

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**В. А. Ванін**

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ  
МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

**Навчальний посібник**  
**для студентів машинобудівних та енергетичних спеціальностей**  
**НТУ «ХП»**  
**усіх форм навчання**

Рекомендовано  
редакційно-видавничою  
радою НТУ «ХП»,  
протокол № 3 від 10.10.2018 р.

Харків  
НТУ «ХП»  
2018

*Рецензенти:*

*Николаєв О. Г.*, д-р.фіз-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу Національного аерокосмічного університету ім М.Є.Жуковського

*Пацегон М. Ф.*, д-р.фіз-мат. наук, професор кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В.Н.Каразіна.

**Ванін В.А.**

**В 17** Математичні моделі та чисельні методи в задачах механіки суцільного середовища: Навчальний посібник / Ванін В.А.– Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – \_209 с.

ISBN

Розглядаються питання побудови послідовності математичних моделей механічних систем та фізичних процесів в них на основі теоретичних положень механіки та рівнянь від матеріальної точки до суцільного середовища. Для простих моделей дифузійного та конвективного теплопереносу наводяться ефективні чисельні (метод скінчених різниць-МСР, та об'ємів МСО, метод скінчених елементів-МГ, МСЕ) методи. Розглядаються теоретичні положення методів побудови таких чисельних реалізацій. Для багатовимірних задач викладено основні алгоритми методу розщеплення їх на одновимірні та найпростіші за фізичними процесами.

Для студентів-магістрів, які пройшли підготовку за машинобудівними та енергетичними спеціальностями.

Іл. 44 Бібліогр. 24

ISBN

УДК 519.872:514.86

© В.А. Ванін 2018 р.

© НТУ «ХПІ», 2018

---

## ВСТУП

В навчальному посібнику розглядаються методи математичного моделювання в рамках спеціального курсу для магістрів машинобудівних спеціальностей. Тому основна увага звертається на засоби побудови математичних моделей багатовимірного нестационарного руху від матеріальної точки до суцільного середовища (де формівне середовище, рідина і газ відрізняються завданням конкретних зв'язків між тензором напружень и тензорами деформацій та швидкостей деформацій). По відомій схемі, після побудови моделі системи або процесу, будується адекватна дискретна модель для її чисельного дослідження. Отримані результати чисельних досліджень аналізуються на фізичний зміст і, при необхідності, корегується вихідна модель з подальшим її чисельним дослідженням.

Методи наближених обчислень, які використовуються в інженерній практиці, багаточисельні. Інженерні задачі відрізняються значним об'ємом обчислювальної роботи, конкретним науково-технічним змістом, великим арсеналом використовуваних методів побудов розв'язків, необхідністю завершення обчислювального процесу побудовою графіків і отримання інтегральних характеристик. В посібнику проведений відбір чисельних методів для типових задач які зустрічаються в інженерних розрахунках.

Опис методів зорієнтовано на конкретну реалізацію відповідних алгоритмів на ПК. Деякі особливості алгоритмів ілюструються на прикладах. Даються рекомендації методологічного плану по вивченню тем в рамках курсу математичного моделювання.

Вивчення поведінки досліджуваної системи або процесу провадиться на їх математичних моделях. В залежності від необхідної інформації про систему застосовують відповідні математичні моделі. Можливо створити послідовність моделей із підвищенням ступені їх адекватності для систем чи процесів. Від моделі матеріальної точки до моделі суцільного

середовища-такий шлях проходить дослідник при вивченні конкретних систем. Умовно можливо навести таку послідовність моделей:

– рівняння руху матеріальної точки

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t), \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0;$$

– система рівнянь руху сукупності матеріальних точок

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t), \quad \vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0}, \quad \dot{\vec{r}}_i(0) = \vec{v}_{i0}, \quad i = 1, \dots, n;$$

– система рівнянь руху твердого тіла

$$\frac{d \vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d \vec{M}}{dt} = \vec{K};$$

– рівняння руху деформівного суцільного середовища із теплопровідністю та в'язкістю.

Врахування процесів теплопровідності та в'язкості проведено в моделях наступного пункту. Зупинимось на елементарних відомостях про дві найбільш розповсюджених моделі суцільного середовища— модель руху газу (рідини) та модель деформівного твердого тіла.

Нижче наведена система рівнянь руху деформівного середовища, яка складається із 20-ти рівнянь

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \rho v_i = 0 \text{ –закон збереження маси:}$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla_j (\rho v_i v_j + \sigma_{i,j}) = F_i, \quad \rho(x_1, x_2, x_3, t) \text{ –закон збереження імпульсу руху;}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_j (E v_j + g_i) + \sigma_{i,j} \dot{\epsilon}_{i,j} = Q_i \text{ –закон збереження енергії;}$$

$$\frac{du_i}{dt} = v_i, \quad i = 1, 2, 3 \text{ –кінематичний зв'язок переміщень із швидкостями}$$

руху частинок суцільного середовища;

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j u^k), \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ — геометричні}$$

співвідношення;

$$\dot{\varepsilon}_{i,j} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ — кінематичні співвідношення;}$$

$$E = \rho(e + \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2}) \text{ — повна енергія частки середовища;}$$

$$e = e(p, \rho) \text{ — внутрішня енергія (для ідеального газу } e = \frac{p}{(k-1)\rho}),$$

відносно 26-ти невідомих функцій

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t), \quad E(x_1, x_2, x_3, t), \quad u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{i,j},$$

$\dot{\varepsilon}_{i,j}, \sigma_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3$ . Тензори  $\varepsilon_{i,j}, \dot{\varepsilon}_{i,j}, \sigma_{i,j}$  симетричні.

Додаткові співвідношення, описуючі реакцію суцільного середовища на процес його деформування у вигляді виникаючих в ній напружень, задаються у вигляді (фізичні додаткові умови)

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{i,j}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T), \quad i, j = 1, 2, 3$$

і замикають наведену систему диференціальних рівнянь.

Після вибору математичної моделі процесу або моделі поведінки системи дослідник повинен поставити правильну математичну задачу для неї у вигляді задачі Коші, крайової задачі або початково-крайової задачі для яких відомі умови існування та єдності розв'язку. Часто буває, що для реальної задачі такі дані відсутні. Тоді основний тягар наближеного дослідження властивостей розв'язку задачі переноситься на побудову ефективного чисельного методу. Його властивості одночасно використовуються для доведення існування та єдності розв'язку апроксимованої задачі і отримання, дослідження властивостей наближеного розв'язку.

---

## Розділ 1

### Від рівнянь руху матеріальної точки до рівнянь динаміки суцільного середовища

#### §1 Рівняння руху механічної системи із однієї та декількох матеріальних точок.

Поняття матеріальної точки є одним із основних в механіці. Положення її в просторі в момент часу  $t$  визначається радіус-вектором  $\vec{r}(t)$  з проєкціями на вісі обраної декартової системи координат  $(x(t), y(t), z(t))$ .

Швидкість руху матеріальної точки визначається як  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , або  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}$ .

Для визначення положення системи із  $N$  матеріальних точок в просторі необхідно задати  $N$  радіус-векторів ( $3N$  координат). Число величин, які необхідно задати для однозначного визначення положення системи, називають числом її ступенів свободи. Можливе використання недекартової системи координат  $\vec{q}(t)$ . В ній ступені свободи називають узагальненими. Знання величин узагальнених координат ще не визначає положення системи в наступні моменти часу. Одночасне знання всіх координат і швидкостей повністю визначає механічний стан системи. Задані значення положення та швидкості при наявності рівнянь, які їх зв'язують, дозволяють знайти прискорення. Такі рівняння називаються рівняннями руху. Відносно величин  $\vec{r}(t)$  маємо диференціальні рівняння другого порядку, інтегрування яких дозволяє визначити траєкторію руху механічної системи.

Найбільш загальна форма закону руху механічних систем можна отримати з принципу найменшої дії (інакше принципу Гамільтона). Відповідно до якого механічна система характеризується функцією

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) \quad (1.1)$$

Тоді, між моментами часу  $t = t_1$  та  $t = t_2$  система рухається так, що інтеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.2)$$

приймає найменше значення. Функція(1.1) називається функцією Лагранжа, а інтеграл (1.2) дією.

Варіація траєкторії руху відносно дійсної траєкторії

$$q(t) + \delta q(t)$$

при фіксованих нульових значення на початку і в кінці руху призводить до зміни значення інтегралу (1.2) (його варіації).

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

яку, після інтегрування частинами, перетворимо до вигляду

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

В силу довільності варіації траєкторії отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.3)$$

При наявності декількох степеней свободи отримаємо систему рівнянь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1.4)$$

В механіці такі рівняння називаються рівняннями Лагранжа. Задача Коші для такої системи диференційних рівнянь другого порядку дозволяє знайти її єдиний розв'язок при заданих початковому положенню та швидкості системи точок.

Якщо механічна система складається із двох частин А і В, кожна із них замкнена, і має свою функцію Лагранжа  $L_A$ ,  $L_B$ , то при розділенні на велику відстань, де взаємодія їх дуже мала, функція Лагранжа всієї системи має вигляд суми функцій Лагранжа її частин. Це властивість адитивності функції Лагранжа. Також, множення функції Лагранжа на довільну

---

ненульову константу не змінює рівнянь руху. Властивість адитивності вимагає щоб ця константа була однаковою для функцій Лагранжа всіх систем, що призводить до вибору одиниць виміру в фізичних системах. Зауважимо, що коли дві функції Лагранжа відрізняються на повну похідні за часом, то вони породжують однакові рівняння Лагранжа.

**1.1 Принцип Галілея.** Вивчення механічних явищ розпочинають із вибору системи відліку (системи координат). Рівняння руху в різних системах мають різний вигляд. Важливо знайти таку систему координат де рівняння руху мають найпростіший вигляд. По відношенню до довільної системи відліку простір є неоднорідним та неізотропним. Це означає, що коли тіло не взаємодіє із іншими тілами, його різні положення механічно не еквівалентні. Час в таких системах також неоднорідний. Такі властивості простору та часу привносили б в рівняння опису механічних явищ зайве ускладнення. З'ясовано, що існують такі системи відліку по відношенню до яких простір є однорідним та ізотропним, а час однорідним. Такі системи відліку називають інерційними. В ній функція Лагранжа для матеріальної точки, яка вільно рухається, залежить тільки від абсолютної величини швидкості, або квадрату швидкості

$$L = L(\vec{v}^2)$$

Оскільки функція Лагранжа не залежить від радіус-вектора то рівняння Лагранжа для матеріальної точки мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0,$$

звідки  $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = const$ . Враховуючи, що функція Лагранжа залежить тільки від швидкості маємо

$$\vec{v} = const$$

Тоді маємо, що в інерційній системі координат вільний рух відбувається з постійною по величині та напрямом швидкістю. Це твердження відоме як закон інерції.



Рух в іншій системі відліку, яка рухається прямолінійно і рівномірно по відношенні до першої системи, також відбувається з постійною швидкістю. Тоді існує не одна, а багато інерційних систем відліку, які рухаються одна відносно другої прямолінійно та рівномірно. В таких системах відліку властивості простору та часу однакові, також однакові всі закони механіки, що складає зміст принципу відносності Галілея – одного із найважливіших принципів механіки. В подальшому будемо розглядати механічні явища тільки в таких системах відліку.

Повна механічна еквівалентність не дозволяє надати перевагу одній з них. Координати вибраної точки в двох різних інерційних системах координат зв'язані співвідношення

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{V}t \quad (1.5)$$

Час в них змінюється однаково

$$t' = t \quad (1.6)$$

Формули (1.5), (1.6) називають перетворенням Галілея. Тоді принцип відносності Галілея є вимогою інваріантності (незалежності) рівнянь руху по відношенню до такого перетворення.

**1.2 Функція Лагранжа вільної матеріальної точки.** Раніше з'ясували, що функція Лагранжа для вільної матеріальної точки залежить тільки від квадрата модуля швидкості. Щоб з'ясувати вигляд такої залежності скористаємось принципом відносності Галілея. Якщо інерційна система  $K'$  рухається відносно іншої системи  $K$  з нескінченно малою швидкістю  $\vec{\varepsilon}$  то  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$ . Враховуючи, що рівняння руху мають однаковий вигляд, то їх функції Лагранжа  $L'$   $L$  відрізняються на повну похідну за часом.

Маємо

$$L' = L\left(\vec{v}'^2\right) = L\left(\vec{v}^2 + 2\vec{v}\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2\right)$$

Розгорнемо цей вираз по степеням  $\vec{\varepsilon}$  і, нехтуючи нескінченно малими величинами більш високих порядків, отримаємо

$$L\left(\vec{v}'\right) = L\left(\vec{v}\right) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} 2\vec{v}\vec{\varepsilon}$$

Другий доданок в рівності буде повною похідною за часом тоді, коли він лінійно залежить від  $\vec{v}$ . Оскільки  $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$  від швидкості не залежить, то функція Лагранжа в цьому випадку пропорційна квадрату швидкості

$$L = \frac{m}{2} v^2 \quad (1.7)$$

де  $m$ -постійна.

Враховуючи, що функція Лагранжа задовільняє принципу відносності Галілея для нескінченно малих перетворень швидкості, то вона задовольняє йому і для скінчених значень швидкості. Дійсно

$$L' = \frac{m}{2} v'^2 = \frac{m}{2} (\vec{v} + \vec{V})^2 = \frac{m}{2} v^2 + 2 \frac{m}{2} \vec{v}\vec{V} + \frac{m}{2} V^2$$

або

$$L' = L + \frac{d}{dt} \left( 2 \frac{m}{2} \vec{r}\vec{V} + \frac{m}{2} \vec{V}^2 t \right)$$

Другий доданок є повною похідною за часом і ним можна знехтувати.

Величину  $m$  називають масою матеріальної точки. Враховуючи адитивність функції Лагранжа, для системи не взаємодіючих точок маємо

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \quad (1.8)$$

Корисно замітити, що

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}$$

Тому для визначення функції Лагранжа достатньо знайти квадрат довжини елемента дуги у відповідній системі координат.

В декартових координатах, наприклад  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , тому

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

В циліндричних координатах  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$ , звідки

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

В сферичних  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

**1.3 Функція Лагранжа системи матеріальних точок.** Розглянемо систему матеріальних точок, які взаємодіють між собою але не з зовнішніми тілами; таку систему називають замкнутою. Взаємодію між точками можливо описати додавши до функції Лагранжа із не взаємодіючих точок (1.8) деяку функцію залежну тільки від координат точок. Позначимо її через  $U$ , запишемо

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \quad (1.9)$$

Такий загальний вигляд має функція Лагранжа замкнутої системи.

Суму

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

називають кінетичною енергією, а функцію  $U$  – потенціальною енергією системи. Той факт, що потенціальна енергія залежить тільки від координат точок означає про миттєвий вплив змін координат деякої точки на решту. Можна говорити, що взаємодія «розповсюджується» миттєво. Це є наслідком абсолютності часу і принципу Галілея. Якби взаємодія розповсюджувалася не миттєво (мала скінчену швидкість) то така швидкість була б різною в різних інерційних системах відліку. Також, вигляд функції Лагранжа (1.9) показує, що заміна  $t$  на  $-t$  не змінює її і рівняння руху. Значить механічний рух можливий і в зворотному напрямку. По відомій функції Лагранжа випишемо рівняння Лагранжа (рівняння руху)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}$$

і після підстановки (1.9) отримаємо рівняння Ньютона

---

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha U}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha} \quad (1.10)$$

Вектор

$$\vec{F}_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}$$

в правій частині (1.10) називають силою, яка діє на  $\alpha$ -ту точку.

Питання для самоконтролю

1. Принцип Галілея в механіці.
2. Функція Лагранжа для вільної матеріальної точки.
3. Функція Лагранжа для системи матеріальних точок.
4. Рівняння руху для однієї матеріальної точки.
5. Рівняння руху для системи матеріальних точок.

---

## §2. Закони збереження маси, імпульсу, моменту імпульсу, енергії.

Розглянемо рух механічної системи із  $s$  ступенями свободи. Для неї існують такі функції які зберігають постійне значення при русі. Такі функції називають інтегралами руху. Число незалежних інтегралів руху для замкнутої механічної системи із  $s$  ступенями свободи дорівнює  $2s-1$ . Але не всі інтеграли руху однаково важливі в механіці. Серед них є такі, постійність яких пов'язана с основними властивостями простору і часу - їх однорідністю та ізотропією. Постійність їх при взаємодії двох тіл дозволяє зробити важливі висновки по їх значенням до та після взаємодії.

Розпочнемо із закону збереження який виникає внаслідок однорідності часу. В силу цієї однорідності лагранжева функція замкнутої системи не залежить від часу. Тому повна похідна функції Лагранжа за часом може бути записана у вигляді

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

Заміняючи похідні  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$  відповідно до рівнянь Лагранжа на  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,

отримаємо вираз

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

і напишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

Звідки видно, що величина

$$E = \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) \quad (2.1)$$

---

залишається незмінною при русі замкнутої системи, а значить є інтегралом руху. Вона носить назву енергія системи. Адитивність енергії безпосередньо слідує з адитивності функції Лагранжа.

Закон збереження енергії справедливий не тільки для замкнутих систем, а й для систем які знаходяться під дією постійного зовнішнього поля. Незалежність від часу функції Лагранжа є важливим для отримання (2.1). Механічні системи, енергія яких зберігається, називають консервативними.

Раніше, було показано, що функція Лагранжа замкнутої системи має вигляд

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (2.2)$$

де  $T$  – квадратична функція швидкостей. Застосуємо до неї відому теорему Єйлера для однорідних функцій і отримаємо

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Підставимо її в (2.1), тоді

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q)$$

в декартових координатах

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^{\rightarrow 2}}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots).$$

Таким чином енергія системи може бути представлена у вигляді суми двох суттєво різних членів – кінетичної енергії, яка залежить від швидкості, та потенціальної енергії, яка залежить лише від координат частинок.

**2.1 Імпульс.** Другий закон збереження виникає у зв'язку з однорідністю простору.

В силу цієї однорідності механічні властивості замкнутої системи не змінюються при довільному паралельному переносі системи як цілого в просторі. У зв'язку з цим розглянемо нескінченно малий переніс на відрізок  $\varepsilon$  та вимагатимемо щоб функція Лагранжа залишалась незмінною.

Паралельний переніс означає перетворення, при якому усі точки системи зміщуються на один і той самий постійний вектор  $\vec{\varepsilon}$ , тобто, їх радіус-вектори  $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_a + \vec{\varepsilon}$ . Зміна функції  $L$  в результаті нескінченно малого змінення координат при незмінних швидкостях часток є

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a = \vec{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a},$$

де сума береться по всім матеріальним точкам системи. З огляду на довільність  $\vec{\varepsilon}$  вимога  $\delta L = 0$  еквівалентна вимозі

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0 \quad (2.3)$$

В силу рівняння Лагранжа отримуємо

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що у замкнутій механічній системі векторна величина

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$$

залишається незмінна при русі. Вектор  $\vec{P}$  називається імпульсом системи. Диференціюючи функцію Лагранжа (2.2), знайдемо, що імпульс виражається через швидкості точок наступним чином:

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a$$

Адитивність імпульсу очевидна. Більш того, на відміну від енергії, імпульс системи дорівнює суммі імпульсів точок

$$\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a$$

Закон збереження усіх трьох компонент вектора імпульсу має місце лише в відсутності зовнішнього поля. Однак окремі компоненти імпульсу можуть зберігатись і при наявності поля, якщо потенціальна енергія у

ньому не залежить від якої-небудь з декартових координат. При переносі уздовж відповідної координатної вісі механічні властивості системи, очевидно, не змінюються, та тим самим способом можна знайти, що проекція імпульсу на цю вісь зберігається. Так, в однородному полі, направленому уздовж вісі z, зберігаються компоненти імпульсу уздовж осей x та y.

Початкова рівність (2.3) має простий фізичний сенс. Похідна  $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$  є сила  $\vec{F}_a$ , яка діє на a-ту частинку. Таким чином, рівність (2.3) означає, що сума сил, які діють на всі частинки замкненої системи, дорівнює нулю:

$$\sum_a \vec{F}_a = 0$$

Зокрема, у випадку системи, яка складається всього з двох матеріальних точок,  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ : сила, яка діє на першу частинку з боку другої, дорівнює за величиною, але протилежна за напрямом силі, яка діє на другу частинку з боку першої. Це твердження відомо під назвою закону рівності дії і протидії.

Якщо рух описується узагальненими координатами  $q_i$ , то похідні лагранжевої функції по узагальненим швидкостям

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

називаються узагальненими імпульсами, а похідні

$$\vec{F}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

узагальненими силами. В цих позначеннях рівняння Лагранжа має вигляд:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i.$$



В декартових координатах узагальнені імпульси співпадають з компонентами векторів  $\vec{p}_a$ . В загальному випадку величини  $p_i$  є лінійними однорідними функціями узагальнених швидкостей  $\dot{q}_i$ , які не зводяться до добутку маси та швидкості.

**2.2 Центр інерції.** Імпульс замкнутої механічної системи має різні значення по відношенню до різних (інерційних) систем відліку. Якщо система відліку  $K'$  рухається відносно системи відліку  $K$  зі швидкістю  $\vec{V}$ , то швидкості  $\vec{v}'_a$  та  $\vec{v}_a$  часточок по відношенню до цих систем пов'язані співвідношеннями  $\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$ . Тоді зв'язок між значеннями  $\vec{P}$  та  $\vec{P}'$  імпульсу в цих системах надається формулою

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{v}'_a + \vec{V} \sum_a m_a,$$

або

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_a m_a. \quad (2.4)$$

Тому, завжди існує така система відліку  $K'$ , в якій повний імпульс дорівнює нулю. Покладемо в (2.4)  $\vec{P}' = 0$ , знайдемо, що швидкості цієї системи відліку дорівнює

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{v}_a}{\sum_a m_a}. \quad (2.5)$$

Якщо повний імпульс механічної системи дорівнює нулю, то кажуть, що вона знаходиться у стані спокою по відношенню до відповідної системи відліку. Це є природним узагальненням поняття спокою окремої матеріальної точки. Відповідно швидкість  $\vec{V}$ , яка дається формулою (2.5), отримує сенс швидкості «руху як загального» механічної системи з відмінним від нуля імпульсом. Ми бачимо, що закон збереження імпульсу дозволяє природним шляхом сформулювати поняття швидкості механічної системи як цілого.

---

Формула (2.5) показує, що зв'язок між імпульсом  $\vec{P}$  та швидкістю  $\vec{V}$  системи як цілого така ж, сама як була б між імпульсом та швидкістю однієї матеріальної точки з масою  $\mu = \sum m_a$ , яка дорівнює масі усіх часток в системі. Цю обставину можна сформулювати як твердження про адитивність маси.

Права сторона формули (2.5) може бути представлена як повна похідна за часом від виразу

$$\vec{R} = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}. \quad (2.6)$$

Тому можна сказати, що швидкість системи як цілого є швидкість переміщення у просторі точки, радіус-вектор якої надається формулою (2.6). Таку точку називають центром інерції системи.

Закон збереження імпульсу замкнутої системи можна сформулювати як твердження про те, що її центр інерції рухається прямолінійно та рівномірно. В такому вигляді це є узагальнення закону інерції, який було виведено для однієї вільної матеріальної точки, «центр інерції» якої співпадає з нею самою.

При вивченні механічних властивостей замкненої системи природно використовувати ту систему відліку в якій її центр інерції перебуває в спокої. Тим самим виключається з розгляду рівномірний та прямолінійний рух системи як цілого.

Енергію такої системи називають її внутрішньою енергією  $E_{\text{вн}}$ . Вона включає в себе кінетичну енергію відносного руху часточок у системі та потенціальну енергію взаємодії. Повна енергія системи, яка рухається як ціле зі швидкістю  $V$ , може бути наведена у вигляді:

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{вн}} \quad (2.7)$$

Хоча ця формула очевидна, дамо її прямий вивід. Енергії  $E$  та  $E'$  механічної системи у двох системах відліку  $K$  и  $K'$  пов'язані співвідношеннями

$$E = \frac{1}{2} \sum_a m_a \vec{v}_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a \left( \vec{v}'_a + \vec{V} \right)^2 + U =$$

$$\frac{\mu V^2}{2} + \vec{V} \sum_a m_a \vec{v}'_a + \sum_a \frac{m_a \vec{v}'_a^2}{2} + U$$

або

$$E = E' + \vec{V} \vec{P}' + \frac{\mu V^2}{2}$$

Цією формулою визначається закон перетворення енергії при переході від однієї системи відліку до іншої, подібно тому як для імпульсу цей закон надається формулою (2.4). Якщо в системі  $K'$  центр інерції знаходиться у стані спокою, то  $\vec{P}' = 0$ ,  $E' = E_{\text{вн}}$ , ми повертаємось до формули (2.7).

**2.3 Момент імпульсу.** Перейдемо до виводу закону збереження, виникнення якого пов'язано із ізотропією простору.

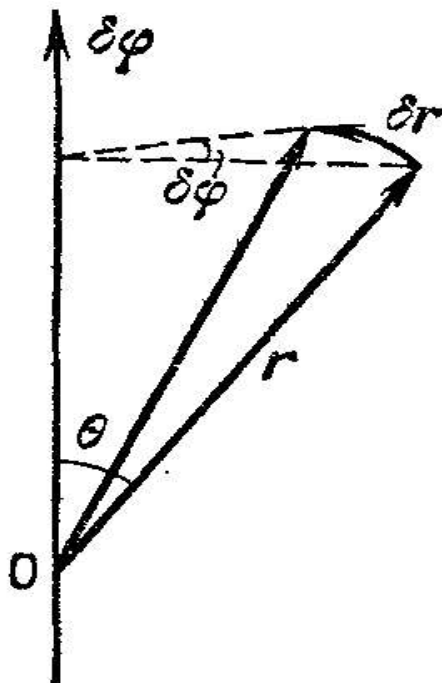
Ця ізотропія означає, що механічні властивості замкненої системи не змінюються при довільному повороті системи, як цілого, у просторі. У відповідності до цього розглянемо нескінченно малий поворот системи та вимагатимемо, щоб функція Лагранжа при цьому не змінювалась.

Введемо вектор  $\vec{\delta\varphi}$  нескінченно малого повороту, абсолютна величина якого дорівнює куту  $\delta\varphi$  повороту, а напрямок співпадає з віссю повороту (так, як напрямок повороту відповідає правилу гвинта по відношенню до напрямку  $\vec{\delta\varphi}$ , Мал.1).

Знайдемо чому дорівнює при такому повороті приріст радіус-вектору, який проведено із загального початку координат (розташованого на осі повороту) до якої-небудь із матеріальних точок системи яка обертається.

Лінійне переміщення кінця радіус-вектора пов'язано з кутом співвідношенням

$$|\delta \vec{r}| = r \sin \theta \cdot \delta \varphi$$



Мал.1

Напрямок цього вектору перпендикулярний до площини, яка проходить крізь  $\mathbf{r}$  та  $\delta \varphi$ . Тому ясно, що вектор

$$\delta \vec{r} = \left[ \delta \varphi \cdot \vec{r} \right].$$

При повороті системи змінюються напрями не тільки радіус-векторів, але й векторів швидкостей усіх часток, причому, усі вектори перетворюються по однакокому закону. Тому приріст швидкості відносно нерухомої системи координат

$$\delta \vec{v} = \left[ \delta \varphi \cdot \vec{v} \right].$$

Підставив ці вирази в умову незмінності функції Лагранжа при обертанні

$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \delta \vec{v}_a \right) = 0,$$

заміняємо похідні  $\partial L / \partial_a \vec{v} = \vec{p}_a$ ,  $\partial L / \partial \dot{r}_a = \dot{\vec{p}}_a$ , маємо

$$\sum_a \left( \dot{\vec{p}}_a \left[ \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{r}_a \right] + \vec{p}_a \left[ \delta \vec{\varphi} \cdot \vec{v}_a \right] \right) = 0.$$

Зробимо циклічну перестановку множників та виносячи  $\delta \vec{\varphi}$  за знак суми і отримаємо

$$\delta \vec{\varphi} \sum_a \left( \left[ \vec{r}_a \dot{\vec{p}}_a \right] + \left[ \vec{v}_a \vec{p}_a \right] \right) = \delta \vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a \left[ \vec{r}_a \vec{p}_a \right] = 0.$$

Зважаючи на довільність  $\delta \vec{\varphi}$  отримуємо, що

$$\frac{d}{dt} \sum_a \left[ \vec{r}_a \vec{p}_a \right] = 0,$$

Таким чином, ми приходимо до висновку, що при русі замкненої системи зберігається векторна величина

$$\vec{M} = \sum_a \left[ \vec{r}_a \vec{p}_a \right],$$

яка називається моментом імпульсу (або просто моментом) системи. Аддитивність цієї величини очевидна, крім цього, як і для імпульсу, вона не залежить від наявності або відсутності взаємодії між частинками.

Цим вичерпуються адитивні інтеграли руху. Таким чином, всяка замкнута система має всього сім таких інтегралів: енергія і по три компоненти векторів імпульсу та моменту.

Оскільки в означенні моменту входять радіус-вектори часточок, то його значення, залежить від вибору початку координат. Радіус-вектори  $\vec{r}_a$  та  $\vec{r}'_a$  однієї точки по відношенню до початку координат, зсунені на вектор  $\vec{a}$ , пов'язані співвідношенням  $\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{a}$ . Тому маємо:

$$\vec{M} = \sum_a \left[ \vec{r}_a \vec{p}_a \right] = \sum_a \left[ \vec{r}'_a \vec{p}_a \right] + \left[ \vec{a} \sum_a \vec{p}_a \right],$$

---

або

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left[ \begin{array}{c} \vec{r} \\ a \vec{P} \end{array} \right].$$

З цієї формули видно, що тільки у тому випадку, коли система як ціле знаходиться у спокою (тобто  $\vec{P} = 0$ ), її момент не залежить від вибору початку координат. На законі збереження моменту ця невизначеність його значення не відбивається, так як у замкнутій системі імпульс теж зберігається.

Виведемо таку ж формулу, яка зв'язує значення моменту імпульсу у двох різних інерційних системах відліку  $K$  та  $K'$ , з яких друга рухається відносно першої зі швидкістю  $\vec{V}$ . Будемо вважати, що початок координат у системах  $K$  та  $K'$  у поточний час співпадають. Тоді радіус-вектори часточок в обох системах однакові, швидкості ж пов'язані за допомогою  $\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{V}$ . Тому маємо:

$$\vec{M} = \sum_a m_a \left[ \begin{array}{c} \vec{r}_a \\ \vec{v}_a \end{array} \right] = \sum_a m_a \left[ \begin{array}{c} \vec{r}_a \\ \vec{v}'_a \end{array} \right] + \sum_a m_a \left[ \begin{array}{c} \vec{r}_a \\ \vec{V} \end{array} \right]$$

Перша сума в правій частині рівності є момент  $\vec{M}'$  у системі  $K'$ ; якщо ввести у другу суму радіус-вектор центра інерції відповідно до (2.6), отримаємо:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \mu \left[ \begin{array}{c} \vec{r} \\ R \vec{V} \end{array} \right].$$

Ця формула визначає закон перетворення моменту імпульсу при переході від однієї системи відліку до іншої, подібно тому, як для імпульсу та енергії аналогічні закони наведені у формулах (2.4) та (2.7).

Якщо система відліку  $K'$  є та, в якій дана механічна система знаходиться у стані спокою як ціле, то  $\vec{V}$  є швидкість центра інерції останньої, а  $\mu \vec{V}$  - її повний імпульс  $\vec{P}$  (відносно  $K$ ).

Тоді

---

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left[ \vec{R} \vec{P} \right].$$

Іншими словами, момент імпульсу  $\vec{M}$  механічної системи складається з її «особистого моменту» відносно системи відліку, в якій вона знаходиться у спокої, та момент  $\left[ \vec{R} \vec{P} \right]$ , пов'язаного з її рухом як цілої.

Закон збереження усіх трьох компонент моменту (відносно довільного початку координат) має місце тільки для замкнутої системи, в більш обмеженому вигляді цей закон може мати місце і для систем які знаходяться у зовнішньому полі. З наведеного вище очевидно, що завжди зберігається проекція моменту на таку вісь, відносно якої дія поля симетрична, і тому механічні властивості системи не змінюються при довільному обертанні навколо цієї осі, при цьому, момент повинен бути визначений відносно якої-небудь точки (початку відліку), яка лежить на тій ж самій вісі.

Найбільш важким випадком такого роду є поле з центральною симетрією, тобто поле, в якому потенціальна енергія залежить тільки від відстані до деякої визначеної точки (центру) у просторі. Вочевидь, що при русі в такому полі зберігається проекція моменту на довільну вісь, яка проходить через центр. Іншими словами, зберігається вектор моменту  $\vec{M}$ , але визначеного не відносно довільної точки простору, а відносно центра поля.

Питання для самоконтролю.

1. Функція Лагранжа однієї ізольованої матеріальної точки.
2. Закон збереження маси для системи матеріальних точок.
3. Закон збереження імпульсу для системи матеріальних точок.
4. Закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.  
Центр інерції.
5. Закон збереження енергії для системи матеріальних точок.

---

### §3 Характеристики одновимірних моделей руху матеріальної точки, системи точок, твердого тіла.

Одновимірним називається рух системи з однією ступеню свободи. Найбільш загальний вигляд лагранжевої функції такої системи, яка знаходиться у постійних зовнішніх умовах, є

$$L = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q), \quad (3.1)$$

де  $a(q)$  – деяка функція узагальненої координати  $q$ . Зокрема, якщо  $q$  є декартова координата (позначимо її  $x$ ), то (3.1) має вигляд,

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \quad (3.2)$$

Відповідні цим лагранжевим функціям рівняння руху інтегруються в узагальненому вигляді. При цьому немає необхідності виписувати саме рівняння руху а достатньо знайти його перший інтеграл – закон збереження енергії. Так, для функції Лагранжа (3.2) маємо:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Таке диференціальне рівняння першого порядку інтегрується шляхом розділення змінних. Маємо

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}.$$

Звідки

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const. \quad (3.3)$$

Дві довільні сталі в розв'язку рівняння руху – повна енергія  $E$  та постійна інтегрування.

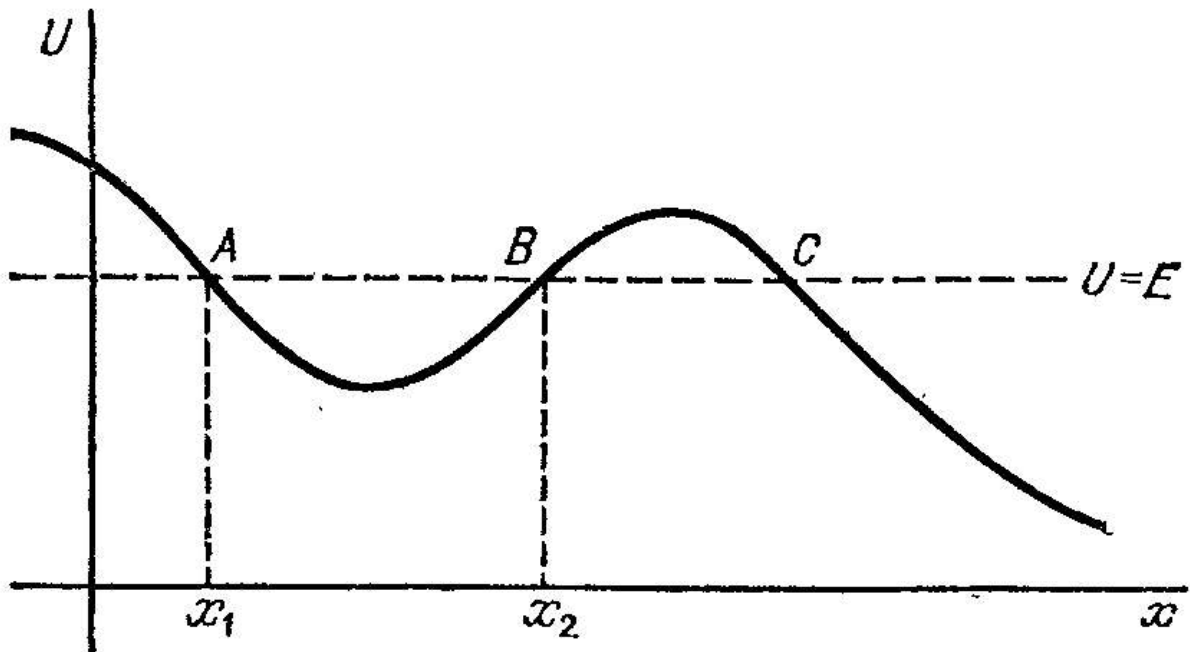
Так як кінетична енергія величина додатна, то при русі повна енергія більше потенційної, тобто, рух може бути тільки в тих областях простору де



---

$$U(x) < E.$$

Наприклад, залежність  $U(x)$  має вигляд, зображений на Мал.1. Побудувавши на цьому ж графіку горизонтальну пряму, яка відповідає заданому значенню повної енергії, ми відразу з'ясуємо можливі області руху. Так, в зображеному на Мал.1 випадку, рух може проходити лише в області  $AB$  або в області справа від  $C$ .



Мал.1

Точки, в яких потенційна енергія дорівнює повній

$$U(x) = E \quad (3.4)$$

визначають границю руху. Вони є точками зупинки, оскільки в них швидкість дорівнює нулю. Якщо область руху обмежена двома такими точками, то рух відбувається в обмеженій області простору; він є, як кажуть, фінітним. Якщо область руху не обмежена або обмежена лише з одного боку, – рух інфінітний, частинка може переміститись на нескінченність.

Одновимірний фінітний рух є коливальним – частинка здійснює рух, який періодично повторюється між двома границями (на Мал.1 у потенційній ямі  $AB$  між точками  $x_1$  та  $x_2$ ). При цьому, відповідно загальній

властивості оберненості механічного руху, час руху від  $x_1$  до  $x_2$  дорівнює часу руху від  $x_2$  до  $x_1$ . Тому період коливань  $T$ , тобто час за який точка пройде від  $x_1$  до  $x_2$  та назад, дорівнює подвійному часу проходження відрізка  $x_1x_2$ . Відповідно до (3.3) маємо

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

причому, границі  $x_1$  та  $x_2$  є коренями рівняння (3.4) при даному значенні  $E$ . Ця формула визначає період руху в залежності від повної енергії частинки.

**3.1 Момент імпульсу твердого тіла.** Величина моменту імпульсу системи залежить, як ми знаємо, від вибору точки, відносно якої він визначений. В механіці твердого тіла найбільш раціональний вибір у якості цієї точки центр інерції тіла. Нижче ми будемо розуміти під  $\vec{M}$  момент, визначений саме таким чином.

У разі вибору початку координат у центрі інерції тіла його момент  $\vec{M}$  співпадає з «особистим моментом», пов'язаним лише з рухом точок тіла відносно центра інерції. Іншими словами, у визначенні  $\vec{M} = \sum m[\vec{r} \vec{v}]$  потрібно замінити  $\vec{v}$  на  $[\vec{\Omega} \vec{r}]$ , тоді

$$\vec{M} = \sum m[\vec{r}[\vec{\Omega} \vec{r}]] = \sum m\left(r^2 \vec{\Omega} - \vec{r}\left(\vec{r} \vec{\Omega}\right)\right).$$

Або в тензорних визначеннях:

$$M_i = \sum m\{x_i^2 \Omega_i - x_i x_k \Omega_k\} = \Omega_k \sum m\{x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}.$$

Вираз  $I_{ik} = \sum m\{x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k\}$  – тензор інерції.

Нарешті, враховуючи визначення тензора інерції, отримуємо

$$M_i = I_{ik} \Omega_k.$$

Якщо осі  $x_1, x_2, x_3$  направлені уздовж головних осей інерції тіла, то ця формула дає

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3,$$

зокрема, для шарової дзиги, коли всі три головних моменту інерції співпадають, маємо

$$\vec{M} = I\vec{\Omega}.$$

Тобто, вектор моменту пропорційний вектору кутової швидкості та має однаковий із ним напрям.

У загальному випадку довільного тіла вектор  $\vec{M}$  не співпадає за своїм напрямком з вектором  $\vec{\Omega}$  і лише при обертанні тіла уздовж якої-небудь зі своїх головних осей інерції  $\vec{M}$  та  $\vec{\Omega}$  мають однакові напрями.

Розглянемо довільний рух твердого тіла, яке виникає під дією яких-небудь зовнішніх сил. Рівномірно поступальний рух будемо вважати виключеним, так що мова йде про довільне обертання тіла.

Як і у всякої замкнутої системи, момент імпульсу тіла, яке довільно обертається, постійний. Для шарової дзиги умова  $\vec{M} = \text{const}$  призводить до  $\vec{\Omega} = \text{const}$ . Це означає, що загальним випадком довільного обертання шарової дзиги є рівномірне обертання навколо постійної осі.

**3.2 Рівняння руху твердого тіла.** Оскільки тверде тіло має в загальному випадку шість ступенів вільності, то загальна система рівнянь руху повинна мати шість незалежних рівнянь. Їх можливо представити у вигляді похідних за часом від двох векторів: імпульсу та моменту тіла.

Перше з цих рівнянь отримуємо просто шляхом додавання рівнянь  $\vec{p}_a = \vec{f}_a$  для кожної з часток які складають тіло, де  $\vec{p}_a$  – імпульс частинки, а  $\vec{f}_a$  – діюча на неї сила. Розглядаючи повний імпульс тіла

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a = \mu\vec{V},$$

та повну діючу на нього силу  $\sum_a \vec{f}_a = \vec{F}$ , отримаємо

$$\frac{d \vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.5)$$

Хоча ми визначили  $\vec{F}$  як суму усіх сил  $\vec{f}_a$  які діють на кожную частинку, у том числі з боку інших часток тіла, фактично в  $\vec{F}$  входять лише сили, які діють з боку зовнішніх джерел. Всі сили взаємодії між часточками самого тіла взаємно скорочуються. Дійсно, у разі відсутності зовнішніх сил імпульс тіла, як і довільна замкнена система, повинен зберігатися, тобто повинно бути  $\vec{F} = 0$ .

Якщо  $U$  – потенціальна енергія твердого тіла у зовнішньому полі, то сила  $\vec{F}$  може бути визначена шляхом диференціювання її по координатам центра інерції тіла:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}}.$$

Дійсно, при поступальному переміщенню тіла на  $\delta \vec{R}$  настільки змінюється і радіус-вектори  $\vec{r}$  кожної точки тіла, а тому зміна потенційної енергії визначається так

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} = \delta \vec{R} \sum_a \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\delta \vec{R} \sum_a \vec{f}_a = -\vec{F} \delta \vec{R}.$$

Відмітимо, що рівняння (3.5) може бути отримано і як рівняння Лагранжа по відношенню до координат центра інерції

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

з функцією Лагранжа, для якої

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \mu \vec{V} = \vec{P}, \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F}.$$

Перейдемо до виведення другого рівняння руху, яке визначає похідну за часом від моменту імпульсу  $\vec{M}$ . Для спрощення виводу зручно вибирати

«нерухому» (інерційну) систему відліку таким чином, щоб у даний момент часу центр інерції тіла знаходився у стані спокою відносно неї.

Маємо

$$\dot{\vec{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\vec{r} \vec{p}] = \sum [\dot{\vec{r}} \vec{p}] + \sum [\vec{r} \dot{\vec{p}}]$$

в силу зробленого нами вибору системи відліку (в якому  $\vec{V} = 0$ ) значення  $\vec{r}$

в даний момент часу співпадає зі швидкістю  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ . Оскільки вектори  $\vec{v}$  та

$\vec{p} = m \vec{v}$  мають однаковий напрямок, то  $[\dot{\vec{r}} \vec{p}] = 0$ . Змінюючи також  $\vec{p}$  на

силу  $\vec{f}$ , отримуємо:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}, \quad (3.6)$$

де

$$\vec{K} = \sum [\vec{r} \vec{f}]. \quad (3.7)$$

Оскільки момент  $\vec{M}$  визначено відносно центра інерції він не змінюється при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої. Звідси слідує, що рівняння руху (3.6), отримане при певному виборі системи відліку, тим самим, у силу галілеєвського принципу відносності, справедливо в довільній інерційній системі.

Вектор  $[\vec{r} \vec{f}]$  називається моментом сили  $\vec{f}$  так що  $\vec{K}$  є добуток моментів усіх сил, які діють на тіло. Як у повній силі  $\vec{F}$ , в сумі (3.7) фактично повинні враховуватись лише зовнішні сили; у відповідність до закону збереження моменту імпульсу добуток моментів усіх сил, які діють всередині замкненої системи, повинні обертатись на нуль.

Момент сили, як і момент імпульсу, залежить, від вибору початку координат, відносно якої він визначений. В (3.6) (3.7) моменти визначаються відносно центру інерції тіла.

При переносі початку координат на відстань  $\vec{a}$  нові радіус вектори  $\vec{r}'$  точок тіла пов'язані зі старими  $\vec{r}$  за допомогою  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ . Тому

$$\vec{K} = \sum [\vec{r} \vec{f}] = \sum [\vec{r}' \vec{f}] + \sum [\vec{a} \vec{f}]$$

або

$$\vec{K} = \vec{K}' + [\vec{a} \vec{F}] \quad (3.8)$$

Звідси видно, що величина моменту сил не залежить від вибору початку координат, якщо повна сила  $\vec{F} = 0$  (у такому випадку кажуть, що на тіло діє пара сил).

Рівняння (3.6) можливо розглядати як рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \Omega} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

по відношенню до «обертаючих координат». Дійсно, диференціюючи функцію Лагранжа по компонентах вектору  $\vec{\Omega}$ , отримаємо

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik} \Omega_k = M_i.$$

Змінення потенційної енергії  $U$  при обертанні тіла на нескінченно малий кут  $\delta\varphi$  дорівнює

$$\delta U = -\sum \vec{f} \delta \vec{r} = -\sum \vec{f} [\delta \varphi \cdot \vec{r}] = -\delta \varphi \sum [\vec{r} \vec{f}] = -(\vec{K} \delta \varphi).$$

Звідки

$$\vec{K} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

так що

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \vec{K}.$$

Нехай, вектори  $\vec{F}$  та  $\vec{K}$  взаємно перпендикулярні. У цьому випадку завжди можна знайти такий вектор  $\vec{a}$ , щоб у формулі (3.8)  $\vec{K}'$  обернулось на

---

нуль, так що буде

$$\vec{K} = [a \vec{F}] \quad (3.9)$$

При цьому виборі  $\vec{a}$  неоднозначний: додавання до нього довільного вектору, паралельного  $\vec{F}$ , не змінить рівність (3.9), так що умова  $\vec{K}' = 0$  дає не конкретну точку в рухомій системи координат, а пряму лінію. Таким чином, при  $\vec{K} \perp \vec{F}$  дія всіх прикладених до нього сил може бути зведено до однієї сили  $\vec{F}$ , яка діє уздовж визначеної прямої лінії.

У випадку однорідного силового поля, в якому діюча на матеріальну точку сила  $\vec{f} = e \vec{E}$  де  $\vec{E}$  – постійний вектор, який характеризує поле, а величина  $e$  характеризує властивості часток по відношенню до даного полю, маємо

$$\vec{F} = \vec{E} \sum e, \quad \vec{K} = [\sum e \vec{r} \cdot \vec{E}].$$

Припускаючи, що  $\sum e \neq 0$ , введемо радіус-вектор  $\vec{r}_0$  визначений відповідно

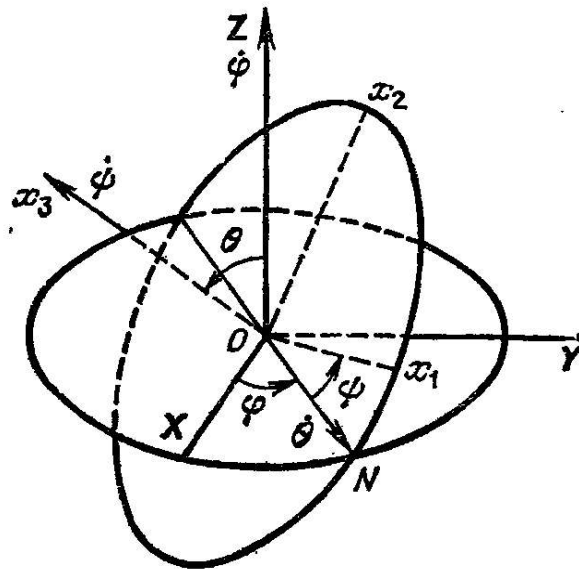
$$\vec{r}_0 = \sum e \vec{r} / \sum e \quad (3.10)$$

Тоді ми отримуємо наступний простий вираз для повного моменту сил

$$\vec{K} = [\vec{r}_0 \vec{F}].$$

Таким чином, при русі твердого тіла в однорідному полі вплив поля зводиться до дії однієї сили  $\mathbf{F}$ , «яка прикладена» у точці з радіус-вектором (3.10). Розташування цієї точки загалом визначається властивостями самого тіла: в полі тяжіння, наприклад, вона співпадає з центром інерції тіла.

**3.3 Ейлерові кути.** Як вже вказувалось, для опису руху твердого тіла можна використовувати три координатами його центра інерції та які-небудь три кути, які визначають орієнтацію осей  $x_1, x_2, x_3$  рухомої системи координат відносно нерухомої системи  $X, Y, Z$ .



Мал.2

У якості цих кутів часто буває зручно вибрати, так звані, ейлереві кути. Так, як нас зараз цікавлять тільки кути між осями координат, ми виберемо початок обох систем в одній точці (Мал.2). Рухома площина  $x_1x_2$  перетинає нерухому  $XY$  по деякій прямій ( $ON$  на Мал.2), яку називають лінією вузлів. Ця лінія, очевидно, перпендикулярна як до осі  $Z$ , так і до осі  $x_3$ ; її позитивне направлення виберемо так, щоб воно відповідало направленню векторного добутку  $\left[ \begin{matrix} \vec{z} & \vec{x}_3 \end{matrix} \right]$  (де  $\vec{z}, \vec{x}_3$  – орти у напрямку осей  $Z$  та  $x_3$ ).

У якості величин, які визначають положення осей  $x_1, x_2, x_3$  відносно осей  $X, Y, Z$ , приймемо наступні кути: кут  $\theta$  між осями  $Z$  та  $x_3$ , кут  $\varphi$  між осями  $X$  та  $N$ , кут  $\psi$  між осями  $N$  та  $x_1$ . Кути  $\varphi$  та  $\psi$  відраховуються у напрямку, який визначається правилом гвинта, відповідно навколо осей  $Z$  та  $x_3$ . Кут  $\theta$  пробігає значення від нуля до  $\pi$ , а кути  $\varphi$  та  $\psi$  – від нуля до  $2\pi$ .

Виразимо зараз компоненти вектору кутової швидкості  $\vec{\Omega}$  по рухомим осям  $x_1, x_2, x_3$  через ейлереві кути та їх похідні. Для цього потрібно

спроєкувати на ці осі вектори кутових швидкостей  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ . Кутова



швидкість  $\dot{\theta}$  направлена по лінії вузлів ON та її складові по осям  $x_1, x_2, x_3$  дорівнюють

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \dot{\theta}_3 = 0.$$

Кутова швидкість  $\dot{\varphi}$  направлена вздовж осі Z; її проекція на ось  $x_3$  дорівнює  $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi} \cos \theta$ , а проекція на площину  $x_1x_2$  дорівнює  $\dot{\varphi} \sin \theta$ .

Розкладаючи останню на складові по осям  $x_1$  та  $x_2$ , отримуємо:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi.$$

Кутова швидкість  $\dot{\psi}$  направлена по осі  $x_3$ . Збираючи усі складові по кожній з осей, отримуємо

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (3.11)$$

Якщо осі  $x_1, x_2, x_3$  вибрані по головним осям інерції твердого тіла, то обертальну кінетичну енергію виразимо через ейлереві кути підстановкою (3.11) в рівність

$$T_{об} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2).$$

Так, для симетричної дзиги, у якої  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , отримуємо

$$T_{об} = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2.$$

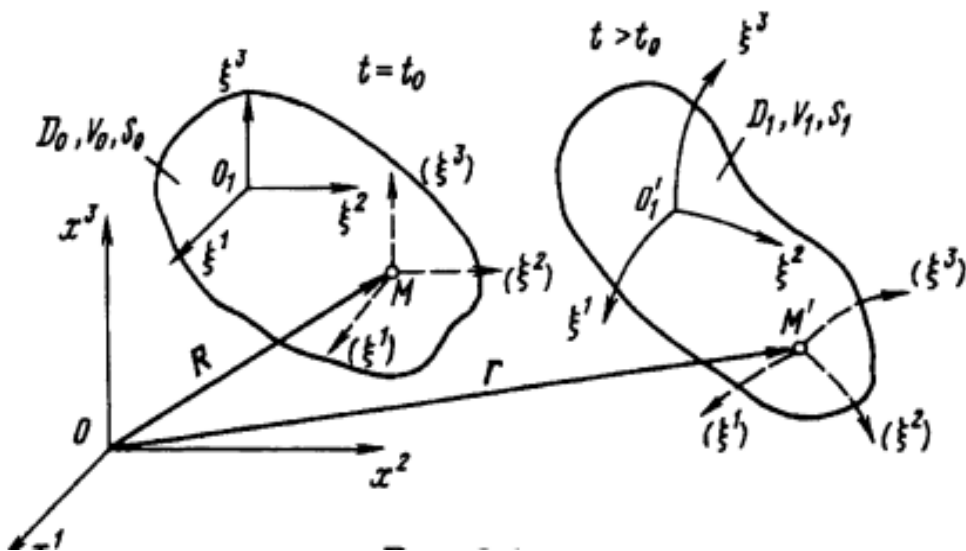
Питання для самоконтролю.

1. Імпульс твердого тіла.
2. Момент імпульсу твердого тіла
3. Центр інерції твердого тіла.
4. Рівняння руху твердого тіла

#### §4 Суцільне середовище. Основні гіпотези. Тензор деформації.

Вивчення еволюції суцільного середовища проводиться із використанням двох підходів – статистичного та феноменологічного. В подальшому обмежимося в рамках даного курсу феноменологічним підходом із відповідними гіпотезами суцільності середовища, однорідності та ізотропності простору та часу, абсолютності часу.

Довільний механічний рух, який відбувається у просторі за часом є зміна положення тіл або частинок, які їх складають, відносно інших тіл. На Мал.1. для деякого початкового моменту  $t = t_0$



Мал.1

показана занята суцільним середовищем область простору  $D_0$  з об'ємом  $V_0$  і обмежена поверхнею  $S_0$ . Це може бути, наприклад, тверде тіло, яке рухається в повітрі, частина газового, твердого або рідкого середовища.

Індивідуальний об'єм – частина суцільного середовища яка складається із одних і тих частинок(молекул). Значення індивідуального об'єму  $V$  може змінюватися в процесі руху під дією зовнішніх сил. При цьому буде змінюватися і форма індивідуального об'єму. Граничним

---

значенням індивідуального об'єму є індивідуальна точка, об'єм якої  $V = 0$ . Відповідно, термін, нескінченно малий об'єм, коректно використовувати тільки при феноменологічному вивченні суцільного середовища.

Нехай в довільний момент часу  $t \geq t_0$  вибраний в початковий момент часу індивідуальний об'єм перемістився і займає частину простору  $D_1$  об'ємом  $V_1$ , обмеженого поверхнею  $S_1$ .

В механіці суцільного середовища використовують два типу систем відліку; система відліку спостерігача (СВС) та супроводжуюча система відліку (ССВ). Так, система відліку спостерігача (ейлерова система) – це система відліку по відношенню до якої визначається рух матеріального континуума. На Мал1. СВС зображена точкою  $O$  и проведених через неї осей координат (в даному випадку-ортогональна система координат). Положення точок тривимірного простору відносно такої системи відліку визначається завданням трьох координат  $x^i = x_0^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  - проєкцій радіус-вектору  $\vec{r}$  на осі координат. Вибір тіла або точки відліку і конкретного вигляду системи координат (декартова, циліндрична або сферична) визначається зручністю опису та дослідження руху деформованого тіла. Рекомендується вибирати інерційну систему координат, корисні властивості якої(закон Ньютона) відмічалися раніше. Тому при розв'язанні прикладних задач в якості точки відліку приймають Землю. Зазначимо особливості опису руху матеріального континуума. Рух однієї точки, розглядали раніше, однозначно визначається завданням залежності її радіус-вектору від часу

$$x^i = x^i(t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

Складніше описати рух матеріального континуума як сукупності індивідуальних точок. Індивідуалізація точок реалізується шляхом завдання їх координат в початковий момент часу. Тоді подальший рух визначається знанням залежностей

$$x^i = x^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Використовують два способи індивідуалізації. Перший спосіб базується на завданні початкових координат точок в системі відліку спостерігача. Другий спосіб ґрунтується на завданні координат індивідуальних точок в системі координат, зв'язаній із частинами суцільного середовища – супроводжуюча система відліку. В силу довільності вибору точки відліку можливо вибрати точку  $O_1$  (Мал.1). Вона є індивідуальною точкою і рухається разом із суцільним середовищем, звідки і назва такої системи. Положення довільної точки визначається координатами в цій системі координат, а закон руху приймає вигляд

$$x^i = x^i(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

**4.1 Лагранжеві та Ейлерові координати.** Точка зору Лагранжа на дослідження руху суцільного середовища спирається на дослідження змін величин (наприклад, швидкості  $\vec{v}$ , температура  $T$ ), які характеризують рух та стан кожної її індивідуальної точки. В якості незалежних змінних при математичному опису руху із позицій Лагранжа використовуються координати  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$  (або  $x_0^1, x_0^2, x_0^3$ ) та час  $t$ . Такі координати називають лагранжевими. Тоді при використанні лагранжевого підходу поведінка суцільного середовища описується залежностями

$$x^i = x^i(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t) \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\vec{v} = \vec{v}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t),$$

$$T = T(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t).$$

Точка зору Ейлера на вивчення руху суцільного середовища (ейлерів підхід) обумовлена дослідженням зміни величин, які описують рух та стан суцільного середовища, для кожної точки простору в які попадають різні індивідуальні точки. Незалежними змінними в цьому випадку виступають координати  $x^1, x^2, x^3$  які визначають положення точок простору відносно системи спостерігача. Вони називаються ейлеревими змінними. Відповідно,

при ейлеревому підході характеристики суцільного середовища залежать від  $x^1, x^2, x^3$ , наприклад

$$\vec{v} = v^i(x^1, x^2, x^3, t), \quad T = T(x^1, x^2, x^3, t) \text{ і т.д.}$$

Різниця цих підходів полягає в тому, що у першому випадку слідкують за кожною індивідуальною частиною середовища, а в другому-за кожною точкою простору де рухається суцільне середовище. Наприклад, за станом атмосфери можна слідкувати із метеозондів (за частинками середовища), або із наземних метеостанцій (за точками простору). Наведені два способи опису руху суцільного середовища еквівалентні, відомі характеристики в одній системі координат можна перетворити в залежності в іншій системі координат.

**4.2 Тензор деформацій – характеристика деформованого стану матеріального континуума.** Відповідно до феноменологічної теорії при вивченні поведінки деформованого середовища вводяться різні фізичні величини, кількісно описуючі рух та стан досліджуваного середовища.

До числа відомих величин таких як радіус-вектор  $\vec{r}$  переміщення  $\vec{u}$ , швидкість  $\vec{v}$  та прискорення  $\vec{a}$ .

Нагадаємо, що радіус-вектор  $\vec{r}$  визначає положення індивідуальних точок матеріального континуума відносно системи відліку спостерігача. Знайти залежність  $\vec{r} = \vec{r}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t)$  від лагранжевих координат  $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$  (або  $x_0^1, x_0^2, x_0^3$ ) означає знайти закон руху суцільного середовища і знати рух довільної його індивідуальної точки із нескінченного їх числа.

За визначенням, переміщення  $\vec{u}$  - векторна величина, характеризує зміну положення індивідуальних точок відносно СВС. Переміщення вводиться як різниця радіус-векторів миттєвого та початкового положення індивідуальної точки.;  $\vec{u} = \vec{R} - \vec{r}$ . Кожен вектор можна розкласти по ортогональному базису, так  $\vec{u} = u^i \vec{r}_i$ .

Швидкість  $\vec{v}$  - векторна величина, яка характеризує бистроту зміни переміщення індивідуальних точок континуума відносно СВС. Значення швидкості визначається похідною

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Вектор швидкості також можна розкласти по базису  $\vec{v} = v^i \vec{r}_i$ . Крім наведених вище кінематичних величин для опису деформованого стану вводяться додаткові величини, які кількісно характеризують зміну відстаней при деформації середовища. Тензор деформацій є характеристикою деформованого стану середовища і визначається для довільної його точки. Тензор деформацій вводиться для порівняння відстаней між даною точкою і точками які знаходяться біля неї на нескінченно малій відстані, до деформування і після деформування.

Виведені геометричні співвідношення, які визначають компоненти тензора деформацій через переміщення, мають вигляд

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j u_k), \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Геометричні співвідношення включають два доданки лінійні відносно похідних, і квадратний тричлен  $\nabla_i u_k \nabla_j u_k$  (сума по однаковим індексам). У випадку малих деформацій геометричні співвідношення приймають вигляд

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

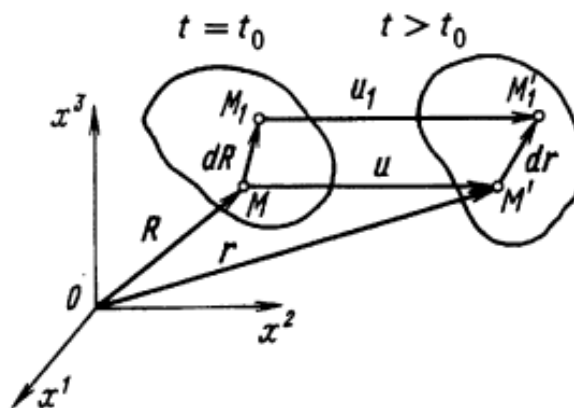
В подальшому будемо при побудові математичних моделей вважати виконаним (4.1).

Сукупність дев'яти його компонент утворює симетричну матрицю

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

де  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Тоді матриця визначається шістьма різними елементами. Компоненти тензора деформацій мають геометричний зміст. На головній діагоналі знаходяться коефіцієнти відносного розтягування(стискання) відрізків вповодж координатних ліній супроводжуючої системи координат. Решта елементів характеризують зміну кутів між координатними лініями супроводжуючої системи координат внаслідок деформування середовища в околі даної індивідуальної точки. Тензор деформації дозволяє визначити відносне розтягування або стискання матеріального відрізка в довільному напрямі в околі даної точки.

Із курсу теоретичної механіки відомо, що рух абсолютно твердого тіла складається із поступального руху центра мас і обертального руху навколо осі обертання, яка проходить через центр інерції. Рух деформованого середовища є біль складним, тому що можлива зміна відстаней між точками матеріального континуума. При цьому з'являється деформаційна складова руху. Рух деформованого середовища ускладнюється ще і тому, що обертальна та деформована складова можуть бути різними для різних індивідуальних точок.



Мал.2

На Мал.2 наведене положення індивідуального об'єму суцільного середовища для моменту  $t = t_0$ . Довільна точка  $M$  визначається в СВС

радіус-вектором  $\vec{R} = \vec{R}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ . В нескінченно малому околі індивідуальної точки М виберемо іншу точку  $M_1$  і відстань між ними  $d\vec{R} = \vec{R}_i d\zeta^i$ ,  $\vec{R}_i$  - базисні вектори недеформованої ССВ в даній точці. В довільний момент  $t > t_0$  індивідуальний перемістився в нове положення і разом з ним перемістилися точки М та  $M_1$  на відстані  $\vec{u}$  та  $\vec{u}_1$  відповідно. Тоді  $\vec{u}_1 = \vec{u} + d\vec{u}$ . Величина  $d\vec{u} = d\vec{u}_D + d\vec{u}_P$ , де  $d\vec{u}_D$  - переміщення за рахунок деформування (зсув та зміна об'єму), а  $d\vec{u}_P$  пов'язана із поворотом малого окола як цілого. Відповідно маємо  $d\vec{u}_D = \varepsilon \vec{R}$ , а

$$d\vec{u}_P = \omega \vec{R}. \quad \text{Тензор повороту} \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{де}$$

$$\omega_{ij} = -0.5(\nabla_i u_j - \nabla_j u_i) = -\omega_{ji}. \quad \text{Маємо } \text{grad} \vec{u} = \varepsilon + \omega$$

Тензор деформацій вводиться у зв'язку із переходом від простого деформування, наприклад, одновісне розтягування або стискання стрижня при можливих переміщеннях його плоских перетинів тільки в одному напрямі, до більш складного, коли є просторові переміщення індивідуальних точок. Введений тензор деформацій є узагальненням відомого із курсу опору матеріалів поняття осьової деформації.

Із множини напрямів руху матеріального відрізка можливо вибрати такі, що в результаті деформації змінюється тільки довжина в цьому напрямі. Такі напрями називають головними напрямими (головні осі деформації). Тоді, в головних осях зсувні деформації відсутні. Складові тензора деформації в напрямі головних осей називають головними деформаціями. Із математичної точки зору головні деформації та осі знаходяться як власні числа  $\det(\varepsilon - \lambda I) = 0$  та власні вектори  $\varepsilon \vec{y} = \lambda \vec{y}$  матриці  $\varepsilon$  (тензора) деформацій.

В головних осях тензор деформацій має вигляд



$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Основні інваріанти тензора деформацій, які зберігаються при переході із однієї системи координат в іншу є лінійний інваріант  $T_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ , квадратичний  $T_2(\varepsilon) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$  та кубічний  $T_3(\varepsilon) = \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3$ .

Середня деформація є похідним інваріант від першого основного інваріанта  $\bar{\varepsilon} = \frac{T_1(\varepsilon)}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$ , а інтенсивність деформації  $\varepsilon_i$  є похідним

інваріантом від першого та другого основних інваріантів

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3T_2(\varepsilon) - T_1^2(\varepsilon)}. \quad \text{В ортогональній системі координат}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad \text{Значення коефіцієнта } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ вибрано}$$

із умови співпадіння інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i$  із головною деформацією  $\varepsilon_1$  при розтягуванні стрижня вдовж осі. Фізичний зміст  $\bar{\varepsilon}$  виявляється у випадку коли деформації малі при порівнянні об'ємів до деформування і після. При малих деформаціях  $T_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\bar{\varepsilon}$ . Тоді середня деформація характеризує зміну об'єму індивідуальних частинок матеріального континуума. Інтенсивність деформацій є інтегральною характеристикою зсувних деформацій в околі індивідуальної точки і пов'язано із зміною форми індивідуальних частинок.

При загальній деформації відбувається як зміна об'єму індивідуальних частинок, так і їх форми. В повній деформації, яка визначається тензором деформації  $\varepsilon$  можна виокремити складові які визначають зміну об'єму та зміну форми. Тому  $\varepsilon$  складається із двох тензорів – кульовий тензор деформації  $S_\varepsilon$  та девіатора тензора деформації

$$D_\varepsilon: \varepsilon = S_\varepsilon + D_\varepsilon.$$

Поле переміщень в СВС  $\vec{u} = \vec{u}(x^1, x^2, x^3, t)$  породжує тензор деформацій  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x^1, x^2, x^3, t) = 0.5(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j u_k)$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Очевидно, дев'ять компонент, побудованих по трьох компонентах вектору переміщень, не можуть бути незалежними. Існує зв'язок між ними у вигляді умов сумісності деформацій. Таких співвідношень шість. Розглянемо випадок малих деформацій, тоді в декартовій прямокутній системі координат, де  $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ , а

$$\varepsilon_{ij} = 0.5\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right).$$

Умова сумісності запишеться для

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \text{та} \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = 0.5\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогічно записуються і решта п'ять співвідношень сумісності деформацій.

Фізичний зміст умов сумісності деформацій полягає в тому, що при їх виконанні зберігається суцільність матеріального континуума при його деформуванні.

Вважаємо, що деформований стан заданий, а значить визначений тензор деформацій  $\varepsilon$ .

**4.3 Тензор швидкостей деформацій** Тензор швидкостей деформацій

$\dot{\varepsilon} = (\dot{\varepsilon}_{ij})_{i,j=1}^3$  — ще одна фізична величина, яка вводиться для характеристики руху деформованого континуума. Він характеризує швидкість зміни деформованого стану в індивідуальних точках суцільного середовища. Тензор деформацій вводився при порівнянні відстаней між точками матеріального континуума до деформації і після неї. Тензор швидкостей деформацій також вводиться на основі порівняння двох станів: стан в

момент  $t$  та в момент  $t + \Delta t$ . Тензор швидкостей деформації вводиться як тензор, компоненти якого визначаються відношенням приросту деформації до інтервалу часу  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = 0.5(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (4.2)$$

Співвідношення (4.2) для компонент тензора швидкостей деформацій із компонентами вектору швидкості називають кінематичними. Очевидно, що тензор швидкостей деформацій симетричний-  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji}$ . При русі матеріального континуума виокремлюють три його складових: поступальний рух, деформаційний та обертальний. Їх походження пов'язане із представленням

$$\text{grad } \vec{v} = \nabla_i v_j r^i r^j$$

у вигляді  $\nabla_i v_j r^i r^j = 0.5(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) r^i r^j + 0.5(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) r^i r^j$ . При цьому перший доданок представляє тензор швидкостей деформацій, а другий характеризує миттєве обертання навколо даної точки  $M$  як єдиного цілого і називається тензором швидкостей обертання. Враховуючи розгортання

$$\text{grad } \vec{v} = \dot{\varepsilon} + \dot{\omega}$$

і вираз для  $\vec{v}_1 = \vec{v} + d\vec{v} = \vec{v} + d\vec{v}_D + d\vec{v}_\Pi$ , де  $d\vec{v}_D = d\vec{r} \dot{\varepsilon}$  визначається тензором швидкостей деформацій і представляє деформівну складову відносної швидкості, а  $d\vec{v}_\Pi = d\vec{r} \dot{\omega}$  характеризує обертову складову відносної швидкості руху. Легко побачити, що тензор

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\omega}_{12} & \dot{\omega}_{13} \\ -\dot{\omega}_{12} & 0 & \dot{\omega}_{23} \\ -\dot{\omega}_{13} & -\dot{\omega}_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

визначається трьома відмінними від нуля величинами  $\dot{\omega}_{12}, \dot{\omega}_{13}, \dot{\omega}_{23}$ .

---

Питання для самоконтролю.

1. Гіпотези суцільного середовища.
2. Лагранжеві та Ейлерові координати.
3. Тензор деформацій та його складові.
4. Тензор швидкостей деформацій та його складові.

---

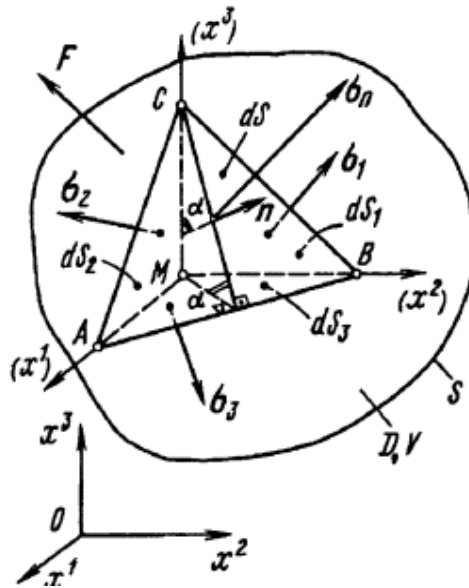
## §5 Тензор напружень. Основна система рівнянь термомеханіки суцільного середовища.

**5.1 Тензор напружень** Процесу зміни відстаней між точками матеріального континуума середовище породжує опір. Для його характеристики вводять тензор напружень – міру інтенсивності виникаючих внутрішніх сил опору деформації. Вигляд тензора напружень виводиться на основі аналізу стану рівноваги елементарного тетраедра, ребра якого співпадають із координатними лініями деякої прямокутної системи координат і визначення вектору повного напруження на площадці довільної орієнтації.

Розглянемо довільну точку  $M$  індивідуального об'єму який займає частину простору  $D$  об'ємом  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$  і знаходиться під дією сил  $\vec{F}$  (Мал.1). Введемо систему координат  $x^1, x^2, x^3$  пов'язану із СВС, або із довільною точкою простору. Через  $M$  проведемо три координатні лінії і розглянемо нескінченно малий тетраедр  $ABCM$ . Умова рівноваги елементарного тетраедра під дією внутрішніх сил для вектору повного напруження має вигляд  $\vec{\sigma}_n dS = \vec{\sigma}_1 dS_1 + \vec{\sigma}_2 dS_2 + \vec{\sigma}_3 dS_3$ . Враховуючи, що  $dS_i = dS \cdot n^i, \dots i=1,2,3$ ,  $n^i$  - направляючі косинуси вектору нормалі  $\vec{n}$ , отримаємо  $\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_1 n^1 + \vec{\sigma}_2 n^2 + \vec{\sigma}_3 n^3$ . Що дозволяє ввести характеристику напруженого стану, як тензор напружень (матрицю напружень). Нормальне напруження визначається як проекція повного напруження на напрям нормалі до довільної площадки

$$\sigma_{(n)} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n^i n^j$$

і залежить від компонент тензора напружень та орієнтації вектору нормалі.



Мал.1

Дотична складова вектору напружень  $\vec{\tau}$  відповідно до геометрії (Мал.1) визначається співвідношенням  $\tau^2 = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_n - \sigma_{(n)}^2$ . Тому, знаючи тензор напружень в індивідуальній точці суцільного середовища, можливо визначити повне, нормальне та дотичне значення напружень на довільній площадці яка проходить через дану точку, що дозволяє розглядати тензор напружень як характеристику напруженого стану середовища в даній точці.

Із нескінченного числа площадок, які можна провести через точку матеріального континуума доцільно виокремити головні площадки на яких відсутнє дотичне напруження. Напрямо по нормалі до таких площадок визначає головні напрями тензора напружень, або головні осі тензора напружень, а нормальні напруження, які діють на такі площадки називаються головними значеннями тензора напружень.

Головні осі і головні значення тензора напружень визначаються по аналогії із принципом знаходження головних осей та головних значень тензора деформації. Головні напруження визначаються як власні числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  тензора напружень

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0.$$

Головні осі визначаються власними векторами тензора напружень.

В головних осях тензор напружень має вигляд

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Основні інваріанти тензора напружень, які зберігаються при переході із однієї системи координат в іншу: лінійний  $T_1(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ,

квадратичний  $T_2(\sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ , кубічний  $T_3(\sigma) = \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3$ .

Установлено, що більш зручно аналізувати напружений стан за допомогою похідних інваріантів тензора напружень – середнього напруження  $\bar{\sigma}$  та інтенсивності напружень  $\sigma_i$ . Середнє напруження є похідним інваріант від

першого основного інваріанта  $\bar{\sigma} = \frac{T_1(\sigma)}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ , а інтенсивність

напружень  $\sigma_i$  є похідним інваріантом від першого та другого основних

інваріантів  $\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3T_2(\sigma) - T_1^2(\sigma)}$ . В ортогональній системі координат

$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ . Середнє напруження  $\bar{\sigma}$

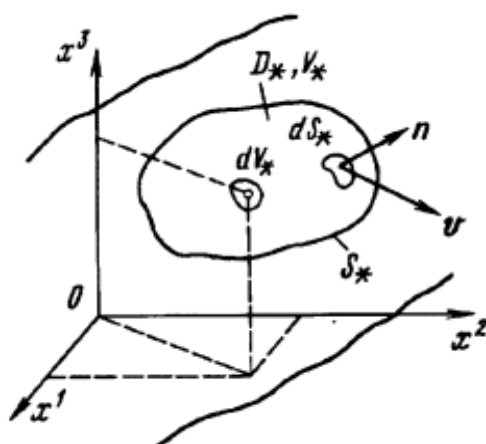
пов'язане із нормальною складовою напружень і визначає тиск в індивідуальній частинці суцільного середовища, поява якого пов'язана із зміною її об'єму. Інтенсивність напружень  $\sigma_i$  є інтегральною характеристикою дотичних напружень які діють в околі даної точки матеріального континуума. Оскільки поява дотичних напружень є реакцією на зміну форми індивідуальних частинок, то величину інтенсивності напружень можна розглядати як усереднену їх характеристику.

Аналогічно, як для тензора деформації тензор напружень також можна представити у вигляді суми двох тензорів – шарового тензора напружень  $S_\sigma$  і девіатора тензор напружень  $D_\sigma$ : Тоді  $\sigma = S_\sigma + D_\sigma$

характеризує повне напруження, яке виникає в індивідуальних частинках внаслідок зміни об'єму та форми відповідно.

**5.2 Закони збереження в механіці суцільного середовища. Основна система рівнянь термомеханіки.** Поведінка суцільного середовища при його навантаженні, рух і деформування підпорядковане основним фундаментальним законам природи – законам збереження маси, імпульсу, енергії (перший закон термодинаміки) і другому закону термодинаміки. Стосовно до матеріального континууму закони збереження записуються у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Закон збереження маси записується у вигляді рівняння нерозривності суцільного середовища спочатку в інтегральній формі.



Мал.2

Виокремивши деяку частину простору  $D_*$  із незмінним об'ємом  $V_*$  обмежену поверхнею  $S_*$  в СВС (Мал.2). Тоді, для нескінченно малого проміжку часу зміна маси в виділеному об'ємі  $V_*$  дорівнює масі, яка протікає через поверхню  $S_*$  за цей час

$$\int_{V_*} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_* + \oint_{S_*} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS_* = 0$$

За теоремою Остроградського-Гауса перетворимо поверхневий інтеграл в об'ємний



$$\int_{V_*} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV_* = 0.$$

Враховуючи довільність об'єму  $V_*$  отримаємо рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

або в компонентах вектору швидкості

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v_i) = 0, i = 1, 2, 3.$$

Закон збереження імпульсу має вигляд рівняння руху матеріального середовища. Одним із фундаментальних законів механіки є другий закон Ньютона. Відповідно до нього, зміна імпульсу (кількість руху) матеріальної точки дорівнює імпульсу рівнодіючої зовнішніх сил які діють на

матеріальну точку:  $m \frac{d \vec{v}}{dt} = \vec{F}$ . Для матеріального континуума цей закон

сформулюється аналогічно. Тоді, відповідно для об'єму (Мал.3), можна записати

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{F} dV + \oint_S p_n dS,$$

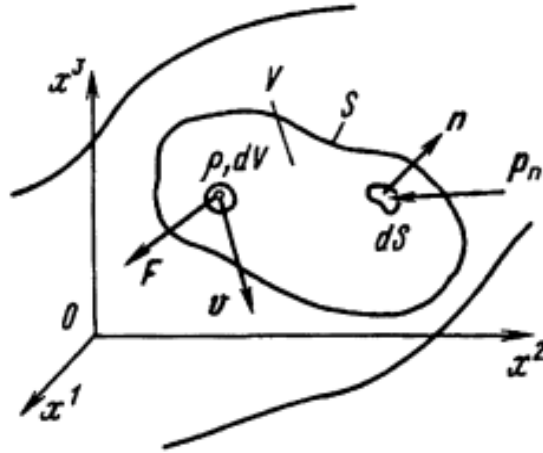
де  $p_n$  – поверхнева сила. Використовуючи зв'язок поверхневого інтегралу

із об'ємним та вираз для повної поверхневої сили  $\oint_S p_n dS = \oint_S \vec{\sigma} \vec{n} dS$ ,

отримаємо

$$\int_{V_*} \left( \rho \frac{d \vec{v}}{dt} - \operatorname{div}(\vec{\sigma}) - \vec{F} \right) dV_* = 0.$$

В силу довільності індивідуального об'єму  $V$  підінтегральний вираз дорівнює нулю.



Мал.3

Тоді можемо записати диференціальне рівняння руху

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \text{div}(\sigma) - \vec{F} = 0$$

В цьому рівнянні використана повна похідна за часом яка записується

у вигляді  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v}$ , де  $(\vec{v} \text{ grad})$ -діадний добуток двох векторів

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \text{ grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Розглянемо випадок опису руху суцільного середовища коли враховується можливий перехід механічної енергії в теплову, а також приймається до уваги обмін тепловою енергією між різними частинами суцільного середовища. Для опису теплових процесів в суцільному середовищу вводяться спеціальні фізичні величини які характеризують тепловий стан матеріального континуума. До їх числа відносяться абсолютна температура  $T$ , питома внутрішня енергія  $e$ , вектор теплового потоку  $\vec{q}$ , ентропії  $S$  і т.д.

Питома внутрішня енергія вводиться по аналогії, як при чисто механічних процесах, розглянутих раніше. Так, в цьому випадку швидкість

зміни потенціальної енергії деформації визначається (для всього тіла) потужністю внутрішніх сил або повною потужністю деформування

$$U = \int_t \left( \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \right) dt = \int_V \left( \int_t \frac{\sigma^{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}}{\rho} dt \right) \rho dV = \int_m e dm.$$

Рівняння балансу механічної енергії для суцільного середовища має вигляд

$$\frac{de_k}{dt} + \int_V \sigma^{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV = \int_V \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \oint_S p_n \vec{v} dS$$

В наведеному виразі  $e$  визначається інтегралом за часом від питомої (віднесеної до одиниці маси середовища) потужності деформування і є питомою роботою деформації. Використане поняття «потенційна енергія деформації» в рамках феноменологічної теорії в реальних деформованих середовищах відповідає «потенціальній енергії взаємодії молекул між собою».

При наявності теплових явищ внутрішня енергія є сумою потенціальної енергії деформування тіла та теплової енергії. Вектор теплового потоку, відповідно до закону Фур'є, має вигляд

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T,$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності середовища.

Тоді закон збереження повної енергії стверджує, що зміна повної енергії індивідуального об'єму дорівнює сумі кінетичної енергії  $e_k$  і внутрішньої енергії  $U$  визначається роботою зовнішніх сил (об'ємних та поверхневих) і кількістю тепла, яке передається тілу через обмежуючу його поверхню. виражається рівнянням

$$\frac{d(e_k + U)}{dt} = \int_V \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \oint_S p_n \vec{v} dS - \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS$$

Перетворимо його до вигляду відносно внутрішньої енергії

$$\int_V \left( \rho \frac{de}{dt} - \sigma^{ij} \cdot \varepsilon_{ij} + \nabla_i q^i \right) dV = 0$$

і в диференціальній формі маємо

$$\rho \frac{de}{dt} - \sigma^{ij} \cdot \varepsilon_{ij} + \nabla_i q^i = 0$$

Тоді систему рівнянь законів збереження та співвідношень для механічного руху середовища, як одна із математичних моделей, запишеться так

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + \nabla_i \sigma_{ij} \quad (5.2)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \sigma^{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (5.3)$$

$$\frac{du_i}{dt} = v_i \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_k \nabla_j u^k) \quad (5.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (5.6)$$

Так, число рівнянь в цій системі дорівнює 20, число невідомих функцій складає 26.

Аналіз наведеної системи рівнянь показує, що в ній відсутні співвідношення для реакції деформованого середовища на процес деформування. Необхідні співвідношення в загальному випадку можна записати так

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, T) \quad (5.7)$$

Співвідношення (5.7) називаються фізичними і вони визначають специфічні умови деформування суцільного середовища та особливості його опору деформуванню.

Модель суцільного середовища – ідеалізоване представлення реального деформованого середовища, яке враховує основні його властивості опору деформуванню і підпорядкованого математичному опису у вигляді (5.7).

---

**5.3 Фізична та механічна поведінка деформованого середовища.** При постановці питання про особливості опору середовища деформуванню відрізняють фізичну та механічну поведінку суцільного середовища.

Під дією на матеріальний континуум зовнішніх сил (об'ємних та поверхневих) його індивідуальні частинки отримують прискорення (5.2) яке породжує поле швидкостей  $\vec{v}$  і переміщень  $\vec{u}$ . Різні переміщення приводять до виникнення деформацій матеріального континуума і виникненню поля тензора деформацій  $\varepsilon$  відповідно до геометричних співвідношень (5.5). Деформації середовища викликає напруження в ньому яке характеризується полем тензора напружень (5.6).

Раніше відмічалось, тензор деформації має дві складові шаровий тензор та девіатор деформацій

$$\varepsilon = S_\varepsilon + D_\varepsilon$$

і аналогічно для тензора напружень

$$\sigma = S_\sigma + D_\sigma.$$

*Фізична поведінка деформованого середовища визначається його властивістю опиратися зміні об'єму і визначається своєю для кожного середовища індивідуальною формою зв'язку шарових тензорів напружень і деформацій:*

$$S_\sigma = f_1(S_\varepsilon) \quad (5.8)$$

Механічна поведінка деформованого середовища визначається властивістю чинити опір зміні форми і характеризується залежністю

$$D_\sigma = f_2(D_\varepsilon) \quad (5.9)$$

Тензорному рівнянню (5.8) відповідає скалярне рівняння для поведінки деформованого середовища. Оскільки середня напруженість співпадає із точністю до знаку із тиском ( $\bar{\sigma} = -p$ ), що виникає в даній індивідуальній частинці, а середня деформація характеризує зміну об'єму

---

індивідуальної частинки і пов'язана із густиною  $\rho = \rho_0 / (1 + 3\bar{\epsilon})$  (у випадку малих деформацій). Скалярне рівняння можливо представити у вигляді

$$p = p(\rho, T) \quad (5.10)$$

яке називають рівнянням стану деформованого середовища.

Так, рівняння стану для достатньо розріджених газів (ідеальний газ) має вигляд рівняння Клапейрона – Менделєєва  $p = \rho RT$ . Для визначення стисливості деформованих твердих тіл (метал, пластмаса і т.д.) часто використовуються експериментальні методи.

Система рівнянь (5.1) – (5.10) широко застосовується для досліджень різноманітних рухів суцільного середовища.

Статична стисливість досліджується в умовах зміни високого тиску  $p$  і замірювання об'єму зразка  $\theta$ . Так, по теорії Бриджмена, для твердих тіл

$$\theta = -ap - bp^2$$

Характеристики динамічної стисливості отримують із експериментальних досліджень, апроксимуючи їх значення степеневими залежностями

$$p = A \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \quad (\text{ударна адіабата в формі Тета}).$$

Питання для самоконтролю.

- 1.Тензор напружень та структура.
- 2.Закони збереження маси, імпульсу та енергії для суцільного середовища.
- 3.Фізичні та механічні характеристики деформованого середовища.
- 4.Рівняння стану ідеального газу.

---

## §6 Системи рівнянь нестационарної газової динаміки.

Математичні моделі у вигляді системи рівнянь газової динаміки широко використовується при дослідженні гідро-газодинамічних течій в різних технічних, біологічних, хімічних і інших пристроях.

Розглянемо найбільш поширену систему рівнянь Нав'є-Стокса та її різновиди. Для характеристики стану суцільного середовища вводяться деякі характеристичні константи. Суцільність середовища залежить від значень числа Кнудсена  $Kn = l/L$ . Тут  $l$  – довжина вільного пробігу молекули середовища,  $L$  – характерний розмір тіла. Якщо  $Kn \leq 10^{-2}$  то це суцільне середовище,  $10^{-2} < Kn \leq 10^{-1}$  – режим течії із ковзанням,  $10^{-1} < Kn \leq 10$  – перехідний режим,  $Kn > 10$  – молекулярна течія ( модель однієї або багатьох матеріальних точок). Число Рейнольдса  $Re = \frac{V_\infty \cdot L}{\nu}$ ,  $V_\infty$

швидкість потоку, що набігає на тіло,  $\nu$  – коефіцієнт кінематичної густини,  $\mu = \rho\nu$  – коефіцієнт динамічної густини середовища. Число Маха- $M_\infty = \frac{V_\infty}{a}$ ,  $a$  – швидкість звуку. Число Прандтля- $Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{\lambda}$ ,  $C_p$  – теплоємність середовища при постійному тиску,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

### 6.1 Основні закони руху рідини та газу. Рівняння Ейлера, Нав'є-Стокса.

Для деякого об'єму суцільного середовища закони збереження маси, імпульсу та повної енергії в інтегральній формі записуються у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho dv + \oint_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} dv + \oint_S [\rho \vec{V} \vec{V} - \sigma] \vec{n} ds = \iiint_{\Omega} \rho \vec{f} dv \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} E dv + \oint_S [E \cdot I - \sigma] \vec{V} \vec{n} ds = \iiint_{\Omega} Q dv - \oint_S \vec{g} \vec{n} ds + \iiint_{\Omega} \rho \vec{f} \vec{V} dv, \quad (6.3)$$

де  $\Omega$  – замкнена область із поверхнею  $S$  в векторному полі швидкостей  $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ . Диференціальна форма записаних законів (6.1) – (6.3) у вигляді диференціальних рівнянь така

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \text{DIV}(\rho \vec{V} \vec{V} - \sigma) = \rho \vec{f} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \text{div}[(E \cdot I - \sigma) \vec{V} + \vec{q}] = Q + \rho \vec{f} \vec{V}, \quad (6.6)$$

де  $\vec{f}$  – вектор зовнішніх сил,  $E = \rho(e + \frac{(\vec{V} \vec{V})}{2})$  – повна енергія,  $e$  – внутрішня енергія (для ідеального газу  $e = \frac{p}{(k-1)\rho}$ ),  $k$  – показник адіабати,  $Q$  – щільність джерел тепла,  $\vec{q}$  – вектор теплового потоку ( $\vec{q} = -\lambda \nabla T$ , закон Фур'є,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності),  $\rho \vec{f} \vec{V}$  – робота зовнішніх сил. В формулах використані позначення

$$\text{grad} = \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho v_3}{\partial x_3} = \nabla_i (\rho v_i),$$

$$\vec{V} \vec{V} \text{-(діадний добуток векторів)} = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

Для випадку в'язкої стисливої теплопровідної рідини або газу система рівнянь (6.4) – (6.6) замикається рівнянням стану у вигляді рівняння Клапейрона-Менделєєва, виразом для внутрішньої енергії

$$p = \rho R T, \quad e = \frac{p}{(k-1)\rho} \quad (6.7)$$



та виразом тензора напруженості через компоненти вектору швидкості

(тензор швидкостей деформації)  $\sigma = \{\sigma_{i,k}\}_{i,k=1}^3$ ,

$$\sigma_{i,k} = -p\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \mu' \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (6.8)$$

Також використовуємо  $I = \{\delta_{ik}\}_{i,k=1}^3 = \begin{cases} 1, & \text{коли } i = k \\ 0, & \text{коли } i \neq k \end{cases}$ . Існує зв'язок

$\chi = \frac{2}{3}\mu + \mu'$ ,  $\mu = \mu(T)$ . Коефіцієнт  $\chi$  малий, за винятком випадків, коли

вивчається структура ударних хвиль (УХ), а також у випадку вивчення затухання та поглинання акустичних хвиль. В подальшому приймаємо

$\chi = 0$ , тоді  $\mu' = -\frac{2}{3}\mu$ . Тензор напружень в подальшому будемо

використовувати у формі

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik},$$

де  $\tau_{ik} = \mu\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik}\right]$ -компоненти тензора дотичних напружень,

$i, k = 1, 2, 3$ .

Тоді, враховуючи (6.7) – (6.8) рівняння балансу імпульсу перепишемо так

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \text{DIV}(\rho \vec{V} \vec{V} + pI - \tau) = \rho \vec{f}.$$

Систему рівнянь газової динаміки при відсутності зовнішніх сил і джерел тепла записується у дивергентній формі

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U, \nabla U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U, \nabla U)}{\partial y} + \frac{\partial H(U, \nabla U)}{\partial z} = 0, \quad (6.9)$$

де  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}$ -консервативні залежні мінні,

$$F(U, \nabla U) = F_{iv}(U) - F_v(\nabla U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - g_x \end{pmatrix},$$

$$G(U, \nabla U) = G_{iv}(U) - G_v(\nabla U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E + p)v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - g_y \end{pmatrix},$$

$$H(U, \nabla U) = H_{iv}(U) - H_v(\nabla U) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (E + p)w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - g_z \end{pmatrix}$$

Функції  $F_{iv}$  і  $F_v$ ,  $G_{iv}$  і  $G_v$ ,  $H_{iv}$  і  $H_v$  є функції потоків газу нев'язка ( $iv$ ) та в'язка ( $v$ ) їх складові в (6.9).

Часто, при побудові розрахункового методу, використовують безрозмірні величини. Наприклад

$$x^* = x/L, \quad y^* = y/L, \quad z^* = z/L, \quad t^* = t/(L/V_\infty), \quad u^* = u/V_\infty, \quad v^* = v/V_\infty,$$

$$w^* = w/V_\infty, \quad \mu^* = \mu/\mu_\infty, \quad \rho^* = \rho/\rho_\infty, \quad p^* = p/(\rho_\infty V_\infty^2), \quad T^* = T/T_\infty, \quad e^* = e/V_\infty^2,$$

$$e = \rho / ((k-1)\rho) = \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2} \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{(\rho/\rho_\infty)\rho_\infty} = V_\infty^2 e^* = V_\infty^2 \frac{p^*}{(k-1)\rho^*}$$

$$\tau_{x,x}^* = \frac{2}{3} \frac{\mu^*}{\text{Re}} \left[ 2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right], \quad g_x^* = - \frac{\lambda^*}{(k-1)\mu_\infty^2 \text{RePr}} \frac{\partial T^*}{\partial x^*},$$

$$g_y^* = - \frac{\lambda^*}{(k-1)\mu_\infty^2 \text{RePr}} \frac{\partial T^*}{\partial y^*}, \quad g_z^* = - \frac{\lambda^*}{(k-1)\mu_\infty^2 \text{RePr}} \frac{\partial T^*}{\partial z^*}.$$

Після обізрозмірювання система рівнянь газової динаміки прийме вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_{iv}(U)}{\partial x} + \frac{\partial G_{iv}(U)}{\partial y} + \frac{\partial H_{iv}(U)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial F_v(\nabla U)}{\partial x} + \frac{\partial G_v(\nabla U)}{\partial y} + \frac{\partial H_v(\nabla U)}{\partial z} \right) = 0 \quad (6.10)$$

Значок (\*) у нових змінних опущений.

При розгляді течій нев'язкого нетеплопровідного газу використовують рівняння Ейлера (в (6.10) відсутні доданки які враховують в'язкість  $\tau = 0$ , теплопровідність  $\vec{q} = 0$ )

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_{iv}(U)}{\partial x} + \frac{\partial G_{iv}(U)}{\partial y} + \frac{\partial H_{iv}(U)}{\partial z} = 0 \quad (6.11)$$

В криволінійній системі координат  $\zeta = \zeta(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$ ,  $\xi = \xi(x, y, z)$ , рівняння (6.11) мають вигляд

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{U})}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}(\tilde{U})}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{H}(\tilde{U})}{\partial \xi} = 0,$$

де  $\tilde{U} = U / J$ ,  $\tilde{F} = (\zeta_x F + \zeta_y G + \zeta_z H) / J$ ,  $\tilde{G} = (\eta_x F + \eta_y G + \eta_z H) / J$ ,

$\tilde{H} = (\xi_x F + \xi_y G + \xi_z H) / J$ ,  $J = \frac{D(\zeta, \eta, \xi)}{D(x, y, z)}$  -якобіан (визначник матриці)

перетворень однієї системи координат в іншу. Очевидно, що

$$\frac{D(\zeta, \eta, \xi)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \xi_x & \xi_y & \xi_z \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} y_\eta z_\xi - z_\eta y_\xi & -(x_\eta z_\xi - z_\eta x_\xi) & x_\eta y_\xi - y_\eta x_\xi \\ y_\zeta z_\xi - z_\zeta y_\xi & x_\zeta z_\xi - z_\zeta x_\xi & -(x_\zeta y_\xi - y_\zeta x_\xi) \\ y_\zeta z_\eta - z_\zeta y_\eta & -(x_\zeta z_\eta - z_\zeta x_\eta) & x_\zeta y_\eta - y_\zeta x_\eta \end{vmatrix}.$$

Визначник матриці метричних коефіцієнтів знаходяться коли відоме обернене перетворення  $\vec{r} = \vec{r}(\zeta, \eta, \xi)$ . Коли розрахункова сітка будується чисельними методами, то метричні коефіцієнти обчислюються за допомогою різницевих співвідношень для похідних перетворення.

Систему рівнянь (6.11) напишемо в недивергентній формі

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (6.12)$$

де  $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ ,  $B = \frac{\partial G}{\partial U}$ ,  $C = \frac{\partial H}{\partial U}$ .

В криволінійній системі координат

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta} + \tilde{B} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + \tilde{C} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} = 0, \quad (6.13)$$

в цій системі позначено  $\tilde{U} = U / J$ ,  $\tilde{A} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{U}} = \zeta_x A + \zeta_y B + \zeta_z C$ ,

$$\tilde{B} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{U}} = \eta_x A + \eta_y B + \eta_z C, \quad \tilde{C} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{U}} = \xi_x A + \xi_y B + \xi_z C.$$

Деяке спрощення вигляду системи рівнянь Ейлера (6.13) виконується із використанням перетворення подібності, яке приводить матриці  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  до діагонального вигляду. Оскільки такі матриці мають майже всі ненульові елементи, то безпосереднє знаходження власних чисел та власних векторів досить трудомістке. Скористаємося відомою із теорії матриць властивістю характеристичного рівняння для власних чисел матриць.

$$|Z^{-1}AZ - \lambda I| = |Z^{-1}(A - \lambda I)Z| = |A - \lambda I| = 0.$$

Перейдемо в системі рівнянь (6.12) до нових змінних

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}, \quad , \text{ які прийнято називати фізичними. Для таких змінних система}$$

(6.12) перепишеться у вигляді  $\frac{\partial Q}{\partial t} + M \frac{\partial Q}{\partial x} + N \frac{\partial Q}{\partial y} + L \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ . В

криволінійній системі координат маємо

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \tilde{M} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \zeta} + \tilde{N} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \eta} + \tilde{L} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi} = 0,$$

тут

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= \zeta_x M + \zeta_y N + \zeta_z L, \\
\tilde{N} &= \eta_x M + \eta_y N + \eta_z L, \\
\tilde{L} &= \xi_x M + \xi_y N + \xi_z L.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Замінюючи в системі (6.12) вектор консервативних змінних  $U$  на вектор фізичних змінних  $Q$  із урахуванням, що  $dU = \frac{\partial U}{\partial Q} dQ = S dQ$ ,

отримаємо

$$\tilde{M} = S^{-1} \tilde{A} S, \quad \tilde{N} = S^{-1} \tilde{B} S, \quad \tilde{L} = S^{-1} \tilde{C} S.$$

Матриці  $S$  та  $S^{-1}$  легко визначити за правилом побудови матриць Якобі

$$S = \frac{\partial U}{\partial Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{V^2}{2} & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{1}{k-1} \end{pmatrix}, \quad V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ (k-1)\frac{V^2}{2} & -u(k-1) & -v(k-1) & -w(k-1) & k-1 \end{pmatrix}.$$

Для зручності (компактності) запису позначимо

$$\theta_k = k_x u + k_y v + k_z w, \quad (k = \zeta, \eta, \xi)$$

і обчислимо елементи матриць  $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{L}$  за допомогою (6.14) і  $S$  та  $S^{-1}$ . Напишемо їх у вигляді

$$\mu_k = \begin{pmatrix} \theta_k & \rho k_x & \rho k_y & \rho k_z & 0 \\ 0 & \theta_k & 0 & 0 & k_x / \rho \\ 0 & 0 & \theta_k & 0 & k_y / \rho \\ 0 & 0 & 0 & \theta_k & k_z / \rho \\ 0 & k_x \rho c^2 & k_y \rho c^2 & k_z \rho c^2 & \theta_k \end{pmatrix},$$

при цьому  $\mu_k = \tilde{M}$  коли  $k = \zeta$ ,  $\mu_k = \tilde{N}$  коли  $k = \eta$ ,  $\mu_k = \tilde{L}$  коли  $k = \xi$ .

Власні числа цих матриць легко визначити із рівняння

$$|\mu_k - \lambda \cdot I| = 0$$

$$\lambda_k^1 = \lambda_k^2 = \lambda_k^3 = \theta_k, \lambda_k^4 = \theta_k + c |\nabla k|, \lambda_k^5 = \theta_k - c |\nabla k|,$$

де  $|\nabla k| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ .

Знайдемо ліві та праві власні вектори для матриць  $\mu_k$  і розташуємо їх у вигляді матриць

$$P_k = \begin{pmatrix} \tilde{k}_x & \tilde{k}_y & \tilde{k}_z & \rho / (\sqrt{2}c) & \rho / (\sqrt{2}c) \\ 0 & -\tilde{k}_z & \tilde{k}_y & \tilde{k}_x / \sqrt{2} & -\tilde{k}_x / \sqrt{2} \\ \tilde{k}_z & 0 & -\tilde{k}_x & \tilde{k}_y / \sqrt{2} & -\tilde{k}_y / \sqrt{2} \\ -\tilde{k}_y & \tilde{k}_x & 0 & \tilde{k}_z / \sqrt{2} & -\tilde{k}_z / \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \rho c / \sqrt{2} & \rho c / \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{матриця правих власних}$$

векторів,

$$P_k^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_x & 0 & \tilde{k}_z & -\tilde{k}_y & \tilde{k}_x / c^2 \\ \tilde{k}_y & -\tilde{k}_z & 0 & \tilde{k}_x & -\tilde{k}_y / c^2 \\ \tilde{k}_z & \tilde{k}_y & -\tilde{k}_x & 0 & -\tilde{k}_z / c^2 \\ 0 & \tilde{k}_x / \sqrt{2} & \tilde{k}_y / \sqrt{2} & \tilde{k}_z / \sqrt{2} & 1 / (\sqrt{2}\rho c) \\ 0 & -\tilde{k}_x / \sqrt{2} & -\tilde{k}_y / \sqrt{2} & -\tilde{k}_z / \sqrt{2} & 1 / (\sqrt{2}\rho c) \end{pmatrix} \quad - \quad \text{матриця лівих}$$

власних векторів.

Легко перевіряється, що  $P_k P_k^{-1} = I$ . Тут позначено  $\tilde{k}_i = \frac{k_i}{|\nabla k|}$ ,  $i = \zeta, \eta, \xi$ .

Із урахуванням  $\tilde{M} = S^{-1} \tilde{A} S$   $\tilde{M} = P_k \Lambda_k P_k^{-1}$  маємо  $\tilde{A} = S P_k \tilde{A} P_k^{-1} S^{-1}$ . Позначимо

$T_k = S P_k$ ,  $T_k^{-1} = P_k^{-1} S^{-1}$ . Повернемося до рівняння

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \tilde{M} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \zeta} + \tilde{N} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \eta} + \tilde{L} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi} = 0$$

і помножимо його зліва на матрицю  $P_k^{-1}$

$$P_k^{-1} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + P_k^{-1} \tilde{M} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \zeta} + P_k^{-1} \tilde{N} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \eta} + P_k^{-1} \tilde{L} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi} = 0.$$

Розглянемо її як одновимірну в напрямі  $k$ . Нехай  $P_k \approx const$ , тоді її можна ввести під знак похідної. Позначимо вектор  $\vec{W}_k = P_k \tilde{Q}$  і отримаємо систему

$$\frac{\partial \vec{W}_k}{\partial t} + \Lambda_k \frac{\partial \vec{W}_k}{\partial k} = \vec{H}_k. \quad (6.15)$$

Покомпонентний запис вектору  $\vec{W}_k$  має вигляд

$$\begin{pmatrix} W_{k,1} \\ W_{k,2} \\ W_{k,3} \\ W_{k,4} \\ W_{k,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\nabla k|} \left[ \left( \rho - \frac{p}{c_0^2} \right) k_x + vk_z - wk_y \right] \\ \frac{1}{|\nabla k|} \left[ \left( \rho - \frac{p}{c_0^2} \right) k_y - uk_z + wk_x \right] \\ \frac{1}{|\nabla k|} \left[ \left( \rho - \frac{p}{c_0^2} \right) k_z + uk_y - vk_x \right] \\ \frac{1}{\sqrt{2} |\nabla k|} \left[ \frac{p}{\rho_0 c_0} |\nabla k| + \theta_k \right] \\ \frac{1}{\sqrt{2} |\nabla k|} \left[ \frac{p}{\rho_0 c_0} |\nabla k| - \theta_k \right] \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця  $\Lambda_k$  діагональна  $\Lambda_k = diag(\lambda_k^1, \lambda_k^2, \lambda_k^3, \lambda_k^4, \lambda_k^5)$  система (6.15) запишеться як сукупність одновимірних рівнянь (індекс  $k$  опускаємо)

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial t} + \lambda^1 \frac{\partial W_1}{\partial k} = H_1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial W_5}{\partial t} + \lambda^5 \frac{\partial W_5}{\partial k} = H_5 \end{cases}$$

Розглянемо рівняння газової динаміки нестационарні в двовимірному та одновимірному просторі. Так, система (6.11) у випадку функцій двох змінних має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \quad (6.16)$$

де

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, G(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}, E = \rho \left( e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right),$$

$$e = \frac{p}{(k-1)\rho}, \quad p = \rho RT.$$

Для одновимірної моделі нестационарної течії, наприклад, в трубах маємо

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (6.17)$$

де

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, E = \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right), e = \frac{p}{(k-1)\rho}, p = \rho RT.$$

В подальшому для тестування чисельних методів будемо використовувати ще простіші моделі. Наприклад, (6.16) та (6.17).

Наведемо декілька прикладів математичних моделей різних процесів.

## 6.2 Нестационарна течія рідини в системі трубопроводів. Гідроудар.

Розглянемо математичну модель гідроудару

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial}{\partial x} v = 0 \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} P = -\frac{\lambda}{2D} \rho v |v| \end{cases},$$

де  $P = P(x, t)$  тиск,  $v(x, t)$  швидкість руху рідини,  $\rho$  щільність, постійна, додатна,  $c \text{ const} > 0$  – швидкість розповсюдження пружних збурень в рідині (швидкість звуку),  $\lambda = \lambda(x, v)$  відомий коефіцієнт тертя,



$D = D(x)$  змінний діаметр труби. До системи додаються відповідні граничні та початкові умови.

**6.3 Нестационарна течія води в каналах і відкритих руслах (рівняння Сен-Венана).** Модель течії рідини в каналах або руслах має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ P + \frac{Q^2}{\omega} \right] = -q\omega \left( \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{k^2} \right) + R \end{array} \right.$$

де  $\omega(x, h) = \int_0^h B(x, \xi) d\xi$ ,  $P(x, h) = q \int_0^h (h - \xi) B(x, \xi) d\xi$ ,

$R(x, h) = q \int_0^h (h - \xi) \frac{\partial}{\partial x} B(x, \xi) d\xi$ ,  $Q(x, h)$  витрата води,  $B(x, h)$  – ширина

русла або каналу при глибині  $h$ ,  $h(x, t)$  глибина води,  $\omega(x, h)$  – площа поперечного перерізу потоку рідини при глибині  $h$ ,  $\rho P = \rho P(x, h)$  сила гідростатичного тиску води,  $\rho R = \rho R(x, h)$  реакція стінок, обумовлена непрямокутністю русла,  $k(x, h)$  модуль витрат (задається по емпіричним формулах),  $z_0(x)$  рівень дна,  $q$  прискорення сили тяжіння,  $z = z_0 + h$

рівень вільної поверхні води,  $v = Q / \omega$  швидкість води,  $c = \left( \frac{q\omega}{B} \right)^{0.5}$

швидкість розповсюдження малих збурень.

**6.4 Нестационарна течія газу в трубопроводах (системи магістральних трубопроводів із теплообміном із зовнішнім середовищем).** Для моделювання течій в системах труб із теплообміном часто використовують таку модель

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) = -\rho \left( q \frac{dz_0}{dx} + \frac{\lambda}{2D} v |v| \right), \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \right] = -\rho v q \frac{dz_0}{dx} + Jq \frac{4}{D} \end{array} \right.$$

де  $\rho(x,t)$  – щільність газу,  $v(x,t)$  – швидкість газу,  $p(x,t)$  – тиск газу,  $\rho = \rho(p,T)$  – термічне рівняння стану газу,  $T(x,t)$  – температура газу,

$E = \varepsilon + \frac{v^2}{2}$  – повна енергія газу,  $\varepsilon = \varepsilon(p,T)$  – калорійне рівняння стану газу,

$z_0(x)$  – вертикальна координата осі труби,  $\lambda = \lambda(x,v)$  – коефіцієнт тертя,

$g = g(x,t,T)$  – притік тепла на одиницю довжини бічної поверхні труби,

$D = D(x)$  – діаметр труби,  $q$  – прискорення сили тяжіння,  $J$  – механічний

еквівалент тепла.

**6.5 Перехідні режими контейнерного пневмотранспорту.** Моделювання таких течій зводиться до інтегрування системи квазілінійних (майже лінійних) рівнянь, які описують нестационарний рух газу в трубі, в області із рухомою границею, яка є траєкторією руху тіла (контейнера). Так, у випадку коли  $T(x,t) = const$  (ізотермічний процес).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) = -\frac{\lambda}{2D} \rho v |v| \end{cases}$$

$p = p(\rho)$  – статичний тиск. Решта позначень співпадає із позначеннями в попередніх моделях. Допускаємо, що траєкторія руху центра інерції контейнера співпадає із віссю OX, тоді рівняння руху контейнера можна записати у вигляді

$$\frac{dx_k}{dt} = v_k, \quad m_k \frac{dv_k}{dt} = p_g + G_x - F_c \text{sign}(v),$$

де  $x_k(t)$  координата центру ваги контейнера,  $v_k(t)$  швидкість контейнера,  $m_k$  маса контейнера,  $G_x$  проекція сили тяжіння на напрям руху контейнера вдовж осі OX,  $F_c = kN$  сила тертя,  $N$  нормальна складова тиску на стінки трубопроводу визначається силою тяжіння контейнера. Для кривого трубопроводу  $N$  визначається відцентровою силою,  $k$  емпіричний коефіцієнт,  $p_g = \omega_k(p^+ - p^-)$  рушійна сила контейнера,  $\omega_k$

площа поперечного перерізу контейнеру,  $p^+$  і  $p^-$  тиск за і перед контейнером. Інколи задають зв'язок між  $p^+$  та  $p^-$ .

Наведемо деякі приклади із теорій розповсюдження тепла та коливань пружних систем і перехідних процесів в електромережах.

## 6.6 Перехідні процеси в системах електропередачі (система «телеграфних» рівнянь)

Одна із моделей має вигляд

$$\begin{cases} L \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = -R \cdot i \\ C \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = -G \cdot v \end{cases},$$

де  $v(x,t)$  напруга,  $i(x,t)$  сила струму,  $L$  коефіцієнт самоіндукції,  $C$  коефіцієнт ємності,  $R$  коефіцієнт опору,  $G$  витік струму (втрати) із за неідеальної ізоляції на одиницю довжини провідника.

Наведемо припущення при яких вони отримані. Застосовуючи закон Ома до відрізка провідника довжиною  $dx$ , можна записати, що падіння напруги на елементі  $dx$  дорівнює сумі електрорушійних сил

$$-\frac{\partial}{\partial x} v dx = i R dx + \frac{\partial i}{\partial t} L dx.$$

Кількість електричного струму, що протікає через елемент  $dx$  за час  $dt$

$[i(x,t) - i(x + dx,t)] dt \approx -\frac{\partial i}{\partial x} dx dt$  дорівнює сумі електричного заряду елемента  $dx$  і кількості втраченого електричного заряду із-за недосконалості ізоляції

$$C[v(x,t + dt) - v(x,t)] dx + G v dx dt \approx (C \frac{\partial v}{\partial t} + G v) dx dt.$$

Із наведених співвідношень легко отримати наведену вище систему рівнянь.

**6.7 Динаміка пружних стрижнів.** Зміна стану пружного стрижня описується величиною  $u(s,t)$  – подовжніми переміщеннями та  $w(s,t)$  – поперечними переміщеннями,  $\rho$  – постійна щільність матеріалу стрижня і знаходять її із системи рівнянь

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} [E \cdot F \cdot \frac{\partial u}{\partial s}] = 0 \\ \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} [E \cdot j \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}] = g \end{cases}$$

де  $F = F(s)$  – площа поперечного перерізу стрижня,  $E$  – постійний модуль пружності,  $J(s)$  – момент інерції,  $g(s,t)$  – зовнішнє розподілене поперечне навантаження на одиницю довжини.

**6.8 Розповсюдження тепла в стрижнях** Найпростішу модель, на основі закону Фур'є, напишемо для процесу розповсюдження тепла так

$$\omega \cdot c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\omega \cdot k \frac{\partial T}{\partial x}) + \alpha \pi D (T_0 - T) + \omega \cdot F,$$

де  $T(x,t)$  – температура,  $\omega = \omega(x)$  – площа поперечного перерізу,  $c = c(x,t)$  – питома теплоємність на одиницю довжини,  $k = k(x,t)$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\rho = \rho(x,t)$  – щільність матеріалу стрижня,  $\alpha = \alpha(x,t)$  – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем,  $D = D(x)$  – діаметр стрижня,  $T_0 = T_0(x,t)$  – температура зовнішнього середовища,  $F = F(x,t)$  – щільність теплових джерел вдовж осі  $Ox$ .

Питання для самоконтролю.

1. Рівняння Ейлера.
2. Рівняння Нав'є – Стокса.
3. Структура зв'язку тензора напружень і тензора швидкостей деформування для рідин та газів.
4. Характеристична форма рівнянь Ейлера.
5. Приклади простих математичних моделей процесів.

## §7 Нестационарні рівняння теорії пружності. Лінійна та нелінійна система рівнянь.

Число моделей твердого деформованого тіла досить багато. Обмежимося тільки такими системами рівнянь, які можна розглядати як узагальнення раніше розглянутих рівнянь газової динаміки. Необхідність розгляду таких систем виникає у випадку, коли при наявності внутрішніх контактних взаємодій недостатньо враховувати тільки напруження які діють лиш у напрямі нормалі до елементарного об'єму.

**7.1 Найпростіша модель твердого деформованого тіла.** Нестационарна тривимірна система рівнянь твердого ізотропного деформованого твердого тіла в ейлеревій системі координат виписана з урахуванням рівняння стану, яке визначає кульову частину напружень в суцільному середовищі, лінійного закону для девіаторної частини напружень і можливості ідеально-пластичної течії по теорії Прандтля-Рейсса. Тоді система має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v} - \sigma) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \vec{v} - \sigma \vec{v}) = 0 \\ \frac{D\hat{S}}{Dt} + \frac{2}{3} \mu \cdot \operatorname{tr}(\dot{\varepsilon}) I - 2\mu \dot{\varepsilon} + \theta(s)(\hat{S}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) \hat{S} = \hat{0} \end{array} \right. , \quad (7.1)$$

в них прийнято такі позначення  $\rho = \rho(t, x, y, z)$  щільність матеріалу твердого тіла,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}(t, x, y, z) = (v_1(t, x, y, z), v_2(t, x, y, z), v_3(t, x, y, z)) = \\ &= (u(t, x, y, z), v(t, x, y, z), w(t, x, y, z)) \end{aligned}$$

- швидкість руху середовища,  $E = \rho(\tilde{e} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2})$  – повна енергія одиниці

об'єму матеріалу для лінійно-пружного і ідеально-пластичного твердого

тіла,  $\tilde{e} = e + \frac{1}{4\mu\rho} \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij}$  – питома внутрішня енергія,  $e = e(p, T)$  – частина

внутрішньої енергії яка не залежить від зсуву,  $T = T(t, x, y, z)$  – температура,  $\hat{0}$  – нульовий тензор розміром  $3 \times 3$ . Вираз  $tr(\varepsilon)$  означає слід (сума елементів на головній діагоналі матриці тензора) тензора.

Вираз  $\frac{1}{4\mu\rho} \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij}$  визначає частину внутрішньої енергії залежної тільки від величини пружних деформацій при чистому зсуві. Тут  $\mu$  – модуль зсуву.

Запис внутрішньої енергії у вигляді двох доданків дозволяє врахувати при побудові чисельних схем широкодіапазонні рівняння стану типу  $e = e(p, T)$ ,  $p = p(\rho, T)$  або  $p = p(\rho, e)$ . Існують і більш складні рівняння стану.

Наведена система рівнянь (7.1) відрізняється від рівнянь газової динаміки (§6) врахуванням процесів пружних та пластичних деформацій суцільного середовища шляхом введення симетричного тензора напружень  $\sigma$  у вигляді  $\sigma = -pI + \hat{S}$ .  $\hat{S}$  – девіатор тензора напружень,  $tr \hat{S} = 0$ ,  $I$  – одиничний тензор.. Симетричний тензор швидкостей деформацій  $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0.5(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ , а перемикач  $\theta(s)$  в системі рівнянь (7.1) описує пластичну течію відповідно до теорії пластичності Прандтля-Рейсса і має вигляд  $\theta(s) = 0$  при  $s = \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} < 2k^2$ , або при розвантаженні коли  $\hat{S}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \leq 0$  і  $\theta(s) = \mu\rho / k^2$  при навантаженні коли  $\hat{S}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} > 0$ . Величина  $k$  – граничне значення напружень на зсув початку течії матеріалу. Для пластичної течії виконано  $s = \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} = 2k^2$ .

Більш детальну інформацію для цієї моделі можна знайти в наукових публікаціях.

Вираз  $\frac{DA}{Dt}$  означає похідну по Яуманну для тензора  $A = \{A_{ij}\}$  розміром

$3 \times 3$  :

$$\frac{DA_{ij}}{Dt} = \frac{dA_{ij}}{dt} + \sum_{p=1}^3 (A_{ip} \varphi_{ip} + A_{pi} \varphi_{pi}), \quad \varphi_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

де  $df/dt$  – повна похідна за часом  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \nabla f$ . Із похідної за Яуманном виключена зміна тензора за рахунок повороту системи координат.

Виразимо  $\sigma$  через  $\hat{S}$  і вважаємо функцію  $p = p(\rho, e)$  заданою, напишемо систему рівнянь в наступній частково консервативній формі

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v} + pI - \hat{S}) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}((E + p) \vec{v} - \hat{S} \vec{v}) = 0 \\ \frac{D\hat{S}}{Dt} + \frac{2}{3} \mu \cdot \text{tr}(\dot{\varepsilon})I - 2\mu \dot{\varepsilon} + \theta(s)(\hat{S}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij})\hat{S} = \hat{0} \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Наведена система в пружному наближенні є лінійною відносно тензора  $\hat{S}$ .

При  $\hat{S} \rightarrow 0$  система (7.2) переходить в рівняння газової динаміки.

Для замикання системи рівнянь використовують такі співвідношення

$$p = (\gamma - 1)\rho e + (\rho - \rho_0)c_0^2, \quad e = \frac{p + \gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}, \quad (7.3)$$

де  $\gamma > 1$  – показник адіабати,  $p_0, \rho_0, c_0$  – деякі константи та  $p_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma$ .

При  $e = 0$  та  $\rho = \rho_0$  виконано  $p = 0$ . Із рівняння (7.3) при  $p_0 = 0, c_0 = 0$  отримаємо рівняння досконалого газу

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$$

Для твердих тіл можливо використати рівняння стану такого вигляду

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{K} - 3\alpha(T - T_0), \quad e = c_v T, \quad K = \rho \left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_T, \quad \alpha = \frac{1}{3K} \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]_\rho,$$

тут  $\rho_0$  – щільність недеформованого матеріалу,  $T_0$  – початкова температура,  $K$  – модуль об'ємного стискання,  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення ( $a = 3\alpha$  – коефіцієнт об'ємного теплового розширення), а

$c_v = \left[ \frac{\partial e}{\partial T} \right]_\rho$  – теплоємність при постійному об'ємі.

Консервативні рівняння (7.2) (перші три співвідношення в системі) є законі збереження маси, імпульсу та повної енергії, а четверте співвідношення (неконсервативне) описує еволюцію девіатора напружень із урахуванням явищ пружності та пластичності. Рівняння еволюції  $\hat{S}$  в пружному наближенні слідує із закону Гука.

**7.2 Лінійно-пружний рух середовища. Закон Гука.** Рівняння для  $\hat{S}$  із (7.2) в області пружності є наслідком диференціювання за часом співвідношень, які пов'язують напруження та деформацію. Найпростіший вигляд такого зв'язку запропонований в 1678 році Гуком, який запропонував лінійний зв'язок між напруженням і малими деформаціями у випадку одновимірного напружено-деформованого стану. В тривимірному випадку закон Гука пов'язує лінійно тензор напружень  $\sigma$  і тензор малих деформацій  $\varepsilon$  співвідношенням

$$\varepsilon_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0.5 (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i).$$

Тоді узагальнений закон Гука запишеться у вигляді

$$\sigma = C\varepsilon \tag{7.4}$$

або покомпонентно  $\sigma_{ij} = \sum_{p,q=1}^3 C_{ijpq} \varepsilon_{pq}$ , де  $C = \{C_{ijpq}\}$ - симетричний тензор постійних пружності розмірності  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ . Використовуючи умову симетрії і ізоотропії, можливо знайти, що із  $3^4 = 81$  елементів тензора тільки два будуть незалежні. Показано, що  $C_{ijpp} = 0$  для  $i \neq j$ ,  $C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = \lambda + \mu$  і  $C_{1122} = C_{1133} = C_{2233} = \mu$ , де  $\lambda$  і  $\mu$ - коефіцієнти Ламе. Останній також називають модулем зсуву. Тоді (7.4) запишеться у вигляді

$$\sigma_o = \lambda \cdot tr(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \sigma = \lambda tr(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon.$$

Крім  $\lambda$  і  $\mu$  використовують і інші пружні коефіцієнти, так, модуль Юнга

$$\hat{E} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \text{а коефіцієнт Пуассона } \hat{\sigma} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Перепишемо рівняння для  $\hat{S}$  в термінах девіатора тензора напружень



$$\hat{S}_o = -\frac{2}{3}\mu \cdot \text{tr}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \hat{S} = -\frac{2}{3}\mu \text{tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon \quad (7.5)$$

Візьмемо похідну від (7.5) за часом і враховуючи скінченність величини поворотів індивідуальної частинки. В силу рівності  $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{v}$  маємо  $\dot{\varepsilon} = \frac{D\varepsilon}{Dt}$ -тензор швидкостей деформацій. Тоді еволюція тензора дотичних напружень визначається виразом

$$\frac{d}{dt}\hat{S} = -\frac{2}{3}\mu \text{tr}(\dot{\varepsilon})I + 2\mu \dot{\varepsilon} ..$$

В похідній Яуманна враховано, що компоненти тензора в ейлеревій системі координат змінюються навіть у тому випадку коли вони постійні в супроводжуючій системі, яка обертається зі швидкістю  $0.5 \text{rot } \vec{v}$ . В подальшому будемо використовувати моделі ізотропного матеріалу в зоні лінійної пружності.

**7.3 Пластичні і вязкопластичні течії.** Розглянемо декілька моделей пластичного середовища в рамках системи (7.2). Вище розглядалися малі пружні деформації, які описувалися законом Гука. Пружний рух середовища може перейти в пластичну течію. Із експериментів відомо, що для середовищ із ідеально-пластичними властивостями при пластичній течії деяка комбінація компонент девіатора напружень не зростає. Пластична течія, на відміну від пружного деформування, супроводжується дисипацією механічної енергії і незворотністю.

Існує декілька теорій для опису пружно-пластичних деформацій. В теорії пластичності Прандтля-Рейсса (створена в 1924-1930р.р.) для визначення початку розвитку пластичної течії використовують критерій Мізеса. Коли  $s = \hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} = 2k^2$ , вважається початком пластичного руху середовища. При  $s < 2k^2$  рух буде пружним. Коефіцієнт  $k$  називається межею зсувної течії, а поверхня  $\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} - 2k^2 = 0$  - поверхнею течії Мізеса в

просторі змінних напружень. Поверхня Мізеса є випуклою і гладкою. Для рівнянь (7.2) визначена функція включення

$$\theta(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s = \hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} < 2k^2 \\ 0 & \text{при } s = 2k^2 \text{ та розвантаженню } (\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} \leq 0) , \\ \mu/k^2 & \text{при } s = 2k^2 \text{ та навантаженню } (\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij} > 0) \end{cases} \quad (7.6)$$

Яка задовольняє умові не зростання згортки компонент девіатора напружень при пластичній течії.

Існують і інші критерії пластичності та моделі не пружної поведінки середовища. Так використовують умову переходу до пластичної течії на поверхні

$$s_T = \tau(\hat{S}) - k = 0$$

яку називають поверхнею Треска. Вона також використовується в цій моделі для визначення можливості пластичної течії замість поверхні Мізеса. В формулі (7.6)

$$\tau(\hat{S}) = 0.5 \max[|s_1 - s_2|, |s_2 - s_3|, |s_3 - s_1|] ?$$

де  $s_1, s_2, s_3$  - власні числа матриці  $\hat{S}$ . Поверхня Треска є випуклою та кусково-гладкою. Її фізичний зміст полягає в тому, що вона представляє максимальне дотичне напруження в вибраній точці середовища. Поверхню Мізеса можна розглядати як аналітичну апроксимацію поверхні Треска. Зауважимо, що використання їх в розрахунках не призводять до великої різниці в розв'язках задач.

В 1868 році Максвелл запропонував пружно-в'язку модель у вигляді

$$\frac{d}{dt} \hat{S} = -\frac{2}{3} \mu \text{tr}(\dot{\varepsilon}) I + 2\mu \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\tau} \hat{S} .$$

В модель введено доданок с параметром  $\tau$  - час релаксації(згасання) девіатора напружень. В цьому випадку в компонентах девіатора з'являються складові пропорційні  $\exp(-t/\tau)$ .

Якщо згасання Максвелла існує тільки в області пластичної течії, тоді

$$\frac{d}{dt} \hat{S} = -\frac{2}{3} \mu \text{tr}(\dot{\varepsilon}) I + 2\mu \dot{\varepsilon} - \psi(s) \frac{1}{\tau} \hat{S} .$$

---

Така модель називається пружнов'язкопластичною. Функція

$$\psi(s) = \begin{cases} 0, & s = \widehat{S}_{ij}\widehat{S}_{ij} < 2k^2 \\ 2\frac{\sqrt{\widehat{S}_{ij}\widehat{S}_{ij}} - \sqrt{2}k}{\sqrt{\widehat{S}_{ij}\widehat{S}_{ij}}}, & s = 2k^2 \end{cases},$$

забезпечує необхідну поведінку при умові  $s = \widehat{S}_{ij}\widehat{S}_{ij} \leq 2k^2$ .

Така модель досліджувалась багатьма вченими (Годунов, Кукуджанов та інші) різними підходами. В розв'язку можуть існувати як гладкі пружні та пластичні хвилі, так і розривні. При  $\tau \rightarrow 0$  наведена модель асимптотичними методами зводиться до моделі пластичності Прандтля-Рейсса.

Питання для самоконтролю.

1. Найпростіша модель твердого деформованого тіла.
2. Зв'язок тензора напружень з тензорами деформування та швидкості деформування.
3. Закон Гука.
4. Критерії пластичності.

---

## § 8 Нелінійне рівняння переносу. Механізм виникнення розривів. Сильний та слабкий розрив. Співвідношення на розривах

Аналіз рівнянь газової динаміки базується на допущеннях про гладкість розв'язків-належність його деякому класу функцій.

З'ясовано, що класу диференційованих функцій замало для опису ряду важливих процесів в фізиці. Так, наприклад, експериментальні дослідження показують наявність розривів першого роду (ударні хвилі, стрибки) в розподілі  $p, \rho, T$  при надзвуковому обтіканні різних об'єктів. Стрибки можуть існувати на початку або виникати із гладкого начального стану. Відповідна диференціальна задача не має гладкого розв'язку. Розширити клас розв'язків можна двома шляхами:

- записати фізичні закони збереження в інтегральній формі (тоді вони мають сенс і для розривних функцій, які диференціювати неможливо, а інтегрувати можна);
- ввести штучну в'язкість в диференціальні рівняння при якій уже існує гладкий розв'язок. Потім коефіцієнт штучної в'язкості спрямовують до нуля.

Такий розв'язок називають узагальненим.

Дамо пояснення визначення узагальненого розв'язку і засобів його побудови на прикладах таких задач Коші.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad 0 < t \leq T, \quad x \in R, \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.2)$$

які є найпростішими моделями рівнянь газової динаміки, що породжують розривні розв'язки із гладких початкових даних.

---

**8.1 Механізм виникнення розривів.** Нехай (8.1) або (8.2) має гладкий розв'язок  $u(x, t)$ . Введемо лінії як розв'язки диференціального рівняння

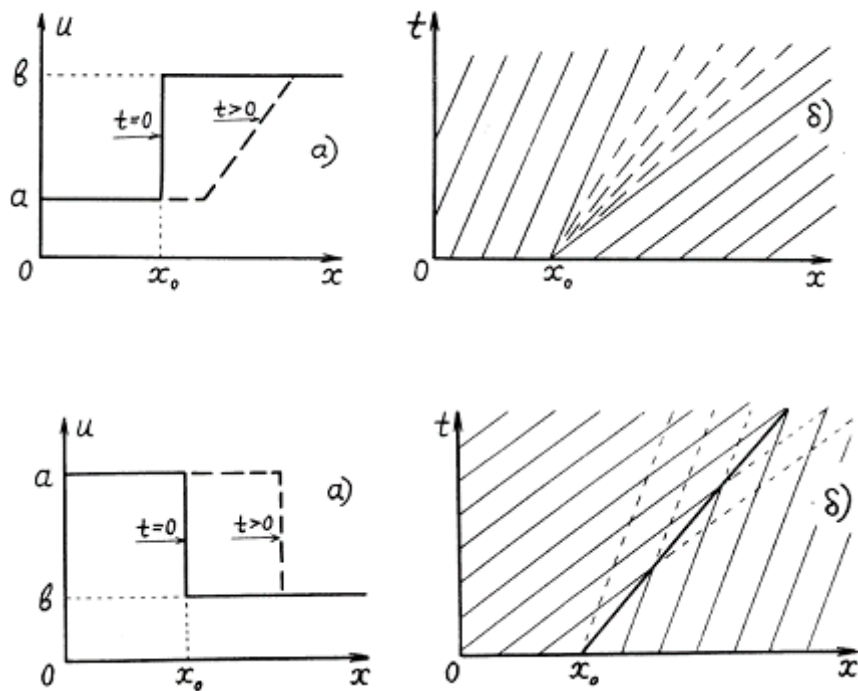
$$\frac{dx}{dt} = u(x, t), \quad x(0) = x_0. \quad (8.3)$$

По аналогії із лінійним випадком вони називаються характеристиками рівняння (8.3). Вподовж таких ліній  $x = x(t)$  розв'язок  $u = u(x, t)$  залежить тільки від змінної  $t$ . Тоді

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

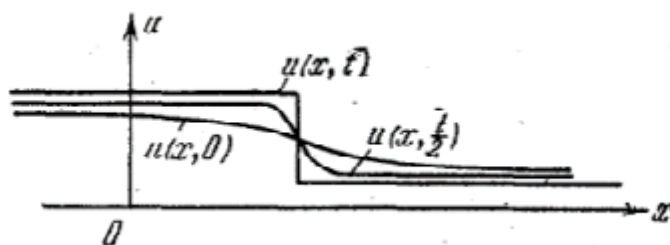
Видно, що на таких характеристичних лініях розв'язок зберігає постійне значення. В силу рівняння (8.3) із того, що  $u = \text{const}$  слідує – характеристика є пряма лінія  $x = ut + x_0$ , кут нахилу якої задається значеннями  $u(x, 0) = \psi(x)$ . Завданням початкової функції  $u(x, 0) = \psi(x)$  визначається картина характеристик і значень розв'язку  $u = u(x, t)$  в кожній точці напівплощини  $t > 0$ .

Зауважимо, що характеристики не перетинаються при наявності гладкості у розв'язку. Адже в точці перетину розв'язок може втратити однозначність. При монотонному зростанні функції  $\psi(x)$  кут нахилу характеристик збільшується (Мал.1) і вони не перетинаються. У випадку, коли  $\psi(x)$  спадає, то характеристики в деякий момент часу  $t^*$  невідворотно перетинаються незалежно від ступеня гладкості  $\psi(x)$ .



Мал.1 Характеристики рівняння (8.1) та його розв'язку в залежності від вигляду  $\psi(x)$

Гладкий розв'язок для (8.1) перестає існувати із моменту  $t^*$  коли хоча б дві різні характеристики перетнуться. Еволюція розв'язку  $u(x,t)$  до моменту  $t^*$  приведена на Мал.2



Мал.2 Еволюція розв'язку при деякому  $\psi(x)$  до моменту «градієнтної катастрофи»

При великих значеннях  $u(x,0)$  швидкість розповсюдження зростає. При визначенні узагальненого розв'язку задачі (8.1) скористаємося формулою Гріна (аналог формули Гауса-Остроградського для площини). Нехай в області  $D$  обмеженою кривою  $\Gamma$  на площині і нехай  $\Phi_1(x,t)$ ,  $\Phi_2(x,t)$  мають в області  $D$  неперервні до самої границі  $\Gamma$  частинні похідні, тоді справедлива формула Гріна

$$\iint_D \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) dx dt = \oint_{\Gamma} \Phi_1 dx - \Phi_2 dt$$

Напишемо (8.1) в дивергентній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} = 0. \quad (8.4)$$

Проінтегруємо (8.4) по області  $D$  із півплощини  $t \geq 0$  і отримаємо

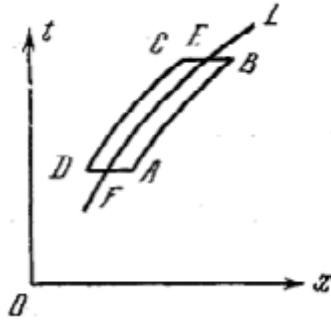
$$0 = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} \right) dx dt = \oint_{\Gamma} u dx - (u^2 / 2) dt.$$

Бачимо, що кожний диференційований розв'язок задовольняє інтегральному рівнянню

$$\oint_{\Gamma} u dx - (u^2 / 2) dt = 0, \quad (8.5)$$

де  $\Gamma$  – довільний замкнутий контур в півплощині  $t \geq 0$ . Рівність (8.5) є закон збереження : потік вектору  $(u, u^2 / 2)^T$  крізь довільний замкнений контур  $\Gamma$  дорівнює нулю. Справедливе і обернене твердження, якщо гладка функція задовольняє при довільних  $\Gamma$  умові (8.5), то в кожній точці  $(x,t)$  виконано (8.4).

**8.2 Умова на лінії розриву розв'язку.** Нехай у внутрішніх точках області  $D$  є лінія  $L : x = x(t)$  на якій розв'язок  $u(x,t)$  має розрив 1-го роду (Мал.3).



Мал.3 Лінія розриву розв'язку

При наближенні до лінії  $u(x,t) = u_{лів} = u_1(x,t)$ ,  $u(x,t) = u_{прав} = u_2(x,t)$ .

Значення  $u_1(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$  та  $\frac{dx}{dt}$  – швидкість руху розриву на лінії  $L$  не можуть бути довільними для узагальненого розв'язку (8.5). Нехай  $L$  лінія розриву (Мал.3), тоді при обході контуру проти ходу годинникової стрілки

$$\oint_{ABCD} u dx - (u^2 / 2) dt = 0.$$

Коли відрізки  $DA$  та  $CB$  стягуються до точок  $E$  і  $F$  відповідні інтеграли по цим відрізкам проходяться в протилежних напрямках і обнуляються. Отримаємо рівність

$$\oint_{L'} [u] dx - [u^2 / 2] dt = 0,$$

де  $[z] = z_2 - z_1$  – стрибок величини  $z$  на лінії розриву,  $L'$  – відрізок  $EF$  лінії  $L$ .

В силу довільності відрізка  $L'$  в кожній точці лінії  $L$  повинна обнулятися підінтегральна функція в виразі

$$\oint_{\Gamma'} ([u] \frac{dx}{dt} - [u^2 / 2]) dt = 0.$$

Отримаємо

$$[u] \frac{dx}{dt} - [\frac{u^2}{2}] = 0.$$

Звідки для швидкості руху розриву отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = [\frac{u^2}{2}] / [u] = \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (8.6)$$

Якщо рівняння (8.4) переписати у вигляді



$$\frac{\partial u^2 / 2}{dt} + \frac{\partial u^3 / 3}{\partial x} = 0,$$

то аналогічним шляхом отримаємо

$$\oint_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dx - \frac{u^3}{3} dt = 0$$

і відповідно для швидкості руху розриву величину

$$\frac{dx}{dt} = \left[ \frac{u^3}{3} \right] / [u_2 / 2] = \frac{2}{3} \frac{u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2}. \quad (8.7)$$

Порівнюючи (8.6) та (8.7) маємо, що в залежності який інтегральний закон відображається в (8.1) залежить величина швидкості руху розриву. В задачах математичної фізики інтегральні закони мають конкретний фізичний зміст.

На гладких розв'язках (8.1) всі нижче наведені форми рівносильні:

$$\frac{\partial u}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{dt} + \frac{\partial u^2 / 2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u^2 / 2}{dt} + \frac{\partial u^3 / 3}{\partial x} = 0,$$

$$\oint_{\Gamma} u dx - (u^2 / 2) dt = 0,$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dx - \frac{u^3}{3} dt = 0.$$

В подальшому, розглядаючи задачу Коші (8.1) будемо мати на увазі виконання інтегрального закону збереження (8.5) та умови (8.6) на розриві.

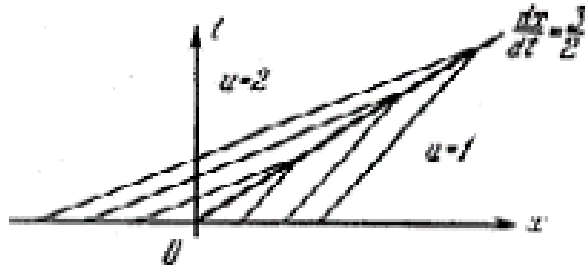
**8.3 Розпад довільного розриву.** Нехай задані початкові дані

$$u(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

де  $u(x, 0)$  монотонно спадає. Тоді в розв'язку є розрив із траєкторією, яка визначається із рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{3}{2}$$

На Мал.4 наведені характеристики для таких початкових даних.

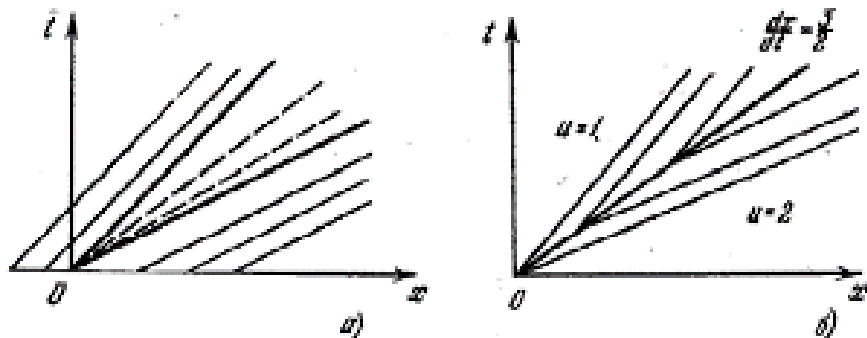


Мал.4 Розподіл характеристик для монотонно спадаючої функції в початкових даних

Задаймо початкові дані з іншою величиною розриву в них

$$u(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

тоді в розв'язку розповсюдження розриву може реалізуватися двома способами (Мал.5)

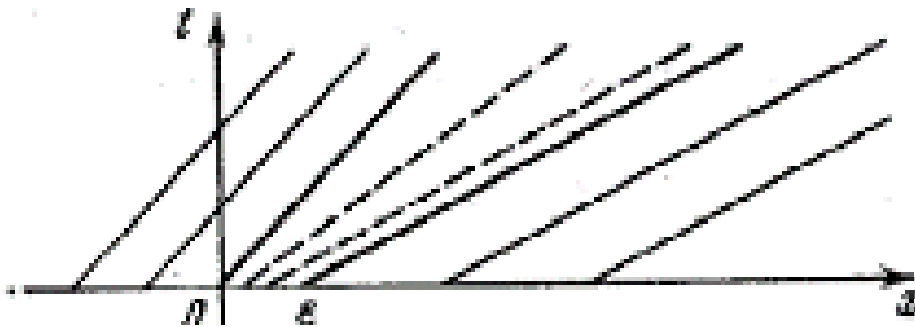


Мал.5 Розподіл характеристик для випадку неперервної хвилі розрідження(а) та ударної хвилі розрідження (б)

Перевагу слідче надати випадку (а). На користь такого вибору наведемо такі аргументи. Змінимо початкову функцію на неперервну, монотонно зростаючу(Мал.6)

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 + \frac{x}{\varepsilon}, & 0 < x \leq \varepsilon, \\ 2, & x > \varepsilon \end{cases}$$

для якої розв'язок задачі Коші при  $\varepsilon \rightarrow 0$  прямує до неперервної хвилі розрідження(а).



Мал.6 Розподіл характеристик для неперервної функції в початкових даних

Заборона на ударну хвилю розрідження пов'язана із відсутністю стійкості такого розв'язку відносно малих збурень.

**8.4 Інші(еквівалентні) визначення узагальненого розв'язку.** Для задачі (8.1) розглянемо ще таке визначення узагальненого розв'язку

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (8.8)$$

$$v(x,0) = \psi(x),$$

рівняння в якій має параболічний тип. Розв'язок такої задачі зберігає гладкість коли  $\psi(x)$  гладка. У випадку, коли  $\psi(x)$  розривна, то у розв'язку розрив вигладжується. Можна показати, що так визначене поняття узагальненого розв'язку еквівалентне інтегральному способу.

Спроба зняти вимогу гладкості із  $u(x,t)$  привела С.П.Соболева до іншого визначення узагальненого розв'язку через виконання умови на класі гладких функцій  $\phi(x,t)$

---

$$\oint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (8.9)$$

Таке визначення допускає розриви в розв'язку.

В математичній теорії узагальнених роз'язків для квазілінійних систем рівнянь в частинних похідних показана еквівалентність визначень (8.5), (8.8), (8.9). Вираз (8.9) часто використовують в теоретичних побудовах при обґрунтуванні різних обчислювальних схем.

Питання для самоконтролю.

1. Властивості нелінійного рівняння переносу.
2. Механізм виникнення розривів.
3. Умова на лінії розриву розв'язку.
4. Задача про розпад довільного розриву.
5. Визначення узагальненого розв'язку.

---

## §9 Адіабати Пуассона і Гюгоніо. Задача про розпад довільного розриву(Задача Рімана)

Розглянемо узагальнення понять і результатів попереднього параграфу на систему рівнянь газової динаміки. Спочатку розглянемо систему рівнянь акустики, що описує розповсюдження плоских звукових хвиль. Вона має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Тут  $u(x,t)$ -швидкість середовища по якому розповсюджується звук,  $p(x,t)$  -тиск в цій точці середовища (точніше, малі відхилення швидкості та тиску від їх значень в незбуреному середовищі, викликаного розповсюдженням звукових хвиль). Постійні величини  $\rho_0$ -щільність,  $c_0^2$ -характеризує стисливість середовища і пов'язані із властивостями середовища.

Таку систему (9.1) проінтегруємо по області  $D$  із границею  $\Gamma$  на площині  $x,t$  і перейдемо до контурних інтегралів (формула Гріна), отримаємо систему інтегральних рівностей

$$\begin{cases} \oint_{\Gamma} \rho_0 u dx - p dt = 0 \\ \oint_{\Gamma} \frac{p}{c_0^2} dx - \rho_0 u dt = 0 \end{cases}$$

При побудові чисельних алгоритмів важливе значення мають диференціальні наслідки із системи (9.1). Так, лінійна комбінація рівнянь (перше рівняння множимо на  $\rho_0 u$ , а друге – на  $\frac{p}{\rho_0 c_0^2}$  і складаємо) приводить

до закону збереження енергії акустичних хвиль

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (pu) = 0,$$

яке має наступну інтегральну форму

$$\oint_{\Gamma} \left( \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) dx - p u dt = 0.$$

Систему (9.1) перетворимо до більш зручної форми

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{p}{\rho_0 c_0^2} \right) + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( u + \frac{p}{\rho_0 c_0^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( u - \frac{p}{\rho_0 c_0^2} \right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( u - \frac{p}{\rho_0 c_0^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

Позначимо  $I^+ = u + \frac{p}{\rho_0 c_0^2}$ ,  $I^- = u - \frac{p}{\rho_0 c_0^2}$  -інваріанти Рімана. Тоді

система (9.2) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} I^+ + c_0 \frac{\partial}{\partial x} I^+ = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} I^- - c_0 \frac{\partial}{\partial x} I^- = 0 \end{cases},$$

що дозволяє виписати загальний розв'язок

$$I^+ = f(x - c_0 t), \quad I^- = g(x + c_0 t).$$

Видно, що інваріанти Рімана зберігають своє значення на характеристиках. Часто кажуть, що інваріанти переносять значення по характеристиках.

Функції  $f$  і  $g$  -довільні диференційовані функції. Знайдені  $I^+, I^-$  дозволяють виписати розв'язок системи (9.1)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)]$$

$$p(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)]$$

Якщо до системи (9.1) додати початкові умови (задача Коші)

$$u(x,0) = u_0(x), \quad p(x,0) = p_0(x), \quad (9.3)$$

то необхідно підбирати  $f$  і  $g$  із рівнянь

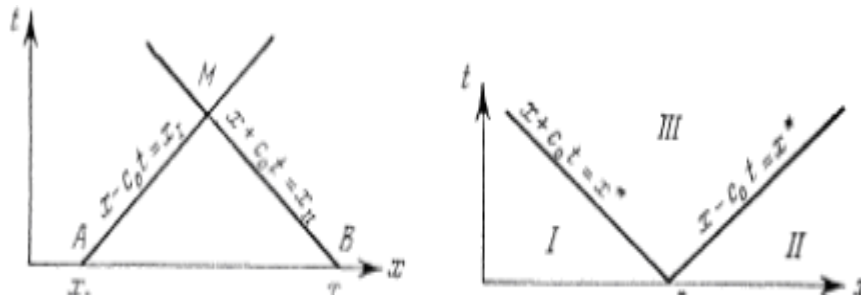
$$u_0(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]$$

$$p_0(x,t) = \frac{1}{2}[f(x) - g(x)].$$

Розв'язок задачі Коші (9.1), (9.3) запишеться так

$$u(x,t) = \frac{u_0(x - c_0 t) + u_0(x + c_0 t)}{2} + \frac{p_0(x - c_0 t) - p_0(x + c_0 t)}{2\rho_0 c_0}$$

$$p(x,t) = \frac{p_0(x - c_0 t) + p_0(x + c_0 t)}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_0(x - c_0 t) - u_0(x + c_0 t)}{2}.$$



Мал.1 Характеристичний трикутник та області впливу

Відомо, що така задача Коші має єдиний розв'язок всередині характеристичного трикутника АВМ (Мал.1).

Побудуємо розв'язок коли початкові умови розривні. Розглянемо наступну просту задачу. Нехай в момент  $t = 0$  умова (9.3) має вигляд

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u_I, \quad p_0(x) = p_I \quad \text{при } x < x^* \\ u_0(x) &= u_{II}, \quad p_0(x) = p_{II} \quad \text{при } x > x^* \end{aligned}$$

де  $u_I, u_{II}, p_I, p_{II}$  – деякі постійні величини для яких виконано  $u_I \neq u_{II}$  або  $p_I \neq p_{II}$  чи одночасно.

Не звертаючи увагу на розривний характер початкових даних, будемо конструювати розв'язок як і раніше. Із урахуванням постійних значень інваріантів на характеристиках в області I маємо

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I + \frac{p_I}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I - \frac{p_I}{\rho_0 c_0}.$$

Тоді  $u = u_I, p = p_I$  -зберігаються незбурені «ліві» значення початкових значень. В області II, аналогічно

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} + \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} - \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0},$$

маємо  $u = u_{II}, p = p_{II}$  – зберігаються «праві» незбурені величини.

В області III величини  $u, p$  знаходяться із рівнянь

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I + \frac{p_I}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} - \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0}.$$

Значить розв'язок можна виразити

$$u(x,t) = \begin{cases} u = u_I, \text{ якщо } x < x^* - c_0 t \\ u = u_{II}, \text{ якщо } x > x^* + c_0 t \\ u = \frac{u_I + u_{II}}{2} - \frac{p_{II} - p_I}{2\rho_0 c_0}, \text{ якщо } x \in (x^* - c_0 t, x^* + c_0 t) \end{cases},$$

$$p(x,t) = \begin{cases} p = p_I, \text{ якщо } x < x^* - c_0 t \\ p = p_{II}, \text{ якщо } x > x^* + c_0 t \\ p = \frac{p_I + p_{II}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{II} - u_I}{2}, \text{ якщо } x \in (x^* - c_0 t, x^* + c_0 t) \end{cases}.$$

Побудований розв'язок має розриви вдовж двох ліній  $x + c_0 t = x^*$  та  $x - c_0 t = x^*$ , які розділяють області I, II, III. Названі лінії утворилися із точки розриву в початкових даних. Така задача носить назву – задача про розпад розриву.

Функції  $u(x,t), p(x,t)$  можна вважати розв'язками поставленої задачі Коші (9.1) і (9.3) лише формально. Вони не диференційовані (розривні на лініях). Тому назвемо їх узагальненим розв'язком задачі.

**9.1 Нелінійні рівняння газової динаміки.** Розглянемо узагальнення понять та результатів наведених вище для системи нелінійних рівнянь газової



динаміки. Так, одновимірною нестационарною системою рівнянь газової динаміки запишемо у вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (9.4)$$

де

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad E = \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right), \quad (9.5)$$

$$e = \frac{p}{(k-1)}, \quad p = \rho R T,$$

відносно трьох невідомих функцій (консервативні змінні)

$$U_1 = \rho, \quad U_2 = \rho u, \quad U_3 = E.$$

Якщо рівняння стану задане як

$$p = p(V, S), \quad T = T(V, S),$$

за допомогою термодинамічного співвідношення

$$de + pdV = TdS = \delta Q$$

можна знайти  $e$  як функцію змінних  $V, S$ . Коли відомі залежності

$$\begin{cases} p = p(V, S) \\ e = e(V, S) \end{cases},$$

визначимо

$$p = \Psi(\rho, e).$$

Тоді система (9.4),(9.5) замикається без  $S$ .

Запишемо компоненти систему (9.4) в консервативних змінних

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix},$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} F_1(U) \\ F_2(U) \\ F_3(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ (E + p)u \end{pmatrix} + p = \begin{pmatrix} U_2 \\ \Psi(U_1, \frac{U_3}{U_1} - \frac{1}{2}(\frac{U_2}{U_1})^2) + \frac{U_2^2}{U_1} \\ (U_3 + \Psi(U_1, \frac{U_3}{U_1} - \frac{1}{2}(\frac{U_2}{U_1})^2)) \frac{U_2}{U_1} \end{pmatrix}.$$

Тоді елементи матриці  $A = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$  в фізичних змінних  $G = (\rho, u, p)^T$

має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \phi^2 - u^2 & -(k-1)u & k-1 \\ u(2\phi^2 - ke/\rho) & ke/\rho - \phi^2 - (k-1)u^2 & ku \end{pmatrix},$$

де  $\phi^2 = \frac{k-1}{2}u^2$ ,  $\rho$  – густина,  $u$  – швидкість,  $E$  – повна енергія,

$E = \rho(e + \frac{u^2}{2})$ ,  $p$  – тиск. В подальшому використовується інша форма

запису третього рівняння в системі (9.4) типу

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u H}{\partial x} = 0,$$

в якому  $H$  – ентальпія,  $H = \frac{E + p}{\rho}$ .

Для ідеального газу можливо записати

$$e = \frac{\rho^{k-1}}{k-1} \sigma(S), \quad \sigma(S) = \exp(S / c_V), \quad p = \rho^k \sigma(S).$$

Величину  $k$  називають показником адіабати Пуассона.

Більш складне рівняння стану, відоме як двохчленне (узагальнення рівняння стану ідеального газу), має вигляд

$$e(p, \rho) = \frac{p - c_0^2(\rho - \rho_0)}{(k-1)\rho},$$

де  $\rho_0$ ,  $c_0$  деякі постійні величини. Тиск через густину та ентропію

знаходять із рівняння

$$p = \sigma(S) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k - \frac{\rho_0 c_0^2}{k}.$$

Таке рівняння використовується при вивченні процесів в воді та в металах при високому тиску. Рівняння ідеального газу отримуємо із нього при  $c_0 = 0$ ,  $\rho_0 = 1$ .

Коли  $\rho = \rho(x,t)$ ,  $u = u(x,t)$ ,  $E = E(x,t)$  – гладкі функції є розв'язком системи (9.4), то для довільної області  $\Omega$  із границею  $\Gamma$  із області визначення мають місце рівності

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} \right] dx dt = \oint_{\Gamma} U dx - F(u) dt = 0,$$

або в компонентах

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right] dx dt = \oint_{\Gamma} \rho dx - \rho u dt = 0 \\ \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} \right] dx dt = \oint_{\Gamma} \rho u dx - (p + \rho u^2) dt = 0. \\ \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (E + p)u}{\partial x} \right] dx dt = \oint_{\Gamma} E dx - (E + p)u dt = 0 \end{array} \right. \quad (9.6)$$

Інтегральні рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\Gamma} \rho dx - \rho u dt = 0 \\ \oint_{\Gamma} \rho u dx - (p + \rho u^2) dt = 0 \\ \oint_{\Gamma} E dx - (E + p)u dt = 0 \end{array} \right. \quad (9.7)$$

є математичним виразом основних законів фізики-закон збереження маси, імпульсу та енергії.

Система (9.7) справедлива не лише на гладких функціях а і на реальних газодинамічних функціях із розривами. В газодинамічних потоках із розривами зустрічаються поверхні на яких газодинамічні функції змінюються стрибком 1-го роду. Із інтегральних законів (9.6) отримаємо співвідношення, що зв'язують величини параметрів по обидві сторони розриву. Такі співвідношення називають умовами на ударних хвилях.

Нехай розрив розповсюджується із швидкістю  $\frac{dx}{dt} = D$ . Тоді, аналогічно, як раніше для одного нелінійного рівняння, із законів збереження отримаємо співвідношення на розриві

$$\begin{cases} \int [\rho] dx - [\rho u] dt = \int ([\rho]D - [\rho u]) dt = 0 \\ \int [\rho u] dx - [p + \rho u^2] dt = \int ([\rho u]D - [p + \rho u^2]) dt = 0, \\ \int [E] dx - [(E + p)u] dt = \int ([E]D - [(E + p)u]) dt = 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

де інтеграли беруться по довільному відрізку лінії розриву. В (9.8) прийняті позначення  $[f] = f^+ - f^-$  –стрибок функції на розриві. Тоді, в силу довільності відрізка лінії розриву отримаємо

$$\begin{cases} [\rho]D - [\rho u] = 0 \\ [\rho u]D - [p + \rho u^2] = 0. \\ [E]D - [(E + p)u] = 0 \end{cases} \quad (9.9)$$

Умови (9.9) називається умовами на розривах.

Відомо, що не кожний закон збереження, виконаний на гладких розв'язках, буде виконаний і на розривних. Якщо рівняння стану записано у вигляді  $e = e(\rho, S)$  тоді, наприклад, із системи (9.4),(9.5) отримаємо наслідок

$$-\frac{e + \rho e_\rho - u^2}{e_s} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) - \frac{u}{e_s} \left( \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} \right) + \frac{1}{e_s} \left( \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (E + p)u}{\partial x} \right) = 0.$$

Його можливо переписати так

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0,$$

а в інтегральній формі

$$\oint_{\Gamma} \rho S dx - \rho u S dt = 0.$$

Отримано закон збереження ентропії, виконаний на гладких розв'язках рівнянь газової динаміки. З'ясовано, що закон збереження ентропії на розривах не виконується. Замість закону збереження при проходженні елемента середовища через розрив ентропія в ньому зростає

$$\oint_{\Gamma} \rho S dx - \rho u S dt \leq 0. \quad (9.10)$$

Інтегрування виконується проти ходу годинникової стрілки. На сьогодні відомо, що функції, які задовольняють інтегральним умовам (9.7) та умові (9.10) однозначно визначаються своїми значеннями при  $t = 0$ , якщо рівняння стану  $e = e(V, S)$  не є надто «складним». Функція  $e = e(V, S)$  називається термодинамічним потенціалом, оскільки тиск  $p$  та абсолютна температура  $T$  виражаються із неї у вигляді похідних

$$p = p(V, S) = -\frac{\partial e(V, S)}{\partial V}$$

$$T = T(V, S) = \frac{\partial e(V, S)}{\partial S}$$

за допомогою термодинамічної тотожності

$$de + pdV = TdS,$$

є випуклою функцією своїх аргументів. Умова випуклості функції  $e = e(V, S)$  слідує із додатної визначеності матриці її других похідних

$$e_{VV} > 0, e_{VV}e_{SS} - e_{VS}^2 > 0.$$

Окрім того, функція  $e = e(V, S)$  повинна задовольняти додатковим обмеженням, відомим як умови Бете та Вейле

$$e_{VS} < 0, e_{VVV} < 0.$$

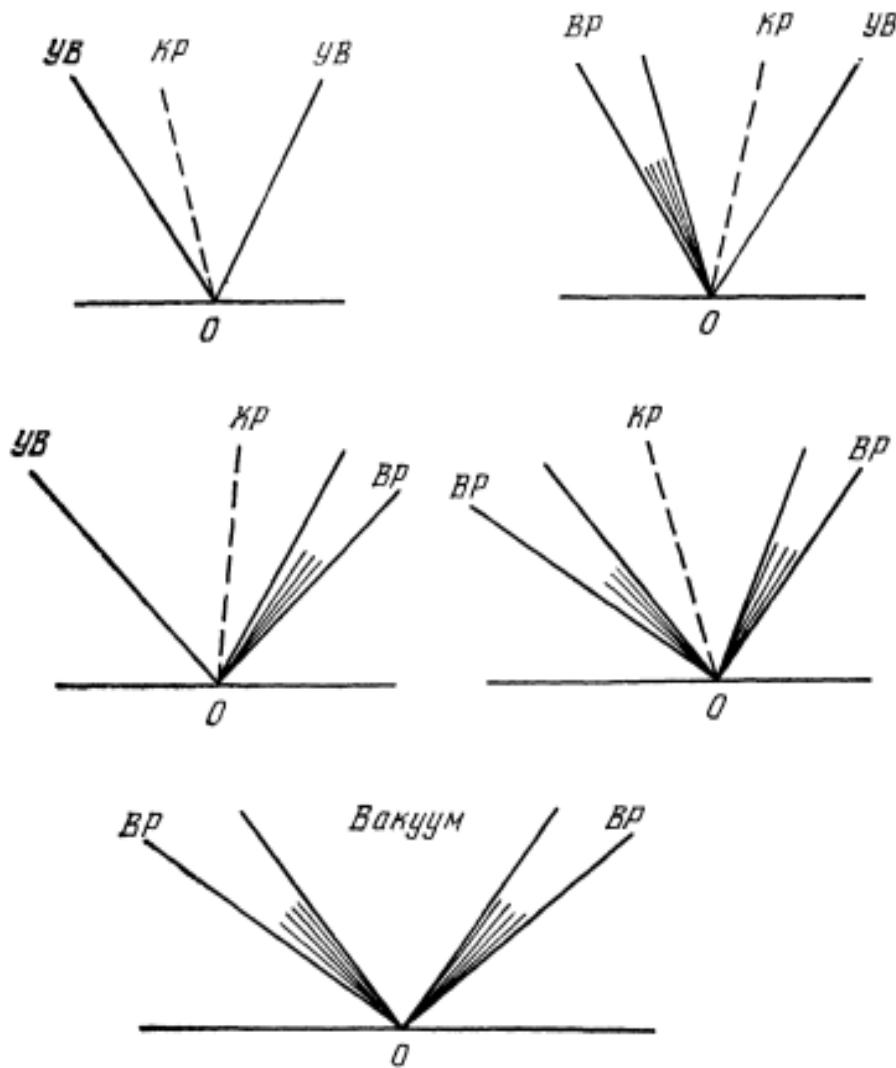
При побудові чисельного методу для розв'язання задач Коші систем типу (9.4), (9.5) широко використовується елементарні розв'язки задачі розпаду довільного розриву. Такі розв'язки використовуються в задачах газової динаміки, магнітної гідродинаміки, теорії електромагнітних хвиль, лінійної та нелінійної теорії пружності та пластичності.

**9.2 Задача про розпад розриву.** Нехай середовище (газ, рідина, метал) для якого термодинамічні параметри  $p, \rho, e$  задовольняють двочленному рівнянню стану

$$e(p, \rho) = \frac{p - c_0^2(\rho - \rho_0)}{(k-1)\rho} = \frac{p + kp_0}{(k-1)\rho} - \frac{c_0^2}{k-1}, \quad (9.11)$$

$p_0 = \frac{1}{k} \rho_0 c_0^2$ . Рівняння ідеального газу є наслідком із двочленного при  $c_0 = 0$ .

Припустимо, що в момент  $t=0$  для лівого напівпростору  $x < 0$  середовище характеризується значеннями параметрів  $p_I, \rho_I, u_I$ , а для правого напівпростору  $x > 0$  –  $p_{II}, \rho_{II}, u_{II}$ . Схематично (Мал.2), автомодельна картина виникаючої течії на площині  $x, t$  може бути зображена у вигляді таких конфігурацій



Мал.2 Конфігурації при розпаді довільного розриву

Перші чотири із них включають контактний розрив (КР) на якому відбувається стрибок густини, а тиск і швидкість неперервні. Їх однакові значення в областях зліва та справа від КР ми позначимо через  $P, U$  відповідно, а різні значення густини та внутрішньої енергії  $e$   $R_1, E_1$  для лівої,  $R_2, E_2$ , для правої області. В свою чергу, ці області відокремлені від незбурених областей  $(p_I, \rho_I, u_I)$  ліворуч і  $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$  праворуч або ударною хвилею(УВ), або хвилею розрідження (ВР), які будемо називати «правою» чи «лівою». Остання конфігурація є граничним випадком, коли в результаті розлітання утворюється вакуум, в якому густина падає до  $\rho = 0$  між двома хвилями розрідження.

Математичний розв'язок такої задачі наведено в спеціальній літературі. Приведемо короткий його опис та ключові формули.

На ударній хвилі виконані співвідношення (9.9), які зв'язують значення швидкості ударної хвилі  $D$  та значення параметрів перед фронтом та за ним. Із них легко отримати рівність

$$E - e - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) (p + P) = 0,$$

де  $(p, \rho, e)$  – величини перед її фронтом,  $(P, R, E)$  – за фронтом ударної хвилі.

Виключимо із неї за допомогою (9.11)  $e$  та  $E$  отримаємо адіабату Гюгоніо

$$R = \rho \frac{(k+1)(P+p_0) + (k-1)(p+p_0)}{(k-1)(P+p_0) + (k+1)(p+p_0)}. \quad (9.12)$$

Введемо масову швидкість

$$a_I = \rho_I (u_I - D_I) = R_I (U - D_I),$$

тоді із (9.9), записаних для лівої ударної хвилі (якщо вона виникне), отримаємо

$$U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} = 0, \quad (9.13)$$

$$a_I = \sqrt{\rho_I \left[ \frac{k+1}{2} (P+p_0) + \frac{k-1}{2} (p_I+p_0) \right]}.$$

Аналогічно, для правої ударної хвилі (якщо вона виникне), після введення масової швидкості

$$a_{II} = \rho_{II}(D_{II} - u_{II}) = R_{II}(D_{II} - U)$$

Із співвідношень (9.9) отримаємо

$$U - u_{II} - \frac{P - p_{II}}{a_{II}} = 0, \quad (9.14)$$

$$a_{II} = \sqrt{\rho_{II} \left[ \frac{k+1}{2}(P + p_0) + \frac{k-1}{2}(p_{II} + p_0) \right]}.$$

У випадку хвиль розрідження замість (9.9) необхідно використати умови неперервності ріманових інваріантів

$$[u] \pm \frac{2}{k-1}[c] = 0, \quad [\sigma(S)] = 0, \quad (9.15)$$

де  $c$  – швидкість звуку,  $S$  – ентропія. Квадратними дужками позначено різницю постійних значень в областях зліва та справа від хвилі розрідження. Знак «+» в (9.15) береться для лівої хвилі розрідження, знак «-» для правої. Для двочленного рівняння стану (9.11) величини  $c, \sigma(S)$  знаходять по формулах

$$c = \sqrt{k \frac{p + p_0}{\rho}}, \quad \sigma(S) = \frac{k(p + p_0)}{\rho^k}.$$

Тому із (9.15) для лівої хвилі розрідження

$$U - u_I + \frac{2}{k-1}c_I \left[ 1 - \left( \frac{P + p_0}{p_I + p_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \right] = 0,$$

а для правої

$$U - u_{II} - \frac{2}{k-1}c_{II} \left[ 1 - \left( \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \right] = 0.$$

Отримані вирази можна записати у вигляді (9.13), (9.14), як для ударних хвиль



$$U - u_I + \frac{P - p_I}{a_I} = 0 \text{ для лівої хвилі,}$$

$$U - u_{II} - \frac{P - p_{II}}{a_{II}} = 0 \text{ для правої хвилі,}$$

після введення масових швидкостей за допомогою формул

$$a_I = \frac{k-1}{2k} \rho_I c_I \frac{1 - \frac{P + p_0}{p_I + p_0}}{1 - \left( \frac{P + p_0}{p_I + p_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}}},$$

$$a_{II} = \frac{k-1}{2k} \rho_{II} c_{II} \frac{1 - \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0}}{1 - \left( \frac{P + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}}}.$$

Один із способів обчислення «великих» величин отримаємо із (9.13) та (9.14), виключивши із них швидкість контактного розриву  $U$ , у вигляді рівняння для тиску  $P$

$$F(P) \equiv f(P, p_I, \rho_I) + f(P, p_{II}, \rho_{II}) = u_I - u_{II},$$

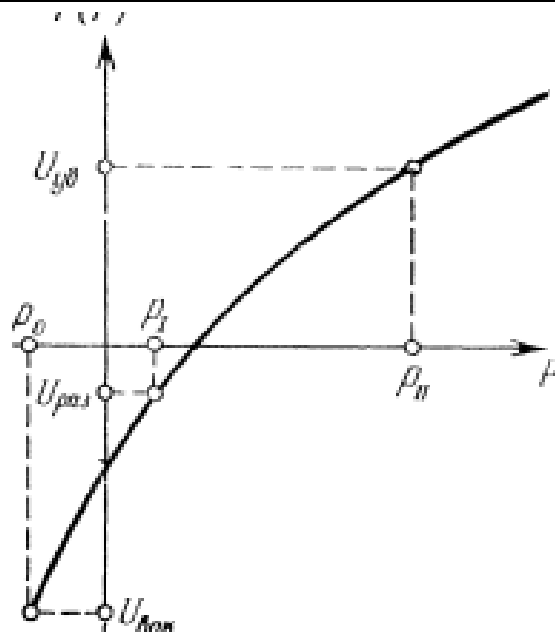
де для значень  $k = I, II$

$$f(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} \frac{P - p_k}{\rho_k c_k \sqrt{\frac{k+1}{2k} \pi_k + \frac{k-1}{2k}}}, \text{ якщо } P \geq p_k \\ \frac{2}{k-1} c_k \left( \pi_k^{\frac{k-1}{2k}} - 1 \right), \text{ якщо } P < p_k \end{cases},$$

$$\pi_k = \frac{P + p_0}{p_k + p_0}, \quad c_k = \sqrt{k \frac{p_k + p_0}{\rho_k}}.$$

Для спрощення аналізу допустимо, що  $p_I \leq p_{II}$ .

Значення функції  $F(P)$  в точках  $P = -p_0, p_I, p_{II}$  дозволяє визначити конфігурацію розпаду розриву.



Мал.3

Так

$$F(p_{II}) = U_{уд} = \frac{p_{II} - p_I}{\sqrt{\rho_I \left[ \frac{k+1}{2}(p_{II} + p_0) + \frac{k-1}{2}(p_I + p_0) \right]}}$$

$$F(p_I) = U_{розр} = -\frac{2c_{II}}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_I + p_0}{p_{II} + p_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \right],$$

$$F(-p_0) = U_{вак} = -\frac{2c_I}{k-1} - \frac{2c_{II}}{k-1}.$$

Легко побачити із графіка функції  $F(P)$  (Мал.3), що в залежності від величини  $u_I - u_{II}$  можливі ситуації:

1.  $u_I - u_{II} > U_{уд}$ . Тоді  $P > p_{II}$  і  $P > p_I$ . Направо і наліво розповсюджуються ударні хвилі.
2.  $U_{розр} < u_I - u_{II} < U_{уд}$ . Тоді  $p_I < P < p_{II}$ . Наліво- ударна хвиля, направо- хвиля розрідження.
3.  $U_{вак} < u_I - u_{II} < U_{розр}$ . Тоді  $-p_0 < P < p_I$ , виникають дві хвилі розрідження.

---

4.  $u_I - u_{II} \prec U_{\text{вак}}$ . Виникає область вакууму, в якій необхідно покласти  $P = -p_0, R = 0$ .

Питання для самоконтролю.

1. Інваріанти Рімана для рівнянь акустики.
2. Одновимірні нестационарні рівняння Ейлера для руху ідеального газу.
3. Співвідношення на розривах.
4. Задача про розпад довільного розриву в газовій динаміці.

---

## Розділ 2.

### Чисельні методи математичної фізики

#### §1 Чисельні методи. Основні характеристики. Метод скінчених різниць (МСР).

Розглянемо деякі коректно поставлені математичні задачі для рівнянь в частинних похідних на яких будемо випробовувати чисельні методи.

1. Змішана задача для рівняння переносу.

Знайти функцію  $u(x,t)$  в області  $D: (x \in [0, L], t \in [0, T])$ , яка задовольняє рівнянню (нехай  $a > 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t),$$

початковим умовам  $u(x,0) = u_0(x)$

і умові на лівій границі  $u(0,t) = \varphi(t)$ .

2. Змішана задача для рівняння теплопровідності.

Знайти функцію  $u(x,t)$  в області  $D: (x \in [0, L], t \in [0, T])$ , яка задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

початковій умові  $u(x,0) = u_0(x)$ ,

та граничним умовам  $A_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + B_1 u(0,t) = \varphi_1(t)$ ,

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + B_1 u(L,t) = \varphi_2(t).$$

За допомогою вибору коефіцієнтів можна реалізувати граничні умови першого, другого та третього роду.

3. Змішана задача для хвильового рівняння.

Знайти функцію  $u(x,t)$  в області  $D: (x \in [0,L], t \in [0,T])$ , яка задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

початковим умовам  $u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$

та граничним умовам  $u(0,t) = \varphi_1(t), u(L,t) = \varphi_2(t)$ .

**1.1 Основні поняття теорії різницевої схем.** В подальшому допускається володіння поняттями апроксимації, стійкості та збіжності різницевої схем для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДУ). Нагадаємо деякі факти для ЗДУ. Для рівняння

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f(x,u), \\ u(x_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

на рівномірній сітці  $\Omega_h, 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, h = 1/M$  різницева схема має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{v_{i+1} - v_i}{\tau} = f(x_i, v_i), \\ v_0 = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

де  $x_i = ih, i = 0, \dots, M$ .

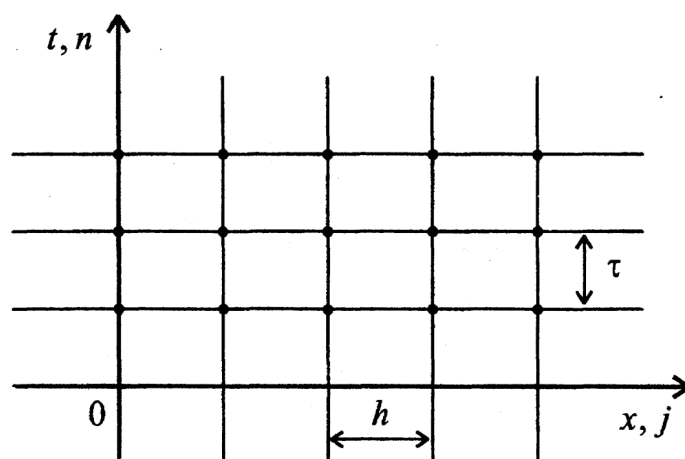
Відома теорема Лакса для таких систем різницевої рівнянь установлює зв'язок між апроксимацією, стійкістю та збіжністю. Серед апроксимуючих різницевої схем для (1.1) необхідно вибрати стійкі, тоді розв'язки задачі (1.2) збігаються до розв'язку задачі (1.1) коли  $N \rightarrow \infty$ . Узагальнення основних ідей побудови різницевої схем для ЗДУ на випадок рівнянь у частинних похідних (РЧП) зустрічається із багатьма можливими особливостями. Відмітимо серед них такі: великий вибір сіток і способів апроксимації похідних, відсутність стійкості у більшості взятих на увагу різницевої схем, складність при дослідженні їх стійкості та труднощі побудови дискретного розв'язку системи різницевої рівнянь (різнцевої

схем) для задач Коші та початково – крайових задач.

**1.2 Апроксимація різницевих схем.** Розглянемо задачу Коші для найпростішого РЧП

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0; & x \in [-\infty, \dots, +\infty] \\ u(x, 0) = u_0(x); & t \in [0, T] \end{cases} \quad u = u(x, t), \quad (1.3)$$

В якості сітки (Мал.1) виберемо систему точок  $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ ,  $\Omega_\tau (0 = t_0 < t_1 \dots t_N)$ ,  $\tau = T / N$ ,  $t_n = n\tau, n = 0, \dots, N$  і змість значень функції  $u(x_i, t^n)$  будемо шукати її наближені значення  $v_i^n$ . Зупинимося на позначеннях, які використовуються в науковій літературі, і будемо використовувати їх для запису різницевих схем.



Мал.1 Розрахункова сітка

Так, позначимо

$$u = u(x_i, t^n) \approx v_i^n = v, \quad u(\pm 1) = u(x_{i\pm 1}, t^n) \approx v_{i\pm 1}^n, \quad \hat{u} = u(x_i, t^{n+1}) \approx v_i^{n+1},$$

$$u^\alpha = \alpha \hat{u} + (1 - \alpha)u, \quad \bar{u} = u(x_{i+n}, t^n) \approx v_{i+1/2}^n = \bar{v},$$

$$\Delta u = \delta^+ u = u(+1) - u, \quad \nabla u = \delta^- u = u - u(-1), \quad t^{n+1} = t^n + \tau.$$

Побудуємо апроксимуючу різницеву схему для (1.3) на сітці  $\Omega_{h,\tau}$ .

Замінімо похідні  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  їх різницевими аналогами. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(x_i, t^n + \tau) - u(x_i, t^n)}{\tau} \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \frac{\delta_t^+ v}{\tau},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) \approx \frac{v(+1) - v}{h} = \frac{\Delta v}{h} = \frac{\delta_x^+ v}{h} \text{ або}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) \approx \frac{v - v(-1)}{h} = \frac{\nabla v}{h} = \frac{\delta_x^- v}{h}.$$

Відповідна схема для (1.3) запишеться як

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + \frac{f(v_{i+1/2}^n) - f(v_{i-1/2}^n)}{h} = 0, \quad (1.4)$$

$$v_i^0 = u_0(x_i)$$

або в безіндесних позначеннях

$$\frac{\hat{v} - v}{\tau} + \frac{\bar{f} - \bar{f}(-1)}{h} = 0, \quad \frac{\delta_t^+ v}{\tau} + \frac{\delta_x^- \bar{f}}{h} = 0, \quad (1.5)$$

де  $\bar{f} = f(\bar{v})$ .

Для з'ясування порядку апроксимації різницевою схемою (1.4) рівняння (1.3) підставимо функцію-розв'язок (1.3)  $u = u(x, t)$  в схему (1.4) і розкладемо її в околі точки  $(x_i, t^n)$  в ряд Тейлора

$$\hat{u} = u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \frac{\partial u}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \frac{\tau^3}{3!} + \dots$$

$$u(+1) = u(x_{i+1}, t^n) = u(x_i, t^n) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots \quad (1.6)$$

$$u(-1) = u(x_{i-1}, t^n) = u(x_i, t^n) - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1/2}, t^n) &= u(x_i, t^n) + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{8 \cdot 3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \\
u(x_{i-1/2}, t^n) &= u(x_i, t^n) - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{8 \cdot 3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \\
f(u(x_{i+1/2})) &= f(\bar{u}) = f(u) + \frac{\partial f}{\partial u} \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right)^2 + \dots \\
&\quad + \dots \frac{h}{4} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{h}{4} \\
f(u(x_{i-1/2})) &= f(\bar{u}(-1)) = f(u) + \frac{\partial f}{\partial u} \left( -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{8 \cdot 3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{8 \cdot 3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Підставимо(1.6) в (1.5) і отримаємо для

$$\begin{aligned}
\frac{f(\bar{u}) - f(\bar{u}(-1))}{h} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \\
&\quad + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left[ \frac{h}{8} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h}{8} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \dots
\end{aligned}$$

і апроксимуючий вираз

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{h^2}{24} \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right] + O(\tau^3, h^3)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Відмінність (1.7) від (1.3) полягає доданках

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{24} \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^3 f}{\partial u^3} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right] + O(\tau^2, h^3)
\end{aligned}$$



Тому говорять, що різницева схема (1.5) апроксимує диференціальну задачу (1.3) із точністю до  $O(\tau, h^2)$ , інакше, із першим порядком за часом та другим порядком по координаті.

**1.3 Стійкість розв'язків різницевої схеми.** Поняття стійкості розв'язку різницевого рівняння розглянемо на прикладі різницевої схеми для рівняння (1.3) із  $f(u) = a \cdot u$ ,  $a = \text{const}$ ,  $a > 0$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

у вигляді

$$\frac{\hat{v} - v}{\tau} + a \frac{v - v(-1)}{h} = 0. \quad (1.8)$$

Різницеву схему називають схемою із різницями проти потоку і має порядок апроксимації  $O(h, \tau)$ .

Перепишемо (1.8) у вигляді

$$\hat{v} = (1 - \nu)v + \nu v(-1), \quad \nu = \frac{a\tau}{h}$$

Коли

$$\nu = \frac{a\tau}{h} < 1 \text{ і } (1 - \nu) > 0 \quad (1.9)$$

справедлива оцінка

$$|\hat{v}| \leq (1 - \nu)|v| + \nu|v(-1)| \leq (1 - \nu) \max_{\Omega_h} |v| + \nu \max_{\Omega_h} |v(-1)| = \max_{\Omega_h} |v|, \quad (1.10)$$

звідки маємо, що при переході від моменту часу  $t^n$  до  $t^{n+1}$  розв'язок різницевого рівняння (1.8) не зростає. Нерівність (1.9) означає стійкість розв'язків різницевої схеми (1.8). Число  $\nu = \frac{a\tau}{h}$  називають числом Куранта.

Зауважимо, що наявність тільки апроксимації у різницевої схеми (1.8) не достатньо для стійкості, а значить і для збіжності. Звернемо увагу на

відсутність стійкості у різницевої схеми коли  $a < 0$ . Також, у випадку, коли  $\nu > 1$  довести нерівність (1.10) не вдається.

Умову  $\nu \leq 1$  можливо отримати і іншими засобами, спектральна прикмета Неймана, умова Куранта – Фріхрікса – Леві (КФЛ) із характеристичного аналізу. Покажемо на прикладі найпростіших різницевих схем для лінійного рівняння переносу ( $a > 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.11)$$

що умова КФЛ є лише необхідною.

Розглянемо для (1.11) різницеву схему (записану у різних еквівалентних формах)

$$\hat{v} = v - \frac{a\tau}{2h} [v(+1) - v(-1)] = v - \frac{a\tau}{2h} [\Delta v + \nabla v] = v - \frac{\nu}{2} [\delta^+ v + \delta^- v].$$

яка має порядок апроксимації  $O(h^2, \tau)$ .

Виконаємо дослідження стійкості за спектральним методом Неймана. Нехай похибка обчислень в вузлах є  $\varepsilon_i^n$ , яка, в силу лінійності рівняння (1.11), задовольняє різницевому рівнянню

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{a\tau}{2h} [\varepsilon(+1) - \varepsilon(-1)] \quad (1.12)$$

Покажемо, що похибка  $\varepsilon_m^{n+1} = \lambda \varepsilon_m^n$ ,  $\varepsilon_m^n = e^{im\phi}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  зростає. Підставимо  $\varepsilon = \varepsilon_m^{n+1} = \lambda \varepsilon_m^n = \lambda \varepsilon$  в (1.12) і для  $\lambda$  (множника переходу) отримаємо

$$\lambda = 1 - \frac{a\tau}{2h} \cdot (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = 1 - i\nu \sin \phi.$$

Тоді  $|\lambda| = \sqrt{1 + \nu^2 \sin^2 \phi} \geq 1$ , незважаючи на те, що вибрано  $\nu = \frac{a\tau}{h} < 1$ ,

а значить при переході по часовим шарах  $[t^n, t^{n+1}]$  похибка зростає.

**1.4 Збіжність розв'язків різницевих схем.** Важливість наявності у різницевих схем апроксимативних властивостей та стійкості її розв'язків

визначається зв'язком їх із збіжністю до точного розв'язку диференціального рівняння при подрібненні різничевої сітки ( $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ ).

Теорема Лакса. Якщо різницева схема апроксимує диференціальну задачу із порядком  $O(h^k, \tau^p)$  і стійка, то її розв'язок збігається в точках різничевої сітки до значень в них точного розв'язку.

Однорідність. Бажаність одноманітності обчислювального алгоритму приводить до поняття однорідної різничевої схеми, вигляд якої не залежить від номера вузла різничевої сітки та його розмірів. Необхідність дослідження процесів, описаних диференціальними рівняннями із розривними коефіцієнтами, або особливостями в самих розв'язках, вимагає побудови різницевих схем для «наскрізних» розрахунків.

Для задачі дифузії

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, & x \in R \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

розглянемо трьохточкову явну різницеву схему

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{1}{h} \cdot \left[ \bar{k} \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} - \bar{k}(-1) \cdot \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} \right] = 0, \quad (1.13)$$

у якої порядок апроксимації  $O(h^2, \tau)$

Видно, що наведена схема (1.13) є однорідною.

Можливі випадки, коли апроксимація має умовний характер.

Розглянемо різницеву схему Лакса для лінійного рівняння переносу

$$L_h v = \frac{\hat{v} - \frac{1}{2}[v(+1) + v(-1)]}{\tau} - \frac{v(+1) - v}{h} = 0. \quad (1.14)$$

Після розкладання в ряди Тейлора отримаємо

$$L_h u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{2\tau} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o\left(\tau^2 + h^2 + \frac{h^4}{\tau}\right).$$

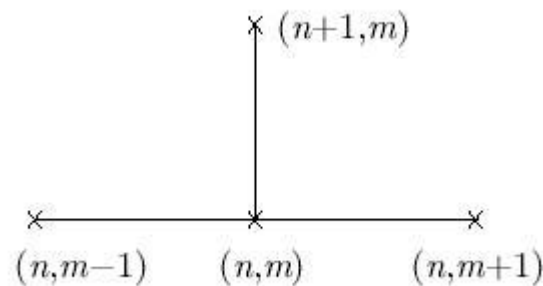
Видно, що наведена різницева схема апроксимує рівняння переносу

$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  при умові, що  $\frac{h}{\tau} = \nu = const$ . У випадку, коли зв'язок  $\tau = \tau(h)$

має більш складний вигляд  $\tau = \alpha h^2$ , різницева схема апроксимує уже зовсім інше рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Для ідентифікації різницевої схем широко використовуються «шаблони», на яких зображені точки які входять в різницеві вирази апроксимуючої схеми (див.Мал.2). Для схеми (1.13) шаблон має вигляд



Мал.2 Шаблон різницевої схеми (1.13)

Для схеми (1.14) зображення шаблону співпадає із шаблоном для (1.13).

Наведемо характеристики різницевої схем для рівняння (1.11)

$$\hat{u} = u - \frac{a\tau}{h} [u(+1) - u]$$

$$\hat{u} = u - \frac{a\tau}{2h} [u(+1) - u(-1)]$$

Обидві схеми мають порядок апроксимації  $O(h, \tau)$ , вони є явними, але є абсолютно нестійкими при  $a > 0$  і тому для чисельного дослідження рівняння (1.11) є непридатними. Перша схема є схемою із різницями по потоку, а друга із центральними різницями. Окрім явних методів широко використовують і неявні, які мають важливу властивість-вони є абсолютно стійкі. Наприклад, для рівняння (1.11) розглянемо різницеву схему

$$\hat{u} = u - \frac{a\tau}{2h} [u(+1) - u(-1)].$$

Схема має другий порядок точності із порядком апроксимації  $O(h^2, \tau)$ . Аналіз стійкості спектральним методом Неймана дає умову на коефіцієнт переходу

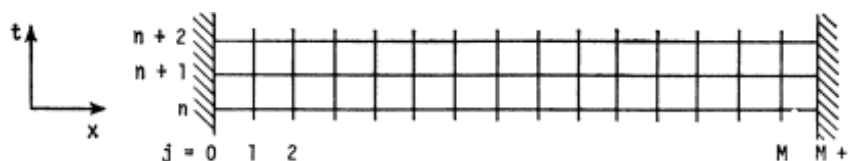
$$\lambda e^{i\alpha j} = e^{i\alpha j} - a \frac{\tau}{2h} [\lambda e^{i\alpha(j+1)} - \lambda e^{i\alpha(j-1)}].$$

Після скорочення на  $e^{i\alpha j}$  і, враховуючи, що  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $\nu = \frac{a\tau}{h}$  отримаємо

$$\lambda = \frac{1}{1 + \nu \sin \alpha} \geq 1$$

при довільних  $\nu$ .

Використання такої схеми призводить до необхідності розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь на сітці (Мал.3)



Мал.3 Розрахункова сітка

у вигляді

$$\frac{\nu}{2} u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1} - \frac{\nu}{2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n, \quad j = 1, \dots, M. \quad (1.15)$$

Матриця системи

$$a_j u_{j+1}^{n+1} + d_j u_j^{n+1} + b_j u_{j-1}^{n+1} = C_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (1.16)$$

або  $Au = C$  має трикутний вигляд (Мал.4)

$$\begin{array}{c}
 [A] \qquad \qquad [u] \qquad \qquad [C] \\
 \left[ \begin{array}{cccccccc}
 d_1 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 b_2 & d_2 & a_2 & & & & & \cdot \\
 0 & b_3 & d_3 & a_3 & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & 0 \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 \cdot & & & & & & & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_M & d_M
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c}
 u_1^{n+1} \\
 u_2^{n+1} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 u_{M-1}^{n+1} \\
 u_M^{n+1}
 \end{array} \right]
 =
 \left[ \begin{array}{c}
 C_1 \\
 C_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 C_{M-1} \\
 C_M
 \end{array} \right]
 \cdot
 \end{array}
 \end{array}$$

Мал.4

в якій  $a_j = \nu/2$ ,  $d_j = 1$ ,  $b_j = -\nu/2$ ,  $C_j = u_j^n$ . Початкові умови задані при  $n = 0$ . На лівій границі величина  $u_0^{n+1} = u_0(0)$ , а на правій границі значення  $u_{M+1}^{n+1}$  обчислюється із використанням значень на характеристиках. Наприклад, якщо  $\nu = 1$ , то  $u_{M+1}^{n+1} = u_M^n$ . Коефіцієнти вектору правої частини системи рівнянь (1.16) для (1.15) визначаються як  $C_1 = u_1^n - b_1 u_0^{n+1}$ ,  $C_M = u_M^n - a_M u_{M+1}^{n+1}$ . Розв'язок системи (1.16) знаходиться методом прогонки (модифікація метода Гаусса). Спочатку замінюють діагональні елементи  $d_j$  на

$$d_j - \frac{b_j}{d_{j-1}} a_{j-1}, \quad j = 2 \dots M,$$

і коефіцієнти  $C_j$  значеннями

$$C_j - \frac{b_j}{d_{j-1}} C_{j-1}, \quad j = 2 \dots M.$$

Тоді  $u_M^{n+1} = \frac{C_M}{d_M}$  і знаходять розв'язок по рекурентній формулі

$$u_j^{n+1} = \frac{C_j - a_j u_{j+1}^{n+1}}{d_j}, \quad j = M-1 \dots 1.$$

Важливо, що при використанні неявної схеми можна проводити розрахунки із суттєво більшим кроком за часом. Але використання занадто

великого кроку може призвести до втрати різницевою схемою властивості апроксимації.

**1.5 Метод Лакса-Вендроффа (Lax, Wendroff).** Схему Лакса – Вендроффа побудуємо на основі розгортання функції в ряд Тейлора

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2!} + O(\tau^3). \quad (1.17)$$

Для диференціального рівняння (1.11) маємо диференціальні наслідки

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Перепишемо (1.17) так

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\partial u}{\partial x} \tau + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\tau^2}{2!} + O(\tau^3)$$

і замінимо похідні по координаті  $x$  різницевиими виразами апроксимуючими їх із другим порядком точності на рівномірній сітці. Тоді отримаємо схему

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{h} \tau + a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \frac{\tau^2}{2!}, \quad (1.18)$$

другого порядку апроксимації по координаті та за часом  $O(\tau^2, h^2)$ . Схема (1.18) є стійкою при умові  $|\nu| \leq 1$ .

**1.6 Двохкроковий метод Лакса-Вендроффа.** Двохкроковий метод Лакса-Вендроффа представляє явну двокрокову тришарову за часом різницеву схему:

крок 1:

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - (u_{j+1}^n + u_j^n) / 2}{\tau / 2} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0,$$

крок 2:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0.$$

Наведена схема має похибку апроксимації  $O(\tau^2, h^2)$  і є стійкою при  $|\nu| \leq 1$ . Крок 1 – схема Лакса, застосована в точці  $j+1/2$  на півкроку за часом, а крок 2 – метод с переступом в наступному на півкроку за часом. У випадку лінійного рівняння переносу двохкроковий метод Лакса-Вендроффа еквівалентний простому методу Лакса-Вендроффа, виключаючи із кроку 2 значення з дробовим індексом за допомогою кроку 1.

**1.7 Метод Мак-Кормака .** Метод Мак-Кормака (MacCormack) знайшов широке застосування для дослідження розв'язків рівнянь газової динаміки. Фактично, це один із варіантів схеми Лакса-Вендроффа, який не вимагає вести розрахунки на двох рознесених сітках. Завдяки такій властивості він зручний при застосуванні його до нелінійних рівнянь в частинних похідних. Так, застосування методу Мак-Кормака до лінійного рівняння переносу дає різницеву схему:

$$\begin{aligned} \text{предиктор :} \quad & \frac{\bar{u}_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0; \\ \text{коректор :} \quad & \frac{u_j^{n+1} - (u_j^n + \bar{u}_j^{n+1}) / 2}{\tau} + a \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{h} = 0. \end{aligned}$$

Метод Мак —Комака для лінійного рівняння переносу породжує схему яка співпадає із схемою Лакса-Вендроффа. Тому у них однакові порядки апроксимації, умови стійкості та деякі інші характеристики.

**1.8 Різниці проти потоку.** Метод Мак-Кормака був удосконалений в 1975 році Бім та Уормінг (Beam, Warming)). Вони запропонували використовувати різниці проти потоку як на кроці предиктор, так і на кроці коректор. При  $a > 0$  різницева схема має вигляд

$$\begin{aligned} \text{предиктор:} \quad & \frac{\bar{u}_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \\ \text{коректор:} \quad & \frac{u_j^{n+1} - (u_j^n + \bar{u}_j^{n+1}) / 2}{\tau} + a \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{2h} + a \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{h} = 0. \end{aligned}$$



Завдяки різниці проти потоку на кроці коректор для апроксимації другої похідної, схема має порядок точності  $O(\tau^2, \tau h, h^2)$ . Якщо переписати схему у вигляді

$$\text{предиктор:} \quad \bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \nu(u_j^n - u_{j-1}^n) = u_j^n - \nu \delta_x^- u_j^n,$$

$$\begin{aligned} \text{коректор:} \quad u_j^{n+1} &= (u_j^n + \bar{u}_j^{n+1}) / 2 - \frac{\nu}{2}(\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n) + \frac{\nu}{2}(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) = \\ &= (u_j^n + \bar{u}_j^{n+1}) / 2 - \frac{\nu}{2} \delta_x^- \bar{u}_j^n - \frac{\nu}{2} \delta_x^- \delta_x^- u_j^n \end{aligned}$$

і виключити із коректора  $\bar{u}$  то отримаємо

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu \delta_x^- u_j^n + \frac{\nu(\nu-1)}{2} \delta_x^- \delta_x^- u_j^n.$$

**1.9 Схема Кранка-Ніколсон.** Для лінійного рівняння переносу схема із використанням операторів різниці вперед  $\delta^+$  та назад  $\delta^-$  запишеться так

$$\frac{\delta_t^+ u_j^n}{\tau} + (\delta_x^+ + \delta_x^-) \frac{(a u_j^{n+1} + a u_j^n)}{2} = 0.$$

Схема має порядок апроксимації  $O(\tau^2, h^2)$ . Вона безумовно стійка і для побудови її розв'язку на кожному кроці за часом необхідно розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад, методом прогонки.

**1.10 Схеми для рівняння теплопровідності.** Одновимірне нестационарне рівняння теплопровідності (або рівняння дифузії) описує одновимірний процес розповсюдження тепла, або одновимірну дифузію в однорідному ізотропному середовищу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Точний розв'язок такого рівняння при наступних початкових та граничних умовах  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ak^2 t} \sin(kx),$$

де  $A_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(kx) dx$ ,  $k = n\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

Наведемо декілька важливих різницевих схем які використовуються при побудові наближеного розв'язку рівнянь теплопровідності.

Явна однокрокова різницева схема записується так

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

і має перший порядок точності із похибкою апроксимації  $O(\tau, h^2)$ . За допомогою спектрального методу Неймана встановлена умова стійкості  $0 \leq r \leq 1/2$ , де  $r = \frac{a\tau}{h^2}$ .

**1.11 Метод Річардсона.** Така схема має тільки теоретичне значення, як приклад, коли різницева схема є апроксимуючою але не є стійкою. Записується у вигляді співвідношення

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0.$$

Схема є тришаровою із похибкою апроксимації  $O(\tau, h^2)$ . Із-за відсутності стійкості вона не застосовується в розрахунковій практиці.

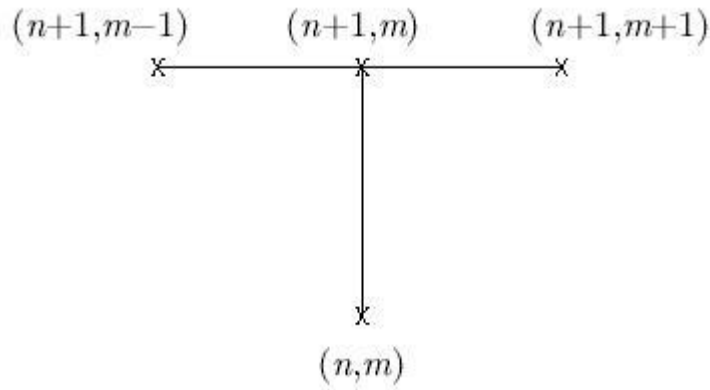
**1.12 Простий неявний метод.** Відповідна різницева схема записується так

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

За допомогою різницевих операторів можна записати її у вигляді

$$\frac{\delta_t^+ u_m^n}{\tau} - \frac{\delta_x^{+2} (a u_m^{n+1})}{h^2} = 0, \quad \delta_x^{+2} = \delta_x^+ \delta_x^+.$$

Шаблон для такої різницевої схеми (Мал.5) має вигляд



Мал.5

Така схема має порядок апроксимації  $O(\tau, h^2)$  і абсолютно стійка.

**1.13 Схема Кранка-Ніколсон.** Для рівняння теплопровідності популярна схема

$$\frac{\delta_t^+ u_j^n}{\tau} - \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \left( \frac{a u_j^{n+1} + a u_j^n}{2} \right) = 0.$$

Порядок апроксимації  $O(\tau^2, h^2)$ , абсолютно стійка. Наближений розв'язок знаходиться методом прогонки для системи алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею.

**1.14 Метод Дюфорта-Франкела.** Абсолютно нестійка різницева схема Річардсона перетворюється в стійку різницеву схему Дюфорта-Франкела

після заміни  $u_j^n$  на  $\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n}{h^2} = 0.$$

Схема є явною та безумовно стійкою, що виокремлює її серед інших явних схем, які є в своїй більшості умовно стійкими. Наведена схема має похибку апроксимації  $O(\tau^2, h^2, (\tau/h)^2)$ . Тому, коли  $\tau/h \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  схема апроксимує рівняння теплопровідності, але у випадку  $\tau/h \rightarrow \eta$  схема пов'язана із рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

## 1.15 Двовимірне нестационарне рівняння теплопровідності.

Двовимірне рівняння нестационарне теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Розглянемо можливість застосування методів, які були описані вище, по відношенню до одновимірного рівняння теплопровідності. Покажемо на двох прикладах виникаючі проблеми при такому узагальненню. Якщо до рівняння теплопровідності застосувати простий явний метод на нерівномірній сітці, то отримаємо таку різницеву схему

$$\frac{u_{m,j}^{n+1} - u_{m,j}^n}{\tau} - a \left( \frac{u_{m+1,j}^n - 2u_{m,j}^n + u_{m-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{m,j+1}^n - 2u_{m,j}^n + u_{m,j-1}^n}{h_y^2} \right) = 0.$$

Умова стійкості, застосовуючи спектральну прикмету Неймана, запишеться у вигляді

$$a\tau \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Така умова є більш жорсткою на зв'язок кроків по координатним напрямкам та за часом по відношенні до умови в одновимірному випадку ( $r \leq 1/2$ ).

При застосуванні схеми Кранка-Ніколсон отримаємо різницеву схему

$$\frac{u_{m,j}^{n+1} - u_{m,j}^n}{\tau} - a \left( \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h_x^2} + \frac{\delta_y^+ \delta_y^-}{h_y^2} \right) \frac{u_{m,j}^{n+1} + u_{m,j}^n}{2} = 0.$$

Аналогічно одновимірній задачі різницєва схема безумовно стійка для періодичних граничних умов. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$a_{m,j} u_{m,j-1}^{n+1} + b_{m,j} u_{m-1,j}^{n+1} + c_{m,j} u_{m,j}^{n+1} + b_{m,j} u_{m+1,j}^{n+1} + a_{m,j} u_{m,j+1}^{n+1} = d_{m,j}^n$$

де матриця не є тридіагональною, тому що в кожне різницєве рівняння входять п'ять невідомих  $u_{m,j}^{n+1}; u_{m+1,j}^{n+1}; u_{m-1,j}^{n+1}; u_{m,j+1}^{n+1}; u_{m,j-1}^{n+1}$ . Коефіцієнти такої системи рівнянь знаходяться за формулами

$$a_{m,j} = -\frac{a\tau}{2h_y^2}, b_{m,j} = -\frac{a\tau}{2h_x^2}, c_{m,j} = 1 - 2a_{m,j} - 2b_{m,j},$$

$$d_{m,j}^n = u_{m,j}^n + \frac{a\tau}{2}(\delta_x^+ \delta_x^- + \delta_y^+ \delta_y^-)u_{m,j}^n.$$

Так, на двовимірній сітці  $6 \times 6$  на  $n+1$  кроці необхідно розв'язати систему (Мал.6) із 16 рівнянь при умові, що  $u = u_0 - const$  на границі прямокутної області

$$\begin{bmatrix} c & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & c & b & & a & \\ 0 & b & c & b & & a \\ 0 & b & c & 0 & & a \\ a & & 0 & c & b & & a \\ 0 & a & & b & c & b & & a \\ & a & & b & c & b & & a \\ & & a & & b & c & 0 & & a \\ & & & a & & 0 & c & b & & a \\ & & & & a & & b & c & b & & a \\ & & & & & a & & b & c & 0 & & a \\ & & & & & & a & & 0 & c & b & 0 \\ & & & & & & & a & & b & c & b & 0 \\ & & & & & & & & a & & b & c & b \\ 0 & & & & & & & & & 0 & a & 0 & 0 & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_{2,2}^{n+1} \\ u_{3,2}^{n+1} \\ u_{4,2}^{n+1} \\ u_{5,2}^{n+1} \\ u_{2,3}^{n+1} \\ u_{3,3}^{n+1} \\ u_{4,3}^{n+1} \\ u_{5,3}^{n+1} \\ u_{2,4}^{n+1} \\ u_{3,4}^{n+1} \\ u_{4,4}^{n+1} \\ u_{5,4}^{n+1} \\ u_{2,5}^{n+1} \\ u_{3,5}^{n+1} \\ u_{4,5}^{n+1} \\ u_{5,5}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{2,2}''' \\ d_{3,2}' \\ d_{4,2}' \\ d_{5,2}' \\ d_{2,3}'' \\ d_{3,3} \\ d_{4,3} \\ d_{5,3}'' \\ d_{2,4}'' \\ d_{3,4} \\ d_{4,4} \\ d_{5,4} \\ d_{2,5}'' \\ d_{3,5}' \\ d_{4,5}' \\ d_{5,5}''' \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

Мал.6

в якій позначено

$$d'_{m,j} = d_{m,j} - a_{m,j}u_0, \quad d''_{m,j} = d_{m,j} - b_{m,j}u_0, \quad d'''_{m,j} = d_{m,j} - (a_{m,j} + b_{m,j})u_0.$$

Для розв'язання таких систем замість методу прогонки використовують ітераційні методи.

Питання для самоконтролю.

1. Найпростіші моделі процесів переносу, теплопровідності та коливань.
2. Означення порядку апроксимації, стійкості та збіжності різницевих схем.
3. Теорема Лакса.                      4. Явна та неявна різницеві схеми. Метод прогонки.
5. Метод Лакса – Вендроффа.                      6. Метод Мак – Кормака.
7. Схема Кранка – Ніколсон.                      8. Метод Дюфорта – Франкела.

---

**§2 Основні властивості різницевих схем. Апроксимація та стійкість її розв'язків. Диференціальні представлення та наближення і їх Г та П-форми для одновимірних задач.**

**2.1 Диференціальні наближення різницевих схем. Апроксимаційна густина різницевих схем.** Для різницевих схем, побудованих в задачах для диференціальних рівнянь, існує математична структура яка займає проміжну позицію між ними.

Розглянемо різницеву схему для чисельного розв'язання модельного однорідного диференціального рівняння переносу

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

у вигляді

$$L_{\tau,h} v_{\tau,h} = \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0. \quad (2.2)$$

На розв'язках диференціального рівняння (2.1) оцінимо порядок апроксимації по величині нев'язки  $L_{\tau,h}[u]_{\tau,h}$

$$L_{\tau,h}[u]_{\tau,h} = \frac{[u]_m^{n+1} - [u]_m^n}{\tau} + a \frac{[u]_m^n - [u]_{m-1}^n}{h}.$$

Розгорнемо в ряди Тейлора

$$\hat{u} = [u]_m^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k u}{\partial t^k}, \quad u(+1) = [u]_{m\pm 1}^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm h)^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$$

і отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}}{k!} \cdot \frac{\partial^k u}{\partial t^k} + a \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-h)^{k-1}}{k!} \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0. \quad (2.3)$$

Напишемо у вигляді

$$L_{\tau,h}[u]_{\tau,h} = Lu + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{ah}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2),$$

і виключимо другу похідну за часом, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad (2.4)$$

де

$$c_2 = \frac{ah(1-\nu a)}{2}, \quad c_k = 0(h^{k-1}), \quad k \geq 3, \quad \nu = \frac{a\tau}{h}.$$

Перепишемо у вигляді

$$L_{\tau,h}[u]_{\tau,h} = Lu - \frac{ah}{2} \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2),$$

що відповідає апроксимації  $O(\tau^2, h^2)$  рівняння  $Lu - \frac{ah}{2} \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ -конвекції-дифузії тепла із коефіцієнтом теплопровідності  $\gamma = \frac{ah}{2} \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right)$ .

Цей коефіцієнт називають коефіцієнтом апроксимаційної густини або густина різницевої схеми (2.2). Дія такого доданку виглядає як розгладжування чисельного розв'язку. Часто інтерпретують дію правої частину рівняння як дисипативний ефект. Але така густина присутня тільки в різницевих схемах непарного порядку апроксимації. Рівняння (2.3) на класі нескінченно диференційованих функцій називають **диференціальним представленням (ДП) різницевої схеми в гіперболічній формі (Г-форма)**, рівняння (2.4)-диференціальне представлення різницевої схеми в параболічній формі (П-формі) (всі похідні за часом виключені за допомогою диференціальних наслідків вихідного рівняння переносу). Зауважимо, що така процедура виключення похідних за часом можлива лише для лінійних задач. У випадку нелінійних задач виключення похідних відбувається за рахунок диференціальних наслідків із диференціального наближення різницевої схеми в Г-формі. Для аналізу властивостей різницевих схем широко використовуються диференціальні наближення різних порядків у Г-та П-формах. Так, вираз  $ДПГ1 = Lu + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{ah}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

називають диференціальним наближенням різницевої схеми (2.2) для (2.1) першого порядку в Г-формі,

аналогічно вираз  $ДППП = Lu - \frac{ah}{2} \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  -диференційне наближення

першого порядку різницевої схеми першого порядку в П-формі. Диференційні наближення більш високих порядків отримують із відповідних диференціальних представлень, утримуючи все більше і більше доданків у виразах (2.3) чи (2.4). Теоретичні дослідження показують фундаментальний зв'язок властивостей диференціальних наближень різницевих схем з апроксимацією, стійкістю різницевих схем, а також з властивостями вихідних диференціальних рівнянь

**2.2 Штучна густина.** Для регуляризації розв'язку, який отримують за допомогою немонотонних різницевих схем із порядком апроксимації вище першого вводять в різницеву схему штучну густину.

Ідею введення штучної густини продемонструємо на прикладі уже відомої схеми

$$L_{\tau,h} v_{\tau,h} = \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

із апроксимацією порядку  $O(\tau, h^2)$ , яка є нестійкою. Щоб схема стала стійкою введемо в праву частину похибку одного порядку із апроксимаційною. Отримаємо задачу

$$L_{\tau,h} v_{\tau,h} = \xi a^2 \tau \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2},$$

де права частина  $\xi \tau \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$  -штучна густина,  $\xi$  -коефіцієнт штучної

густини. Дослідження такої різницевої схеми за допомогою спектральної прикмети дає умови стійкості

$$r \leq 1/2, \quad \frac{\sigma^2}{2r} \leq 1,$$



---


$$\text{де } r = \frac{\xi a^2 \tau}{h^2}, \quad \sigma = \frac{a\tau}{h}.$$

Коли  $\xi = 0.5$  для рівняння переносу отримаємо схему Лакса-Вендроффа.

Розглянемо методи корекції потоків Боріса-Бука. Ідея введення схемної антидифузії (так назвали штучну густину автори метода) пов'язана із потоковою формою запису різницевої схеми. Так, для рівняння переносу різницева схема

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

після введення потоків по формулі  $\bar{F} = F_{m+1/2}^n = a \frac{u_{m+1}^n + u_m^n}{2}$  запишеться у вигляді

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n}{h} = 0.$$

Використовуючи різницеві оператори  $\delta^+, \delta^-$  таку різницеву схему напишемо як

$$\frac{\delta_t^+ v_m^n}{\tau} + \frac{\delta_x^- F_{m+1/2}^n}{h} = 0.$$

Така форма запису називається потоковою. Корекція потоків здійснюється по формулах

$$u_m^{n+1} = v_m^{n+1} - \frac{FL(v_{m+1}^{n+1}, v_m^{n+1}) - FL(v_m^{n+1}, v_{m-1}^{n+1})}{h},$$

$$\text{де } FL(v_{m+1}^{n+1}, v_m^{n+1}) = \tau \frac{\xi_{m+1/2}}{h} (v_{m+1}^{n+1} - v_m^{n+1}), \quad FL(v_m^{n+1}, v_{m-1}^{n+1}) = \tau \frac{\xi_{m-1/2}}{h} (v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}).$$

У випадку, коли  $\xi_{m+1/2} = \xi_{m-1/2} = \xi$  різницева схема зводиться до

$$u_m^{n+1} = v_m^{n+1} - \frac{\xi \tau}{h} (v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}).$$

Зауважимо, що корекція потоків в цьому випадку привела до введення оператора згладжування (штучної густини різницевої схеми).

---

### 2.3 Різницеві схеми для квазілінійних рівнянь гіперболічного типу.

**Характеристики квазілінійних рівнянь.** Розглянемо більш складні рівняння першого порядку у частинних похідних в тривимірному просторі.

Рівняння виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 c_k(t, x_1, x_2, x_3, u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(t, x_1, x_2, x_3, u) \quad (2.5)$$

будемо називати **квазілінійним рівнянням переносу**. Допустимо, що функції, які входять в рівняння (2.5) достатньо гладкі. Для квазілінійних рівнянь, також як і для лінійних, існує поняття характеристики. Так, для (2.5) рівняння характеристик мають вигляд

$$\frac{dx_k}{dt} = c_k(t, x_1, x_2, x_3, u), k = 1, 2, 3,$$

$$\frac{du}{dt} = f(t, x_1, x_2, x_3, u).$$

Розглянемо приклад для знаходження характеристик в задачі Коші для рівняння Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Тоді на кривій  $x = x(t)$  функція  $u = u(x(t), t)$  зберігає постійне значення  $\frac{du(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}$ . Коли  $\frac{dx}{dt} = u(t, x)$  маємо  $\frac{du}{dt} = 0$ . Значить для рівняння Хопфа характеристиками є сімейство прямих  $x(t) = x(0) + u(x(0), 0) \cdot t$ .

Використовуючи таку властивість характеристичних прямих рівняння Хопфа можна побудувати розв'язок задачі Коші. Функція  $u(x, t)$  зберігає свої значення на характеристиках. Оскільки для них кут нахилу визначається значеннями  $u(x, 0)$ , то при наявності відрізків монотонного спадання функції  $u_0(x)$  характеристики будуть перетинатися. Тоді розв'язок перестає існувати в класичному вигляді. Такий момент називають градієнтною катастрофою і в функціях  $u(x, t)$  виникають розриви 1-го роду.

Така поведінка є модельною для виникнення ударних хвиль в задачах аеродинаміки.

Зауважимо, що наявність  $n$  характеристик в системі рівнянь  $n$ -того порядку є прикметою його гіперболічного типу. Тому рівняння лінійного переносу є представником рівнянь гіперболічного типу.

Розглянемо побудову різницевих схем для нелінійних диференціальних рівнянь. Виберемо рівняння виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad (2.6)$$

відоме як рівняння Хопфа. Така форма запису називається дивергентною.

Поряд з нею широко використовується і недивергентна форма

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Узагальнення схеми Лакса для рівняння (2.5) запишеться як

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{v_{m+1}^n + v_{m-1}^n}{2}}{\tau} + \frac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

Апроксимація перевіряється на розв'язках (2.6) через розгортання в ряди Тейлора. Дослідження стійкості проводять на лінеаризованих рівняннях.

**2.4 Схема Куранта-Ізаксона-Ріса (КІР).** Для квазілінійного рівняння в дивергентній формі аналог різницевої схеми КІР використовується у вигляді

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, \quad u_m^n < 0,$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0, \quad u_m^n > 0.$$

$$\text{Схема стійка при умові } \frac{\tau \cdot \max |u_m^n|}{h} \leq 1.$$

Узагальнення двокрокової схеми Лакса-Віндроффа на квазілінійні рівняння та рівняння із змінними коефіцієнтами більш складне. Вводиться

додаткова сітка із дробовими індексами (значення функції в напівцілих вузлах сітки). На першому кроці (предиктор) використовується схема Лакса для знаходження допоміжних значень в вузлах із напівцільними номерами, а на другому етапі (коректор) використовують тришарову апроксимацію

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{v_{m+1}^n + v_m^n}{2}}{\tau} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, v_m^n < 0,$$

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{v_m^n + v_{m-1}^n}{2}}{\tau} + \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0, ,$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{f_{m+1/2}^{n+1/2} - f_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0.$$

Така схема відноситься до схем із симетричним шаблоном (центральна різницева схема). Схема стійка при умовах як і для КІР.

**2.5 Нецентральна схема Мак-Кормака (предиктор-коректор).** Для рівняння (2.6) перша схема Мак-Кормака має вигляд

$$\frac{\bar{v}_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0, ;$$

$$\frac{\bar{v}_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{f_m^n - f_{m-1}^n}{h} = 0, v_m^n > 0;$$

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{v_m^n + \bar{v}_m^n}{2}}{\tau} + \frac{\bar{f}_m^n - \bar{f}_{m-1}^n}{h} = 0,$$

а другу схему Мак-Кормака отримаємо після заміни різниць на протилежні на кроках предиктор і коректор. Такі різницеві схеми називають нецентральними. Їх перевага у відсутності подвійної сітки (сітки із цілими індексами і напівцільними), більш проста постановка граничних умов. У випадку, коли  $f(u) = a \cdot u$  схеми співпадають із схемою Лакса-Вендрофа. Порядок апроксимації визначається як  $O(\tau^2, h^2)$ , умова стійкості як і в схемі КІР.

**2.6 Неявна схема Біма-Уормінга.** Схема Біма-Уормінга має вигляд

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f(v_m^n)}{\partial x} + \frac{\partial f(v_m^{n+1})}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Один із варіантів знаходження розв'язку такої системи нелінійних рівнянь базується на попередній лінеаризації функції  $f(t^{n+1}, x_m)$ :

$$f(u_m^{n+1}) \approx f_m^n + \frac{\partial f(u_m^n)}{\partial u} (u_m^{n+1} - u_m^n) = f_m^n + A_m^n (u_m^{n+1} - u_m^n).$$

Формули більш складні будуть у випадку коли  $f = f(t, x, u)$ .

Підставимо лінеаризацію в (2.7)

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f(v_m^n)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [f_m^n + A_m^n (v_m^{n+1} - v_m^n)] \right] = 0.$$

Після апроксимації похідних центральними різницями отримаємо наступну неявну різницеву схему у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f_m^n + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} [f_m^n + A_m^n (v_m^{n+1} - v_m^n)] \right] = 0,$$

яку напишемо із тридіагональною матрицею

$$-\frac{\tau}{4h} A_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1} + v_m^{n+1} + \frac{\tau}{4h} A_{m+1}^n v_{m+1}^{n+1} = -\tau \frac{f_{m+1}^n - f_{m-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{4h} A_{m-1}^n v_{m-1}^n + \frac{\tau}{4h} A_{m+1}^n v_{m+1}^n.$$

Раніше уже відмічалось, що для розв'язання таких систем використовують різновиди методу прогонки.

## 2.7 Нецентральна схема Уормінга-Кутлера-Ломакса 3-го порядку точності.

крок 1:

$$\frac{v_m^{n+1/3} - v_m^n}{2\tau/3} + \frac{f_{m+1}^n - f_m^n}{h} = 0,$$

крок 2:

$$\frac{v_m^{n+2/3} - \frac{v_m^n + v_m^{n+1/3}}{2}}{2\tau/3} + \frac{1}{2} \frac{f_{m+1}^{n+1/3} - f_m^{n+1/3}}{h} = 0,$$

крок 3:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{1}{24} \frac{3(\delta_x^+ + \delta_x^-) f_m^n - 2\delta_x^+ \delta_x^- (\delta_x^+ + \delta_x^-) f_m^n}{h} + \frac{3}{4} \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f_m^{n+2/3} + \frac{\omega}{24} \delta_x^{+2} \delta_x^{-2} v_m^n = 0$$

Останній доданок забезпечує умовну стійкість схеми при виконанні умови Куранта.

## 2.8 Різницеві схеми для повного рівняння Бюргерса. Найпростіша

модель для течії в'язкої рідини

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f(u) = \frac{u^2}{2} - \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.8)$$

відома під назвою повного рівняння Бюргерса.

В деяких випадках можливо побудувати точний розв'язок. Так, для початково-крайової задачі для рівняння (2.8)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & x \in [0, L], t \in (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x); & u(0, t) = u_0(0) = u_0, u(L, t) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

маємо точний розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = u_0 \tilde{u} \left\{ \frac{1 - e^{\tilde{u} \operatorname{Re}_L (x/L-1)}}{1 + e^{\tilde{u} \operatorname{Re}_L (x/L-1)}} \right\},$$

де  $\operatorname{Re}_L = \frac{u_0 L}{\mu}$ , а  $\tilde{u}$  є розв'язок рівняння  $\frac{\tilde{u} - 1}{\tilde{u} + 1} = e^{-\tilde{u} \operatorname{Re}_L}$ .

Для лінійного рівняння Бюргерса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & x \in [0, L], t \in (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x); & u(0, t) = u_0(0) = u_0, u(L, t) = 0 \end{cases},$$

$$u(x, t) = u_0 \left\{ \frac{1 - e^{\operatorname{Re}_L (x/L-1)}}{1 - e^{-\operatorname{Re}_L}} \right\}, \quad \operatorname{Re}_L = \frac{aL}{\mu}$$

Періодична задача для (2.9) із  $u_0(x) = \sin kx$  має розв'язок

$$u(x, t) = e^{-k^2 \mu t} \sin k(x - at).$$

**2.9 Схема Дюфорта – Франкела.** Рівняння (2.8) можливо розглядати як комбінацію нелінійного рівняння переносу та рівняння теплопровідності. Побудуємо узагальнення схеми Франкела-Дюфорта для нього

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\tau} + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_m \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} v_m^n - \mu \frac{v_{m+1}^n - v_m^{n+1} - v_m^{n-1} + v_{m-1}^n}{h^2} = 0,$$

тут  $\frac{\partial f}{\partial u} = u$ .

Порядок апроксимації для неї  $O\left(\left(\frac{\tau}{h}\right)^2, \tau^2, h^2\right)$ . У випадку

лінеаризованого рівняння із  $f(u) = au$  умова стійкості  $v \leq 1$  не залежить від  $\mu$ , що є особливістю апроксимації в'язкого доданку по схемі Дюфорта-Франкела.

Зауважимо, що умова апроксимації вимагає щоб  $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$  одночасно із  $\tau \rightarrow 0, \dots, h \rightarrow 0$ , що приводить до більш жорсткої умови на сітку ніж умова стійкості. У нелінійному випадку, коли  $\mu = 0$  різницева схема нестійка.

**2.10 Схема І.Ю.Брайлівської.** Узагальнене рівняння Бюргерса можна записати

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де  $F(u) = au + b \frac{u^2}{2}$ ,  $a, b$  - параметри.

Тоді запропонована різницева схема має вигляд предиктор:

$$\frac{\tilde{v}_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} F_m^n - r \delta_x^+ \delta_x^- u_m^n = 0,$$

коректор

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} \tilde{F}_m^{n+1} - r \delta_x^+ \delta_x^- v_m^n = 0 .$$

Порядок апроксимації  $O(\tau, h^2)$ , а для коефіцієнта переходу лінійної схеми ( $b = 0$ ) отримаємо умову

$$|\lambda|^2 = 1 - \left\{ v^2 \sin^2 \alpha (1 - v^2 \sin^2 \alpha) + 4r(1 - \cos \alpha) [1 - r(1 - \cos \alpha)(1 + v^2 \sin^2 \alpha)] \right\} \leq 1 .$$

Звідки, якщо  $\mu = 0$  то умова стійкості перетворюється на  $v \leq 1$ , а коли

$$v = 0 \text{ маємо } \mu \leq 1/2 . \text{ Для випадку } \mu \neq 0, v \neq 0 \quad \tau \leq \min \left[ \frac{h^2}{2\mu}, \frac{h}{|A|} \right] .$$

## 2.11 Схема Лакса-Вендроффа для повного рівняння Бюргерса.

Схему запишемо у вигляді

предиктор:

$$v_m^{n+1/2} = \frac{v_{m+1/2}^n + v_{m-1/2}^n}{2} - \frac{\tau}{h} \delta_x^- F_{m+1/2}^n + r [\delta_x^+ \delta_x^- u_{m+1/2}^n + \delta_x^- \delta_x^+ u_{m+1/2}^n]$$

коректор:

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\tau}{h} \delta_x^- F_{m+1/2}^{n+1/2} + r \delta_x^+ \delta_x^- u_m^n .$$

Порядок апроксимації  $O(\tau, h^2)$ , а умова стійкості різницевої схеми для лінеаризованого рівняння приводить до

$$\frac{\tau}{h^2} (A^2 \tau + 2\mu) \leq 1 .$$

## 2.12 Схема Мак-Кормака для повного рівняння Бюргерса.

Двокрокова схема запишеться як

предиктор:

$$\tilde{v}_m^{n+1} = v_m^n - \frac{\tau}{h} \delta_x^+ F_m^n + r \delta_x^+ \delta_x^- u_m^n ,$$

коректор:

$$v_m^{n+1} = \frac{v_{m+1/2}^n + v_{m-1/2}^n}{2} - \frac{\tau}{2h} \delta_x^- \tilde{F}_m^n + \frac{r}{2} \delta_x^+ \delta_x^- \tilde{u}_m^n .$$



---

Порядок апроксимації  $O(\tau^2, h^2)$ . Точна умова стійкості невідома, тому використовують умову як в схемі Брайлівської, або емпіричну

$$\tau \leq \frac{h^2}{|A|h + 2\mu}.$$

Питання для самоконтролю.

1. Поняття про диференціальні представлення та наближення різницевих схем.
2. Г – та П – форми диференціальних представлень різницевих схем.
3. Апроксимаційна та штучна густина в різницевих схемах.
4. Схема Куранта – Ізаксон – Ріса.
5. Схема Біма – Уорминга.
6. Схема Дюфорта – Франкела.
7. Схема Лакса – Вендроффа.
8. Схема Мак – Кормака.

### §3 Рівняння параболічного типу та особливості чисельних методів для його дослідження.

Розглянемо особливості постановки задач та побудови різницевих схем для рівняння параболічного типу. Виберемо одновимірне лінійне та нелінійне нестационарне рівняння теплопровідності (дифузії). Нагадаємо постановку змішаної задачі ( $a > 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), t \in [0, T], x \in [0, L],$$

граничні умови:

$$\begin{aligned} -A_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + B_1 u(0, t) &= \varphi_1(t), \\ -A_2 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + B_2 u(L, t) &= \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

початкові умови:

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Одновимірне квазілінійне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), t \in [0, T], x \in [0, L]. \quad (3.2)$$

Тут  $a(u) > 0$  при довільних значеннях  $u = u(x, t)$ . Для коректної постановки задачі необхідно виконання умов  $\int_0^u a(z) dz < +\infty$ ,  $\int_0^\infty \frac{1}{f(z)} dz < +\infty$ .

Для чисельного дослідження задачі (3.1) при  $\varphi(x, t) \equiv 0$  найбільш відома параметризована різницева схема

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \left[ \xi \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} v_m^{n+1} + (1 - \xi) \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} v_m^n \right] = 0,$$

де  $\xi \in [0, 1]$ .

При  $\xi = 0$  маємо явну різницеву схему для рівняння теплопровідності, а при  $\xi = 1$  - неявну схему. Їх порядок апроксимації та умову стійкості

розглядали в попередніх лекціях. При  $\xi = 1/2$  маємо схему Кранка-Ніколсон яка є немонотонною і дає осциляції різницевого похідження на розв'язках із великими градієнтами.

Підвищення порядку апроксимації отримаємо на розширеному шаблоні із врахуванням апроксимації головного члена нев'язки. При дослідженні явної двошарової схеми отримаємо на розв'язках

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a \left[ \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} u_m^n \right] = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{h^2}{2 \cdot 3!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\tau^2, h^4).$$

Враховуючи диференціальні наслідки вихідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

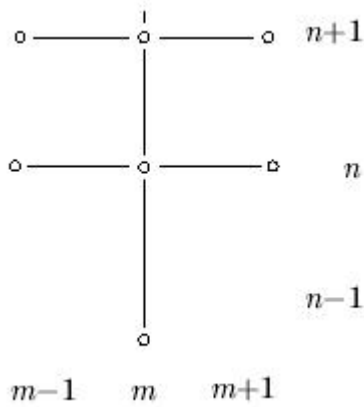
і замінюючи похідні по за часом похідними по координаті та апроксимуючи їх центральними різницями отримаємо схему підвищеного порядку точності  $O(\tau^2, h^4)$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a \left[ \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} v_m^n \right] - \frac{a^2 \tau}{2} \left( 1 - \frac{h^2}{6a\tau} \right) \frac{\delta_x^{+2} \delta_x^{-2}}{h^4} v_m^n = 0.$$

Тришарова параметризована різницева схема для чисельного дослідження лінійного рівняння теплопровідності має вигляд

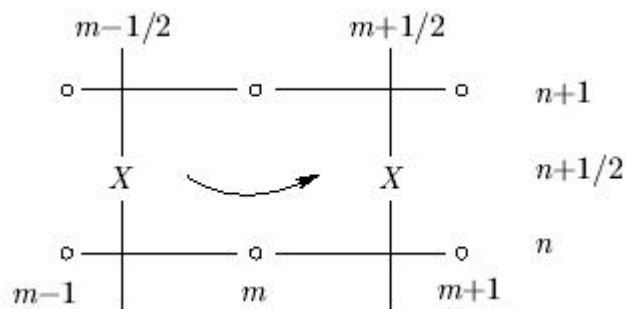
$$(1 - \eta) \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \eta \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\tau} - a \left[ \xi \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} v_m^{n+1} + (1 - \xi) \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} v_m^n \right] = 0.$$

При  $\eta = 1/2, \xi = 1$  порядок апроксимації є  $O(\tau^2, h^2)$ . Недоліком такої схеми є наявність трьох шарів за часом (Мал.1), що вимагає додаткових умов для початку руху по часовим шарах. Так, відповідний шаблон для цієї схеми має таку структуру



Мал.1 Шаблон різницевої схеми

У випадку, коли коефіцієнт теплопровідності залежить від часу та координат, консервативну схему можливо отримати використовуючи інтегро-інтерполяційний метод( в (3.2) покладемо  $f(u) = 0$  ) Нагадаємо, що різницева схема називається консервативною, якщо виконуються наступні умови. Диференціальна задача записана як деякий закон збереження, або в дивергентній формі. Відповідний закон збереження виконується і на різницевій сітці. Якщо в диференціальній задачі є декілька законів збереження, а при переході до різницевої схеми вони можуть бути отримані як наслідки нашої різницевої схеми в результаті алгебраїчних перетворень, то різницева схема називається повністю консервативною. Як правило, при запису рівнянь в частинних похідних законам збереження відповідає дивергентна форма запису. Для рівняння теплопровідності роль такого закону збереження відіграє неперервність теплового потоку.



Мал. 2 Область розрахункової чарунки

Запишемо рівняння (3.2) при  $W = -a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}$  - тепловий потік у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

або в інтегральній формі із використанням формули Гріна

$$\iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) dt dx = \oint_{\partial S} u dx - W dt = 0.$$

Виконуючи апроксимацію останнього інтеграла по прямокутній чарунці (Мал.2) по формулах прямокутника отримаємо

$$u_m^n h - W_{m+1/2}^{n+1/2} \tau - u_m^{n+1} h + W_{m-1/2}^{n+1/2} \tau = 0.$$

Останню формулу перепишемо так

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{W_{m+1/2}^{n+1/2} - W_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0.$$

Враховуючи вираз для теплового потоку і апроксимуючи його

$$W_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left( a_{m+1/2}^n \frac{\delta_x^+}{h} u_m^n + a_{m+1/2}^{n+1} \frac{\delta_x^+}{h} u_m^{n+1} \right)$$

отримаємо

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{\delta_x^-}{h^2} \frac{a_{m+1/2}^{n+1} \delta_x^+ u_m^{n+1} + a_{m+1/2}^n \delta_x^+ u_m^n}{2} = 0.$$

### 3.1 Різницева схема для чисельного дослідження властивостей розв'язків нелінійного рівняння теплопровідності. Розглянемо

декілька варіантів різницевих схем для нелінійного рівняння теплопровідності із нелінійністю на нижньому часовому шарі

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{\delta_x^-}{h^2} (a_{m+1/2}^n \delta_x^+ u_m^n) = f_m^n,$$

де

$$1. a_{m+1/2}^n = \frac{1}{2}(a(u_m^n) + a(u_{m+1}^n)) ,$$

$$2. a_{m+1/2}^n = a\left(\frac{u_m^n + u_{m+1}^n}{2}\right),$$

$$3. a_{m+1/2}^n = a\left(\frac{2u_m^n u_{m+1}^n}{u_m^n + u_{m+1}^n}\right),$$

$$4. a_{m+1/2}^n = \frac{2a(u_m^n)a(u_{m+1}^n)}{a(u_m^n) + a(u_{m+1}^n)}.$$

На верхньому часовому шарі розв'язок знаходиться методом прогонки.

Недолік схеми визначається жорсткою умовою на крок за часом  $\tau \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| \ll 1$

Якщо використати нелінійність на верхньому часовому шарі (необхідність її використання слідує коли умову  $\tau \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\| \ll 1$  виконати

важко). В цьому випадку різницева схема запишеться так

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{\delta_x^-}{h^2} (a_{m+1/2}^{n+1} \delta_x^+ u_m^{n+1}) = f_m^{n+1}.$$

Виконаємо лінеаризацію коефіцієнта теплопровідності та функції в правій частині

$$f_m^{n+1} = f(u_m^{n+1}) = f(u_m^n + (u_m^{n+1} - u_m^n)) \approx f(u_m^n) + \frac{df^n}{du_m} (u_m^{n+1} - u_m^n)$$

$$a_{m+1/2}^{n+1} = a(u_{m+1/2}^{n+1}) = a(u_{m+1/2}^n + (u_{m+1/2}^{n+1} - u_{m+1/2}^n)) \approx a(u_{m+1/2}^n) + \left(\frac{da}{du}\right)_{m+1/2}^n (u_{m+1/2}^{n+1} - u_{m+1/2}^n)$$

Для знаходження наближеного розв'язку отримаємо систему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{\delta_x^-}{h^2} (a_{m+1/2}^n \delta_x^+ u_m^{n+1}) = f_m^n + \frac{df^n}{du_m} (u_m^{n+1} - u_m^n),$$

дослідження якої виконуються із використанням прогонки або ітераційного методу. Ітерації продовжують до виконання умови  $\|u_m^{n+1} - u_m^n\| < \varepsilon$

При реалізації шеститочкової схеми із змінним коефіцієнтом теплопровідності і нелінійною правою частиною  $f(u)$  ітераційний процес застосовується до задачі

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{\delta_x^-}{h^2} a_{m+1/2}^n \frac{\delta_x^+ u_m^{n+1} + a_{m+1/2}^n \delta_x^+ u_m^n}{2} = f_m^n + \frac{df^n}{du_m} (u_m^{n+1} - u_m^n).$$

В задачі, також застосована лінеаризація функції в правій частині рівняння.

Окремо розглянемо важливий випадок коли  $a = u^k$ . Тоді маємо рівняння, яке описує теплові хвилі в моделях високотемпературної плазми та при утворенні нових зірок

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (u^k \frac{\partial u}{\partial x}).$$

Початкова умова для такої задачі  $u(x, 0) = 0$ , граничні умови -  $u(0, t) = Ct^{1/k}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ . Будемо шукати автомодельний розв'язок такої задачі-(розв'язок, який залежить не від двох змінних  $x, t$ , а від їх комбінації

$$\eta = x - Dt, \quad D = const.$$

Часто під автомодельним мають на увазі розв'язок, який залежить від безрозмірної комбінації незалежних змінних. Таку безрозмірну змінну називають змінною бігучої хвилі. В цьому випадку

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -D \frac{du}{d\eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\eta}$$

і маємо диференціальне рівняння

$$\frac{du}{d\eta} (u^k \frac{du}{d\eta}) = -\frac{d}{d\eta} (Du).$$

Постійну інтегрування покладемо рівною нулю в силу неперервності теплового потоку на фронті теплової хвилі. Отримане рівняння перетворимо до

$$u^{k-1} \frac{du}{d\eta} = -D,$$

або

$$\frac{d(u^k)}{d\eta} = -kD.$$

Звідки знайдемо  $u^k(\eta) = -kD\eta$  або  $u(\eta) = \sqrt[k]{kD(-\eta)}$ .

Цікавимося додатними розв'язками при  $\eta \geq 0$  ( $x \leq Dt$ ). Покладемо  $u(\eta) = 0$  при  $\eta > 0$ . Тоді узагальнений розв'язок (в точці  $\eta = 0$  маємо розрив першої похідної) буде мати вигляд

$$u(\eta) = \begin{cases} \sqrt[k]{kD(-\eta)}, & \eta < 0 \\ 0, & \eta > 0 \end{cases}.$$

Швидкість фронту теплової хвилі легко знайти із граничної умови

$$D = \sqrt{C^k / k}.$$

Квазілінійне рівняння у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (a_0 u^k \frac{\partial u}{\partial x}) + q_0 u^l$$

має якісно різні розв'язки при різних значеннях параметрів  $k, l$ . Але в околі теплового фронту при розповсюдженні тепла всі ці розв'язки мають однакову асимптотику. Розв'язки в околі фронту мають структуру близьку до розв'язку задачі, розглянутої вище.

**3.2 Гіперболічне рівняння теплопровідності.** Напишемо рівняння теплопровідності у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + q = 0 \end{cases}. \quad (3.3)$$

Друге рівняння має зміст закону Фур'є. Тоді в матричній формі (3.3) запишеться так

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} + C \cdot U = 0,$$

де

$$U = \begin{pmatrix} T \\ q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Матриця  $A$  вироджена. Система не приводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{B} \frac{\partial U}{\partial x} + \tilde{C} \cdot U = 0.$$

Власні числа матриці  $B$  знайдемо із

$$|B - \nu I| = 0, \nu_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}.$$

Із системи (3.3) можна отримати рівняння параболічного типу для розподілу температури  $T$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

При врахуванні релаксаційних процесів в виразі для потоку тепла отримаємо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \tau_r \frac{\partial q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + q = 0 \end{cases}, \quad (3.4)$$

яку запишемо в матричному вигляді

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} + C \cdot U = 0,$$

із матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau_r \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перепишемо рівняння в канонічній формі

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{B} \frac{\partial U}{\partial x} + \tilde{C} \cdot U = 0,$$

де

$$\tilde{B} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda/\tau_r & 0 \end{pmatrix},$$

а власні числа

$$|\tilde{B} - \nu I| = 0, \nu_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\tau_r}}.$$

Із системи (3.4), шляхом перехресного диференціювання, для температури  $T$  отримаємо рівняння гіперболічного типу

$$\frac{1}{\tau_r} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\tau_r} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

Якщо релаксацію враховувати і в градієнті температури, тоді система

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \tau_r \frac{\partial q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + q = 0 \end{cases}$$

запишеться у вигляді

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + C \cdot U = 0,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau_r \end{pmatrix}, F(U) = B \cdot \begin{pmatrix} T + \tau_r \frac{\partial T}{\partial t} \\ q \end{pmatrix} = U + \begin{pmatrix} \lambda \tau_r \frac{\partial T}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоконтролю.

1. Постановка задачі для рівняння теплопровідності.
2. Різницеві схеми для рівняння теплопровідності.
3. Теплові хвилі в нелінійному рівнянні теплопровідності.
4. Гіперболічне рівняння теплопровідності.

## §4 Загальна схема розщеплення. Розщеплення просторового рівняння переносу.

**4.1 Загальна схема розщеплення.** Багатовимірні задачі бажано звести до послідовності одновимірних для яких напрацьовано різноманітний арсенал чисельних методів. На прикладі задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad t \in (0, T), \quad u|_{t=0} = g, \quad (4.1)$$

де  $A$  -оператор по просторовим змінним, наприклад

$$Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

покажемо формальну схему розщеплення для побудови наближеного розв'язку задачі (4.1).

Значення  $u(x, y, t^{p+1})$  по відомим величинах  $u(x, y, t^p)$ ,  $t^{p+1} = t^p + \tau$  представимо відрізком ряду Тейлора із урахуванням (4.1)

$$\begin{aligned} u(x, y, t^{p+1}) &= u(x, y, t^p) + \tau \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t^p} + O(\tau^2) = u(x, y, t^p) + \tau Au|_{t=t^p} + O(\tau^2) = \\ &= (E + \tau A)u(x, y, t^p) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

Нехай  $Au = A_1u + A_2u$ , тоді розщеплюємо рівняння (4.1) на наступних два

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = A_1v, & t \in [t^p, t^{p+1}] \\ v(x, y, t^p) = u(x, y, t^p) \end{cases}, \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = A_2w, & t \in [t^p, t^{p+1}] \\ w(x, y, t^p) = v(x, y, t^{p+1}) \end{cases}. \quad (4.3)$$

Зауважимо, що

$$w(x, y, t^{p+1}) = u(x, y, t^{p+1}) + O(\tau^2). \quad (4.4)$$

Дійсно,

$$v(x, y, t^{p+1}) = (E + \tau A_1)v(x, y, t^p) + O(\tau^2) = (E + \tau A_1)u(x, y, t^p) + O(\tau^2).$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} w(x, y, t^{p+1}) &= (E + \tau A_2)w(x, y, t^p) + O(\tau^2) = (E + \tau A_2)v(x, y, t^{p+1}) + O(\tau^2) = \\ &= (E + \tau A_2)(E + \tau A_1)u(x, y, t^p) + O(\tau^2) = \\ &= (E + \tau(A_1 + A_2) + \tau^2 A_2 A_1)u(x, y, t^p) + O(\tau^2) = \\ &= (E + \tau A)u(x, y, t^p) + \tau^2 A_2 A_1 u(x, y, t^p) + O(\tau^2) = u(x, y, t^{p+1}) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

Рівність (4.4) дає можливість на кожному інтервалі  $[t^p, t^{p+1}]$  замість задачі (4.1) розв'язувати послідовно задачі (4.2) та (4.3).

Фактичний розв'язок (4.2) та (4.3) отримаємо різницеvim методом. Тоді виникає різницева схема розщеплення яка дозволяє по відомому значенню  $u(x, y, t^p)$  знайти в два етапи значення  $u(x, y, t^{p+1})$ . Така схема є евристичною.

Так, у випадку задачі Коші для двовимірного рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, t \in [0, T], x \in (-\infty, \infty) \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \end{cases}$$

схема розщеплення на диференціальному рівні має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, t \in [t^p, t^{p+1}] \\ v(x, y, t^p) = u(x, y, t^p) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, t \in [t^p, t^{p+1}] \\ w(x, y, t^p) = v(x, y, t^{p+1}) \end{cases}.$$

Відмітимо, що можливість представити

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A_1 u + A_2 u,$$

де  $A_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $A_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  не єдина.

Так, можна записати

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A_1 u + A_2 u = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Розглянемо застосування наведених чисельних алгоритмів для більш складних моделей фізичних процесів. Запишемо рівняння яке описує концентрацію  $u(x, y, z, t)$  деякої речовини обумовлену тільки процесом переносу(адвекцією) по заданим траєкторіях

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + W \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (4.5)$$

де  $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$  відомі проекції вектору швидкості на осі декартової системи координат. Поява необхідності дослідження таких рівнянь пов'язана із їх виникненням при розщепленні по фізичних процесах і в подальшому розщепленню по координатах. Якість загального розв'язку задачі адвекції-дифузії-реакції суттєво залежить від способу апроксимації доданків, які описують процес переносу (4.5) Похибка апроксимації у вигляді чисельної дисперсії та дисипації (схемної в'язкості) приводить не тільки до кількісних змін а і якісних в наближеному розв'язку. Суттєва практична значимість пошуку нових напрямів кардинального покращення дисипативних та дисперсійних властивостей чисельних схем для рівняння переносу відносить його до розряду фундаментальних задач обчислювальної гідроаеродинаміки. Саме важливість в задачах механіки суцільного середовища, прогнозу погоди, різноманітних течій в елементах енергетичних пристроїв, розповсюдження забруднення, динаміка океану привела до розробки достатньо універсальних та ефективних методів чисельного дослідження рівнянь адвекції.

Раніше розглянуто задачу Коші для найпростішого рівняння переносу і різницевої схеми для її дослідження

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad U - const \quad (4.6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Точний розв'язок має вигляд

---

$$u(x, t) = u_0(x - Ut). \quad (4.7)$$

Нагадаємо, що серед найбільш розповсюджених в практиці різницевих схем для дослідження одновимірного нестационарного рівняння переносу є такі схеми:

- неявна двокрокова схема Кранка-Нікольсон. Схема є абсолютно стійка і дисперсійна. Вплив схемної в'язкості зосереджено на порядках нижче аніж дисперсійні ефекти;
- явна схема Лакса-Вендроффа другого порядку точності, стійкої при умові  $\left| U \frac{\tau}{h} \right| \leq 1$ .

В роботах (Головізнін, Карабасов, 1998р.) запропонована різницева схема для одновимірного нестационарного рівняння переносу (4.6)–схема «кабаре». Особливість такої схеми полягає в тому, що вона є точною для двох різних чисел Куранта із області стійкості. Відмічається, така схема немає апроксимаційної дисперсії, що забезпечує її транспортні властивості. Так, навіть на нерегулярних розрахункових сітках, вона забезпечує перенесення (відповідно до (4.7)) без суттєвих змін начального значення на відстані більші на порядок аніж інші лінійні класичні схеми, наприклад, схема Лакса-Вендроффа. Особливість схеми полягає в тому, що вона має другий порядок апроксимації на нерегулярних сітках та виключає можливість розповсюдження збурень вверх по потоку.

Також схема «кабаре» є консервативною (дивергентною) і для неї автоматично виконується закон збереження квадрата функції який є аналогом закону збереження енергії. В таких випадках про схему говорять, що вона має властивість повної консервативності.

Шляхом тестових розрахунків було показано, що при наявності значних просторових збурень у профілі розв'язку він втрачає монотонність. Тому в схемі «кабаре», як і інших малодисипативних лінійних схемах, необхідно включати алгоритми нелінійної корекції, яка монотонізує розв'язок.

Так, для рівняння (4.6) коли  $U = const > 0$  схема «кабаре» має вигляд

$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m+1}^n}{\tau} + \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\tau} \right) + U \frac{\delta_x^+ v_m^n}{h} = 0, \quad (4.8)$$

а у випадку  $U = const < 0$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + \frac{v_{m+1}^n - v_{m+1}^{n-1}}{\tau} \right) + U \frac{\delta_x^+ v_m^n}{h} = 0.$$

Введення дисипаторів для монотонізації різницевої схеми «кабаре» перетворює першу різницеву схему із (4.8) до вигляду

$$\frac{1}{2} \left( \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m+1}^n}{\tau} + \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\tau} \right) + U \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = -\frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m+1}^n}{\tau} - \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\tau} \right].$$

Є всі підстави очікувати якісних результатів при застосуванні схеми «кабаре» для просторових нестационарних задач аерогідродинаміки.

Якщо швидкість  $U = U(x, t)$  то знайти розв'язок задачі (4.6) в аналітичному вигляді неможливо. Саме в таких випадках виникає потреба застосування чисельних методів на основі різницевих схем. Відомо, що навіть при використанні неявних дисипативних різницевих схем можливо виникнення чисельної нестійкості розв'язку. Особливо це проявляється в нелінійних задачах. Існує пояснення такого явища. При розгортанні функції в ряд Фур'є в нелінійному диференціальному рівнянні їх добуток приведе до появи гармонік більш довгим та коротшим. В результаті такої «нелінійної» взаємодії можливе перекачування «енергії» помилок округлення від довгих хвиль в короткі і процес обчислень може стати нестійким, навіть у випадку лінійної стійкості різницевої схеми. Така нестійкість може виникнути і в схемах для рівнянь із змінними коефіцієнтами.

Часто для погашення числової нестійкості використовують дисипативні різницеві схеми, але вони, як правило, є схемами першого порядку апроксимації за часом чи координатах.

Розглянемо рівняння адвекції на площині  $(x, y)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.9)$$

$$u|_{\partial\Omega} = g(x, y, t), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

Нехай компоненти вектору задовольняють умові неперервності  $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ .

Для області  $\Omega = [0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b]$  із періодичними умовами на границі і оператора  $Au = U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = A_1u + A_2u$  рівняння (4.9) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0.$$

Легко перевірити, що для  $A$  виконується умова

$$(Au, u) = \int_0^a dx \int_0^b Au \cdot u dy = 0, \quad (4.10)$$

а значить оператор  $A$  є кососиметричним. Дійсно

$$(Au, u) = \int_0^a dx \int_0^b Au \cdot u dy = \int_0^a dx \int_0^b (U \frac{\partial}{\partial x} u + V \frac{\partial}{\partial y} u) \cdot u dy = \int_0^a dx \int_0^b (\frac{\partial U u^2}{\partial x} + \frac{\partial V u^2}{\partial y}) dy.$$

Враховуючи умову періодичності маємо  $(Au, u) = 0$ . Для таких операторів можливо створювати абсолютно стійкі різницеві схеми. Для цього необхідно вибрати відповідні оператори в розгортанні

$$Au = U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = A_1u + A_2u. \quad \text{Формальний вибір їх у вигляді } A_1u = U \frac{\partial u}{\partial x} \text{ та}$$

$$A_2u = V \frac{\partial u}{\partial y}$$

не дозволяє виконати умову (4.10) для кожного. Тому відоме інше представлення

$$A_1u = U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_2u = V \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{2} \frac{\partial V}{\partial y}.$$



Кожен із цих операторів задовольняє умові (4.10), а їх сума, із урахуванням умови неперервності

$$\begin{aligned} Au &= A_1u + A_2u = U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2} \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2} \frac{\partial V}{\partial x} = \\ &= U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial Uu}{\partial x} + \frac{\partial Vu}{\partial y} \end{aligned}$$

Відомо, що для такої задачі можливо на інтервалі  $[t^{n-1}, t^{n+1}]$  записати двоциклічну покомпонентну схему розщеплення на основі схеми Кранка-Ніколсон у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{v_{m,k}^{n-1/2} - v_{m,k}^{n-1}}{\tau} + (A_1)_{m,k}^n \frac{v_{m,k}^{n-1/2} + v_{m,k}^{n-1}}{2} &= 0 \\ \frac{v_{m,k}^n - v_{m,k}^{n-1/2}}{\tau} + (A_2)_{m,k}^n \frac{v_{m,k}^n + v_{m,k}^{n-1/2}}{2} &= 0 \\ \frac{v_{m,k}^{n+1/2} - v_{m,k}^n}{\tau} + (A_1)_{m,k}^n \frac{v_{m,k}^{n+1/2} + v_{m,k}^n}{2} &= 0 \\ \frac{v_{m,k}^{n+1} - v_{m,k}^{n+1/2}}{\tau} + (A_2)_{m,k}^n \frac{v_{m,k}^{n+1} + v_{m,k}^{n+1/2}}{2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

Із загальної теорії методів розщеплення відомо, що у випадку коли  $A_i \geq 0$ ,  $i=1,2$  то при достатній гладкості розв'язку задачі (4.9) і елементів матриць  $(A_i)_{m,k}^n$  система різницевих рівнянь (4.11) абсолютно стійка і апроксимує задачу із другим порядком по  $t$ . Така конструкція чисельної схеми знімає питання комутативності операторів  $A_i$ .

Покажемо, як раціонально апроксимувати оператори конвективного переносу  $A_i$   $i=1,2$

$$\begin{aligned} (A_1)_{m,k}^n \varphi_{m,k}^n &= (A_1 \varphi)_{m,k}^n = \frac{U_{m+1/2,k}^n \varphi_{m+1,k}^n - U_{m-1/2,k}^n \varphi_{m-1,k}^n}{2h_x}, \\ (A_2)_{m,k}^n \varphi_{m,k}^n &= (A_2 \varphi)_{m,k}^n = \frac{U_{m,k+1/2}^n \varphi_{m,k+1}^n - U_{m,k-1/2}^n \varphi_{m,k-1}^n}{2h_y}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\text{де } U_{m+1/2,k}^n = U_{m+1,k}^n - \frac{U_{m+1,k}^n - U_{m,k}^n}{2}, \quad U_{m-1/2,k}^n = U_{m,k}^n - \frac{U_{m+1,k}^n - U_{m,k}^n}{2},$$

В такій різницевій схемі вираз

$$Au = A_1u + A_2u = \frac{\partial Uu}{\partial x} + \frac{\partial Vu}{\partial y}$$

апроксимується із порядком  $O(h_x^2, h_y^2)$  і кожний із операторів (4.12)

$(A_1)_{m,k}^n \varphi_{m,k}^n$ ,  $(A_2)_{m,k}^n \varphi_{m,k}^n$  задовольняє дискретному аналогу умови (4.10).

Система різницевих рівнянь може бути розв'язана за допомогою прогонки для тридіагональних матриць.

Розглянемо інший спосіб побудови різницевої схеми для задачі (4.9) на інтервалі  $[t^n, t^{n+1}]$  – схема предиктор-коректор. Рівняння (4.9) розщеплюємо на диференціальному рівні і запишемо його у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad (4.13)$$

Кожне із рівнянь (4.13) розв'язується наближено на відповідній половині  $[t^n, t^{n+1/2}]$ ,  $[t^{n+1/2}, t^{n+1}]$  за допомогою наступних неявних двоточкових схем направлених різниць проти потоку (предиктор)

$$v_{m,k}^{n+1/4} = v_{m,k}^n - \frac{\tau U_{m,k}^n}{2h_x} \begin{cases} v_{m+1,k}^{n+1/4} - v_{m,k}^{n+1/4}, (U_{m,k}^n < 0) \\ v_{m,k}^{n+1/4} - v_{m-1,k}^{n+1/4}, (U_{m,k}^n > 0) \end{cases},$$

$$v_{m,k}^{n+1/2} = v_{m,k}^{n+1/4} - \frac{\tau V_{m,k}^n}{2h_y} \begin{cases} v_{m,k+1}^{n+1/2} - v_{m,k}^{n+1/2}, (V_{m,k}^n < 0) \\ v_{m,k}^{n+1/2} - v_{m,k-1}^{n+1/2}, (V_{m,k}^n > 0) \end{cases}.$$

Такі розщеплені різницеві схеми застосовуються послідовно, результат одного кроку є початковими даними для наступного. Оскільки в схемі застосовані направлені різниці за часом і по координатах, то маємо перший порядок точності.

На наступному кроці на інтервалі  $[t^n, t^{n+1}]$  застосовується схема із центральними різницями(коректор)

---

$$v_{m,k}^{n+1} = v_{m,k}^n - \tau \frac{U_{m,k}^n}{h_x} (v_{m+1,k}^{n+1/2} - v_{m-1,k}^{n+1/2}) - \tau \frac{V_{m,k}^n}{h_y} (v_{m,k+1}^{n+1/2} - v_{m,k-1}^{n+1/2}),$$

яка апроксимує рівняння (4.9) уже із другим порядком точності.

Питання для самоконтролю.

1. Загальна схема розщеплення.
2. Схема «кабаре» для (4.6).
3. Схема розщеплення для (4.9).

---

## §5 Багатовимірні задачі. Метод розщеплення. Основні поняття та методи побудови.

**5.1 Розв’язок рівнянь в частинних похідних.** До рівнянь в частинних похідних приводять задачі із різних областей наукових досліджень. Так, задачі аеродинаміки, теплопровідності, перенесення випромінювання, дослідження електромагнітного поля, процесів перенесення в газах та інші зводяться часто до пошуку розв’язків рівнянь в частинних похідних. Незалежними змінними в фізичних задачах за звичай є час  $t$ , координати  $\vec{r}(x, y, z)$ . Наприклад, рівняння теплопровідності в просторі записується у вигляді

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \cdot \operatorname{gradu}) + q,$$

де  $u(\vec{r}, t)$  – температура,  $C(u, \vec{r}, t)$  – теплоємність,  $K(u, \vec{r}, t)$  – коефіцієнт теплопровідності (скаляр, або матриця),  $q$  – щільність джерел тепла.

Для побудови розв’язків одновимірних нестационарних рівнянь раніше застосовувався різницевий метод, який зводив неперервну задачу до дискретної-системи різницевих рівнянь (різницеві схеми).

Чисельний розв’язок навіть найпростіших рівнянь параболічного типу суттєво ускладнюється при наявності залежності функції від декількох просторових змінних. Умова стійкості різницевих схем для багатовимірних задач вимагає жорстких умов на кроки за часом та по координатам, які часто виконати практично неможливо. В таких випадках застосовують неявні різницеві схеми. Різницеву схему для чисельного дослідження двовимірного нестационарного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

досліджували раніше.

Так, повністю неявна схема має вигляд

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 u_{m,n}^{p+1} + \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1},$$

де

$$\Lambda_1 u_{m,n}^{p+1} = \frac{u_{m+1,n}^{p+1} - 2u_{m,n}^{p+1} + u_{m-1,n}^{p+1}}{h_x}, \quad \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1} = \frac{u_{m,n+1}^{p+1} - 2u_{m,n}^{p+1} + u_{m,n-1}^{p+1}}{h_y}.$$

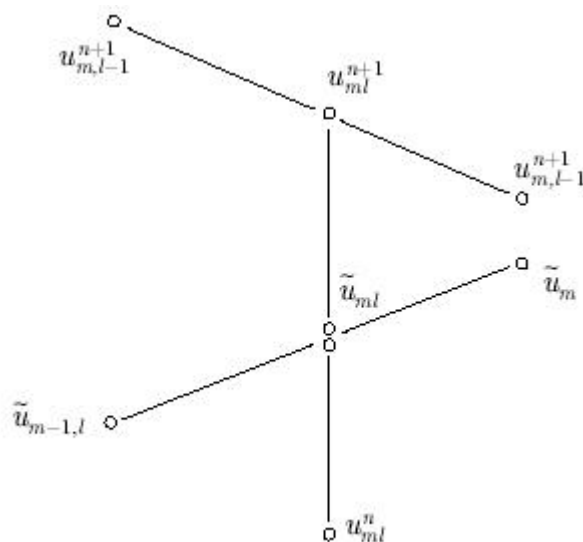
Порядок апроксимації наведеної схеми  $O(\tau, h_x^2, h_y^2)$ . Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь із розрідженою (блочною) матрицею. Вигляд такої матриці такий, що безпосередньо алгоритм п'ятиточкової прогонки в даному випадку застосувати неможливо.

Запропоновано схему розщеплення за напрямками, або локально одновимірні схеми (метод дрібних кроків, Н.Н.Яненко))

$$\frac{\tilde{u}_{m,n} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{m,n}, \tag{5.1}$$

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - \tilde{u}_{m,n}}{\tau} = \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1}.$$

Відповідний просторовий шаблон наведеної різницевої схеми має вигляд (Мал.1)



Мал.1. Просторовий шаблон різницевої схеми (5.1)

Для аналогічного тривимірного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

локально-одновимірна схема подрібнених кроків запропонована у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m,n,l}^{p+1/3} - u_{m,n,l}^p}{\tau} = \Lambda_1 u_{m,n,l}^{p+1/3} \\ \frac{u_{m,n,l}^{p+2/3} - u_{m,n,l}^{p+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 u_{m,n,l}^{p+2/3} \\ \frac{u_{m,n,l}^{p+1} - u_{m,n,l}^{p+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 u_{m,n,l}^{p+1} \end{array} \right. .$$

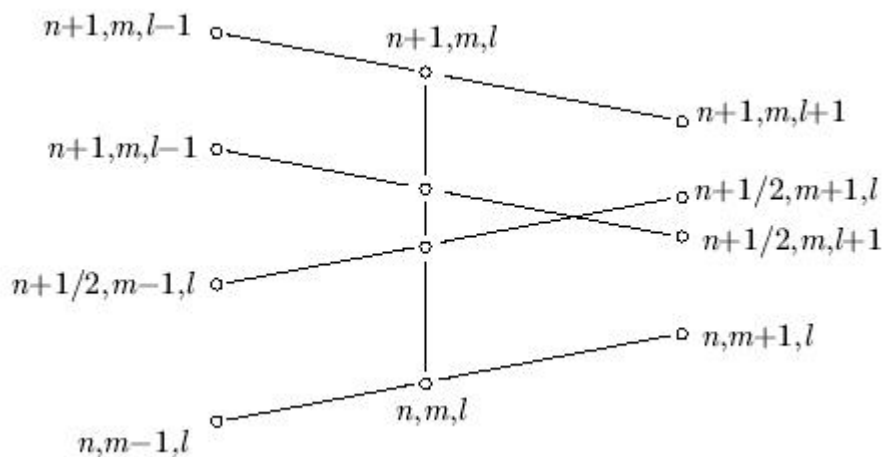
Порядок апроксимації наведеної схеми  $O(\tau, h_x^2, h_y^2, h_z^2)$ . Порядок апроксимації цієї схеми можна підвищити до другого, якщо провести усереднення операторів  $\Lambda_i u_{m,n,l}^p (i=1,2,3)$ , які апроксимують другі похідні по координатах  $x_i (i=1,2,3)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m,n,l}^{p+1/3} - u_{m,n,l}^p}{\tau} = \Lambda_1 (\xi u_{m,n,l}^{p+1/3} + (1-\xi) u_{m,n,l}^p) \\ \frac{u_{m,n,l}^{p+2/3} - u_{m,n,l}^{p+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 (\xi u_{m,n,l}^{p+2/3} + (1-\xi) u_{m,n,l}^{p+1/3}), \\ \frac{u_{m,n,l}^{p+1} - u_{m,n,l}^{p+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 (\xi u_{m,n,l}^{p+1} + (1-\xi) u_{m,n,l}^{p+2/3}) \end{array} \right.$$

де  $\xi \in [0,1]$ . Якщо  $\xi = 1/2$  порядок апроксимації схеми буде  $O(\tau^2, h_x^2, h_y^2, h_z^2)$ . Це схема Кранка-Ніколсон яка є абсолютно стійкою при довільних  $\tau, h_x, h_y, h_z$ : її шаблон для двовимірної задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m,n}^{p+1/2} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 (\xi u_{m,n}^{p+1/2} + (1-\xi) u_{m,n}^p) \\ \frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^{p+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (\xi u_{m,n}^{p+1} + (1-\xi) u_{m,n}^{p+1/2}) \end{array} \right. ,$$

наведений схематично на Мал.2.



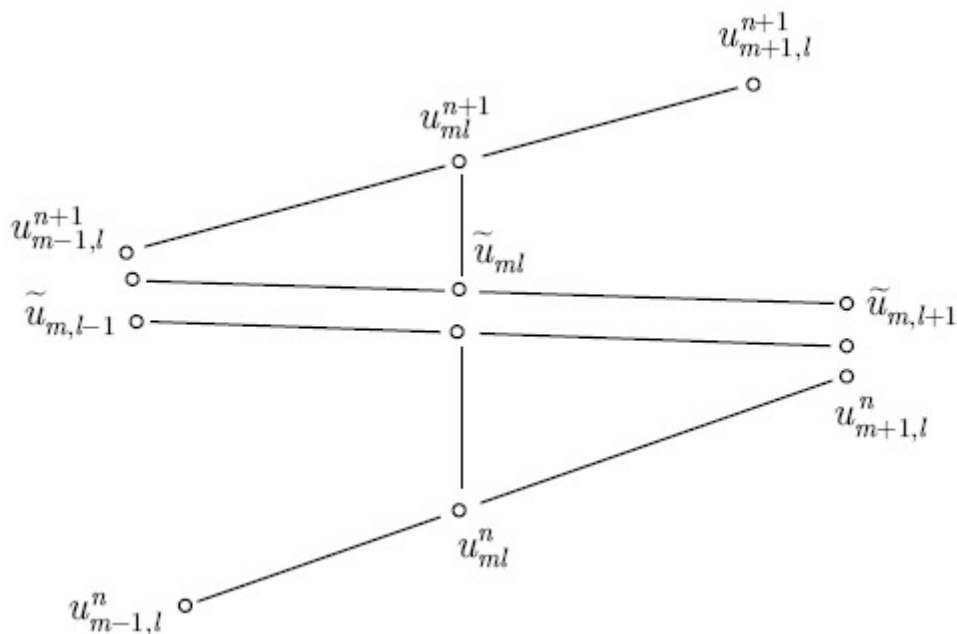
Мал.2. Шаблон різницевої схеми

Наведемо ще одну різницеву схему із порядком апроксимації  $O(\tau^2, h_x^2, h_y^2)$

$$\frac{u_{m,n}^{p+1/2} - u_{m,n}^p}{\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 u_{m,n}^{p+1/2} + \Lambda_2 u_{m,n}^p)$$

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^{p+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 u_{m,n}^{p+1/2} + \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1}),$$

та просторовим шаблоном вигляду(Мал.3)



Мал.3. Шаблон різницевої схеми

Схема Дугласа-Ганна – це загальний метод побудови неявних різницевих схем змінних напрямів для тривимірного рівняння теплопровідності, які мають другий порядок точності і є безумовно стійкими

$$u^* - u^p = \frac{r_x}{2} \Lambda_1(u^* + u^p) + r_y \Lambda_2 u^p + r_z \Lambda_3 u^p,$$

$$u^{**} - u^n = \frac{r_x}{2} \Lambda_1(u^* + u^p) + \frac{r_y}{2} \Lambda_2(u^{**} + u^p) + r_z \Lambda_3 u^p,$$

$$u^{p+1} - u^p = \frac{r_x}{2} \Lambda_1(u^* + u^p) + \frac{r_y}{2} \Lambda_2(u^{**} + u^p) + \frac{r_z}{2} \Lambda_3(u^{p+1} + u^p).$$

Верхніми індексами \* і \*\* позначені проміжні(допоміжні) значення, координатні індекси опущені в цих рівняннях. На кожному кроці виникає система лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею, яку розв'язують методом прогонки. Схема Дугласа-Ганна безумовно стійка. Вважається на теперішній час найбільш вдала із схем розщеплення в тривимірному випадку.

**5.2 Дослідження стійкості різницевих схем для багатовимірного рівняння теплопровідності.** Найпростіша явна різницева схема для чисельного дослідження розв'язків двовимірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

отримаємо шляхом заміни похідних скінченими різницями у вигляді

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \frac{u_{m+1,n}^p - 2u_{m,n}^p + u_{m-1,n}^p}{h_x^2} + \frac{u_{m,n+1}^p - 2u_{m,n}^p + u_{m,n-1}^p}{h_y^2},$$

або в операторній формі

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 u_{m,n}^p + \Lambda_2 u_{m,n}^p.$$



Дослідження спектральної стійкості цієї схеми ( $u_{m,n}^p = \lambda^p e^{i\alpha m + i\beta n}$ ,  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ ) призводить до наступного результату для спектра пошарового переходу:

$$\lambda(\alpha, \beta, h_x, h_y) = 1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

звідки отримуємо умову стійкості

$$\tau \leq \frac{1}{2(h_x^{-2} + h_y^{-2})}.$$

Для неявної схеми

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 u_{m,n}^{p+1} + \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1}$$

дослідження на стійкість по спектральній прикметі дає вираз для множника пошарового переходу

$$\lambda(\alpha, \beta, h_x, h_y) = \frac{1}{1 + 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}} \leq 1,$$

що означає стійкість при довільних  $\alpha, \beta$ .

Проведемо дослідження спектральної стійкості для схеми змінних напрямів. Розглянемо перехід із нижнього часового шару на верхній. В цьому випадку покладемо  $u_{m,n}^p = e^{i\alpha m + i\beta n}$ ; множник  $\lambda^p$  опускаємо, тому що розглядаємо один перехід із  $n$ -го на  $(n + 1)$ -й шар, допускаючи, що розв'язок на  $n$ -ому шарі відомий (можна було покласти  $u_{m,n}^p = C e^{i\alpha m + i\beta n}$  де  $C = \lambda^p$ , але в цьому немає сенсу, так як  $C$  в подальшому скорочується).

Тоді на першому етапі отримуємо  $\tilde{u}_{m,n} = \lambda_1 u_{m,n}^p$ , а на другому —  $u_{m,n}^{p+1} = \lambda_2 \tilde{u}_{m,n} = \lambda_1 \lambda_2 u_{m,n}^p$ . Обчислення  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  дає

$$\lambda_1(\alpha, \beta, h_x, h_y) = \frac{1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \lambda_2(\alpha, \beta, h_x, h_y) = \frac{1 - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Наприкінці спектр оператора пошарового переходу можна представити у вигляді добутку спектрів на кожному проміжному етапі

$$\lambda(\alpha, \beta, h_x, h_y) = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{(1 - 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2})(1 - 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2})}{(1 + 4 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2})(1 + 4 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2})} \leq 1.$$

Така схема є безумовно стійка.

Дослідження схеми розщеплення для визначення порядку апроксимації проведемо на прикладі локально-одновимірної схеми для двовимірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\tilde{u}_{m,n} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{m,n},$$

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - \tilde{u}_{m,n}}{\tau} = \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1}.$$

Напишемо ці рівняння в такій операторній формі

$$(E - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{m,n} = u_{m,n}^p \quad (E - \tau \Lambda_2) u_{m,n}^{p+1} = \tilde{u}_{m,n}.$$

Подіємо на обидві частини рівності оператором  $(E - \tau \Lambda_1)$  і отримаємо

$$(E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) u_{m,n}^{p+1} = (E - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{m,n}.$$

Враховуючи, що  $(E - \tau \Lambda_1) \tilde{u}_{m,n} = u_{m,n}^p$  напишемо у вигляді

$$(E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) u_{m,n}^{p+1} = u_{m,n}^p.$$

Це рівняння приводиться до вигляду

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 u_{m,n}^{p+1} + \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1} - \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1}.$$

---

Останній доданок є величиною другого порядку  $O(\tau^2)$  і визначає порядок апроксимації за часовою змінною. Порядок апроксимації по координатним напрямом визначається порядком апроксимації різницевого операторів в правій частині рівності.

Якщо права частина  $f(x, t)$  не нульова, то схему можна написати у вигляді

$$\frac{\tilde{u}_{m,n} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{m,n} + \frac{1}{2} f_{m,n}^p$$
$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^p}{\tau} = \Lambda_2 u_{m,n}^{p+1} + \frac{1}{2} \tilde{f}_{m,n}.$$

Питання для самоконтролю.

1. Нелінійне рівняння теплопровідності.
2. Метод розщеплення для рівняння теплопровідності в  $R^2$ .
3. Метод розщеплення для рівняння теплопровідності в  $R^3$  на основі схеми Кранка-Ніколсон.
4. Схема Дугласа-Ганна для рівняння теплопровідності в  $R^3$ .

---

## §6 Застосування методу Гальоркіна

**6.1 Метод Гальоркіна.** Інший, широко відомий метод (метод Гальоркіна) розв'язання широкого класу задач є одним із методів класу методів зваженої нев'язки. Основною перевагою такого методу є те, що основою для нього слугує вихідне диференціальне рівняння. Тому метод Гальоркіна успішно застосовується при дослідженні розв'язків задач для яких не вдається підібрати варіаційну постановку по мінімізації функціоналу (наприклад, рівняння Нав'є-Стокса )

Метод Гальоркіна базується на мінімізації похибки(нев'язки) від підстановки наближеного розв'язку в оператор задачі.

Формальну схему методу пояснимо на задачі для лінійного диференціального рівняння

$$L(u) = 0 \quad (6.1)$$

в області  $D(x, y)$  при граничних умовах

$$S(u)|_{\partial D} = 0. \quad (6.2)$$

Лінія  $\partial D$  є межею області  $D(x, y)$ . Допустимо, що розв'язок задачі може бути наближений формою

$$u_a = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x, y), \quad (6.3)$$

де  $\varphi_j(x, y)$  – відомі аналітичні функції,  $u_0(x, y)$  – функція, введена для виконання функцією  $u_a(x, y)$  граничних умов (6.2). Коефіцієнти  $\{a_j\}_{j=1}^N$  повинні бути визначені.

Підстановка(6.3) в рівняння (6.1) приводить до відмінної від нуля величини нев'язки

$$R(x, y, a_1, \dots, a_N) = L(u_0(x, y)) + \sum_{j=1}^N a_j L(\varphi_j(x, y)).$$

Введемо скалярний добуток за формулою

$$(f, g) = \iint_D f(x, y)g(x, y)dxdy.$$

Тоді для пошуку невідомих коефіцієнтів  $\{a_j\}_{j=1}^N$  отримаємо систему рівнянь

$$(R, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Таку систему запишемо у матричному вигляді (система лінійних алгебраїчних рівнянь)

$$\sum_{j=1}^N a_j (L(\varphi_j), \varphi_k) = -(L(u_0), \varphi_k) \quad (6.4)$$

Розв'язок системи (6.4) дає наближення для (6.1).

Деякі відгалуження методу Гальоркіна відмітимо при розгляді прикладів.

Наведемо деякі приклади із застосуванням методу Гальоркіна.

## 6.2 Задача Коші для звичайного диференціального рівняння.

Розглянемо задачу Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння

$$\frac{du}{dt} - u = 0, \quad u(0) = 1. \quad (6.5)$$

Для задачі (6.5) відомий точний розв'язок

$$u(t) = e^t.$$

Наближений розв'язок будемо шукати в області  $t \in [0, 1]$  у вигляді

$$u_a(t) = 1 + \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(t),$$

де  $\varphi_j(t) = t^j$ . Підстановкою перевіряємо, що  $u_a(0) = 1$ . Для нев'язки

отримаємо

$$R(t, a_1, \dots, a_N) = -1 + \sum_{j=1}^N a_j (jt^{j-1} - t^j). \quad (6.6)$$

Мінімізація нев'язки (6.6), шляхом її проектування на базисні функції, приводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $\{a_j\}_{j=1}^N$

$$(R, t^{k-1}) = 0, k = 1, \dots, N,$$

яку запишемо у матричному вигляді

$$M \cdot A = D,$$

де  $A = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$  -вектор невідомих,  $D = (d_1, d_2, \dots, d_N)^T$ ,  $d_k = (1, t^{k-1}) = 1/k$ ,

$$M = \{m_{k,j}\}_{k,j=1}^N, m_{k,j} = (j \cdot t^{j-1} - t^j, t^{k-1}) = \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}.$$

$$\text{При } N=3 \quad M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/12 \\ 1/6 & 1/12 & 1/20 \\ 1/12 & 1/20 & 1/30 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1.0141 \\ 0.4225 \\ 0.2817 \end{pmatrix}$$

маємо наближений розв'язок

$$u_a(t) = 1 + 1.0141t + 0.4225t^2 + 0.2817t^3.$$

**6.3 Нестационарна теплопровідність.** Наступний приклад стосується застосування методу Гальоркіна для дослідження розв'язків задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Типова задача про нестационарну теплопровідність в тонкому стрижні довжиною  $L=1$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in [0,1] \\ u(x,0) = u_0(x) = \sin \pi x + x \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

Наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_a(x,t) = u_0(x) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \cdot \varphi_j(x),$$

де  $u_0(x) = \sin \pi x + x$ ,  $\varphi_j(x) = x^j - x^{j+1}$ ,  $\varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$

Підстановка наближеного розв'язку в диференціальне рівняння (6.7) дає нев'язку

$$R(x,t,a_1,\dots,a_N) = -\frac{d^2 u_0(x)}{dx^2} + \sum_{j=1}^N \left( \frac{da_j(t)}{dt} \varphi_j(x) - a_j(t) \frac{d^2 \varphi_j(x)}{dx^2} \right).$$

Проектуючи нев'язку на базисні функції  $(R, \varphi_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яку напишемо у вигляді

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + B \cdot A + C = 0, \quad (6.8)$$

де  $A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{pmatrix}$ ,  $m_{k,j} = (\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx$ , а елементи матриць  $B$  і

$$C \in b_{k,j} = -\left( \frac{d^2}{dx^2} \varphi_j, \varphi_k \right), \quad c_k = -\left( \frac{d^2}{dx^2} u_0(x), \varphi_k \right).$$

При малому числі коефіцієнтів  $a_j(t)$  система (6.85) запишеться так

$$\frac{dA}{dt} = S \cdot A + T, \quad (6.9)$$

де  $S = -M^{-1}B$ ,  $T = -M^{-1}C$ .

Оскільки система (6.9) лінійна, то її можливо розв'язати аналітично. Але для демонстрації методу Гальоркіна, який використовується і в нелінійних задачах, проведемо чисельне інтегрування системи (6.9). Вихідні дані для цієї системи є  $A(0) = A_0$ . В нашому випадку функція  $u_0(x)$  точно задовольняє початковій умові, тому  $A_0 = 0$ .

Якщо кількість коефіцієнтів не перевищує  $N = 5$ , то використовують схему Ейлера для інтегрування системи (6.9)

$$a_j^{n+1} = a_j^n + \left. \frac{da_j(t)}{dt} \right|_{t^n} \tau$$

Точний розв'язок задачі (6.7)  $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x$ . Його можливо розглядати як суперпозицію початкового синусоїдального збурення та лінійного. При зростанні часу збурення затухає і залишається лише стаціонарний лінійний розподіл температури.

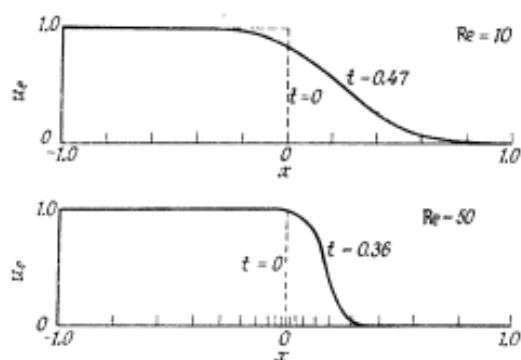
**6.4 Р. Рівняння Бюргерса.** Одновимірне нестационарне рівняння Бюргерса має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [-1,1] \quad t \geq 0. \quad (6.10)$$

Таке рівняння є змістовною, простою формою рівнянь Нав'є-Стокса в якій реалізовано баланс між нелінійним і дисипативним процесами (доданок  $\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ).

Незважаючи на нелінійність рівняння Бюргерса для деяких початково-крайових задач існують точні розв'язки.

Характерна поведінка розв'язку (6.10) (ударна хвиля розповсюджується вправо і її профіль згладжується за рахунок дисипативного процесу при різних значеннях числа  $\text{Re}$ ) приведена на Мал.1



Мал.1 Точний розв'язок рівняння (6.17)

Будемо розглядати розв'язок (6.10) на інтервалі  $x \in [-1,1]$  для таких додаткових умов



$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,0] \\ 0, & x \in (0,1] \end{cases}, \quad u(-1,t) = 1 \quad u(1,t) = 0.$$

Точний розв'язок такої задачі відомий в науковій літературі і має вигляд

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\xi}{t} e^{(-0.5\text{Re}\cdot F)} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-0.5\text{Re}\cdot F)} d\xi},$$

де  $F(\xi;x,t) = \int_0^\xi u_0(\xi) d\xi + \frac{0.5(x-\xi)^2}{t}.$

Графік такого точного розв'язку якісно показаний на Мал.1.

Наближений розв'язок шукатимемо в базисі із поліномів Чебишова.

Вони ортогональні на відрізку  $(-1,1)$  із вагою  $(1-x^2)^{-1/2}$

$$(T_j(x), T_k(x)) = \int_{-1}^1 T_j(x) T_k(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

Для їх побудови відома рекурентна формула

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

де  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ . Тоді  $T_2(x) = 2xT_1 - T_0 = 2x^2 - 1$ .

Запишемо наближений розв'язок так

$$u_a(x,t) = \sum_{j=0}^N a_j(t) \cdot T_j(x).$$

Після підстановки його в (6.10) отримаємо нев'язку

$$R(x,t, a_1, \dots, a_N) = \sum_{j=0}^N \frac{da_j(t)}{dt} T_j(x) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \sum_{i=1}^N a_i(t) T_j(x) \frac{dT_i(x)}{dx} - \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^N a_j(t) \frac{d^2 T_j(x)}{dx^2}$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $a_j(t)$  в наближеному розв'язку  $u_a(x,t)$  отримаємо після проектування нев'язки на систему базисних функцій

$$(R, T_k) = 0, \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (6.11)$$

Два коефіцієнти  $a_{N-1}(t), a_N(t)$ , які входять в формулу для наближеного розв'язку, вибираються із виконання двох граничних умов.

Умову (18.11) перепишемо у вигляді

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + (B + C) \cdot A = 0,$$

де елементи  $M, B, C$  знаходять так

$$m_{k,j} = (T_j, T_k) = \int_{-1}^1 T_j(x) T_k(x) (1-x^2)^{-1/2} dx,$$

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^N a_i(t) (T_j(x) \frac{dT_i(x)}{dx}, T_k(x)),$$

$$c_{k,j} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{dT_j(x)}{dx}, \frac{dT_k(x)}{dx} \right).$$

Початкові умови для вектору коефіцієнтів  $A$  визначаються шляхом підстановки наближеного розв'язку в початкові умови вихідної задачі і наступним проектуванням на базисні функції

$$(u_a(x, 0) - u_0(x), T_k(x)) = 0, \quad k = 0, \dots, N-2,$$

отримуємо систему

$$M \cdot A(0) = D.$$

Координати вектору  $D$  знаходять так

$$d_k = (u_0(x), T_k(x)).$$

Також, для тестування чисельних методів наведемо ще декілька прикладів задач із точними розв'язками

Задача 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = u_0(0) = u_0 - const, \quad u(L, t) = 0, \end{array} \right. , \quad x \in [0, L].$$

Стационарний розв'язок має вигляд

$$u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u_0 \cdot \tilde{u} \left\{ \frac{1 - e^{-\tilde{u} \operatorname{Re}_L \left(\frac{x}{L} - 1\right)}}{1 + e^{-\tilde{u} \operatorname{Re}_L \left(\frac{x}{L} - 1\right)}} \right\}, \operatorname{Re}_L = \frac{u_0 L}{\mu}$$

де  $\tilde{u}$  знаходять із рівняння  $\frac{\tilde{u} - 1}{\tilde{u} + 1} = e^{-\tilde{u} \operatorname{Re}_L}$ .

Задача 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = u_0(0) = u_0 - \text{const}, \quad u(L, t) = 0, \end{array} \right. , x \in [0, L],$$

має стаціонарний розв'язок

$$u(x,t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u_0 \left\{ \frac{1 - e^{-\operatorname{Re}_L \left(\frac{x}{L} - 1\right)}}{1 - e^{-\operatorname{Re}_L}} \right\}, \operatorname{Re}_L = \frac{aL}{\mu}$$

Задача 3-лінійна комбінація рівнянь задачі 1 та 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (a + bu) \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) = \sin(kx), \quad x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) \end{array} \right.$$

із періодичними граничними умовами має такий розв'язок при  $a = 1/2$ ,  $b = -1$ ,  $\mu = 1/4$

$$u(x,t) = -\frac{a}{b} \left[ 1 + th \frac{a(x - x_0)}{2\mu} \right].$$

**6.5 Течія в'язкої рідини в каналі.** Розглянемо стаціонарну течію в'язкої рідини в каналі прямокутної форми  $D = \{(x, y), -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ . В якості моделі виберемо рівняння проекція закону збереження імпульсу на вісь  $z$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (6.12)$$

На великій відстані від вхідного та вихідного перетину каналу параметри течії не залежать від координати  $z$  і рівняння (6.12) перетворимо до вигляду

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

де для такого типу течії  $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$ . Приведемо рівняння до безрозмірної форми і напишемо задачу для  $w = w(x, y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 = 0, \quad D = \{(x, y), -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, \quad (6.13)$$

$$w(\pm 1, y) = 0 \quad w(x, \pm 1) = 0.$$

Наближений розв'язок шукаємо у вигляді відрізка ряду у тригонометричному базисі

$$w_a(x, y) = \sum_{i=1,3,5}^N \sum_{j=1,3,5}^N a_{i,j} \cos\left(i \frac{\pi}{2} x\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} y\right).$$

Після підстановки в рівняння (6.13) отримаємо нев'язку

$$R = - \left[ \sum_{i=1,3,5}^N \sum_{j=1,3,5}^N a_{i,j} \cos\left(i \frac{\pi}{2} x\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} y\right) \left\{ \left(i \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(j \frac{\pi}{2}\right)^2 \right\} - 1 \right]. \quad (6.14)$$

Після проектування в методі Гальоркіна (6.142) на систему базисних функцій отримаємо

$$(R, \cos\left(i \frac{\pi}{2} x\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} y\right)) = 0 \quad i = 1, 3, 5 \dots \quad j = 1, 3, 5 \dots$$

Із такої системи знайдемо

$$a_{i,j} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \frac{(-1)^{(i+j)/2-1}}{ij(i^2 + j^2)}.$$

Шуканий наближений розв'язок має вигляд

$$w_a(x, y) = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_{i=1,3,5}^N \sum_{j=1,3,5}^N \frac{(-1)^{(i+j)/2-1}}{ij(i^2 + j^2)} \cos\left(i \frac{\pi}{2} x\right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} y\right).$$

Точне значення безрозмірного потоку  $\tilde{g}$  пов'язаний із швидкістю  $w_a$  обчислимо так

---

$$\tilde{g} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_a(x, y) dx dy.$$

Після підстановки маємо

$$\tilde{g} = 2 \left( \frac{8}{\pi^2} \right)^2 \sum_{i=1,3,5}^N \sum_{j=1,3,5}^N \frac{1}{i^2 j^2 (i^2 + j^2)}.$$

Можливо використати і інший базис, так

$$w_a(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j (1-x^2)^j (1-y^2)^j,$$

де  $\varphi_{i,j} = (1-x^2)^j (1-y^2)^j$ .

Питання для самоконтролю.

- 1.Формальна схема методу Гальоркіна.
- 2.Метод Гальоркіна для задачі Коші ЗДУ.
- 3.Базисні функції для задачі нестационарної теплопровідності.
- 4.Метод Гальоркіна для рівняння Бюргерса. Базис із поліномів Чебишова.
- 5.Тригонометричний базис в задачі про течію рідини в каналі.

## §7 Приклади базисних функцій. Метод скінчених елементів(МСЕ).

Застосування традиційного методу Гальоркіна із пробними (базисними) та перевірними (співпадаючими із пробними) функціями вигляду  $\varphi_j(x) = x^j$ ,  $j = 1, \dots, N$  в задачі (15.5) приводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , яку можливо записати у вигляді

$$M \cdot A = D, \quad (7.1)$$

де  $m_{j,k} = \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}$ ,  $d_k = 1/k$ ,  $j, k \in (j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, N)$ .

Зрозуміло, що при великих  $k$  (а значить і при великих  $N$ )

$$m_{j,k} \approx \frac{j-1}{j+k}$$

і різниця в елементах близьких до діагональних надзвичайно мала. Такі матриці є погано обумовлені. Наявність поганої обумовленості у матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь викликає велику реакцію її розв'язку до малих збурень в правій частині рівнянь, або в коефіцієнтах матриці. Для характеристики обумовленості матриць вводять число обумовленості матриці. Так, для системи (7.1) збурена система має вигляд

$$(M + \delta M) \cdot (A + \delta A) = D + \delta D,$$

для якої відомо, що

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu \|\delta M\| / \|M\|} \left[ \frac{\|\delta D\|}{\|D\|} + \frac{\|\delta M\|}{\|M\|} \right],$$

при умові  $\|\delta M\| < 1 / \|M^{-1}\|$  і  $\mu$  визначається за формулою

$$\mu = \|M\| \|M^{-1}\|.$$

Величини  $\|M\|$ ,  $\|A\|$  (відповідно до вектору  $A$  та матриці  $M$ ) вводяться узгоджено, так щоб

$$\|M \cdot A\| \leq \|M\| \|A\|.$$

---

Часто використовують  $\|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N a_j^2}$ , тоді узгоджена норма матриці

$$\|M\| = \max_{1 \leq k \leq N} [\lambda_k(M \cdot M')],$$

де  $\lambda_k(M \cdot M')$  - власні числа матриці  $M \cdot M'$ . Використовують і інші види узгоджених норм вектору і матриці. Окрім поганої обумовленості матриці  $M$  існує ще одна проблема для чисельного розв'язання системи (7.1). Матриця  $M$  є заповненою, всі її елементи відмінні від нуля. При розв'язанні такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса необхідно  $O(N^2)$  число операцій на ЕОМ. При великих  $N$  дослідження таких систем вимагає значних ресурсів ЕОМ. Ще більші труднощі виникають коли система алгебраїчних рівнянь є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь, наприклад, як у попередній лекції для рівняння Бюргерса.

Традиційний метод Гальоркіна використовує для наближеного розв'язку таку його форму

$$u_a(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x, y)$$

із невідомими коефіцієнтами  $a_j$ .

Існує і інший варіант, коли наближений розв'язок шукають у вигляді

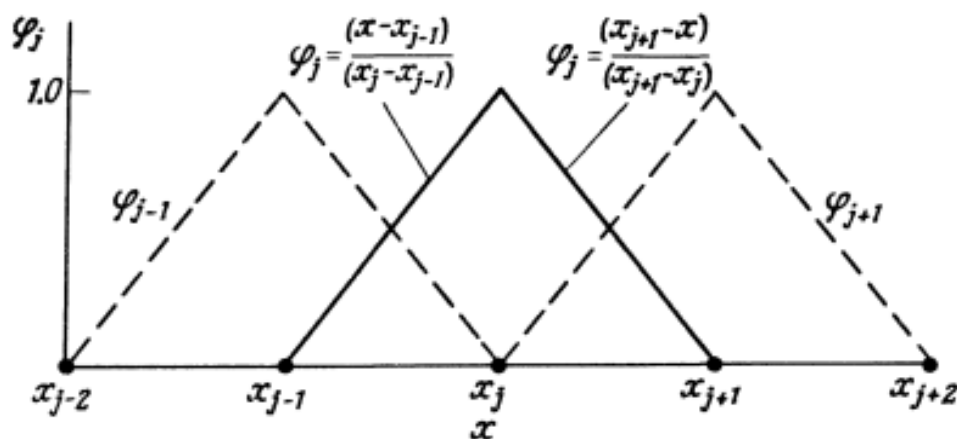
$$u_a(x, y) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x, y), \quad (7.2)$$

де  $u_j$  є вузлові значення функції  $u = u(x, y)$ .

Розглянемо одновимірні задачі. Для них пробні функції в методі Гальоркіна визначені на всій розрахунковій області і задовільняють граничним умовам на її границі. Такий базис породжує заповнені матриці в системах лінійних алгебраїчних рівнянь.

Можливий і інший варіант в якому пробні та перевірні функції визначені тільки на малій частині області. Наприклад, перевірні та пробні

функції відмінні від нуля тільки в малому околі вузла  $j$ . Вибирають їх у вигляді лінійних інтерполяцій між вузлами  $j-1$  та  $j$ , а також між  $j$  та  $j+1$ . (Мал.1). Наближений розв'язок (7.2) є лінійним інтерполянтом значень функції  $u = u(x)$  в вузлах розбиття розрахункової області.



Мал.1 Лінійна інтерполяція в базисних функціях

Обчислення елементів матриці  $M$  пов'язано із інтегруванням добутків базисних функцій. Використання простих (лінійних) базисних функцій приводить до підінтегральних функцій низького порядку і інтеграли можуть бути обчислені чисельним методом із використанням квадратурних формул. При великих  $N$  це дозволяє суттєво знизити затрати машинного часу на обчислення.

**7.1 Метод Гальоркіна із скінченими елементами (МСЕ).** Спочатку розглянемо різні пробні функції і елементи для одновимірних задач. Найпростіша із можливих ситуацій показана на Мал.2. Наближений розв'язок в області для одновимірної задачі  $x \in [x_1, x_N]$  напишемо у вигляді

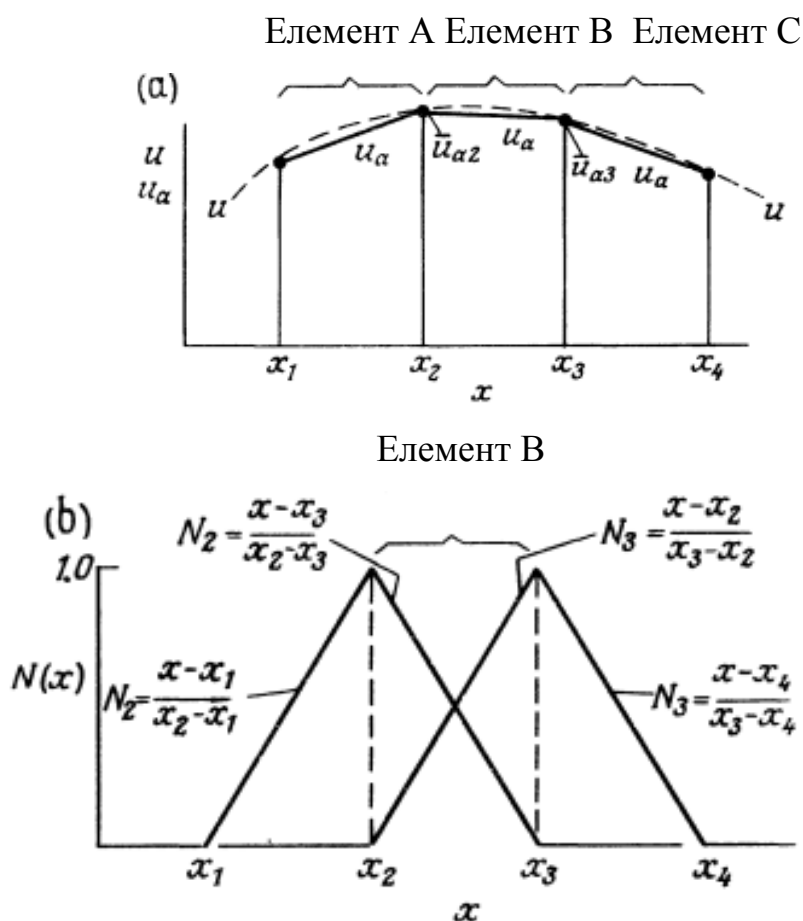
$$u_a(x) = \sum_{j=1}^N \bar{u}_{aj} N_j(x), \quad (7.3)$$

де пробні функції  $N_j(x)$  є кусочно-лінійні поліноми (функції форми або інтерполяційні функції). Постійні значення в вузлах (вузлові невідомі)  $\bar{u}_{aj}$



відносно яких і формулюється задача. Із Мал.2(а) видно, що вирази для  $\bar{u}_{aj}$  реалізують лінійну інтерполяцію функції  $u = u(x)$  на проміжку між вузловими невідомими.

На Мал.2(б) показаний вигляд функцій форми  $N_j(x)$ . Видно, що функції лінійно спадають від максимального значення в даному вузлі, яке дорівнює 1, до нуля в двох сусідніх вузлах і залишаються нульовими на решті області. Таким чином, незважаючи на те, що форма (7.3) має глобальний характер, всередині кожного елемента тільки дві функції форми і два вузлових невідомих мають вплив на її значення. Наприклад, всередині елемента В лише дві функції форми  $N_2, N_3$  впливають на значення  $u_a(x)$ .



Мал.2 Скінченно-лінійна інтерполяція за допомогою лінійних функцій форми

Загальний вигляд лінійної функції форми запишемо так

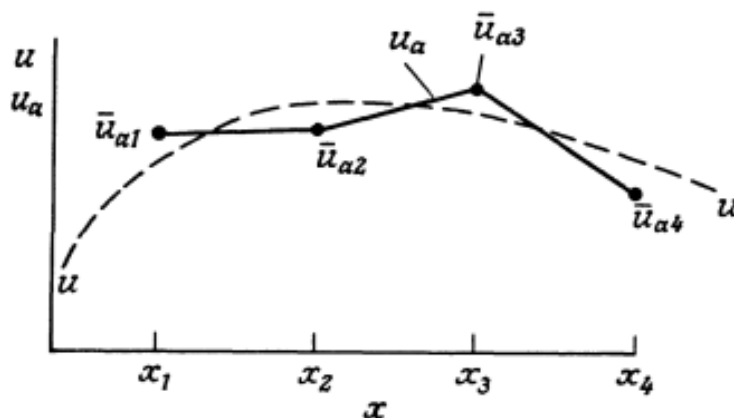
$$N_j(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{j-1} \\ \frac{x - x_{j-1}}{(x_j - x_{j-1})}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x - x_j}{(x_j - x_{j+1})}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x > x_{j+1} \end{cases} \quad j = 2, \dots, N-1 \quad (7.4)$$

Функція  $u_a(x)$  є неперервною в розрахунковій області, але її похідна  $\frac{du_a(x)}{dx}$  має розриви на границі елементів а похідні більш високих порядків взагалі не визначені. Оскільки лише вузлові значення співпадають із дійсними значеннями  $u = u(x)$ , введення  $u_a(x)$  породжує появу похибки. Така похибка називається *похибкою інтерполяції*.

Враховуючи, що такі функції форми використовуються в методі Гальоркіна у якості перевірних, то при розрахунках скалярного добутку ненульовий вклад будуть давати лише два сусідніх елементи. Наприклад, коли  $N_2(x)$  використовується в якості перевірної функції, то ненульові вклади отримаємо тільки від елементів А і В (Мал.2(б)). Тоді в системі лінійних алгебраїчних рівнянь присутнє рівняння в яке входять вузлові невідомі  $\bar{u}_{a1}, \bar{u}_{a2}, \bar{u}_{a3}$ .

Якщо система алгебраїчних рівнянь, отриманих при використанні всіх функцій форми  $N_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , в якості перевірних функцій, записується відносно вузлових невідомих, то наближений розв'язок  $u_a(x)$  може прийняти таку форму як на Мал.3. На цьому малюнку  $u$  представляє точний розв'язок. Видно, що вузлові значення  $\bar{u}_{aj}$  не співпадають із значеннями точного розв'язку  $u = u(x)$ . Похибка  $u_a(x) - u(x)$  називається *похибкою апроксимації*. Аналізуючи точність розв'язків по методу скінчених елементів необхідно брати до уваги наявність двох взаємопов'язаних типів похибки: похибка інтерполяції, яка залежить від

вибору пробних функцій (7.4), і похибка апроксимації -пов'язана із виглядом вихідного рівняння і метода його дослідження.

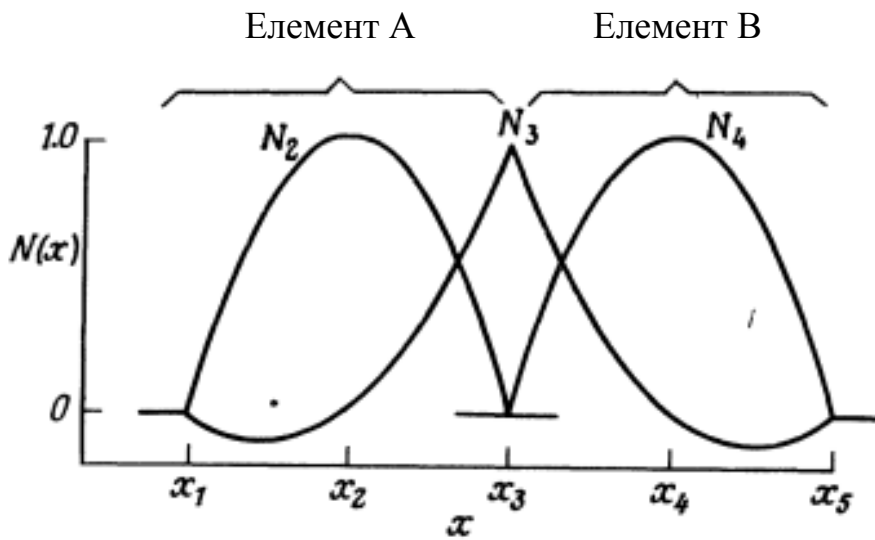


Мал.3 Скінчено-елементний розв'язок за допомогою лінійних функцій форми.

Зберігаючи форму наближеного розв'язку (7.3) розглянемо випадок, коли  $N_j(x)$  - кусочно-квадратичні поліноми, схематично показані на Мал.4. Вони можуть бути безпосередньо побудовані на основі лагранжевих інтерполяційних функцій. Наприклад, функція  $N_j(x)$  може бути задана як

$$N_j(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{j-2} \\ \frac{(x - x_{j-2})(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-2})(x_j - x_{j-1})}, & x \in [x_{j-2}, x_j] \\ \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+2})(x_j - x_{j+1})}, & x \in [x_j, x_{j+2}] \\ 0, & x > x_{j+2} \end{cases} \quad . j = 3, \dots, N-2 \quad (7.5)$$

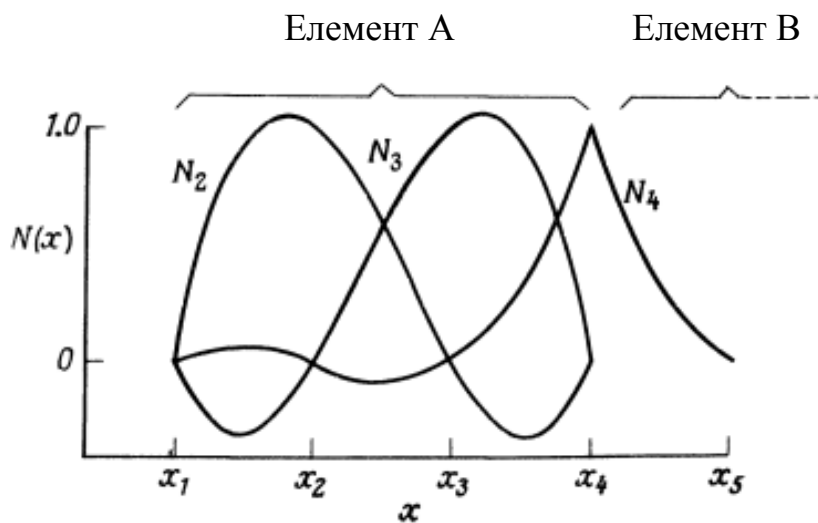
Наближене значення  $u_a(x)$  інтерполюється квадратичною формою всередині кожного елемента відповідно до (7.5) і вклади вносять три функції форми. Наприклад, в межах елемента Функції (Мал.4)  $N_3(x), N_4(x), N_5(x)$  реалізують ненульовий внесок в вираз в (7.3). Зауважимо, що незважаючи на наявність похідних до другого порядку у  $u_a(x)$  на елементі В вона є тільки неперервною при переході через межу елемента В.



Мал.4 Однорідні квадратичні функції форми.

Вигляд наближеного розв'язку (7.3) не обмежує степінь полінома в функції форми. На Мал.5 показані кубічні функції форми. При цьому

$$N_j(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{j-3} \\ \frac{(x-x_{j-3})(x-x_{j-2})(x-x_{j-1})}{(x_j-x_{j-3})(x_j-x_{j-2})(x_j-x_{j-1})}, & x \in [x_{j-3}, x_j] \\ \frac{(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})(x-x_{j+3})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j+2})(x_j-x_{j+3})}, & x \in [x_j, x_{j+3}] \\ 0, & x > x_{j+3} \end{cases}, \quad j = 4, \dots, N-3.$$



Мал.5 Однорідні кубічні функції форми.

Зауважимо, що і при таких функціях форми наближений розв'язок зберігає на всій розрахунковій області лише неперервність. Підвищення вимог до гладкості наближеного розв'язку приводить до підвищення степені полінома у функції форми та додаткових умов на межах елементів для забезпечення високого порядку гладкості в граничних точках двох сусідніх елементів.

**7.2 Нестационарна теплопередача.** Повернемося до задачі нестационарної теплопровідності яку раніше досліджували за допомогою скінчених різниць та традиційного методу Гальоркіна. Так маємо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sin \pi x + x, \quad (7.6)$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 1.$$

Наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_a(x, t) = \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) N_j(x). \quad (7.7)$$

На противагу традиційному методу Гальоркіна у наближеному розв'язку ми не виокремлюємо допоміжну функцію, яка допомагала задовільнити початкові та граничні умови. Після підстановки (7.7) в (7.6) отримаємо нев'язку і будемо проектувати її на систему базисних функцій  $N_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Отримаємо

$$\left( \frac{\partial u_a(x, t)}{\partial t}, N_k(x) \right) - \left( \frac{\partial^2 u_a(x, t)}{\partial x^2}, N_k(x) \right) = 0.$$

Після інтегрування частинами і підстановки (7.7) маємо

$$\sum_{j=1}^N (N_j(x), N_k(x)) \frac{d\bar{u}_j(t)}{dt} + \sum_{j=1}^N \left( \frac{dN_j(x)}{dx}, \frac{dN_k(x)}{dx} \right) \bar{u}_j(t) = 0. \quad (7.8)$$

Вводити допоміжні співвідношення, пов'язані із граничними вузлами, немає необхідності і тому інтегрування частинами не вносить додаткових значень.

Для  $N_j(x)$  і  $N_k(x)$  введемо лінійні функції форми. Обчислення інтегралів в скалярних добутках (7.8) виконане на рівномірній сітці дає

$$\frac{1}{6} \frac{d\bar{u}_{j-1}}{dt} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{u}_j}{dt} + \frac{1}{6} \frac{d\bar{u}_{j+1}}{dt} = \frac{1}{h^2} (\bar{u}_{j+1} - 2\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}), \quad (7.9)$$

де  $h = x_j - x_{j-1}$ .

Права частина нам зустрічалася при різницевій апроксимації другої похідної по координаті в різницевих методах.

Для побудови ефективного алгоритму на основі (7.9) члени типу  $\frac{d\bar{u}_j}{dt}$  замінімо на  $\frac{\bar{u}_j^{p+1} - \bar{u}_j^p}{\tau}$ ,  $\tau = t^{p+1} - t^p$  і тоді отримаємо

$$\frac{1}{6} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_{j-1}^p}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_j^p}{\tau} + \frac{1}{6} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_{j+1}^p}{\tau} = \frac{1}{h^2} (\lambda \delta_x^+ \delta_x^- \bar{u}_j^{p+1} + (1-\lambda) \delta_x^+ \delta_x^- \bar{u}_j^p). \quad (7.10)$$

У випадку, коли  $\lambda = 1$  схема (7.10) неявна і явна при  $\lambda = 0$ . Також схема явна коли  $\lambda = \frac{h^2}{6\tau}$

Вигляд правої частини при  $0 < \lambda \leq 1$  приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь яку розв'язують методом прогонки. Перепишемо (7.10) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_{j-1}^p}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_j^p}{\tau} + \frac{1}{6} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_{j+1}^p}{\tau} &= \frac{1}{h^2} (\lambda \delta_x^+ \delta_x^- (\bar{u}_j^{p+1} - \bar{u}_j^p) + \delta_x^+ \delta_x^- \bar{u}_j^p) = \\ &= \frac{1}{h^2} (\lambda \delta_x^+ \delta_x^- \delta_t^+ \bar{u}_j^p + \delta_x^+ \delta_x^- \bar{u}_j^p) \\ \frac{1}{6} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_{j-1}^p}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_j^p}{\tau} + \frac{1}{6} \frac{\delta_t^+ \bar{u}_{j+1}^p}{\tau} &= \frac{1}{h^2} (\lambda \delta_x^+ \delta_x^- \delta_t^+ \bar{u}_j^p + \delta_x^+ \delta_x^- \bar{u}_j^p). \end{aligned}$$

Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь із тридіагональною матрицею запишеться так

$$A_j^p \delta_t^+ \bar{u}_{j-1}^p + B_j^p \delta_t^+ \bar{u}_j^p + C_j^p \delta_t^+ \bar{u}_{j+1}^p = D_j^p, \quad (7.11)$$

де

$$A_j^p = \frac{1}{6} - \frac{\lambda\tau}{h^2}, \quad B_j^p = \frac{2}{3} + \frac{\lambda\tau}{h^2}, \quad C_j^p = \frac{1}{6} - \frac{\lambda\tau}{h^2}, \quad D_j^p = \tau \frac{\delta_x^+ \delta_x^- \bar{u}_j^p}{h^2}.$$

Для порівняння наближеного і точного розв'язку задачі (7.6) нагадаємо її точний розв'язок

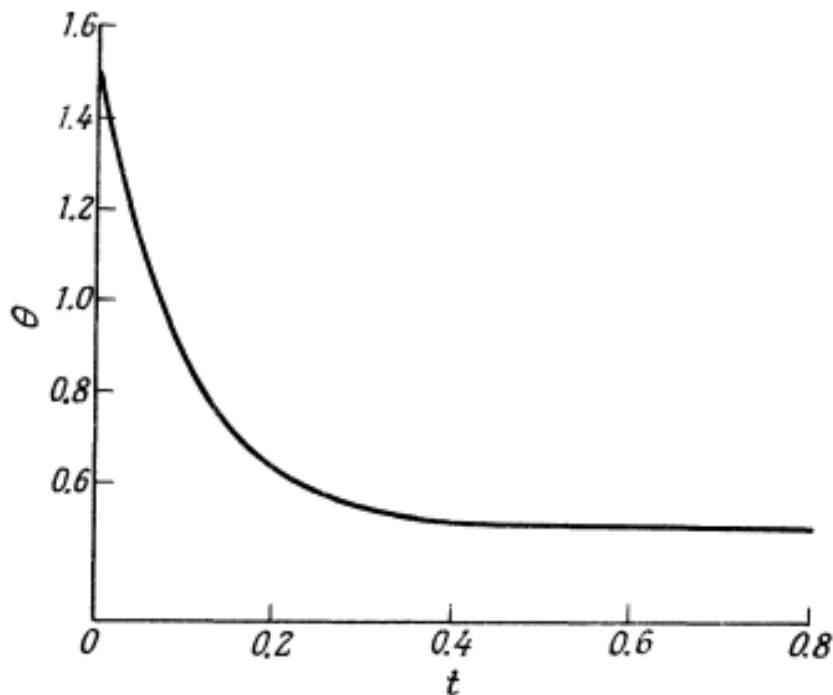
$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x.$$

Із (7.11) видно, що при досягненні стаціонарного стану  $D_j^p = 0$ , тоді і  $\delta_t^+ \bar{u}_j^p = 0$ . Оскільки граничні умови при  $x=0$ , і  $x=1$  не залежать від часу  $\delta_t^+ \bar{u}_1^p = 0, \delta_t^+ \bar{u}_N^p = 0$ .

Система (7.11) при  $\lambda = 1/2$  зводиться до схеми Кранка-Ніколсон, яка має другий порядок точності за часом та координатою  $O(\tau^2, h^2)$ .

Задача.

Провести чисельне дослідження задачі (7.7) за схемою (7.11) при  $\tau = 0.001$  та  $h = 0.02$  на інтервалі  $t \in [0, 0.05]$  Порівняти із графіком Мал.6 при  $N = 51$ .



Мал.6 Залежність безрозмірної температури  $u_a(1/2, t)$  від безрозмірного часу.

**7.3 Рівняння Бюргерса.** Знову розглянемо задачу, описану раніше при ілюстрації застосування традиційного методу Гальоркіна із поліномами Чебишова в якості базису.

Нагадаємо, рівняння Бюргерса має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, x \in [x_L, 0] \\ 0, x \in (0, x_R] \end{cases}, \quad (7.12)$$

$$u(x_L, t) = 1, u(x_R, t) = 0.$$

Величини  $x_L, x_R$  вибирають досить великими для виконання граничних умов. Задача (7.12) описує розповсюдження ударної хвилі в в'язкому середовищі. Наближений розв'язок будуюмо із використанням базисних (пробних) функцій як в попередній задачі

$$u_a(x) = \sum_{j=1}^N \bar{u}_{aj} N_j(x).$$

Застосування методу Гальоркіна приводить до системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$M \dot{U} + (B + C)U = 0. \quad (7.13)$$

Елементом матриці  $U$  є саме вузлове значення невідомої  $\bar{u}_{aj}$ . Елемент матриці  $M$  (матриця мас) має вигляд

$$m_{k,j} = (N_k, N_j)$$

Елементи матриці  $C$  знаходять за формулами

$$c_{k,j} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{dN_k}{dx}, \frac{dN_j}{dx} \right),$$

а елементи матриці  $B$  у вигляді

$$b_{k,j} = \sum_i \bar{u}_{ai} \left( N_k, N_i, \frac{dN_j}{dx} \right)$$

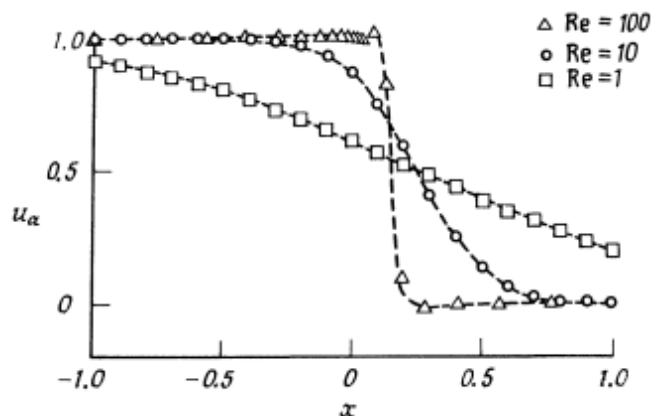


Видно, що коефіцієнти  $b_{k,j}$  залежать від форми наближеного розв'язку, що вимагає застосовувати методи для чисельного дослідження нелінійної системи (7.13).

Структура системи звичайних диференціальних рівнянь (7.13) стає особливо простою коли використовуються лінійні елементи на рівномірній сітці. Тоді рівняння системи (7.13) приймають вигляд

$$\frac{1}{6} \frac{d\bar{u}_{k-1}}{dt} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{u}_k}{dt} + \frac{1}{6} \frac{d\bar{u}_{k+1}}{dt} + \frac{\bar{u}_{j+1} + \bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}}{3} \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2h} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\bar{u}_{j+1} - 2\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}}{h^2} = 0.$$

Розв'язок, отриманий при різних числах Рейнольдса і  $N = 21$  представлені на Мал.7



Мал.7. Розв'язок рівняння Бюргерса із застосуванням лінійних елементів при різних числах Рейнольдса

Відмітимо збільшення крутизни ударної хвилі при зростанні числа Рейнольдса.

Широке використання методу скінчених елементів окрім переваг дозволило виокремити деякі його недоліки. Напрацьовані можливі шляхи його удосконалення. Так, для параболічних задач виникають неявні алгоритми. Уникнення затратної матричної факторизації на кожному часовому кроці призводить до розщеплення просторового оператора. При практичному використанні методу встановлено, що застосування схем чисельного інтегрування невисокого порядку дозволяє отримати, інколи,

---

більш точні розв'язки. Має перспективу і використання спеціальних пробних (базисних) функцій. Сучасний розвиток методу Гальоркіна реалізується у вигляді розривного методу Гальоркіна (метод Гальоркіна із розривними(локальними) базисними функціями).

Питання для самоконтролю.

- 1.Поняття про обумовленість матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
- 2.Базисні функції в МСЕ – лінійні, квадратичні та кубічні форми.
- 3.МСЕ в задачі для нестационарної теплопередачі.
- 4.МСЕ для рівняння Бюргерса.

---

## Задачі та вправи

Учбовий план передбачає виконання двох розрахункових робіт. Витрати часу на їх виконання складають 48 години за рахунок обсягу самостійної роботи. Результати виконання робіт студент подає у вигляді пояснювальних записок обсягом 15...20 сторінок.

Розрахункові роботи мають на меті закріпити відповідні теоретичні знання і одержати необхідні навички практичних розрахунків з дисципліни. З огляду на майбутній фах темою розрахункових робіт є: використання в першій роботі простої моделі для процесу теплопровідності та дослідження його особливостей за допомогою різницевих схем. В другій роботі вивчається вивчаються основні властивості взаємного впливу конвективної та дифузійної складової на процес тепломасопереносу. Звертається увага на якість чисельного методу для дослідження теплових процесів.

Роботу виконують протягом четвертого-чотирнадцятого тижня відповідного семестру; на п'ятнадцятий тиждень призначено її прийом. Бали за розрахункову роботу нараховують згідно якості та своєчасності її виконання.

Практична частина курсу повинна ознайомити студентів з деякими основами побудови математичних моделей елементарних задач механіки суцільного середовища. Із використанням чисельних методів дослідити розв'язки таких задач за допомогою обчислювальної техніки. Для реалізації цієї мети наведені приклади із використанням різних програмних пакетів та мов програмування.

### **Обумовленість матриць. Приклад реалізації.**

Важливою характеристикою матриць є її обумовленість. Вона показує більше чи значення елементів головної діагоналі, ніж сума інших елементів рядка. Якщо це виконується для всіх рядків, тоді говорять, що матриця

добре обумовлена, якщо ж умова часто порушується, то матриця обумовлена погано.

### Метод прогонки

Для рішення систем  $Ax = b$  з тридіагональною матрицею найбільш часто використовують *метод прогонки*, який є адаптацією метода Гауса цього випадку.

Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} d_1x_1 + e_1x_2 + 0\dots + 0 = b_1 \\ c_2x_1 + d_2x_2 + e_2x_3 + 0\dots + 0 = b_2 \\ 0 + c_3x_2 + d_3x_3 + e_3x_4 + 0\dots + 0 = b_3 \\ \dots \\ 0 + \dots + 0 + c_{n-1}x_{n-2} + d_{n-1}x_{n-1} + e_{n-1}x_n = b_{n-1} \\ 0 + \dots + 0 + c_nx_{n-1} + d_nx_n = b_n \end{cases}$$

у матричному вигляді:

$$Ax = b$$

де

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & e_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & d_{n-1} & e_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Запишемо формули методу прогонки в порядку їх застосування.

1.Прямий хід методу прогонки (обчислення допоміжних величин):

$$\alpha_2 = \frac{e_1}{d_1}, \quad \beta_2 = \frac{b_1}{d_1},$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{-e_i}{d_i + c_i\alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{-c_i\beta_i + b_i}{d_i + c_i\alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

2.Зворотній хід метода прогонки (знаходження рішення):

$$x_n = \frac{-c_n \beta_n + b_n}{d_n + c_n \alpha_n}, \quad x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

### Постанова задачі

Знайти розподіл температури в стрижні довжиною  $l$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо температура лівого кінця підтримується рівною нулю, а правий кінець теплоізолюваний. Початкова температура стрижня дорівнює  $100$ . Розмірності фізичних величин опускаємо.

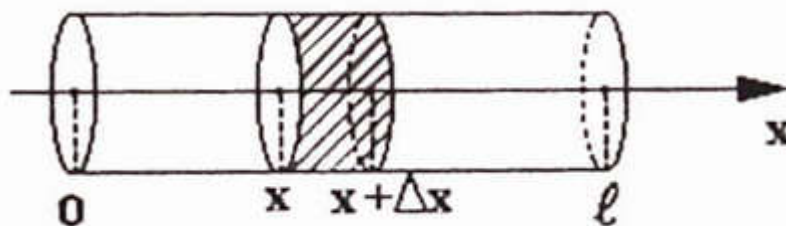
### Побудова математичної моделі

При побудові математичної моделі поширення тепла в стрижні зробимо наступні припущення:

- 1) стержень зроблений з однорідного провідного матеріалу з щільністю  $\rho$ ;
- 2) бокова поверхня стержня теплоізолювана, тобто тепло може поширюватися тільки уздовж осі  $Ox$ ;
- 3) стержень тонкий – це значить, що температура у всіх точках будь-якого поперечного перерізу стержня одна й та сама.

Розглянемо частину стержня на відрізку  $[x, x + \Delta x]$  (див. Мал. 1) і скористаємося законом збереження кількості тепла:

Загальна кількість тепла на відрізку  $[x, x + \Delta x]$  = повній кількості тепла, яка пройшла через границі + загальна кількість тепла, утвореного внутрішніми джерелами.



Мал.1

Загальна кількість тепла, яку необхідно підвести до ділянки стрижня, щоб підвищити її температуру на  $\Delta U = U(x, t + \Delta t) - U(x, t)$ , обчислюється за формулою:  $\Delta Q = C\rho S\Delta x(U(x, t + \Delta t) - U(x, t))$ , де  $C$  – питома теплоємність матеріалу (кількості тепла, яке потрібно повідомити 1 кг речовини за час  $\Delta t$ , щоб підняти його температуру на  $1^\circ$ ),  $S$  – площа поперечного перерізу.

Кількість тепла, що пройшло через лівий кінець ділянки стрижня за час  $\Delta t$  (тепловий потік) обчислюється за формулою:  $Q_1 = -kS \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Delta t$ , де  $k$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу (кількості тепла, що протікає в секунду через стрижень одиничної довжини і одиничної площі поперечного перерізу при різниці температур на протилежних кінцях, що дорівнює  $1^\circ$ ).

Аналогічно, тепловий потік через правий кінець ділянки стрижня обчислюється за формулою:  $Q_2 = -kS \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} \Delta t$ .

Якщо припустити, що внутрішніх джерел тепла в стрижні немає, та скористатися законом збереження тепла, отримаємо:

$$0 = \Delta Q + (Q_2 - Q_1) = C\rho S\Delta x(U(x, t + \Delta t) - U(x, t)) - kS \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} \Delta t + kS \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Delta t$$

або

$$C\rho S\Delta x(U(x, t + \Delta t) - U(x, t)) - kS \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} \Delta t + kS \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Delta t = 0.$$

Якщо цю рівність поділити на  $S\Delta x\Delta t$  і спрямувати  $\Delta x$  і  $\Delta t$  до нуля, то матимемо:

$$C\rho \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}.$$

Тоді рівняння теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2},$$

---

де  $a = \sqrt{\frac{k}{C\rho}}$  – коефіцієнт теплопровідності.

Граничні умови.

$U|_{x=0} = 0, U_x|_{x=l} = 0$ . Такі умови виникають в наступній задачі.

На правому кінці виконується умова першого роду – це означає, що на кінці стержня задана температура. Якщо вона не змінюється з часом, то  $g_1(t) \equiv T_1$ , де  $T_1$  – постійна. Якщо кінець підтримується весь час при нульовій температурі, то  $T_1 = 0$  і умова буде однорідною. На лівому кінці виконується гранична умова другого роду воно визначає тепловий потік на кінцях стержня. Зокрема, якщо  $g_2(t) = 0$ , то умова стає однорідною. Фізично вони означають, що через кінець не відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем (ці умови ще називають умовами теплоізоляції).

В результаті отримуємо початково-крайову задачу, яка має єдиний розв'язок.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \\ \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ \frac{du}{dx}(l, t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Чисельні методи розв'язання задачі

### Метод поділу змінної

#### Однорідна крайова задача

Як прийнято в методі поділу змінних, почнемо з розгляду найпростішого допоміжного завдання:

знайти відмінне від тотожного нуля рішення задачі

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0 \end{aligned}$$

Будемо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Підставимо цей вираз у рівняння, та отримаємо після перетворень наступне

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = const,$$

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(l) = 0,$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0.$$

Рішенням задачі для функції  $X(x)$  є власні функції  $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ ,

які задовольняють власним значенням  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ,

а відповідні рішення рівняння для  $T$  – функції  $T_n = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}$ .

Тоді функція  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-a^2 \lambda_n t}$  – є частковим розв'язком задачі.

Функція  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-a^2 \lambda_n t}$ , вочевидь, є рішенням рівняння теплопровідності і задовольняє нульовим граничним умовам:

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(0) e^{-a^2 \lambda_n t} = 0, u(l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi) e^{-a^2 \lambda_n t} = 0.$$

Розглянемо тепер першу крайову задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t \geq 0, u(x, 0) = \varphi(x), u(0, t) = 0, u(l, t) = 0.$$

Її розв'язок будемо шукати у вигляді  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-a^2 \lambda_n t}$ , а невідомі коефіцієнти  $C_n$  визначимо з умови

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-a^2 \lambda_n \cdot 0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Зрозуміло, що невідомі коефіцієнти  $C_n$  – коефіцієнти Фур'є функції  $\varphi(x)$ , розраховуються за по формулою

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$



---

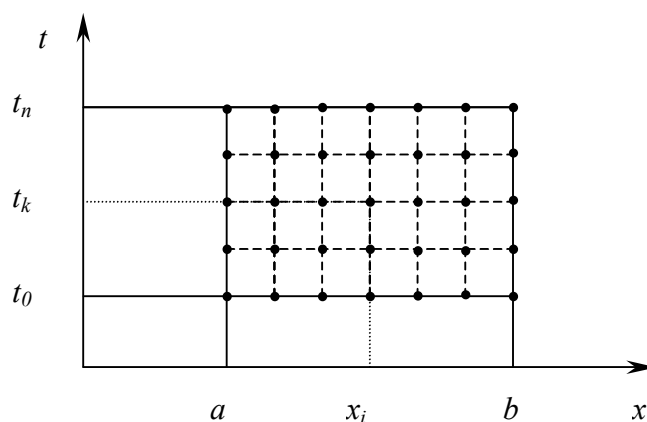
## Різницєва схема вирішення задачі

Знайдемо рішення  $u(x, t)$  рівняння

$$u_t = u_{xx},$$

на відрізку  $[a, b]$  протягом проміжку часу  $[t_0, t_n]$  при наступних початкових та крайових умовах. Відомо, що в початковий момент часу  $t = 0$  задане розподілення функції  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

Виберемо систему координат так, щоб в ній змінна  $x$  змінювалася в продовж вісі абсцис, а змінна  $t$  – вздовж вісі ординат (Мал. 1).



Мал. 1

Для вирішення рівняння (1.1) кінцево-різницеvim методом побудуємо кінцево-різницєву сітку, що покриває прямокутник  $[a, b] \cup [t_0, t_n]$ . Координати вузлів сітки визначаються за формулами  $x_i = a + i \cdot h$ ,  $t_k = t_0 + k \cdot \tau$ , де  $h$  – крок по простору,  $h = (b - a) / N$ ;  $\tau$  – крок по часу,  $\tau = (t_n - t_0) / M$ . Тут  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq k \leq M$ .

Запишемо кінцево-різницєву схему для рівняння, використовуючи для похідних по часу та простору наступний шаблон (Мал. 2):

$$u_t \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}, \quad u_{xx} \approx \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2},$$

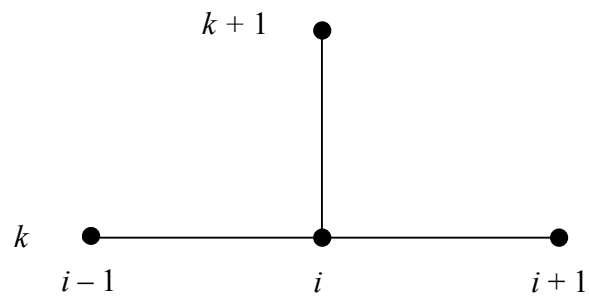
тоді

$$u_i^{k+1} = Cu_{i-1}^k + (1 - 2C)u_i^k + Cu_{i+1}^k,$$

де  $C = \tau / h^2$ ,  $1 \leq i \leq N - 1$ .

---

Тут  $u_i^k$  – сіткова функція, що відповідає значенню неперервної функції  $u(x, t)$  в точці  $x = x_i, t = t_k$ .



Мал. 2

Із різницевої схеми видно, що для отримання рішення на верхньому  $k+1$  часовому шарі в  $i$ -ом вузлі необхідно знати три значення функції  $u(x, t)$  на нижньому  $k$ -ом часовому шарі, а саме, значення у вузлах  $i-1, i, i+1$ .

Наведена явна різницева схема має перший порядок апроксимації по часу та другий порядок по простору  $O(\tau, h^2)$ . Умова стійкості різницевої

схеми буде мати вигляд:  $C \leq \frac{1}{2 + h^2}$ .

### Рішення в середовищі MathCad

Mathcad - [teplopr\_1]

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Символьные операции Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

Мой веб-узел Go

$N := 20$     $M := 25$     $L := 2.0$     $T := 0.1$     $a := 1$   
 $h_0(x) := \exp[-20(x - 0.5)^2] - \exp[-20(x + 0.5)^2] - \exp[-20(x - 1.5)^2]$   
 $\text{psi1}(t) := 0$   
 $\text{psi2}(t) := 0$   
 $h := \frac{L}{N}$     $h = 0.1$     $\tau := \frac{T}{M}$     $\tau = 4 \times 10^{-3}$   
 $i := 0..N$     $x_i := i \cdot h$     $u_i := h_0(x_i)$   
 $i =$     $x_i =$     $u_i =$     $tn := 0$

0	0	0
1	0.1	0.04
2	0.2	0.165
3	0.3	0.449
4	0.4	0.819
5	0.5	1
6	0.6	0.819
7	0.7	0.449
8	0.8	0.165
9	0.9	0.04
10	1	0
11	1.1	-0.04
12	1.2	-0.165
13	1.3	-0.449

$MYTN :=$  for  $k \in 1..M$   
 $tn \leftarrow tn + \tau$   
for  $j \in 1..N - 1$   
 $u_j \leftarrow u_j + a \cdot \frac{\tau \cdot (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})}{h^2}$   
 $u_0 \leftarrow \text{psi1}(tn)$   
 $u_N \leftarrow \text{psi2}(tn)$   
for  $p \in 0..N$   
 $u_p \leftarrow u_p$

$a \cdot \frac{\tau}{h^2} = 0.4$

0	0
1	0.08
2	0.152
3	0.209
4	0.246
5	0.258
6	0.246
7	0.209
8	0.152
9	0.08
10	-2.654 · 10 <sup>-5</sup>
11	-0.08

Нажмите F1, чтобы открыть справку. АВТО Страница 1

---

### РГЗ

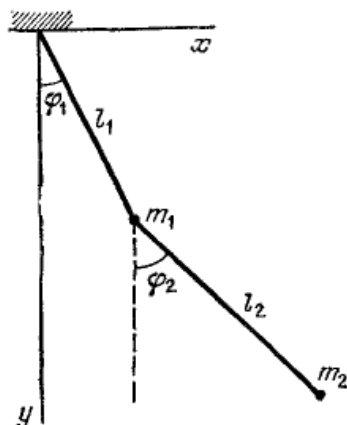
1. Знайти відхилення струни довжиною  $2$  від стану рівноваги в довільний момент часу  $T$ . Кінці струни підпорядковані умовам вільних кінців. В початковий момент часу відхилення струни задано функцією  $\varphi(x)$ . А початкова швидкість  $\psi(x)$ .
2. Знайти відхилення струни довжиною  $2$  від стану рівноваги в довільний момент часу  $T$ . Правий кінець струни підпорядкований умові вільного кінця, а лівий жорстко закріплений. В початковий момент часу відхилення струни задано функцією  $\varphi(x)$ . А початкова швидкість  $\psi(x)$ .
3. Знайти відхилення струни довжиною  $2$  від стану рівноваги в довільний момент часу. Правий кінець струни жорстко закріплений, а лівий підпорядкований умові вільного кінця. В початковий момент часу відхилення струни задано функцією  $\varphi(x)$ . А початкова швидкість  $\psi(x)$ .
4. Знайти відхилення струни довжиною  $2$  від стану рівноваги в довільний момент часу  $T$ . Правий і лівий кінці струни жорстко закріплені. В початковий момент часу відхилення струни задано функцією  $\varphi(x)$ . А початкова швидкість  $\psi(x)$ .
5. Знайти розподіл температури в стрижні довжиною  $2$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо температура правого кінця підтримується рівною  $0$ , а лівий кінець теплоізолюваний. Початкова температура рівна  $\varphi(x)$ . Розмірності фізичних величин опускаємо.
6. Знайти розподілення температури в стрижні довжиною  $2$  з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо температура правого і лівого кінця підтримується рівною нулю, а початкова температура рівна  $\varphi(x)$ . Розмірності фізичних величин опускаємо.

- 
7. Знайти розподілення температури в стрижні довжиною  $2$  з теплоізолюваної бічною поверхнею, якщо правий і лівий кінці теплоізолювані, а початкова температура дорівнює  $\varphi(x)$ . Розмірність фізичних величин опускаємо.
8. Знайти відхилення маятника довжиною  $2$  від стану рівноваги в довільний момент часу  $T$ . В початковий момент часу відхилення маятника задано функцією  $\varphi(x)$ , а початкову швидкість функцією  $\psi(x)$ .

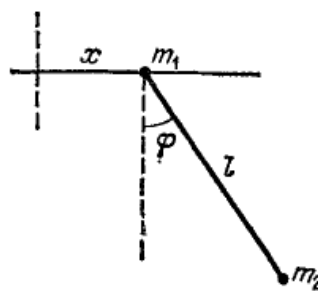
## Задачі.

Побудувати функції Лагранжа для наступних систем, які знаходяться в однорідному полі тяжіння (прискорення сили тяжіння  $g$ )

1. Подвійний плоский маятник (Мал.1)



Мал.1



Мал.2

Відповідь. 
$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 + m_2 g l_2 \cos \phi_2$$

2. Плоский маятник із масою  $m_2$ , точка закріплення якого (із масою  $m_1$ ) може рухатись по горизонтальній прямій (Мал.2)

Відповідь 
$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \phi) + m_2 g l \cos \phi$$

3. Знайти чисельний розв'язок задачі в області  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 1]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$$

де  $f(x, t) = x(1-x)t$ ,  $u(x, 0) = \begin{cases} \sin^3(2\pi x), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$ , умова на лівій границі  $u(0, t) = 0$ .

Для побудови чисельного розв'язку виберемо різницеву схему з різницями «проти потоку»

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{1}{2} \frac{\tau}{h} [u_m^n - u_{m-1}^n], \quad m = 1, M$$

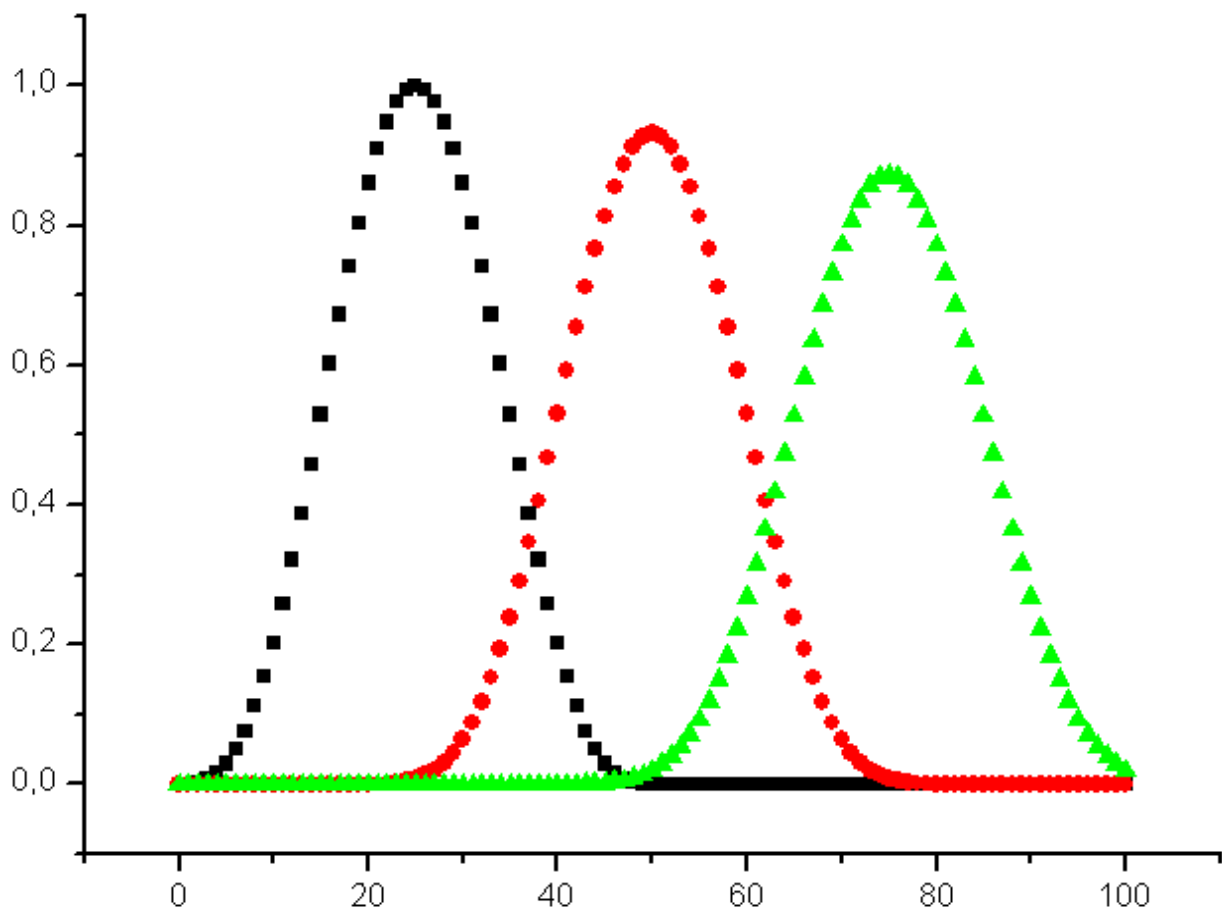
$$u_0^n = u(0, t^n) = 0$$

на сітці  $M \times N = 101 \times 101$ . Тоді  $h = 1/100, \tau = 1/100$ . Число Куранта  $\nu = \frac{\tau}{2h} = \frac{1}{2} < 1$ .

Апроксимація і стійкість схеми призводить до збіжності результатів дискретної моделі. Тестовий розрахунок провести для  $f(x, t) = 0$ . Побудувати графіки розподілу по координати в різні моменти часу і дати пояснення.

Результати.

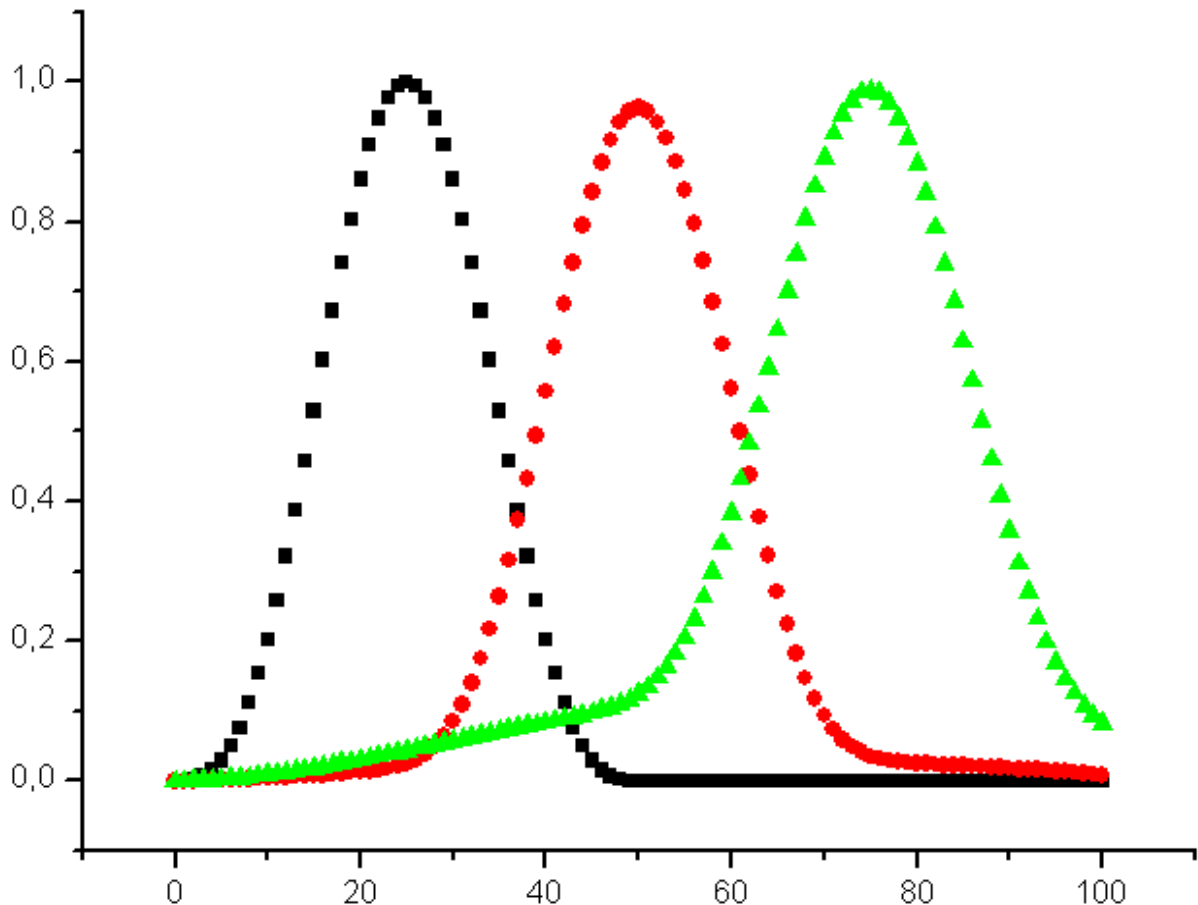
Очевидно, що точний розв'язок диференціального рівняння має вигляд зсуву початкових даних вправо по вісі  $Ox$  із швидкістю  $1/2$ . Крива і чорних елементів - початкові дані, з червоних - розв'язок при  $t = 0.5$ , з зелених - при  $t = 1$ .



Мал.3

В дійсності (Мал.3) бачимо деяке зменшення амплітуди, що пов'язано із похибкою заміни диференціалів на скінчені різниці. Умовна стійкість різницевої схеми дозволяє розраховувати, що така похибка буде зменшуватися при подрібненні сітки.

Чисельний розв'язок при заданій неоднорідності  $f(x,t) = x(1-x)t$  має вигляд, як на малюнку нижче (Мал.4)



Мал.4

4. По наведеному в лекціях алгоритму дослідити стійкість різницевих схем

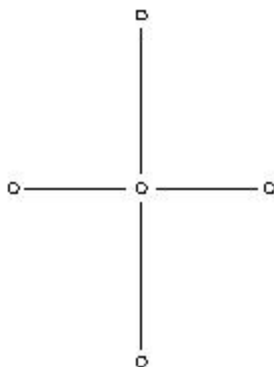
$$\frac{\hat{v}-v}{\tau} + \frac{v-v(-1)}{h} = 0, \quad \frac{\hat{v}-v}{\tau} + \frac{v(+1)-v}{h} = 0, \quad \frac{\hat{v}-\frac{v(+1)+v(-1)}{2}}{\tau} - \frac{v(+1)-v}{h} = 0.$$



## 5. Дослідити порядок апроксимації та стійкість розв'язків схеми Річардсона

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{a}{h^2} \delta_x^+ \delta_x^- u^n$$

з шаблоном



для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

**Розв'язок.** З урахуванням порядку апроксимації різницевиими виразами похідних в наведеному диференціальному рівнянні та в силу симетрії шаблону різницевої схеми легко показати, що порядок апроксимації схеми Річардсона є  $O(\tau^2, h^2)$ .

Підстановка гармоніки у вигляді  $u_m^n = \lambda^n e^{iam}$  в різницеві рівняння дає рівняння для визначення спектру оператора пошарового переходу

$$\lambda^2 + \frac{8a\tau}{h^2} \lambda \sin^2 \frac{\alpha h}{2} - 1 = 0.$$

Очевидно, один із коренів при довільному  $\alpha \in [0, 2\pi)$  по модулю більше одиниці, а значить схема є безумовно нестійкою.

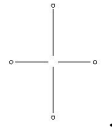
Для побудови стійкої схеми пропонується замінити в виразі

$$\frac{\delta_x^+ \delta_x^- u^n}{h^2} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

величину  $u_m^n$  на  $\frac{u^{n-1} + u^{n+1}}{2}$ . Отримаємо схему Франкела-Дюффорта

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{a}{h^2} \left[ u_{m-1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m+1}^n \right]$$

із шаблоном



Схему можливо розв'язати явно відносно  $u_m^{n+1}$  і вона є безумовно стійкою. Така схема має лише умовну апроксимацію  $O(\tau^2, h^2, \tau^2/h^2)$ , тому збіжність можлива лише при умові  $\tau/h \rightarrow 0$ .

6. Дослідити апроксимаційні властивості та умови стійкості розв'язку різницевої схеми Саульєва бігучого алгоритму

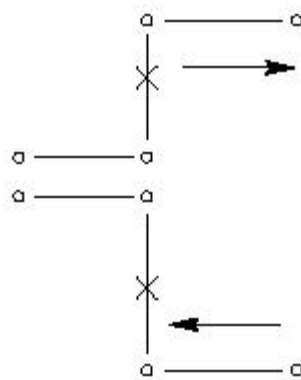
$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} = a \frac{u_{m-1}^n - (u_m^n + u_m^{n-1}) - u_{m+1}^n}{h^2}$$

(парні часові кроки, обчислення справа наліво),

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m-1}^n - (u_m^n + u_m^{n+1}) + u_{m+1}^n}{h^2}$$

(не парні часові кроки, обчислення зліва направо)

із шаблоном такого виду



**Розв'язок.** Шляхом стандартної підстановки гармоніки  $u_m^n = \lambda^n e^{iam}$  у спектральну умову стійкості Неймана легко перевірити, що наведена схема є безумовно стійка. Нев'язка кожного із різницевих рівнянь на розв'язках диференційної задачі відносно точок, які помічені хрестиком на шаблоні,

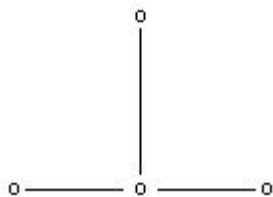
має порядок  $O(\tau^2, h^2, \tau, h, \tau/h)$ . Після складання цих неув'язок маємо порядок апроксимації схеми  $O(\tau^2, h^2, \tau^2/h^2)$ , аналогічний як в схемі Франкела-Дюфорта.

Схема Саульєва надає можливість її суттєво покращити. Досить лише обчислювати значення функції при переході від одного часового шару на наступний два рази - бігучим алгоритмом зліва направо і бігучим алгоритмом справа наліво – і результати усереднити. Властивості такого методу розрахунків пропонується виконати самостійно.

7. Дослідити апроксимаційні властивості і стійкість розв'язків схеми Алена-Чена

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^n}{h^2}$$

на шаблоні

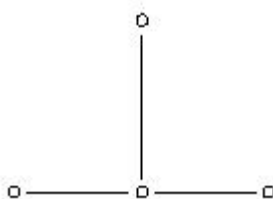


**Відповідь.** Незважаючи на те, що в праву частину входить значення із верхнього часового шару  $u_m^{n+1}$  різницеве рівняння явно розв'язується відносно  $u_m^{n+1}$ . Схема є безумовно стійка і умовно апроксимуючою  $O(\tau, h^2, \tau/h^2)$ .

8. З'ясувати наявність монотонності у різницевої схеми

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} \delta_x^+ \delta_x^- u^n$$

із шаблоном



Монотонні різницеві схеми (по Фрідріхсу) це такі схеми, які при запису у вигляді розв'язку відносно  $u_m^{n+1}$ , на всіх точках шаблону мають не від'ємні коефіцієнти. (Самостійно, довести, що із монотонності різницевої схеми слідує стійкість її розв'язків.)

**Розв'язок.** Перепишемо запропоновану різницеву схему у стандартному вигляді

$$u_m^{n+1} = \sum_{k=-1}^1 \alpha_k u_{m+k},$$

де

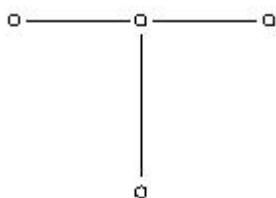
$$\alpha_0 = 1 - \frac{2a\tau}{h^2}, \alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{a\tau}{h^2},$$

тому для монотонності схеми необхідно виконання умов  $\alpha_k \geq 0, k = -1, 0, 1$ .

Звідки слідує, що умова монотонності має вигляд

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a}.$$

9. Відмітимо, що неявна чотирьохточкова схема є монотонною, а схема Кранка-Ніколсон – умовно монотонна



Дослідження монотонності параметричної двохшарової схеми, записаної у вигляді

$$u_m^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_{m+k},$$

дає (викладки опущені по причині їх громіздкості)

$$u_m^{n+1} = \alpha_0 u_m + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (u_{m-k} + u_{m+k}),$$

$$\alpha_0 = 1 - \frac{4a\tau (h + \sqrt{h^2 + 4\xi a\tau})^{-1}}{\sqrt{h^2 + 4\xi a\tau}},$$

$$\alpha_1 = \frac{4a\tau}{\sqrt{h^2 + 4\xi a\tau}} (h + \sqrt{h^2 + 4\xi a\tau})^{-2},$$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} \cdot 4\xi a\tau (h + \sqrt{h^2 + 4\xi a\tau})^{-2}, k \geq 2$$

Коефіцієнти  $\alpha_k$  при  $k \geq 1$  невід'ємні, коефіцієнт  $\alpha_0$  невід'ємний при умові

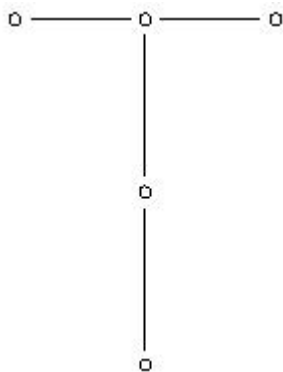
$$\tau \leq \frac{(2-\xi)h^2}{4a(1-\xi)^2}.$$

Звідки видно, що за виключенням неявної чотириточкової схеми із  $\xi = 1$ , всі неявні схеми є монотонними лише при умові  $\tau \sim h^2$ .

10. Дослідити апроксимацію і стійкість трьохшарової різницевої схеми

$$\frac{1,5(u_m^{n+1} - u_m^n)}{\tau} + \frac{0,5(u_m^n - u_m^{n-1})}{h} = \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} u_m^{n+1}$$

із шаблоном



**Відповідь.** Шляхом розгортання в ряд Тейлора для визначення порядку апроксимації даної різницевої схеми знайдемо що, нев'язка має порядок  $O(\tau^2, h^2)$ . Схема безумовно стійка, та монотонна.

11. Показати, що розв'язок задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (a u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x}), (\alpha > 0),$$

$$u(+\infty, t) = 0, \quad u(0, t) = c t^{1/\alpha}, \quad u(x, 0) = 0$$

а) представляє бігучу хвилю, яка розповсюджується зі скінченною швидкістю і при  $\alpha \geq 0$  на фронті хвилі розв'язок має розрив першої похідної (розв'язок є узагальненим);

б) запропонувати різницевий метод для чисельного дослідження її розв'язку;

в) порівняти розв'язок з розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\alpha u^{\alpha-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \text{ (продиференційована права частина)}$$

при аналогічних додаткових умовах.

**Розв'язок.** Побудуємо розв'язок задачі в змінних бігучої хвилі

$$u = u(\xi) = u(x - vt), \quad (x - vt \geq 0), \quad u \equiv 0.$$

Підставимо його в вихідне рівняння і отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$-vu'_\xi = a(u^\alpha u'_\xi)'_\xi.$$

Проінтегруємо його по  $\xi$ , тоді

$$C - vu = au^\alpha u'_\xi,$$

де  $C$  - константа інтегрування. Вираз, який стоїть в правій частині є потік величини  $u$ , а саме рівняння є деяким законом збереження. В точці  $u = 0$ , в силу неперервності потоку зліва і справа від фронту, диференціальне рівняння повинно виконуватися, тому  $C = 0$ .

Оскільки нас цікавлять тільки нетривіальні розв'язки вихідного рівняння, то  $u \neq 0$  і ліву та праву частину можливо поділити на  $u$ . Отримуємо

$$-v = au^{\alpha-1} u'_\xi = \frac{a}{\alpha} (u^\alpha)'_\xi,$$

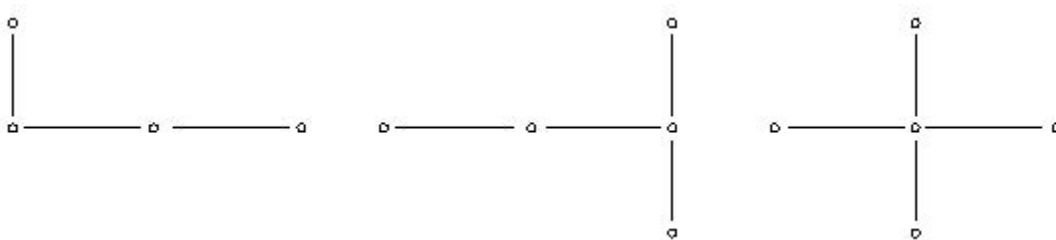
звідки  $u = \left[ \frac{\alpha v}{a} (x - vt) \right]^{1/\alpha}$ . Із крайових умов при  $x = 0$  отримаємо  $v = ac^\alpha / \alpha$ .

Наявність розривів у похідній цієї функції легко перевірити безпосередньо. Вихідне рівняння записано у дивергентній формі і відповідна різницева схема для нього називається консервативною.

Існують і інші підходи для дослідження задачі, що розглядається. Також досліджено і більш загальне рівняння, коли коефіцієнт теплопровідності  $K(u)$  задовольняє рівнянню

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{K(\eta)}{\eta} d\eta; \Phi(0) = 0; \Phi(1) < \infty.$$

12. Використовуючи умову стійкості Курана-Фрідрікса-Леві (КФЛ) визначити які із різницевих схем для рівняння теплопровідності, шаблони яких наведені нижче, не будуть стійкими



13. При якому співвідношенні кроків  $\tau$  і  $h$  явна різницєва схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

для рівняння теплопровідності має порядок апроксимації  $O(\tau^2, h^4)$ .

14. Показати, що параметризована різницєва схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \xi \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \xi) \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2},$$

при  $\xi = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$  має порядок апроксимації  $O(\tau^2, h^4)$ .

15. Для апроксимації рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

використана різницєва схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left( k_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} \right),$$

де  $k_{m+1/2}$  знаходять так

$$\text{a) } k_{m+1/2} = \frac{a}{2} ((u_m^n)^\alpha + (u_{m+1}^n)^\alpha);$$

$$\text{d) } k_{m+1/2} = a \left( \frac{u_m^n + u_{m+1}^n}{2} \right)^\alpha;$$

$$\text{c) } k_{m+1/2} = a \left( \frac{2u_m^n u_{m+1}^n}{u_m^n + u_{m+1}^n} \right)^\alpha;$$

$$\text{d) } k_{m+1/2} = a \frac{2(u_m^n)^\alpha (u_{m+1}^n)^\alpha}{(u_m^n)^\alpha + (u_{m+1}^n)^\alpha}.$$

Вирази а)...д) деякі апроксимації  $au^\alpha$  взяті на попередньому часовому шарі між вузлами  $u_m$ ,  $u_{m+1}$ . Реалізувати наведені схеми на ЕОМ. Порівняти із точними розв'язками, які наведено в попередніх задачах. Дослідити причину відставання фронту хвилі в чисельному розв'язку в порівнянні із точним при великих числах Куранта. Якому із виразів для  $k_{m+1/2}$  надати перевагу? Біля фронту хвилі середні гармонічні с) та d) не працюють. Пояснити причину.

16. Режим із загостренням. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au^\beta, a > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Побудувати чисельний розв'язок наведеного рівняння у випадках

а)  $\beta = \alpha + 1$ , б)  $\beta < \alpha + 1$ , в)  $\beta > \alpha + 1$  та при додаткових умовах

$$u(-\infty, t) = 0, u(+\infty, t) = 0, u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Яка якісна різниця випадків а) (так званий режим із S-загостренням, в) NS-режим, с) LS-режим. У випадку ф) перевірити справедливість формули напівширини області локалізації тепла  $l = \pi \sqrt{\frac{\alpha + 1}{a\alpha^2}}$ .

З'ясувати особливості залежності розв'язку від амплітуди початкового збурення.



Автомодельний розв'язок та автомодельні змінні. Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = g(t)f(\xi),$$

де  $\xi = x/\varphi(t)$ .

(Відповідь  $g(t) = (1-t/t_f)^{-1/2}$ ,  $\varphi(t) = (1-t/t_f)^{\frac{\beta-(\alpha+1)}{2(\beta-1)}}$ ,  $t_f$  - додатній параметр).

Знайти диференціальне рівняння для функції  $f(\xi)$ . Розв'язати чисельно отримане рівняння для  $f(\xi)$  при додаткових умовах

$$f'(\xi=0) = 0; f(\xi=l) = 0, l < +\infty \text{ та } f^\alpha f'_\xi|_{\xi=l} = 0.$$

Задаючи  $f(\xi)$  при  $t=0$  в якості початкових умов для вихідного рівняння в частинних похідних, порівняти поведінку чисельного розв'язку із автомодельним. Враховуючи, що відомі  $g(t), \varphi(t)$  та  $f(\xi)$ , то знайдено  $u(x,t) \forall t \ 0 < t < t_f$ . Проаналізувати поведінку чисельного розв'язку при  $t \rightarrow t_f$ .

17. Тепловий кристал. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial}{\partial x} u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \frac{\partial}{\partial y} u^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + au^\beta.$$

Дослідити якісно властивості розв'язків такого рівняння. У випадку коли  $\alpha = \beta - 1 > 0, k_1 \neq k_2$  розглянути задачу із такими граничними умовами

$$u(t, x, 0) = A_0(1-t)^n (1-\lambda_1 x)^{2/\alpha} \text{ при } x \leq 1/\lambda_1,$$

$$u(t, 0, y) = A_1(1-t)^n (1-\lambda_2 y)^{2/\alpha}, \text{ при } y \leq 1/\lambda_2,$$

інакше 0.

Тут  $n$  дійсне число,  $n < 0$ . Розглянути випадки

$$n = -1/\alpha, \quad n < -1/\alpha, \quad -1/\alpha < n < 0.$$

Розв'язати задачу чисельним методом і порівняти результат із аналітичним.

18. Зупинка теплової хвилі.

Модифікуємо рівняння із п.16.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au^\beta - \varepsilon u$$

Покладемо  $\varepsilon = 0,1$ . Виконати пункти задачі 16. Проаналізувати вплив лінійного стоку на розв'язок. У випадку  $\alpha = \beta - 1$  знайти автотодельний розв'язок.

Вказівка. Розглянути послідовність замінів

$$v = ue^{\varepsilon t}, \frac{\partial v}{\partial t} = e^{\varepsilon t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \right), \text{ та } d\tau = e^{\alpha \varepsilon t} dt.$$

Навести вигляд диференціального рівняння цієї задачі в змінних  $v, x, t$ .

Розглянути задачу формування теплового кристалу для рівняння задачі.

### 19. Нестійкість Тюрінга.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au + bv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cu + dv \end{cases}$$

і додаткові умови

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} = 0.$$

Прийmemo  $a + d < 0, ad - bc > 0$ . При такій умові особлива точка  $(0, 0)$  системи

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv, \\ \dot{v} = cu + dv \end{cases}$$

є стійкою до збурень. Будемо вважати що  $a > 0$ .

Знайти умову, коли внесення в систему дифузійних збурень приведе до втрати стійкості однорідного стаціонарного розв'язку.

Вказівка.

1 Розглянути перетворення Фур'є по просторовій змінній. Дослідити на стійкість особливі точки отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь.

2 Підібрати коефіцієнти  $a, b, c, d$  та  $D_1, D_2$ , які задовольняють умовам, знайденим в 1, отримати при чисельному дослідженні розв'язки системи структури Тюрінга. Під структурою Тюрінга мають на увазі просторово-неоднорідний розв'язок із хвильовим числом  $k$  таким, що

$$\operatorname{Re} \lambda(k^2) = 0; \frac{\partial(\operatorname{Re} \lambda)}{\partial(k^2)} = 0,$$

при запису розв'язку у вигляді

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t - ikx}.$$

У випадку лінійної задачі такі структури будуть зростати по амплітуді при  $t \rightarrow \infty$ . Для нелінійної задачі (наступна задача) необмежене зростання стає неможливим, структура стабілізується за рахунок нелінійності.

20. Брюселятор із розподіленими параметрами.

Розглянемо систему типу реакція-дифузія, де для моделювання хімічних реакцій використовується система «брюселятор». В літературі така постановка задачі має назву «брюселятор із розподіленими параметрами» і урахуванням дифузії, записується у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A - (B+1)u + u^2v + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = Bu - u^2v + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = A(1 + \varepsilon \cos \omega x), v(x, 0) = B/A.$$

Нехай  $B > (1 + A\sqrt{D_1/D_2})^2$ ,  $D_1 < D_2$ . Розглянути утворення структур Тюрінга у випадках  $\mu = A\sqrt{D_1/D_2}$ ,  $\mu < 0.207$ ,  $0.207 < \mu < 2.418$ ,  $\mu > 2.418$ .

Навести умови користування явною різницевою схемою. Коли необхідно застосовувати неявну схему.

Нехай тепер  $D_1 > D_2$ ,  $A > 1$ . Які зміни відбувається у системі? Обґрунтувати необхідність використання неявної схеми. Навести приклад схеми розщеплення по фізичним процесам для вирішення такої задачі.

## 21. Схема "Класики"

Для двомірного рівняння теплопровідності використовується схема "класики". Як і в схемі Саульєва, розрахунок виконується в два етапи

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^n}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^n - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^n}{h_x^2} + \frac{u_{lm-1}^n - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^n}{h_y^2}$$

у випадку, якщо  $l + m + n$  парне,

$$\frac{u_{lm}^{n+1} - u_{lm}^n}{\tau} = \frac{u_{l-1m}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{l+1m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{lm-1}^{n+1} - 2u_{lm}^{n+1} + u_{lm+1}^{n+1}}{h_y^2}$$

у випадку, якщо  $l + m + n$  - непарне.

До яких схем належить наведена схема. Дослідити її на апроксимацію та стійкість. Пояснити необхідність "перестрибування" – зміна порядку обходу вузлів при переході з шару на шар по часу. Застосувати дану схему до розрахунку попередньої задачі.

---

## ЛІТЕРАТУРА

1. Атавин А.А., Гладышев М.Т., Шугрин С.М. О разрывных течениях в открытых руслах. – В кн. ДСС вып.22, Новосибирск, 1975. – С.37–4.
2. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. Т.1 Основы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ, 1988.– 368с.
3. Базаров И.П. Термодинамика/ М.: Физматлит, 1961. – 292с.
4. Ванін В.А., Миргород Ю.І. Різницеві схеми для одновимірних нестационарних рівнянь газової динаміки. Навчальний посібник.- Харків: Харківський інститут ВПС, 2002. – 46с.
5. Ванін В.А., Геворкян Ю.Л., Григор'єв О.Л. Элементы векторного анализа. Харків. Підручник НТУ “ХПІ”, 2016. – 460с.
6. Васильев О.Ф., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Неизотермическое течение газа в трубах, Новосибирск: Наука, 1978.– 126с.
7. Васильев О.Ф., Гладышев М.Т. О расчете непрерывных волн в открытых руслах. – Изв. АН СССР, МЖГ,1966, №6.–С.184–190.
8. Гинзбург И.П. Прикладная гидрогазодинамика, ЛГУ–И 1958–38с.
9. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004.–572с.
10. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процес сов. Физические основы/ М.; Наука, 1978.–128с.
11. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики/Новосибирск: Сибирское отделение «Наука», 1981. – 304с.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. – 847 с.
13. Лурье М.В., Гольдберг В.И. Расчет гидродинамических процессов движения в системах контейнерного пневмотранспорта, Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт,1971, №4, С.9–104.
14. Марчук Г.И. Методы расщепления., М.: Наука, 1988. – 264с.

- 
15. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений/ М.: Наука, 1978.–668с.
  16. Работнов Ю.И. Сопротивление материалов, М.: Физматгиз, 1962.-455с.
  17. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Наука, 1977, – 440 стр.
  18. Стокер Дж.Дж. Волны на воде, М.: ИЛ,1959.–617с.
  19. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М. Мир,1971. –378с.
  20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики/ М.: "Наука", 1977. – 735 с.
  21. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина /Пер. с англ. – М.: Мир, 1988 – 352с.
  22. Чарный И.А. Основы газовой динамики, М.: Гостопиздат,1961. – 200с.
  23. Чарный И.А. Неустановившиеся движения реальной жидкости в трубах, М.:Недра, 1975. – 295с.
  24. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. – М.: Наука, 1976. – 400 с

---

## ЗМІСТ

Вступ	3
<b>Розділ 1 Від рівнянь руху матеріальної точки до рівнянь динаміки суцільного середовища.</b>	<b>6</b>
§1. Рівняння руху механічної системи із однієї та декількох матеріальних точок.	6
§2. Закони збереження маси, імпульса, моменту імпульса, енергії.	13
§3. Характеристики одновимірних моделей руху матеріальної точки, системи точок, твердого тіла.	24
§4. Суцільне середовище. Основні гіпотези. Тензор деформації	34
§5. Тензор напружень. Основна система рівнянь термомеханіки суцільного середовища.	45
§6. Системи рівнянь нестационарної газової динаміки.	55
§7. Нестационарні рівняння теорії пружності. Лінійна та нелінійна система рівнянь.	69
§8. Нелінійне рівняння переносу. Механізм виникнення розривів. Сильний та слабкий розриви. Співвідношення на розривах.	76
§9 Адіабати Пуасона і Гюгоніо. Задача про розпад довільного розриву (Задача Рімана).	85
<b>Розділ 2. Чисельні методи математичної фізики</b>	<b>100</b>
§1. Чисельні методи. Основні характеристики. Метод скінчених різниць(МСР).	100
§2. Основні властивості різницевих схем. Апроксимація та стійкість її розв'язків. Диференціальні представлення та наближення і їх Г та П-форми для одновимірних задач.	118
§3. Рівняння параболічного типу. Особливості чисельних методів.	130
§4. Загальна схема розщеплення. Розщеплення просторового рівняння переносу.	139
§5 Багатовимірні задачі. Метод розщеплення. Основні поняття та	148

---

методи побудови.	
§6. Застосування методу Гальоркіна	156
§7. Приклади базисних функцій. Метод скінчених елементів (МСЕ).	166
Задачі та вправи	179
Література	205



---

Навчальне видання

ВАНІН Віктор Антонович

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ  
В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

Навчально-методичний посібник з курсу «Сучасні проблеми  
математичного та комп'ютерного моделювання»  
для студентів машинобудівних та енергетичних спеціальностей

Відповідальний за випуск Ю.Л. Геворкян  
Роботу до видання рекомендував Л.В. Курпа

В авторській редакції

План 2018 р., поз. 167

Підп. до друку 2018 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 14  
Наклад 300 прим. Зам. № Ціна договірна

---

Видавничий центр НТУ «ХП».  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2018 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

---