad (13.1)$$

або

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho w dV = \int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dV + \int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}dS + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS\,. \qquad (13.2)$$

Закон збереження повної енергії можна сформулювати таким чином: зміна у часі внутрішньої енергії (ε) плюс зміна кінетичної енергії (w) дорівнює потужності об'ємних сил $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})$, потужності поверхневих сил $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})$, плюс теплова енергія, що надходить з об'ємних джерел теплоти і плюс теплота, що надходить через поверхню.

q_v – енергія, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи.

Внутрішня енергія (ε) – це енергія, яку має середовище і, яка може бути звільнена в результаті фізичних або хімічних перетворень.

Коли ми досліджуємо процеси, то оскільки, в рівняння енергії входить похідна від внутрішньої енергії, то будемо розглядати тільки ті види внутрішньої енергії, які змінюються в тому процесі, який розглядається. У зворотному випадку, якщо енергія не змінюється, то похідна від неї дорівнює нулю.

Процеси, які розглядаються у даному курсі МСС, пов’язані тільки з механічною і тепловою енергією.

Внутрішня енергія тіла пропорційна його температурі

$$\varepsilon = c_v T + const, \tag{13.3}$$

де c_v – коефіцієнт пропорційності – масова ізохорна теплоємність середовища, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К. Під константою в (13.3) розуміються інші види внутрішньої енергії.

Визначення масової *теплоємності*: теплоємність це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти (теплової енергії), яку треба надати 1 кг тіла, щоб підвищити його температуру на 1 К.

Враховуючи (13.3), математичне формулювання *закону збереження повної енергії* можна представити у виді

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho c_v T dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho w dV = \int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} dS + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS. \tag{13.4}$$

Для однозначності рівняння (13.4) до нього треба додати початкові (оскільки рівняння нестаціонарне) і граничні умови. Початкові умови включають в себе розподіл польових характеристик тіла в початковий момент часу (тобто описують початковий стан середовища):

$$\hat{\sigma} = \varphi_\sigma(\mathbf{x}) \text{ або } \mathbf{u} = \varphi_u(\mathbf{x}), \tag{13.5}$$

$$T = \varphi_T(\mathbf{x}), \tag{13.6}$$

де $\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$.

Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується (тобто описують актуальний стан середовища):

$$\hat{\sigma}\cdot\mathbf{n}\big|_{S_p} = \mathbf{p}, \tag{13.7}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\big|_{S_q} = -q_s, \tag{13.8}$$

де $\mathbf{q}$ – тепловий потік – кількість теплоти, що протікає через одиницю площі площину перпендикулярну до неї за одиницю часу, Вт/м^2;

$\mathbf{n}$ – нормаль до поверхні тіла. В (13.8) записано знак «–», тому що теплота розсіюється у зовнішнє середовище.

Для розв'язання задач МСС достатньо знати три закони, які були розглянуті раніше. Однак для описання незворотних процесів використовується ще *закон балансу ентропії*: ентропія замкнутої системи при будь-яких процесах зростає (*II закон термодинаміки,* див. лекцію №1)

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \tag{13.9}$$

де $\int dS = S$ – ентропія – ступінь упорядкованності системи. В (13.9) для зворотних процесів справедливий знак «=», а для незворотних «>».

Будь-які перетворення енергії пов'язані з тим, що її частина переходить в теплоту.

Запишемо рівняння для кінетичної енергії

$$\frac{d}{dt}\int_V w dV = -\int_V \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} dV + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS\,, \tag{13.10}$$

де $w = \rho \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}$ – об'ємна кінетична енергія, Дж/м^3.

Віднімемо від рівняння для повної енергії (13.2) рівняння для кінетичної енергії (13.10). В результаті отримаємо *рівняння теплопровідності* або рівняння притоку теплоти

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho c_v T dV = \int_V \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} dV + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS\,. \tag{13.11}$$

де $\hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}}$ – дисипативна функція.

В рівнянні (13.11) ліворуч записано зміну внутрішньої енергії в часі, а праворуч: перший доданок визначає енергію дисипації механічної енергії, другий і третій об'ємні і поверхневі джерела теплоти.

Основна система рівнянь МСС. Основна система рівнянь включає такі рівняння: збереження маси (9.15) (див. лекцію №9), збереження кількості руху (11.14) (див. лекцію №11) і теплопровідності (13.11):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0; \\ \dfrac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_V \mathbf{f}dV + \int\limits_S \mathbf{p}dS; \\ \dfrac{d}{dt}\int\limits_V \rho c_v T dV = \int\limits_V \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} dV + \int\limits_V q_v dV + \int\limits_S q_s dS. \end{cases} \tag{13.12}$$

Для того, щоб отримати замкнуту систему рівнянь треба додати до системи (13.12) два види рівнянь: *фізичні рівняння стану*, *геометричні рівняння*.

Фізичні рівняння стану пов’язують між собою фізичні параметри середовища, наприклад, такі: кількість теплової енергії з градієнтом температури, напруження з деформацією.

При розгляді рівняння збереження енергії першим фізичним законом є закон, який зв’язує тепловий потік з градієнтом температури і називається *законом Фур’є*

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T\,. \tag{13.13}$$

Закон Фур’є можна сформулювати таким чином: тепловий потік прямопропорційний градієнту температури ∇T. Коефіцієнтом пропорційності тут є теплопровідність λ)[10]. Праворуч в (13.13) стоїть знак мінус, тому що за означенням градієнт температури направлений перпендикулярно ізолініям температур в сторону збільшення температур, а тепловий потік, навпаки, в сторону їх зменшення.

Запишемо деякі перетворення, що пов’язані з рівнянням (13.13):

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = -q_s \to -\lambda\nabla T\cdot\mathbf{n} = -q_s$$

або в інтегральному вигляді

$$\int\limits_S q_s dS = -\int\limits_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS = -\int\limits_S \left(-\lambda\nabla T\right)\cdot\mathbf{n}dS\,.$$

[10] Фізичний зміст *теплопровідності*: теплопровідність це фізична величина, яка чисельно дорівнює тепловому потоку, який передається між ізотермічними поверхнями тіла при відстані між ними в 1 м і при різниці температур між ними в 1 К.

До останнього виразу застосуємо теорему Остроградського-Гауса, щоб перейти від інтеграла по поверхні до інтеграла по об'єму

$$-\int\limits_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS = -\int\limits_V \nabla\cdot\mathbf{q}dV = -\int\limits_V \nabla\cdot\left(-\lambda\nabla T\right)dV = \int\limits_V \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right)dV\,. \tag{13.14}$$

Підставимо (13.14) в рівняння теплопровідності (13.11), отримаємо

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho c_v T dV = \int\limits_V \hat{\sigma}:\hat{\dot{\varepsilon}}dV + \int\limits_V q_v dV + \int\limits_V \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right)dV\,. \tag{13.15}$$

Рівняння (13.15) буде справедливим тоді і тільки тоді, коли його підінтегральні вирази будуть задовольняти наступному диференціальному рівнянню

$$C_v\frac{dT}{dt} = \hat{\sigma}:\hat{\dot{\varepsilon}} + \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right) + q_v\,. \tag{13.16}$$

Рівняння (13.16) є диференціальним *рівнянням теплопровідності*.

Тепер запишемо основну систему рівнянь МСС в диференціальній формі

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0; \\ \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\hat{\sigma} + \mathbf{f}; \\ C_v\dfrac{dT}{dt} = \hat{\sigma}:\hat{\dot{\varepsilon}} + \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right) + q_v, \end{cases} \tag{13.17}$$

де $C_v = \rho c_v$ – об'ємна теплоємність, Дж/(м^3·К).

Система рівнянь (13.17) має 16 невідомих $\left(\rho, \mathbf{v}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}\right)$ – 1+3+6+6=16. Завдяки симетрії тензорів напружень і деформацій $\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}$ – кількість невідомих в системі (13.17) зменшується на 6.

Геометричні рівняння. Фундаментальним тензором є метричний тензор (див. лекцію №4). Тому за критерій деформації тіла виберемо зміну величини метричного тензора

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\,, \tag{13.18}$$

де $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор положення точки тіла в просторі.

Під дією зовнішніх або внутрішніх сил точки тіла переміщуються на вектор $\mathbf{u}$, що спричинює зміну їх положення у просторі. Тобто можна записати, що

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u},$$

тоді базисні вектори перепишуться у виді

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i + \nabla_i u^m \mathbf{e}_m$$

і, відповідно, метричний тензор

$$\begin{aligned} g_{ij}^* &= \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* = \left(\mathbf{e}_i + \nabla_i u^m \mathbf{e}_m\right)\cdot\left(\mathbf{e}_j + \nabla_j u^n \mathbf{e}_n\right) = \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \nabla_i u^m g_{mj} + \nabla_j u^n g_{ni} + \nabla_i u^m \nabla_j u^n g_{mn} = \\ &= g_{ij} + \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^m \nabla_j u_m. \end{aligned}$$

На підставі останнього виразу можна записати *геометричні рівняння Коші*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(g_{ij}^* - g_{ij}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^m \nabla_j u_m\right). \end{aligned} \tag{13.19}$$

Тут ε_{ij} є компонентами тензора скінчених деформацій.

При розгляді конструкційних матеріалів приймається, що деформації є малими величинами $<<1$. Цей чинник дозволяє спростити вираз (13.19), відкинувши найменший член. В результаті отримаємо

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right), \tag{13.20}$$

$$\text{або}\, \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\right).$$

Швидкості деформації. $d\mathbf{u} = \mathbf{v}dt$, звідки $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ – вектор швидкості переміщень. Тоді можна записати для швидкості деформації

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j dt + \nabla_j v_i dt + \nabla_i v^m \nabla_j v_m (dt)^2\right). \qquad (13.21)$$

Відкидаючи останній доданок з другим порядком малості у (13.21), отримуємо

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)dt, \qquad (13.22)$$

$$\text{або } \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right), \qquad (13.23)$$

або у векторній формі з врахуванням нелінійних членів

$$\hat{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T + (\nabla\mathbf{v})^T \cdot (\nabla\mathbf{v})\right), \qquad (13.24)$$

або у векторній формі лінійний тензор деформацій Коші

$$\hat{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\right) \text{ або } \hat{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\right). \qquad (13.25)$$

ТЕМА 9 РОЗВ'ЯЗУЮЧІ РІВНЯННЯ МСС В ДЕКАРТОВИХ ТА КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ

Лекція 9.1(14) **Основи постановки задач механіки суцільних середовищ в декартових координатах. Геометричні рівняння. Фізичні рівняння. Рівняння рівноваги, енергії, деформації і фізичне рівняння відносно компонент. Рівняння рівноваги, енергії і закон Гука в декартовій системі координат**

Основи постановки задач механіки суцільних середовищ в декартових координатах. Математична постановка задач МСС для твердих тіл включає сукупність всіх диференціальних і алгебраїчних рівнянь разом з властивостями матеріалів, початковими і граничними умовами (ГУ). Основним елементом математичної постановки є система диференціальних рівнянь (див. лекцію №13, (13.17)), яка включає: рівняння збереження маси (або нерозривності), рівняння руху, рівняння енергії (теплопровідності):

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0; \\ \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma} + \mathbf{f}; \\ C_v\dfrac{dT}{dt} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} + \vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}T\right) + q_v. \end{cases} \tag{14.1}$$

Геометричні рівняння. Рівняння Коші (13.19) (див. лекцію №13)

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\cdot\left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)\right). \tag{14.2}$$

Фізичні рівняння. Закон Гука (див. лекцію №8, (8.11)), який встановлює зв'язок між напруженнями і деформаціями

$$\hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}, \tag{14.3}$$

швидкість деформації

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \tag{14.4}$$

де $\overset{4}{\hat{C}}$ – тензор 4-го рангу фізичних констант, який вміщує 81 компоненту; $\mathbf{u}$ – вектор переміщень; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості переміщень.

В системі рівнянь (14.1) невідомими є такі величини: $\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, T$. Підрахуємо кількість невідомих в (14.1) у відповідності із записаними невідомими величинами: 1+3+3+6+6+1=20.

Кількість рівнянь, які можна записати з постановки (14.1)–(14.4) теж дорівнює 20. Тому можна зазначити, що кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Тобто система рівнянь (14.1)–(14.4) є замкнутою.

Постановка задачі (14.1)–(14.4) справедлива для тіл, що можуть отримувати великі деформації, наприклад, гумоподібні.

При конструктивних розрахунках вузлів та деталей з металу постановка задач суттєво спрощується, виходячи з додаткових припущень, що деформації є малими величинами в порівнянні з одиницею і, тому нелінійними членами в геометричному рівнянні (14.2) можна знехтувати:

1. Оскільки деформації є невеликими величинами і, відповідно, густина матеріалу змінюється слабо, тому в (14.1) рівняння збереження маси можна не розглядати.
2. Нелінійні члени, які присутні в виразі для тензора деформації (14.2) малі порівняно з лінійними, тому їми також можна знехтувати.
3. Енергія дисипації (перетворення механічної енергії в теплову) в рівнянні енергії (14.1) теж мала і, тому її також можна не враховувати.

В результаті описаних припущень отримуємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}; \\ C_v \dfrac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v; \\ \hat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\right); \\ \hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}. \end{cases} \tag{14.5}$$

Невідомими в системі диференціальних рівнянь (14.5) є $\mathbf{u},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon},T$, що відповідає кількості невідомих – 3+6+6+1=16.

В (14.5) задача про розподіл температури є незалежною задачею.

Далі можна ввести ще одне спрощення для системи рівнянь (14.5).

4. Тіло розглядається в стані спокою, тобто коли всі сили знаходяться в рівновазі. В цьому випадку кількість рівнянь і невідомих не змінюється, але всі шукані функції ($\mathbf{u},\hat{\sigma},\hat{\varepsilon},T$) стають незалежними від часу.

В результаті система рівнянь (14.5) стає статичною (стаціонарною) і набуває вигляду:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}+\mathbf{f}=0; \\ \vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\vec{\nabla}T\right)+q_v=0; \\ \hat{\varepsilon}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u}+\left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\right); \\ \hat{\sigma}=\overset{4}{\hat{C}}:\hat{\varepsilon}. \end{cases} \tag{14.6}$$

Для конструкторських розрахунків, як правило, використовуються ізотропні матеріали. Тоді тензор фізичних констант 4-го рангу набуває вигляду

$$C^{ijkl}=\mu\left(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk}\right)+\lambda g^{ij}g^{kl}, \tag{14.7}$$

де $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коефіцієнти Ламе виражені через модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν.

Розглянемо *рівняння рівноваги* з (14.6) *відносно компонент* тензорів. Представимо тензори через їх компоненти

$$\begin{gathered} \hat{\sigma}=\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \\ \mathbf{v}=v^i\mathbf{e}_i,\ \mathbf{u}=u^i\mathbf{e}_i, \\ \hat{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j. \end{gathered} \tag{14.8}$$

Додамо компоненти оператора Гамільтона

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

тоді можна записати, що

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Останній запис справедливий для будь-якої криволінійної системи координат.

Отже можна записати

$$\mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla_m \sigma^{ij} \left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i\right) \mathbf{e}_j = \nabla_m \sigma^{ij} g_i^m \mathbf{e}_j = \nabla_i \sigma^{ij} \mathbf{e}_j. \qquad (14.9)$$

Тут $\left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i\right) = g_i^m$.

Для вільного члена *рівняння рівноваги* маємо

$$\mathbf{f} = f^n \mathbf{e}_n. \qquad (14.10)$$

Після підстановки (14.9) і (14.10) в рівняння рівноваги, отримуємо

$$\nabla_i \sigma^{ij} \mathbf{e}_j + f^n \mathbf{e}_n = 0 \to \nabla_i \sigma^{ij} \mathbf{e}_j + f^j \mathbf{e}_j = 0 \to \left(\nabla_i \sigma^{ij} + f^j\right) \mathbf{e}_j = 0,$$

або

$$\nabla_i \sigma^{ij} + f^j = 0, \quad j = 1,2,3. \qquad (14.11)$$

Оскільки в (14.11) не було проведено спрощення відносно системи координат, то треба відмітити, що це рівняння є інваріантним, тобто справедливим для будь-якої системи координат.

Рівняння енергії записане через компоненти має вигляд

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x^i} T \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right)\right) \mathbf{e}^i = \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right) \left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^i\right) =$$
$$= \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right) g^{mi}.$$

Тут $\left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^i\right) = g^{mi}$.

$$\nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) g^{mi} + q_v = 0, \text{ – стаціонарне рівняння енергії.} \qquad (14.12)$$

де $\dfrac{\partial T}{\partial x^i} = \nabla_i T$.

Рівняння для *деформації* записане через компоненти має вигляд

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(u^m \mathbf{e}_m\right) = \mathbf{e}^k \left(\nabla_k u^m\right)\mathbf{e}_m = \nabla_k u^m \mathbf{e}^k \mathbf{e}_m,$$

$$\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T = \nabla_k u^m \mathbf{e}_m \mathbf{e}^k,$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{mn}\mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = \frac{1}{2}\left(\nabla_k u^m \mathbf{e}^k \mathbf{e}_m + \nabla_k u^m \mathbf{e}_m \mathbf{e}^k\right).$$

Перейдемо на коваріантні компоненти вектора переміщень

$$\varepsilon_{mn}\mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = \frac{1}{2}\left(\nabla_k u_m \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m + \nabla_k u_m \mathbf{e}^m \mathbf{e}^k\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla_k u_m \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m + \nabla_m u_k \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_k u_m + \nabla_m u_k\right)\mathbf{e}^k \mathbf{e}^m =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla_m u_n + \nabla_n u_m\right)\mathbf{e}^m \mathbf{e}^n,$$

тобто тепер можна записати, що

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\nabla_m u_n + \nabla_n u_m\right), \quad m,n = 1,2,3. \qquad (14.13)$$

Фізичне рівняння записане через компоненти тензорів

$$\hat{\sigma} = \sigma^{mn}\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = C^{ijkl}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l : \varepsilon_{pq}\mathbf{e}^p \mathbf{e}^q =$$

$$= C^{ijkl}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \varepsilon_{pq} g_l^p g_k^q = C^{ijqp}\varepsilon_{pq}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \quad \text{, тут } \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}^p = g_l^p \text{ і } \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^q = g_k^q$$

$$= C^{mnqp}\varepsilon_{pq}\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad m,n = 1,2,3$$

або

$$\sigma^{mn} = C^{mnqp}\varepsilon_{pq}. \tag{14.14}$$

Використовуючи (14.11)–(14.14) запишемо всю систему рівнянь (14.6) в інваріантній формі:

$$\begin{cases} \nabla_i \sigma^{ij} + f^j = 0; \\ \nabla_m \left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x^i} \right) g^{mi} + q_v = 0; \\ \varepsilon_{mn} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_m u_n + \nabla_n u_m \right); \\ \sigma^{mn} = C^{mnqp}\varepsilon_{pq}. \end{cases} \tag{14.15}$$

Перепишемо систему рівнянь (14.15) у декартовій системі координат. При цьому всі коваріантні похідні записуються як частинні похідні:

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^j = 0;$$
$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) g^{mi} + q_v = 0;$$
$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x^m} + \frac{\partial u_m}{\partial x^n} \right);$$
$$\sigma^{mn} = C^{mnqp}\varepsilon_{pq}.$$

Рівняння рівноваги в декартовій системі координат має вигляд:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial x^3} + f^1 = 0; \\ &\frac{\partial \sigma^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial x^3} + f^2 = 0; \\ &\frac{\partial \sigma^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial x^3} + f^3 = 0. \end{aligned} \tag{14.16}$$

Рівняння енергії в декартовій системі координат

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x^3}\right)+q_v=0. \qquad (14.17)$$

Фізичні рівняння – закон Гука в декартовій системі координат:

$$\begin{aligned}
\sigma^{11} &= (2\mu+\lambda)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33};\\
\sigma^{22} &= \lambda\varepsilon_{11}+(2\mu+\lambda)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33};\\
\sigma^{33} &= \lambda\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+(2\mu+\lambda)\varepsilon_{33};\\
\sigma^{12} &= 2\mu\varepsilon_{12};\ \sigma^{13}=2\mu\varepsilon_{13};\ \sigma^{23}=2\mu\varepsilon_{23}.
\end{aligned} \qquad (14.18)$$

Лекція 9.2(15) **Побудова рівнянь механіки суцільних середовищ в криволінійних координатах. Визначення геометричних характеристик циліндричної системи координат. Визначення базисних векторів циліндричної системи координат. Визначення компонент фундаментальних тензорів. Компоненти тензора Леві-Чівіта. Компоненти тензора перетворення координат. Зв'язок між компонентами тензорів перетворення координат**

Побудова рівнянь механіки суцільних середовищ в криволінійних координатах. Розглянемо процес задання рівнянь МСС на прикладі циліндричної системи координат.

Послідовність дій.

1. Запис рівнянь відносно компонент термомеханічних параметрів (напружень, деформацій, переміщень, температури, тощо) в інваріантній формі (див. лекцію №13, (13.17)).
2. Визначення геометричних характеристик криволінійної системи координат.

   Визначення основного і взаємного базисів системи координат.

   Визначення фундаментальних тензорів (метричного тензора, компонент тензора Леві-Чівіта та компонент тензора перетворень координат), визначення символів Кристофеля.

   Запис коваріантних похідних для обраної системи координат з підстановкою значень символів Кристофеля.

   При необхідності можна перейти до фізичних компонент термомеханічних параметрів.

Визначення геометричних характеристик циліндричної системи координат. Це виконується за допомогою побудови співвідношень між декартовою системою координат і криволінійною (рисунок 15.1).

Радіус-вектор точки M в криволінійній системі координат $\left(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\right)$

$$\mathbf{r}_M = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + x^{2'}\mathbf{e}_{2'} + x^{3'}\mathbf{e}_{3'} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}.$$

Зв'язок між циліндричними і декартовими координатами (див. рисунок 15.1)

$$\begin{gathered}\rho \equiv x^1 \text{ – радіус; } \varphi \equiv x^2 \text{ – азимутальний кут; } z \equiv x^3 \text{ – апліката;}\\ x^{1'} = \rho\cos\varphi = x^1 \cos x^2;\; x^{2'} = \rho\sin\varphi = x^1 \sin x^2;\; x^{3'} = z = x^3.\end{gathered} \tag{15.1}$$

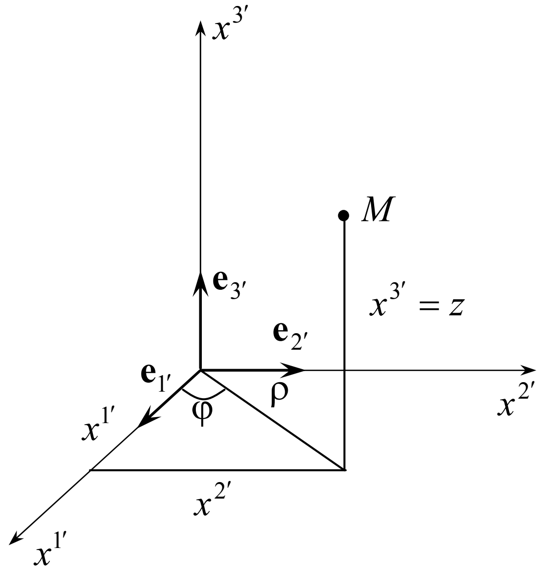


Рисунок 15.1 – Декартова і циліндрична системи координат

Визначення базисних векторів циліндричної системи координат. Основний базис циліндричної системи координат

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i};$$

враховуючи те, що $\mathbf{r} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}$ і (15.1), можна записати

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^{i'}\mathbf{e}_{i'}\right) = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'} + x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'} + x^3\mathbf{e}_{3'}\right) = \\ = \cos x^2\mathbf{e}_{1'} + \sin x^2\mathbf{e}_{2'}; \tag{15.2}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'} + x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'} + x^3\mathbf{e}_{3'}\right) = \\ = -x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'} + x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}; \tag{15.3}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'} + x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'} + x^3\mathbf{e}_{3'}\right) = \mathbf{e}_{3'}. \tag{15.4}$$

Тобто в результаті отримали для основного базису циліндричної системи координат

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos x^2\mathbf{e}_{1'} + \sin x^2\mathbf{e}_{2'}; \\ \mathbf{e}_2 = -x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'} + x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}; \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{3'}. \end{cases} \tag{15.5}$$

Визначимо взаємний базис циліндричної системи координат (див. лекцію №3, (3.4))

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right)} = \sin x^2\mathbf{e}_{2'} + \cos x^2\mathbf{e}_{1'}, \tag{15.6}$$

де векторний добуток базисних векторів

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'} + x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right) \times \mathbf{e}_3 = -x^1\sin x^2\left(\mathbf{e}_{1'} \times \mathbf{e}_{3'}\right) + \\ + x^1\cos x^2\left(\mathbf{e}_{2'} \times \mathbf{e}_{3'}\right) = \left| \begin{matrix} \left(\mathbf{e}_{1'} \times \mathbf{e}_{3'}\right) = -\mathbf{e}_{2'}; \\ \left(\mathbf{e}_{2'} \times \mathbf{e}_{3'}\right) = \mathbf{e}_{1'}; \end{matrix} \right| = x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'} + x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'}; \tag{15.7}$$

змішаний добуток базисних векторів

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=\\
&=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=\\
&=\begin{vmatrix}(\mathbf{e}_{1'})^2=1;\\(\mathbf{e}_{2'})^2=1;\end{vmatrix}=x^1\cos^2\left(x^2\right)+x^1\sin^2\left(x^2\right)=\\
&=x^1\left(\cos^2\left(x^2\right)+\sin^2\left(x^2\right)\right)=x^1;
\end{aligned} \tag{15.8}$$

$$\mathbf{e}^2=\frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}=\frac{\cos x^2\mathbf{e}_{2'}}{x^1}-\frac{\sin x^2\mathbf{e}_{1'}}{x^1}, \tag{15.9}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_{3'}\times\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{1'})\cos x^2+\\
&+(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{2'})\sin x^2=\begin{vmatrix}(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{1'})=\mathbf{e}_{2'};\\(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{2'})=-\mathbf{e}_{1'};\end{vmatrix}=\\
&=\cos x^2\mathbf{e}_{2'}-\sin x^2\mathbf{e}_{1'};
\end{aligned} \tag{15.10}$$

$$\mathbf{e}^3=\frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}=\frac{x^1\mathbf{e}_{3'}}{x^1}=\mathbf{e}_{3'}, \tag{15.11}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\times\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=\\
&=(\mathbf{e}_{1'}\times\mathbf{e}_{2'})\cos x^2\left(x^1\cos x^2\right)+(\mathbf{e}_{2'}\times\mathbf{e}_{1'})\sin x^2\left(-x^1\sin x^2\right)=\\
&=\begin{vmatrix}(\mathbf{e}_{1'}\times\mathbf{e}_{2'})=\mathbf{e}_{3'};\\(\mathbf{e}_{2'}\times\mathbf{e}_{1'})=-\mathbf{e}_{3'};\end{vmatrix}=x^1\left(\cos^2\left(x^2\right)+\sin^2\left(x^2\right)\right)\mathbf{e}_{3'}=x^1\mathbf{e}_{3'}.
\end{aligned} \tag{15.12}$$

Визначення компонент фундаментальних тензорів циліндричної системи координат. Коваріантні компоненти метричного тензора (див. лекцію №4) визначаються на підставі (15.5)

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j, \tag{15.13}$$

$$g_{11}=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=1; \tag{15.14}$$

$$g_{12}=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=0; \tag{15.15}$$

$$g_{13}=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\mathbf{e}_{3'}=0; \tag{15.16}$$

$$g_{22}=\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=\left(x^1\right)^2; \tag{15.17}$$

$$g_{23}=0;\qquad g_{21}=g_{12}=0;\qquad g_{31}=g_{13}=0; \tag{15.18}$$

$$g_{33}=\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{3'}=1. \tag{15.19}$$

Тобто для недіагональних компонент метричного тензора справедливо

$$g_{ij}\Big|_{i\neq j}=0. \qquad (15.20)$$

Контраваріантні компоненти метричного тензора. Визначаються на підставі (15.6), (15.9) і (15.11)

$$g^{ij}=\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j, \qquad (15.21)$$

$$g^{11}=\left(\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+\cos x^2\mathbf{e}_{1'}\right)\cdot\left(\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+\cos x^2\mathbf{e}_{1'}\right)=1; \qquad (15.22)$$

$$g^{22}=\left(\frac{\cos x^2\mathbf{e}_{2'}}{x^1}-\frac{\sin x^2\mathbf{e}_{1'}}{x^1}\right)\cdot\left(\frac{\cos x^2\mathbf{e}_{2'}}{x^1}-\frac{\sin x^2\mathbf{e}_{1'}}{x^1}\right)=\frac{1}{\left(x^1\right)^2}; \qquad (15.23)$$

$$g^{33}=\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{3'}=1; \qquad (15.24)$$

$$g^{ij}\Big|_{i\neq j}=0. \qquad (15.25)$$

Змішані компоненти метричного тензора. Визначаються на підставі (15.5), (15.6), (15.9) і (15.11)

$$g^i_j=\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j, \qquad (15.26)$$

$$g^1_1=\left(\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+\cos x^2\mathbf{e}_{1'}\right)\cdot\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=1; \qquad (15.27)$$

$$g^2_2=\left(\frac{\cos x^2\mathbf{e}_{2'}}{x^1}-\frac{\sin x^2\mathbf{e}_{1'}}{x^1}\right)\cdot\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=1; \qquad (15.28)$$

$$g^3_3=\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{3'}=1; \qquad (15.29)$$

$$g^i_j\Big|_{i\neq j}=0. \qquad (15.30)$$

Компоненти тензора Леві-Чівіта (див. лекції №4, 5) циліндричної системи координат. Коваріантні компоненти

$$\varepsilon_{ijk}=\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k\right)=\begin{cases}x^1 \quad \text{при}\to1\to2\to3\to\\ -x^1 \quad \text{при}\to1\to3\to2\to.\\ 0 \quad \text{при}\, i=j,\ i=k,\ j=k\end{cases} \qquad (15.31)$$

Контраваріантні компоненти

$$\varepsilon^{ijk} = \left(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^1} \quad \text{при} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \\ -\dfrac{1}{x^1} \quad \text{при} \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow . \\ 0 \quad \text{при}\, i = j,\ i = k,\ j = k \end{cases} \qquad (15.32)$$

Зв'язок між контраваріантними і коваріантними компонентами тензора Леві-Чівіта встановлюється через контраваріантні компоненти метричного тензора

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{mnq} g^{mi} g^{nj} g^{qk}\,. \qquad (15.33)$$

Компоненти тензора перетворення координат (див. лекцію №4) циліндричної системи координат

$$\begin{aligned} c_{i'}^{j} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}^{j}, \\ c_{j}^{i'} &= \mathbf{e}^{i'} \cdot \mathbf{e}_{j}, \end{aligned} \qquad (15.34)$$

$\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}^{i'}$ – для декартової системи координат.

Використовуючи (15.5), (15.6), (15.9) і (15.11) можна записати для $c_{i'}^{j}$. Детально розглянемо отримання компоненти $c_{1'}^{1}$

$$\mathbf{e}^1 = \sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'};$$

$$\begin{aligned} c_{1'}^{1} &= \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_{1'} \cdot \left(\sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}\right) = \\ &= \sin x^2 \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{2'}\right) + \cos x^2 \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'}\right) = \\ &= \left| \begin{matrix} \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{2'}\right) = 0; \\ \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'}\right) = 1; \end{matrix} \right| = \cos x^2; \end{aligned}$$

інші компоненти тензора перетворень координат отримують аналогічним чином

$$c_{1'}^{1} = \cos x^2; \qquad c_{1'}^{2} = -\frac{\sin x^2}{x^1}; \qquad c_{1'}^{3} = 0; \qquad (15.35)$$

$$c_{2'}^1 = \sin x^2; \qquad c_{2'}^2 = \frac{\cos x^2}{x^1}; \qquad c_{2'}^3 = 0; \tag{15.36}$$

$$c_{3'}^1 = 0; \qquad c_{3'}^2 = 0; \qquad c_{3'}^3 = 1; \tag{15.37}$$

і для $c_j^{i'}$

$$c_1^{1'} = \cos x^2; \qquad c_1^{2'} = \sin x^2; \qquad c_1^{3'} = 0; \tag{15.38}$$

$$c_2^{1'} = -x^1 \sin x^2; \qquad c_2^{2'} = x^1 \cos x^2; \qquad c_2^{3'} = 0; \tag{15.39}$$

$$c_3^{1'} = 0; \qquad c_3^{2'} = 0; \qquad c_3^{3'} = 1. \tag{15.40}$$

Компоненти тензора перетворень з декартової в циліндричну систему координат можна представити у вигляді матриці

$$\left[c_{i'}^{j}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} & 0 \\ \sin\varphi & \dfrac{\cos\varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і, навпаки, з циліндричної у декартову

$$\left[c_i^{j'}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зв'язок між компонентами тензорів перетворення координат в прямому $c_{i'}^{j}$ і зворотному $c_i^{j'}$ напрямках встановлюється через обернену матрицю

$$\left[c_{i'}^{j}\right] = \left[c_i^{j'}\right]^{-1}.$$

Лекція 9.3(16) **Визначення символів Кристофеля. Запис градієнта переміщень і напружень через символи Кристофеля. Рівняння рівноваги в циліндричній системі координат**

Визначення символів Кристофеля (див. лекцію №6). Для символів Кристофеля 2-го роду можна записати

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}^m = \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m. \tag{16.1}$$

Символи Кристофеля 1-го роду виражаються через метричний тензор як

$$\Gamma_{m,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right), \tag{16.2}$$

а символи Кристофеля 2-го роду зв'язані з символами Кристофеля 1-го роду таким співвідношенням

$$\Gamma_{ij}^n = \Gamma_{m,ij} g^{mn}. \tag{16.3}$$

Запишемо коваріантні компоненти базису циліндричної системи координат (див. лекцію №15)

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos x^2 \mathbf{e}_{1'} + \sin x^2 \mathbf{e}_{2'}; \\ \mathbf{e}_2 = -x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_{1'} + x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_{2'}; \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{3'}; \end{cases} \tag{16.4}$$

і контраваріантні компоненти базису циліндричної системи координат

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 = \sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}; \\ \mathbf{e}^2 = \dfrac{\cos x^2 \mathbf{e}_{2'}}{x^1} - \dfrac{\sin x^2 \mathbf{e}_{1'}}{x^1}; \\ \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_{3'}. \end{cases} \tag{16.5}$$

Запишемо компоненти метричного тензору циліндричної системи координат (див. лекцію №15)

$$\begin{gathered} g_{11} = g^{11} = 1; \\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = \left(x^1\right)^2 = \rho^2; \\ g_{33} = g^{33} = 1; \end{gathered} \tag{16.6}$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (\text{при } i \neq j).$$

На підставі (16.6) визначимо символи Кристофеля 1-го роду (16.2) в циліндричній системі координат

$$\Gamma_{m,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right);$$

$$\Gamma_{2,11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{3,11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{1,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{2,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right) = x^1 = \rho;$$

$$\Gamma_{3,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{1,11} = 0; \qquad \underline{\Gamma_{1,22} = -\rho;} \qquad \Gamma_{1,33} = 0;$$

$$\Gamma_{2,11} = 0; \qquad \Gamma_{2,22} = 0; \qquad \Gamma_{2,33} = 0;$$

$$\Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = 0; \qquad \Gamma_{3,22} = 0; \qquad \Gamma_{3,33} = 0;$$

$$\underline{\Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \rho;} \qquad \Gamma_{1,32} = \Gamma_{1,23} = 0;$$

$$\Gamma_{3,12} = \Gamma_{3,21} = 0; \qquad \Gamma_{2,32} = \Gamma_{2,23} = 0;$$

$$\Gamma_{1,31} = \Gamma_{1,13} = 0; \qquad \Gamma_{1,32} = \Gamma_{1,23} = 0;$$

$$\Gamma_{1,13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{2,31} = \Gamma_{2,13} = 0; \qquad \Gamma_{3,31} = \Gamma_{3,13} = 0;$$

$$\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = -x^1 = -\rho;$$

$$\Gamma_{2,22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Тепер визначимо символи Кристофеля 2-го роду (16.3)

$$\Gamma_{ij}^{n} = \Gamma_{m,ij} g^{mn},$$

$$\Gamma_{ij}^{1} = \Gamma_{1,ij} g^{11}; \qquad \Gamma_{ij}^{2} = \Gamma_{2,ij} g^{22}; \qquad \Gamma_{ij}^{3} = \Gamma_{3,ij} g^{33};$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^2} \cdot \mathbf{e}^1 = \Gamma_{1,22} g^{11} = -\rho;$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^2} \cdot \mathbf{e}^2 = \Gamma_{2,12} g^{22} = \frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}.$$

Тепер запишемо вираз для *градієнта переміщень* через символи Кристофеля 2-го роду

$$\vec{\nabla} \mathbf{u} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(u^n \mathbf{e}_n\right) = \mathbf{e}^m \left(\nabla_m u^n\right)\mathbf{e}_n = \nabla_m u^n \mathbf{e}^m \mathbf{e}_n, \tag{16.7}$$

де $\nabla_m u^n = \dfrac{\partial u^n}{\partial x^m} + \Gamma_{mk}^{n} u^k$ *– градієнт переміщень.*

Вираз для *градієнта напружень* через символи Кристофеля 2-го роду має наступний вигляд

$$\vec{\nabla} \hat{\sigma} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) = \mathbf{e}^m \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right)\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla_m \sigma^{ij} \mathbf{e}^m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \tag{16.8}$$

де $\nabla_m \sigma^{ij} = \dfrac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^m} + \Gamma_{mk}^{i} \sigma^{kj} + \Gamma_{mk}^{j} \sigma^{ik}$ *– градієнт напружень.*

Запишемо вираз для дивергенції переміщень

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial x^m}\left(u^n \mathbf{e}_n\right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m u^n\right)\mathbf{e}_n = \nabla_m u^n \left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_n\right) = \nabla_n u^n. \tag{16.9}$$

Запишемо *рівняння рівноваги* для будь-якого тіла *в циліндричній системі координат*

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{f} = 0,$$

$\mathbf{e}^m \dfrac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\sigma_j^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j\right) + f^k \mathbf{e}_k = 0$ – скалярна форма рівняння рівноваги,

$$\mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma_j^i\right)\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0,$$

$$\left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i\right)\left(\nabla_m \sigma_j^i\right)\mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0 \rightarrow \delta_i^m \nabla_m \sigma_j^i \mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0,$$

$$\nabla_m \sigma_j^m \mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0\,,$$

$$\nabla_m \sigma_j^m \mathbf{e}^j + f_j \mathbf{e}^j = 0 \to \left(\nabla_m \sigma_j^m + f_j\right)\mathbf{e}^j = 0\,,$$

$$\nabla_m \sigma_j^m + f_j = 0 \text{ при } j = 1,2,3\,.$$

Тоді остаточно можна записати, використовуючи при цьому символи Кристофеля 2-го роду

$$\frac{\partial \sigma_j^m}{\partial x^m} + \Gamma_{mk}^m \sigma_j^k - \Gamma_{mj}^k \sigma_k^m + f_j = 0\,. \tag{16.10}$$

Лекція 9.4(17) **Основні рівняння МСС для рідин та газів. Системи координат Лагранжа і Ейлера. Рівняння руху в різних системах відліку. Отримання інваріантної форми рівняння руху. Рівняння збереження маси в різних системах відліку. Отримання інваріантної форми рівняння збереження маси. Рівняння збереження енергії в різних системах відліку. Інваріантна форма запису рівняння збереження енергії**

Основні рівняння МСС для рідин та газів. Рівняння МСС для рідин і газів відрізняються між собою в залежності від обраної системи відліку, наприклад, *системи відліку Ейлера* або *Лагранжа*.

При використанні Лагранжевої системи координат маємо, що:

– координати точки є координатами і в початковому стані;
– рух точок в просторі визначається виключно вектором переміщень $\mathbf{u}$;
– координати точок не залежать від їх переміщення в просторі.

Нехай маємо деяку функцію скалярного поля φ виду

$$\varphi\left(x^1, x^2, x^3, t\right),$$

то її субстанціональну (матеріальну) похідну можна записати як (див. лекції №2, 7)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{x^1, x^2, x^3 = const} \tag{17.1}$$

В Лагранжевій системі координат координати точок не залежать від часу $\frac{\partial x^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1,2,3)$. Тобто (17.1) перетворюється на

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{17.2}$$

В Ейлеревій системі координат маємо, що

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} v^3 + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{x^1, x^2, x^3 = const} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{17.3}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{17.4}$$

Запишемо тепер матеріальну похідну від тензора $\hat{T}$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = v^i \cdot \nabla \hat{T} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}. \tag{17.5}$$

Висновок. Матеріальна похідна за часом від будь-якої фізичної величини дорівнює сумі конвективної $\left(v^i \cdot \nabla \hat{T}\right)$ і локальної похідних $\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}\right)$.

Якщо ми маємо рівняння, в яких містяться похідні за часом в Лагранжевій системі відліку (тобто похідні за часом є матеріальними похідними, тобто похідними за часом, що відносяться до матеріальної точки суцільного середовища), то для переходу до Ейлеревої системи відліку достатньо і необхідно замінити матеріальну похідну за часом сумою конветивної і локальної похідних згідно з формулою (17.5).

При переході від Ейлеревої системи відліку до Лагранжевої, навпаки, необхідно суму конветивної і локальної похідних замінити на матеріальну похідну (17.4), (17.5).

В Лагранжевій системі координат використовуються координати і переміщення.

Рівняння руху в різних системах відліку. Лагранжева система відліку

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}, \tag{17.6}$$

якщо ввести швидкість $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, то (17.6) можна переписати у виді

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} . \tag{17.7}$$

Ейлерева система відліку

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}\mathbf{v} \right) = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} , \tag{17.8}$$

де $\dfrac{\partial u^i}{\partial t} = v^i$ – швидкість переміщень.

Виконаємо перетворення (17.8) для отримання інваріантної форми запису рівняння руху. Перейдемо від векторної форми до тензорної для представлення швидкості, напруження, вектора об’ємного навантаження і оператора Гамільтона:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i , \qquad \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j , \qquad \mathbf{f} = f^m \mathbf{e}_m , \qquad \vec{\nabla} = \mathbf{e}^s \frac{\partial}{\partial x^s} . \tag{17.9}$$

З врахуванням (17.9) рівняння (17.8) перепишеться у виді

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(v^i \mathbf{e}_i\right) + v^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(v^n \mathbf{e}_n\right) \right) = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) + f^i \mathbf{e}_i . \tag{17.10}$$

Виконаємо деякі перетворення рівняння (17.10)

$$\rho\left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m \left(\nabla_m v^n\right) \mathbf{e}_n \right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + f^i \mathbf{e}_i . \tag{17.11}$$

В (17.11) використано перетворення виду

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(t^{kp} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_p\right) = \left(\nabla_m t^{kp}\right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_p .$$

$$\rho\left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \delta_i^m \left(\nabla_m v^n\right) \mathbf{e}_n \right) = \delta_i^m \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right) \mathbf{e}_j + f^i \mathbf{e}_i , \tag{17.12}$$

в (17.12) використана заміна $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m = \delta_i^m$

$$\rho\left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \nabla_m v^n \mathbf{e}_n\right) = \nabla_m \sigma^{ij} \mathbf{e}_j + f^i \mathbf{e}_i, \tag{17.13}$$

проведемо заміну індексів в (17.13), отримаємо

$$\rho\left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \nabla_n v^i \mathbf{e}_i\right) = \nabla_j \sigma^{ij} \mathbf{e}_i + f^i \mathbf{e}_i, \tag{17.14}$$

винесемо за дужки $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{e}_i \rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \nabla_n v^i\right) = \left(\nabla_j \sigma^{ij} + f^i\right)\mathbf{e}_i, \tag{17.15}$$

в результаті отримали *інваріантну форму рівняння руху*

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \nabla_n v^i\right) = \nabla_j \sigma^{ij} + f^i \quad (i = 1,2,3). \tag{17.16}$$

Рівняння руху у інваріантній формі (17.16) є справедливим для будь-якої системи координат.

Рівняння руху в декартовій системі координат приймає вигляд

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \frac{\partial v^i}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i \quad (i = 1,2,3). \tag{17.17}$$

Для стаціонарних процесів в Ейлеревій системі відліку похідні за часом дорівнюють нулю $\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} = 0\right)$, тобто всі величини залежать тільки від просторових координат.

Наприклад, для циліндричної системи координат (див. лекції №15,16) маємо, що

$$\begin{cases} \rho = x^1; \\ \varphi = x^2; \\ z = x^3; \end{cases} \tag{17.18}$$

компоненти метричного тензора

$$\begin{gathered} g_{11} = g^{11} = g_{33} = g^{33} = 1; \\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = \rho^2; \end{gathered} \tag{17.19}$$

символи Кристофеля 2-го роду

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho}; \qquad \Gamma_{22}^1 = -\rho. \tag{17.20}$$

Рівняння збереження маси в різних системах відліку. Лагранжева система відліку

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{17.21}$$

Перейдемо до Ейлеревої системи відліку за допомогою розкладання матеріальної похідної $\frac{d\rho}{dt}$ на локальну і конвективну похідні

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{17.22}$$

В результаті отримуємо рівняння збереження маси в Ейлеревій системі відліку

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{17.23}$$

Виконаємо перетворення (17.23) для отримання інваріантної форми запису рівняння збереження маси (нерозривності). При цьому використаємо перехід від векторної до тензорної форми запису

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \qquad \vec{\nabla} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\rho v^i \mathbf{e}_i \right) = 0, \tag{17.24}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \left(\rho v^i \right) \right) \mathbf{e}_i = 0, \tag{17.25}$$

заміна $\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \delta_i^m \nabla_m \left(\rho v^i \right) = 0, \tag{17.26}$$

в результаті отримали *інваріантну форму рівняння збереження маси*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i \right) = 0. \tag{17.27}$$

Рівняння збереження маси в декартовій системі координат приймає вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho v^i \right) = 0. \tag{17.28}$$

Рівняння збереження енергії в різних системах відліку. Лагранжева система відліку

$$C_v \frac{dT}{dt} = \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + q_v. \tag{17.29}$$

В рівнянні (17.29) також замість знака «:» (подвійного скалярного добутку) в літературі також користуються еквівалентним позначенням «··». Ейлереву систему відліку (отримують в результаті розкладання матеріальної похідної на локальну і конвективну похідні)

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + q_v. \tag{17.30}$$

Виконаємо перетворення (17.30) для отримання інваріантної форми запису рівняння збереження енергії. Перейдемо від векторної форми до тензорної для представлення швидкості, напруження, деформації і оператора Гамільтона:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i , \qquad \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j , \qquad \hat{\dot{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n , \qquad \vec{\nabla} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} ,$$

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} (T) \right) = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j : \dot{\varepsilon}_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\lambda \mathbf{e}^n \frac{\partial}{\partial x^n} (T) \right) + q_v , \qquad (17.31)$$

використовуючи заміни в (17.31)

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m = \delta_i^m , \ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^m = g_j^m , \ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^n = g_i^n , \ \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^n = g^{mn} ,$$

отримуємо

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \delta_i^m \nabla_m T \right) = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{mn} g_j^m g_i^n + \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) g^{mn} + q_v , \qquad (17.32)$$

в результаті *інваріантна форма запису рівняння збереження енергії* буде мати вигляд

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \nabla_i T \right) = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) g^{mn} + q_v , \qquad (17.33)$$

де $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji}$, $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$.

Лекція 9.5(18) **Зв'язані рівняння лінійної термопружності. Початкові і граничні умови. Рівняння термопластичності. Початкові і граничні умови**

Зв'язані рівняння лінійної термопружності. Система рівнянь МСС зв’язаної задачі лінійної термопружності для твердого середовища в наближенні малих деформацій включає рівняння руху, енергії, фізичне рівняння у вигляді закону Гука, геометричні рівняння для тензорів пружних та температурних деформацій:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{F}; \\ C_v \dfrac{dT}{dt} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + q_v; \\ \hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \left(\hat{\varepsilon}^e - \hat{\varepsilon}^T \right); \\ \hat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \mathbf{u} + \left(\vec{\nabla} \mathbf{u} \right)^T \right) = \hat{\varepsilon}^e - \hat{\varepsilon}^T; \\ \hat{\varepsilon}^T = \beta \left(T - T_0 \right) g_{ij}; \\ \dot{\hat{\varepsilon}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}, \end{cases} \tag{18.1}$$

де ρ – густина, кг/м^3; $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ – вектор швидкості $\left(\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \right)$, м/с; t – час, с; $\vec{\nabla} = \mathbf{e}^s \dfrac{\partial}{\partial x^s}$ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор напружень, що визначається *фізичним рівнянням* – законом Гука, який встановлює зв'язок між напруженнями і деформаціями, Па; $\mathbf{F} = F^m \mathbf{e}_m$ – вектор масових сил, Па/кг; $\dot{\hat{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n$ – тензор швидкості деформацій, який визначається через похідну $\dot{\hat{\varepsilon}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}$, с$^{-1}$; $C_v = c_v \rho$ – об’ємна ізохорна теплоємність середовища, Дж/(м^3·К); c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К; λ – теплопровідність, Вт/(м·К); q_v – об’ємна густина внутрішнього джерела теплоти, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи, Вт/м^3; $\overset{4}{\hat{C}}$ – тензор 4-го рангу фізичних констант, який у загальному випадку вміщує 81 компоненту, Па; $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ – вектор переміщень, м; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення середовища; T_0 і T – початкова і поточна температура середовища, відповідно; g_{ij} – метричний тензор.

Початкові і граничні умови. Початкові умови описують початковий стан середовища:

$$\mathbf{u}_0 = \varphi_u \left(\mathbf{x} \right); \tag{18.2}$$

$$T_0 = \varphi_T \left(\mathbf{x} \right), \tag{18.3}$$

де $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$.

Граничні умови:

– крайові умови Дирихле (стосуються геометричного рівнянь рівноваги та енергії)

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0; \\ T = T_b, \end{cases} \tag{18.4}$$

де перша умова відповідає умові закріплення тіла; T_b – температура на границі середовища;

– крайові умови Неймана (стосуються рівнянь рівноваги та енергії)

$$\begin{cases} \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}; \\ \mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \vec{\nabla} T\right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_{\mathrm{n}}, \end{cases} \tag{18.5}$$

де $\mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i$ – вектор зовнішньої сили, що діє на поверхні середовища; $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ – вектор густини теплового потоку на поверхні середовища;

– конвективні умови (стосуються тільки рівняння енергії)

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \vec{\nabla} T\right) = \alpha \left(T - T_{\mathrm{p}}\right), \tag{18.6}$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; T_{p} – температура оточуючого середовища;

– механічні умови абсолютного контакту

$$\begin{cases} \left\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\right\} = 0; \\ \left\{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}\right\} = 0, \end{cases} \tag{18.7}$$

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до поверхні контакту; $\mathbf{u}$ – вектор переміщень; $\left\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\right\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{u}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{u}^-$; $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ – компоненти напруження в нормальному напрямку до поверхні контакту; $\left\{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}\right\} = \boldsymbol{\sigma}_n{}^+ \cdot \mathbf{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}_n{}^- \cdot \mathbf{n}^-$; «+» і «–» – означає ліворуч і праворуч від поверхні контакту;

– теплові умови абсолютного контакту

$$\begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0, \end{cases} \tag{18.8}$$

де $\{T\} = T^+ - T^-$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ – вектор густини теплового потоку.

Рівняння термо-пластичності. Розглянемо постановку задачі в наближенні теорії пластичної течії для ізотропного середовища. В інкрементарній теорії пластичності настання пластичного стану можна зв'язати з параметром аналогічним часу і всі співвідношення представляти через швидкості. Тоді рівняння рівноваги, записане через швидкості і у тензорній формі, приймає вигляд

$$\dot{\sigma}^{ij}_{,j} + \rho \dot{F}^i = 0, \; i = \overline{1,3}, \tag{18.9}$$

де ρ – густина, кг/м^3; $\dot{\sigma}^{ij}_{,j}, \dot{F}^i$ – похідні за часом.

При цьому непружні деформації ($\dot{\varepsilon}^n_{ij}$) розглядаються як початкові. Тоді узагальнений закон Гука можна записати через прирощення початкових напружень і швидкості повної деформації ($\dot{\varepsilon}_{ij}$)

$$\dot{\sigma}^{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta^{ij} - \dot{\sigma}^{ij}_{in}, \;\; i,j = \overline{1,3}, \tag{18.10}$$

де $\dot{\sigma}^{ij}_{in} = 2G\dot{\varepsilon}^n_{ij} + \dfrac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}^n_{kk}\delta^{ij}, \;\; i,j = \overline{1,3}$ – компоненти прирощення початкових напружень, Па; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – пружний модуль зсуву, Па; E – модуль пружності при розтягу, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) = \dot{\varepsilon}^e_{ij} - \dot{\varepsilon}^{in}_{ij}$ – тензор повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}^e_{ij}$ – компоненти пружної і $\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} = \dot{\varepsilon}^p_{ij} + \dot{\varepsilon}^T_{ij} + \dot{\varepsilon}^I_{ij}$ – непружної частини тензора повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}^p_{ij}, \dot{\varepsilon}^T_{ij}$ – компоненти швидкості пластичної і температурної деформації, с$^{-1}$, відповідно; $\dot{\varepsilon}^I_{ij}$ – швидкість початкової деформації, обумовленої іншими причинами, с$^{-1}$.

Настання пластичного стану матеріалу визначається критерієм пластичності матеріалу. Наприклад, при використанні моделі ізотропного зміцнення, маємо таку функцію настання пластичної течії середовища (або поверхню течії)

$$F\left(\sigma^{ij}, h\right) = \sigma_{\text{ekv}} - \sigma_{\text{yield}}\left(h\right) = 0, \tag{18.11}$$

де $\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{3J_2}$ – еквівалентне напруження за Мізесом, Па; $J_2 = \frac{1}{2}s^{ij}s^{ij}$ – другий інваріант тензора девіацій напружень, Па^2; $s^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3}\sigma^{kk}\delta_{ij}$, $i, j = \overline{1{,}3}$ – компоненти тензора девіаторних напружень, Па; $\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)$ – границя пластичності матеріалу при одновісному навантаженні, яка залежить від параметру ізотропного зміцнення середовища, Па; h– параметр, який характеризує роботу зміцнення $\left(h = \int \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}\right)$.

При $F\left(\sigma^{ij}, h\right) < 0$ має місце пружний стан середовища.

Швидкість пластичної деформації визначається асоціативним законом пластичної течії

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}, \tag{18.12}$$

де $d\lambda = \frac{1}{\gamma'}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}C^{ijkl}d\varepsilon_{kl}$ – невід'ємна скалярна змінна; $\gamma' = \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}C^{ijkl}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} + \frac{\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)}{dh}\sigma^{ij}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}$ або $\gamma' = \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}C^{ijkl}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} + \frac{\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)}{d\varepsilon_{ij}^{p}}$; $\frac{\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)}{d\varepsilon_{ij}^{p}} = H'$ – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, що визначає залежність напружень від деформації при одновісному розтягуванні; C^{ijkl} – компоненти тензора 4-го рангу пружних констант середовища, Па.

Співвідношення

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}C^{ijkl}d\varepsilon_{kl} \text{ або } \dot{\lambda} = \frac{1}{\gamma'}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}C^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{18.13}$$

використовуються для визначення прирощення напружень і деформацій за формулою

$$\dot{\sigma}^{ij} = C^{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}\right), \tag{18.14}$$

або

$$\dot{\sigma}^{ij} = C_{pl}^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{18.15}$$

де $C_{pl}^{ijkl} = C^{ijkl} - \frac{1}{\gamma'}C^{ijmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{rp}}C^{rpkl}$ – компоненти тензора 4-го рангу пружно-пластичних констант середовища, Па.

Для того щоб ці співвідношення застосовувати, використовуючи формулювання з початковими напруженнями, треба виконати деякі додаткові перетворення. Запишемо

$$\dot{\sigma}_e^{ij} = C^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{18.16}$$

де $\dot{\sigma}_e^{ij}$ – компоненти тензора прирощень пружних напружень, тобто значень прирощень напружень, що відповідають виключно пружним деформаціям, Па.

Вираз (18.16) тепер можна переписати дещо в іншому вигляді

$$\dot{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}_e^{ij} - \frac{1}{\gamma'}C^{ijmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}\dot{\sigma}_e^{kl}, \tag{18.17}$$

або

$$d\sigma^{ij} = d\sigma_e^{ij} - \frac{1}{\gamma'}C^{ijmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}d\sigma_e^{kl}. \tag{18.18}$$

Це рівняння означає, що істинні значення напружень можна обчислити за допомогою відповідних пружних напружень, взявши ці значення в формі прирощень. Крім того, можна обчислювати прирощення початкових напружень, скориставшись співвідношенням

$$d\sigma_p^{ij} = d\sigma_e^{ij} - d\sigma^{ij} = \frac{1}{\gamma'} C^{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} d\sigma_e^{kl}, \qquad (18.19)$$

де $d\sigma_p^{ij}$ – прирощення початкових напружень, Па.

Для визначення поля температур використовується рівняння енергії виду

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v . \qquad (18.20)$$

Початкові і граничні умови. Початкові умови включають розподіл температур та прирощення непружних напружень або деформацій середовища:

$$\begin{cases} T_{in} = \varphi_T(\mathbf{x}); \\ \dot{\sigma}_{in}^{ij} = \varphi_\sigma(\mathbf{x}) \vee \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}). \end{cases} \qquad (18.21)$$

Граничні умови:

– механічні умови

прирощення переміщень

$$\dot{\mathbf{u}} = 0; \qquad (18.22)$$

прирощення зусиль

$$\dot{\hat{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{p}}; \qquad (18.23)$$

– теплові умови

температурні

$$T = T_b; \qquad (18.24)$$

конвективні або тепловий потік

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \nabla T\right) = \alpha\left(T - T_{\mathrm{p}}\right) \vee \mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \nabla T\right) = q_{\mathrm{n}}, \qquad (18.25)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м^2·К); T_{p} – температура оточуючого середовища, К; $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла; q_{n} – нормальна складова вектора густини теплового потоку $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$, Вт/м^2.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т.1,2. — 584, 492 с.
2. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Изд-во физ-мат. лит., 1962. — 284 с.
3. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз ; пер. с англ. В. И. Свешниковой ; под ред. М. Е. Еглит. — М., Мир. — 1974. — 319 с.
4. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1,2 / Под. ред. М. Э. Эглит. — М. : «Московский Лицей», 1996. — с. 396, 394.
5. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред : [изд. 4-е, стер.] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Физматлит, 2003. — 656 с. — («Теоретическая физика», Т. VIII).
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2,6,7. — М., 1985.
7. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел ; пер. с англ. Корнейчука Л. Г. ; под ред. Э. И. Григолюка. — М. : Мир, 1987. — 524 с.
8. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и механике сплошных сред. / И.С. Сокольников ; пер. с англ. В. И. Контовта ; под ред. В. В. Лохина. — М. : Наука, 1971. — 376 с.
9. Жермен П. Курс механики сплошных сред — М. : Высшая школа. 1983 — 399 с.
10. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды — М. : МГУ, 1978. — 286 с.
11. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. — К. : Наукова думка, 1970. — 307 с.
12. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.
13. Техническая термодинамика / Под общ. ред. Кругова В.И. — М. : Выс. школа. — 1971. — 472 с.
14. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. — М. : Мир, 1976. — 669 с.
15. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. — К. : Наук. думка, 1987 — 230 с.
16. Сахаров О.С., Щербина В.Ю., Гондлях А.В., Сівецький В.І. САПР Інтегрована система моделювання технологічних процесів і розрахунку обладнання хімічної промисловості: Навчальний посібник — К. : ТОВ «Поліграф Консалтінг», 2006. — 156 с.

17. Андерсон Д, Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. — М. : Мир, 1990. Т.I, Т.2. — 726 с.

18. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И.Альтенбаха. — Киев: Вища школа, 1982. — 480 с.

19. K. Kesava Rao. An Introduction to Granular Flow [Text] / K. Kesava Rao, Prabhu R.Nott. — New York : Publ. in the USA by Cambridge University Press, 2008. — 490 p.

20. Poinsot T. Theoretical and numerical combustion / Thierry Poinsot, Denis Veynante. — 2nd ed. — Philadelphia : Edwards, 2005. — 522 p.

21. Математичне моделювання складного теплообміну повітряних регенераторів [Текст] : моногр. / Є. М. Панов, А. Я. Карвацький, І. Л. Шилович та ін. — К. : НТУУ «КПІ», 2011. — 103 с.

22. Теоретичні та експериментальні дослідження теплоелектричного та механічного стану високотемпературних агрегатів [Текст] : моногр. / А. Я. Карвацький, Є. М. Панов, С. В. Кутузов та ін. — К. : НТУУ «КПІ», 2012. — 352 с.

23. Сахаров О. С. Метод. вказ. до виконання лабораторних робіт з курсу «Механіка суцільних середовищ - 1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках» / О. С. Сахаров, В. Ю. Щербина, О. В. Гондлях, В. І. Сівецький . — К. : НТУУ «КПІ», каф. ХПСМ, 2011. — 53 с.

24. Метод. вказівки до викон. завдань з лабораторних робіт з дисципліни «Механіка суцільних середовищ – 1», для студ. спец. 8.05050315, 7.05050315 «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / Уклад.: О.С. Сахаров, А.Я. Карвацький, С.В.Лелека, Т.В.Лазарєв. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 125 с.

25. Метод. вказівки до викон. самостійної роботи студентів з дисципліни «Механіка суцільних середовищ», для студ. спец. 8.05050315, 7.05050315 «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / Уклад.: А.Я. Карвацький. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 18 с.

ДАДАТОК А

Питання для самоконтролю

Тема 1 Предмет МСС. Властивості суцільних середовищ
Лекція 1.1(1)

1 Визначення МСС.
2 Аксіоматика механіки суцільних середовищ.
3 Основні методи та напрямки досліджень різних об'єктів МСС (твердих тіл, рідин та газів).
4 Зв'язок курсу з іншими дисциплінами (опір матеріалів, гідравліка, термодинаміка, обчислювальна математика, програмування, технологічні розрахунки та розрахунки на міцність машин та апаратів).
5 Загальна характеристика фізичних явищ та процесів, що протікають в твердих тілах, рідинах та газах.
6 Фізичні моделі МСС.
7 Закони термодинаміки.

Тема 2 Основні поняття, визначення та гіпотези МСС
Лекція 2.1(2)

1 Поняття континууму.
2 Лагранжеві та Ейлереві координати для опису руху тіл, субстанціональна похідна за часом.
3 Векторні базиси в початковій та актуальній конфігурації тіл.
4 Гіпотези МСС і їх роль при розробці математичних моделей.
5 Задачі механіки суцільного середовища.

Тема 3 Введення в тензорний аналіз
Лекція 3.1(3)

1 Поняття вектора.
2 Координатні системи.
3 Представлення векторів в прямокутних і косокутних прямолінійних координатах.
4 Основний і взаємний векторні базиси.
5 Властивості змішаного добутку векторів.
6 Німий, вільний, коваріантний і контраваріантний індекси.

7 Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора.
8 Дії над векторами.

Лекція 3.2(4)

1 Визначення тензора.
2 Представлення тензорів через вектори основного і взаємного базисів, векторний супровід.
3 Фундаментальні тензори систем координат: метричний, перетворення координат, Леві-Чівіти.
4 Компоненти метричного тензора.
5 Компоненти тензора перетворення координат.

Лекція 3.3(5)

1 Компоненти тензора Леві-Чівіта.
2 Унарні дії над тензором: транспонування, скалярна згортка, векторна згортка, слід тензора.
3 Бінарні операції з тензорами: сума тензорів, скалярний добуток, подвійний скалярний добуток, векторний добуток, тензорний добуток.
4 Диференціювання тензорів.
5 Оператор Гамільтона.
6 Градієнт тензора.
7 Оператор дивергенції.

Лекція 3.4(6)

1 Ротор.
2 Криволінійні координати.
3 Диференціювання тензорів в криволінійних координатах.
4 Властивості символів Кристофеля.
5 Коваріантні похідні від тензора 2-го рангу заданого контраваріантними компонентами.
6 Диференціювання тензора заданого коваріантними компонентами.

Лекція 3.5(7)

1 Коваріантні похідні змішаних компонент тензорів.

2 Перетворення компонент фундаментальних тензорів і символів Кристофеля при зміні системи координат.
3 Скалярний добуток будь-якого тензора на метричний тензор.
4 Зв'язок між метричними тензорами і символами Кристофеля.
5 Символи Кристофеля 1-го роду.
6 Фізичні компоненти тензорів.
7 Матеріальна або тензорна похідна.
8 Інваріантна форма запису рівнянь.

Тема 7 Фізичні рівняння однорідного середовища
Лекція 7.1(8)

1 Фізичні рівняння стану.
2 Фізичні закони для твердих тіл.
3 Девіатор деформації і напружень.
4 Ізотропні, ортотропні і анізотропні матеріали.
5 Представлення фізичних рівнянь стану в тензорній формі.
6 Тензор 4-го рангу фізичних констант.
7 Властивості компонент тензорів 4-го рангу фізичних (пружних) констант.
8 Перехід з однієї системи координат в іншу.
9 Співвідношення між напруженням і швидкістю деформації для рідин і газів.
10 Закон Нав’є-Стокса.
11 Девіаторні та середні напруження в рідині.

Тема 8 Закони збереження суцільного середовища
Лекція 8.1(9)

1 Формула Остроградського-Гауса.
2 Теорема про дивергенцію.
3 Основні рівняння механіки суцільних середовищ.
4 Закон збереження маси.
5 Вивід рівняння нерозривності.
6 Інваріантна форма рівняння збереження маси.
7 Форми запису рівняння нерозривності в Ейлеревій і Лагранжевій системах координат.

Лекція 8.2(10)

1 Рівняння руху.
2 Форми запису диференціального рівняння руху.
3 Рівняння рівноваги і тензори напружень в Лагранжевих змінних.
4 Тензори Піоли та Коші-Ейлера.

Лекція 8.3(11)

1 Зовнішні сили на поверхні тіла.
2 Зв'язок між тензором напружень і вектором напружень.
3 Нормальне зусилля і напруження на поверхні.
4 Дотичне напруження на поверхні.
5 Принцип Даламбера.
6 Закон збереження кількості руху (імпульсу).
7 Кількість руху, імпульс.

Лекція 8.4(12)

1 Закон збереження механічної енергії.
2 Оператори подвійного (кратного) скалярного добутку двох тензорів.
3 Симетричність тензорів напружень.

Лекція 8.5(13)

1 Закон збереження повної енергії.
2 Теплоємність.
3 Закон балансу ентропії.
4 II закон термодинаміки.
5 Рівняння теплопровідності.
6 Основна система рівнянь МСС.
7 Фізичні рівняння стану.
8 Геометричні рівняння.
9 Закон Фур’є.
10 Рівняння теплопровідності.
11 Геометричні рівняння Коші.
12 Швидкості деформації.

Тема 9 Розв'язуючі рівняння МСС в декартових та криволінійних координатах

Лекція 9.1(14)

1 Основи постановки задач механіки суцільних середовищ в декартових координатах.
2 Геометричні рівняння.
3 Фізичні рівняння.
4 Рівняння рівноваги, енергії, деформації і фізичне рівняння відносно компонент.
5 Рівняння рівноваги, енергії і закон Гука в декартовій системі координат.

Лекція 9.2(15)

1 Побудова рівнянь механіки суцільних середовищ в криволінійних координатах.
2 Визначення геометричних характеристик циліндричної системи координат.
3 Визначення базисних векторів циліндричної системи координат.
4 Визначення компонент фундаментальних тензорів.
5 Компоненти тензора Леві-Чівіта.
6 Компоненти тензора перетворення координат.
7 Зв'язок між компонентами тензорів перетворення координат.

Лекція 9.2(16)

1 Визначення символів Кристофеля.
2 Запис градієнта переміщень і напружень через символи Кристофеля.
3 Рівняння рівноваги в циліндричній системі координат.

Лекція 9.2(17)

1 Основні рівняння МСС для рідин та газів.
2 Системи координат Лагранжа і Ейлера.
3 Рівняння руху в різних системах відліку.
4 Отримання інваріантної форми рівняння руху.
5 Рівняння збереження маси в різних системах відліку.
6 Отримання інваріантної форми рівняння збереження маси.

7 Рівняння збереження енергії в різних системах відліку.
8 Інваріантна форма запису рівняння збереження енергії.

Лекція 9.2(18)

1 Зв'язані рівняння лінійної термопружності. Початкові і граничні умови.
2 Рівняння термо-пластичності. Початкові і граничні умови.

ДАДАТОК Б

Завдання для самостійної роботи

Тема 1 Предмет МСС. Властивості суцільних середовищ

1.1 Загальні методи дослідження суцільних середовищ при взаємодії їх між собою та з силовими, температурними, радіаційними, електромагнітними полями.

1.2 Принцип Сен-Венана.

1.1 Загальні методи дослідження суцільних середовищ при взаємодії їх між собою та з силовими, температурними, радіаційними, електромагнітними полями. В МСС на базі методів, що розвинені в теоретичній механіці, розглядаються рухи матеріальних тіл, які заповнюють простір безперервно, нехтуючи їх молекулярною будовою. Разом з цим також вважається неперервними характеристики тіл – такі, як густина, напруження, швидкість та ін. Це виправдовується тим, що лінійні розміри, з якими ми маємо справу в МСС, значно більші за міжмолекулярні відстані. Мінімально можливий об’єм тіла, який дозволяє дослідити його деякі задані властивості, називається фізично малим об’ємом. Дане припущення дає можливість застосування в МСС добре розробленого для неперервних функцій апарату вищої математики. Окрім гіпотези суцільності в МСС приймається гіпотеза про простір і час – всі процеси розглядаються у просторі, в якому визначені відстані між точками, і розгортаються у часі, причому в класичній механіці МСС час тече однаково для всіх спостерігачів, а в релятивістській – простір і час зв’язується в єдиний простір-час.

МСС є розповсюдженням ньютонівської механіки матеріальної точки на випадок неперервного суцільного матеріального середовища, і системи рівнянь, що складені для розв’язання різних задач МСС, включають в себе класичні закони Ньютона, але у формі, яка є специфічною для цієї галузі механіки. Зокрема, фундаментальні фізичні величини ньютонівської механіки маса і сила у рівняннях МСС виражаються в питомій формі, відповідно, густини і – для твердих середовищ – напруження, а для газів і рідин – тиску.

В МСС розробляються методи зведення механічних задач до математичних, тобто до задач про відшукання деяких чисел або числових функцій за допомогою математичних операцій. Крім того, важливою метою механіки суцільних середовищ є встановлення загальних властивостей і законів руху деформованих тіл, і силової взаємодії в цих тілах.

В загальному випадку математичний апарат МСС при розв'язанні будь-якої задачі включає в себе таку систему диференціальних та алгебраїчних рівнянь: *основну систему рівнянь МСС; фізичні рівняння стану*; *геометричні рівняння; початкові та граничні умови.*

В свою чергу *основна система рівнянь МСС* включає такі рівняння: збереження маси, збереження кількості руху і енергії.

Фізичні рівняння стану пов'язують між собою фізичні параметри середовища, наприклад, такі: кількість теплової енергії з градієнтом температури, напруження з деформацією.

Геометричні рівняння пов'язують між собою деформацію або швидкість деформації з переміщеннями або швидкостями переміщень, відповідно.

Початкові умови включають в себе розподіл польових характеристик тіла в початковий момент часу.

Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується.

При цьому дія силових, температурних, радіаційних електромагнітних та інших полів на суцільне середовище враховується за допомогою відповідних рівнянь стану, джерельних членів, або в граничних умовах.

1.2 Принцип Сен-Венана)[11] стосується відмінностей між напруженнями і деформаціями в деякій області в середині пружного тіла, що спричинені двома різними, але статично еквівалентними системами поверхневих сил, які прикладені до певної частини границі. Принцип Сен-Венана стверджує, що в областях, достатньо далеких від місця прикладення навантаження, ці відмінності нехтовно малі. Це припущення часто чинить велику допомогу при розв'язанні практичних задач.

Тема 2 Основні поняття, визначення та гіпотези МСС

2.1 Взаємні залежності між Лагранжевими та Ейлеревими координатами.
2.2 Ортотропні, анізотропні та трансверсально-ізотропні тіла.

[11] Відповідно до принципу Сен-Венана система взаємно урівноважувальних сил, що розподілені на малій частині поверхні деформованого тіла, викликає напруження, які швидко спадають по мірі віддалення від місця прикладення сил. В точках, що віддалені від місця прикладення вказаної вище системи сил на великі відстані (розуміються відстані, більші порівняно з лінійними розмірами тої частини поверхні, по якій розподілені сили), відповідні напруження можна вважати нехтовно малими.

2.3 Зовнішні масові та поверхневі сили. Внутрішні сили (зусилля).

2.1 Взаємні залежності між Лагранжевими та Ейлеревими координатами. Перехід від змінних Лагранжа до змінних Ейлера. Закон руху суцільного середовища має вигляд

$$x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), \qquad (2.1)$$

в якому незалежні змінні ξ^1, ξ^2, ξ^3, t є *змінними Лагранжа*. При розв'язанні рівняння (2.1) відносно ξ^1, ξ^2, ξ^3, отримаємо

$$\xi^i = \xi^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right), \qquad (2.2)$$

тобто перейдемо до змінних Ейлера. При фіксованих x^1, x^2, x^3 (2.2) вказує ті точки $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ суцільного середовища, які в різні моменти часу приходять в дану точку простору. Якщо швидкість

$$v^i = v^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right),$$

прискорення

$$a^i = a^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right),$$

температура

$$T = T\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right)$$

та інші величини задані з точки зору Лагранжа, тобто як функції ξ^1, ξ^2, ξ^3, t, то (2.2) дає можливість знайти швидкість, прискорення, температуру та інші фізичні величини як функції змінних Ейлера x^1, x^2, x^3, t. Таким чином, якщо рух з точки зору Лагранжа відомий і його треба визначити з точки зору Ейлера, то для цього вимагається тільки рівняння закону руху (2.1) відносно ξ^1, ξ^2, ξ^3, яке треба записати у вигляді (2.2); перехід від руху, який задано за Лагранжем, до опису руху за Ейлером зводиться тільки до вирішення неявних функцій.

Перехід від змінних Ейлера до змінних Лагранджа. Навпаки, нехай з точки зору Ейлера задано розподіл швидкості у просторі. Як знайти закон руху, тобто перейти до опису руху за Лагранжем? Візмемо декартову систему координат x, y, z, і нехай в ній відомі:

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t).$$

Компоненти швидкості u, v, w є похідними від відповідних координат x, y, z за часом t при постійних ξ^1, ξ^2, ξ^3, які індивідуалізують точку суцільного середовища. Тому, якщо u, v, w задані як функції змінних Ейлера x, y, z і t, то на співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= w(x, y, z, t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

можна дивитись як на систему трьох звичайних диференціальних рівнянь відносно x, y, z. Розв'язавши систему (2.3), знайдемо x, y, z як функції t і три довільних константи C_1, C_2, C_3, які визначаються за значеннями x, y, z в початковий момент часу t_0 і, відповідно, є параметрами, що індивідуалізують точку суцільного середовища, – змінні Лагранжа. Таким чином, в результаті розв'язання цієї системи диференціальних рівнянь знаходиться закон руху (2.1), за допомогою якого можна перейти від змінних Ейлера до змінних Лагранжа у всіх формулах, що визначають розподіл $\mathbf{v}, \mathbf{a}, T$ і т.д. Отже, перехід від змінних Ейлера до змінних Лагранжа при заданому полі швидкості пов'язаний з інтегруванням звичайних диференціальних рівнянь.

Ясно, що задання руху суцільного середовища з точок зору Лагранжа і Ейлера у механічному відношенні є еквівалентними.

2.2 Ортотропні, анізотропні та трансверсально-ізотропні тіла. *ортотропним* називається матеріал (тіло), який має три взаємно перпендикулярні площини симетрії. Для описання властивостей симетрії такого середовища можна використовувати симетричний тензор 2-го рангу d_{ij}, головні осі якого перпендикулярні площинам симетрії матеріалу. Густина вільної енергії ортотропного тіла описується функцією

$$F = F\left(\varepsilon_{ij}, g_{ij}, d_{ij}, T\right).$$

Анізотропними називаються тіла (середовища), які характеризуються неоднаковістю властивостей середовища (наприклад, фізичних: модуля пружності, коефіцієнта Пуассона, теплопровідності та ін.) по різних напрямках всередині цього середовища. В протилежність анізотропних тіл є ізотропні тіла, що характеризуються однаковістю фізичних властивостей по всіх напрямках в середині тіла.

Для анізотропних тіл закон Гука $\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}$ взагалі містить 81 константу C^{ijkl} – тензор 4-го рангу фізичних констант середовища. Однак внаслідок симетрії напружень (σ^{ij}) і деформацій (ε_{kl}) середовища серед них відрізняються між собою тільки 36 констант. Подальше зменшення кількості незалежних пружних констант до 21 відбувається внаслідок наявності термодинамічних співвідношень)[12]. Якщо ж матеріал має симетричні властивості, то кількість констант меже бути ще меншою. Властивості симетрії можна описати спеціального виду векторами і тензорами.

В прикладних задачах механіки найбільш часто зустрічаються *ортотропне* і *трансверсально-ізотропні* середовища. *Трансверсально-ізотропне* середовище має вісь симетрії нескінченого порядку, тобто таку, що при повороті навколо неї на будь-який кут середовище суміщається саме з собою (за властивостями симетрії воно відноситься к текстурам). Така модель годиться для багатьох шаруватих і волокнистих матеріалів.

Властивості симетрії характеризуються деяким виділеним напрямком $\vec{L} = \{l_i\}$, причому важлива лише лінія дії цього вектора, а обидва протилежні напрями вздовж неї рівноправні. для описання цього типу симетрії можна використовувати симетричний тензор 2-го рангу $d_{ii} = l_i l_i$, де l_i – направляючі косинуси осі симетрії. В декартовій системі координат виконуються рівності

[12] Поряд з внутрішньою енергією в теорії пружності часто застосовується другий термодинамічний потенціал – вільна енергія $F = U - sT$ (де U – внутрішня енергія, s – ентропія, T – температура), яка задана як функція параметрів стану ε_{ij} і T. Тотожність Гібса записана через функцію F має вигляд $dF = \frac{1}{\rho}\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij} = sdT$ і дозволяє отримати іншу форму рівнянь стану $\sigma^{ij} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T, s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}}$.

$$\sum d_{ii} = 1, \quad d_{ij} = 0, \text{ при } i \neq j.$$

2.3 Зовнішні масові та поверхневі сили. Масові (або *об'ємні*) і *поверхневі сили* розділяються на зовнішні і внутрішні. Зовнішні сили діють на масу і поверхню середовища, що розглядається, і прикладені, відповідно, до кожної частинки середовища, з яких воно складається, і до кожного елемента поверхні, яка обмежує середовище. Внутрішні сили представляють собою сили взаємодії між частинками середовища, що зумовлені дією зовнішніх сил. Внутрішні сили є парними.

Поняття зовнішніх та внутрішніх сил відносно. Так, наприклад, якщо ми розглядаємо рух повітря в атмосфері і Землі разом, то сила тяжіння повітря – внутрішня сила. Якщо ж розглядається рух тільки повітря, то сила тяжіння – *зовнішня*. Якщо розглядається рух матеріального тіла і електромагнітного поля, то електромагнітні сили – *внутрішні*; якщо ж розглядається рух тільки матеріального тіла, то поле є зовнішнім по відношенню до нього агентом, і електромагнітні сили – зовнішні.

Масові сили – це сили, що діють на кожний елементарний об'єм середовища і пропорційні масі речовини, що розміщується в цьому об'ємі. Прикладами масових сил є сили тяжіння і сили інерції. Ці сили позначаються через b^i (сила, віднесені до одиниці маси) або p^i (сила, віднесена до одиниці об'єму). Між собою вони зв'язані через густину

$$\rho b^i = p^i.$$

Поверхневі сили – це сили, що діють на елементи поверхні середовища, тобто на границі розділу різних середовищ. Такою границею може бути, наприклад, поверхня твердого тіла або вільна поверхня рідини (границя розділу рідина-газ). Поверхневі сили завжди пропорційні площі поверхні на яку вони діють. До поверхневих сил відносяться: тиск, сили поверхневого натягу, в'язкого тертя. Поверхневі сили позначаються через f^i (сила, віднесена до одиниці площі). Сили контактної взаємодії між тілами також відносяться до типу поверхневих сил.

Тема 3 Введення в тензорний аналіз

3.1 Формули перетворення компонент вектора при переході від основного до взаємного базису і навпаки.
3.2 Залежності між коваріантними і контраваріантними компонентами метричного тензора.

3.3 Симетричність тензорів напружень і деформацій.
3.4 Формули для компонент векторного добутку тензорів на базі тензора Леві-Чівіта.
3.5 Зв'язок між символами Кристофеля 1-го і 2-го родів.
3.6 Тензор градієнта вектора переміщень.
3.7 Тензор жорсткого повороту.
3.8 Тензор малих деформацій.
3.9 Представлення густини енергії деформації в тензорному вигляді.

3.1 Формули перетворення компонент вектора при переході від основного до взаємного базису і навпаки. Використовуючи властивість компонент метричного тензора $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ji}$, які є компонентами розкладу векторів взаємного базису $\mathbf{e}^i$ за векторами основного базису $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_i \quad \text{і} \quad \mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^i, \tag{3.1}$$

неважко записати формули для перетворення компонент вектора при переході від основного до взаємного базису і навпаки.

Формули перетворення компонент вектора $\mathbf{a}$ при переході від основного до взаємного базису і навпаки з використанням (3.1) будуть мати вигляд

$$a^i\mathbf{e}_i = a^i g_{im}\mathbf{e}^m = a_m\mathbf{e}^m \quad \text{і} \quad a_i\mathbf{e}^i = a_i g^{im}\mathbf{e}_m = a^m\mathbf{e}_m, \tag{3.2}$$

де $a_m = a^i g_{im}$; $a^m = a_i g^{im}$.

Доведемо, що формули $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i = a_i\mathbf{e}^i$ є справедливими. Помножимо скалярно вираз $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ на вектори взаємного базису $\mathbf{e}^j$

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j . \tag{3.3}$$

Визначимо значення скалярного добутку $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j$ при різних значеннях індексів:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 1, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 0, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 0. \tag{3.6}$$

Тобто коли індекси збігаються між собою $(i = j)$, то маємо результат =1, а якщо різні – =0. Що можна записати через *символ Кронекера*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j, \qquad \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{3.7}$$

Використовуючи символ Кронекера можна записати, що

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = a^i \delta_i^j = \sum_{i=1}^{3} a^i \delta_i^j = a^1 \delta_1^j + a^2 \delta_2^j + a^3 \delta_3^j. \tag{3.8}$$

Якщо $j = 1$, то $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a} = a^1$.

Якщо $j = 2$, то $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{a} = a^2$.

Якщо $j = 3$, то $\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{a} = a^3$.

Звідки можна записати, що

$$a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i, \text{ а } a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{3.9}$$

3.2 Залежності між коваріантними і контраваріантними компонентами метричного тензора. Залежності між компонентами метричного тензора (коваріантними, контраваріантними і змішаними) виражаються простим співвідношенням

$$g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_i^j \mathbf{e}_j \mathbf{e}^i. \tag{3.10}$$

3.3 Симетричність тензорів напружень і деформацій (див. лекцію №12). Покажемо, що тензор напружень є симетричним, тобто справедлива рівність

$$\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sigma^{ji}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i \,. \tag{3.11}$$

Це витікає з умови рівноваги головних моментів поверхневих і масових сил $\int\limits_S \vec{r} \times (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) dS + \int\limits_V \vec{r} \times \rho \vec{F} dV = 0$, яку без врахування масових сил можна переписати наступним чином

$$\mathbf{e}_1 \times \left(\sigma^{i1}\mathbf{e}_i\right) + \mathbf{e}_2 \times \left(\sigma^{i2}\mathbf{e}_i\right) + \mathbf{e}_3 \times \left(\sigma^{i3}\mathbf{e}_i\right) = 0 \,, \tag{3.12}$$

звідки, розкривши векторний добуток, знаходимо, що

$$\left(\sigma^{23} - \sigma^{32}\right)\mathbf{e}^1 + \left(\sigma^{31} - \sigma^{13}\right)\mathbf{e}^1 + \left(\sigma^{12} - \sigma^{21}\right)\mathbf{e}^3 = 0 \,. \tag{3.13}$$

Останнє рівняння розпадається на три скалярних рівності, із яких витікає, що

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \,, \tag{3.14}$$

тобто тензор напружень є симетричним.

Аналогічним чином можна показати, що тензор деформації є також симетричним

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \varepsilon_{ji}\mathbf{e}^j\mathbf{e}^i \,. \tag{3.15}$$

3.4 Формули для компонент векторного добутку тензорів на базі тензора Леві-Чівіта розглянемо на прикладі добутку тензорів 3-го рангу

$$\begin{gathered} \overset{3}{\hat{C}} \times \overset{3}{\hat{D}} = c^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \times d^{mns}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s = c^{ijk}d^{mns}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\left(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_m\right)\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s = , \\ = \left(c^{ijk}d^{mns}\varepsilon_{kmq}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^q\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s \end{gathered} \tag{3.16}$$

де ε_{kmq} – тензор Леві-Чівіти; $c^{ijk}d^{mns}\varepsilon_{kmq}$ – компоненти векторного добутку 2-х тензорів 3-го рангу.

3.5 Зв'язок між символами Кристофеля 1-го і 2-го родів встановлюється через коваріантні g_{kj} та контраваріантні g^{jk} компоненти метричного тензора

$$\Gamma_{im,j} = \Gamma_{im}^{k} g_{kj}, \tag{3.17}$$

$$\Gamma_{im,j} = \frac{1}{g^{jk}} \Gamma_{im}^{k}, \tag{3.18}$$

де $\Gamma_{im,j}$ і Γ_{im}^{k} – символи Кристофеля 1-го і 2-го родів, відповідно.

3.6 Тензор градієнта вектора переміщень $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i \,(i = 1,2,3)$ або тензор дисторсії (другого рангу)[13] через Ейлереві змінні можна записати таким чином

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \vec{\nabla} \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j, \tag{3.19}$$

де $\left(x^i, (i = 1,2,3)\right)$ – змінні Ейлера або просторові координати частинки середовища.

3.7 Тензор жорсткого повороту являє собою антисиметричну частину тензора градієнта переміщень або тензора дисторсії. При розкладі градієнта переміщень $\dfrac{\partial u_i}{\partial x^j}$ на симетричну і антисиметричну частини маємо

$$\frac{du_i}{dx^j} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) \right] \tag{3.20}$$

---

[13] Визначення *дисторсії*. *Дисторсія механічна* – це зміна взаємного розташування матеріальних точок середовища (тіла), що спричинено зовнішньою дією або внутрішніми силами і яке включає деформацію. Якщо $u_i\left(x^i, (i = 1,2,3)\right)$ – координати вектора переміщень деякої точки $M\left(x^i, (i = 1,2,3)\right)$ в прямокутній прямолінійній системі координат $Ox^1x^2x^3$, то кількісною мірою дисторсії є тензор дисторсії $d_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x^j}$. При $\left|d_{ij}\right| \le 1$ дисторсія називається малою. Симетрична частина тензора малої дисторсії $\left(d_{ij} + d_{ji}\right)/2 = \varepsilon_{ij}$ є тензором малої деформації, а антисиметрична його частина $\left(d_{ij} - d_{ji}\right)/2$ визначає жорсткий поворот околу точки M, що розглядається, як абсолютно твердого тіла.

або у векторній формі

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} = \left[\frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla - \nabla\mathbf{u})\right],$$

де перший член у квадратних дужках є ейлеревим тензором малої лінійної деформації $\hat{\varepsilon}$, а другий – ейлерів тензор жорсткого повороту або лінійного повороту $\hat{\omega}$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right), \text{ або } \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla - \nabla\mathbf{u}). \qquad (3.21)$$

Вираз (3.20) є представленням скінчених деформацій через лінійний тензор деформацій і лінійний вектор повороту.

Формула (3.21) визначає Ейлерів вектор жорсткого повороту

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{kj}, \text{ або } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}, \qquad (3.22)$$

де ε_{ijk} – компоненти тензора Леві-Чівіта.

Тоді відносне переміщення виражається таким чином:

$$du_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j dx_k, \text{ або } d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}. \qquad (3.23)$$

3.8 Тензор малих деформацій. Ейлерів тензор нескінченно малих деформацій (при $\frac{\partial u_i}{\partial x^j} << 1$) являє собою симетричну частину тензора переміщень (3.20)

$$\varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right), \text{ або } \boldsymbol{\varepsilon}^E = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}). \qquad (3.24)$$

Аналогічні вирази для тензорів градієнту переміщень, жорсткого повороту та малих деформацій можна записати через Лагранжеві змінні.

Так, наприклад, Лагранжевий тензор малих деформацій записується як

$$\varepsilon_{ij}^{L}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi^j}+\frac{\partial u_j}{\partial \xi^i}\right),\ \text{або}\ \boldsymbol{\varepsilon}^{L}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\right), \qquad (3.25)$$

де $\left(\xi^i,(i=1,2,3)\right)$ – змінні Лагранжа або матеріальні координати частинки середовища.

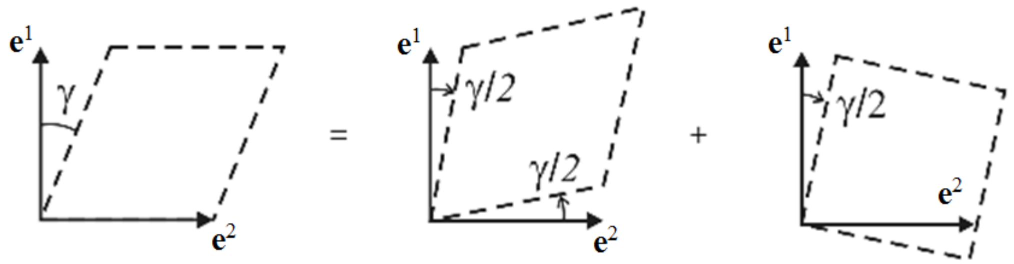
При виконанні умов $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}<<1$ і $\frac{\partial u_i}{\partial \xi^j}<<1$ різниця між матеріальними (Лагранжа) і просторовими (Ейлера) координатами різниця дуже мала і, тому компоненти матеріального градієнта $\frac{\partial u_i}{\partial \xi^j}$ і просторового $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}$ майже збігаються. Отже Ейлерів і Лагранжевий тензори деформацій можна прийняти рівними:

$$\varepsilon_{ij}^{E}=\varepsilon_{ij}^{L}\ \text{або}\ \boldsymbol{\varepsilon}^{E}=\boldsymbol{\varepsilon}^{L}. \qquad (3.26)$$

Графічна інтерпретація деформації дисторсії (рисунок 3.1). Дисторсія являє собою суперпозицію деформації чистого зсуву і жорсткого повороту.

При складанні, у відповідності з рисунком 3.1, тензора малої деформації (чистого зсуву) і тензора повороту тіла, як жорсткого цілого отримуємо тензор дисторсії **d** або градієнта переміщень

$$\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\gamma\left(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2+\mathbf{e}^2\mathbf{e}^1\right)+\frac{1}{2}\gamma\left(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2-\mathbf{e}^2\mathbf{e}^1\right)=\gamma\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2=\mathbf{d}=\nabla\mathbf{u}. \qquad (3.27)$$



дисторсія чистий зсув жорсткий поворот

Рисунок 3.1 – Дисторсія, як суперпозицію деформації чистого зсуву і жорсткого повороту

3.9 Представлення густини енергії деформації в тензорному вигляді. Густина енергії деформації входить в рівняння збереження енергії і, зокрема, механічної енергії (див. лекцію №11, 12) у тензоному вигляді

$$\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \hat{\sigma}\cdot\cdot\hat{\dot{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{3.28}$$

де $\hat{\dot{\varepsilon}}$ – тензор швидкості деформації 2-го рангу, с$^{-1}$; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень 2-го рангу, Па; $(\cdot\cdot)$ або $(:)$ – оператор подвійного або кратного скалярного добутку тензорів.

Тема 4 Теорія напружень у суцільному середовищі

4.1 Принцип перерізу для визначення внутрішніх сил.
4.2 Вектор напружень, середні напруження і напруження в точці тіла.
4.3 Нормальні та дотичні напруження.
4.4 Теплові напруження.
4.5 Визначення напружень на похилій площині.
4.6 Позначення напружень на координатних площинах та правила знаків для них.
4.7 Закономірності зміни напружень при поворотах системи координат.
4.8 Головні напруження. Система рівнянь для визначення головних напружень. Характеристичне рівняння і його властивості. Визначення орієнтації головних площин. Головні інваріанти тензора напружень.
4.9 Визначення максимальних дотичних напружень і орієнтації площин на яких вони діють.

4.1 Принцип перерізу для визначення внутрішніх сил. Для визначення внутрішніх сил широкого застосування набув принцип перерізу суцільного середовища, що досліджується. Суть цього методу полягає в такому. Подумки виділимо в суцільному середовищі довільний об’єм V і розіб’ємо його січенням S на дві частини V_1 і V_2 (рисунок 4.1).

Якщо ми будемо розглядати рух одної з частин V, наприклад, V_1, то при цьому дію на неї другої частини V_2 необхідно замінити розподіленими по V_1 масовими силами і розподіленими по S поверхневими силами. Так введені сили взаємодії будуть зовнішніми для V_1. Якщо ж будемо розглядати рух об’єму V в цілому, то ці сили будуть внутрішніми. Січення

S можна проводити по-різному, і, очевидно, що розподілені на поверхні S поверхневі сили будуть на різних S різними.

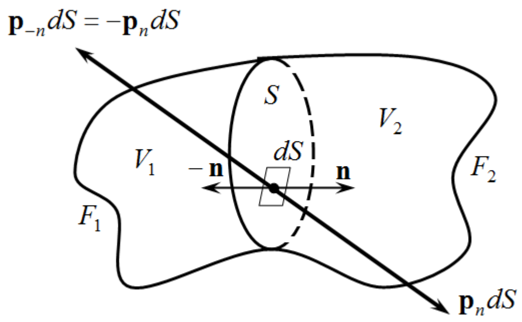


Рисунок 4.1 – Ілюстрація методу перерізу для визначення сили внутрішніх напружень

Візьмемо деяку точку M всередині тіла і розглянемо в цій точці різні площадки dS. Орієнтацію цих площадок будемо визначати нормаллю $\mathbf{n}$ до них, а повну силу, що діє зі сторони частини середовища в об'ємі V_2 на частину середовища в об'ємі V_1 на площадці dS з нормаллю $\mathbf{n}$, позначимо через $d\mathbf{P}$. Далі приймемо, що $d\mathbf{P} = \mathbf{p}_n dS$, де $\mathbf{p}_n$ – кінцевий вектор. Вектор $\mathbf{p}_n$ можна розглядати як поверхневу густину сили взаємодії розділених частин вздовж площадки dS. В загальному випадку $\mathbf{p}_n$ може залежати від орієнтації площадки dS та інших геометричних властивостей. Напрямок нормалі $\mathbf{n}$ будемо вибирати завжди так, щоб вона була зовнішньою по відношенню до тої частини середовища, на яку діє введена сила $\mathbf{p}_n dS$. Так, наприклад, вплив об'єму V_2 на V_1 будемо заміняти розподіленими силами $\mathbf{p}_n dS$, а вплив об'єму V_1 на V_2 – розподіленими силами $\mathbf{p}_{-n} dS$ (рисунок 4.1). Такого роду поверхневі сили можна вводити в будь-якій точці суцільного середовища, вони називаються силами внутрішніх напружень.

Силу внутрішніх напружень $\mathbf{p}_n dS$ в кожній точці суцільного середовища можна розкласти на дві складові – по нормалі $\mathbf{n}$ і дотичній до елементарної площадки dS

$$\mathbf{p}_n dS = \mathbf{p}_{nn}\mathbf{n}dS + \mathbf{p}_{n\tau}\boldsymbol{\tau}dS, \tag{4.1}$$

де $\mathbf{p}_{nn}\mathbf{n}dS$ – нормальна компонента сили внутрішнього напруження, а $\mathbf{p}_{n\tau}\boldsymbol{\tau}dS$ – дотична, яка носить також назву тангенціальної сили або, у випадку рідини, сили внутрішнього тертя (рисунок 4.2).

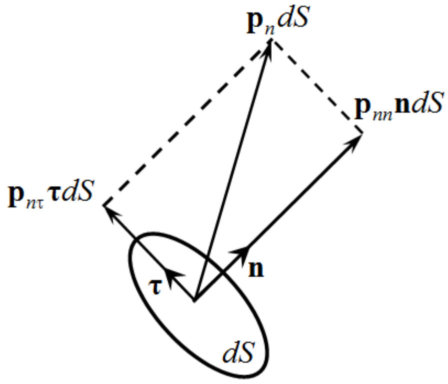


Рисунок 4.2 – Нормальна і дотична складові сили внутрішніх напружень

Поверхневі сили $\mathbf{p}_n dS$ можуть бути, очевидно, і зовнішніми силами, тобто силами, що діють на зовнішній поверхні, що обмежують суцільне середовище.

В кожній точці M суцільного середовища існує нескінченно багато векторів $\mathbf{p}_n$, що відповідають нескінченній кількості площадок dS, які проходять через цю точку. Однак між ними є універсальний, незалежний від окремих властивостей рухомого середовища, зв'язок, який встановлюється рівнянням кількості руху матеріальної точки або системи точок (див. лекцію №11).

4.2 Вектор напружень, середні напруження і напруження в точці тіла (див. лекцію №11). Вектор напружень $\mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i$ на поверхні тіла в околі точки N

$$p^i = \sigma^{ij} n_j \Big|_{dS}, \tag{4.2}$$

де σ^{ij} – компоненти тензора напружень; dS – елементарна площа поверхні тіла в околі деякої точки N, на якій задано зовнішня сила $\mathbf{p}$ або вектор напружень; n_j – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні dS.

Тензор напружень $\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ однозначно визначає напруження в будь-якій точці тіла.

Величина

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma^{ii} \tag{4.3}$$

називається середнім (або гідростатичним) тиском в точці суцільного середовища або середнім напруженням.

4.3 Нормальні та дотичні напруження. Через компоненти вектора напружень на поверхні dS нескладно визначити нормальне зусилля на цій поверхні

$$p_n = \sqrt{\left(p^1\right)^2 + \left(p^2\right)^2 + \left(p^3\right)^2}\,; \tag{4.4}$$

тоді нормальне напруження на поверхні dS визначається як скалярний добуток вектора напружень на вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла dS

$$\sigma_n = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p^i n_i = p^1 n_1 + p^2 n_2 + p^3 n_3\,; \tag{4.5}$$

звідки дотичне напруження на поверхні S буде визначатись по формулі

$$\tau_n = \sqrt{\left(p_n\right)^2 - \left(\sigma_n\right)^2}\,. \tag{4.6}$$

4.4 Теплові напруження в ізотропному матеріалі визначаються співвідношенням

$$\sigma_T^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{ij}^T, \tag{4.7}$$

де $C^{ijkl} = \mu\left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}\right) + \lambda g^{ij} g^{kl}$ – компоненти тензора 4-го рангу пружності ізотропного матеріалу, Па; $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ і $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ коефіцієнти Ламе, Па; E – модуль пружності при розтягу, Па; ν – коефіцієнт Пуасона; $\varepsilon_{ij}^T = \alpha\left(T - T_0\right) g_{ij}$ – компоненти тензора температурних деформацій; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу, K^{-1}; T_0 і T – початкова і поточна температура тіла, відповідно, К; g_{ij} – компоненти метричного тензора.

4.5 Визначення напружень на похилій площині (див. лекцію №, рисунок 11.2). При заданому зусиллі напруження на похилій площині визначаються із співвідношення

$$\sigma^{ij} n_j \Big|_{S_p} = p^i , \tag{4.8}$$

де S_p – площа поверхні тіла, на якій задана зовнішня сила $\mathbf{p}$; n_j – компоненти зовнішньої нормалі до нахиленої площини.

4.6 Позначення напружень на координатних площинах та правила знаків для них. Компоненти напружень на площадках, що перпендикулярні осям $x^i\left(i=1,2,3\right)$, позначаються відповідно до рисунку 4.3: $\sigma^{ij}\left(i,j=1,2,3\right)$. Перший індекс показує, якій осі паралельне напруження, другий при $i \neq j$ – якій осі перпендикулярна площадка.

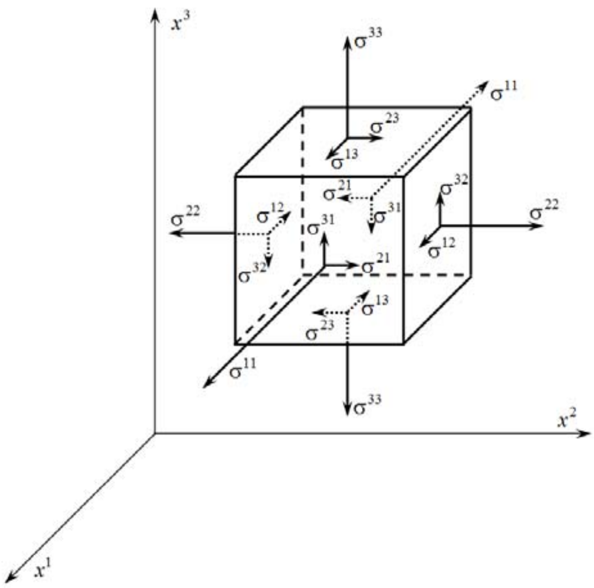


Рисунок 4.3 – Позначення напружень на координатних площинах

Правило знаків для компонентів напружень. Якщо напрямок зовнішньої нормалі (по відношенню до частини тіла, що розглядається) до площадки і паралельної їй осі співпадають, то позитивними напрямками компонентів напружень на цій площадці вважаються напрямки осей координат. Згідно цьому правилу, нормальне напруження позитивне, якщо воно діє на розтяг. На рисунку 4.3 всі компоненти напружень є позитивними.

В силу парності дотичних напружень маємо:

$$\sigma^{12} = \sigma^{21};\ \sigma^{23} = \sigma^{32};\ \sigma^{13} = \sigma^{31}. \tag{4.9}$$

Із (4.9) випливає властивість симетрії тензора напружень

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji}. \tag{4.10}$$

4.7 Закономірності зміни напружень при поворотах системи координат. Розглянемо дві системи декартових координат $Ox^1x^2x^3$ і $Ox^{1'}x^{2'}x^{3'}$ з однаковим початком (рисунок 4.4) і нехай $\alpha_{i'j} = \cos\left(x^{i'}, x^j\right)$ – компоненти ортогональної матриці косинусів, які складають осі координат $Ox^{1'}, Ox^{2'}, Ox^{3'}$ з осями Ox^1, Ox^2, Ox^3.

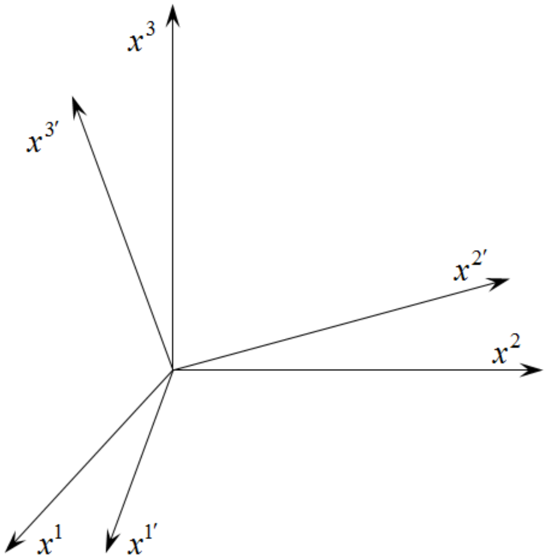


Рисунок 4.4 – Поворот системи координат

Тоді компоненти тензора напружень в системі координат $Ox^{1'}x^{2'}x^{3'}$ можуть бути визначені через компоненти тензора напружень по формулі

$$\sigma^{i'j'} = \alpha_{i'k}\alpha_{j'l}\sigma^{kl}. \tag{4.11}$$

4.8 Головні напруження. Система рівнянь для визначення головних напружень. Характеристичне рівняння і його властивості. Визначення орієнтації головних площин (напрямків). Головні інваріанти тензора напружень. На тілі можна виділити такі площадки, на яких діють тільки нормальні напруження, а дотичні напруження відсутні. Такі площадки називаються *головними*, а нормальні напруження на цих площадках називаються *головними напруженнями*.

Для визначення головних напружень скористаємось системою рівнянь виду

$$\left|\sigma^{ij}-\delta^{ij}\sigma\right|=0 \text{ або } \begin{vmatrix} \sigma^{11}-\sigma & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22}-\sigma & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33}-\sigma \end{vmatrix}=0. \qquad (4.12)$$

Ця система рівнянь має ненульовий розв’язок, якщо її визначник, складений із коефіцієнтів рівнянь, дорівнює нулю.

Після розкриття детермінанту отримаємо кубічне рівняння відносно $\hat{\sigma}$

$$\sigma^3-J_1\sigma^2+J_2\sigma-J_3=0, \qquad (4.13)$$

де

$$\begin{aligned} J_1&=\sigma^{11}+\sigma^{22}+\sigma^{33}; \\ J_2&=\begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{13} \\ \sigma^{31} & \sigma^{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{vmatrix}= \\ &=\sigma^{11}\sigma^{22}+\sigma^{11}\sigma^{33}+\sigma^{22}\sigma^{33}-\left[\left(\sigma^{12}\right)^2+\left(\sigma^{13}\right)^2+\left(\sigma^{23}\right)^2\right]; \\ J_3&=\begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{13} & \sigma^{23} & \sigma^{33} \end{vmatrix}=\sigma^{11}\sigma^{22}\sigma^{33}+2\sigma^{12}\sigma^{23}\sigma^{13}- \\ &-\sigma^{11}\left(\sigma^{23}\right)^2-\sigma^{22}\left(\sigma^{13}\right)^2-\sigma^{33}\left(\sigma^{12}\right)^2. \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.13) називається *характеристичним рівнянням* для тензора напружень $\hat{\sigma}$.

Коефіцієнти (4.14) *характеристичного рівняння* називаються *інваріантами тензора напружень*.

Властивості характеристичного рівняння. Розв’язок кубічного рівняння (4.13) має три дійсних корені $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (головні напруження), які зазвичай упорядковуються таким чином

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 .$$

Визначення орієнтації головних площин (напрямків).

Кожному значенню $\sigma_i (i = 1,2,3)$ відповідає вектор нормалі $\mathbf{n}^i$, який характеризує положення i-ї головної площадки, з компонентами n_1^i, n_2^i, n_3^i. Для знаходження цих компонент достатньо в рівняння підставити знайдене значення σ^i і розв'язати будь-які два із цих рівнянь разом з умовою нормування

$$\left(n_1^k\right)^2 + \left(n_2^k\right)^2 + \left(n_3^k\right)^2 = 1, \quad (k = 1,2,3), \tag{4.15}$$

де $n_1^k \mathbf{e}^1 + n_2^k \mathbf{e}^2 + n_3^k \mathbf{e}^3 = \mathbf{n}^k$ – направляючий вектор в системі координат $\mathbf{e}^n (n = 1,2,3))$; n_1^k, n_2^k, n_3^k – направляючі косинуси одиничного вектора-нормалі $\mathbf{n}^k$ цієї площадки.

Для визначення величин n_m^k (компонент тензора нормалі) використаємо однорідне векторне рівняння виду

$$\left(\hat{\sigma} - \sigma \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{n} = 0 ,$$

яке для кожного k-го вектора $\mathbf{n}^k$ дає три однорідних скалярних рівняння:

$$\begin{aligned} \left(\sigma^{11} - \sigma_k\right) n_1^k + \sigma^{12} n_2^k + \sigma^{13} n_3^k &= 0; \\ \sigma^{21} n_1^k + \left(\sigma^{22} - \sigma_k\right) n_2^k + \sigma^{23} n_3^k &= 0; \\ \sigma^{3.} n_1^k + \sigma^{32} n_2^k + \left(\sigma^{33} - \sigma_k\right) n_3^k &= 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Тут σ_k – головні напруження. Однорідність цих рівнянь і рівність нулю визначника їх матриці свідчить про те, що дані рівняння взаємно залежні.

Розглянемо різні випадки кратності коренів характеристичного рівняння.

а) Випадок трьох різних коренів. Якщо всі три таких кореня різні: $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, то матриця рівнянь (4.16) після перетворення до головних осей тензора напружень і підстановки в неї замість σ_k значення якогось-небудь кореня, наприклад, σ_1, отримає такий вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_1 \end{Vmatrix}.$$

Звідси видно, що ранг матриці дорівнює двом. Тобто, одне із рівнянь (4.16) є наслідком двох інших. Із цих рівнянь можна знайти тільки відношення між трьома невідомими n_1^k, n_2^k, n_3^k для кожного значення k. Тим самим можна визначити напрямки кожного з векторів $\mathbf{n}^k$. Тобто із цього витікає, що кожному головному напруженню відповідає один єдиний напрямок.

б) Випадок двох однакових коренів. Два яких-небудь корені характеристичного рівняння рівні між собою, наприклад, $\sigma_1 = \sigma_2$. Після перетворення матриці рівнянь (4.16) до її головних осей тензора напружень і підстановки в неї кратного кореня $\sigma_1 = \sigma_2$ замість σ_k отримаємо такий її вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_1 \end{Vmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює одиниці. В цьому випадку два рівняння з трьох (4.16) є наслідком третього і, таким чином, для знаходження невідомих n_1^k, n_2^k, n_3^k маємо одне рівняння. Тобто, два з цих невідомих, відповідно, можуть бути вибрані довільно, і тоді третє невідоме знайдеться з третього рівняння.

Оскільки два різних головних напруження взаємно ортогональні, то напрямки, що відповідають кореням σ_1, σ_2 будуть знаходитися в площині, що перпендикулярна до напрямку вектора $\mathbf{n}^k$. Що стосується їх положень на цій площині, то вони будуть довільними; всі напрямки на цій площині будуть головними.

в) Випадок трьох однакових коренів. При наявності трьох однакових коренів характеристичного рівняння відповідна матриця має нульовий ранг і, відповідно, рівняння (4.16) будуть задовольняти будь-яким значенням невідомих n_i^k. В цьому випадку всі напрямки виявляються головними.

Головні напруження мають важливі властивості: порівняно зі всіма іншими площадками на головних площадках нормальні напруження приймають екстремальні значення. Для доказу цієї властивості достатньо дослідити на екстремум нормальне напруження як функцію $\left(n_1^i, n_2^i, n_3^i\right)$ при додатковому обмеженні. Можна показати, що три головні площадки, що відповідають головним напруженням $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, взаємно перпендикулярні або, що те ж саме, вектори $\mathbf{n}^j$ і $\mathbf{n}^k$, які відповідають різним значенням j і k, є ортогональними. Умова ортогональності записується таким чином

$$n_1^j n_1^k + n_2^j n_2^k + n_3^j n_3^k = 0, \quad \left(j \neq k\right). \tag{4.17}$$

Кубічне рівняння (4.13) можна переписати через головні напруження

$$\left(\sigma_1 - \sigma\right)\left(\sigma_2 - \sigma\right)\left(\sigma_3 - \sigma\right) = 0 .$$

Якщо привести останнє рівняння до виду (4.13), то отримаємо такі вирази для інваріантів (4.14) виражені через головні напруження:

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3; \\ J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \tag{4.18}$$

де J_1, J_2, J_3, що виражаються співвідношеннями (4.14) або (4.18), називаються *головними інваріантами тензора напружень* $\hat{\sigma}$.

Термін інваріантність означає незалежність деякої величини від вибору системи координат.

4.9 Визначення максимальних дотичних напружень і орієнтації площин на яких вони діють. В січеннях, що ділять навпіл кути між головними площинами та, які проходять відповідно через головні осі *1,2,3* (рисунок 4.5), дотичні напруження по абсолютній величині дорівнюють

$$\frac{1}{2}\left|\sigma_2 - \sigma_3\right|, \; \frac{1}{2}\left|\sigma_3 - \sigma_1\right|, \; \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|. \tag{4.19}$$

Дотичні напруження в цих січеннях досягають екстремальних значень і називаються головними дотичними напруженнями і визначаються за формулами:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},\ \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2},\ \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{4.20}$$

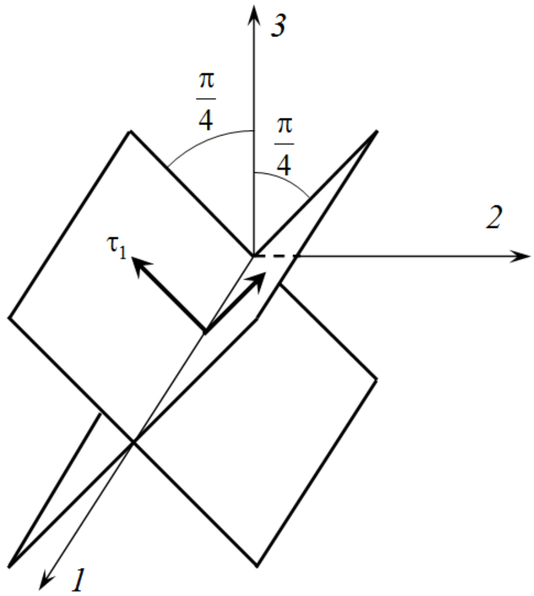


Рисунок 4.5 – Орієнтація площин, на яких діють екстремальні значення дотичних напружень

Зі зміною орієнтації площадки змінюється і величина дотичного напруження τ_n, що діє на цій площадці. Найбільше значення τ_n в даній точці називається *максимальним дотичним напруженням* $\tau_{\max}$. Якщо виконується умова

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \tag{4.21}$$

то

$$\tau_{\max} = -\tau_2. \tag{4.22}$$

Тема 5 Види напруженого стану суцільного середовища

5.1 Інтенсивність напружень та інтенсивність дотичних напружень.
5.2 Октаедричні напруження.
5.3 Розкладення тензора напружень на кульовий тензор та девіатор.
5.4 Приклади напружених станів.
5.5 Круги Мора.

5.6 Плоский, центросиметричний (полярні координати), та осесиметричний напружений стан.
5.7 Диференціальні рівняння статики в декартових координатах.
5.8 Принцип Даламбера в задачах динаміки.
5.9 Диференціальні рівняння руху середовища в Лагранжевих та Ейлеревих координатах.
5.10 Диференціальні рівняння статики та динаміки в циліндричних координатах.

5.1 Інтенсивність напружень та інтенсивність дотичних напружень. Невід'ємну величину, що виражається через другий інваріант девіаторних напружень, називають *інтенсивністю дотичних напружень*

$$I_\tau = +\sqrt{I_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,. \qquad (5.1)$$

Неважко впевнитися, що інтенсивність дотичних напружень можна визначити девіатор напружень $s^{ij}=\sigma^{ij}-\sigma_0\delta_{ij}$, де $\sigma_0=\frac{1}{3}\sigma^{ij}\delta_{ij}$ – середній тиск

$$I_\tau=\sqrt{\frac{1}{2}s^{ij}s^{ij}} \qquad (5.2)$$

Інтенсивністю напружень називається величина, що відповідає приведеному напруженню

$$I_\sigma=\sqrt{3}I=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,. \qquad (5.3)$$

У випадку простого розтягу (стискання) приведене напруження дорівнює

$$I_\sigma=|\sigma_1|, \qquad (5.4)$$

а у випадку простого розтягу (стискання) у напрямку осі x^1

$$I_\sigma = \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}}. \tag{5.5}$$

Інтенсивність дотичних напружень дорівнює нулю тільки у тому випадку, коли напружений стан є станом гідростатичного тиску, тобто визначається кульовим тензором.

Для чистого зсуву маємо, що головні напруження становлять

$$\sigma_1 = \tau,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -\tau, \tag{5.6}$$

де τ – напруження зсуву. Тоді інтенсивність дотичних напружень дорівнює

$$I_\tau = \tau. \tag{5.7}$$

5.2 Октаедричні напруження. Октаедричною)[14] називається площадка, яка утворює рівні кути з головними напрямками напружень (рисунок 5.1).

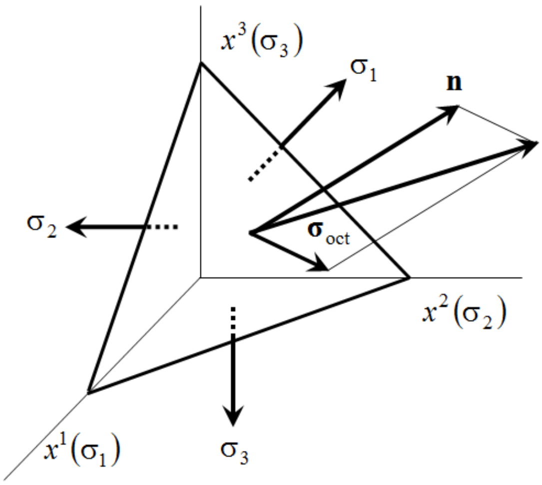


Рисунок 5.1 – До визначення октаедричних напружень

Октаедричні напруження діють на октаедричній площадці, що рівновіддалена від трьох головних площадок. Розрізняють нормальне і дотичне октаедричні напруження. *Нормальне октаедричне* напруження визначається за формулою

[14] Октаедр (грецька – «вісім» і – «основа») – один із п'яти опуклих правильних багатогранників, так званих Платонових тіл. Октаедр має 8 трикутних граней, 12 ребер, 6 вершин, в кожній його вершині сходяться 4 ребра.

$$\sigma_{oct}^{n} = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right). \tag{5.8}$$

Дотичне октаедричне напруження визначається за формулою

$$\sigma_{oct}^{\tau} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2}\ . \tag{5.9}$$

Розглянемо спосіб отримання *дотичного октаедричного* напруження. Нормаль до ектаедричної площадки в головних осях дається виразом

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right). \tag{5.10}$$

Тоді вектор напружень (зусиль) на такій площадці дорівнює

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right)\cdot\left(\sigma_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sigma_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2 + \sigma_3\mathbf{e}_3\right), \end{aligned} \tag{5.11}$$

а його нормальна компонента буде

$$\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{p} = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \sigma_{oct}^{n}. \tag{5.12}$$

Відповідно для дотичної компоненти октаедричних напружень будемо мати

$$\begin{aligned} \sigma_{oct}^{\tau} &= \sqrt{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} - \boldsymbol{\sigma}_n} = \left\{\frac{1}{3}\left[\left(\sigma_1\right)^2 + \left(\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_3\right)^2\right] - \frac{1}{9}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{3}\left\{3\left[\left(\sigma_1\right)^2 + \left(\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_3\right)^2\right] - \left[\left(\sigma_1\right)^2 + \left(\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_3\right)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left[\left(\sigma_1\right)^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \left(\sigma_2\right)^2\right] + \left[\left(\sigma_2\right)^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \left(\sigma_3\right)^2\right] + \left[\left(\sigma_3\right)^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \left(\sigma_1\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

5.3 Розкладення тензора напружень на кульовий тензор та девіатор. Тензор напружень можна розкласти на суму двох тензорів: деавіторного і кульового

$$\hat{\sigma} = \hat{d} + \hat{s}, \tag{5.14}$$

де $\hat{d} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} - \sigma_0 & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} - \sigma_0 & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} - \sigma_0 \end{pmatrix}$ – девіаторна складова тензора напружень $\hat{\sigma}$; $\hat{s} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$ – кульова складова тензора напружень $\hat{\sigma}$.

Девіаторний тензор 2-го рангу $\hat{d}$ характеризує зміну форми тіла, а кульовий тензор $\hat{s}$ – зміну об'єму тіла без зміни його форми.

Прикладами застосування кульового тензору є ідеальна рідина, у якій тензор напружень в кожній точці середовища є кульовим $\sigma^{ij} = -pg^{ij}$, де p – тиск, g^{ij} – контраваріантні компоненти метричного тензора, і тензор теплових деформацій $\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha(T_0 - T)g_{ij}$, де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, T_0, T – початкова і актуальна температура середовища, g_{ij} – коваріантні компоненти метричного тензора.

Особливістю тензора девіаторних напружень є те, що його перший інваріант дорівнює нулю

$$J_1 = \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33} - 3\sigma_0 = 0. \tag{5.15}$$

5.4 Приклади напружених станів.

1. Нехай в деякій системі координат тензор напружень має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

В цьому випадку головні напруження $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ і такий напружений стан називається *гідростатичним*. Гідростатичний напружений стан реалізується в гідростатиці, якщо тиск $p>0$. При повороті системи координат вигляд тензора (5.16) зберігається.

2. Нехай в деякій системі координат тензор напружень має вигляд

$$\hat{\sigma}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

В цьому випадку один із головних напрямків співпадає з віссю Ox^3, якому відповідає головне напруження σ. Два інших головних напруження дорівнюють нулю. Такий напружений стан називається *одновісним*. Одновісний напружений стан наближено реалізується при розтягуванні або стисканні стрижня зусиллями, що направлені вздовж його осі. В цьому випадку максимальне дотичне напруження дорівнює $\sigma_{\tau\max}=\sigma/2$ і досягається на площадках, які складають кути $\pm\pi/4$ з віссю Ox^3 – віссю стрижня.

3. Нехай в деякій системі координат тензор напружень має вигляд

$$\hat{\sigma}=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_\tau & 0 \\ \sigma_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

В цьому випадку головні напруження $\sigma_1=\sigma_\tau$, $\sigma_2=\sigma_\tau$, $\sigma_3=0$. Такий напружений стан називається *чистим зсувом* в площині Ox^1x^2. Головні напрямки складають кути $\pm\pi/4$ з осями Ox^1, Ox^2. Третій головний напрям співпадає з віссю координат Ox^3. Таким чином чистий зсув можна розглядати як суперпозицію одновісного та однакового за модулем розтягування та стискання, що виконуються в двох взаємно перпендикулярних напрямках (рисунок 5.2).

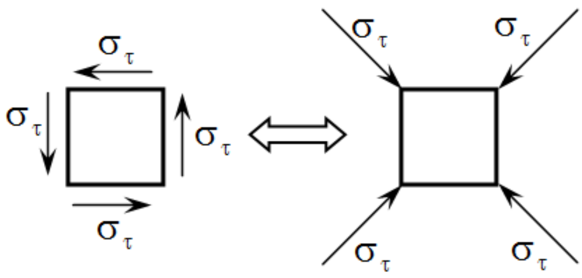


Рисунок 5.2 – Чистий зсув

4. Нехай в деякій системі координат тензор напружень має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & 0 \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Це випадок *плоско-напруженого стану*. Головні напруження σ_1, σ_2 знаходяться як корені квадратного рівняння

$$\begin{vmatrix} \sigma^{11} - \sigma & \sigma^{12} \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0 . \tag{5.20}$$

Третє головне напруження σ_3, а відповідно і третій інваріант J_3, дорівнюють нулю. Зв'язок між компонентами тензора напружень і головними напруженнями встановлюється співвідношеннями

$$\begin{gathered} \sigma^{11} - \sigma^{22} = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha , \\ \sigma^{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha , \end{gathered} \tag{5.21}$$

де α – кут між головним напрямком σ_1 і віссю Ox^1. З вищенаведених формул витікає, що

$$\mathrm{tg} 2\alpha = \frac{2\sigma^{12}}{\sigma^{11} - \sigma^{22}} . \tag{5.22}$$

Плоско-напружений стан наближено реалізується в тонкій пластині, що навантажена на бічних поверхнях зусиллями, які паралельні площині пластини та розподілені симетрично відносно середньої площини. При цьому основи пластини вільні від напружень.

5. Нехай в деякій системі координат тензор напружень має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{rr} & \sigma^{zr} & 0 \\ \sigma^{rz} & \sigma^{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\theta\theta} \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Це випадок *осесиметричного напруженого стану*.

5.5 Круги Мора. Виберемо у якості осей координат $Ox^1x^2x^3$ головні напрямки і покладемо, що головні напруження різні і упорядковані за правилом $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Випишемо три рівності

$$\begin{gathered} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1; \\ \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma_n; \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \sigma_\tau^2, \end{gathered} \tag{5.24}$$

перше із яких означає, що $|\vec{n}| = 1$, друге представляє собою формулу $p_n = \sigma_n = \sigma^{ij} n_i n_j$, яка записана в головних осях, а третє виражає квадрат довжини вектора напружень $\vec{p}$, компоненти якого в головних осях мають вид $(\sigma_1 n_1, \sigma_2 n_2, \sigma_3 n_3)$, а проекції на нормаль $\vec{n}$ і дотичну площину рівні, відповідно, σ_n і σ_τ. Рівності (5.24) можна розглядати як систему рівнянь відносно (n_1^2, n_2^2, n_3^2). Визначник цієї системи має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) \tag{5.25}$$

Δ відмінний від нуля, тому лінійна система (5.24) має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} n_1^2 = \dfrac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}; \\ n_2^2 = \dfrac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}; \\ n_3^2 = \dfrac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{cases} \tag{5.26}$$

З врахуванням умови $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ неважко встановити знаки виразів:

$$\begin{cases} \sigma_\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \ge 0; \\ \sigma_\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \le 0; \\ \sigma_\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \ge 0. \end{cases} \qquad (5.27)$$

Нерівності (5.27) рівносильні наступним:

$$\begin{cases} \sigma_\tau^2 + \left(\sigma_n - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \ge \left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2; \\ \sigma_\tau^2 + \left(\sigma_n - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \le \left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2; \\ \sigma_\tau^2 + \left(\sigma_n - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) \ge \left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2. \end{cases} \qquad (5.28)$$

Разом розглядаючи ці нерівності визначають на площині (σ_n, σ_τ) лунку, що обмежена трьома напівколами (рисунок 5.3)

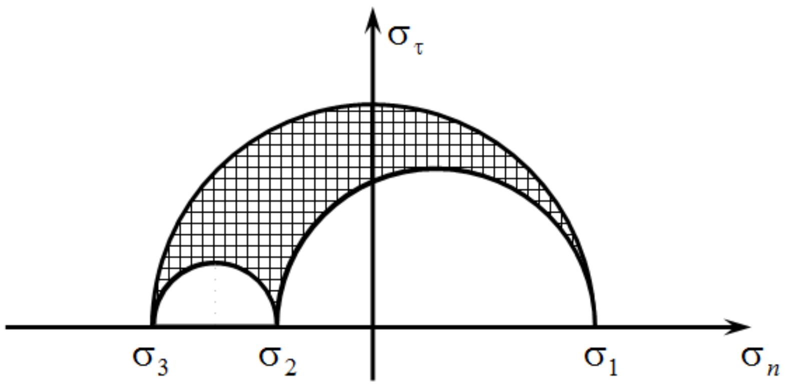


Рисунок 5.3 – Діаграма Мора

Побудована *діаграма Мора* дає наочне зображення про границі зміни величини нормального і дотичного напружень. З неї видно, що величина нормального напруження σ_n задовольняє нерівності $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$ і що максимальне дотичне напруження $\sigma_{\tau\max}$ дорівнює $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$; це напруження виникає на площадках, які складають кути $\pm 45\ ^\circ$ з головними осями Ox^1 та Ox^3. Щоб перевірити останнє твердження, достатньо підставити значення

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},\ \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tag{5.29}$$

в систему рівнянь (5.26). В результаті отримаємо, що

$$n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2};\ n_2^2 = 0. \tag{5.30}$$

Іноді вводять поняття головних дотичних напружень, під якими розуміють екстремальні значення

$$\sigma_{\tau 1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},\ \sigma_{\tau 2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},\ \sigma_{\tau 3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{5.31}$$

5.6 Плоский, центросиметричний (полярні координати), та осесиметричний напружений стан. Плоский напружений стан. Рівняння рівноваги плоского напруженого стану в декартовій системі координат мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2} + \rho F^1 = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2} + \rho F^2 = 0, \end{cases} \tag{5.32}$$

де x^1, x^2 – декартові координати, м; ρ – густина, кг/м^3; $F^i, (i = 1,2)$ – компоненти масової сили, які є функціями тільки x^1, x^2, Н/кг.

Тензор напружень при плоско-напруженому стані має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & 0 \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

Центросиметричний напружений стан (плоский циліндр). Рівняння рівноваги плоскої задачі пружності в полярній системі координат при відсутності масових сил має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma^{r\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}}{r} = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma^{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma^{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\dfrac{\sigma^{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \tag{5.34}$$

де r, θ – полярні координати плоского циліндра (радіус та кут, відповідно).

Тензор напружень для плоского циліндра в полярній системі координат має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{rr} & \sigma^{r\theta} & 0 \\ \sigma^{r\theta} & \sigma^{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

Осесиметричний напружений стан. Система диференціальних рівнянь рівноваги для осесиметричного напруженого стану має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial\sigma^{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}}{r} + \rho F^{r} = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma^{rz}}{\partial z} + \dfrac{\partial\sigma^{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rz}}{r} + \rho F^{z} = 0, \end{cases} \tag{5.36}$$

де r, z, θ – циліндричні координати (радіус, апліката та азимутальний кут, відповідно).

Тензор напружень при осесиметричному напруженому стані має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{rr} & \sigma^{rz} & 0 \\ \sigma^{rz} & \sigma^{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\theta\theta} \end{pmatrix}. \tag{5.37}$$

5.7 Диференціальні рівняння статики в декартових координатах (див. лекції №10, 14). Система диференціальних рівнянь статики (рівноваги) в декартових координатах має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^3} + f^1 = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma^{21}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^3} + f^2 = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma^{31}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\sigma^{32}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\sigma^{33}}{\partial x^3} + f^3 = 0, \end{cases} \tag{5.38}$$

де $\sigma^{ij}, (i, j = 1,2,3)$ – компоненти тензора напружень, Па; $f^i, (i = 1,2,3)$ – компоненти вектора об'ємної сили, Н/м^3; $x^i, (i = 1,2,3)$ – декартові координати, м.

В компактній тензорній формі система диференціальних рівнянь статики (5.38) приймає вигляд

$$\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i = 0. \tag{5.39}$$

5.8 Принцип Даламбера в задачах динаміки (див. лекцію №11). Принцип Даламбера має відношення до динамічних або нестаціонарних задач МСС і формулюється таким чином: всі сили, що діють на тіло, будуть знаходитись у рівновазі, якщо до них додати сили інерції $\mathbf{J}$, які у відповідності до II закону Ньютона дорівнюють

$$\mathbf{J} = m\mathbf{a},$$

де m – маса, кг; $\mathbf{a}$ – вектор прискорення, м/с^2.

З врахуванням принципу Даламбера рівняння руху та рівноваги записується в декартовій системі координат таким чином

$$\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i + J^i = 0, \tag{5.40}$$

де $J^i = -\rho a^i = -\rho \dfrac{d^2 u^i}{dt^2}, (i = 1,2,3)$ – компоненти об'ємної сили інерції, Н/м^3; ρ – густина, кг//м^3; $a^i, (i = 1,2,3)$ – компоненти вектора прискорення, м/с^2; $u^i, (i = 1,2,3)$ – компоненти вектора переміщень, м; t – час, с.

Рівняння (5.40) записане через переміщення набуває вигляду

$$\rho \frac{d^2 u^i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i . \tag{5.41}$$

Рівняння (5.41) називається диференціальним рівнянням динаміки або руху суцільного середовища і є справедливим для тіл будь-якої природи: твердих тіл, рідин та газів.

5.9 Диференціальні рівняння руху середовища в Лагранжевих та Ейлеревих координатах (див. лекцію №10). Диференціальне рівняння рівноваги в Лагранжевих змінних має вигляд

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial \xi^j} + \rho_0 F^i = 0 . \tag{5.42}$$

де p^{ij} – тензор Піоли або несиметричний тензор Лагранжа, Па; ξ^j – компоненти координат Лагранжа, м; ρ_0 – густина в початковий момент часу, кг/м^3; F^i – компоненти вектора масових сил, Н/кг.

Залежність між несиметричним тензором Піоли p^{ij} і симетричним тензором Коші-Ейлера σ^{pj} має вигляд

$$p^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \sigma^{pj} , \tag{5.43}$$

де x^p – компоненти координат Ейлера, м; ρ_0 – густина в актуальний момент часу, кг/м^3.

Диференціальне рівняння рівноваги в Ейлеревих змінних має вигляд (5.39)

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho F^i = 0 . \tag{5.44}$$

В лінійній теорії пружності тензори Піоли і Коші-Ейлера практично не відрізняються між собою

$$p^{ij} \approx \sigma^{ij} .$$

5.10 Диференціальні рівняння статики та динаміки в циліндричних координатах (див. лекції №15, 16). Диференціальні рівняння статики (стаціонарні рівняння рівноваги) в циліндричній системі координат (r, φ, z) приймають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma^{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rr} - \sigma^{\varphi\varphi}}{r} + \rho F^{r} = 0; \\ \dfrac{\partial \sigma^{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma^{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \sigma^{\varphi z}}{\partial z} + \dfrac{2\sigma^{r\varphi}}{r} + \rho F^{\varphi} = 0; \\ \dfrac{\partial \sigma^{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma^{\varphi z}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rz}}{r} + \rho F^{z} = 0, \end{cases} \tag{5.45}$$

де $\sigma^{rr}, \sigma^{\varphi\varphi}, \sigma^{zz}, \sigma^{r\varphi}, \sigma^{rz}, \sigma^{\varphi z}$ – компоненти тензора напружень в циліндричній системі координат, Па; $F^{r}, F^{\varphi}, F^{z}$ – компоненти вектора масових сил в циліндричній системі координат, Н/кг; r, φ, z – циліндричні координати, м; ρ – густина, кг/м^3.

Диференціальні рівняння динаміки (нестаціонарні рівняння руху) в циліндричній системі координат (r, φ, z) мають вигляд

$$\begin{cases} \rho\dfrac{dv^{r}}{dt} = \dfrac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma^{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rr} - \sigma^{\varphi\varphi}}{r} + \rho F^{r} = 0; \\ \rho\dfrac{dv^{\varphi}}{dt} = \dfrac{\partial \sigma^{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma^{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \sigma^{\varphi z}}{\partial z} + \dfrac{2\sigma^{r\varphi}}{r} + \rho F^{\varphi} = 0; \\ \rho\dfrac{dv^{z}}{dt} = \dfrac{\partial \sigma^{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma^{\varphi z}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rz}}{r} + \rho F^{z} = 0, \end{cases} \tag{5.46}$$

де $v^{r}, v^{\varphi}, v^{z}$ – компоненти вектора швидкості деформації в циліндричній системі координат, м/с; t – час, с.

Тема 6 Теорія деформацій суцільного середовища

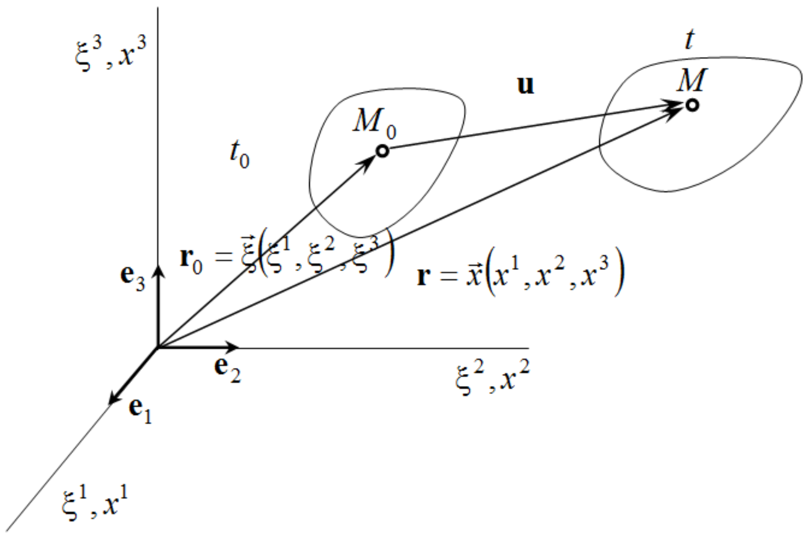
6.1 Початковий та актуальний стан середовища.
6.2 Вектори переміщень та швидкостей.
6.3 Градієнти переміщень та швидкостей.
6.4 Лінійні геометричні рівняння.

6.5 Залежності між лінійними деформаціями, вектором повороту та переміщеннями.
6.6 Головні деформації і головні напрями.
6.7 Геометричні рівняння для скінчених деформацій та швидкості деформацій.
6.8 Логарифмічна міра деформацій.
6.9 Формули перетворення компонент тензорів деформацій та швидкості деформацій.
6.10 Представлення скінчених деформацій через лінійний тензор деформацій і лінійний вектор повороту.

6.1 Початковий та актуальний стан середовища. В *актуальний* момент часу t, що нас завжди цікавить, величини деформації ε залежать не тільки від *актуального стану середовища* (тобто стану середовища в *актуальний* (або поточний) момент часу), але і від того, по відношенню до якого стану ці деформації визначаються. Як вибрати цей стан, якщо ми хочемо отримати певні фізичні характеристики деформації? Очевидно, що він не може бути цілковито довільним, а повинен бути визначений з конкретних фізичних міркувань. В теорії деформацій цей стан прийнято називати як *початковий стан середовища*. Відмітимо, що *початковий стан середовища* не обов’язково повинен здійснюватись. Наприклад, за *початковий стан* можна прийняти такий подумки введений стан, в якому структура кожного елемента суцільного середовища упорядкована і кожний елемент відданий самому собі, тобто на нього не діють ні які сили. Позначимо метрику (метричний тензор) цього стану середовища через $\overset{\circ}{g}_{ij}$, а вектори базису супутньої системи в початковому стані через $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$. Очевидно, що введена таким чином метрика може бути неевклідовою. Реальний же рух суцільного середовища відбувається в евклідовому просторі, і, відповідно, в загальному випадку може не існувати дійсного (реального) переходу суцільного середовища із *початкового стану* в даний *актуальний стан*. Ідеальний «*початковий стан*» можна використовувати для оцінки зміни метрики стану середовища і для введення тензора деформацій $\hat{\varepsilon}$.

Пояснимо сказане на прикладі руху в двовимірному евклідовому просторі, тобто на площині. Розглянемо рух деякої плівки в площині, а за початковий стан виберемо такий, коли до плівки не прикладені ніякі сили. Нехай плівка розтягнута по краях і тільки завдяки цьому розтягу лишається плоскою. Якщо ж вивільнити плівку від розтягувальних зусиль, то вона покоробиться, покриється зморщками і, лишаючись двовимірною, вже не буде плоскою. Встановити взаємно однозначні відповідності між точками плоскої плівки в даний (актуальний) момент і покоробленої, зморщеної (у випадку зняття з неї всіх навантажень) можна, але для цього треба перейти у тривимірний простір; лишаючись в двовимірному просторі, зі зберіганням метрики простору, це зробити неможливо. Тому не розтягнутий покороблений стан плівки по відношенню до руху у двовимірному евклідовому просторі можна розглядати тільки як «початковий стан» (в лапках). Отже, якщо введений за якоюсь фізичною уявою *початковий стан* суцільного середовища може здійснюватися подумки або фактично за допомогою деякого руху, то цей початковий стан можна визначати як *початковий стан* без лапок. Якщо ж введений подумки початковий стан не може бути отриманий безперервним рухом середовища в тому ж самому просторі, то це «початковий стан» (в лапках!).

6.2 Вектори переміщень та швидкостей. Поняття вектора переміщень введемо за допомогою рисунку 6.1 скориставшись система мами відліку Лагранжа і Ейлера



$\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ – система координат Лагранжа; $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ – система координат Ейлера; t_0, t – початковий і актуальний моменти часу, відповідно; M_0, M – положення частинки тіла в початковий і актуальний моменти часу, відповідно; $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}$ – радіус-вектор частинки тіла в початковий і актуальний моменти часу, відповідно; $\mathbf{u}$ – вектор переміщення частики тіла за час $t - t_0$

Рисунок 6.1 – Вектор переміщень

У відповідності з рисунком 6.1 *вектор переміщень* визначається як різниця між поточним (актуальним) та початковим положенням частинки тіла у просторі

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \vec{x} - \vec{\xi}, \tag{6.1}$$

або через компоненти векторів

$$u^i = x^i - \xi^i. \tag{6.2}$$

Маючи співвідношення для вектора переміщень, нескладно записати формулу для визначення швидкості переміщень, яка у диференціальній формі має вигляд

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \tag{6.3}$$

6.3 Градієнти переміщень та швидкостей. Диференціюючи рівність (6.2) за Лагранжевими (матеріальними) та Ейлеревими (просторовими) змінними (див. рисунок 6.1), отримаємо відповідно

$$\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} - \delta^{ij}, \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \delta^{ij} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}, \tag{6.5}$$

де δ^{ij} – символ Кронекера.

Тензор 2-го рангу

$$\hat{J} = \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{6.6}$$

називається матеріальним градієнтом переміщень, а тензор

$$\hat{K} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{6.7}$$

називається просторовим градієнтом переміщень.

Для матеріального та просторового градієнтів швидкості деформації відповідно можна записати, що

$$\nabla \vec{v}_{\xi} = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \ \text{і} \ \nabla \vec{v}_x = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}. \tag{6.8}$$

6.4 Лінійні геометричні рівняння. Лінійні геометричні рівняння отримуються з відповідних рівнянь для скінчених деформацій, основною мірою яких є різниця квадратів $(d\vec{x})^2 - (d\vec{\xi})^2$:

$$\varepsilon_{ij}^{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial u^j}{\partial \xi^i} + \frac{\partial u^k}{\partial \xi^i}\frac{\partial u^k}{\partial \xi^j}\right), \tag{6.9}$$

де ε_{ij}^{L} – компоненти тензора *скінчених деформацій Гріна-Лагранжа*;

$$\varepsilon_{ij}^{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\frac{\partial u^k}{\partial x^j}\right), \tag{6.10}$$

де ε_{ij}^{E} – компоненти тензора *скінчених деформацій Альмансі-Ейлера*.

Одержання лінійних геометричних рівнянь базується на так званій *теорії малих деформацій,* основною умовою якої є вимога малості градієнтів переміщень по відношенню до одиниці.

Якщо всі компоненти градієнта переміщень $\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} << 1$, то їх добутки в формулі (6.9) нехтовно малі і ними можна знехтувати. В результаті отримуємо *Лагранжевий тензор нескінченно малих деформацій* виду

$$\varepsilon_{ij}^{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial u^j}{\partial \xi^i}\right). \tag{6.11}$$

Аналогічно, якщо $\frac{\partial u^i}{\partial x^j} << 1$, то в (6.10) добутком градієнтів переміщень також можна знехтувати. В результаті отримуємо *Ейлеревий тензор нескінченно малих деформацій* виду

$$\varepsilon_{ij}^{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right). \qquad (6.12)$$

Таким чином, якщо переміщення та їх градієнти є достатньо малі величини, то

$$\varepsilon_{ij}^{L} = \varepsilon_{ij}^{E}. \qquad (6.13)$$

Тобто, Лагранжевий і Ейлеревий тензор нескінченно малих деформацій є рівними між собою.

Вирази (6.12), (6.13) називаються лінійними геометричними рівняннями.

6.5 Залежності між лінійними деформаціями, вектором повороту та переміщеннями. Скористаємося властивістю тензорів 2-го рангу, яка полягає в тому, що кожний діадик можна представити (або розкласти) у вигляді суми симетричного і антисиметричного діадиків. При розкладі градієнта переміщень на симетричну і антисиметричну частини отримуємо

$$\frac{du^i}{dx^j} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right)\right]. \qquad (6.14)$$

Перший член у квадратних дужках (6.14) є Ейлеревим тензором малої лінійної деформації $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{E}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right), \qquad (6.15)$$

а другий – Ейлерів тензор жорсткого повороту або лінійного повороту $\hat{\omega}$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right). \qquad (6.16)$$

Вираз (6.14) є залежністю (або представленням) скінчених деформацій (градієнта переміщень) через лінійний тензор деформацій і лінійний вектор повороту.

6.6 Головні деформації і головні напрями. Лагранжевий і Ейлеревий тензори лінійних деформацій є симетричними декартовими тензорами 2-го рангу, і тому визначення їх головних напрямів і головних значень (головних деформацій) ведеться стандартним методом. З фізичної точки зору *головний напрям* тензора деформацій – це такий, для якого орієнтація елементу в даній точці не змінюється при чистій деформації. *Головне значення деформації* є просто відносне переміщення на одиницю довжини (коефіцієнт відносного подовження) вздовж головного напряму.

Так, головні значення Лагранжевого тензора нескінченно малих деформацій визначаються як корені кубічного рівняння

$$\left|\varepsilon_{ij}^{L} - \delta_{ij}\varepsilon^{L}\right| = 0 \text{ або } \left(\varepsilon^{L}\right)^{3} - I_{1}^{L}\left(\varepsilon^{L}\right)^{2} + I_{2}^{L}\varepsilon^{L} - I_{3}^{L} = 0\,. \tag{6.17}$$

Це рівняння має три дійсних корені $\varepsilon_1^L, \varepsilon_2^L, \varepsilon_3^L$. Направляючі косинуси n_i головних напрямів визначаються з розв'язку системи рівнянь

$$\left(\varepsilon_{ij}^{L} - \delta_{ij}\varepsilon^{L}\right)n_i = 0\,. \tag{6.18}$$

Коефіцієнти характеристичного рівняння є відповідно першим, другим і третім інваріантами Лагранжевого тензора нескінченно малих деформацій:

$$I_1^L = \varepsilon_{ii}^L,\ I_2^L = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ii}^L\varepsilon_{jj}^L - \varepsilon_{ij}^L\varepsilon_{ij}^L\right),\ I_3^L = \left|\varepsilon_{ij}^L\right|. \tag{6.19}$$

При малих деформаціях коефіцієнт об'ємного розширення при Лагранжевому опису середовища дорівнює I_1^L

$$D_0 = \frac{\Delta V_0}{V_0} = I_1^L\,. \tag{6.20}$$

Для Ейлеревого тензора деформацій інваріанти виражаються через головні деформації таким чином:

$$\begin{gathered} I_1^E = \varepsilon_1^E + \varepsilon_2^E + \varepsilon_3^E\,, \\ I_2^E = \varepsilon_1^L\varepsilon_2^L + \varepsilon_2^L\varepsilon_3^L + \varepsilon_3^L\varepsilon_1^L\,, \\ I_3^E = \varepsilon_1^E\varepsilon_2^E\varepsilon_3^E\,. \end{gathered} \tag{6.21}$$

При малих деформаціях коефіцієнт об'ємного розширення при Ейлеревому опису середовища дорівнює I_1^E

$$D = \frac{\Delta V}{V} = I_1^E \,. \tag{6.22}$$

6.7 Геометричні рівняння для скінчених деформацій та швидкості деформацій. Поки деформація мала її визначення не залежить від того, відносити її до початкової або до кінцевої. Дійсно, нехай відрізок спочатку мав довжину L_0, далі його довжина стала L_1. Звичайне визначення відносної деформації є таким

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}\,.$$

Обчислимо тепер деформацію, що віднесена до кінцевої довжини зразка

$$\varepsilon' = \frac{\Delta L}{L_1}\,.$$

Але $L_1 = L_0(1+\varepsilon)$, відповідно,

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon^2 + \ldots$$

Тобто, різниця між ε' і ε є малою величино другого порядку, і нею можна знехтувати, якщо $\varepsilon << 1$. Для великих значень деформацій не байдуже, до якої саме довжини їх відносити.

Представимо собі процес подовження відрізка, який має початкову довжину L_0, як послідовність етапів деформування, на кожному з яких довжина отримує прирощення dL. Відносне подовження на кожному етапі будемо відносити до тої довжини, яку мав відрізок на початку відповідного етапу

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{dL}{L}\,.$$

Приймемо за міру повного подовження суму нескінченно малих відносних подовжень $d\bar{\varepsilon}$ при зміні довжини від L_0 до L, а саме

$$\bar{\varepsilon} = \int\limits_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\frac{L}{L_0}. \tag{6.23}$$

Величина $\bar{\varepsilon}$ називається логарифмічним відносним подовженням або *логарифмічною деформацією (тензором Генки)*. Вона зручна для описання скінченої деформації за двома причинами:

1. Представимо собі, що деформація є ступінчастою. До початку ступеня k довжина зразка була L_{k-1}, вона далі збільшується до L_k. Відповідна логарифмічна деформація дорівнює

$$\bar{\varepsilon}_k = \ln\frac{L_k}{L_{k-1}}.$$

   Сумарна деформація після n ступенів дорівнює

$$\bar{\varepsilon} = \ln\frac{L_n}{L_0} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \ldots + \bar{\varepsilon}_n.$$

2. Швидкість деформації η представляє собою відношення швидкості абсолютного подовження до довжини. Поки деформація мала, то можна вважати, що $\dot{\varepsilon} = \eta$, але для скінчених деформацій це невірно. Дійсно, за визначенням $\eta = \dot{L}/L$, тоді як $\dot{\varepsilon} = \dot{L}/L_0$. Але $\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{L}/L$, таким чином, швидкість деформації дорівнює похідній від логарифмічної деформації за часом.

Деформація елементарного паралелепіпеда, ребра якого направлені за головними осями тензора напружень, визначається завданням трьох подовжень: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Умова нестисливості $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ справедлива лише для малих деформацій. Позначимо ребра паралелепіпеда через a, b, c; в початковому стані вони рівні a_0, b_0, c_0. Введемо головні логарифмічні деформації:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \ln\frac{a}{a_0},\ \bar{\varepsilon}_2 = \ln\frac{b}{b_0},\ \bar{\varepsilon}_3 = \ln\frac{c}{c_0}.$$

Сума цих деформацій

$$\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = \ln\frac{abc}{a_0 b_0 c_0} = \ln\frac{V}{V_0}.$$

Тут V, V_0 – актуальний та початковий об’єм паралелепіпеда, відповідно. Таким чином, умова нестисливості для логарифмічних деформацій така ж сама, як для звичайних малих деформацій, але є точною.

Питання про вибір міри деформації для скінчених деформацій є скоріше питанням зручності, оскільки звичайна деформація і логарифмічна деформація зв’язані між собою однозначною залежністю. Для матеріалів з великими пружними деформаціями, наприклад, каучуку, за міру деформації часто приймають так звану кратність λ, тобто відношення нової довжини до початкової

$$\lambda = 1 + \varepsilon.$$

Рівняння (6.9) є рівняннями для *скінчених деформацій Гріна-Лагранжа*, а рівняння (6.10) є рівняннями для *скінчених деформацій Альмансі-Ейлера.*

6.8 Логарифмічна міра деформацій. В прикладних задачах механіки твердого тіла широке розповсюдження отримала логарифмічна міра деформації – тензор Генки.

У якості деформації можна розглядати звичайну (технічну) відносну деформацію, яка визначається за формулою у лінійному варіанті

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0},$$

де L – поточна (актуальна) довжина зразка; L_0 – початкова довжина зразка.

За деформацію також можна взяти і натуральну (*логарифмічну*) відносну деформацію

$$\ln\frac{L}{L_0} = \ln\frac{L_0 + L - L_0}{L_0} \ln\left(1 + \frac{L - L_0}{L_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon).$$

Два тензора Генки у відліковій та актуальній конфігураціях мають однакові головні значення – натуральні логарифми відношення довжин матеріальних волокон після і до деформації.

6.9 Формули перетворення компонент тензорів деформацій та швидкості деформацій. Компоненти тензорі деформацій ε_{ij} та швидкості деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$ при зміні координатної системи перетворюється як тензори у відповідності до формул (тобто є інваріантними відносно систем координат)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{m'n'} c_i^{m'} c_j^{n'},$$
$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{m'n'} c_i^{m'} c_j^{n'},$$

де $c_i^{m'} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{m'}$, $c_j^{n'} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^{n'}$ – компоненти тензора перетворення координат.

6.10 Представлення скінчених деформацій через лінійний тензор деформацій і лінійний вектор повороту. (див. формулу (6.14))

Тема 7 Фізичні рівняння однорідного середовища

7.1 Пружні, пружно спадкові тверді деформівні тіла.
7.2 Закони Гука, Генки, Синьорині.
7.3 Пружно-нелінійні, пружно-пластичні тверді тіла.
7.4 Енергія пружної деформації.
7.5 Повна потенціальна енергія тіла.
7.6 Деформаційна теорія пластичності.
7.7 Теорія малих пружно-пластичних деформацій.
7.8 Теорія пластичної течії.
7.9 Повзучість твердих тіл.
7.10 Фізичні рівняння для в'язких стисливих рідин. Закон Нав’є-Стокса.

7.1 Пружні, пружно спадкові тверді деформівні тіла. *Пружним твердим тілом* називається тіло, яке після зняття діючого на нього навантаження повертається у вихідний стан. Пружне тіло не отримує залишкових деформацій. *Пружністю* називається властивість тіла, яка виражається в однозначній залежності між силами, що діють на тіло, та його деформаціями.

Пружно-спадковим тілом називається таке тіло, в якому до миттєвої деформації, характерної для тіл, що підпорядковані закону Гука, додається пружна деформація, успадкована від всіх минулих механічних навантажень. Спадкова пружність властива майже всім полімерам у визначеному інтервалі температур (для кожного матеріалу свого); при цих температурах полімер знаходиться у так званому високоеластичному стані.

7.2 Закони Гука, Генки, Синьорині. Закон Гука справедливий для пружно-лінійних тіл, Генки – для пружно-пластичних тіл, а Синьорині – для нелінійних гіпереластичних тіл.

Закон Гука. Закон Гука встановлює зв'язок між лінійними деформаціями і напруженнями і для ізотропного тіла в узагальненому вигляді записується так

$$\sigma_{ij} = \left[\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\varepsilon_{kl}, \tag{7.1}$$

де μ, λ – коефіцієнти Ламе 1-го і 2-го родів, відповідно, Па; δ – символ Кронекера.

Рівняння (7.1) також можна переписати у більш компактному вигляді

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \tag{7.2}$$

або у векторній формі

$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{\varepsilon} + \lambda\mathbf{I}\hat{\varepsilon}, \tag{7.3}$$

де $\mathbf{I}$ – одиничний тензор.

Закон Гука записаний через технічні пружні константи має вид

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \tag{7.4}$$

де $\mu \equiv G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $E = \dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ – модуль пружності при розтягу, Па; $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ – коефіцієнт Пуассона; G – модуль зсуву, Па.

Закон Генки. Закон Генки базується на гіпотезі пропорційності компонент девіатора напружень компонентам девіатора деформацій (тобто на теорії малих пружно-пластичних деформацій).

Зворотні залежності закону Генки між компонентами девіатора напружень і компонентами девіатора деформацій записуються як

$$\left(\sigma^{ij}-\delta_{ij}\sigma_0\right)=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_0\right), \tag{7.5}$$

де $\sigma_0=\frac{\sigma_{ii}}{3}$, $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon_{ii}}{3}$ – середні напруження і деформація; σ_i, ε_i – інтенсивність напружень і деформацій.

Інтенсивність напружень пропорційна окстаедричним напруженням зсуву і виражається через головні напруження

$$\sigma_i=\frac{3}{\sqrt{2}}\sigma_{\text{oct}}^{\tau}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}\,. \tag{7.6}$$

Інтенсивність деформації пропорційна октадричному зсуву і виражається через головні деформації

$$\varepsilon_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\text{oct}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)^2+\left(\varepsilon_3-\varepsilon_1\right)}\,. \tag{7.7}$$

Закон Синьорині. Пружну поведінку ізотропного середовища при великих деформаціях можна описати спрощеним квазілінійним законом Синьорині, який полягає в заміні в законі Гука лінійного тензора деформації на тензор скінченої деформації – на тензор Альмансі ε_{ij}^{A}

$$\hat{\sigma}=\left[\lambda I_1\left(\varepsilon_{ij}^{A}\right)+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)I_1^2\left(\varepsilon_{ij}^{A}\right)\right]g_{ij}+2\left[\mu-(\lambda+\mu)I_1\left(\varepsilon_{ij}^{A}\right)\right]\varepsilon_{ij}^{A}, \tag{7.8}$$

де $\hat{\sigma}$ – тензор напружень Коші; λ,μ – коефіцієнти Ламе; $I_1\left(\varepsilon_{ij}^{A}\right)$ – перший інваріант тензора деформацій Альмансі; g_{ij} – компоненти метричного тензора; $\varepsilon_{ij}^{A}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}-\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\frac{\partial u^k}{\partial x^j}\right)$ – тензор деформації Альмансі.

Закон Синьорині є загальним і єдино правильним представленням співвідношення, яке визначає квадратичну залежність компонент тензора напружень від компонент деформації у гіперпружному тілі.

7.3 Пружно-нелінійні, пружно-пластичні тверді тіла. *Нелінійно-пружним тілом* називається таке тіло, у якого напруження і деформації зв'язані нелінійними залежностями, наприклад, між головними напруженнями та головними деформаціями:

$$\sigma_1 = \varphi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$
$$\sigma_2 = \varphi_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$
$$\sigma_3 = \varphi_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Однак функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ не можуть бути цілком довільними. Властивість пружності означає, що енергія деформації тіла в будь-якому його стані визначається тільки величинами деформації, що відповідають цьому стану, і не залежить від того, яким способом відбувалося деформування. Позначимо пружну енергію на одиницю об'єму через a. Внаслідок вищеописаного це є функція від $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$a = a(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Представимо собі, що деформація збільшилася, за рахунок виникнення прирощення $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$. Тоді для прирощення пружної енергії можна записати

$$da = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_2} d\varepsilon_2 + \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_3} d\varepsilon_3. \tag{7.9}$$

З іншого боку, $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ – це подовження ребер одиничного куба, на гранях якого діють напруження (сили) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, відповідно, da представляє собою роботу цих сил

$$da = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3. \tag{7.10}$$

Зі співставлення (7.9) і (7.10) витікає, що:

$$\sigma_1 = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_1},\ \sigma_2 = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_2},\ \sigma_3 = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_3}. \qquad (7.11)$$

Таким чином, функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ повинні бути похідними від однієї і тієї ж функції a по $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Подальші обмеження будуть витікати із того, що для ізотропного матеріалу енергія повинна виражатися симетричним чином через компоненти деформації.

Пружно-пластичні тіла одночасно характеризуються як пружними, так і пластичними властивостями. Властивість *пластичності* в противагу властивості *пружності* полягає в тому, що тіла отримують деформації, які залежать не тільки від скінчених значень діючих на них сил, але і від порядку їх прикладення. Зокрема, якщо пластичне тіло було навантажено дією сил, то після зняття їх воно в початковий стан не повертається, спричинені силами деформації зберігаються, повністю або частково, і після закінчення дії цих сил.

Властивості пружності і пластичності є не абсолютними, а відносними. Наприклад, стальна пружина, яка випрямляється повністю, якщо вона деформується під дією невеликої сили, під дією великої сили отримує таку деформацію, яка вже повністю не відновлюється. Значить, для сталі малі деформації є пружними, а великі – пластичними. В той же час всяке пластичне тіло відновлює деяку, нехай невелику, частину своєї деформації.

7.4 Енергія пружної деформації. Компоненти тензора напружень можна отримати диференціюючи вирази для внутрішньої енергії U та вільної енергії F тіла, відповідно, при постійній ентропії S і температурі T

$$\sigma^{ik} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_T, \qquad (7.12)$$

де $dU = TdS + \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik}$ – внутрішня енергія; $dF = SdT + \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik}$ – вільна енергія.

Розкладаючи функцію вільної енергії за степенями ε_{ik} з точністю до членів другого порядку отримуємо вираз для F деформованого ізотропного тіла

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{ii}^2 + \mu\varepsilon_{ik}^2, \qquad (7.13)$$

де F_0 – вільна енергія недеформованого тіла; λ, μ – коефіцієнти Ламе.

Зміна об'єму при деформації тіла визначається сумою ε_{ii}. Якщо ця сума дорівнює нулю, то при деформуванні об'єм даного тіла лишається незмінним, а змінюється тільки його форма. Такі деформації без зміни об'єму називаються зсувом. Зворотним випадком є деформація зі зміною об'єму, але без зміни форми. Така деформація називається всебічним стисканням.

Деформацію тіла можна представити у вигляді суми деформацій чистого зсуву та всебічного стискання

$$\varepsilon_{ik} = \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) + \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,3}. \qquad (7.14)$$

Для загального виразу вільної енергії деформованого ізотропного тіла можна записати замість (7.13) вираз, скориставшись членом у дужках (7.14)

$$F = \mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right)^2 + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2, \quad i,k = \overline{1,3}, \qquad (7.15)$$

де $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ і μ – відповідно модуль всебічного (об'ємного) стискання і модуль зсуву, ($K > 0, \mu > 0$), або через коефіцієнт Пуассона v та модуль пружності E

$$K = \frac{1 - 2\nu}{E}.$$

7.5 Повна потенціальна енергія тіла (див. лекцію №13). Рівняння для повної внутрішньої потенціальної енергії тіла отримується з рівняння для повної енергії шляхом віднімання від нього рівняння для кінетичної енергії $w = \rho\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV = \int_V \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} dV + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS\,, \tag{7.16}$$

де ε – внутрішня потенціальна енергія – це енергія, яку має середовище і, яка може бути звільнена в результаті фізичних або хімічних перетворень; t – час; ρ – густина; dV – елементарний об’єм; $\hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}}$ – дисипативна функція механічної енергії; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\hat{\dot{\varepsilon}}$ – швидкість деформації; q_v – об’ємне джерело теплоти; q_s – густина теплота, що надходить через поверхню тіла.

Інтегральне рівняння (7.16) стверджує, що швидкість зміни внутрішньої потенціальної енергії середовища $\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV$ дорівнює потужності напружень $\int_V \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} dV$ в ньому плюс притоку теплоти $\int_V q_v dV + \int_S q_s dS$ за рахунок об’ємних і поверхневих джерел немеханічної природи.

7.6 Деформаційна теорія пластичності. При вивченні пластичних деформацій існує так звана деформаційна теорія Генки, в якій передбачається залежність між напруженнями і повними деформаціями. Ці співвідношення мають вид

$$\varepsilon_{ij} = \left(\varphi + \frac{1}{2G}\right) s_{ij}\,, \tag{7.17}$$

де $s_{ij} = \sigma^{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$ – девіатор напружень, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву,

$$\varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu)\frac{\sigma_{ii}}{E}.$$

Параметр Генки φ можна виразити через еквівалентні напруження і деформацію

$$\varphi = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^{p}_{\mathbf{ekv}}}{\sigma_{\mathbf{ekv}}},$$

де $\varepsilon^p_{\mathbf{ekv}} = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon^p_{ij}\varepsilon^p_{ij}}$ і таким чином,

$$\varepsilon^p_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^p_{\mathbf{ekv}}}{\sigma_{\mathbf{ekv}}} s_{ij}\,.$$

Тут $\sigma_{\mathbf{ekv}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$ – еквівалентне напруження, виражене через головні напруження або скорочено його можна записати

$$\sigma_{\mathbf{ekv}} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}\,.$$

7.7 Теорія малих пружно-пластичних деформацій або інша трактовка теорії малих пружно-пластичних деформацій Генки. (Деформаційна теорія пластичності Генки, 1924 р.) Запропонована Генки теорія малих пружно-пластичних деформацій використовує скінченні залежності між компонентами напружень і компонентами деформацій. Дана теорія базується на гіпотезі пропорційності компонент девіатора деформацій компонентам девіатора напружень

$$\left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0\right) = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma^{ij} - \delta_{ij}\sigma_0\right), \tag{7.18}$$

де $\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3}$, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ii}}{3}$ – середні напруження і деформація; σ_i, ε_i – інтенсивність напружень і деформацій.

Інтенсивність напружень пропорційна окстаедричним напруженням зсуву і виражається через головні напруження

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\sigma^{\tau}_{\text{oct}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\,.$$

Інтенсивність деформації пропорційна октадричному зсуву і виражається через головні деформації

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}\,.$$

Зворотні залежності між компонентами девіатора напружень і компонентами девіатора деформацій записуються як

$$\left(\sigma^{ij}-\delta_{ij}\sigma_0\right)=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_0\right). \qquad (7.19)$$

7.8 Теорія пластичної течії. Загальні положення теорії пластичної течії. Процес пластичної деформації є незворотним, більша частина роботи деформації переходить в теплоту. Напруження в кінцевому стані залежать від шляху деформування. У зв’язку з цим рівняння, що описують пластичну деформацію, в принципі не можуть бути кінцевими співвідношеннями, що зв’язують компоненти напруження і деформації (аналогічно закону Гука), а повинні бути диференціальними (і притому не інтегрованими) залежностями.

Рівняння теорії пластичної течії встановлюють зв'язок між нескінченно малими прирощеннями деформацій і напружень, самими напруженнями і деякими параметрами пластичного стану.

Розглянемо вихідні положення цієї теорії.

1) *Тіло ізотропне*.
2) *Відносна зміна об’єму мала і є пружною деформацією, що пропорційна середньому тиску*:

$$\varepsilon = 3K\sigma\,,$$

або

$$d\varepsilon = 3Kd\sigma\,. \qquad (7.20)$$

3) Повні прирощення складових деформації $d\varepsilon_{ij}$ *складаються із прирощень складових пружної деформації* $d\varepsilon_{ij}^{e}$ *і пластичної деформації* $d\varepsilon_{ij}^{p}$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}\,. \qquad (7.21)$$

Прирощення складових пружної деформації зв’язані з прирощеннями складових напружень законом Гука

$$d\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2G}\left(d\sigma^{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\delta_{ij}d\sigma^{ij} \right). \tag{7.22}$$

4) *Девіатор напруження* s_{ij} *і девіатор прирощення пластичної деформації* s_{ij}^{p} *пропорційні, тобто*

$$s_{ij}^{p} = s_{ij}d\lambda . \tag{7.23}$$

де $d\lambda$ – деякий нескінченно малий скалярний множник. Це положення узагальнює результати дослідів зі складного навантаження, в яких напрямки головних осей і співвідношення головних напружень змінювалися. Згідно експериментам прирощення складових пластичної деформації (швидкості пластичної деформації) пропорційні напруженням в даний момент часу. Іншими словами, напружений стан визначає миттєве прирощення компонент пластичної деформації.

Із (7.23) витікають співвідношення *Прандтля-Рейса*

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = s_{ij}d\lambda . \tag{7.24}$$

Для визначення $d\lambda$ можна скористатися співвідношенням

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_{\mathrm{ekv}}^{p}}{\sigma_{\mathrm{ekv}}}, \tag{7.25}$$

де $d\varepsilon_{\mathbf{ekv}}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3}d\varepsilon_{ij}^{p}d\varepsilon_{ij}^{p}}$, $\sigma_{\mathbf{ekv}} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$.

Робота на пластичних деформаціях. Гіпотези зміцнення. Швидкість, з якою напруження здійснюють роботу на деформаціях, або так звану потужність напружень, визначається як $\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$. Отже, $d\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}dt$, тому можна ввести прирощення роботи в одиниці об’єму

$$dW = \sigma^{ij}d\varepsilon_{ij}, \tag{7.26}$$

Застосовуючи розкладання (7.21), роботу (7.26) теж можна представити сумою

$$dW = \sigma^{ij}\left(d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}\right) = dW^{e} + dW^{p}. \qquad (7.27)$$

Для практично нестисливого матеріалу *прирощення роботи на пластичних деформаціях* буде дорівнювати

$$dW^{p} = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}^{p} = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}. \qquad (7.28)$$

Якщо ж до того цей матеріал підпорядковується рівнянням Прандтля-Рейса (7.24), то прирощення роботи на пластичних деформаціях представляється виразом

$$dW^{p} = \sigma_{\text{ekv}} d\varepsilon_{ij}^{p}, \qquad (7.29)$$

Із всіх гіпотез, що запропоновані для обчислення миттєвих пластичних напружень при пластичному деформуванні матеріалу з ізотропним зміцненням, найбільше розповсюдження отримали дві: енергетична і деформаційна. *Енергетична гіпотеза* полягає в тому, що миттєва поверхня текучості залежить тільки від повної роботи на пластичних деформаціях. Отже, через повну роботу на пластичних деформаціях, яка дається інтегралом

$$W^{p} = \int \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}, \qquad (7.30)$$

критерій пластичності виражається в символічних позначеннях рівністю

$$f_1\left(\sigma^{ij}\right) = F\left(W^{p}\right), \qquad (7.31)$$

в якому точний вид функціональної залежності повинен бути визначений експериментально. *Деформаційна гіпотеза зміцнення* полягає в тому, що зміцнення визначається величиною пластичних деформацій. Через повну еквівалентну деформацію

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \int d\varepsilon_{ij}^{p} \qquad (7.32)$$

закон зміцнення в символічних позначеннях представляється співвідношенням

$$f_1\left(\sigma^{ij}\right) = H\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right), \qquad (7.33)$$

в якому вид функціонального зв'язку знаходиться із експериментальної залежності напруження – деформація при одновісному випробуванні матеріалу.

7.9 Повзучість твердих тіл. Нехай маємо деякий стрижень (рисунок 7.1), верхній кінець якого закріплений, а до нижнього прикладена постійна сила P. Якщо стрижень на довгий час залишити у такому стані, то, як показує досвід, відносне подовження ε_{11} стрижня буде збільшуватися з плином часу. Якщо в деякий момент часу навантаження P зняти, то деформації, що виникли таким чином, не зникнуть.

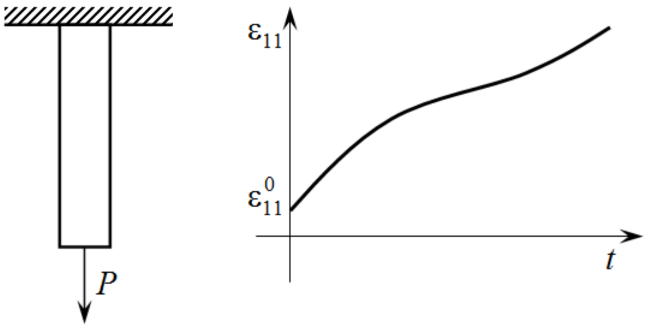


Рисунок 7.1 – Повзучість матеріалів

Це явище, яке спостерігається при будь-якій, навіть малій, величині сили P, називається *повзучістю*.

Повзучість найбільш сильно проявляється при підвищених температурах, але властивість повзучості слід враховувати також при розрахунках конструкцій, які повинні працювати достатньо довго, і при нормальних температурах.

Зазвичай в тих матеріалах, в яких проявляється властивість повзучості, спостерігається і інше явище, яке називається релаксацією напружень.

Релаксація напружень. Якщо розтягнутий стрижень, в поперечних січеннях якого діють напруження σ_0^{11}, закріпити на обох його кінцях (тобто зафіксувати деформацію ε_{11}, рисунок 7.2), то, як показує досвід, з плином часу напруження в стрижні будуть падати, для одних матеріалів – до деякого значення σ_*^{11}, для інших до нуля.

Явища повзучості і релаксації тісно пов'язані між собою. При релаксації попередня пружна деформація за рахунок повзучості частково або повністю перетворюється в пластичну, для підтримки (збереження) якої не треба прикладати силу, що і викликає зменшення σ^{11}.

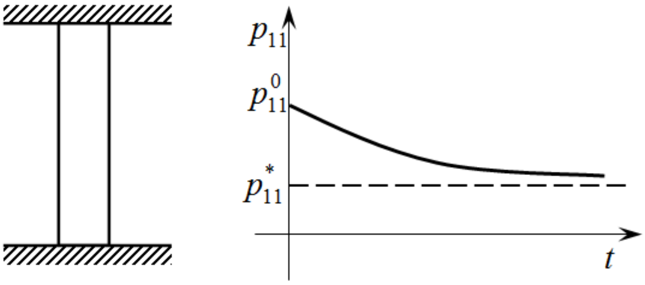


Рисунок 7.2 – Релаксація напружень

Тобто, експеримент на повзучість полягає в миттєвому прикладенні до зразка із в’язкопружного матеріала σ_0^{11}, яке потім лишається постійним та вимірюванні деформації ε_{11} як функції часу (проявлення повзучості). В експериментах на релаксацію зразок піддається миттєвій деформації ε_{11}^{0}, яка потім лишається постійною, в той час як виміри напруження проводяться як функція часу (тобто досліджується ефект релаксації (встановлення напружень)). Математично процес навантаження при повзучості і релаксації виражається одиничною ступінчастою функцією $[U(t-t_1)]$, що визначається таким чином

$$[U(t-t_1)] = \begin{cases} 0 \ \text{при}\, t < t_1 \\ 1 \ \text{при}\, t > t_1 \end{cases}.$$

Навантаження в досліді на повзучість представляється функцією

$$\sigma = \sigma_0[U(t)], \tag{7.34}$$

причому $[U(t)]$ – одична ступінчаста функція зі стрибком в момент $t_1 = 0$. Деформація повзучості для моделі Кельвіна визначається із розв’язку диференціального рівняння

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\sigma_0[U(t)]}{\eta}, \tag{7.35}$$

яке отримується при підстановці (7.34) в рівняння $\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$. Введена тут величина $\tau = \eta / G$ називається часом запізнення. Можна показати, що для будь-якої неперервної функції $f(t)$ справедливо інтегральне співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{t} f(t')[U(t'-t_1)]dt' = [U(t-t_1)]\int\limits_{t_1}^{t} f(t')dt',$$

де t' – змінна інтегрування. За допомогою цього співвідношення можна проінтегрувати рівняння (7.35) і знайти зміну деформації у часі при повзучості для моделі Кельвіна

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)[U(t)].$$

Релаксація напруження, що має місце в матеріалі Максвела після прикладення деформації, змінюється по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_0[U(t)],$$

дається розв'язком диференціального рівняння

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = G\varepsilon_0[\delta(t)], \qquad (7.36)$$

яке отримано підстановкою похідної за часом від функції $\varepsilon = \varepsilon_0[U(t)]$ в рівняння $\dfrac{\dot{\sigma}}{G} + \dfrac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}$. Тут $[\delta(t)] = d[U(t)]/dt$ – функція, називається одиничною імпульсною функцією або *дельта-функцією Дірака*

$$[\delta(t-t_1)] = 0,\ t \neq t_1,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\delta(t-t_1)]dt = 1.$$

Ця функція дорівнює всюди нулю, крім $t = t_1$, де, як видно з визначення, вона повинна мати нескінченно великий пік. Можна показати, що для будь-якої неперервної функції $f(t)$ при $t > t_1$ виконується рівність

$$\int_{-\infty}^{t} f(t')[\delta(t'-t_1)]dt' = f(t_1)[U(t-t_1)],$$

за допомогою якого можна проінтегрувати рівняння (7.36) і знайти релаксацію напружень для матеріалу Максвела

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 e^{-t/\tau}[U(t)].$$

Релаксація напружень для матеріалу Кельвіна отримується безпосередньою підстановкою $\varepsilon = \varepsilon_0[\delta(t)]$ в рівняння (7.35), звідки

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0[U(t)] + \eta\varepsilon_0[\delta(t)]. \tag{7.37}$$

Наявність дельта-функції в рівнянні (7.37) вказує на те, що знадобилося б нескінченне напруження, щоб спричинити миттєву кінцеву деформацію в матеріалі Кельвіна.

7.10 Фізичні рівняння для в'язких стисливих рідин. Закон Нав'є-Стокса. Для в'язких стисливих рідин (ньютонівських рідин) фізичні рівняння виражаються законом Нав'є-Стокса, який встановлює залежність між напруженнями і швидкістю деформації та гідростатичним тиском у вигляді

$$\hat{\sigma} = \mu\hat{\dot{D}} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{v})\hat{I} - p\hat{I}, \tag{7.38}$$

де μ – динамічна в'язкість (перша в'язкість), яка не залежить від швидкості деформації; Па·с; $\hat{\dot{D}} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)$ – тензор швидкості деформації, с$^{-1}$; $\frac{2}{3}\mu = \lambda$ – друга в'язкість, що пов'язана зі стисливістю об'єму рідини, Па·с; $\vec{v}$ – вектор швидкості, м/с; p – зовнішній гідростатичний тиск, Па; $\hat{I}$ – одиничний тензор.

Другий член (7.38) – $\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{v})\hat{I}$ – пов'язаний зі стисливістю рідини. У випадку нестисливої рідини, коли рівняння збереження маси або нерозривності спрощується до виду $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, відповідно і закон Нав'є-Стокса також спрощується до виду (тому що $\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{v})\hat{I} = 0$)

$$\hat{\sigma} = \mu\hat{\dot{D}} - p\hat{I}\,. \tag{7.39}$$

Рівняння (7.39) є фізичним рівнянням для нестисливої в'язкої рідини (див. лекцію №8).

Тема 8 Закони збереження суцільного середовища

8.1 Рівняння зв'язку між термодинамічними потенціалами.
8.2 Контактні, конвективні та радіаційні умови теплообміну з зовнішнім середовищем.

8.1 Рівняння зв'язку між термодинамічними потенціалами. У відповідності до II закону термодинаміки (див. лекцію №1) рівняння притоку теплоти для зворотних (рівноважних) процесів має вид

$$ds = \frac{\delta q}{T} = \frac{dU + pd\frac{1}{\rho}}{T}, \tag{8.1}$$

де s – ентропія; q – теплота процесу; U – внутрішня енергія; p – тиск; ρ – густина; T – температура.

Внутрішня енергія і ентропія як термодинамічні потенціали. Нехай U задана як функція ρ і s. Тоді за правилами диференціювання та із рівняння притоку теплоти (8.1) з врахуванням II закону термодинаміки для рівноважних процесів будемо мати

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho ds + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s d\rho = Tds - pd\frac{1}{\rho}\,. \tag{8.2}$$

Звідки, зважаючи на довільність ds і $d\rho$, отримаємо

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho,\; p = \rho^2\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s. \tag{8.3}$$

Тобто, T і p як функції ρ і s визначилися однозначно. Внутрішня енергія U в цьому випадку називається термодинамічним потенціалом. Із рівності (8.2) видно також, що якщо задати ентропію s як функцію від U та ρ, то

$$\frac{1}{T}=\left(\frac{\partial s}{\partial U}\right)_{\rho},\ \frac{p}{T}=\left(\frac{\partial s}{\partial 1/\rho}\right)_{U},$$

тобто, для змінних U і ρ, ентропія є термодинамічним потенціалом. Рівнянням зв'язку між цими потенціалами є рівняння притоку теплоти у вигляді (8.1) або (8.2).

Термодинамічні потенціали двохпараметричних середовищ. Рівність (8.1) встановлює обмеження на функції $U(p,\rho)$ і $T(p,\rho)$, тобто основні термодинамічні функції стану середовища. Оскільки ds повинно бути повним диференціалом, то умова інтегрованості (8.1) буде мати вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial\rho}-\frac{p}{\rho^2 T}\right)$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial\rho}\frac{\partial U}{\partial p}=\frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}-\frac{p}{\rho^2}\right)+\frac{T}{\rho^2}. \qquad (8.4)$$

При заданій функції $U(p,\rho)$ функція $T(p,\rho)$ повинна бути рішенням (8.4), тобто такі функції не є довільними. Тому для двохпараметричного середовища, при заданій $U(p,\rho)$, рівняння (8.4) слід розглядати як лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку для визначення $T(p,\rho)$.

Як відомо, що диференціальне рівняння має багато рішень, тобто $T(p,\rho)$ при заданій $U(p,\rho)$, а відповідно, і термодинамічні властивості середовища визначаються неоднозначною Для усунення такої неоднозначності необхідно взяти одне із частинних рішень (8.4), тобто вибрати конкретний вигляд рівняння стану $T=T(p,\rho)$.

За визначальні термодинамічні змінні двохпараметричного середовища можна брати різні пари змінних, наприклад, ρ і s, p і s, ρ і T та ін.

Так, наприклад, у випадку використання пари змінних середовища ρ і T термодинамічним потенціалом є вільна енергія Гельмгольца $F(\rho,T)$ або ізохорно-ізотермічний потенціал.

Якщо за визначальні параметри середовища взяти тиск p і температуру T, то термодинамічним потенціалом є потенціал Гібса $\Psi(p,T)$ або ізобарно-ізотермічний потенціал.

Для отримання виразу для вільної енергії скористаємося співвідношенням (8.2), записаним у вигляді

$$d(U - Ts) = -sdT + \frac{p}{\rho^2}d\rho, \tag{8.5}$$

або

$$dF = -sdT + \frac{p}{\rho^2}d\rho, \tag{8.6}$$

де через F позначено термодинамічний потенціал двохпараметричного середовища – вільну енергію

$$F(\rho,T) \equiv U - Ts. \tag{8.7}$$

Якщо F як функція ρ і T, то з (8.6) однозначно визначаються p та s. Дійсно, з (8.6) витікає, що

$$s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho, \; p = \rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T. \tag{8.8}$$

Для отримання виразу для потенціалу Гібса скористаємося співвідношенням (8.2), що записане у вигляді

$$d\left(U - Ts - \frac{p}{\rho}\right) = -sdT + \frac{d\rho}{\rho}, \tag{8.9}$$

або

$$d\Psi = -sdT + \frac{d\rho}{\rho}. \qquad (8.10)$$

Через функцію стану

$$\Psi(p,T) \equiv U - Ts + \frac{p}{\rho}, \qquad (8.11)$$

що називається просто термодинамічним потенціалом або термодинамічним потенціалом Гібса, однозначно визначаються ρ та s

$$s = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_p, \ \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\right)_T. \qquad (8.12)$$

Для визначення зв'язку між двохпараметричними термодинамічними потенціалами скористаємося співвідношеннями (8.6) та (8.10) і визначимо з них $-sdT$

$$-sdT = \frac{p}{\rho^2}d\rho - dF \ \text{ і } -sdT = \frac{d\rho}{\rho} - d\Psi.$$

Прирівнюючи останні співвідношення отримуємо рівняння зв'язку між двохпараметричними термодинамічними потенціалами

$$dF = d\Psi + \frac{p}{\rho^2}d\rho - \frac{d\rho}{\rho} \Leftrightarrow dF = d\Psi + \frac{p-\rho}{\rho^2}d\rho. \qquad (8.13)$$

Треба відзначити, що для змінних p і ρ або T і s не існує відповідних потенціалів.

8.2 Контактні, конвективні та радіаційні умови теплообміну з зовнішнім середовищем. Розглянемо завдання граничних умов на прикладі системи диференціальних рівнянь стаціонарної задачі термопружності однорідного середовища:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{F} = 0; \\ \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_v = 0; \\ \hat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\right) = \hat{\varepsilon}^e - \hat{\varepsilon}^T; \\ \hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \left(\hat{\varepsilon}^e - \hat{\varepsilon}^T\right), \end{cases} \tag{8.14}$$

де ∇ – оператор Гамільтона; $\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор напружень; ρ – густина; $\mathbf{F} = F^i\mathbf{e}_i$ – вектор масових сил; λ – теплопровідність; q_v – внутрішнє джерело теплоти; T – абсолютна температура; $\overset{4}{\hat{C}}$ – тензор 4-го рангу пружних властивостей ізотропного матеріалу; $\hat{\varepsilon}^e = \varepsilon^e_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$ – тензор пружних деформацій; $\hat{\varepsilon}^T = \varepsilon^T_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \beta(T - T_0)g_{ij}$ – компоненти тензора температурних деформацій; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу; T_0 і T – початкова і поточна температура середовища, відповідно; g_{ij} – метричний тензор.

Оскільки, система рівнянь (8.14) записана для стаціонарної задачі, то початкові умови взагалі не розглядаються.

ГУ для (8.14)[15]:

– механічні умови абсолютного контакту

$$\begin{cases} \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\} = 0; \\ \{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}\} = 0, \end{cases} \tag{8.15}$$

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до поверхні контакту; $\mathbf{u}$ – вектор переміщень; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{u}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{u}^-$; $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ – компоненти напруження в нормальному напрямку до поверхні контакту; $\{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}\} = \boldsymbol{\sigma}_n{}^+ \cdot \mathbf{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}_n{}^- \cdot \mathbf{n}^-$; «+» і «–» – означає ліворуч і праворуч від поверхні контакту;

– теплові умови абсолютного контакту

$$\begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0, \end{cases} \tag{8.16}$$

[15] контактні умови виникають при контракті двох середовищ

де $\{T\} = T^{+} - T^{-}$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^{+} \cdot \mathbf{q}^{+} - \mathbf{n}^{-} \cdot \mathbf{q}^{-}$; $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ – вектор густини теплового потоку;

– конвективні умови (стосуються тільки рівняння енергії)

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \nabla T\right) = \alpha\left(T - T_{\text{p}}\right), \tag{8.17}$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; T_{p} – температура оточуючого середовища;

– радіаційні умови (стосуються тільки рівняння енергії)

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \nabla T\right) = \sigma \varepsilon_{\text{r.v}} \left(T^{4} - T_{\text{p}}^{4}\right), \tag{8.18}$$

де σ = 5,67·10^{-8} Вт/(м^2·К^4) – постійна Стефана-Больцмана; $\varepsilon_{\text{r.v}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\varepsilon_{\text{p}}} - 1}$ – приведений ступінь чорноти системи тіл;

– крайові умови Дирихле (стосуються рівнянь рівноваги та енергії)

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0; \\ T = T_b, \end{cases} \tag{8.19}$$

де перша умова відповідає умові закріплення тіла; T_b – температура на границі середовища;

– крайові умови Неймана (стосуються рівнянь рівноваги та енергії)

$$\begin{cases} \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}; \\ \mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \nabla T\right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_{\text{n}}, \end{cases} \tag{8.20}$$

де $\mathbf{p} = p^{i} \mathbf{e}_{i}$ – вектор зовнішньої сили, що діє на поверхні середовища; $\mathbf{q} = q^{i} \mathbf{e}_{i}$ – вектор густини теплового потоку на поверхні середовища.

Тема 9 Розв'язуючі рівняння МСС в декартових та криволінійних координатах

9.1 Двохвимірні задачі механіки суцільного середовища. Гіпотези і рівняння плоскої та осесиметричної задач.
9.2 Квазістатичні рівняння термо-в’язко-пружно-пластичності. Початкові та граничні умови.
9.3 Визначення параметрів стану полімерів для неізотермічних процесів.

9.1 Двохвимірні задачі механіки суцільного середовища. Гіпотези і рівняння плоскої та осесиметричної задач. У випадку плоскої задачі при відповідному виборі декартової системи координат $x^1Ox^2x^3$ суттєвими аргументами для шуканих функцій є тільки координати x^1 і x^2. Характеристики стану і руху в плоскій задачі взагалі не залежать від координати x^3 або залежать від неї відомим простим чином.

Теорія плоскої задачі включає в себе такі задачі: *плоско-деформованого*, *плоско-напруженого* і *узагальненого плоского напруженого* станів.

Для спрощення викладення матеріалу далі будемо розглядати тільки статичні задачі в лінеаризованій постановці.

Розглянемо плоску задачу, коли за визначенням мають місце одночасно дві групи рівностей: перша – для компонент тензора напружень σ^{ij}

$$\begin{cases} \sigma^{11} = \sigma^{11}\left(x^1, x^2\right), \ \sigma^{22} = \sigma^{22}\left(x^1, x^2\right), \ \sigma^{12} = \sigma^{12}\left(x^1, x^2\right), \\ \sigma^{33} = \sigma^{33}\left(x^1, x^2\right), \ \sigma^{13} = \sigma^{23} = 0; \end{cases}$$

друга для компонент тензора деформацій ε_{ij}

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}\left(x^1, x^2\right), \ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}\left(x^1, x^2\right), \ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}\left(x^1, x^2\right), \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}\left(x^1, x^2\right), \ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u^1}{\partial x^1}; \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}; \ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\right); \ \ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0;$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^3} = \frac{\partial u^2}{\partial x^3} = 0,$$

де $\varepsilon_{ij}, (i, j = 1,2,3)$ – компоненти тензора деформацій; $u^i, (i = 1,2,3)$ – компоненти вектора переміщень.

Дане визначення плоскої задачі в загальному випадку не зв'язано з видом співвідношень між напруженнями і деформаціями і не зв'язано з властивостями середовища. Однак можливість реалізації плоскої задачі у тих або інших випадках тісно пов'язано з властивостями моделі суцільного середовища, що розглядається.

Розглянемо можливі спрощення, які виникають в основних рівняння у випадку плоскої задачі.

Рівняння рівноваги для плоскої задачі у напруженнях в декартовій системі координат мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2} + \rho F^1 = 0; \\ \dfrac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2} + \rho F^2 = 0, \end{cases} \tag{9.1}$$

де x^1, x^2 – декартові координати, м; ρ – густина, кг/м^3; $F^i, (i = 1,2)$ – компоненти масової сили, які є функціями тільки x^1, x^2, Н/кг.

Третє рівняння рівноваги в плоскій задачі буде задовольняти тільки тоді, коли

$$F^3 = 0,$$

тобто масові сили вздовж осі x^3 у випадку плоскої задачі повинні бути відсутніми.

Граничні умови в напруженнях у випадку плоскої задачі мають вигляд

$$\begin{cases} \sigma^{11}n_1 + \sigma^{12}n_2 = p^1; \\ \sigma^{12}n_1 + \sigma^{22}n_2 = p^2; \\ \sigma^{33}n_3 = p^3, \end{cases} \tag{9.2}$$

де $n_i, (i = 1,2,3)$ – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні або направляючі косинуси.

Зазвичай (але не завжди) плоскі задачі розглядаються для циліндричних тіл з утворюючими, які паралельні осі x^3 або z. В цьому випадку на бічній поверхні тіла $n_3 = 0$ і, відповідно, на цій поверхні повинна мати рівність

$$p^3 = 0 .$$

Граничні умови у випадку плоскої задачі можуть бути задані також в переміщеннях.

Постановка плоских задач теорії пружності. Якщо є циліндричне тіло з утворюючими, що паралельні осі x^3, на бічній поверхні якого задані зусилля p^1, p^2 як функції тільки x^1, x^2, а $p^3 = 0$, то компоненти тензора напружень $\sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{22}$ всередині тіла можна визначити як розв'язок крайової задачі, що поставлена в області, яка обмежена контуром C поперечного січення тіла, для двох рівнянь рівноваги (9.1) і одного рівняння сумісності виду (9.3) з граничними умовами (9.2) на контурі C.

$$\frac{\partial^2 \sigma^{11}}{\partial \left(x^2\right)^2} + \frac{\partial^2 \sigma^{22}}{\partial \left(x^1\right)^2} = 2 \frac{\partial^2 \sigma^{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \nu \Delta \left(\sigma^{11} + \sigma^{22}\right), \tag{9.3}$$

де Δ – оператор Лапласа, ν – коефіцієнт Пуассона,

Для визначення компонент вектора переміщень розв'язується система рівнянь (9.1) з заданими граничними умовами. Якщо на границі задані тільки напруження, то задача є неоднозначною. Тому для однозначності задачі треба хоча б в одній точці задати переміщення u^1, u^2, u^3.

Плоско-деформований стан. У випадку плоско-деформованого стану (плоскої деформації) за визначенням маємо, що

$$\varepsilon_{33} = 0 ,\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 ,$$
$$\frac{\partial u^1}{\partial x^3} = \frac{\partial u^2}{\partial x^3} = u^3 = 0 ,$$

Співвідношення закону Гука, записані через деформації і переміщення приймають вигляд

$$
\begin{cases}
\sigma^{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11}; \\
\sigma^{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22}; \\
\sigma^{12} = 2\mu\varepsilon_{12},
\end{cases}
\text{ або }
\begin{cases}
\sigma^{11} = \lambda\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}\right) + 2\mu\dfrac{\partial u^1}{\partial x^1}; \\
\sigma^{22} = \lambda\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}\right) + 2\mu\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}; \\
\sigma^{12} = \mu\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x^1}\right),
\end{cases}
\tag{9.4}
$$

де λ, μ – коефіцієнти Ламе, u^1, u^2 – компоненти вектора переміщень, а $\sigma^{33} = 2\lambda\varepsilon_{12}$, або $\sigma^{33} = \lambda\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}\right)$, або $\sigma^{33} = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\left(\sigma^{11} + \sigma^{22}\right)$.

Тензор напружень при плоско-деформованому стані

$$
\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & 0 \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{33} \end{pmatrix}.
$$

Рівняння рівноваги, записані через напруження, мають вигляд

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^2} + \rho F^1 = 0; \\
\dfrac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \sigma^{22}}{\partial x^2} + \rho F^2 = 0,
\end{cases}
\tag{9.5}
$$

де ρ – густина, $F^i, (i = 1,2)$ – компоненти вектора густини масової сили.

Нескладно записати рівняння рівноваги через переміщення. Для цього в (9.5) треба підставити (9.4)

$$
\begin{cases}
(\lambda + 3\mu)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial (x^1)^2} + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^1 \partial x^2} + \rho F^1 = 0; \\
(\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^1 \partial x^2} + (\lambda + 3\mu)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial (x^1)^2} + \rho F^2 = 0.
\end{cases}
\tag{9.6}
$$

Для замикання системи диференціальних рівнянь *плоско-деформованого стану* треба до них додати граничні умови. Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується (тобто описують актуальний стан середовища). До них відносяться:

– умови типу Неймана (задано зовнішнє зусилля – навантаження тіла)

$$\begin{cases} \sigma^{11} n_1 + \sigma^{12} n_2 = p^1; \\ \sigma^{12} n_1 + \sigma^{22} n_2 = p^2, \end{cases} \tag{9.7}$$

де n_1, n_2 – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла; p^1, p^2 – компоненти вектор зовнішніх зусиль;

– умови Дирихле (задано закріплення тіла, хоча б одній точці поверхні)

$$\begin{cases} u^1 = 0; \\ u^2 = 0, \end{cases} \tag{9.8}$$

де $\mathbf{u}$ – вектор переміщень;

– умови симетрії в переміщеннях

$$n_1 u^1 + n_2 u^2 = 0. \tag{9.9}$$

Система рівнянь (9.6)–(9.9) є повним формулюванням задачі *плоско-деформованого* стану середовища.

Плоско-напружений стан. У випадку плоско-напруженого стану за визначенням приймають, що

$$\sigma^{33} = 0,\ \sigma^{13} = \sigma^{23} = 0.$$

Закон Гука для складової тензора деформації ε_{33} приймає вигляд

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right),$$

а для компонент тензора напружень

$$\begin{cases} \sigma^{11} = \overline{\lambda}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) + 2\mu\varepsilon_{11}; \\ \sigma^{11} = \overline{\lambda}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) + 2\mu\varepsilon_{22}; \\ \sigma^{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \end{cases} \qquad (9.10)$$

де $\overline{\lambda} = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$.

Тензор напружень при плоско-напруженому стані

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} \end{pmatrix}.$$

Тобто вийшли ті ж самі рівняння, що і у випадку плоскої деформації, але з заміною λ на $\overline{\lambda}$. Таким чином, рівняння рівноваги в переміщення приймуть вигляд

$$\begin{cases} \left(\overline{\lambda} + 3\mu\right)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial\left(x^1\right)^2} + \left(\overline{\lambda} + \mu\right)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x^1 \partial x^2} + \rho F^1 = 0; \\ \left(\overline{\lambda} + \mu\right)\dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^1 \partial x^2} + \left(\overline{\lambda} + 3\mu\right)\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial\left(x^1\right)^2} + \rho F^2 = 0. \end{cases} \qquad (9.11)$$

Для замикання системи диференціальних рівнянь *плоско-напруженого стану* треба до них додати граничні умови (9.7)–(9.9).

Тоді система рівнянь (9.11) разом з граничними умовами (9.7)–(9.9) є повним формулюванням задачі *плоско-напруженого* стану середовища.

Узагальнений плоский напружений стан. Гіпотези Кірхгофа. Відповідно до *першої гіпотези Кірхгофа* прямолінійні елементи пластини, перпендикулярні середній поверхні до деформації (рисунок 9.1), лишаються прямолінійними і перпендикулярними деформованій серединній поверхні, зберігаючи свою довжину. Цю гіпотезу часто називають гіпотезою недеформованих нормалей.

Друга гіпотеза Кірхгофа носить статичний характер. У відповідності до цієї гіпотези нормальними напруженнями на площадках, паралельних серединній поверхні, можна знехтувати порівняно з іншими напруженнями.

Розглянемо тонку плоску пластину товщиною $2h$ (див. рисунок 9.1). Позначимо через d характерний поздовжній розмір пластини; за припущенням $h/d << 1$. Площину x^1, x^2 сумістимо з серединою площини пластини. Припустимо, що пластина навантажена зовнішніми силами (в тому числі і масовими), що паралельні серединній площині і симетричні відносно площини x^1, x^2. Далі припустимо, що відсутні зовнішні сили на торцевих поверхнях, тобто

$$\sigma^{33}\left(x^1, x^2, \pm h\right) = \sigma^{13}\left(x^1, x^2, \pm h\right) = \sigma^{23}\left(x^1, x^2, \pm h\right) = 0 \tag{9.12}$$

і, зокрема

$$\frac{\partial \sigma^{33}\left(x^1, x^2, \pm h\right)}{\partial x^1} = \frac{\partial \sigma^{33}\left(x^1, x^2, \pm h\right)}{\partial x^2} = 0 .$$

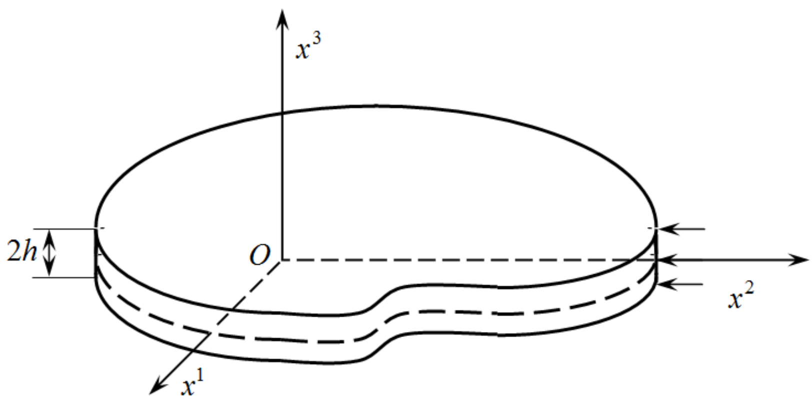


Рисунок 9.1 – До поняття узагальненого плоского напруженого стану. Розтягування і стискання пластини силами, що паралельні серединній площині

Оскільки, крім того, компонента F^3 масової сили, за припущенням, дорівнює нулю, то із рівняння рівноваги в проекції на вісь x^3 отримаємо

$$\left.\frac{\partial \sigma^{33}\left(x^1, x^2, \partial x^3\right)}{\partial x^3}\right|_{x^3 = \pm h} = 0 .$$

Таким чином, на торцевих поверхнях пластини компонента σ^{33} не тільки сама дорівнює нулю, але і її похідні дорівнюють нулю. Тому для тонкої пластини компонента σ^{33} є малою і в якості наближення далі покладемо $\sigma^{33} = 0$ всюди всередині пластини.

Два інших рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^3} + \rho F^1 = 0\,,$$
$$\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^3} + \rho F^2 = 0$$

осереднимо по товщині пластини. З врахуванням (9.12) і

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^3}dx^3 = \frac{1}{2h}\sigma^{13}\left(x^1, x^2, x^3\right)\Big|_{-h}^{h} = 0\,,$$
$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^3}dx^3 = \frac{1}{2h}\sigma^{23}\left(x^1, x^2, x^3\right)\Big|_{-h}^{h} = 0$$

отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\sigma}^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\overline{\sigma}^{12}}{\partial x^2} + \rho\overline{F}^1 = 0; \\ \dfrac{\partial\overline{\sigma}^{12}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial\overline{\sigma}^{22}}{\partial x^2} + \rho\overline{F}^2 = 0, \end{cases} \tag{9.13}$$

де

$$\overline{\sigma}^{ij} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma^{ij}dx^3\,,\; \overline{F}^i = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\overline{F}^i dx^3\,. \tag{9.14}$$

Оскільки $\sigma^{33} = 0$, закон Гука має вид (9.10). Переходячи в ньому до середніх значень, отримаємо

$$\begin{cases} \overline{\sigma}^{11} = \overline{\lambda}\left(\overline{\varepsilon}_{11} + \overline{\varepsilon}_{22}\right) + 2\mu\overline{\varepsilon}_{11}; \\ \overline{\sigma}^{11} = \overline{\lambda}\left(\overline{\varepsilon}_{11} + \overline{\varepsilon}_{22}\right) + 2\mu\overline{\varepsilon}_{22}; \\ \overline{\sigma}^{12} = 2\mu\overline{\varepsilon}_{12}, \end{cases} \tag{9.15}$$

де $\bar{\varepsilon}_{11} = \dfrac{\partial \bar{u}^1}{\partial x^1}$, $\bar{\varepsilon}_{12} = \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial x^2}$, $\bar{\varepsilon}_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{u}^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial x^1}\right)$,

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial u}{\partial x^3}dx^3 = \frac{1}{2h}\left[u^3\left(x^1, x^2, h\right) - u^3\left(x^1, x^2, -h\right)\right],$$

$$\bar{u}^1 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u^1 dz,\ \bar{u}^2 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u^2 dz.$$

Компоненти $\bar{\sigma}^{ij}$, $\bar{u}^i$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ залежать тільки від координат x^1, x^2.

Розглянутий напружений стан, який реалізується в таких пластинах, що працюють без згину, визначають як узагальнений напружений стан або безмоментний стан. В силу лінійності рівнянь і граничних умов всі відповідні співвідношення для плоского напруженого стану зберігають свій вид для осереднених компонент у випадку узагальненого напруженого стану.

Осесиметричні задачі. Гіпотези. У вісесиметричних задачах вважається, що можна вибрати циліндричну систему координат, в якій суттєвими аргументами шуканих функцій будуть тільки координати r, z, t, а кутова координата θ несуттєва. Всі рівняння і формули, що дають рішення, будуть інваріантні відносно поворотів на будь-який кут навколо осі z.

Плоскопаралельні і вісесиметричні рухи є прикладами, коли суттєве значення мають тільки дві геометричні координати.

Багато проблем міцності та руху тіл обертання, наприклад, задачі про труби, баки, спеціальні оболонки та ін. або задачі про поступальний рух рідин та газів всередині тіл обертання вздовж осі симетрії або їх обертання відносно осі симетрії і багато інших задач, розглядаються в рамках теорії руху суцільних середовищ з осьовою симетрією.

Система диференціальних рівнянь рівноваги для осесиметричного напруженого стану має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}}{r} + \rho F^r = 0; \\ \dfrac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + \dfrac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma^{rz}}{r} + \rho F^z = 0, \end{cases} \tag{9.16}$$

де r, z, θ – циліндричні координати (радіус, апліката та азимутальний кут).

Тензор напружень при осесиметричному напруженому стані

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{rr} & \sigma^{rz} & 0 \\ \sigma^{rz} & \sigma^{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\theta\theta} \end{pmatrix}. \tag{9.17}$$

До граничних умов осесиметричної задачі відносяться:

– умови на осі симетрії $r = 0$

$$\nabla u^{r} = 0, \tag{9.18}$$

де ∇ – оператор Гамільтона; u^{r} – радіальна компонента вектора переміщень;

– умови типу Неймана (задано зовнішнє зусилля – навантаження тіла)

$$\begin{cases} \sigma^{rr} n_r + \sigma^{rz} n_z = p^{r}; \\ \sigma^{rz} n_r + \sigma^{zz} n_z = p^{z}, \end{cases} \tag{9.19}$$

де n_r, n_z – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла; p^{r}, p^{z} – компоненти вектор зовнішніх зусиль;

– умови Дирихле (задано закріплення тіла по координаті z, хоча б одній точці тіла)

$$u^{z} = 0, \tag{9.20}$$

де u^{z} – вертикальна компонента вектора переміщень.

9.2 Квазістатичні рівняння термов'язкопружно-пластичності. Початкові та граничні умови. Однією з найбільш загальних моделей непружної поведінки матеріалів є пружно-в'язко-пластична модель Перцини В цій моделі передбачається, що матеріал проявляє в'язкі властивості тільки в пластичній області, а це значить, що при $F < 0$ (тут F – функція текучості) має місце виключно пружний стан. Крім того, умова текучості $F(\sigma^{ij}, h) = \sigma - \sigma_0(h) = 0$ тепер буде представляти лише початкову умову, яка називається тут статичною умовою текучості. Тоді в'язко-пластичний стан виникає при

$$F(\sigma^{ij}, h) > 0, \tag{9.21}$$

що неможливо для так званих нереологічних)[16] теорій пластичності.

Тут в (9.21) F – функція текучості; σ^{ij} – напруження; $h = \int \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}$ – параметр пов'язаний з роботою зміцнення, який визначає положення поверхні текучості при статичному навантаженні в 9-и вимірному просторі напружень.

Пластична деформація при одновісному навантаженні для чутливих до швидкості навантаження пластичних тіл визначається швидкістю деформації у вигляді

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \gamma \left\langle \Phi\left(F / \sigma_0\right)\right\rangle, \tag{9.22}$$

де $\dot{\varepsilon}^{p}$ – швидкість деформації; γ – параметр матеріалу, який може бути функцією часу, температури та ін.; σ_0 – границя пластичності матеріалу при одновісному навантаженні.

Крім того для функції Φ мають місце такі випадки

$$\begin{aligned} &\left\langle \Phi\left(F / \sigma_0\right)\right\rangle = 0 \qquad \text{при} \quad F \le 0, \\ &\left\langle \Phi\left(F / \sigma_0\right)\right\rangle \ne 0 \qquad \text{при} \quad F > 0. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Тут $\left\langle \Phi \right\rangle$ – означає середню величину.

Функція Φ вибирається на основі експериментів і може мати різноманітний вигляд, наприклад:

$$\begin{aligned} &\Phi(X) = X^{n}, \qquad \Phi(X) = \exp(X) - 1, \\ &\Phi(X) = \sum_{\alpha=1}^{N} A_{\alpha} X^{\alpha}, \qquad \Phi(X) = \sum_{\alpha=1}^{N} B_{\alpha}\left[\exp\left(X^{\alpha}\right) - 1\right]. \end{aligned} \tag{9.24}$$

З виразів (9.24) видно, що швидкість наростання непружних деформацій є функцією прирощення напружень відносно статичного критерію текучості. Ця функція вказаних прирощень напружень визначає швидкість в’язко-пластичних деформацій у відповідності з попередньо

[16] РЕОЛОГІЯ (від грецької rheos-течія, потік та logos-слово, вчення), наука, що вивчає деформаційні властивості реальних тіл. Реологія розглядає діючі на тіло механічні напруження і деформації, що спричинені ними, як зворотні, так і незворотні (залишкові). У вузькому розумінні – термін «реологія» іноді відносять тільки до вивчення течії в’язких та пластичних тіл. Об’єктами реології є різноманітні матеріали, наприклад, метали, полімери, композити, резина та ін.

вибраним законом (рівнянням стану), який представлено реологічною моделлю рисунку 9.2.

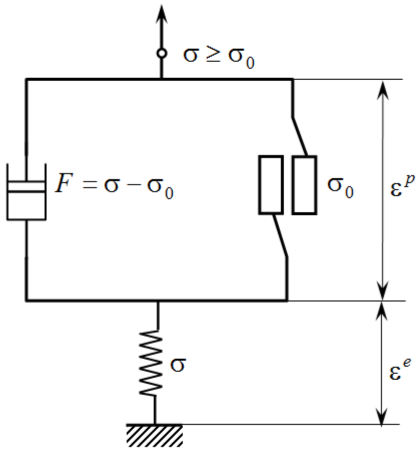


Рисунок 9.2 – Реологічна модель, що описує пружно-в’язко-пластичні властивості середовища (тут σ є скаляром – деяким еквівалентним напруженням)

В цій механічній моделі передбачається, що вузол з тертям здатен витримати напруження σ впритул до $\sigma = \sigma_0$, після чого при $\sigma > \sigma_0$ у вузлі виникає проковзування. Коли це відбувається, прирощення напружень $\sigma - \sigma_0$ сприймається демпфером (який може мати нелінійну характеристику), що породжує в’язко-пластичну деформацію. Пружна частина повної деформації створюється пружною пружиною.

Слід зазначити, що в загальному випадку демпфер та вузол тертя можуть мати властивості, які залежать від в’язко-пластичної деформації зі зміцненням ($H' \neq 0$ – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, що визначає залежність напружень від деформації при одновісному розтягуванні). Таким чином, через деякий час при дії постійного напруження механізм з тертям стає знову жорстким та при виконанні статичного критерію текучості знову відновлюється асимптотична статична конфігурація $\left(\varepsilon^p = 0\right)$.

Для того щоб показати еквівалентність реологічної моделі (див. рисунок 9.2) і виразу (9.22), розглянемо умову рівноваги при $\sigma \geq \sigma_0$

$$\sigma = F + \sigma_0, \tag{9.25}$$

де F – напруження, що сприймається демпфером; σ_0 – частина напруження, що відноситься до механізму тертя. Напруження у в’язкому демпфері пов’язано зі швидкістю в’язко-пластичної деформації співвідношенням

$$F = \mu\dot{\varepsilon}^p = \mu\left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e\right), \tag{9.26}$$

Підставляючи вираз (9.26) в рівність (9.25), отримуємо

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \frac{1}{\mu}\left(\sigma - \sigma_0\right), \tag{9.27}$$

Оскільки швидкість повної деформації дорівнює

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p, \tag{9.28}$$

із виразу (9.27) маємо, що

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\mu}\left(\sigma - \sigma_0\right). \tag{9.28}$$

Цей вираз буде відповідати (9.22), якщо покласти, що

$$\mu = \frac{\sigma_0}{\gamma}, \qquad \Phi\left(F/\sigma_0\right) = F/\sigma_0. \tag{9.30}$$

Розглянемо деякі аналітичні розв’язки рівняння (9.27). Для спрощення покладемо, що $H' = 0$ $\left(\sigma_0 = \sigma_{\text{yield}}\right)$, використовуючи модель одновісного розтягу-стискання і те, що навантаження відповідає постійній повній швидкості деформації. Тоді рівняння (9.27) приймає вигляд

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\gamma}{\sigma_{\text{yield}}}\left(\sigma - \sigma_{\text{yield}}\right), \tag{9.31}$$

звідки отримуємо наступне лінійне диференціальне рівняння

$$\dot{\sigma} + \frac{\gamma E}{\sigma_{\text{yield}}} = E\left(\dot{\varepsilon} + \gamma\right), \tag{9.32}$$

де $\dot{\varepsilon} = const$; E – модуль пружності при розтягу/стисканні.

Розв’язок (9.32) має вид

$$\sigma = \sigma_{\text{yield}}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma}+1\right)+C\exp\left(-\frac{\gamma E}{\sigma_{\text{yield}}}t\right), \qquad (9.33)$$

де t – час; C – постійна інтегрування, яка залежить від початкових умов.

Якщо при $t=0$ маємо $\varepsilon=\frac{\sigma_{\text{yield}}}{E}$ і $\varepsilon^{p}=0$, то для напружень отримуємо вираз

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{yield}}\dot{\varepsilon}}{\gamma}\left[1-\exp\left(-\frac{\gamma E}{\sigma_{\text{yield}}}t\right)\right]+\sigma_{\text{yield}}, \qquad (9.34)$$

яке можна представити як функцію не часу, а деформації

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{yield}}\dot{\varepsilon}}{\gamma}\left\{1-\exp\left[\frac{\gamma}{\dot{\varepsilon}}\left(1-\frac{E\varepsilon}{\sigma_{\text{yield}}}\right)\right]\right\}+\sigma_{\text{yield}}. \qquad (9.35)$$

З іншого боку, можна припустити, що в початковий момент виникає деформація $\varepsilon=\frac{\sigma_{\text{yield}}}{E}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma}+1\right)$, а потім повна деформація збільшується з постійною швидкістю. В цьому випадку приведений вище вираз спрощується і напруження стає постійним

$$\sigma = \sigma_{\text{yield}}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma}+1\right). \qquad (9.36)$$

Цей випадок показаний на рисунку 9.3.

Різниця між нереологічною теорією пластичності і теорією в'язко-пластичності. У випадку чистої пластичності критерій текучості $F\left(\sigma^{ij},h\right)=0$ дає необхідну умову виникнення пластичної поведінки середовища. Як тільки точка, що характеризує напружений стан, буде задовольняти умові $F=0$, можна визначити умову навантаження $\left(H'>0\right)$, яка залежить від того, що відбудеться потім, а саме при $\dot{\sigma}<0$, має місце розвантаження (пружне деформування), а при $\dot{\sigma}>0$ – навантаження (пружно-пластичне деформування). Однак, для в'язко-пластичних матеріалів має місце випадок $F > 0$, і тому ці матеріали будуть проявляти свою в'язко-пластичну поведінку в незалежності від умов $\dot{\sigma} > 0$ або $\dot{\sigma} < 0$.

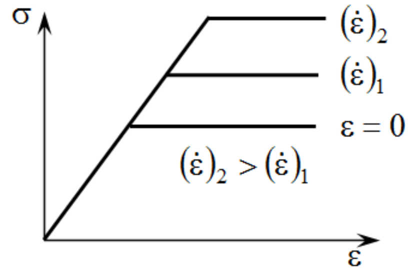


Рисунок 9.3 – Діаграма напруження-деформації при одновісному розтягу/стисканні, коли $\dot{\varepsilon} = const$ (при $t = 0$ миттєво прикладається деформація $\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{E}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma} + 1\right)$)

Цікавою особливістю пружно-в'язко-пластичної моделі є те, що при повільному збільшенні навантаження отримуємо результати, що відповідають класичній теорії пластичності (при умові, що можливий статичний стан $F = 0$). В даному випадку функція Φ та параметр γ стають несуттєвими, причому останній буде скалярним коефіцієнтом при часі, перетворюючи час на фіктивну змінну величину. Цю особливість можна легко пояснити, переписавши вираз (9.22) у вигляді $(F \geq 0)$

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma\Phi(F/\sigma_0), \tag{9.37}$$

що можна представити в наступних еквівалентних формах:

$$F = \sigma_0\Phi^{-1}(\dot{\varepsilon}^p/\gamma), \tag{9.38}$$

$$F = \sigma_0\Phi^{-1}\{[\dot{\varepsilon} - (\dot{\sigma}/E)]/\gamma\}. \tag{9.39}$$

При повільному кроковому процесі навантаження швидкість стає нехтовно малою на шляху навантаження, тому всюди приблизно виконується умова $F = 0$.

Розв'язуючі рівняння термо-в'язко-пружно-пластичності. Розглянемо основні диференціальні рівняння для непружного суцільного середовища. При цьому будемо застосовувати запис рівнянь через швидкості (аналогічно до задач пластичності). У відповідності до теорії малих пружно-пластичних деформацій, повна швидкість деформації $\dot{\varepsilon}_{ij}$ непружного середовища може бути записана у формі

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{a}, \qquad (9.40)$$

де $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ і $\dot{\varepsilon}_{ij}^{a}$ – пружна та непружна частини тензора деформації повної швидкості деформації, відповідно; $\dot{u}_i$ – швидкість переміщення. Тут під непружними деформаціями розуміється будь-якого виду поле деформацій, які можна розглядати як початкові деформації, а саме

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{a} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{c} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{T} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{I}, \qquad (9.41)$$

де $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ – швидкість пластичної або в’язко-пластичної деформації; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{c}$ – швидкість, що обумовлена повзучістю; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{T}$ – швидкість температурної деформації; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ – швидкість початкової деформації, що обумовлена різними іншими причинами.

Рівняння руху і рівноваги також записується через швидкості

$$\dot{\sigma}^{ij}_{,j} + \dot{f}^{i} = 0, \qquad (9.42)$$

де $\dot{\sigma}^{ij}$ – компоненти тензора напружень; $\dot{f}^{i}$ – компоненти вектора об’ємних сил.

Рівняння (9.42) справедливе для внутрішніх точок середовища. Умова рівноваги для граничної поверхні тіла записана через швидкості має вигляд

$$\dot{\sigma}^{ij} n_j = \dot{p}^{i}, \qquad (9.43)$$

де n_j – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Якщо непружні деформації розглядати як початкові, то застосування закону Гука до пружної частини тензора швидкості повної деформації дає наступні вирази для компонент швидкості деформації

$$\dot{\sigma}^{ij} = 2G\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{a}\right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left(\dot{\varepsilon}_{kk} - \dot{\varepsilon}_{kk}^{a}\right)\delta^{ij}, \tag{9.44}$$

де G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; $\dot{\varepsilon}_{kk}^{a}$ – швидкість непружної об’ємної деформації; δ^{ij} – символ Кронекера.

Вираз (9.44) можна переписати через початкові напруження

$$\dot{\sigma}^{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta^{ij} - \dot{\sigma}_{a}^{ij}, \tag{9.45}$$

де $\dot{\sigma}_{a}^{ij}$ – компоненти тензора початкових напружень, які виражаються співвідношенням

$$\dot{\sigma}_{a}^{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij}^{a} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}^{a}\delta^{ij}. \tag{9.46}$$

Підставляючи вираз (9.44) в рівняння рівноваги (9.42), з врахуванням виразів (9.43) і тензора малих деформацій (9.40), отримуємо

$$\dot{u}_{j,ii} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{i,ij} = 2\left(\dot{\varepsilon}_{ij,i}^{a} + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk,j}^{a}\right) - \frac{\dot{f}^{j}}{G}, \tag{9.47}$$

$$\dot{p}^{i} + 2G\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{a}n_{j} + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}^{a}n_{i}\right) = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{i,i}n_{i} + G\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,t}\right)n_{j}. \tag{9.48}$$

Рівняння (9.47) є розширеною формою рівняння Нав’є, а співвідношення (9.48) описує граничні умови в напруженнях. Інша форма записаних вище рівнянь і граничних умов має вигляд:

$$\dot{u}_{j,ii} + \frac{1}{1-2\nu}\dot{u}_{i,ij} = -\frac{\dot{\bar{f}}^{j}}{G}, \tag{9.48}$$

$$\dot{\bar{p}}^{i} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{u}_{i,i}n_{i} + G\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,t}\right)n_{j}. \tag{9.50}$$

де $\dot{\bar{f}}^{j}$ і $\dot{\bar{p}}^{i}$ є псевдооб’ємними силами та псевдозусиллями:

$$\dot{\bar{f}}^{j} = \dot{f}^{j} - 2\left(\dot{\varepsilon}_{ij,i}^{a} + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk,j}^{a}\right) = \dot{f}^{j} - \dot{\sigma}_{a,i}^{ij}, \tag{9.51}$$

$$\dot{\bar{p}}^{i} = \dot{p}^{i} + 2G\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{a} n_j + \frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}^{a} n_i\right) = \dot{p}^{i} + \dot{\sigma}_{a}^{ij} n_j . \qquad (9.52)$$

Рівняння (9.49) визначає систему трьох квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно швидкостей переміщень (тому, що складові обумовлені непружною поведінкою середовища, знаходяться в правій частині рівняння).

Для визначення поля температур в задачі *термо-в'язко-пружно-пластичності* використовується рівняння енергії виду (аналогічне задачі *пружно-пластичності*)

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} + \vec{\nabla}\cdot\left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v . \qquad (9.53)$$

Початкові умови включають розподіл температур та прирощення непружних напружень або деформацій середовища:

$$\begin{cases} T_a = \varphi_T(\mathbf{x}); \\ \dot{\sigma}_a^{ij} = \varphi_\sigma(\mathbf{x}) \vee \dot{\varepsilon}_a^{in} = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}). \end{cases} \qquad (9.54)$$

Граничні умови для (9.49) окрім зусиль (9.50) також можуть включати швидкість переміщень

$$\dot{\mathbf{u}} = 0; \qquad (9.55)$$

Теплові умови на границі середовища
- температурні

$$T = T_b; \qquad (9.56)$$

конвективні або тепловий потік

$$\mathbf{n}\cdot\left(-\lambda\nabla T\right) = \alpha\left(T - T_{\text{р}}\right) \vee \mathbf{n}\cdot\left(-\lambda\nabla T\right) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = q_{\text{n}} . \qquad (9.57)$$

9.3 Визначення параметрів стану полімерів для неізотермічних процесів. Більшість розплавів полімерів з реологічної точки зору при зростанні швидкості деформації змінюють свою поведінку з ньютонівської на неньютонівську рідину. Так, наприклад, розплави полімерів при значній швидкості деформації, що має місце в реальних умовах їх обробки, проявляють свій неньютонівськїй характер рідини, який виражається у різкому зменшенні в’язкості.

Відомо, що розплави полімерів відносяться до нестисливих рідин.

Основним рівнянням стану для рідкого середовища є фізичні рівняння, які зв’язують напруження зі швидкістю деформації:

– для нестисливої ньютонівської рідини це закон Ньютона або Нав’є-Стокса

$$\hat{\sigma} = \mu\hat{\dot{D}} - p\hat{I}, \qquad (9.58)$$

де μ – динамічна в’язкість, яка не залежить від швидкості деформації, Па·с; $\hat{\dot{D}} = \left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x^i} + \dfrac{\partial v_i}{\partial x^j} \right)$ – тензор швидкості деформації, с$^{-1}$; p – зовнішній гідростатичний тиск, Па; $\hat{I}$ – одиничний тензор другого рангу.

– для нестисливої неньютонівської рідини

$$\hat{\sigma} = \eta(\dot{\gamma})\hat{\dot{D}} - p\hat{I}, \qquad (9.59)$$

де η – ефективна в’язкість як функція другого інваріанта $\dot{\gamma}$ від $\hat{\dot{D}}$, Па·с; $\dot{\gamma} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\hat{\dot{D}} : \hat{\dot{D}}}$ – другий інваріант $\hat{\dot{D}}$, с$^{-1}$.

В’язкість неньютонівської рідини також може визначатись як функція всіх трьох інваріантів $\hat{\dot{D}}$.

Головним параметром стану, що входить у рівняння стану (9.59) є ефективна в’язкість. Ефективна в’язкість не ньютонівської рідини залежить від швидкості зсуву, напруження та температури. Залежність в’язкості від температури можна розглядати, наприклад, приймаючи умову, що $\dot{\gamma} = const$ або $\sigma_\tau = const$. Розглянемо енергію активації течії E_{σ_τ} і $E_{\dot{\gamma}}$. Величина E_{σ_τ} – може залежати від того напруження, при якому вона обчислюється, а величина $E_{\dot{\gamma}}$ відповідно – від значення швидкості зсуву. Обидві величини заздалегідь співпадають в області ньютонівської течії, де енергія активації течії не залежить від напруження або швидкості зсуву.

Розглянемо зв'язок між E_{σ_τ} і $E_{\dot{\gamma}}$, який був встановлений А.Бестулом та Г. Белчером. Повний диференціал функції $\eta(\sigma_\tau, T)$ дорівнює

$$d\eta = \left(\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_\tau}\right)_T d\sigma_\tau + \left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{\sigma_\tau} dT\,.$$

Якщо розділити цю рівність на dT та розглянути отримане співвідношення при умові $\dot{\gamma} = const$, то

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{\dot{\gamma}} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_\tau}\right)_T \left(\frac{\partial\sigma_\tau}{\partial T}\right)_{\dot{\gamma}} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{\sigma_\tau}.$$

Після перетворень, враховуючи те, що $\left(\frac{\partial\sigma_\tau}{\partial\eta}\right)_{\dot{\gamma}} = \dot{\gamma}$, отримаємо

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{\sigma_\tau} / \left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{\dot{\gamma}} = 1 - \dot{\gamma}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_\tau}\right)_T. \tag{9.60}$$

Ця формула Бестула-Белчера легко перетворюється у вираз

$$E_{\sigma_\tau} / E_{\dot{\gamma}} = 1 - \dot{\gamma}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_\tau}\right)_T, \tag{9.61}$$

де $E_{\sigma_\tau} = \left.\frac{\partial \ln\eta}{\partial\left(T^{-1}\right)}\right|_{\sigma_\tau = const}$; $E_{\dot{\gamma}} = \left.\frac{\partial \ln\eta}{\partial\left(T^{-1}\right)}\right|_{\dot{\gamma} = const}$.

При постійній температурі зі зростанням напруження в'язкість полімерних систем зазвичай зменшується. Це значить, що $\left(\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_\tau}\right)_T < 0$ і відповідно із формули (9.61) витікає умова $E_{\sigma_\tau} > E_{\dot{\gamma}}$.

В багатьох практично важливих випадках, наприклад для оцінки впливу температури на стабільність технологічного процесу переробки полімеру, важливою є величина $E_{\dot{\gamma}}$. Це пов'язано з тим, що деякі технологічні процеси протікають при постійних швидкостях зсуву. В цьому випадку $E_{\dot{\gamma}}$ визначає температурну залежність в'язкості.

Формула (9.60) дозволяє знайти величину $E_{\sigma_\tau} / E_{\dot{\gamma}}$, якщо відомо вид функції $\eta(\sigma_\tau)$. В порівняно вузькому діапазоні значень σ_τ та достатньому віддаленні від області режимів течії, для яких в'язкість може бути прийнята рівною її початковому значенню, широко застосовується степеневий закон

$$\eta = K\sigma_\tau^{(n-1)/n}.$$

де K і n постійні.

Тоді

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_\tau}\right)_T = \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{\eta}{\sigma_\tau}; \qquad \frac{E_{\sigma_\tau}}{E_{\dot\gamma}} = \frac{1}{n}.$$

Степеневий закон закон з врахуванням температурної залежності в'язкості для різних класів рідин має вигляд

$$\eta = k\dot\gamma^{n-1}H(T), \tag{9.62}$$

де k – величина середньої в'язкості рідини, Па·с; $\dot\gamma$ – другий інваріант $\dot{\hat{D}}$, с$^{-1}$; n – показник степеня, який визначає клас рідини; $H(T) = \exp\left[\frac{E_a}{RT_a}\left(\frac{1}{T-T_0} - \frac{1}{T_a - T_0}\right)\right]$; E_a – енергія активації течії, Дж/моль; R – газова стала, Дж/(моль·К); T_a – температура активації; T_0 – температура відліку.

При $n=1$ маємо ньютонівську рідину; при $n>1$ – дилатантну рідину; при $n<1$ – псевдо-пластик.

ДАДАТОК В

Приклади розв’язання типових задач МСС

Задача В.1 Ввести просторову систему координат і Лагранжеві координати частинок та знайти закон руху у таких випадках:

а) тверде тіло рухається поступально зі швидкістю постійною за напрямком та величиною *v*;

б) тверде тіло обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю ω.

Розв’язок

Введемо в просторі декартову систему координат (x_1, x_2, x_3). За Лагранжеві координати частинки візьмемо координати (ξ_1, ξ_2, ξ_3) точки простору, в якому частинка знаходилась в момент часу $t = 0$.

а) Нехай вісь x_1 направлена за вектором швидкості v. Рух полягає в переносі тіла в напрямку осі x_1 на відстань vt. Тоді закон руху можна записати у виді

$$x_1 = vt + \xi_1,\ x_2 = \xi_2,\ \ x_3 = \xi_3,$$

що і треба було знайти.

б) *Перший розв’язок.* Нехай вісь x_3 направлена вздовж осі обертання, яка є нерухомою у просторі. Тоді рух полягає в повороті навколо неї на кут ωt. Перетворення вектора початкового положення частинки у вектор її положення в момент часу t здійснюється при такому повороті ортогональної матриці

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Тому закон руху має вид (в результаті добутку матриці на вектор)
$x_1 = \xi_1 \cos\omega t - \xi_2 \sin\omega t$, $x_2 = \xi_1 \sin\omega t + \xi_2 \cos\omega t$, $x_3 = \xi_3$.

Другий розв’язок. Відповідність $F \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$ векторів евклідового простору і трійок чисел не обов’язково встановлюється у вигляді

$$a_1 = x_1,\ a_2 = x_2,\ a_3 = x_3,$$

де (x_1, x_2, x_3) – компоненти радіуса вектора $\mathbf{r}$ в декартовій системі координат.

Наприклад, можна використовувати циліндричні координати

$$x_1 = R,\ x_2 = \varphi,\ x_3 = z,$$

де R – відстань від кінця вектора $\mathbf{r}$ до осі x_3; φ – кут між площиною, яка проходить через $\mathbf{r}$ і вісь x_3, і площиною x_1Ox_3; $z = x_3$. При обертанні навколо осі x_3 циліндричні координати R і z частинки очевидно не змінюються, а координата φ змінюється за час t на величину ωt, якщо кутова швидкість постійна. Тому закон руху в циліндричних координатах має вид

$$R = R_0,\ \varphi = \omega t + \varphi_0,\ z = z_0,$$

тут (R_0, φ_0, z_0) – Лагранжеві координати частинки.

Таким чином, декартова система координат не завжди є зручною.

Задача В.2 Деформація задана у Лагранжевій формі: $x^1 = \xi^1 + \xi^3(e^2 - 1)$, $x^2 = \xi^2 + \xi^3(e^2 - e^{-2})$, $x^3 = \xi^3 e^2$, де e – константа число e. Довести, що якобіан J відмінний від нуля, і знайти Ейлереві рівняння, що описують цю деформацію.

Розв'язок

Якобіан J переходу від змінних Ейлера до змінних Лагранжа визначається за формулою

$$J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}. \qquad (В.1)$$

Визначимо похідні:

$$\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}=\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\xi^1+\xi^3\left(e^2-1\right)\right)=1\,;\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}=\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\xi^1+\xi^3\left(e^2-1\right)\right)=0\,;$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \xi^3}=\frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\xi^1+\xi^3\left(e^2-1\right)\right)=\left(e^2-1\right);\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1}=\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\xi^2+\xi^3\left(e^2-e^{-2}\right)\right)=0\,;$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}=\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\xi^2+\xi^3\left(e^2-e^{-2}\right)\right)=1\,;$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \xi^3}=\frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\xi^2+\xi^3\left(e^2-e^{-2}\right)\right)=\left(e^2-e^{-2}\right);$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial \xi^1}=\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\xi^3 e^2\right)=0\,;\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2}=\frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\xi^3 e^2\right)=0\,;\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3}=\frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\xi^3 e^2\right)=e^2\,.$$

Після підстановки знайдених похідних в (В.1) отримуємо, що

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0 & e^2-1\\ 0 & 1 & e^2-e^{-2}\\ 0 & 0 & e^2\end{vmatrix}=e^2\neq 0\,.$$

Тобто задані функції деформації є взаємно однозначними функціями, оскільки $J\neq 0$. Тому формули $x^i=x^i\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)$ можна вирішити відносно ξ^1,ξ^2,ξ^3 та представити у вигляді однозначних неперервних функцій

$$\xi^i=\xi^i\left(x^1,x^2,x^3,t\right)=\xi^i\left(\vec{x},t\right).$$

Лагранжева форма запису деформації має вигляд

$$x^i=x^i\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right). \qquad (В.2)$$

Ейлерева форма запису деформації має вигляд

$$\xi^i=\xi^i\left(x^1,x^2,x^3,t\right). \qquad (В.3)$$

Форму (В.3) отримують з (В.2) шляхом розв’язання (В.2) відносно змінних ξ^1,ξ^2,ξ^3

$$x^3 = \xi^3 e^2 \to \xi^3 = x^3 e^{-2};$$

$$x^2 = \xi^2 + \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right) \to \xi^2 = x^2 - \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right) \to \xi^2 = x^2 - x^3 e^{-2}\left(e^2 - e^{-2}\right) \to$$

$$\to \xi^2 = x^2 - x^3\left(1 - e^{-4}\right) \to \xi^2 = x^2 + x^3\left(e^{-4} - 1\right);$$

$$x^1 = \xi^1 + \xi^3\left(e^2 - 1\right) \to \xi^1 = x^1 - \xi^3\left(e^2 - 1\right) \to \xi^1 = x^1 - x^3 e^{-2}\left(e^2 - 1\right) \to$$

$$\to \xi^1 = x^1 - x^3\left(1 - e^{-2}\right) \to \xi^1 = x^1 + x^3\left(e^{-2} - 1\right).$$

Тобто отримали такі розв’язки для системи відліку Ейлера

$$\begin{gathered} \xi^1 = x^1 + x^3\left(e^{-2} - 1\right); \\ \xi^2 = x^2 + x^3\left(e^{-4} - 1\right); \\ \xi^3 = x^3 e^{-2}. \end{gathered}$$

Задача В.3 Рух середовища відбувається з полем швидкості

$$v_1 = kx_1,\ v_2 = -kx_2,\ v_3 = 0,\ k = \mathrm{const}$$

і полем густини

$$\rho = \rho_0 A x_2 e^{kt},\ \rho_0, A = \mathrm{const}.$$

Знайти швидкість зміни густини в кожній із частинок середовища.

Розв’язок

Запишемо рівняння нерозривності

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

В декартовій системі координат рівняння нерозривності приймає вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3} = -\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right).$$

Звідки нескладно визначити $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ – швидкість зміни густини

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}\right)-\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right).$$

Спочатку знайдемо похідні за координатами

$$v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1}=kx_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho_0 Ax_2e^{kt}\right)=0\,,$$

$$v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2}=-kx_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho_0 Ax_2e^{kt}\right)=-kx_2\rho_0 Ae^{kt}\,,$$

$$v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho_0 Ax_2e^{kt}\right)=0\,,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)=\rho\left(\frac{\partial(kx_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(-kx_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(0)}{\partial x_3}\right)=$$
$$=\rho(k-k+0)=0.$$

Тоді, після підстановки отриманих виразів для похідних, отримуємо вираз для швидкості зміни густини в кожній із частинок середовища

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(0-kx_2\rho_0 Ae^{kt}+0\right)-0=kx_2\rho_0 Ae^{kt}\,,$$

що і треба було знайти.

Задача В.4 Покажіть, що за допомогою тензора Леві-Чівіта, що змішаний добуток трьох векторів $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ може бути представлений в такому вигляді

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\varepsilon_{ijk}a^i b^j c^k$$

в будь-якій системі координат.

Розв’язок

Змішаний добуток векторів можна представити через компоненти у вигляді визначника (який можна визначити, наприклад, за правилом Крамера)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2- \qquad \text{(B.4)}$$

$$-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

Скористаємось символом Леві-Чевіта ε_{ijk}, який має 27 компонент і в будь-якій ортогональній системі координат визначається в такій формі:

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases} 1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3; \\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3; \\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i=j, \text{ або } j=k, \text{ або } k=i). \end{cases}$$

Тобто, скориставшись рисунком 1 нескладно записати

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,$$
$$\varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=-1, \qquad \text{(B.5)}$$

а всі інші 18 компонент, у яких символи повторюються, дорівнюють нулю.

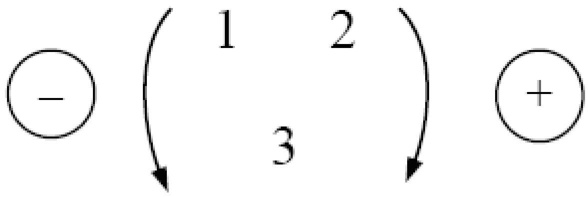


Рисунок 1 – до визначення ε_{ijk}

Із порівняння індексів при компонентах векторів $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ і знаків в (B.4) з індексацією і знаками символів Леві-Чевіта ε_{ijk} в (B.5) витікає формула для визначення змішаного добутку трьох векторів $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ за допомогою тензора Леві-Чівіта

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\varepsilon_{ijk}a^ib^jc^k,$$

що і треба було показати. Змішаний добуток 3-х векторів є скаляром і не змінюється при перетворенні координат.

Задача B.5 В деякій точці тіла в декартовій ортогональній системі координат тензор напружень задано такими компонентами (Па)

$$(\sigma^{ij})=\begin{pmatrix} 100 & 100 & 160 \\ 100 & 0 & -150 \\ 160 & -150 & -60 \end{pmatrix}.$$

Для площадки з нормаллю $n_1 = 1/2,\ n_2 = 1/2,\ n_3 = 1/\sqrt{2}$, знайти компоненти вектора $\mathbf{p}_n$, а також величину тангенціального $p_{n\tau}$ і нормального p_{nn} напружень та кут θ між $\mathbf{p}_n$ і $\mathbf{n}$.

Розв'язок

Компоненти вектора $\mathbf{p}_n$

$$p_n^1 = \sigma^{1j} n_j = 100\frac{1}{2} + 100\frac{1}{2} + 160\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 213\,\text{Па},$$

$$p_n^2 = \sigma^{2j} n_j = 100\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} - 150\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -56\,\text{Па},$$

$$p_n^3 = \sigma^{3j} n_j = 160\frac{1}{2} - 150\frac{1}{2} - 60\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -37\,\text{Па},$$

$$|\mathbf{p}_n| = \sqrt{\left(p_n^1\right)^2 + \left(p_n^2\right)^2 + \left(p_n^3\right)^2} = \sqrt{213^2 + (-56)^2 + (-37)^2} \approx 223 \text{ Па}.$$

Нормальна складова вектора напружень p_{nn} визначається із співвідношення

$$p_{nn} = p_n^i n_i = 213\frac{1}{2} - 56\frac{1}{2} - 37\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 52 \text{ Па}.$$

Величина тангенціальної складової вектора напружень $p_{n\tau}$ визначається за формулою

$$\left(p_{n\tau}\right)^2 = p_n^i p_n^i - \left(p_{nn}\right)^2,$$

звідки

$$p_{n\tau} = \sqrt{p_n^i p_n^i - \left(p_{nn}\right)^2} = \sqrt{213^2 + (-56)^2 + (-37)^2 - 52^2} \approx 217 \text{ Па}.$$

Кут θ між $\mathbf{p}_n$ і $\mathbf{n}$ знаходиться за формулою

$$\cos\theta = p_{nn} / |\mathbf{p}_n| = \frac{52}{223} \approx 0{,}23,$$

$$\theta = \arccos(0{,}23) = 76{,}7\ ^\circ,$$

що і треба було знайти.

Задача В.6 Використовуючи закон Фур'є, отримати вираз для масового притоку теплоти $dq^{(e)}$, якщо теплопровідність:

а) $\chi = \text{const}$; б) $\chi = \chi(T)$.

Розв'язок

Закон Фур'є для ізотропних тіл записується як

$$\mathbf{q} = -\chi \operatorname{grad} T,$$

де $\mathbf{q}$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м^2;

Тоді маємо, що

$$\text{а)}\ \frac{dq^{(e)}}{dt} = -\frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{\rho} = -\frac{\operatorname{div}(-\chi \operatorname{grad} T)}{\rho} = \frac{\nabla(\chi \nabla T)}{\rho} = \frac{\chi}{\rho}\nabla^2 T = \frac{\chi}{\rho}\Delta T,$$

де $q^{(e)}$ – масовий приток теплоти, Дж/кг; t – час, с; $\frac{dq^{(e)}}{dt}$ – масовий приток теплоти за одиницю часу, Вт/кг; $\mathbf{q}$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м^2; ρ – густина, кг/м^3; χ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); div – оператор дивергенції (набла $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)$), 1/м; $\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат, 1/м^2; T – температура, К.

$$\text{б)}\ \frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}[\chi(T)\operatorname{grad} T] = \frac{\chi(T)}{\rho}\Delta T + \frac{1}{\rho}\frac{d\chi(T)}{dT}(\nabla T)^2.$$

Другий доданок останнього виразу перетворюється таким чином

$$\frac{1}{\rho}[\operatorname{div}\chi(T)]\operatorname{grad} T = \frac{1}{\rho}[\nabla\chi(T)]\nabla T = \frac{1}{\rho}\frac{d\chi(T)}{dT}\nabla T \nabla T = \frac{1}{\rho}\frac{d\chi(T)}{dT}(\nabla T)^2.$$

Тут $[\nabla\chi(T)] = \frac{d\chi(T)}{dT}\nabla T$ – похідна від функції $\chi(T)$ вираженої неявно.

Задача В.7 Показати, що у нестисливої в’язкої рідини ентропія кожної частинки при адіабатному русі в загальному випадку збільшується, а в ізотермічному лишається постійною.

Розв’язок

Запишемо тотожність Гібса

$$d\Psi = -sdT + \frac{dp}{\rho}, \tag{B.6}$$

$$\text{або } d\Psi = -sdT + vdp,$$

де $v = 1/\rho$ – масовий об’єм; $\Psi(p,T) \equiv u(T) - Ts + p/\rho$ – термодинамічний потенціал Гібса; s – ентропія; T – температура; p – тиск; ρ – густина.

Виходячи з (В.6) для нестисливої рідини маємо, що ентальпія рідини є функцією температури $s = s(T)$

$$s = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_p.$$

Тому ентропія кожної частинки нестисливої в’язкої рідини при адіабатному русі в загальному випадку збільшується

$$ds = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}\right)_p > 0,$$

(тотожність Гібса можна перетворити до виду $du(T) = p\dfrac{d\rho}{\rho^2} + Tds$, а для нестисливої рідини $d\rho$=0 маємо $du(T) = Tds$, тому $ds = \dfrac{du(T)}{T} > 0$), а при ізотермічному процесі $T = \mathrm{const}$, тому і $s = \mathrm{const}$, що і треба було показати.

Перетворення тотожності Гібса

$$d\left(u - Ts + \frac{p}{\rho}\right) = -sdT + \frac{dp}{\rho} \Rightarrow$$

$$du - Tds - sdT + \frac{dp}{\rho} - p\frac{d\rho}{\rho^2} = -sdT + \frac{dp}{\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du - Tds - p\frac{d\rho}{\rho^2} = 0 \Rightarrow du = Tds + p\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Задача В.8 Показати, що якщо для деякого ідеального газу виконується рівняння Клайперона $p = R\rho T$, то густина внутрішньої енергії u цього газу і питома теплоємність при постійному об'ємі c_V є функціями тільки температури T і для знаходження виразу для u достатньо задати $c_V(T)$.

Розв'язок

Тотожність Гібса

$$d\Psi = -sdT + \frac{dp}{\rho}, \tag{В.7}$$

де $\Psi(p,T) \equiv u(T) - Ts + p/\rho$ термодинамічний потенціал Гібса; s – ентропія; T – температура; p – тиск; ρ – густина,

Рівняння (В.7) можна перетворити, підставляючи $p = R\rho T$, таким чином

$$du = p\frac{d\rho}{\rho^2} + Tds = T\left(R\frac{d\rho}{\rho} + ds\right) = Td(R\ln\rho + s) = Td\varphi, \tag{В.8}$$

де $\varphi = s + R\ln\rho$.

Для одержання (В.8) скористалися перетворенням виразу термодинамічного потенціалу Гібса задачі В.7.

З (В.8) витікає, що $u = \text{const}$, якщо $\varphi = \text{const}$, тобто $u = u(\varphi)$, $T = \dfrac{du}{d\varphi} = T(\varphi)$, тому $\varphi = \varphi(T)$, тобто $u = u(T)$. Цей висновок справедливий, якщо наперед вважається, що s і u можуть залежати від T і ρ, але не залежати від похідних T і ρ за часом. При $\rho = \text{const}$, $du = dq$ і $du = (du/dT)dT$, $dq = c_V dT$, тому

$$c_V = \frac{du}{dT} = c_V(T), \text{ а } u = \int c_V(T)dT,$$

що і треба було показати.

Задача В.9 Зразок із лінійно-пружного матеріалу знаходиться між двома парами паралельних жорстких стінок, так що його поперечні розміри не можуть змінюватись. На торцях діють однорідні стискуючі напруження p. Знайти напруження і деформації в матеріалі, вважаючи, що між ним та стінками тертя відсутнє.

Розв'язок

За умовами задачі маємо, що:

– на торцях зразка діють однорідні стискуючі напруження p (приймемо цей напрямок за x_1), то нормальні напруження σ_{11} будуть дорівнювати

$$\sigma_{11} = -p \text{ і } \sigma_{22} = \sigma_{33},\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

– поперечні розміри зразка не змінюються, тобто поперечна деформація зразка дорівнює нулю

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0,\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Деформацію ε_{11} знайдемо із узагальненого закону Гука для тензора деформації

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}.$$

Тоді для ε_{11} при умові, що $\sigma_{11} = -p$ і $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, маємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\sigma_{11} + 2\sigma_{22}) + \frac{1}{2\mu}\sigma_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(-p + 2\sigma_{22}) - \frac{1}{2\mu}p.$$

Із узагальненого закону Гука для напружень

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

знайдемо складову напруження σ_{22} при умові, що $\varepsilon_{22} = 0$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + 0 + 0) + 2\mu \cdot 0 = \lambda\varepsilon_{11}.$$

В результаті для знаходження ε_{11} і σ_{22} маємо лінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(-p+2\sigma_{22}\right) - \dfrac{1}{2\mu}p, \\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11}. \end{cases}$$

Підставляючи σ_{22} з другого рівняння системи рівнянь в перше, отримуємо лінійне рівняння відносно ε_{11}

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(-p+2\lambda\varepsilon_{11}\right) - \frac{1}{2\mu}p\,.$$

В результаті розв’язання отриманого рівняння, одержуємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda p}{2\mu(3\lambda+2\mu)} - \frac{2\lambda^2\varepsilon_{11}}{2\mu(3\lambda+2\mu)} - \frac{1}{2\mu}p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\left(1+\frac{2\lambda^2}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right) = p\left(\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} - \frac{1}{2\mu}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)+2\lambda^2}{2\mu(3\lambda+2\mu)} = p\frac{\lambda-(3\lambda+2\mu)}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\left(2\mu(3\lambda+2\mu)+2\lambda^2\right) = p\left(\lambda-(3\lambda+2\mu)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = p\frac{\lambda-(3\lambda+2\mu)}{2\mu(3\lambda+2\mu)+2\lambda^2} = -p\frac{2(\lambda+\mu)}{2\left[\mu(3\lambda+2\mu)+\lambda^2\right]} =$$

$$= -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+3\lambda\mu+2\mu^2} = -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+\lambda\mu+2\lambda\mu+2\mu^2} =$$

$$= -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda(\lambda+\mu)+2\mu(\lambda+\mu)} = -p\frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)} =$$

$$= -\frac{p}{\lambda+2\mu}.$$

Тобто

$$\varepsilon_{11} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu}.$$

Тоді

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} = -\frac{p\lambda}{\lambda + 2\mu},$$

що і треба було знайти.

Задача В.10 Напружений стан, що описується кульовим тензором напружень $\sigma_{ij} = -pg_{ij}$, називається всебічним стисканням. Визначити компоненти деформації і відносну зміну об'єму θ. Коефіцієнт пропорційності між p і θ називається модулем об'ємного стискання K. Знайти вираз для K через E і ν та через коефіцієнти Ламе λ і μ.

Розв'язок

Для тензора деформацій при $\sigma_{ij} = -pg_{ij}$ співвідношення $\left(\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\right)$ приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(-pg_{ij} + \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)}g_{ij}(3p)\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\left(-1 + \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\left(\frac{-3\lambda - 2\mu + 3\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\frac{-2\mu}{3\lambda + 2\mu} =$$
$$= -\frac{pg_{ij}}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{1}{3}\frac{pg_{ij}}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}.$$

Відносна зміну об'єму $\theta = \varepsilon_{ii}$,

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{1}{3}\frac{pg_{ii}}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{1}{3}\frac{p \cdot 3}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu},$$

тоді $\theta = -\dfrac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}$.

Для модуля об'ємного стискання, записаного через коефіцієнти Ламе, маємо

$$K = -\frac{p}{\varepsilon_{ii}} = -\frac{p}{-\dfrac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}} = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

або через модуль пружності E і коефіцієнт Пуасона ν будемо мати

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3}\frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

де $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ і $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

Що і треба було знайти.