А. Я. Карвацький

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Затверджено Вченою радою НТУУ «КПІ»
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за спеціальністю 7(8).05050315 «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів»

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

УДК 531/534(075.8)
К21

Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 5 від 11.04.2016 р.)

Рецензенти:

Є. В. Штефан, д-р техн. наук, проф.,
Національний університет харчових технологій

Г. О. Фролов, д-р техн. наук, ст. наук. співр.,
Інститут проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАН України

Відповідальний редактор

І. О. Мікульонок, д-р техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Карвацький А. Я.
К21 Механіка суцільних середовищ. Розв’язання задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 391 с.: іл. – Бібліогр.: с. 388.

Наведено 522 задачі та вправи за основними розділами механіки суцільного середовища, що включають: введення в тензорний аналіз, загальні основи механіки і термодинаміки суцільного середовища, закони збереження, механіку рідин та газів, лінійну теорію пружності, теорію пластичності, лінійну в’язкопружність. Понад 385 задач мають розв’язки з детальним текстовим поясненням та перетвореннями формул, а решта задач, що призначена для самоконтролю, має тільки відповіді. Базується на збірниках задач таких відомих авторів як Дж. Мейз, М. Е. Егліт та ін.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю 7(8).05050315 «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів», а також споріднених спеціальностей: машинобудування, будівельної галузі, теплоенергетики та нафтопереробної галузей промисловості.

УДК 531/534(075.8)

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Механіка суцільних середовищ» (МСС) складається з двох кредитних модулів «Механіка суцільних середовищ–1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках» і «Механіка суцільних середовищ–2. Нелінійні задачі механіки суцільних середовищ» та належить до циклу дисциплін самостійного вибору навчального закладу. В МСС досліджується напружено-деформований стан твердих, рідких і газоподібних тіл під час їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи – гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо. При цьому, залежно від мети дослідження і зовнішніх умов, для описання однакових фізичних середовищ застосовуються різні математичні моделі. Ці моделі вивчаються в таких класичних розділах МСС, як гідростатика, гідро- і газодинаміка, теорія пружності, теорія пластичності і повзучості, опір матеріалів тощо. На практиці дуже часто вказані розділи МСС лишаються у свідомості багатьох студентів тільки як окремі дисципліни без глибокого розуміння їх єдності. Однак, значно більше розуміння суті фізичних явищ, що досліджуються, виникає тільки тоді, якщо прослідкувати, як проявляються загальні закони в різноманітних умовах і які результати отримуються за умови використання різних моделей за однакових умов. Саме тому задачі і вправи, що зібрані в навчальному посібнику мають на меті показати не тільки розмаїття підходів, але й єдність ідей та методів, що використовуються в МСС, покращити розуміння та забезпечити засвоєння студентами теоретичного матеріалу через розв’язання практичних задач.

Навчальний посібник базується на збірниках задач таких відомих авторів як Дж. Мейз, М. Е. Еглiт та інші і включає 522 задачі та вправи за основними розділами механіки суцільного середовища, з яких понад 385 задач мають розв’язки, а решта задач, що призначена для самоконтролю, має тільки відповіді. У наведених розв’язках багатьох задач автором додано проміжні аналітичні викладки, які включають перетворення складних формул та співвідношень, що значно полегшують розуміння способів та методів їх розв’язання.

У посібнику використовуються в основному декартові тензори як головна база для описання суті багатьох теорій континууму, але також застосовуються такі важливі ортогональні системи криволінійних координат як циліндрична та сферична. Усі важливі рівняння та фундаментальні співвідношення наводяться як в тензорній або індексній, так і в класичній символічній або векторній формах запису, що дає змогу студентам порівняти еквівалентні вирази та застосовувати їх у подальшому.

У перших п’яти розділах розглянуто розв’язки задач, що стосуються загальних основ суцільного середовища, а саме: тензорному численню, математичному апарату неперервних функцій, напруженому та деформованому стану, поняттям руху і течії, фундаментальним законам механіки континууму. Решта з чотирьох розділів присвячена задачам, що відносяться до конкретних додатків механіки суцільного середовища – теорії пружності та термопружності, гідромеханіці, теорії пластичності та в'язкопружності. У додатках викладено необхідні теоретичні відомості і деякі математичні перетворення та розв'язки задач.

Навчальний посібник підготовлено на основі посібників [1, 2], лекцій та практичних занять, які автор читає та проводить зі студентами кафедри хімічного, полімерного та силікатного машинобудування Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Усі зауваження і пропозиції щодо поліпшення змісту навчального посібника будуть сприйняті автором із вдячністю.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

Основні позначення

A –	робота, Дж;
a_i –	компоненти вектору прискорення, м/с^2;
b_i –	компоненти вектора масових сил, Н/кг;
C_{ijkl} –	компоненти тензора 4-го рангу пружних констант ізотропного матеріалу, Па;
$[C_{KM}]$ –	матриця пружних констант, Па;
C_Y –	стала текучості, Па^2;
c_{ij} –	компоненти тензора перетворення координат;
c_v –	масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К);
c_p –	масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К);
$\hat{\mathbf{D}}$ –	тензор швидкості деформації, с$^{-1}$;
d_{ij} –	компоненти девіатора лагранжевого тензора лінійної деформації;
ds –	диференціал відстані, м;
dW^P –	прирощення роботи на пластичних деформаціях;
$d\varepsilon^P_{ekv}$ –	прирощення еквівалентної пластичної деформації;
E –	модуль пружності під час розтягу, Па;
$\hat{\mathbf{E}}$ –	ейлерів тензор лінійної деформації;
$\hat{\mathbf{E}}_A$ –	тензором скінченних деформацій Альмансі;
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k$ –	коваріантний і контраваріантний векторний базис, відповідно;
e_{ij} –	компоненти девіатора ейлеревого тензора лінійної деформації;
F –	масова вільна енергія, Дж/кг;
$\hat{\mathbf{F}}$ –	матеріальний градієнт (тензор 2-го рангу);
G –	модуль зсуву, Па;
$\hat{\mathbf{G}}$ –	тензор деформацій Гріна;
g_{ij} –	компоненти метричного тензора;
h –	масова ентропія, Дж/кг;
$\hat{\mathbf{I}}$ –	одиничний тензор 2-го рангу;
$\mathrm{I_D}, \mathrm{II_D}, \mathrm{III_D}$ –	1-й, 2-й і 3-й інваріанти тензора швидкості деформації;
$\mathrm{I}_\sigma, \mathrm{II}_\sigma, \mathrm{III}_\sigma$ –	1-й, 2-й і 3-й інваріанти тензора напруження;
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ –	орти декартової системи координат;
$\hat{\mathbf{J}}$ –	матеріальний градієнт переміщення (тензор 2-го рангу);
J –	якобіан;

J_i –	піддатливість матеріалу, Па$^{-1}$;
K –	кінетична енергія, Дж; модуль об'ємного стискання, Па;
$\hat{\mathbf{K}}$ –	просторовий градієнт переміщення (тензор 2-го рангу);
K_{ijpq}–	тензор четвертого рангу коефіцієнтів в'язкості;
k –	коефіцієнт теплопровідності середовища, Вт/(м·К); показник адіабати; межа текучості матеріалу при чистому зсуві, Па;
$\hat{\mathbf{L}}$ –	лагранжевий тензор лінійної деформації;
$\hat{\mathbf{L}}_G$ –	лагранжевий тензор скінченних деформацій;
l_{ij} –	компоненти лагранжевого тензора нескінченно малих деформацій;
M –	маса робочого тіла, кг;
$\mathbf{n}$ –	вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла;
n_i–	компоненти вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла;
$\mathbf{p}_n$–	вектор напруження, Па;
p –	тиск, Па;
Q –	теплота, Дж;
$\mathbf{q}$ –	вектор густини теплового потоку, Вт/м^2; вектор завихреності, с$^{-1}$;
q_m –	густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м^3;
R–	універсальна газова стала, Дж/(кг·К);
$\mathbf{r}$ –	радіус-вектор, м;
r, z, φ –	циліндричні координати (радіус, апліката та азимутальний кут);
S –	площа, м^2;
s_{ij} –	компоненти девіаторної складової тензора;
s –	масова ентропія, Дж/(кг·К);
$s_{\mathrm{I}}, s_{\mathrm{II}}, s_{\mathrm{III}}$;	
s_1, s_2, s_3–	головні значення девіаторних напружень, Па;
T –	абсолютна температура, К;
t –	час, с;
$t_i^{(\mathbf{n})}$–	вектор напруження, Па;
U –	внутрішня енергія, Дж;
$[U(t)]$ –	одинична ступінчаста функція зі стрибком в момент часу $t_1 = 0$;
u –	масова внутрішня енергія, Дж/кг;
$\mathbf{u}$ –	вектор переміщень, м;
u^* –	масова енергія деформації, Дж/кг;
u_i –	компоненти вектора переміщень, м;
$u^*_{(D)}$–	густина енергії викривлення форми, Дж/кг;

$u^*_{(S)}$ – густина енергії розширення, Дж/кг;
V – об’єм, м^3;
$\hat{\mathbf{V}}$ – тензор завихреності, с$^{-1}$;
$\mathbf{v}$ – вектор швидкості, м/с;
v_i – компоненти вектору швидкості, м/с;
v – питомий об’єм газу, м^3/кг;
$\mathbf{w}$ – лагранжевий вектор лінійного повороту;
X_1, X_2, X_3 – матеріальні (лагранжеві) декартові координати, м;
$\mathbf{x}$ – радіус-вектор, м;
x_1, x_2, x_3 – просторові (ейлереві) декартові координати, м;
Y_{ij} – компоненти градієнта швидкості, с$^{-1}$;
α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, К$^{-1}$;
χ^* – коефіцієнт об’ємної в’язкості, Па·с;
ΔS – площа елемента поверхні, м^2;
ΔT – різниця температур, К;
δ_{ij} – символ Кронекера;
$\hat{\varepsilon}$ – тензор сумарних пружних і температурних деформацій 2-го рангу;
$\hat{\varepsilon}^e$ – тензор пружних деформацій 2-го рангу;
$\hat{\varepsilon}^T$ – тензор температурних деформацій 2-го рангу;
ε_{ij} – компоненти ейлеревого тензора нескінченно малих деформацій;
ε^P_{ij} – компоненти тензора пластичних деформацій;
$\varepsilon_{\mathrm{I}}, \varepsilon_{\mathrm{II}}, \varepsilon_{\mathrm{III}}$;
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – головні значення ейлеревої деформації, Па;
ε_{ijk} – компоненти тензора Леві-Чивіти;
$\dot{\hat{\varepsilon}}$ – тензор швидкості деформації;
Φ – комплексний потенціал;
$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$ – символи Кристофеля 2-го роду;
γ – показник адіабати;
$\dot{\gamma}_{\max}$ – максимальна швидкість зсуву, с$^{-1}$;
η – коефіцієнт в’язкості, Па·с;
φ – потенціал, м^2/с;
$\varphi(t)$ – функція релаксації, Па;
$\Lambda_{(\mathbf{m})}$ – коефіцієнт довжини;

λ – коефіцієнт Ламе, Па;

λ^* – коефіцієнт в'язкості рідини, Па·с;

μ – коефіцієнт Ламе, Па;

μ^* – динамічна в'язкість, Па·с;

ν – коефіцієнт Пуасона;

π – число Пі;

ρ – густина, кг/м^3;

σ_{ij} – компоненти тензора напруження 2-го рангу, Па;

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напруження 2-го рангу, Па;

σ_{ekv} – еквівалентне напруження за Мізесом, Па;

σ_{okt} – октаедричне дотичне напруження, Па;

σ_Y – границя текучості, Па;

$\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{III}}$;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні значення напруження, Па;

$\sigma_{ij}^{(C)}$ – тензор консервативних напружень, Па;

$\sigma_{ij}^{(D)}$ – тензор дисипативних напружень, Па;

τ – час запізнення, с;

τ_{ij} – тензор в'язкого напруження, Па;

$\boldsymbol{\Omega}$ – вектор вихору швидкості, с$^{-1}$; кутова швидкість, с$^{-1}$;

$\boldsymbol{\omega}$ – ейлерів вектор лінійного повороту; вектор вихору, с$^{-1}$;

Ψ – масова вільна енергія, Дж/кг;

$\psi(t)$ – функція повзучості, Па$^{-1}$.

Основні індекси

0 – стосується початкового стану;

d – стосується девіаторної складової тензора;

K – стосується моделі Кельвіна;

M – стосується моделі Максвела;

n – стосується нормалі;

s – стосується кульової складової тензора.

Інші символи

det – детермінант;

div – оператор дивергенції;

grad – оператор градієнта;

rot – оператор ротора;

tr( ) – оператор сліду тензора;

$\partial_t \equiv \partial/\partial t$ – оператор диференціювання за часом;
$\{P\}$, $\{Q\}$ – лінійні диференціальні оператори;
Δ – оператор Лапласа;
∇ – оператор Гамільтона;
$\times$ – оператор скалярного добутку векторних величин;
$\cdot$ – оператор скалярного добутку векторних величин;
$:$ – оператор подвійного скалярного добутку;
$\cdot\cdot$ – оператор подвійного скалярного добутку;
$\vee$ – логічне «або».

Основні скорочення

ККД – коефіцієнт корисної дії;
МСС – механіка суцільних середовищ.

1. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ. ВВЕДЕННЯ В ТЕНЗОРНЕ ЧИСЛЕННЯ

1.1. Алгебра векторів і діадиків

Задача 1.1. В ортогональній декартовій системі координат (рис. 1.1) визначити: а) одиничний вектор, паралельний вектору $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ (або $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$); б) одиничний вектор прямої, що з'єднує точки $P(1;0;3)$ і $Q(0;2;1)$.

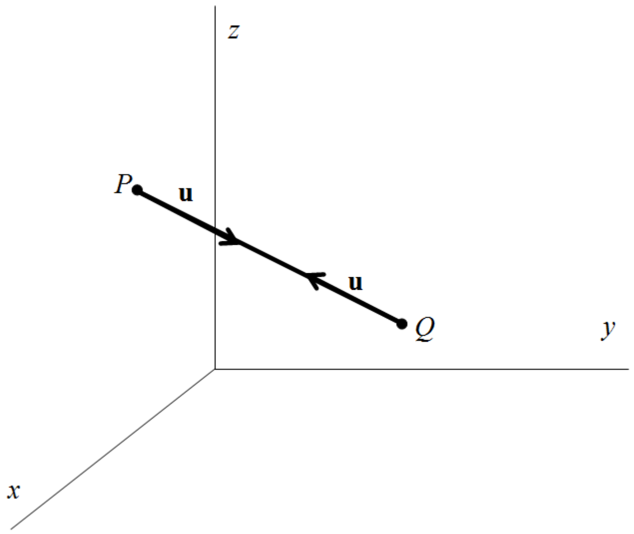


Рис. 1.1. До задачі 1.1

Розв'язання

а) спочатку визначимо довжину вектору $\mathbf{v}$

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7,$$

тоді одиничний вектор паралельний $\mathbf{v}$ буде визначатись як

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

б) вектор, що направлений з P до Q виражається за формулою

$$\mathbf{u} = (0-1)\mathbf{i} + (2-0)\mathbf{j} + (1-3)\mathbf{k} = -1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

його модуль дорівнює

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Звідки одиничний вектор, направлений з P до Q, дорівнює

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k},$$

і навпаки з Q до P – $\bar{\mathbf{u}} = \frac{-\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

Задача 1.2. Довести, що вектор $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ перпендикулярний площині, заданої рівнянням $ax + by + cz = \lambda$ (рис. 1.2).

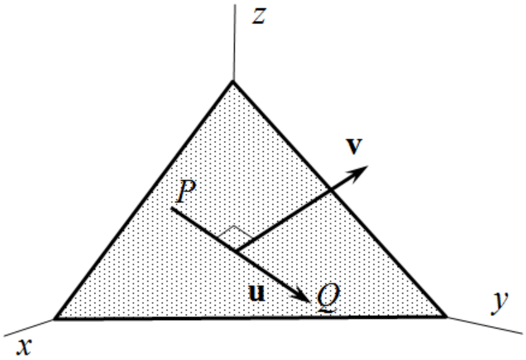


Рис. 1.2. До задачі 1.2

Розв'язання

Нехай $P(x_1, y_1, z_1)$ і $Q(x_2, y_2, z_2)$ – дві будь-які точки на площині (див. рис. 1.2). Тоді $ax_1 + by_1 + cz_1 = \lambda$ і $ax_2 + by_2 + cz_2 = \lambda$, а вектор, що з'єднує ці точки, є $\mathbf{u} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$. Проекція вектору $\mathbf{v}$ на напрямок вектору $\mathbf{u}$ дорівнює

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\left[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\right]\cdot\left[a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{u}|}(ax_2 + by_2 + cz_2 - ax_1 - by_1 - cz_1) = \frac{\lambda - \lambda}{|\mathbf{u}|} = 0.$$

Оскільки $\mathbf{u}$ – будь-який вектор, який лежить на площині, а вектор $\mathbf{v}$ перпендикулярний цій площині.

Задача 1.3. Нехай $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – вектор, що виходить із початку координат у довільну точку $P(x, y, z)$, а $\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ – деякий сталий вектор. Показати, що $(\mathbf{r} - \mathbf{d})\cdot\mathbf{r} = 0$ є рівняння сфери.

Розв'язання

Розкриваючи скалярний добуток будемо мати

$$(\mathbf{r} - \mathbf{d})\cdot\mathbf{r} = \left[(x - a)\mathbf{i} + (y - b)\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k}\right]\cdot\left[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right] =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0.$$

Додаючи $\frac{d^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$ до правої і лівої частин останнього рівняння, отримуємо

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\left(z-\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

тобто отримали рівняння сфери з центром у точці $\frac{d}{2}$ і радіусом $\frac{d}{2}$.

Задача 1.4. Довести, що $[\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\mathbf{r}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{c}\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Розв'язання

Розглянемо добуток $\mathbf{a}\times[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{r}]$. Розкриємо векторний добуток у скобках

$$\mathbf{a}\times[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{r}]=\mathbf{a}\times[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}]=-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{c}\times\mathbf{a}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

З іншого боку, припускаючи $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{v}$, напишемо

$$\mathbf{a}\times[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{r}]=\mathbf{a}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{r})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}\times\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{r}.$$

Таким чином,

$$-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{c}\times\mathbf{a}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}\times\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{r}$$

і, відповідно,

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{r}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{c}\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Ця тотожність корисна, коли переміщення твердого тіла визначається через переміщення трьох довільних його точок.

Задача 1.5. Показати, що змішаний добуток векторів $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{0}$, якщо вектори $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ є лінійно залежними. Перевірити лінійну залежність для такої трійки векторів:

$$\mathbf{u}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k};$$

$$\mathbf{v}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k};$$

$$\mathbf{w}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Розв'язання

Вектори $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ є лінійно залежними, якщо існують константи λ,μ,ω, які не всі рівні нулю і такі, що $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\omega\mathbf{c}=0$. Це векторне рівняння дає в компонентах три скалярних рівняння:

$$\lambda a_x+\mu b_x+\omega c_x=0;$$

$$\lambda a_y+\mu b_y+\omega c_y=0;$$

$$\lambda a_z+\mu b_z+\omega c_z=0.$$

Ця система має нульові розв'язки для λ,μ,ω тільки в тому випадку, коли детермінант з її коефіцієнтів дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}=0,$$

а це еквівалентно рівності $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Для запропонованої трійки векторів $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ маємо, що

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3+16-1-2-6-4=0.$$

Відповідно, ці вектори $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ лінійно залежні. Насправді, $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$.

Задача 1.6. Показати, що будь-який тензор 2-го рангу, що заданий у вигляді суми N діад, можна звести до суми трьох членів, якщо використовувати базисні вектори $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ в якості: а) перших множників, б) других множників у діадах.

Розв'язання

Нехай $\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2+\ldots+\mathbf{a}_N\mathbf{b}_N=\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i\ \ (\mathrm{i}=1,2,\ldots,N)$.

а) напишемо всі перші множники діад $\mathbf{a}_i$ через базисні вектори $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$: $a_i=a_{1i}\mathbf{e}_1+a_{2i}\mathbf{e}_2+a_{3i}\mathbf{e}_3=a_{ji}\mathbf{e}_j$. Тоді

$\hat{\mathbf{D}}=a_{ji}\mathbf{e}_j\mathbf{b}_i=\mathbf{e}_j\left(a_{ji}\mathbf{b}_i\right)=\mathbf{e}_jc_j$, де $j=1,2,3$.

б) аналогічно, представляючи $\mathbf{b}_i$ у вигляді $\mathbf{b}_i=b_{ji}\mathbf{e}_j$, отримуємо

$\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{a}_ib_{ji}\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_j\left(b_{ji}\mathbf{a}_i\right)=g_j\mathbf{e}_j$, де $j=1,2,3$.

Задача 1.7. Показати, що для довільних діадика $\hat{\mathbf{D}}$ і вектора $\mathbf{v}$ справедлива рівність $\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{D}}_c$.

Розв'язання

Нехай $\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2+\ldots+\mathbf{a}_N\mathbf{b}_N=\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i\ \ (\mathrm{i}=1,2,\ldots,N)$. Тоді

$$\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{v})+\mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{v})+\cdots+\mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N\cdot\mathbf{v})=$$
$$=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_1)\mathbf{a}_1+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_N)\mathbf{a}_N=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{b}_i\mathbf{a}_i)=\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{D}}_c,$$

де $\hat{\mathbf{D}}_c=\hat{\mathbf{D}}^T=\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{b}_N\mathbf{a}_N=\mathbf{b}_i\mathbf{a}_i$.

Задача 1.8. Довести, що $\left(\hat{\mathbf{D}}_c\cdot\mathbf{D}\right)_c=\hat{\mathbf{D}}_c\cdot\mathbf{D}$.

Розв'язання

Відповідно до $\hat{\mathbf{D}}=D_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ і $\hat{\mathbf{D}}_c=D_{ji}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$. Тому

$$\hat{\mathbf{D}}_c\cdot\mathbf{D}=D_{ji}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot D_{pq}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q=D_{ji}D_{pq}\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_p\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_q$$

і

$$\left(\hat{\mathbf{D}}_c\cdot\mathbf{D}\right)_c=D_{ji}D_{pq}\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_p\right)\mathbf{e}_q\mathbf{e}_i=D_{pq}\mathbf{e}_q\left(\mathbf{e}_p\cdot\mathbf{e}_j\right)\mathbf{e}_iD_{ji}=D_{pq}\mathbf{e}_q\mathbf{e}_p\cdot D_{ji}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i=\mathbf{D}_c\cdot\mathbf{D}.$$

Задача 1.9. Показати, що $\left(\hat{\mathbf{D}}\times\mathbf{v}\right)_c=-\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{D}}_c$.

Розв'язання

$$\hat{\mathbf{D}}\times\mathbf{v}=\mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\times\mathbf{v})+\mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\times\mathbf{v})+\cdots+\mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N\times\mathbf{v}),$$

$$\left(\hat{\mathbf{D}}\times\mathbf{v}\right)_c=(\mathbf{b}_1\times\mathbf{v})\mathbf{a}_1+(\mathbf{b}_2\times\mathbf{v})\mathbf{a}_2+\cdots+(\mathbf{b}_N\times\mathbf{v})\mathbf{a}_N=$$

$$=-(\mathbf{v}\times\mathbf{b}_1)\mathbf{a}_1-(\mathbf{v}\times\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2-\cdots-(\mathbf{v}\times\mathbf{b}_N)\mathbf{a}_N=-\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{D}}_c.$$

Задача 1.10. Нехай $\hat{\mathbf{D}}=a\mathbf{ii}+b\mathbf{jj}+c\mathbf{kk}$, $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Показати, що рівняння $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{r}=1$ представляє еліпсоїд $ax^2+by^2+cz^2=1$.

Розв'язання

$$\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{r}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(a\mathbf{ii}+b\mathbf{jj}+c\mathbf{kk})\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=$$

$$=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(ax\mathbf{i}+by\mathbf{j}+cz\mathbf{k})=ax^2+by^2+cz^2=1.$$

Тут $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1.$

Задача 1.11. Для тензорів $\hat{\mathbf{D}}=3\mathbf{ii}+2\mathbf{jj}-\mathbf{jk}+5\mathbf{kk}$ і $\hat{\mathbf{F}}=4\mathbf{ik}+6\mathbf{jj}-3\mathbf{kj}+\mathbf{kk}$ обчислити та порівняти подвійні скалярні добутки $\hat{\mathbf{D}}:\hat{\mathbf{F}}$ і $\hat{\mathbf{D}}\cdot\cdot\hat{\mathbf{F}}$.

Розв'язання

За визначенням $\mathbf{ab}:\mathbf{cd}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$, відповідно,

$$\hat{\mathbf{D}}:\hat{\mathbf{F}}=(3\mathbf{ii}+2\mathbf{jj}-\mathbf{jk}+5\mathbf{kk}):(4\mathbf{ik}+6\mathbf{jj}-3\mathbf{kj}+\mathbf{kk})=$$

$$=(2\mathbf{jj}):(6\mathbf{jj})+(5\mathbf{kk}):(\mathbf{kk})=$$

$$=12(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})+5(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})=$$

$$=12+5=17.$$

Тут $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})=(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})=(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})=1$, а решта комбінацій з ортами дорівнюють нулю, наприклад, $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})=(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})=0$.

Аналогічно $\mathbf{ab}\cdot\cdot\mathbf{cd}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$ і, відповідно,

$$\hat{\mathbf{D}}\cdot\cdot\hat{\mathbf{F}}=(3\mathbf{ii}+2\mathbf{jj}-\mathbf{jk}+5\mathbf{kk})\cdot\cdot(4\mathbf{ik}+6\mathbf{jj}-3\mathbf{kj}+\mathbf{kk})=$$

$$=(2\mathbf{jj})\cdot\cdot(6\mathbf{jj})+(-\mathbf{jk})\cdot\cdot(-3\mathbf{kj})+(5\mathbf{kk})\cdot\cdot(\mathbf{kk})=$$

$$=12(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})+3(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})+5(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})=$$

$$=12+3+5=20.$$

Задача 1.12. Визначити діадики $\hat{\mathbf{G}}=\hat{\mathbf{D}}\cdot\hat{\mathbf{F}}$ і $\hat{\mathbf{H}}=\hat{\mathbf{F}}\cdot\hat{\mathbf{D}}$, якщо $\hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{F}}$ – тензори, які дорівнюють $\hat{\mathbf{D}}=3\mathbf{ii}+2\mathbf{jj}-\mathbf{jk}+5\mathbf{kk}$ і $\hat{\mathbf{F}}=4\mathbf{ik}+6\mathbf{jj}-3\mathbf{kj}+\mathbf{kk}$.

Розв'язання

Скористаємося правилом множення діад $\mathbf{ab}\cdot\mathbf{cd}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{cd}$. Тоді

$$\hat{\mathbf{G}} = (3\mathbf{ii} + 2\mathbf{jj} - \mathbf{jk} + 5\mathbf{kk})\cdot(4\mathbf{ik} + 6\mathbf{jj} - 3\mathbf{kj} + \mathbf{kk}) =$$
$$= (3\mathbf{ii})\cdot(4\mathbf{ik}) + (2\mathbf{jj})\cdot(6\mathbf{jj}) + (-\mathbf{jk})\cdot(-3\mathbf{kj}) + (-\mathbf{jk})\cdot(\mathbf{kk}) + (5\mathbf{kk})\cdot(-3\mathbf{kj}) + (5\mathbf{kk})\cdot(\mathbf{kk}) =$$
$$= 12(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{ik} + 12(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\mathbf{jj} + 3(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{jj} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{jk} - 15(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{kj} + 5(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{kk} =$$
$$= 12\mathbf{ik} + 12\mathbf{jj} + 3\mathbf{jj} - \mathbf{jk} - 15\mathbf{kj} + 5\mathbf{kk}.$$

Тут $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = 1$, а решта комбінацій з ортами дорівнюють нулю, наприклад, $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) = 0$.

Аналогічно для $\hat{\mathbf{H}}$ отримуємо, що
$$\hat{\mathbf{H}} = (4\mathbf{ik} + 6\mathbf{jj} - 3\mathbf{kj} + \mathbf{kk})\cdot(3\mathbf{ii} + 2\mathbf{jj} - \mathbf{jk} + 5\mathbf{kk}) =$$
$$= (4\mathbf{ik})\cdot(5\mathbf{kk}) + (6\mathbf{jj})\cdot(2\mathbf{jj}) + (6\mathbf{jj})\cdot(-\mathbf{jk}) + (-3\mathbf{kj})\cdot(2\mathbf{jj}) + (-3\mathbf{kj})\cdot(-\mathbf{jk}) + (\mathbf{kk})\cdot(5\mathbf{kk}) =$$
$$= 20(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{ik} + 12(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\mathbf{jj} - 6(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\mathbf{jk} - 6(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\mathbf{kj} + 3(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\mathbf{kk} + 5(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{kk} =$$
$$= 20\mathbf{ik} + 12\mathbf{jj} - 6\mathbf{jk} - 6\mathbf{kj} + 8\mathbf{kk}.$$

Задача 1.13. Виходячи із дев'ятичленної форми запису тензора другого рангу $\hat{\mathbf{D}}$, показати, що його можна представити у вигляді $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$. Показати також, що

$\mathbf{i}\cdot\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{i} = D_{xx} = D_{11}$, $\mathbf{i}\cdot\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{j} = D_{xy} = D_{12}$ та ін.

Розв'язання

Напишемо $\hat{\mathbf{D}}$ в дев'ятичленній формі й перегрупуємо члени
$$\hat{\mathbf{D}} = (D_{xx}\mathbf{i} + D_{yx}\mathbf{j} + D_{zx}\mathbf{k})\mathbf{i} +$$
$$+ (D_{xy}\mathbf{i} + D_{yy}\mathbf{j} + D_{zy}\mathbf{k})\mathbf{j} +$$
$$+ (D_{xz}\mathbf{i} + D_{yz}\mathbf{j} + D_{zz}\mathbf{k})\mathbf{k} =$$
$$= \mathbf{d}_1\mathbf{i} + \mathbf{d}_1\mathbf{j} + \mathbf{d}_3\mathbf{k} = (\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}.$$

Отже
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}\cdot(\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{i}) = \mathbf{i}\cdot(D_{xx}\mathbf{i} + D_{yx}\mathbf{j} + D_{zx}\mathbf{k}) = D_{xx},$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{d}_1 = \mathbf{j}\cdot(\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{i}) = \mathbf{j}\cdot(D_{xx}\mathbf{i} + D_{yx}\mathbf{j} + D_{zx}\mathbf{k}) = D_{yx},$$
$\mathbf{j}\cdot\mathbf{d}_2 = \mathbf{j}\cdot(\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{j}) = \mathbf{j}\cdot(D_{xy}\mathbf{i} + D_{yy}\mathbf{j} + D_{zy}\mathbf{k}) = D_{yy}$ і так далі.

Задача 1.14. Показати, що для антисиметричного тензора другого рангу $\hat{\mathbf{A}}$ і будь-якого вектора $\mathbf{b}$ виконується формула $2\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}_v \times \mathbf{b}$.

Розв'язання

Нехай маємо, що $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{c}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{c}_3$. Внаслідок асиметрії тензора $\hat{\mathbf{A}}$ можна написати, що

$2\hat{\mathbf{A}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}_c)$, де $\hat{\mathbf{A}}_c$ спряжений до $\hat{\mathbf{A}}$,

або

$$2\hat{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{e}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{c}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{c}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{c}_3\mathbf{e}_3\right) =$$
$$= \left(\mathbf{e}_1\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_3\mathbf{e}_3\right).$$

Тому

$$2\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{A}} = \left[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{c}_1 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}_1)\mathbf{e}_1\right] + \left[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{c}_2 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}_2)\mathbf{e}_2\right] + \left[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{c}_3 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}_3)\mathbf{e}_3\right] =$$
$$= \left[(\mathbf{e}_1\times\mathbf{c}_1)\times\mathbf{b} + (\mathbf{e}_2\times\mathbf{c}_2)\times\mathbf{b} + (\mathbf{e}_3\times\mathbf{c}_3)\times\mathbf{b}\right] = \left(\hat{\mathbf{A}}_v\times\mathbf{b}\right),$$

де $\left[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{c}_1 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}_1)\mathbf{e}_1\right] = (\mathbf{e}_1\times\mathbf{c}_1)\times\mathbf{b}$ і так далі, $\hat{\mathbf{A}}_v = \mathbf{e}_1\times\mathbf{c}_1 + \mathbf{e}_2\times\mathbf{c}_2 + \mathbf{e}_3\times\mathbf{c}_3$.

Задача 1.15. Нехай $\hat{\mathbf{D}} = 6\mathbf{ii} + 3\mathbf{ij} + 4\mathbf{kk}$ і $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$. Показати безпосереднім обчисленням, що $\hat{\mathbf{D}}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\hat{\mathbf{D}}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$.

Розв'язання

Оскільки $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (2\mathbf{i}+\mathbf{k})\times 5\mathbf{j} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 0\end{vmatrix} = (0-5)\mathbf{i} + (2\cdot 5 - 0)\mathbf{k} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$,

то

$$\hat{\mathbf{D}}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (6\mathbf{ii} + 3\mathbf{ij} + 4\mathbf{kk})\cdot(-5\mathbf{i} + 10\mathbf{k}) = (6\mathbf{ii})\cdot(-5\mathbf{i}) + (4\mathbf{kk})\cdot(10\mathbf{k}) =$$
$$= -30(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + 40(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = -30\mathbf{i} + 40\mathbf{k},$$

де $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = 1$.

З іншого боку,

$$\hat{\mathbf{D}}\times\mathbf{u} = (6\mathbf{ii} + 3\mathbf{ij} + 4\mathbf{kk})\times(2\mathbf{i}+\mathbf{k}) = -6\mathbf{ik} + 8\mathbf{kj} - 6\mathbf{ij} + 3\mathbf{ii},$$

де $\hat{\mathbf{D}}\times\mathbf{u} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 6\mathbf{i} & 3\mathbf{i} & 4\mathbf{k}\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = (3\mathbf{i} - 0)\mathbf{i} - (6\mathbf{i} - 8\mathbf{k})\mathbf{j} + (0 - 6\mathbf{i})\mathbf{k} = 3\mathbf{ii} - 6\mathbf{ij} + 8\mathbf{kj} - 6\mathbf{ik}$

і

$$(\hat{\mathbf{D}}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = (-6\mathbf{ik} + 8\mathbf{kj} - 6\mathbf{ij} + 3\mathbf{ii})\cdot 5\mathbf{j} = -30\mathbf{i} + 40\mathbf{k}.$$

Задача 1.16. Розглядаючи діадик $\hat{\mathbf{D}} = 3\mathbf{ii} - 4\mathbf{ij} + 2\mathbf{ji} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ як лінійний векторний оператор, знайти $\mathbf{r}'$, який утворюється під час дії оператора $\mathbf{D}'$ на вектор $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (рис. 1.3).

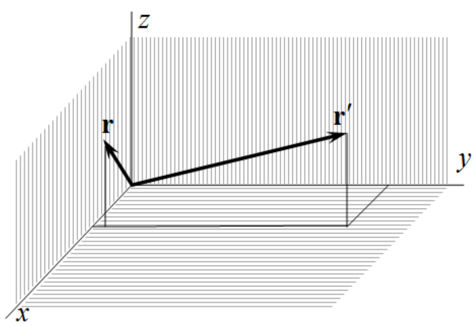


Рис. 1.3. До задачі 1.16

Розв'язання

$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{r} = (3\mathbf{ii} - 4\mathbf{ij} + 2\mathbf{ji} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \cdot (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) =$$
$$= 12\mathbf{i}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + 8\mathbf{j}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) - 8\mathbf{i}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + 2\mathbf{j}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + 5\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) =$$
$$= 12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Задача 1.17. Визначити діадик $\hat{\mathbf{D}}$, який слугує лінійним векторним оператором для вектор-функції $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$, де $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, а $\mathbf{b}$ – деякий сталий вектор.

Розв'язання

За допомогою формул $\mathbf{a} = b_x\mathbf{f}(\mathbf{i}) + b_y\mathbf{f}(\mathbf{j}) + b_z\mathbf{f}(\mathbf{k})$ і $\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{v}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{w}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{ui} + \mathbf{vj} + \mathbf{wk}) \cdot \mathbf{b}$ побудуємо такі вектори:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{i}) = \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{r} = \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 0 & 0 \\ x & y & z \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{j}) = \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{r} = \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{j} & 0 \\ x & y & z \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = z\mathbf{i} + \mathbf{j} - x\mathbf{k},$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} + \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \mathbf{k} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Тоді

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{ui} + \mathbf{vj} + \mathbf{wk} = (\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k})\mathbf{i} + (z\mathbf{i} + \mathbf{j} - x\mathbf{k})\mathbf{j} + (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})\mathbf{k}$$

і

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{b} = (b_x + b_y z - b_z y)\mathbf{i} + (-b_x z + b_y + b_z x)\mathbf{j} + (b_x y - b_y x + b_z)\mathbf{k}.$$

Для перевірки можна отримати той же результат безпосередньо розкриваючи вектор-функцію

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} + (b_y z - b_z y)\mathbf{i} + (b_z x - b_x z)\mathbf{j} + (b_x y - b_y x)\mathbf{k},$$

де $\mathbf{b} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (b_y z - b_z y)\mathbf{i} - (b_x z - b_z x)\mathbf{j} + (b_x y - b_y x)\mathbf{k}.$

Задача 1.18. Виразити одиничні вектори $\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r$ через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ і показати, що цей тріедр складає праву систему, тобто, що $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r$.

Розв'язання

Безпосереднім проектуванням (рис. 1.4) знайдемо

$$\mathbf{e}_\varphi = (\cos\varphi\cos\theta)\mathbf{i} + (\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{j} - (\sin\varphi)\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j},$$
$$\mathbf{e}_r = (\sin\varphi\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + (\cos\varphi)\mathbf{k}.$$

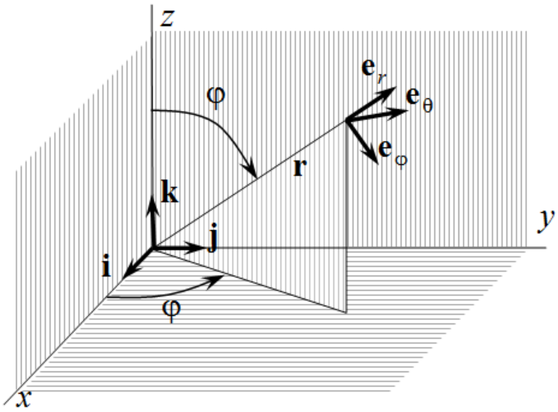


Рис. 1.4. До задачі 1.18

Звідки

$$\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= (0 + \sin\varphi\cos\theta)\mathbf{i} - (0 - \sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\cos\varphi\cos^2\theta + \cos\varphi\sin^2\theta\right)\mathbf{k} =$$
$$= (\sin\varphi\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + (\cos\varphi)\mathbf{k} = \mathbf{e}_r.$$

Задача 1.19. Розкласти тензор $\hat{\mathbf{D}} = 3\mathbf{ii} + 4\mathbf{ik} + 6\mathbf{ji} + 7\mathbf{jj} + 10\mathbf{ki} + 2\mathbf{kj}$ на симетричну та антисиметричну частини.

Розв’язання

Нехай $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{F}}$, де $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_c$ і $\hat{\mathbf{F}} = -\hat{\mathbf{F}}_c$. Тоді

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}_c\right) = \frac{1}{2}\left[(3\mathbf{ii} + 4\mathbf{ik} + 6\mathbf{ji} + 7\mathbf{jj} + 10\mathbf{ki} + 2\mathbf{kj}) + \right.$$
$$\left. + (3\mathbf{ii} + 4\mathbf{ki} + 6\mathbf{ij} + 7\mathbf{jj} + 10\mathbf{ik} + 2\mathbf{jk})\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[6\mathbf{ii} + 4\mathbf{ik} + 4\mathbf{ki} + 6\mathbf{ji} + 6\mathbf{ij} + 14\mathbf{jj} + 10\mathbf{ki} + 10\mathbf{ik} + 2\mathbf{kj} + 2\mathbf{jk}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[6\mathbf{ii} + 6\mathbf{ij} + 14\mathbf{ik} + 6\mathbf{ji} + 14\mathbf{jj} + 2\mathbf{jk} + 14\mathbf{ki} + 2\mathbf{kj}\right] =$$
$$= 3\mathbf{ii} + 3\mathbf{ij} + 7\mathbf{ik} + 3\mathbf{ji} + 7\mathbf{jj} + \mathbf{jk} + 7\mathbf{ki} + \mathbf{kj} = \hat{\mathbf{E}}_c,$$

де $\left[\hat{\mathbf{D}}\right]=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 6 & 7 & 0\\ 10 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $\left[\hat{\mathbf{D}}_c\right]=\left[\hat{\mathbf{D}}^T\right]=\begin{pmatrix}3 & 6 & 10\\ 0 & 7 & 2\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\left[\hat{\mathbf{E}}_c\right]=\begin{pmatrix}3 & 3 & 7\\ 3 & 7 & 1\\ 7 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\hat{\mathbf{F}}=\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{D}}-\hat{\mathbf{D}}_c\right)=\frac{1}{2}\left[(3\mathbf{ii}+4\mathbf{ik}+6\mathbf{ji}+7\mathbf{jj}+10\mathbf{ki}+2\mathbf{kj})+\right.$$
$$\left.-(3\mathbf{ii}+4\mathbf{ki}+6\mathbf{ij}+7\mathbf{jj}+10\mathbf{ik}+2\mathbf{jk})\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[4\mathbf{ik}+6\mathbf{ji}+10\mathbf{ki}+2\mathbf{kj}-4\mathbf{ki}-6\mathbf{ij}-10\mathbf{ik}-2\mathbf{jk}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[-6\mathbf{ij}-6\mathbf{ik}+6\mathbf{ji}-2\mathbf{jk}+6\mathbf{ki}+2\mathbf{kj}\right]=$$
$$=-3\mathbf{ij}-3\mathbf{ik}+3\mathbf{ji}-\mathbf{jk}+3\mathbf{ki}+\mathbf{kj}=-\hat{\mathbf{F}}_c,$$

де $\left[\hat{\mathbf{F}}_c\right]=\begin{pmatrix}0 & -3 & -3\\ 3 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Задача 1.20. Вектори $\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2,\mathbf{a}^3$ утворюють взаємний базис для базисних векторів $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ (не обов'язково одиничних), якщо $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}^i=\delta_{ij}$. Знайти необхідні співвідношення для побудови взаємного базису і виконати ці обчислення для наступних базисних векторів:

$\mathbf{b}_1=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\mathbf{b}_2=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}_3=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Розв'язання

Відповідно визначенню, $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}^1=1$, $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}^2=0$, $\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}^3=0$. Отже $\mathbf{a}^1$ перпендикулярний векторам $\mathbf{a}^2$ і $\mathbf{a}^3$, тому паралельний $\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3$, тобто $\mathbf{a}^1=\lambda(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)$. Оскільки $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}^1=1$, то $\mathbf{a}_1\cdot\lambda\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3=1$ і $\lambda=1/(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)=1/[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]$. Таким чином, знайдено загальне правило отримання взаємного базису:

$$\mathbf{a}^1=\frac{\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3}{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]},\ \mathbf{a}^2=\frac{\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1}{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]},\ \mathbf{a}^3=\frac{\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2}{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]}.$$

Для вказаних базисних векторів $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ маємо, що

$$[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]=\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3=(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$$
$$=(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})\cdot\left[(2-2)\mathbf{i}-(-1-2)\mathbf{j}+(-1-2)\mathbf{k}\right]=$$
$$=(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})\cdot(0\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k})=12(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})=12.$$

Тоді

$$\mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{(2-2)\mathbf{i} - (-1-2)\mathbf{j} + (-1-2)\mathbf{k}}{12} =$$

$$= \frac{0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{12} = \frac{\mathbf{j} - \mathbf{k}}{4},$$

$$\mathbf{b}^2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{(0-4)\mathbf{i} - (0-3)\mathbf{j} + (4-3)\mathbf{k}}{12} =$$

$$= \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}}{12} = -\frac{\mathbf{i}}{3} + \frac{\mathbf{j}}{4} + \frac{\mathbf{k}}{12},$$

$$\mathbf{b}^3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{(8-0)\mathbf{i} - (6-0)\mathbf{j} + (6+4)\mathbf{k}}{12} =$$

$$= \frac{8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}}{12} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{\mathbf{j}}{2} + \frac{5}{6}\mathbf{k}.$$

1.2. Індексні позначення – декартові тензори

Задача 1.21. У тривимірному просторі розшифрувати наступні тензорні символи (декартові тензори): $A_{ii}, B_{ijj}, R_{ij}, a_i T_{ij}, a_i b_j S_{ij}$.

Розв'язання

A_{ii} представляє одну суму: $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;

B_{ijj} представляє три суми:

1) для $i = 1$ $\quad B_{111} + B_{122} + B_{133}$,

2) для $i = 2$ $\quad B_{211} + B_{222} + B_{233}$,

3) для $i = 3$ $\quad B_{311} + B_{322} + B_{333}$;

R_{ij} представляє дев'ять компонент:

$$\begin{matrix} R_{11}, & R_{12}, & R_{13}, \\ R_{21}, & R_{22}, & R_{23}, \\ R_{31}, & R_{32}, & R_{33}; \end{matrix}$$

$a_i T_{ij}$ представляє три суми:

1) для $j=1$ $\quad a_1T_{11}+a_2T_{21}+a_3T_{31}$,

2) для $j=2$ $\quad a_1T_{12}+a_2T_{22}+a_3T_{32}$,

3) для $j=3$ $\quad a_1T_{13}+a_2T_{23}+a_3T_{33}$;

$a_i b_j S_{ij}$ представляє суму дев'яти членів. Перше підсумовування по i дає $a_i b_j S_{ij} = a_1 b_j S_{1j} + a_2 b_j S_{2j} + a_3 b_j S_{3j}$. Потім кожне із цих трьох доданків підсумовуємо по j:

$$a_i b_j S_{ij} = a_1b_1S_{11}+a_1b_2S_{12}+a_1b_3S_{13}+$$
$$+a_2b_1S_{21}+a_2b_2S_{22}+a_2b_3S_{23}+$$
$$+a_3b_1S_{31}+a_3b_2S_{32}+a_3b_3S_{33}.$$

Задача 1.22. В тривимірному просторі обчислити наступні вирази, що містять символ Кронекера δ_{ij} : а) δ_{ii}; б) $\delta_{ij}\delta_{ij}$; в) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$; г) $\delta_{ij}\delta_{jk}$; д) $\delta_{ij}A_{ik}$.

Розв'язання

Символ Кронекера в тривимірному просторі записується як

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) $\delta_{ii} = \delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33} = 1+1+1=3$.

б) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j}+\delta_{2j}\delta_{2j}+\delta_{3j}\delta_{3j} = (1\quad 0\quad 0)\cdot(1\quad 0\quad 0)+(0\quad 1\quad 0)\cdot(0\quad 1\quad 0)+$
$+(0\quad 0\quad 1)\cdot(0\quad 0\quad 1)=1+1+1=3.$

Тут вираз $(1\quad 0\quad 0)\cdot(1\quad 0\quad 0)=1$ означає скалярний добуток векторів.

в) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk}+\delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk}+\delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk} =$
$=1\cdot1\cdot1+1+1=3$.

г) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k}+\delta_{i2}\delta_{2k}+\delta_{i3}\delta_{3k} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1\quad 0\quad 0)+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(0\quad 1\quad 0)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(0\quad 0\quad 1)=$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\delta_{ik};$$

$$\delta_{ij}A_{ik} = \delta_{1j}A_{1k} + \delta_{2j}A_{2k} + \delta_{3j}A_{3k} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{21} & A_{22} & A_{23}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} =$$

д) $$= \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\A_{21} & A_{22} & A_{23}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\A_{21} & A_{22} & A_{23}\\A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} = A_{jk}.$$

Задача 1.23. Для тензора Леві-Чивіти ε_{ijk} безпосереднім розписуванням по індексах показати, що: а) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$; б) $\varepsilon_{ijk}a_j a_k = 0$.

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$
$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1,$ решта = 0.

Розв’язання

а) Виконаємо підсумовування спочатку по i:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{1jk}\varepsilon_{k1j} + \varepsilon_{2jk}\varepsilon_{k2j} + \varepsilon_{3jk}\varepsilon_{k3j}.$$

Потім підсумуємо по j, записуючи тільки відмінні від нуля члени:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k12} + \varepsilon_{13k}\varepsilon_{k13} + \varepsilon_{21k}\varepsilon_{k21} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{k31} + \varepsilon_{32k}\varepsilon_{k32}.$$

На кінець підсумовуємо по k, знову залишаючи тільки ненульові члени:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{312} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{132} =$$
$$= (1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1) + (1)(1) + (-1)(-1) = 6.$$

б) Виконуємо підсумовування по j, потім по k:

$$\varepsilon_{ijk}a_j a_k = \varepsilon_{i1k}a_1 a_k + \varepsilon_{i2k}a_2 a_k + \varepsilon_{i3k}a_3 a_k = \varepsilon_{i12}a_1 a_2 + \varepsilon_{i13}a_1 a_3 + \varepsilon_{i21}a_2 a_1 +$$
$$+ \varepsilon_{i23}a_2 a_3 + \varepsilon_{i31}a_3 a_1 + \varepsilon_{i32}a_3 a_2.$$

З цього виразу отримаємо:

для $i = 1$, $\varepsilon_{1jk}a_j a_k = a_2 a_3 - a_3 a_2 = 0,$

для $i = 2$, $\varepsilon_{2jk}a_j a_k = a_1 a_3 - a_3 a_1 = 0,$

для $i = 3$, $\varepsilon_{3jk}a_j a_k = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0.$

Замітимо, що $\varepsilon_{ijk}a_j a_k$ є індексною формою запису векторного добутку вектора на самого себе і, відповідно, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

Задача 1.24. Визначити компоненту f_2 даних нижче векторів:

а) $f_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$, б) $f_i = c_{i,j} b_j - c_{j,i} b_j$, в) $f_i = B_{ij} f_j^*$.

Розв'язання

а) $f_2 = \varepsilon_{2jk} T_{jk} = \varepsilon_{213} T_{13} + \varepsilon_{231} T_{31} = -T_{13} + T_{31}$, тут $\varepsilon_{213} = -1$ і $\varepsilon_{231} = 1$.

б) $$\begin{aligned} f_2 &= c_{2,1} b_1 + c_{2,2} b_2 + c_{2,3} b_3 - c_{1,2} b_1 - c_{2,2} b_2 - c_{3,2} b_3 = \\ &= \left(c_{2,1} - c_{1,2}\right) b_1 + \left(c_{2,3} - c_{3,2}\right) b_3. \end{aligned}$$

в) $f_2 = B_{21} f_1^* + B_{22} f_2^* + B_{23} f_3^*$.

Задача 1.25. Написати в розгорнутій формі і по можливості спростити вираз $D_{ij} x_i x_j$, якщо: а) $D_{ij} = D_{ji}$, б) $D_{ij} = -D_{ij}$.

Розв'язання

Маємо

$$\begin{aligned} D_{ij} x_i x_j &= D_{1j} x_1 x_j + D_{2j} x_2 x_j + D_{3j} x_3 x_j = \\ &= D_{11} x_1 x_1 + D_{12} x_1 x_2 + D_{13} x_1 x_3 + D_{21} x_2 x_1 + D_{22} x_2 x_2 + D_{23} x_2 x_3 + \\ &+ D_{31} x_3 x_1 + D_{32} x_3 x_2 + D_{33} x_3 x_3. \end{aligned}$$

Тому

а) $D_{ij} x_i x_j = D_{11} (x_1)^2 + D_{22} (x_2)^2 + D_{33} (x_3)^2 + 2 D_{12} x_1 x_2 + 2 D_{23} x_2 x_3 + 2 D_{13} x_1 x_3$.

б) $D_{ij} x_i x_j = 0$, оскільки $D_{11} = -D_{11}$, $D_{12} = -D_{12}$ і так далі.

Задача 1.26. Показати, що $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$: а) при $i = 1$, $j = q = 2$, $p = 3$; б) $i = q = 1$, $j = p = 2$.

Розв'язання

а) Покладемо $i = 1$, $j = 2$, $p = 3$, $q = 2$ і замітимо, що k – індекс підсумовування і, відповідно, пробігає значення 1,2,3. Тоді

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{12k} \varepsilon_{k32} = \varepsilon_{121} \varepsilon_{132} + \varepsilon_{122} \varepsilon_{232} + \varepsilon_{123} \varepsilon_{332} = 0,$$

$$\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} = \delta_{13} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{23} = 0 - 0 = 0.$$

б) Нехай $i = 1$, $j = 2$, $p = 2$, $q = 1$. Тоді

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{123} \varepsilon_{321} = -1,$$

$$\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} = \delta_{12} \delta_{21} - \delta_{11} \delta_{22} = 0 - 1 = -1.$$

Задача 1.27. Показати, що тензор $B_{ik} = \varepsilon_{ijk} a_j$ антисиметричний.

Розв'язання

Згідно з визначенням ε_{ijk} перестановка місцями двох індексів веде до зміни знаку, так що

$$B_{ik} = \varepsilon_{ijk} a_j = -\left(\varepsilon_{kji} a_j\right) = -\left(B_{ki}\right) = -B_{ki}.$$

Задача 1.28. Нехай задано антисиметричний декартовий тензор B_{ij} і вектор $b_i = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{jk}$. Показати, що $B_{pq} = \varepsilon_{pqi}b_i$.

Розв'язання

Помножимо даний вектор на ε_{pqi} і скористуємося тотожністю, що доведена в задачі 1.26

$$\varepsilon_{pqi}b_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}B_{jk} = \frac{1}{2}\left(\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj}\right)B_{jk} = \frac{1}{2}\left(B_{pq} - B_{qp}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(B_{pq} + B_{pq}\right) = B_{pq}.$$

Задача 1.29. Безпосереднім обчисленням знайти компоненти метричного тензора в сферичній системі координат, яка показана на рис. 1.5.

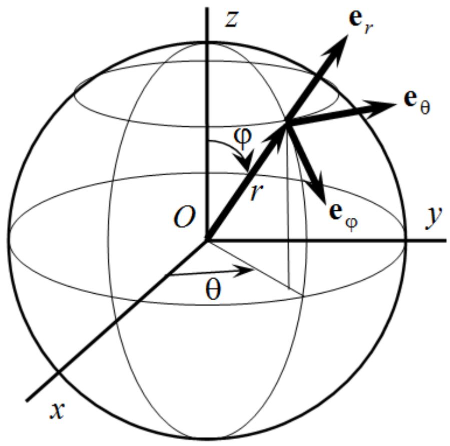


Рис. 1.5. Сферична система координат

Розв'язання

Формулу $g_{pq} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^p}\dfrac{\partial x^i}{\partial x'^q} = \delta_{pq}$ перепишемо у вигляді $g_{pq} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \theta_p}\dfrac{\partial x_i}{\partial \theta_q}$.

Нумерацію координат приймемо такою $\left(r = \theta_1,\ \varphi = \theta_2,\ \theta = \theta_3\right)$ (рис. 1.6).

Тоді

$$x_1 = \theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3,\ x_2 = \theta_2 \sin\theta_2 \sin\theta_3,\ x_3 = \theta_1 \cos\theta_2 .$$

Відповідно,

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} = \sin\theta_2 \cos\theta_3,\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} = \theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3,\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} = -\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} = \sin\theta_2 \sin\theta_3,\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = \theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3,\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} = \theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3,$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} = \cos\theta_2,\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} = -\theta_1 \sin\theta_2,\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} = 0 .$$

Звідси знайдемо

$$g_{11} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1}\frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} = \sin^2\theta_2\cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 + \cos^2\theta_3 = 1,$$

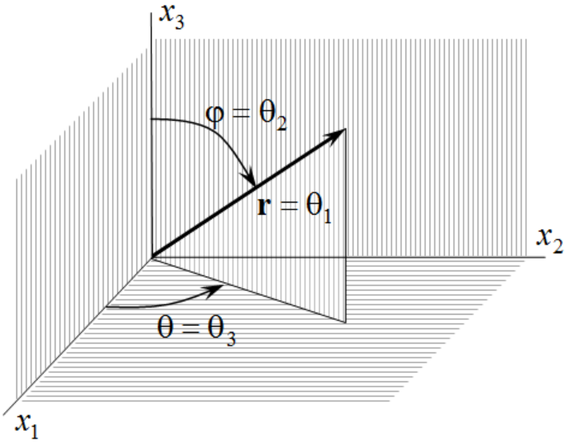


Рис. 1.6. До задачі 1.29

$$g_{22} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2}\frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} = \theta_1^2\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3 + \theta_1^2\cos^2\theta_2\sin^2\theta_3 + \theta_1^2\sin^2\theta_2 = \theta_1^2,$$

$$g_{33} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_3}\frac{\partial x_i}{\partial \theta_3} = \theta_1^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 + \theta_1^2\sin^2\theta_2\cos^2\theta_3 = \theta_1^2\sin^2\theta_2.$$

Крім того, $g_{pq} = 0$ для $p \neq q$. Наприклад,

$$g_{12} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1}\frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} = (\sin\theta_2\cos\theta_3)(\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3) + (\sin\theta_2\sin\theta_3)(\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3) -$$
$$-(\cos\theta_2)(\theta_1\sin\theta_2) = 0.$$

Таким чином, у сферичних координатах квадрат диференціала відстані ds дорівнює

$$(ds)^2 = (d\theta_1)^2 + (\theta_1)^2(d\theta_2)^2 + (\theta_1\sin\theta_2)^2(d\theta_3)^2,$$

або

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2(d\theta)^2.$$

Задача 1.30. Показати, що довжина лінійного елемента ds, яка відповідає прирощенню криволінійній координаті $d\theta_i$, дорівнює $ds = \sqrt{g_{ii}}d\theta_i$ (тут підсумовування не виконується). Застосувати отриманий результат до сферичної системи координат (задача 1.29).

Розв'язання

Напишемо формулу $(ds)^2 = \dfrac{\partial x^i}{\partial \theta^p}\dfrac{\partial x^i}{\partial \theta^q}d\theta^p d\theta^q$ у вигляді $(ds)^2 = g_{pq}d\theta_p d\theta_q$. Тоді для лінійного елементу $(d\theta_1, 0, 0)$ отримаємо вираз

$(ds_1)^2 = g_{11}(d\theta_1)^2$ і $ds_1 = \sqrt{g_{11}}d\theta_1$.
Аналогічно для $(0, d\theta_2, 0)$ отримаємо
$ds_2 = \sqrt{g_{22}}d\theta_2$,
а для $(0,0,d\theta_3)$ отримаємо

$ds_3 = \sqrt{g_{33}}d\theta_3$.

У сферичній системі координат маємо наступні вирази:

1) для $(d\theta_1, 0,0) \to ds_1 = d\theta_1 = dr$;
2) для $(0, d\theta_2, 0) \to ds_2 = \theta_1 d\theta_2 = rd\varphi$;
3) для $(0,0,d\theta_3) \to ds_3 = \theta_1 \sin\theta_2 d\theta_3 = r\sin\varphi d\theta$.

Задача 1.31. Нехай β_{12} – кут між лінійними елементами $(d\theta_1, 0,0)$ і $(0, d\theta_2, 0)$. Показати, що $\cos\beta_{12} = \dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$.

Розв'язання

Нехай $ds_1 = \sqrt{g_{11}}d\theta_1$ – довжина лінійного елемента $(d\theta_1, 0,0)$, а $ds_2 = \sqrt{g_{22}}d\theta_2$ – довжина лінійного елемента $(0, d\theta_2, 0)$. Тоді квадрат довжини $(ds)^2$ лінійного елемента $(d\theta_1, d\theta_2, 0)$ можна обчислити так

$$(ds)^2 = -2\cos\beta_{12}ds_1ds_2 + (ds_1)^2 + (ds_2)^2 = -2\cos\beta_{12}ds_1ds_2 + g_{11}d\theta_1^2 + g_{22}d\theta_2^2.$$

З іншого боку

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = g_{11}d\theta_1^2 + g_{22}d\theta_2^2 - 2g_{12}d\theta_1 d\theta_2.$$

Прирівнюючи останні дві рівності отримуємо

$$-2\cos\beta_{12}ds_1ds_2 + g_{11}d\theta_1^2 + g_{22}d\theta_2^2 = g_{11}d\theta_1^2 + g_{22}d\theta_2^2 - 2g_{12}d\theta_1 d\theta_2 \to$$
$$\to 2\cos\beta_{12}ds_1ds_2 = 2g_{12}d\theta_1 d\theta_2 \to \cos\beta_{12}ds_1ds_2 = g_{12}d\theta_1 d\theta_2.$$

Звідки отримуємо, що

$$\cos\beta_{12} = g_{12}\frac{d\theta_1}{ds_1}\frac{d\theta_2}{ds_2}.$$

Користуючись результатом задачі 1.30 $ds_1 = \sqrt{g_{11}}d\theta_1$ і $ds_2 = \sqrt{g_{22}}d\theta_2$, отримуємо

$$\cos\beta_{12} = g_{12}\frac{d\theta_1}{ds_1}\frac{d\theta_2}{ds_2} = g_{12}\frac{d\theta_1}{\sqrt{g_{11}}d\theta_1}\frac{d\theta_2}{\sqrt{g_{22}}d\theta_2} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}},$$

що і треба було показати.

Задача 1.32. Осі декартової системи координат $Ox_1'x_2'x_3'$ отримані поворотом системи $Ox_1x_2x_3$ на кут θ навколо осі x_3. Визначити коефіцієнти перетворення c_{ij} (тензор перетворення) вказаних осей і знайти компоненти вектора $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ в системі $Ox_1'x_2'x_3'$.

Розв'язання

За визначенням $c_{ij} = \cos(x_i', x_j)$. Кути між відповідними осями вказані на рис. 1.7, що дозволяє записати таблицю направляючих косинусів.

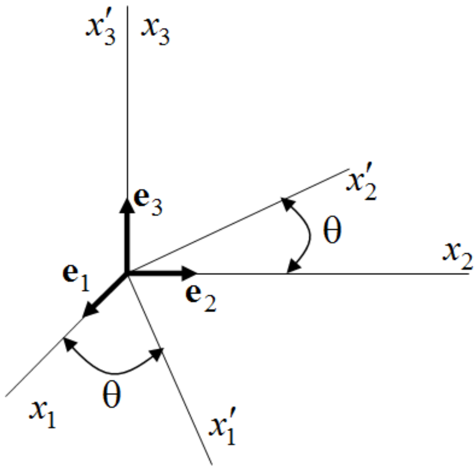


Рис. 1.7. До задачі 1.32

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
x_2'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
x_3'	0	0	1

Таким чином тензор перетворення координат має вигляд

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

За правило перетворення векторів $v_i' = c_{ij}v_j$ отримуємо для компонент

$$v_1' = c_{1j}v_j = v_1\cos\theta + v_2\sin\theta,$$

$$v_2' = c_{2j}v_j = -v_1\sin\theta + v_2\cos\theta,$$

$$v_3' = c_{3j}v_j = v_3.$$

Задача 1.33. У наведеній таблиці частково задані направляючі косинуси кутів між осями двох декартових ортогональних систем координат.

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$3/5$	$-4/5$	0
x_2'	0	0	1
x_3'			

Визначити елементи нижнього ряду таблиці так, щоб система $Ox_1'x_2'x_3'$ була правою.

Розв'язання

Перший рядок таблиці дає одиничний вектор $\mathbf{e}_1'$ на осі x_1' у вигляді $\mathbf{e}_1' = \frac{3}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{5}\mathbf{e}_2$. Точно так само маємо, що $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3$. Для правої системи повинна бути виконана рівність $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2'$ або

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2' = \left(\frac{3}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{5}\mathbf{e}_1\right) \times \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{5} - 0\right)\mathbf{e}_1 - \left(\frac{3}{5} - 0\right)\mathbf{e}_2 + (0-0)\mathbf{e}_3 =$$

$$= -\frac{4}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{3}{5}\mathbf{e}_2.$$

Таким чином отримали третій рядок таблиці

x_3'	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0

Задача 1.34. Нехай кути між напрямками осей координат системи зі штрихами і системи без штрихів (див. попередню задачу) дано в такій таблиці:

	x_1	x_2	x_3
x_1'	135°	60°	120°
x_2'	90°	45°	45°
x_3'	45°	60°	120°

Визначити компоненти тензора перетворення координат c_{ij} і показати, що умови ортогональності виконуються.

Розв'язання

Компоненти c_{ij} є направляючими косинусами і можуть бути зразу обчислені у відповідності до даної таблиці кутів. Таким чином,

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Умова ортогональності $c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$ вимагає, щоб виконувалися такі умови:

1) за умови $j = k = 1$ повинно бути $c_{11}c_{11} + c_{21}c_{21} + c_{31}c_{31} = 1$; ліва частина очевидно, представляє собою суму квадратів елементів 1-го стовпця, тобто
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1.$$
2) за умови $j = 2, k = 3$ повинна бути виконана рівність $c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0$, сума якої є сумою добутків відповідних компонентів 2-го і 3-го стовпців. Перевірка $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.
3) сума добутків відповідних елементів будь-яких стовпців повинна дорівнювати нулю; сума квадратів будь-якого стовпця повинна бути рівна одиниці.
4) Якщо умова ортогональності записана в формі $c_{ji}c_{ki} = \delta_{jk}$, то замість стовпців перемножуються рядки. Вказане вище рішення задовольняє всім цим вимогам.

Задача 1.35. Показати, що сума $\lambda A_{ij} + \mu B_{ij}$ представляє компоненти тензора другого рангу, якщо відомо, що A_{ij} і B_{ij} – тензори другого рангу.

Розв'язання

Відповідно формулі $T_{ij} = a_{pi}a_{qj}T'_{pq}$ і умові задачі $A_{ij} = a_{pi}a_{qj}A'_{pq}$ і $B_{ij} = a_{pi}a_{qj}B'_{pq}$.

Звідки
$$\lambda A_{ij} + \mu B_{ij} = \lambda\left(a_{pi}a_{qj}A'_{pq}\right) + \mu\left(a_{pi}a_{qj}B'_{pq}\right) = a_{pi}a_{qj}\left(\lambda A'_{ij} + \mu B'_{ij}\right),$$
а це значить, що вказана сума перетворюється як декартовий тензор другого рангу.

Задача 1.36. Показати, що $\left(P_{ijk} + P_{jki} + P_{jik}\right)x_i x_j x_k = 3P_{ijk}x_i x_j x_k$.

Розв'язання

Оскільки всі індекси є німими і, відповідно, порядок написання змінних x_i не відіграють ролі, усі доданки еквівалентні один одному. Це легко показати за допомогою введення інших німих індексів. Так, замінюючи i, j, k в другому і третьому членах на p, q, r, отримуємо
$$P_{ijk}x_i x_j x_k + P_{qrp}x_p x_q x_r + P_{qpr}x_p x_q x_r.$$
Тепер повернемося в тих самих членах до попередніх індексів підсумовування i, j, k і отримаємо суму
$$P_{ijk}x_i x_j x_k + P_{ijk}x_i x_j x_k + P_{ijk}x_i x_j x_k = 3P_{ijk}x_i x_j x_k.$$

Задача 1.37. Нехай B_{ij} – антисиметричний і A_{ij} – симетричний тензори. Показати, що $A_{ij}B_{ij} = 0$.

Розв'язання

Оскільки $A_{ij} = A_{ji}$ і $B_{ij} = -B_{ji}$, то $A_{ij}B_{ij} = -A_{ji}B_{ji}$ або

$$A_{ij}B_{ij} + A_{ji}B_{ji} = A_{ij}B_{ij} + A_{pq}B_{pq} = 0.$$

Оскільки усі індекси є німими, то

$$A_{pq}B_{pq} = A_{ij}B_{ij},$$

і тому

$$2A_{ij}B_{ij} = 0 \text{ або } A_{ij}B_{ij} = 0.$$

Задача 1.38. Показати, що квадратична форма $D_{ij}x_i x_j$ не зміниться, якщо замість тензора D_{ij} взяти його симетричну частину $D_{(ij)}$.

Розв'язання

Розкладемо D_{ij} на симетричну і антисиметричну частини

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(D_{ij} + D_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(D_{ij} - D_{ji}\right).$$

Тоді

$$D_{(ij)}x_i x_j = \frac{1}{2}\left(D_{ij} + D_{ji}\right)x_i x_j = \frac{1}{2}\left(D_{ij}x_i x_j + D_{pq}x_q x_p\right) = D_{ij}x_i x_j.$$

Задача 1.39. Використовуються індексні позначення, довести векторні тотожності:

1) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$, 2) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0$.

Розв'язання

1) Нехай $\mathbf{v} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Тоді $v_i = \varepsilon_{ijk}b_j c_k$ і, якщо $\mathbf{a}\times\mathbf{v} = \mathbf{w}$, то

$$w_p = \varepsilon_{pqi}a_q\varepsilon_{ijk}b_j c_k = \left(\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj}\right)a_q b_j c_k =$$
$$= a_q b_p c_q - a_q b_q c_p = \left(a_q c_q\right)b_p - \left(a_q b_q\right)c_p,$$

(див. задачу 1.26)

У символічних позначеннях цей вираз має вигляд

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

2) Нехай $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0$, тобто $v_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$ і, якщо $\lambda = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$, то $\lambda = \varepsilon_{ijk}\left(a_i a_j b_k\right)$. Але ε_{ijk} антисиметричний тензор за індексами i і j, в той час як добуток $\left(a_i a_j b_k\right)$ є симетричним по цих індексах. Отже, $\varepsilon_{ijk}a_i a_j b_k$ обертається в нуль, що можна показати, безпосередньо розписуючи цей вираз по індексах

$$\lambda = \varepsilon_{ij1}a_i a_j b_1 + \varepsilon_{ij2}a_i a_j b_2 + \varepsilon_{ij3}a_i a_j b_3 =$$

$$= \left(\varepsilon_{321} a_3 a_2 + \varepsilon_{231} a_2 a_3\right) b_1 + \dots =$$
$$= \left(-a_2 a_3 + a_2 a_3\right) b_1 + (0) b_2 + (0) b_3 = 0.$$

Задача 1.40. Показати, що визначник

$$\det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

можна записати у вигляді $\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$.

Розв'язання

Змішаний добуток $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ можна представити у вигляді

$$\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо тепер покласти $a_i = A_{1i}, b_j = A_{2j}, c_k = A_{3k}$, то будемо мати, що

$$\lambda = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}.$$

Цей же результат можна отримати і безпосереднім розкладанням визначника по рядку. Визначник можна також записати у вигляді $\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$; очевидно, ці два вирази еквівалентні.

Задача 1.41. Вектор v_i задано в базисі $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ своїми компонентами $v_i = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i$. Показати, що $\alpha = \dfrac{\varepsilon_{ijk} v_i b_j c_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r}$.

Розв'язання

Маємо

$$v_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1,$$
$$v_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2,$$
$$v_3 = \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3.$$

За правилом Крамера можна визначити α

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & b_1 & c_1 \\ v_2 & b_2 & c_2 \\ v_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

З іншого боку можна записати, що

$$\begin{vmatrix} v_1 & b_1 & c_1 \\ v_2 & b_2 & c_2 \\ v_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} v_i b_j c_k \text{ і } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r ,$$

тоді отримуємо

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{ijk} v_i b_j c_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r} .$$

Аналогічним чином можна отримати для двох інших коефіцієнтів

$$\beta = \frac{\varepsilon_{ijk} a_i v_j c_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r} , \qquad \gamma = \frac{\varepsilon_{ijk} a_i b_j v_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r} .$$

1.3. Матриці і матричні методи

Задача 1.42. Для векторів $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ і діадика $\hat{\mathbf{D}} = 3\mathbf{ii} + 2\mathbf{ik} - 4\mathbf{jj} - 5\mathbf{kj}$ шляхом перемноження матриць обчислити добутки $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{b}$ і $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{b}$.

Розв'язання

Нехай $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{v}$, тоді

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -20 & 6 \end{bmatrix}.$$

Нехай $\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{w}$, тоді

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Нехай $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \lambda$, тоді

$$\lambda = \begin{bmatrix} 9 & -20 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = -76.$$

Задача 1.43. Знайти головні напрямки і головні значення декартового тензора $\hat{\mathbf{T}}$ другого порядку, який представлено матрицею

$$\begin{bmatrix} T_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання

Для визначення головних значень λ, відповідно до $\left|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0$, маємо рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = 0 .$$

Це кубічне рівняння

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0,$$

корені якого $\lambda_{(1)} = 1$, $\lambda_{(2)} = 2$, $\lambda_{(3)} = 4$.

Нехай тепер $n_i^{(1)}$ – компоненти одиничного вектора головного напрямку, що відповідає $\lambda_{(1)} = 1$. Тоді два перших рівняння системи

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 = 0, \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 = 0, \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

дають $2n_1^{(1)} - n_2^{(1)} = 0$ і $-n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} = 0$, звідки $n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0$, а із умови $n_i n_i = 1$, отримуємо $n_3^{(1)} = \pm 1$.

Для $\lambda_{(2)} = 2$ із системи рівнянь типу (1.1) отримуємо $n_1^{(2)} - n_2^{(2)} = 0$, $-n_1^{(2)} + n_2^{(2)} = 0$ і $-n_3^{(2)} = 0$. Таким чином, $n_3^{(2)} = 0$, а $n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, оскільки $n_i n_i = 1$.

Для $\lambda_{(3)} = 4$ із системи рівнянь типу (1.1) отримуємо $-n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0$, $-n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0$ і $3n_3^{(3)} = 0$. Таким чином, $n_3^{(3)} = 0$, а $n_1^{(3)} = -n_2^{(3)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Орієнтація головних осей x_i^* відносно вихідної системи x_i визначається направляючими косинусами, що наведені в таблиці.

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	0	0	± 1
x_2^*	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0
x_3^*	$\mp 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0

Звідси видно, що матриця тензора перетворення така

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \\ \mp 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 1.44. Показати, що головні осі тензора, що визначені в задачі 1.43, утворюють праву систему ортогональних координат.

Розв'язання

Для виконання умов ортогональності необхідно виконання умов $c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$ (де c_{ij} – тензор перетворення координат). Оскільки під час визначення c_{ij} вже були використані співвідношення $n_i n_i = 1$, умови ортогональності для $j = k$ виконано автоматично. Виконавши множення будь-якого рядка (стовпця) на відповідні елементи будь-чкого іншого рядка (стовпця) і склавши ці добутки, впевнимося, що розв'язку, який отримано в задачі 1.43, умови ортогональності виконано і для $j \neq k$.

Щоб система і до того ж була, необхідно, щоб $\mathbf{n}^{(2)} \times \mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{n}^{(1)}$. Таким чином

$$\mathbf{n}^{(2)} \times \mathbf{n}^{(3)} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{e}_1 - (0-0)\mathbf{e}_2 + (1/2 + 1/2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3,$$

де $\mathbf{n}^{(2)} = 1/\sqrt{2}\,\mathbf{e}_1 + 1/\sqrt{2}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}^{(3)} = -1/\sqrt{2}\mathbf{e}_1 + 1/\sqrt{2}\mathbf{e}_2$ за даними задачі 1.43.

Наявність знаків $\pm$ у компонент тензора c_{ij} в задачі 1.43 вказує на те, що існують дві системи головних осей x_i^* і x_i^{**}. Як вказує рис. 1.8, головні напрямки x_i^* утворюють праву систему, а x_i^{**} – ліву.

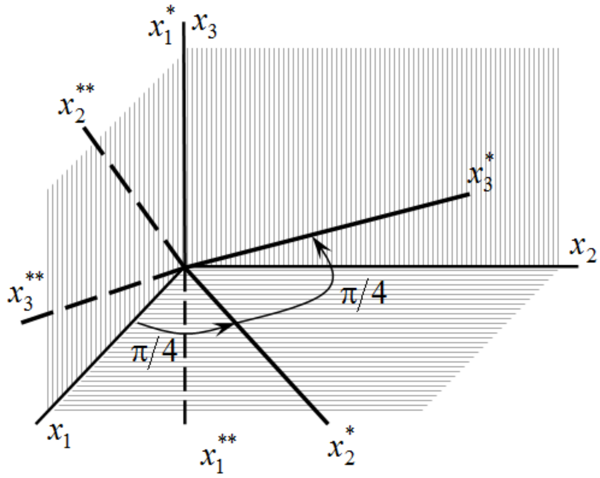


Рис. 1.8. До задачі 1.44

Задача 1.45. Показати, що матриця тензора T_{ij} задачі 1.43 може бути приведена до діагональної (головної форми) за допомогою перетворення $T_{ij}^{*} = c_{ip} c_{jq} T_{pq}$.

Розв'язання

$$\left[T_{ij}^{*}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Задача 1.46. Довести, що якщо усі три головних значення $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$ симетричного тензора другого рангу різні, то головні напрямки взаємно ортогональні.

Розв'язання

Доведення виконаємо для напрямів, що відповідають $\lambda_{(2)}$ і $\lambda_{(3)}$. Для кожного із них виконується співвідношення $T_{ij} n_j = \lambda n_i$, так що $T_{ij} n_j^{(2)} = \lambda_{(2)} n_i^{(2)}$ і $T_{ij} n_j^{(3)} = \lambda_{(3)} n_i^{(3)}$. Домножимо першу із цих рівностей на $n_i^{(3)}$, а другу на $n_i^{(2)}$:

$$T_{ij} n_j^{(2)} n_i^{(3)} = \lambda_{(2)} n_i^{(2)} n_i^{(3)},$$

$$T_{ij} n_j^{(3)} n_i^{(2)} = \lambda_{(3)} n_i^{(3)} n_i^{(2)}.$$

Оскільки тензор T_{ij} симетричний, можна поміняти місцями німі індекси i і j в лівій частині другого рівняння і потім друге рівняння відняти із першого. Отримаємо

$$T_{ij} n_j^{(2)} n_i^{(3)} = \lambda_{(2)} n_i^{(2)} n_i^{(3)}$$

$$-$$

$$T_{ij} n_i^{(3)} n_j^{(2)} = \lambda_{(3)} n_i^{(3)} n_i^{(2)}$$

$$=$$

$$\left(\lambda_{(2)} - \lambda_{(3)}\right) n_i^{(2)} n_i^{(3)} = 0.$$

Оскільки $\lambda_{(2)} \neq \lambda_{(3)}$, їх різниця не дорівнює нулю. Відповідно, $n_i^{(3)} n_i^{(2)} = 0$, а це і є умова ортогональності даних двох напрямів.

Задача 1.47. Обчислити головні значення тензора $\left(\hat{\mathbf{T}}\right)^2$ задачі 1.43 і впевнитися, що його головні осі співпадають з головними осями тензора $\hat{\mathbf{T}}$.

Розв'язання

$$\left[T_{ij}\right]^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння для цієї матриці буде таким

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 & 0 \\ -6 & 10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(10-\lambda)^2 - 36\right] = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-16) = 0,$$

звідки $\lambda_{(1)} = 1$, $\lambda_{(2)} = 4$, $\lambda_{(3)} = 16$.

Підставляючи ці значення в

$$\begin{cases} (T_{11}-\lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 = 0, \\ T_{21}n_1 + (T_{22}-\lambda)n_2 + T_{23}n_3 = 0, \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33}-\lambda)n_3 = 0. \end{cases}$$

і враховуючи умову $n_i n_i = 1$, отримуємо:

для $\lambda_{(1)} = 1$

$$\left.\begin{aligned} 9n_1^{(1)} - 6n_2^{(1)} = 0 \\ -6n_1^{(1)} + 9n_2^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ або } n_1^{(1)} = n_2^{(1)} = 0,\ n_3^{(1)} = \pm 1;$$

для $\lambda_{(2)} = 4$

$$\left.\begin{aligned} 6n_1^{(2)} - 6n_2^{(2)} = 0 \\ -6n_1^{(2)} + 6n_2^{(2)} = 0 \\ -3n_3^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ або } n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = \pm 1/\sqrt{2},\ n_3^{(2)} = 0;$$

для $\lambda_{(3)} = 16$

$$\left.\begin{aligned} -6n_1^{(3)} - 6n_2^{(3)} = 0 \\ -6n_1^{(3)} - 6n_2^{(3)} = 0 \\ -15n_3^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ або } n_1^{(3)} = n_2^{(3)} = \mp 1/\sqrt{2},\ n_3^{(3)} = 0.$$

Із отриманих даних видно, що головні напрями $\hat{\mathbf{T}}$ і $\left(\hat{\mathbf{T}}\right)^2$ однакові.

Задача 1.48. Скориставшись тим, що тензор $\left(\hat{\mathbf{T}}\right)^2$ і симетричний тензор $\hat{\mathbf{T}}$ мають однакові головні напрямки, знайти тензор $\sqrt{\hat{\mathbf{T}}}$, якщо

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Перш за все будемо шукати головні значення напрямків тензора $\hat{\mathbf{T}}$. Діючи так само, як і в задачі 1.43, знайдемо діагональну форму $\hat{\mathbf{T}}$.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 54\lambda + 72 = -(\lambda-6)(\lambda-3)(\lambda-4) = 0.$$

Тоді $\lambda_{(1)} = 3$, $\lambda_{(2)} = 4$, $\lambda_{(3)} = 6$.

Звідки, діагональна форма $\hat{\mathbf{T}}$ має вигляд

$$\hat{\mathbf{T}}^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Компоненти тензора перетворення координат c_{ij} знаходяться із

$$\begin{cases} (T_{11}-\lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 = 0, \\ T_{21}n_1 + (T_{22}-\lambda)n_2 + T_{23}n_3 = 0, \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33}-\lambda)n_3 = 0. \end{cases}$$

В результаті отримуємо

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Знайдемо тензор $\sqrt{\hat{\mathbf{T}}^*}$

$$\sqrt{\hat{\mathbf{T}}^*} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Тоді, знаючи матрицю $[c_{ij}]$, вернемося до початкових осей координат за допомогою $\sqrt{\hat{\mathbf{T}}} = \mathbf{A}_c \sqrt{\hat{\mathbf{T}}^*}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \sqrt{\hat{\mathbf{T}}^*}\,\mathbf{A}$, що можна записати в матричній формі так

$$\left[\sqrt{T_{ij}}\right]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+4 & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+\sqrt{6}+1 & \sqrt{2}-\sqrt{6}+1\\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-\sqrt{6}+1 & \sqrt{2}+\sqrt{6}+1\end{bmatrix}.$$

1.4. Декартові тензори та операції над ними

Задача 1.49. Для функції $\lambda = A_{ij}x_i x_j$, де A_{ij} – сталі, показати, що $\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}=\left(A_{ij}+A_{ji}\right)x_j$ і $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_i \partial x_j}=A_{ij}+A_{ji}$. Спростити ці похідні у випадку $A_{ij}=A_{ji}$.

Розв'язання

Розглянемо похідну

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}=A_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}x_j+A_{ij}x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\equiv\delta_{ik}\text{, то}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}=A_{kj}x_j+A_{ik}x_i=\left(A_{kj}+A_{jk}\right)x_j.$$

Диференціюючи другий раз, отримуємо

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_p \partial x_k}=\left(A_{kj}+A_{jk}\right)\frac{\partial x_j}{\partial x_p}=A_{kp}+A_{pk}.$$

Якщо $A_{ij}=A_{ji}$, то

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}=2A_{kj}x_j \text{ і } \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_p \partial x_k}=2A_{kp}.$$

Задача 1.50. Користуючись індексними позначеннями, довести векторні тотожності: а) $\nabla\times\nabla\varphi=0$; б) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a}=0$.

Розв'язання

а) Згідно з $\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i=\mathrm{grad}\varphi=\varphi_{,i}$, $\nabla\varphi$ записується у вигляді $\varphi_{,i}$, тоді $\mathbf{v}=\nabla\times\nabla\varphi$ має компоненти

$$v_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varphi_{,k} = \varepsilon_{ijk}\varphi_{,kj}.$$

Але ε_{ijk} антисиметричний тензор третього рангу по індексах j і k, тоді як $\varphi_{,kj}$ симетричний за цими індексами, отже добуток $\varepsilon_{ijk}\varphi_{,kj}$ обертається в нуль. До цього ж результату можна прийти, обчислюючи окремо кожну компоненту $\mathbf{v}$, наприклад

$v_1 = \varepsilon_{123}\varphi_{,23} + \varepsilon_{132}\varphi_{,32} = \varphi_{,23} - \varphi_{,32} = 0$ і так далі.

б) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a} = \lambda = \left(\varepsilon_{ijk}a_{k,j}\right)_{,i} = \varepsilon_{ijk}a_{k,ji} = 0$, оскільки $a_{k,ij} = a_{k,ji}$ і $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$.

Задача 1.51. Знайти похідну функції $\lambda = (x_1)^2 + 2x_1x_2 - (x_3)^2$ за напрямком, який задано одиничним вектором $\mathbf{n} = \frac{2}{7}\mathbf{e}_1 - \frac{3}{7}\mathbf{e}_2 - \frac{6}{7}\mathbf{e}_3$ або $\mathbf{n} = (2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3)/7$.

Розв'язання

Шукана функція обчислюється по формулі

$$\frac{\partial\lambda}{\partial n} = \nabla\lambda\cdot\mathbf{n} = \lambda_{,i}n_i.$$

Таким чином

$$\frac{\partial\lambda}{\partial n} = (2x_1 + 2x_2)\frac{2}{7} - (2x_1)\frac{3}{7} + (2x_3)\frac{6}{7} = \frac{2}{7}(-x_1 + 2x_2 + 6x_3).$$

Задача 1.52. Нехай A_{ij} – декартовий тензор другого рангу. Показати, що його похідна по x_k, тобто $A_{ij,k}$, є декартовим тензором третього рангу.

Розв'язання

Якщо x_i і x_i' – декартові системи координат, то $x_i = c_{ji}x_j'$ і $\frac{\partial x_i}{\partial x_j'} = c_{ji}$. Тоді будемо мати

$$A'_{ij,k} = \frac{\partial(A'_{ij})}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial x'_k}\left(c_{ip}c_{jq}A_{pq}\right) = c_{ip}c_{jq}\frac{\partial A_{pq}}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = c_{ip}c_{jq}c_{km}A_{pq,m},$$

а це і є правило перетворення декартового тензора третього рангу.

Задача 1.53. Нехай $r^2 = x_ix_i$ і $f(r)$ – похідна функція r. Показати, що: а) $\nabla(f(r)) = f'(r)\mathbf{x}/r$ і б) $\nabla^2(f(r)) = f''(r) + 2f'/r$, де штрихом позначено диференціювання по r.

Розв'язання

а) Вектор ∇f має компоненти $f_{,i}$, причому

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i},$$

а оскільки

$$\frac{\partial\left(r^2\right)}{\partial x_j} = 2r\frac{\partial r}{\partial x_j} = 2\delta_{ij}x_i,$$

то $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$.

Отже,

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'\frac{x_i}{r}.$$

б) $\nabla^2 f = f_{,ii} = \left(f'\frac{x_i}{r}\right)_{,i} = f''\frac{x_i x_i}{r^2} + f'\left(\frac{3}{r} - \frac{x_i x_i}{r^3}\right) = f'' + \frac{2f'}{r}$.

Задача 1.54. Скориставшись теоремою Гауса-Остроградського, показати, що $\int\limits_S x_i n_j dS = V\delta_{ij}$, де $n_j dS$ – елемент поверхні S, обмежений об'ємом V (рис. 1.9), x_i – радіус-вектор елемента поверхні $n_j dS$ і n_i – зовнішня нормаль до цього елемента.

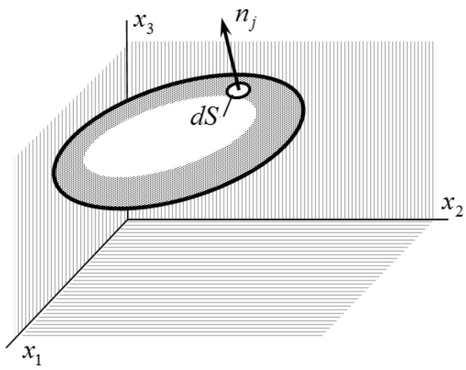


Рис. 1.9. До задачі 1.54

Розв'язання

По формулі $\int\limits_V T_{ijk\ldots,p} dV = \int\limits_S T_{ijk\ldots} n_p dS$ можна записати

$$\int\limits_S x_i n_j dS = \int\limits_V x_{i,j} dV = \int\limits_V \delta_{ij} dV = \delta_{ij} V.$$

Тут $x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}$.

Задача 1.55. Нехай дано вектор $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{v}$ і скалярну функцію координат $\lambda = \lambda(x_i)$. Показати, що $\int\limits_S \lambda b_i n_j dS = \int\limits_V \lambda b_i dV$.

Розв'язання

За умовами задачі $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{v}$, тобто $b_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$.

Тоді, використовуючи теорему Гауса-Остроградського, напишемо

$$\int_S \lambda b_i n_j dS = \int_S \varepsilon_{ijk} \lambda v_{k,j} n_i dS = \int_V \varepsilon_{ijk} \left(\lambda v_{k,j}\right)_{,i} dV =$$

$$= \int_V \left(\varepsilon_{ijk} \lambda_{,i} v_{k,j} + \varepsilon_{ijk} \lambda v_{k,ji}\right) dV = \int_V \lambda_{,i} b_i dV,$$

оскільки $\lambda \varepsilon_{ijk} v_{k,ji} = 0$.

1.5. Змішані задачі

Задача 1.56. Для довільних векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ показати, що

$$\lambda = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (ab)^2.$$

Розв'язання

Поміняємо місцями скалярне і векторне множення в першому члені. Тоді отримаємо

$$\lambda = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) =$$

$$= \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}] + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) =$$

$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (ab)^2,$$

оскільки другий і третій члени взаємно знищуються.

Задача 1.57. Нехай $\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ і $\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. Показати, що

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Розв'язання

а) У символічних позначеннях будемо мати

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) =$$

$$= (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{v} =$$

$$= (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

б) У індексних позначеннях. Нехай $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w}$, тоді

$$w_i = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{ijk} u_j v_k\right) = \varepsilon_{ijk} \dot{u}_j v_k + \varepsilon_{ijk} u_j \dot{v}_k,$$

а оскільки за умовами задачі $\dot{u}_j = \varepsilon_{jpq} \omega_p u_q$ і $\dot{v}_k = \varepsilon_{kmn} \omega_m v_n$, то

$$w_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jpq} \omega_p u_q v_k + \varepsilon_{ijk} u_j \varepsilon_{kmn} \omega_m v_n = \left(\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} - \varepsilon_{ink} \varepsilon_{kmj}\right) u_i \omega_m v_n.$$

Користуючись результатом задачі 1.59, отримуємо

$$w_i = \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{ij}\delta_{mn}\right)u_i\omega_m v_n =$$
$$= \left(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)u_i\omega_m v_n = \varepsilon_{imk}\varepsilon_{kjn}u_i\omega_m v_n,$$

що в індексній формі представляє вираз $\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.

Задача 1.58. Довести тотожність

$$\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо визначник A_{ij}

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Перестановка рядків і стовпців веде до зміни знаку визначника

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{11} & A_{13} \\ A_{22} & A_{21} & A_{23} \\ A_{32} & A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = -\det\mathbf{A}.$$

Якщо рядки міняти місцями довільну кількість разів, то

$$\begin{vmatrix} A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{mnr}\det\mathbf{A},$$

а якщо замінити місцями стовпці, то

$$\begin{vmatrix} A_{1p} & A_{1q} & A_{1s} \\ A_{2p} & A_{2q} & A_{2s} \\ A_{3p} & A_{3q} & A_{3s} \end{vmatrix} = \varepsilon_{pqs}\det\mathbf{A}.$$

Отже, для довільної послідовності перестановок рядків і стовпців отримаємо

$$\begin{vmatrix} A_{mp} & A_{mq} & A_{ms} \\ A_{np} & A_{nq} & A_{ns} \\ A_{rp} & A_{rq} & A_{rs} \end{vmatrix} = \varepsilon_{mnr}\varepsilon_{pqs}\det\mathbf{A}.$$

Якщо покласти $A_{ij} = \delta_{ij}$, то $\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix} = 1$. Тотожність доведено.

Задача 1.59. Скориставшись результатами задачі 1.58, довести, що:
а) $\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{snr}=\delta_{pn}\delta_{qr}-\delta_{pr}\delta_{qn}$; б) $\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{sqr}=-2\delta_{pr}$.

Розв'язання

У тотожності, що доведена в задачі 1.58, розкладемо визначник по першому рядку

$$\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{mnr}=\delta_{mp}(\delta_{nq}\delta_{rs}-\delta_{ns}\delta_{rq})+\delta_{mq}(\delta_{ns}\delta_{rp}-\delta_{np}\delta_{rs})+\delta_{ms}(\delta_{np}\delta_{rq}-\delta_{nq}\delta_{rp}).$$

а) Покладемо $m=s$, отримаємо

$$\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{snr}=\delta_{sp}(\delta_{nq}\delta_{rs}-\delta_{ns}\delta_{rq})+\delta_{sq}(\delta_{ns}\delta_{rp}-\delta_{np}\delta_{rs})+\delta_{ss}(\delta_{np}\delta_{rq}-\delta_{nq}\delta_{rp})=$$
$$=\delta_{rp}\delta_{nq}-\delta_{pn}\delta_{rq}+\delta_{qn}\delta_{rp}-\delta_{np}\delta_{qr}+3\delta_{np}\delta_{rq}-3\delta_{nq}\delta_{rp}=$$
$$=\delta_{np}\delta_{rq}-\delta_{nq}\delta_{rp}.$$

б) В отриманому в а) співвідношенні покладемо n рівним q, тоді

$$\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{sqr}=\delta_{qp}\delta_{rq}-\delta_{qq}\delta_{rp}=\delta_{pr}-3\delta_{rp}=-2\delta_{rp}.$$

Задача 1.60. Тензор другого рангу $\hat{\mathbf{B}}$ є кососиметричним, тобто $\hat{\mathbf{B}}=-\hat{\mathbf{B}}_v$
.
Показати, що $\hat{\mathbf{B}}_v\times\mathbf{a}=2\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{B}}$.

Розв'язання

Напишемо $\hat{\mathbf{B}}$ у вигляді $\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{b}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{b}_3\mathbf{e}_3$ (див. задачу 1.6). Тоді
$\hat{\mathbf{B}}_v=\mathbf{b}_1\times\mathbf{e}_1+\mathbf{b}_2\times\mathbf{e}_2+\mathbf{b}_3\times\mathbf{e}_3$
і

$$\hat{\mathbf{B}}_v\times\mathbf{a}=(\mathbf{b}_1\times\mathbf{e}_1)\times\mathbf{a}+(\mathbf{b}_2\times\mathbf{e}_2)\times\mathbf{a}+(\mathbf{b}_3\times\mathbf{e}_3)\times\mathbf{a}=$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1)\mathbf{e}_1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{b}_1+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2)\mathbf{e}_2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{b}_2+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_3)\mathbf{e}_3-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{b}_3=$$
$$=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{b}_2\mathbf{e}_2+\mathbf{b}_3\mathbf{e}_3)-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{b}_2+\mathbf{e}_3\mathbf{b}_3)=$$
$$=\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{B}}-\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{B}}_v=\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{B}}+\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{B}}=2\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{B}}.$$

Задача 1.61. Скориставшись співвідношенням Гамільтона-Келі, знайти $(\hat{\mathbf{B}})^4$ для тензора

$$\hat{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}.$$

Перевірити результат безпосереднім піднесенням у квадрат $(\hat{\mathbf{B}})^2$.

Розв'язання

Характеристичне рівняння для тензора $\hat{\mathbf{B}}$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 6\lambda + 9\right) = 0.$$

За теоремою Гамільтона-Келі тензор задовольняє власному характеристичному рівнянню. Отже,

$$\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^3 - 2\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 - 6\hat{\mathbf{B}} + 9\hat{\mathbf{I}} = 0. \qquad (1.2)$$

Помножаючи цю рівність на $\hat{\mathbf{B}}$, отримуємо

$$\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^4 = 2\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^3 + 6\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 - 9\hat{\mathbf{B}}, \qquad (1.3)$$

або, підставляючи $\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^3 = 2\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 + 6\hat{\mathbf{B}} - 9\hat{\mathbf{I}}$ із рівняння (1.2) в рівняння (1.3), будемо мати

$$\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^4 = 2\left[2\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 + 6\hat{\mathbf{B}} - 9\hat{\mathbf{I}}\right] + 6\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 - 9\hat{\mathbf{B}} \to \left(\hat{\mathbf{B}}\right)^4 = 4\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 + 12\hat{\mathbf{B}} - 18\hat{\mathbf{I}} + 6\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 - 9\hat{\mathbf{B}} \to$$

$$\to \left(\hat{\mathbf{B}}\right)^4 = 10\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 + 3\hat{\mathbf{B}} - 18\hat{\mathbf{I}}.$$

Звідки знайдемо

$$\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^4 = 10\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 18\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Тут $\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Перевіримо отриманий результат, безпосереднім множенням тензора $\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^2$ самого на себе

$$\left(\hat{\mathbf{B}}\right)^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.62. Довести, що: а) A_{ii}, б) $A_{ij}A_{ij}$, в) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjp}A_{ip}$ є інваріантами відносно перетворення координат $T_{ij} = c_{pi}c_{qj}T'_{pq}$, тобто, що $A_{ii} = A'_{ii}$ і так далі.

Розв'язання

а) Згідно з $T_{ij} = c_{pi}c_{qj}T'_{pq}$, $A_{ij} = c_{pi}c_{qj}A'_{pq}$, тоді

$$A_{ii} = c_{pi}c_{qi}A'_{pq} = \delta_{pq}A'_{pq} = A'_{pp} = A'_{ii}.$$

б) $A_{ij}A_{ij} = c_{pi}c_{qj}A'_{pq}c_{mi}c_{mj}A'_{mn} = \delta_{pm}\delta_{qn}A'_{pq}A'_{mn} = A'_{pq}A'_{pq} = A'_{ij}A'_{ij}$.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjp}A_{ip} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjp}c_{mi}c_{np}A'_{mn} = (\delta_{ij}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jj})c_{mi}c_{np}A'_{mn} =$$

в) $$= (\delta_{ij}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jj})c_{mi}c_{np}A'_{mn} = (\delta_{mn} - \delta_{mn}\delta_{jj})A'_{mn} =$$

$$= (\delta_{mj}\delta_{nj} - \delta_{mn}\delta_{jj})A'_{mn} = \varepsilon_{mjk}\varepsilon_{kjn}A'_{mn}.$$

Задача 1.63. Показати, що бівектор довільного тензора T_{ij} залежить тільки від $T_{[ij]}$, однак добуток $T_{ij}S_{ij}$ тензора T_{ij} на симетричний тензор S_{ij} від $T_{[ij]}$ не залежить.

Розв'язання

За визначенням $v_i = \varepsilon_{ijk}P_{jk}$ бівектор тензора T_{ij} має компоненти $v_i = \varepsilon_{ijk}T_{jk}$ або $v_i = \varepsilon_{ijk}\left(T_{(jk)} + T_{[jk]}\right) = \varepsilon_{ijk}T_{[jk]}$, (де $T_{(jk)}$ симетрична частина T_{ij}, а $T_{[jk]}$ – антисиметрична), оскільки $\varepsilon_{ijk}T_{(jk)} = 0$ (ε_{ijk} – антисиметричний по j і k, а $T_{(jk)}$ – симетричний за індексами j і k).

Вказаний добуток можна записати у вигляді $T_{ij}S_{ij} = T_{(ij)}S_{ij} + T_{[ij]}S_{ij}$. Тут $T_{[ij]}S_{ij} = 0$ і, відповідно, $T_{ij}S_{ij} = T_{(ij)}S_{ij}$.

Задача 1.64. Показати, що $\mathbf{D}:\mathbf{E}$ дорівнює $\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{E}$, якщо $\mathbf{E}$ – симетричний тензор другого рангу.

Розв'язання

Напишемо тензори у вигляді $\hat{\mathbf{D}} = D_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ і $\hat{\mathbf{E}} = E_{pq}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q$. Згідно з

$$\mathbf{ab}:\mathbf{cd} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) = \lambda,$$

$$\mathbf{D}:\mathbf{E} = D_{ij}E_{pq}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_p)(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_q).$$

Внаслідок $\mathbf{ab}\cdot\cdot\mathbf{cd} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) = \lambda$ маємо

$$\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{E} = D_{ij}E_{pq}(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_p)(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_q) = D_{ij}E_{qp}(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_p)(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_q),$$

оскільки $E_{pq} = E_{qp}$. Якщо тепер в останньому виразі поміняти місцями німі індекси p і q, то отримаємо

$$\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{E} = D_{ij}E_{pq}(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_q)(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_p) = D_{ij}E_{pq}(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_p)(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_q).$$

Задача 1.65. Користуючись індексними позначеннями, довести векторну тотожність

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}.$$

Розв'язання

Нехай $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{v}$. Тоді $v_p = \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}\partial_q a_j b_k$ або

$$v_p = \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}\left(a_j b_k\right)_{,q} = \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}\left(a_{j,q}b_k + a_j b_{k,q}\right) =$$

$$= \left(\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj}\right)\left(a_{j,q}b_k + a_j b_{k,q}\right) =$$

$$= a_{p,q}b_q - a_{q,q}b_p + a_p b_{q,q} - a_q b_{p,q}.$$

А це означає, що $\mathbf{v}=(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}-\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$.

Задача 1.66. За допомогою теореми Гауса-Остроградського показати, що $\int\limits_S \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{x})dS=2\mathbf{a}V$, де V – об'єм, укладений всередині поверхні S, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль, $\mathbf{x}$ – радіус-вектор будь-якої точки об'єму V, $\mathbf{a}$ – довільний сталий вектор.

Розв'язання

У індексних позначеннях даний інтеграл по поверхні має компоненти $\int\limits_S \varepsilon_{qpi} n_p \varepsilon_{ijk} a_j x_k dS$. По формулі $\int\limits_V T_{ijk\cdots,p}dV=\int\limits_S T_{ijk\ldots}n_p dS$ даний інтеграл перетворюється в інтеграл по об'єму $\int\limits_V \left(\varepsilon_{qpi}\varepsilon_{ijk}a_j x_k\right)_{,p}dV$. Враховуючи, що $\mathbf{a}$ – сталий вектор, останній вираз можна перетворити таким чином

$$\int\limits_V \varepsilon_{qpi}\varepsilon_{ijk}a_j x_{k,p}dV=\int\limits_V \left(\delta_{qj}\delta_{pk}-\delta_{qk}\delta_{pj}\right)a_j x_{k,p}dV=\int\limits_V \left(a_q x_{p,p}-a_p x_{q.p}\right)dV=$$

$$=\int\limits_V \left(a_q\delta_{pp}-a_p\delta_{qp}\right)dV=\int\limits_V \left(3a_q-a_q\right)dV=2a_q V$$

Тут використано, що $x_{q,p}=\dfrac{\partial x_q}{\partial x_p}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\delta_{qp},\ \ \delta_{pp}=3.$

Задача 1.67. Показати, що перетворення відображення осей координат (рис. 1.10) є ортогональним.

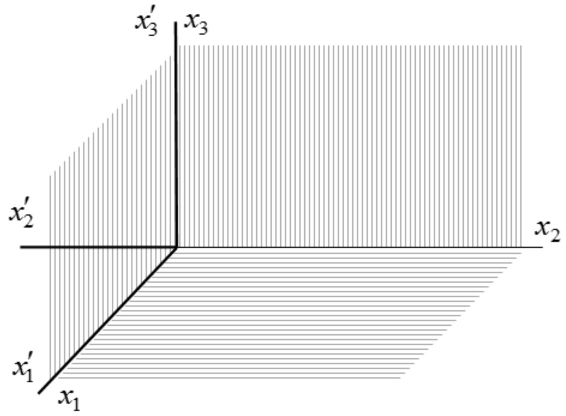


Рис. 1.10. До задачі 1.67

Розв'язання

Із рис. 1.10 видно, що матриця перетворення має такий вигляд

$$\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Умови ортогональності $c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$ або $c_{ji}c_{ki} = \delta_{jk}$, очевидно, виконано. У матричній формі це можна перевірити, скориставшись формулою $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 1.68. Показати, що $\left(\hat{\mathbf{I}} \times \mathbf{v}\right) \cdot \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{D}}$.

Розв'язання

$$\hat{\mathbf{I}} \times \mathbf{v} = (\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \times \left(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}\right) =$$

$$= \mathbf{i}\left(v_y\mathbf{k} - v_z\mathbf{j}\right) + \mathbf{j}\left(-v_x\mathbf{k} + v_z\mathbf{i}\right) + \mathbf{k}\left(v_x\mathbf{j} - v_y\mathbf{i}\right) =$$

$$= (\mathbf{v} \times \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \times \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{v} \times \mathbf{k})\mathbf{k} = \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{I}}.$$

Звідки витікає, що

$$\left(\hat{\mathbf{I}} \times \mathbf{v}\right) \cdot \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{D}},$$

де $\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}}$.

Задача 1.69. Обчислити:

а) суми δ_{ii}, $\delta_{ij}\delta_{ji}$, $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$, якщо всі індекси пробігають значення 1,2,3;

б) ті ж суми, якщо всі індекси пробігають значення 1,2,…,n.

Розв'язання

а) Якщо індекс застосовується двічі, то розуміється, що цей індекс приймає всі значення із свого інтервалу зміни і члени, що відповідають кожному значенню індексу із набору, підсумовуються. Індекси, що повторюються, часто називають німими.

При $i, j, k = \overline{1,3}$ маємо для символу Кронекера $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, що

під однаковою індексацією тензора розуміється сума його діагональних членів, тобто

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3;$$

Добуток символів Кронекера

$$\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{i1}\delta_{1i} + \delta_{i2}\delta_{2i} + \delta_{i3}\delta_{3i} = \delta_{ii} = 1$$

і

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} = \left(\delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k}\right)\delta_{ki} = \delta_{ik}\delta_{ki} = \delta_{i1}\delta_{1i} + \delta_{i2}\delta_{2i} + \delta_{i3}\delta_{3i} = \delta_{ii} = 1;$$

б) при $i, j, k = \overline{1, n}$ маємо для символу Кронекера $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$, що

$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \ldots + \delta_{nn} = 1 + 1 + \ldots + 1 = n,$

і аналогічно попередньому завданню маємо, що

$\delta_{ij}\delta_{ji} = n$ і $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} = n$.

Задача 1.70. Показати, що повна згортка симетричного s_{ij} і антисиметричного a_{ki} тензорів дорівнює нулю: $s_{ij}a_{ij} = 0$.

Розв'язання

Згортка не залежить від того, якими літерами позначені індекси, за якими виконується підсумовування. Тому $s_{ij}a_{ij} = s_{ji}a_{ji}$. Лишається відмітити, що $s_{ji} = s_{ij}$ і $a_{ji} = -a_{ij}$, і, таким чином, $s_{ij}a_{ij} = -s_{ij}a_{ji} = 0$.

Перевірка:

маємо симетричний тензор другого рангу $s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}$ і

антисиметричний тензор $a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$.

Згортка з добутком тензорів аналогічна скалярному добутку. В результаті такого добутку маємо $s_{ij}a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & s_{12}a_{12} & s_{13}a_{13} \\ -s_{12}a_{12} & 0 & s_{23}a_{23} \\ -s_{13}a_{13} & -s_{23}a_{23} & 0 \end{pmatrix}$. Виконаємо повну згортку

$$0 + s_{12}a_{12} + s_{13}a_{13} - s_{12}a_{12} + 0 + s_{23}a_{23} - s_{13}a_{13} - s_{23}a_{23} + 0 = 0.$$

Задача 1.71. Кульовою складовою $\mathbf{t}^{(s)}$ і девіатором $\mathbf{t}^{(d)}$ симетричного тензора $\mathbf{t}$ другого рангу називаються відповідно тензори з компонентами

$t_{ij}^{(s)} = \frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}$ і $t_{ij}^{(d)} = t_{ij} - \frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}$.

а) Знайти девіатор кульової складової $\left(\mathbf{t}^{(s)}\right)^{(d)}$.

б) Знайти кульову складову девіатора $\left(\mathbf{t}^{(d)}\right)^{(s)}$.

Розв'язання

а) Девіатор кульової складової за означенням девіатора визначається як

$$\left(t_{ij}^{(s)}\right)^{(d)}=t_{ij}^{(s)}-\frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}=\frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}-\frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

б) Кульова складова девіатора визначається за означенням кульової складової

$$\left(t_{ij}^{(d)}\right)^{(s)}=\frac{1}{3}t_{kk}^{(d)}\delta_{ij}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

оскільки для девіатора завжди справедлива рівність $t_{kk}^{(d)}=0$.

Задача 1.72. Покажіть, що за допомогою тензора Леві-Чивіти змішаний добуток трьох векторів $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ може бути представлений в такому вигляді

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\varepsilon_{ijk}a^i b^j c^k$$

в будь-якій системі координат.

Розв'язання

Змішаний добуток векторів можна представити через компоненти у вигляді визначника (який можна визначити, наприклад, за допомогою правила Крамера)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2- \tag{1.4}$$

$$-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

Скористаємося тензором Леві-Чивіти ε_{ijk}, який має 27 компонент і в будь-якій ортогональній системі координат визначається в такій формі:

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3;\\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3;\\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i=j, \text{ або } j=k, \text{ або } k=i).\end{cases}$$

Тобто, скориставшись рис. 1.11 нескладно записати, що

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\\&\varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=-1,\end{aligned} \tag{1.5}$$

а всі інші 18 компонент, в яких індекси повторюються, дорівнюють нулю.

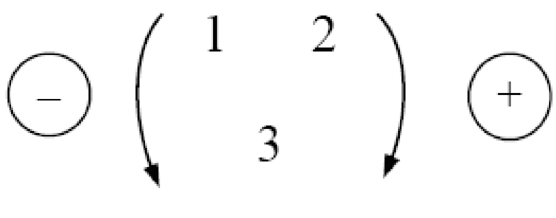


Рис. 1.11. До визначення ε_{ijk}

Із порівняння індексів при компонентах векторів $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ і знаків в (1.4) з індексацією і знаками символів Леві-Чивіти ε_{ijk} в (1.5) витікає формула для визначення змішаного добутку трьох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ за допомогою тензора Леві-Чивіти

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k ,$$

що і треба було показати.

Задача 1.73. Покажіть, що об'єм паралелепіпеда зі сторонами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ дорівнює $\left| \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \right|$.

Розв'язання

Виберемо довільним чином три вектори:

$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{c} = c_k \mathbf{e}_k$, $i, j, k = 1,2,3$.

Об'єм паралелепіпеда, який побудовано на цих векторах, є визначник

$$V_{\mathbf{abc}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} . \qquad (1.6)$$

Об'єм $V_{\mathbf{abc}}$ є скаляром і не змінюється при перетворенні координат. При цьому $V_{\mathbf{abc}} > 0$, якщо орієнтація векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ співпадає з орієнтацією $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, в протилежному випадку $V_{\mathbf{abc}} < 0$.

Безпосередньою перевіркою можна показати, що визначник (1.6) можна виразити через тензор Леві-Чивіти ε_{ijk}

$$V_{\mathbf{abc}} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 ,$$

а із визначення тензора Леві-Чивіти маємо, що

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \ \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1.$$

Тому спираючись на порівнянні індексів і знаків тензорів останніх виразів можна записати, що

$$V_{\mathbf{abc}} = \left| \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k \right| ,$$

що і треба було показати.

Таким чином $V_{\mathbf{abc}}$ є згорткою математичного об'єкта і компонент тензора $a^i b^j c^k$ і ця згортка для будь-яких векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, які визначають тензор $a^i b^j c^k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$, є скаляром. Тому $\mathbf{E} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ є тензором 3-го рангу і називається тензором Леві-Чивіти або ε-тензором. Легко бачити, що ε-тензор антисиметричний за перестановкою двох індексів:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{jik} .$$

1.6. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 1.74. Показати, що вектори $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ і $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ взаємно перпендикулярні. Знайти такий вектор $\mathbf{w}$, щоб $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ утворювали правий тріедр.

Відповідь: $\mathbf{w} = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

Задача 1.75 Знайти матрицю перетворення, що зв'язує трійку векторів $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ задачі 1.69 і орти осей координат.

Відповідь:

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Задача 1.76. Використовуючи індексні позначення, довести, що: а) $\nabla \cdot \mathbf{x} = 3$, б) $\nabla \times \mathbf{x} = 0$, в) $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{x} = \mathbf{a}$, де $\mathbf{x}$ – радіус-вектор, а $\mathbf{a}$ – деякий сталий вектор.

Задача 1.77. Знайти головні значення симетричної частини тензора

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -6 & -6 \\ -3 & -18 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\lambda_{(1)} = -15$, $\lambda_{(2)} = 5$, $\lambda_{(3)} = 10$.

Задача 1.78. Для симетричного тензора

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

визначити головні значення і напрямки головних осей.

Відповідь: $\lambda_{(1)} = 2$, $\lambda_{(2)} = 7$, $\lambda_{(3)} = 12$.

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$-3/(5\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$-4/(5\sqrt{2})$
x_2^*	$4/5$	0	$-3/5$
x_3^*	$3/(5\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$4/(5\sqrt{2})$

Задача 1.79. Дано довільний вектор $\mathbf{v}$ і будь-який одиничний вектор $\mathbf{e}$. Показати, що $\mathbf{v}$ можна розкласти на дві компоненти – паралельну і перпендикулярну вектору $\mathbf{e}$, тобто, що $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + \mathbf{e} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e})$.

Задача 1.80. Нехай $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}}$ і $\nabla \times \mathbf{w} = -\dot{\mathbf{v}}$. Показати, що $\nabla^2 \mathbf{v} = \ddot{\mathbf{v}}$.

Задача 1.81. Провести перевірку розв'язку задачі 1.48, показавши безпосереднім множенням, що $[\overline{\overline{\mathbf{T}}}]\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \mathbf{T}$.

Задача 1.82. Витягти корінь квадратний із тензора

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\sqrt{\hat{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) & \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) & \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Задача 1.83. Скориставшись розв'язками задачі 1.40, тобто рівністю $\det \hat{\mathbf{A}} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$, показати, що $\det\left(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\right) = \det \hat{\mathbf{A}} \det \hat{\mathbf{B}}$.

Задача 1.84. Впевнитись у тому, що: а) $\delta_{3p} v_p = v_3$, б) $\delta_{3i} A_{ji} = A_{j3}$, в) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$, г) $\delta_{i2}\delta_{j3} A_{ji} = A_{23}$.

Задача 1.85. Перетворення, що зв'язує системи координат $Ox_1'x_2'x_3'$ і $Ox_1x_2x_3$ задано таблицею

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$3/\left(5\sqrt{2}\right)$	$1/\sqrt{2}$	$4/\left(5\sqrt{2}\right)$
x_2^*	$4/5$	0	$-3/5$
x_3^*	$-3/\left(5\sqrt{2}\right)$	$1/\sqrt{2}$	$-4/\left(5\sqrt{2}\right)$

а) Показати, що виконано умови ортогональності $c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$ і $c_{pq}c_{sq} = \delta_{ps}$.

б) Визначити в системі зі штрихом координати точки, що має радіус-вектор $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$.

в) Як виглядає в системі зі штрихами рівняння площини $x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$?

Відповідь: б) $\left(2/\left(5\sqrt{2}\right), 11/5, -2/\left(5\sqrt{2}\right)\right)$, в) $\sqrt{2}x_1' - x_2' + 2\sqrt{2}x_3' = 1$.

Задача 1.86. Показати, що об'єм V, що розміщений всередині поверхні S, можна задати виразом $V = \dfrac{1}{6}\int\limits_S \nabla(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}dS$, де $\mathbf{x}$ – радіус-вектор, а $\mathbf{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Вказівка: записати V у вигляді $V = \dfrac{1}{6}\int\limits_S \left(x_i x_i\right)_{,j} n_j dS$ і використовувати формулу $\int\limits_V T_{ijk\cdots,p} dV = \int\limits_S T_{ijk\ldots} n_p dS$.

Задача 1.87. Показати, будь-який тензор другого рангу можна записати у вигляді суми симетричного і антисиметричного тензорів. Чи є єдиним таке представлення?

Відповідь: $t_{ij} = \frac{1}{2}\left(t_{ij} + t_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(t_{ij} - t_{ji}\right)$; представлення єдине.

Задача 1.88. Показати, що якщо для тензора другого рангу за умови будь-якого вектору $\mathbf{v}$ виконується рівність $t_{ij}v_i v_j = 0$, то тензор $\mathbf{t}$ антисиметричний.

Задача 1.89. Знайти головні компоненти і головні осі тензора, що має в деякому ортонормованому базисі $\mathbf{e}_i$ таку матрицю компонент:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $\lambda_{(1)} = -2$, $\lambda_{(2)} = 1$, $\lambda_{(3)} = 3$; $\mathbf{n}^{(1)} = \sqrt{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}^{(2)} = -\sqrt{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{e}_3$; б) $\lambda_{(1)} = -2$, $\lambda_{(2)} = \lambda_{(3)} = 2$.

Задача 1.90. Перевірте справедливість наступних співвідношень для тензора Леві-Чивіти:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp},\ \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij},\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

Задача 1.91. а) Покажіть, що за допомогою тензора Леві-Чивіти змішаний добуток трьох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ може бути представлено в такому вигляді

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$$

в будь-якій системі координат.

б) Напишіть компоненти подвійного векторного добутку

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ через їх компоненти.

2. НАПРУЖЕНИЙ СТАН

2.1. Напружений стан у точці. Вектор напруження. Тензор напруження

Задача 2.1. Вектори напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$ і $t_i^{(\mathbf{n}^*)}$ в точці P діють відповідно на елементи поверхні $n_i \Delta S$ і $n_i^* \Delta S^*$. Показати, що компонента $t_i^{(\mathbf{n})}$ в напрямку n_i^* дорівнює компоненті $t_i^{(\mathbf{n}^*)}$ в напрямку n_i (рис. 2.1).

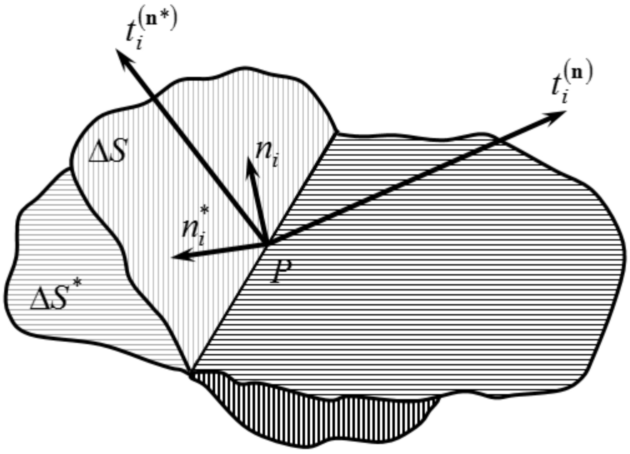


Рис. 2.1. До задачі 2.1

Розв'язання

За умовами задачі вимагається показати, що

$t_i^{(\mathbf{n}^*)} n_i = t_i^{(\mathbf{n})} n_i^*$.

Згідно $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j$ можна написати $t_i^{(\mathbf{n}^*)} n_i = \sigma_{ji} n_j^* n_i$, а в силу симетрії $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, так, що

$$\sigma_{ji} n_j^* n_i = (\sigma_{ij} n_i) n_j^* = t_j^{(\mathbf{n})} n_j^*,$$

що і треба було показати.

Задача 2.2. Тензор напруження в точці P задано так

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор нормалі в точці P на площадці з одиничним вектором нормалі $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3$.

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося співвідношенням $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Для більшої наочності множення виконаємо в матричній формі $\left[t_{1j}^{(\mathbf{n})}\right] = [n_{1k}][\sigma_{kj}]$

$$\left[t_1^{(\mathbf{n})},\quad t_2^{(\mathbf{n})},\quad t_3^{(\mathbf{n})}\right]=\left[\frac{2}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad \frac{1}{3}\right]\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\left[\frac{14}{3}-\frac{2}{3},\quad -\frac{10}{3},\quad -\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right].$$

Таким чином

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}=4\mathbf{e}_1-\frac{10}{3}\mathbf{e}_2.$$

Задача 2.3. Для вектора напруження задачі 2.2 визначити: а) компоненту, перпендикулярну площадці; б) модуль $t_i^{(\mathbf{n})}$; в) кут між $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$ і $\mathbf{n}$.

Розв'язання

а) За умовами і розв'язками задачі 2.2 $\mathbf{n}=\frac{2}{3}\mathbf{e}_1-\frac{2}{3}\mathbf{e}_2+\frac{1}{3}\mathbf{e}_3$ і $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}=4\mathbf{e}_1-\frac{10}{3}\mathbf{e}_2$. Тоді можна визначити

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\cdot\mathbf{n}=\left(4\mathbf{e}_1-\frac{10}{3}\mathbf{e}_2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\mathbf{e}_1-\frac{2}{3}\mathbf{e}_2+\frac{1}{3}\mathbf{e}_3\right)=\frac{44}{9}.$$

б) $\left|t_i^{(\mathbf{n})}\right|=\sqrt{t_i^{(\mathbf{n})}\cdot t_i^{(\mathbf{n})}}=\sqrt{\left(4\mathbf{e}_1-\frac{10}{3}\mathbf{e}_2\right)\cdot\left(4\mathbf{e}_1-\frac{10}{3}\mathbf{e}_2\right)}=\sqrt{16+\frac{100}{9}}=\frac{2\sqrt{61}}{3}\approx 5{,}207.$

в) Оскільки $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\cdot\mathbf{n}=\left|\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\right|\cos\theta$, то

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\cdot\mathbf{n}}{\left|\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\right|}=\frac{44\cdot 3}{9\cdot 2\sqrt{61}}=\frac{22}{3\sqrt{61}}\approx 0{,}939,$$

$$\theta=\arccos(0{,}939)\frac{180}{\pi}\approx 20{,}1^\circ.$$

Задача 2.4. Дано вектори напруження $t_i^{(\mathbf{e}_1)}$, $t_i^{(\mathbf{e}_2)}$, $t_i^{(\mathbf{e}_3)}$, що діють на три координатні площадки. Показати, що сума квадратів модулів цих векторів не залежить від орієнтації кожної координатної площини.

Розв'язання

Нехай S – вказана сума. Тоді

$$S=t_i^{(\mathbf{e}_1)}t_i^{(\mathbf{e}_1)}+t_i^{(\mathbf{e}_2)}t_i^{(\mathbf{e}_2)}+t_i^{(\mathbf{e}_3)}t_i^{(\mathbf{e}_3)},$$

а із $t_j^{(\mathbf{e}_i)}\equiv\sigma_{ji}$ витікає, що

$$S=\sigma_{1i}\sigma_{1i}+\sigma_{2i}\sigma_{2i}+\sigma_{3i}\sigma_{3i}=\sigma_{ji}\sigma_{ji}$$ – інваріант.

Задача 2.5. Напружений стан у деякій точці задано тензором напружень

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix},$$

де a, b, c – константи, а σ – деяке значення напруження. Визначити константи a, b, c так, щоб вектор напруження на октаедричній площадці з одиничною нормаллю $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3$ дорівнював би нулю.

Розв'язання

Для заданих тензора напруження і вектора нормалі величина $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j$ повинна дорівнювати нулю. Напишемо цей вираз у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ звідки маємо } \begin{matrix} a + b = -1; \\ a + c = -1; \\ b + c = -1. \end{matrix}$$

Розв'язуючи ці рівняння, отримуємо $a = b = c = -\frac{1}{2}$. Тоді розв'язок задачі виражається таким тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma/2 & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & \sigma & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & -\sigma/2 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Задача 2.6. У точці P задано тензор напружень

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження на площадці, що проходить через точку P паралельно площині ABC, що показана на рис. 2.2.

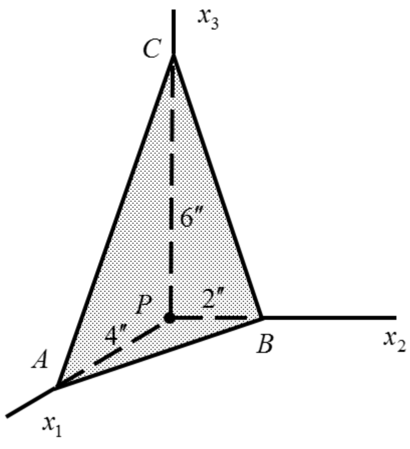


Рис. 2.2. До задачі 2.6

Розв'язання

Площина ABC, що проходить через три задані точки $A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$ і $C(0,0,6)$ (див. рис. 2.2), визначається рівнянням

$$\begin{vmatrix} x_1-4 & x_2-0 & x_3-0 \\ x_1-0 & x_2-2 & x_3-0 \\ x_1-0 & x_2-0 & x_3-6 \end{vmatrix} = 0 \to 12x_1+24x_2+8x_3=48 \to 3x_1+6x_2+2x_3=12.$$

Вектор нормалі до площини ABC визначається через векторний добуток двох векторів, що утворюють дану площину, наприклад

$$\mathbf{v} = \mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12\mathbf{e}_1+24\mathbf{e}_2+8\mathbf{e}_3 \text{ і тоді}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{12\mathbf{e}_1+24\mathbf{e}_2+8\mathbf{e}_3}{\sqrt{12^2+24^2+8^2}} = \frac{12\mathbf{e}_1+24\mathbf{e}_2+8\mathbf{e}_3}{28} = \frac{3}{7}\mathbf{e}_1+\frac{6}{7}\mathbf{e}_2+\frac{2}{7}\mathbf{e}_3,$$

де $\mathbf{AB} = -4\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{AC} = -4\mathbf{e}_1+6\mathbf{e}_3$.

За формулою $\left[t_1^{(\mathbf{n})} \quad t_2^{(\mathbf{n})} \quad t_3^{(\mathbf{n})}\right] = \left[n_1 \quad n_2 \quad n_3\right]\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ вектор напруження можна визначити множенням вектора нормалі на матрицю компонентів тензора напружень

$$\left[\frac{3}{7}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{2}{7}\right]\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\left[-9, \quad 5, \quad 10\right].$$

Таким чином,

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = -\frac{9}{7}\mathbf{e}_1+\frac{5}{7}\mathbf{e}_2+\frac{10}{7}\mathbf{e}_3.$$

Задача 2.7. Напружений стан у будь-якій точці суцільного середовища в декартовій системі координат задано тензором

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження в точці $P\left(2, 1, \sqrt{3}\right)$ на площадці, дотичній у цій точці до циліндричної поверхні $x_2^2+x_3^2=4$.

Розв’язання

Після підстановки $P\left(2, 1, \sqrt{3}\right)$ напруження в цій точці приймають значення

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Одиничний вектор нормалі в точці P визначається вектором

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \nabla\left(x_2^2 + x_3^2 - 4\right).$$

Таким чином,

$$\nabla\varphi = 2x_2\mathbf{e}_2 + 2x_3\mathbf{e}_3$$

і, відповідно, в точці $P\left(2, 1, \sqrt{3}\right)$

$$\nabla\varphi = 2\mathbf{e}_2 + 2\sqrt{3}\mathbf{e}_3.$$

Тоді одиничний вектор нормалі в точці P є (рис. 2.3)

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = \frac{2\mathbf{e}_2 + 2\sqrt{3}\mathbf{e}_3}{\sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{2\mathbf{e}_2 + 2\sqrt{3}\mathbf{e}_3}{4} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_3.$$

На кінець, вектор напруження на площадці, яка перпендикулярна до $\mathbf{n}$ в точці P, визначається за формулою $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

або

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \sqrt{3}\mathbf{e}_3.$$

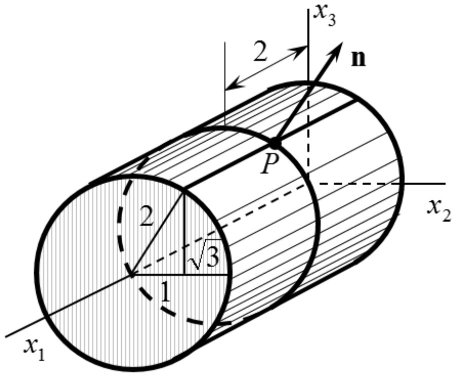


Рис. 2.3. До задачі 2.7

2.2. Рівняння рівноваги

Задача 2.8. Який вигляд повинні мати компоненти масової сили, якщо за умови розподілу напруження задачі 2.7, усюди виконуються рівняння рівноваги $\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0$?

Розв'язання

Підставимо в рівняння $\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0$ значення, які безпосередньо обчислені за заданим у задачі 3.7 тензором напруження $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}$:

$$3x_2 + 10x_2 + 0 + \rho b_1 = 0;$$
$$0 + 0 + 2 + \rho b_2 = 0;$$
$$0 + 0 + 0 + \rho b_3 = 0.$$

Ці рівняння задовольняються за умови $b_1 = -13x_2/\rho$, $b_2 = 2/\rho$, $b_3 = 0$.

Задача 2.9. Вивести рівняння $\int\limits_V \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}dV = 0$ із рівняння $\int\limits_S \varepsilon_{ijk}x_j t_k^{(\mathbf{n})}dS + \int\limits_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho b_k dV = 0$.

Розв'язання

Почнемо з рівняння

$$\int\limits_S \varepsilon_{ijk}x_j t_k^{(\mathbf{n})}dS + \int\limits_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho b_k dV = 0. \tag{2.1}$$

Підставимо $t_k^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ji}n_j$ в інтеграл по поверхні і перетворимо результат до інтегралу по об'єму по формулі $\int\limits_V T_{ijk\cdots,p}dV = \int\limits_S T_{ijk\cdots}n_p dS$

$$\int\limits_S \left(\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{pk}\right)n_p dS = \int\limits_V \left(\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{pk}\right)_{,p}dV,$$

Виконаємо в цьому інтегралі по об'єму диференціювання і об'єднаємо результат з іншим інтегралом по об'єму, що входить у формулу (2.1)

$$\int\limits_V \varepsilon_{ijk}\left[x_{j,p}\sigma_{pk} + x_j\left(\sigma_{pk,p} + \rho b_k\right)\right]dV = 0. \tag{2.2}$$

Але внаслідок рівнянь рівноваги $\sigma_{pk,p} + \rho b_k = 0$ доданок у скобках формули (2.2) перетворюється в нуль, а $x_{j,p} = \dfrac{\partial x_j}{\partial x_p} = \delta_{jp}$, то $x_{j,p}\sigma_{pk} = \delta_{jp}\sigma_{pk} = \sigma_{pk}$, і тому інтеграл по об'єму приводиться до вигляду

$$\int_V \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}\,dV = 0,$$

що і треба було вивести.

2.3. Перетворення тензора напруження

Задача 2.10. Напружений стан у деякій точці задано в декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ тензором

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Визначити тензор напруження $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ для повернутих осей $Ox_1'x_2'x_3'$, які пов'язані з осями без штрихів тензором перетворення координат

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Формула $\sigma'_{ij} = c_{ip}c_{jq}\sigma_{pq}$ дає закон перетворення тензора напруження, який також можна записати в символьному вигляді $\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\mathbf{C}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\mathbf{C}}_c = \hat{\mathbf{C}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\mathbf{C}}^T$. Детальні обчислення краще провести за допомогою множення відповідних матриць $\lfloor\sigma'_{ij}\rfloor = \lfloor c_{ip}\rfloor\lfloor\sigma_{pq}\rfloor\lfloor c_{qj}\rfloor$. Таким чином,

$$\left[\sigma'_{ij}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Задача 2.11. Показати, що закон перетворення напружень можна отримати, скориставшись виразом $\sigma_N = \sigma_{ij}n_in_j$ для величини нормального напруження на довільній площадці, що має одиничний вектор нормалі n_i.

Розв'язання

Оскільки σ_N – тензор нульового порядку (тобто скаляр), тому в будь-якій системі координат (зі штрихами або без штрихів) σ_N буде записуватися однаково

$$\sigma_N = \sigma'_{ij} n'_i n'_j = \sigma_{ij} n_i n_j ,$$

але, згідно з $v'_i = c_{ij} v_j$, будемо мати, що $n'_i = c_{ij} n_j$, і тому

$$\sigma'_{ij} n'_i n'_j = \sigma'_{ij} c_{ip} n_p c_{jq} n_q = \sigma_N = \sigma_{pq} n_p n_q ,$$

де в останньому члені використані нові індекси підсумовування. Таким чином,

$$\left(\sigma'_{ij} c_{ip} c_{jq} - \sigma_{pq} \right) n_p n_q = 0 ,$$

а оскільки напрямки осей без штрихів є довільними, то маємо

$$\sigma'_{ij} c_{ip} c_{jq} = \sigma_{pq} .$$

Задача 2.12. В системі осей без штрихів (рис. 2.4) тензор напруження має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix} .$$

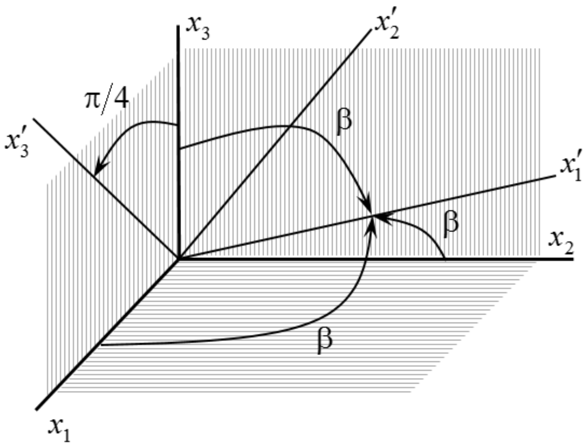


Рис. 2.4. До задачі 2.12

Визначити тензор напруження в осях зі штрихами, напрямки яких вказані на рис. 2.4.

Розв'язання

Перш за все необхідно повністю визначити матрицю перетворення $\hat{\mathbf{c}}$. Вісь x'_1 складає однакові кути з осями x_i, $i = 1,2,3$ (тобто співпадає з діагоналлю одиничного куба), тому перший рядок таблиці перетворення, а також компонента c_{33} відомі:

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
x'_2			
x'_3			$1/\sqrt{2}$

Розглянемо як визначено $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$. Рлзглянемо одиничний куб. Спочатку визначемо діагональ його граней $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Тоді дігональ одиничного куба $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$. Звідки будемо мати, що $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$.

Елементи таблиці перетворення, яких не вистачає, можна визначити із умови ортогональності $c_{ij}c_{ik}=\delta_{jk}$ (додаток Б, файл task 2-12.xmcd)

$$\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$\left[\sigma'_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T=\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

Отриманий результат не буде здаватися дивним, якщо розглянути круги Мора для напруженого стану з трьома однаковими значеннями головних напружень.

2.4. Поверхня напруження Коші

Задача 2.13. Знайти поверхні напруження Коші в точці P для таких напружених станів:

а) усесторонній рівномірний розтяг (стискання)

$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma$, $\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$;

б) одновісний розтяг (стискання)

$\sigma_{11}=\sigma$, $\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$;

в) простий зсув

$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\tau$, $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$;

г) плоский напружений стан

$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma$, $\sigma_{12}=\sigma_{21}=\tau$, $\sigma_{33}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$.

Розв'язання

Згідно $\sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j=\pm k^2$ (k – стала), рівняння поверхні напруження в символічній формі запису має такий вигляд $\vec{\zeta}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\vec{\zeta}=\pm k^2$. Використовуючи матричну форму, отримуємо результати.

а) $$\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3\end{bmatrix}=\sigma\zeta_1^2+\sigma\zeta_2^2+\sigma\zeta_3^2=\pm k^2.$$

Звідси видно, що поверхня напруження для всестороннього рівномірного розтягу є сферою

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = \pm k^2 / \sigma .$$

б) $$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \sigma \zeta_1^2 = \pm k^2 .$$

Поверхня напруження для одновісного розтягу представляє собою дві площини, перпендикулярні лінії дії напруження.

в) $$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = 2\tau \zeta_1 \zeta_2 = \pm k^2 .$$

Поверхня напружень для простого зсуву є гіперболічний циліндр з утворюючою, що паралельна осі ζ_3.

г) $$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \sigma \zeta_1^2 + 2\tau \zeta_1 \zeta_2 + \sigma \zeta_3^2 = \pm k^2 .$$

Для плоского напруженого стану поверхня представляє собою циліндричну поверхню з утворюючою, яка паралельна осі нульового напруження, і напрямної у вигляді кривої другого порядку.

Задача 2.14. Показати, що для напруженого стану, заданого тензором

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

поверхня напруження (квадрика) Коші буде еліпсоїдом (еліпсоїдом напруження), якщо a, b і c мають однакові знаки.

Розв'язання

Рівняння поверхні напруження має вигляд

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = a\zeta_1^2 + b\zeta_2^2 + c\zeta_3^2 = \pm k^2 .$$

Це еліпсоїд

$$\frac{\zeta_1^2}{bc} + \frac{\zeta_2^2}{ac} + \frac{\zeta_3^2}{ab} = \frac{\pm k^2}{abc} .$$

2.5. Головні напруження

Задача 2.15. Тензор напруження в точці P в декартових осях $Ox_1x_2x_3$ має компоненти

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити головні напруження і головні осі тензора напруження, з якими буде пов'язана система осей координат $Ox_1^* x_2^* x_3^*$.

Розв'язання

Згідно з $\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma\right| = 0$, головні напруження σ визначається із рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

або в розгорнутому вигляді

$$(\sigma+2)(\sigma-4)(\sigma-1) = 0.$$

Головні напруження є коренями цього рівняння $\sigma_{(1)} = -2$, $\sigma_{(2)} = 1$, $\sigma_{(3)} = 4$. Нехай вісь x_1^* співпадає з віссю головного напруження $\sigma_{(1)}$ і нехай $n_i^{(1)}$ – направляючі косинуси цієї осі. Тоді, згідно

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij}\right)n_j^{(k)} = 0, \tag{2.3}$$

маємо

$$(3+2)n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} = 0;$$
$$n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0;$$
$$n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0.$$

Звідки $n_1^{(1)} = 0$, $n_2^{(1)} = -n_3^{(1)}$, а оскільки $n_i n_i = 1$, то $\left(n_2^{(1)}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. Тому $n_1^{(1)} = 0$, $n_2^{(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n_3^{(1)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Нехай точно так само вісь x_2^* відповідає головному напруженню $\sigma_{(2)}$. Тоді, згідно (2.3),

$$(3-1)n_1^{(2)} + n_2^{(2)} + n_3^{(2)} = 0;$$
$$n_1^{(2)} - n_2^{(2)} + 2n_3^{(2)} = 0;$$
$$n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - n_3^{(2)} = 0,$$

звідки отримуємо $n_1^{(3)} = -n_2^{(3)} = -n_3^{(3)}$. Тоді з $n_i n_i = 1$, маємо

$$3\left(n_1^{(3)}\right)^2 = 1 \to n_1^{(3)} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

так, що $n_1^{(2)} = 1/\sqrt{3}$, $n_2^{(2)} = -1/\sqrt{3}$, $n_3^{(2)} = -1/\sqrt{3}$.

Нехай, на кінець, x_3^* відповідає головному напруженню $\sigma_{(3)}$. Тоді, згідно (2.3),

$$(3-4)n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0;$$
$$n_1^{(3)} - 4n_2^{(3)} + 2n_3^{(3)} = 0;$$
$$n_1^{(3)} + 2n_2^{(3)} - 4n_3^{(3)} = 0,$$

так, що $n_1^{(3)} = -2/\sqrt{6}$, $n_2^{(3)} = -1/\sqrt{6}$, $n_3^{(3)} = -1/\sqrt{6}$.

Задача 2.16. Показати, що тензор перетворення, що складається із направляючих косинусів, які визначені в задачі 2.15, призводить первинний тензор напруження до діагонального вигляду, тобто осі x_i^* є головними.

Розв’язання

Згідно $\left[\sigma_{ij}^*\right] = \left[c_{ip}\right]\left[\sigma_{pq}\right]\left[c_{qj}\right]$, що для умов даної задачі зразу дає

$$\left[\sigma_{ij}^*\right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.17. Визначити головні напруження і головні осі тензора напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Згідно $\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma\right| = 0$,

$$\begin{vmatrix} \tau-\sigma & \tau & \tau \\ \tau & \tau-\sigma & \tau \\ \tau & \tau & \tau-\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

або $3\tau\sigma^2 - \sigma^3 = 0 \to \sigma^2(3\tau - \sigma) = 0 \to \sigma_{(1)} = 0, \sigma_{(2)} = 0, \sigma_{(3)} = 3\tau$.

Для $\sigma_{(3)} = 3\tau$ згідно рівнянь $\left(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij}\right)n_j^{(k)} = 0$

$$-2n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0;$$
$$n_1^{(3)} - 2n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0;$$
$$n_1^{(3)} + n_2^{(3)} - 2n_3^{(3)} = 0,$$
і, відповідно, $n_1^{(3)} = n_3^{(3)} = n_3^{(3)} = 1/\sqrt{3}$.

Для $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)}$ рівняння $\left(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij}\right)n_j^{(k)} = 0$ зводиться до вигляду

$$n_1 + n_2 + n_3 = 0;$$
$$n_1 + n_2 + n_3 = 0;$$
$$n_1 + n_2 + n_3 = 0,$$

разом з $n_i n_i = 1$ це недостатньо для однозначного визначення першої і другої головних осей. Таким чином, будь-яка пара взаємно перпендикулярних осей, які перпендикулярні напрямку $n_i^{(3)}$, може слугувати головними осями. Розглянемо, наприклад, осі, що були визначені в задачі 2.12 матрицею перетворення

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

За законом перетворення $\left[\sigma'_{ij}\right] = \left[c_{ip}\right]\left[\sigma_{pq}\right]\left[c_{qj}\right]$ матриця головних напружень $\left[\sigma^*_{ij}\right]$ має вигляд

$$\left[\sigma^*_{ij}\right] == \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.18. Показати, що осі $Ox_1^* x_2^* x_3^*$ (де x_2^*, x_3, x_3^* лежать в одній і тій же вертикальній площині, а x_1^*, x_1, x_2^* – в одній горизонтальній площині) теж е головними осями тензора напруження задачі 2.17.

Розв'язання

Ясно, що деякі елементи матриці (тензора) перетворення координат $\left[c_{ij}\right]$, що зв'язує дві системи осей, відомі

$$
\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix} & & 0 \\ & & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.
$$

Це добре видно на рис. 2.5.

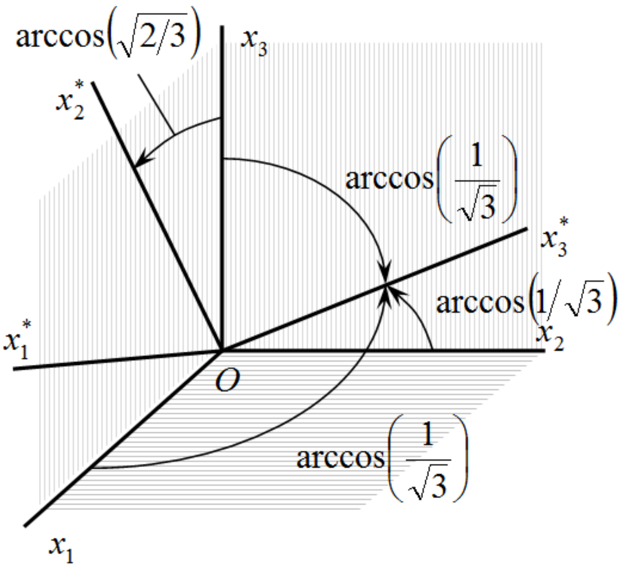


Рис. 2.5. До задачі 2.18

Решта чотири елементи визначаються із умов ортогональності $c_{ij}c_{ik}=\delta_{jk}$ так, що (додаток В, файл task 2-18.xmcd)

$$
\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.
$$

Діючи як і раніше, знаходимо

$$
\left[\sigma_{ij}^*\right]==\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}^T=
$$

$$
=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau & \sqrt{3}\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\tau\end{bmatrix}.
$$

Задача 2.19. Показати, що головні напруження $\sigma_{(k)}^*$ і компоненти напруження σ_{ij} в довільній системі координат, що утворюється із головних осей за допомогою перетворення з коефіцієнтами c_{ij}, зв'язані співвідношенням

$$\sigma_{ij} = \sum_{p=1}^{3} c_{pi} c_{pj} \sigma_p^* .$$

Розв'язання

За правилом перетворення тензора напруження маємо $\sigma_{ij} = c_{ip} c_{qj} \sigma_{pq}^*$, але, оскільки, σ_{pq}^* – головні напруження, в правій частині цієї рівності лишаються тільки три члени з $p = q$. Значить, праву частину можна записати у вигляді

$$\sigma_{ij} = \sum_{p=1}^{3} c_{pi} c_{pj} \sigma_p^* .$$

Задача 2.20. Довести, що $\sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{kj}$ – інваріант тензора напруження.

Розв'язання

За правилом перетворення компонент тензора $\sigma'_{ij} = c_{ip} c_{jq} \sigma_{pq}$ маємо, що

$$\sigma'_{ij}\sigma'_{ik}\sigma'_{kj} = c_{ip}c_{jq}\sigma_{pq}c_{ir}c_{ks}\sigma_{rs}c_{km}c_{jn}\sigma_{mn} =$$
$$= (c_{ip}c_{jq})(c_{ir}c_{ks})(c_{km}c_{jn})\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{mn} =$$
$$= \delta_{pr}\delta_{qn}\delta_{sm}\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{mn} =$$
$$= (\delta_{pr}\sigma_{pq})(\delta_{qn}\sigma_{mn})(\delta_{sm}\sigma_{rs}) =$$
$$= \sigma_{rq}\sigma_{qm}\sigma_{rm} = \sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{kj}.$$

Задача 2.21. Безпосереднім обчисленням знайти інваріанти I_σ, II_σ, III_σ тензора напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти головні напруження для цього напруженого стану і показати, що діагональна форма призводить до тих самих значень інваріантів.

Розв'язання

Згідно з $\mathrm{I}_\sigma = \sigma_{ii} = \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ маємо

$$\mathrm{I}_\sigma = \sigma_{ii} = 6 + 6 + 8 = 20.$$

Згідно з $\mathrm{II}_\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij})$ отримуємо

$$\mathrm{II}_\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) =$$
$$= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{12} - \sigma_{23}\sigma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{13} =$$
$$= 6\cdot 6 + 6\cdot 8 + 8\cdot 6 - (-3)(-3) - 0 - 0 = 36 + 48 + 48 - 9 = 123.$$

Згідно $\mathrm{III}_\sigma = \left|\sigma_{ij}\right| = \det(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$

$$\mathrm{III}_\sigma = \left|\sigma_{ij}\right| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 6(48) + 3(-24) = 216.$$

Тоді головні напруження знаходяться із кубічного рівняння

$$\sigma^3 - \mathrm{I}_\sigma\sigma^2 + \mathrm{II}_\sigma\sigma - \mathrm{III}_\sigma = 0 \to \sigma^3 - 20\sigma^2 + 123\sigma - 216 = 0 \to$$
$$\to (\sigma - 9)(\sigma - 8)(\sigma - 3) = 0.$$

Звідки величини головних напружень тензора σ_{ij} будуть дорівнювати $\sigma_{\mathrm{I}} = 9$, $\sigma_{\mathrm{II}} = 8$, $\sigma_{\mathrm{III}} = 3$. Інваріанти, які підраховані через головні значення напруження, дорівнюють

$$\mathrm{I}_\sigma = \sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}} = 9 + 8 + 3 = 20$$
$$\mathrm{II}_\sigma = \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}} = 72 + 24 + 27 = 123.$$
$$\mathrm{III}_\sigma = \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} = 9(8)3 = 216.$$

Задача 2.22. Октаедричною називається площадка, яка складає рівні кути з головними напрямами напруження (рис. 2.6). Показати, що дотичні напруження на цій площадці, які називаються октаедричними дотичними напруженнями, обчислюються за формулою

$$\sigma_{\mathrm{okt}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2}\,.$$

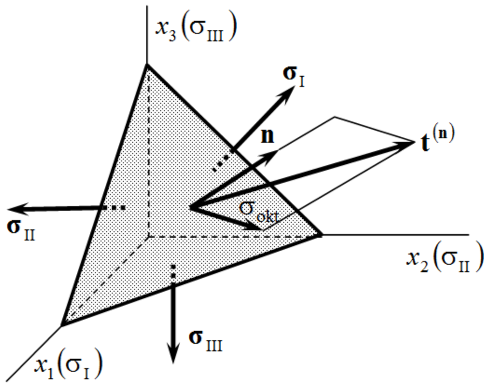


Рис. 2.6. До задачі 2.22

Розв'язання

Нормаль до октаедричної площадки в головних осях дається виразом

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right).$$

Тоді, згідно з $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j$, вектор напруження на такій площадці дорівнює

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\right)\cdot\left(\sigma_{\mathrm{I}}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \sigma_{\mathrm{II}}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sigma_{\mathrm{III}}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_{\mathrm{I}}\mathbf{e}_1 + \sigma_{\mathrm{II}}\mathbf{e}_2 + \sigma_{\mathrm{III}}\mathbf{e}_3\right),$$

А його нормальна компонента буде

$$\sigma_N = \mathbf{n}\cdot\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_{\mathrm{I}}\mathbf{e}_1 + \sigma_{\mathrm{II}}\mathbf{e}_2 + \sigma_{\mathrm{III}}\mathbf{e}_3\right).$$

Тут $\left(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1\right) = \left(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2\right) = \left(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\right) = 1.$

Отже, для дотичної компоненти будемо мати

$$\sigma_{\mathrm{okt}} = \sqrt{\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\cdot\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} - \left(\sigma_N\right)^2} = \left\{\frac{1}{3}\left(\sigma_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2\right) - \frac{1}{9}\left(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{3\left(\sigma_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2\right) - \left(\sigma_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2 + 2\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + 2\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + 2\sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\sigma_{\mathrm{I}}^2 - 2\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}^2\right) + \left(\sigma_{\mathrm{II}}^2 - 2\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{III}}^2\right) + \left(\sigma_{\mathrm{III}}^2 - 2\sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{I}}^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}\right)^2 + \left(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}\right)^2 + \left(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}\right)^2}.$$

Задача 2.23. В деякій точці задано тензор напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначити максимальне дотичне напруження в цій точці і показати, що воно діє в площині, яка ділить навпіл кут між площадками максимального і мінімального нормальних напружень.

Розв'язання

Використовуючи формулу $\sigma^3 - \mathrm{I}_\sigma\sigma^2 + \mathrm{II}_\sigma\sigma - \mathrm{III}_\sigma = 0$ можна впевнитися в тому, що головні напруження дорівнюють $\sigma_{\mathrm{I}} = 10$, $\sigma_{\mathrm{II}} = 5$, $\sigma_{\mathrm{III}} = -15$. Перевіримо ці значення. Спочатку знайдемо інваріанти I_σ, II_σ, III_σ тензора напруження за умовами задачі:

$$\mathrm{I}_\sigma = \sigma_{ii} = 5 - 6 + 1 = 0.$$

$$\mathrm{II}_\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) =$$
$$= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{12} - \sigma_{23}\sigma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{13} =$$
$$= 5(-6) + (-6)1 + 1\cdot 5 - 0 - (-12)(-12) - 0 = -30 - 6 + 5 - 144 = -175.$$
$$\mathrm{III}_\sigma = \left|\sigma_{ij}\right| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{vmatrix} == 30 - 5(144) = 750.$$

Тоді головні напруження знаходяться із кубічного рівняння

$$\sigma^3 - \mathrm{I}_\sigma \sigma^2 + \mathrm{II}_\sigma \sigma - \mathrm{III}_\sigma = 0 \to \sigma^3 - 0\sigma^2 - 175\sigma - 750 = 0 \to$$
$$\to (\sigma - 10)(\sigma - 5)(\sigma + 15) = 0.$$

Звідки величини головних напружень тензора σ_{ij} будуть дорівнювати $\sigma_{\mathrm{I}} = 10$, $\sigma_{\mathrm{II}} = 5$, $\sigma_{\mathrm{III}} = -15$. Тобто головні напруження знайдено правильно.

Із формули $\sigma_S = (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})/2$ знайдемо величну максимального дотичного напруження

$$\sigma_S = (-15 - 10)/2 = 12{,}5.$$

Головні осі $Ox_1^* x_2^* x_3^*$ зв'язані з осями $Ox_1' \ x_2' \ x_3'$ максимального дотичного напруження, як показано на рис. 2.7. Таблиця перетворення осей з компонентами c_{ij} наведена нижче.

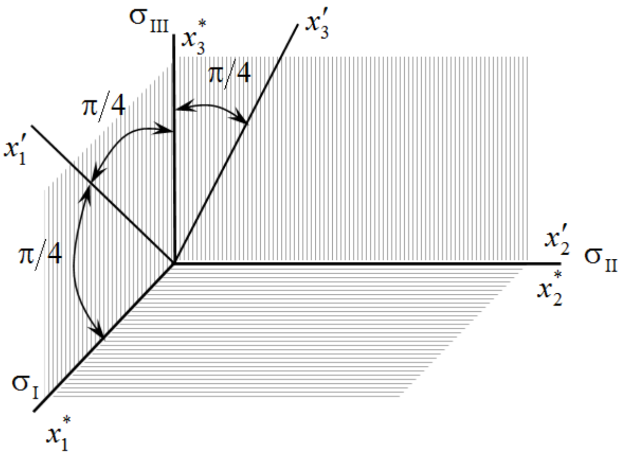


Рис. 2.7. До задачі 2.23

	x_1^*	x_2^*	x_3^*
x_1'	$1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$
x_2'	0	1	0
x_3'	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$

Визначимо тензор напруження, віднесений до осей зі штрихом

$$
\left[\sigma'_{ij}\right]==\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T =
$$

$$
=\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{2} & 0 & -\dfrac{25}{2} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\dfrac{25}{2} & 0 & -\dfrac{5}{2} \end{bmatrix}.
$$

Отримані результати можна пояснити, вказавши напруження, що діють у даній точці на елементарні куби, грані яких перпендикулярні осям координат (рис. 2.8).

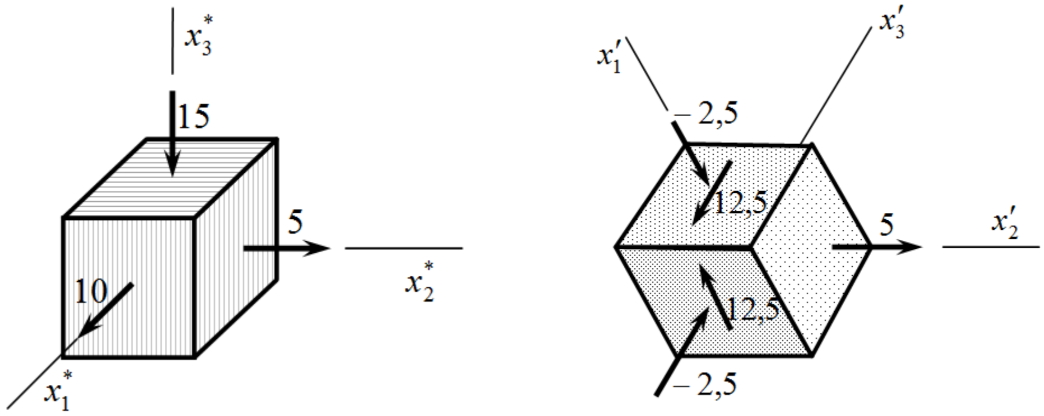


Рис. 2.8. До задачі 2.23

2.6. Круги Мора

Задача 2.24. Побудувати круги Мора для напруженого стану, описаного в задачі 2.23. Відмітити найважливіші точки. Встановити зв'язок між системою осей $Ox'_1x'_2x'_3$ (що відповідає компонентам σ_{ij}) і головними осями $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ і нанести на діаграму точки, що характеризують напружений стан на координатних площинах системи $Ox_1x_2x_3$.

Розв'язання

На верхній половині симетричної діаграми кругів Мора (рис. 2.9) вказана точка P максимального дотичного напруження і відмічені головні напруження. Таблиця направляючих косинусів для перетворення координат приводить до схеми взаємного розташування осей координат, що показана на рис. 2.10.

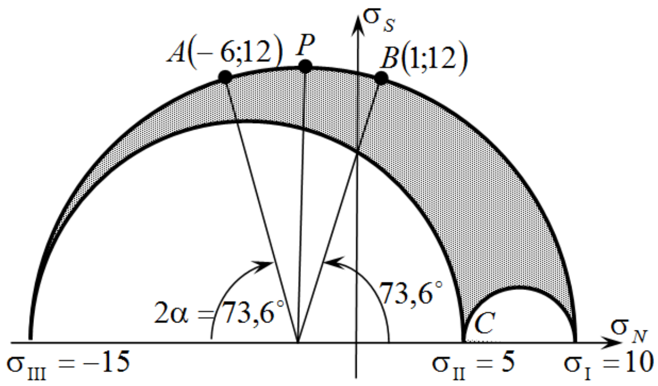


Рис. 2.9. До задачі 2.24

	x_1^*	x_2^*	x_3^*
x_1	0	1	0
x_2	$-3/5$	0	$4/5$
x_3	$4/5$	0	$3/5$

Осі x_1 і x_2^* співпадають. Осі x_2 і x_3 лежать у площині $x_1^* x_3^*$, як показано на рис. 2.10. За вказаними кутами $\alpha = 36{,}8^\circ$ і $\beta = 53{,}2^\circ$ знаходимо положення точки $A(-6;12)$, яка характеризує напруження на площадці, що перпендикулярна осі x_2, і точки $B(1;12)$, яка дає напружений стан на площадці, що перпендикулярна осі x_3. Точка $C(5;0)$ представляє напружений стан на площадці, яка перпендикулярна осі x_1.

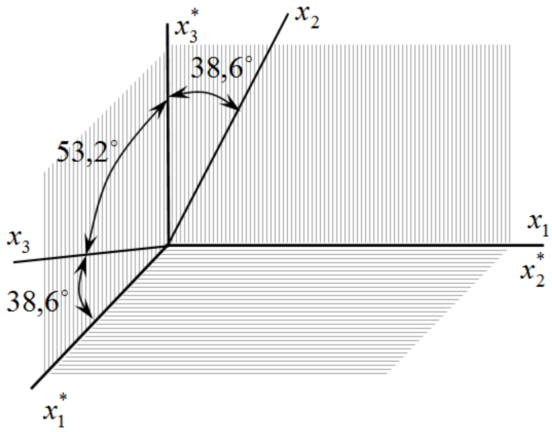


Рис. 2.10. До задачі 2.24

Задача 2.25. Напружений стан в деякій точці в системі координат $Ox_1x_2x_3$ задано компонентами

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначити аналітично компоненти вектора напруження на площадці з одиничною нормаллю $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3$. Перевірити результати за допомогою діаграми Мора для цієї задачі.

Розв'язання

Скориставшись $\left[t_{1j}^{(\mathbf{n})}\right] = \left[n_{1k}\right]\left[\sigma_{kj}\right]$ і властивостями симетрії тензора напруження, отримаємо вектор напруження на площадці з нормаллю $\mathbf{n}$ у вигляді добутку матриць

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/3 \\ -10 \\ -10/3 \end{bmatrix}.$$

Таким чином,

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = -\frac{10}{3}\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2 - \frac{10}{3}\mathbf{e}_3,$$

а із $\sigma_N = t_i^{(\mathbf{n})} n_i = \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$ отримуємо

$$\sigma_N = \mathbf{t}^{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} = \left(-\frac{10}{3}\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2 - \frac{10}{3}\mathbf{e}_3\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3\right) =$$

$$= -\frac{20}{9} - \frac{10}{3} - \frac{20}{9} = -\frac{70}{9}.$$

Тоді із $\sigma_\tau^2 = \sigma_S^2 = t_i^{(\mathbf{n})} t_i^{(\mathbf{n})} - \sigma_N^2$ витікає, що

$$\sigma_S = \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2 - \frac{10}{3}\mathbf{e}_3\right) \cdot \left(-\frac{10}{3}\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2 - \frac{10}{3}\mathbf{e}_3\right) - \left(\frac{70}{9}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1100}{9} - \frac{4900}{81}} = \frac{50\sqrt{2}}{9} \approx \frac{70{,}7}{9}.$$

Для даного тензора σ_{ij} головні напруження дорівнюють $\sigma_{\mathrm{I}} = 10$, $\sigma_{\mathrm{II}} = -5$, $\sigma_{\mathrm{III}} = -15$, головні осі зв'язані з осями $Ox_1x_2x_3$ перетворенням, що визначається такою таблицею

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	0	$-3/5$	$4/5$
x_2^*	1	0	0
x_3^*	0	$4/5$	$3/5$

Таким чином, у головних осях $n_i^* = c_{ij} n_j$ або

$$\left[n_i^*\right]=\begin{bmatrix}0 & -3/5 & 4/5\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4/5 & 3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/3\\ 1/3\\ 2/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\ 2/3\\ 2/3\end{bmatrix}.$$

Тоді кути, що показані на рис. 2.11, дорівнюють $\theta=\beta=\arccos\dfrac{2}{3}\approx 48{,}2^\circ$ і $\varphi=\arccos\dfrac{1}{3}\approx 70{,}5^\circ$, а діаграма кругів Мора для умов даної задачі, що відповідає рис. 2.12, побудована на рис. 2.13.

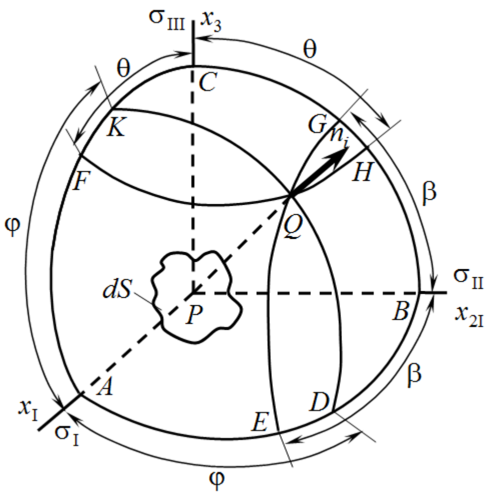


Рис. 2.11. Зв'язок між діаграмою напруження Мора і фізичним напруженим станом

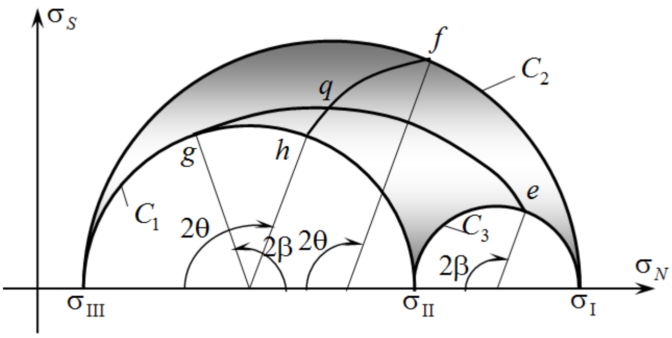


Рис. 2.12. Зв'язок між простором напружень з фізичним простором

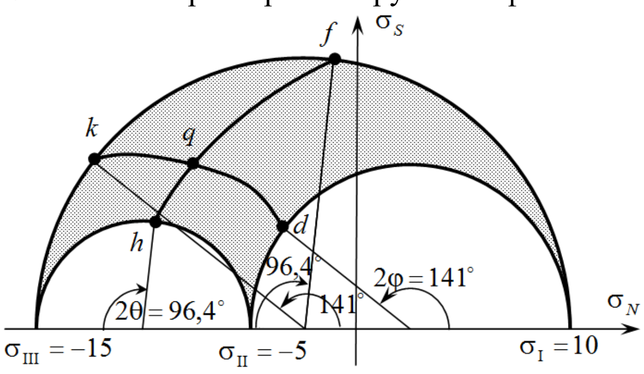
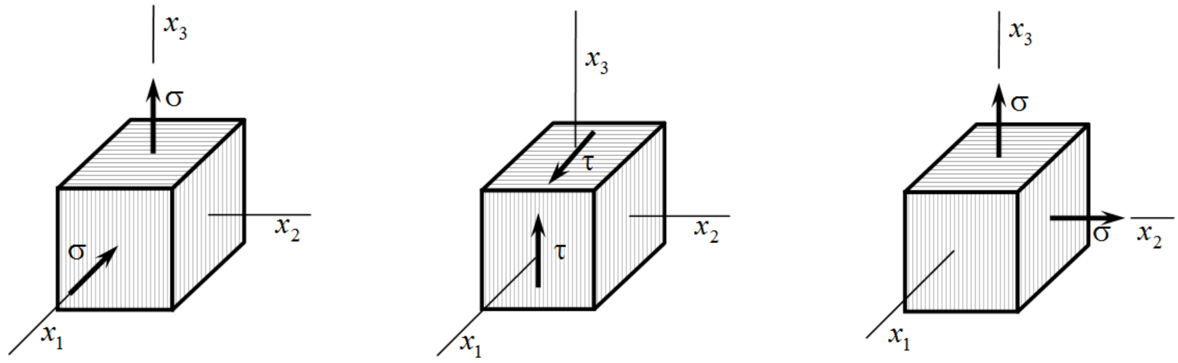


Рис. 2.13. До задачі 2.25

Задача 2.26. Побудувати круги Мора для трьох випадків плоского напруженого стану, що відповідають напруженням, які діють на елементарний куб, ребра якого паралельні осям координат, як показано на рис. 2.14. Визначити максимальне дотичне напруження в кожному випадку.

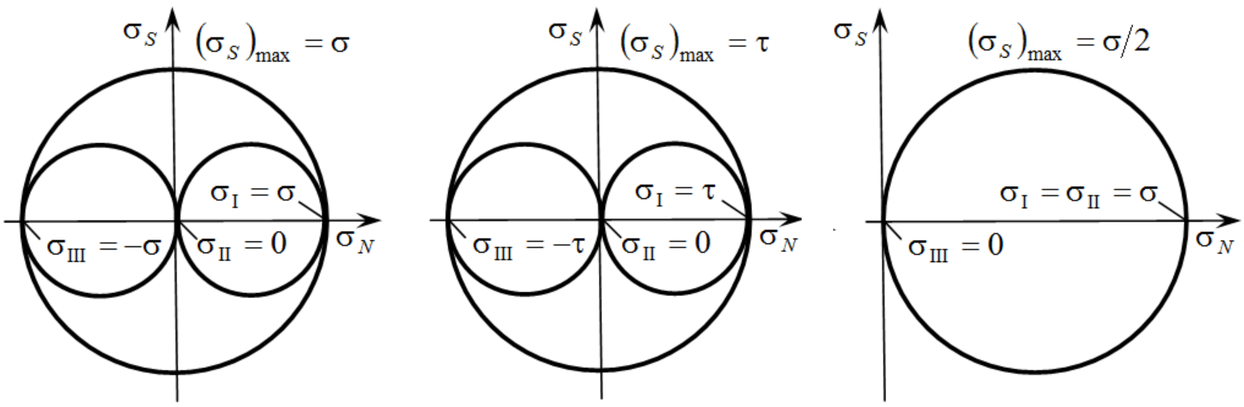


а *б* *в*

Рис. 2.14. До задачі 2.26

Розв’язання

Круги Мора, що відповідають умовам задачі, показано на рис. 2.15.



а *б* *в*

Рис. 2.15. До задачі 2.26

2.7. Кульовий тензор і девіатор напруження

Задача 2.27. Розкласти тензор напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

на кульову і девіаторну складові і показати, що перший інваріант девіатора дорівнює нулю.

Розв’язання

Знайдемо спочатку кульову складову тензора σ_{ij}

$\sigma_M = \sigma_{kk}/3 = (12+9+3)/3 = 8.$

Тоді девіаторна складова буде дорівнювати

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_M \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо перший інваріант девітора

$\mathrm{I}_{\hat{\sigma}_D} = s_{ii} = 4+1-5 = 0.$

Задача 2.28. Показати, що девіатор напруження еквівалентний суперпозиції п’яти станів простого зсуву.

Розв’язання

Скористаємося розкладанням девіатора

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & 0 \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & s_{32} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix},$$

де два останніх тензора, очевидно, еквівалентні стану простого зсуву по аналогії з випадками *а* і *б* задачі 2.26. Відмітимо також, що $-s_{11} - s_{33} = s_{22}$, оскільки $s_{ii} = 0$.

Задача 2.29. Визначити головні значення девіатора напруження для тензора

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Враховуючи те, що $\sigma_M = \sigma_{kk}/3 = 21/3 = 7$, то девіатор для σ_{ij} буде мати вигляд

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

а його головні значення знаходяться із характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-s & -6 & 0 \\ -6 & 3-s & 0 \\ 0 & 0 & -6-s \end{vmatrix} = (-6-s)(s+3)(s-9) = 0.$$

Таким чином, головні значення девіатора будуть такі: $s_{\mathrm{I}} = 9$, $s_{\mathrm{II}} = -3$, $s_{\mathrm{III}} = -6$. Такий самий результат можна отримати, якщо спочатку обчислити головні значення тензора напруження σ_{ij}, а потім скористатися формулою $s_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_M$. Для тензора σ_{ij}, як нескладно впевнитись, головні значення дорівнюють $\sigma_{\mathrm{I}} = 16$, $\sigma_{\mathrm{II}} = 4$, $\sigma_{\mathrm{III}} = 1$, звідки, знаючи, що $\sigma_M = 7$, знаходимо $s_{\mathrm{I}} = 16 - 7 = 9$, $s_{\mathrm{II}} = 4 - 7 = -3$, $s_{\mathrm{III}} = 1 - 7 = -6$.

Задача 2.30. Показати, що другий інваріант девіатора напруження виражається через головні значення девіатора таким чином:

$$\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} = \left(s_{\mathrm{I}} s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}} s_{\mathrm{I}}\right),$$

або

$$\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} = -\frac{1}{2}\left(s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2\right).$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння для девіатора напруження, що записане через головні значення девіатора, отримується таким чином

$$\begin{vmatrix} s_{\mathrm{I}} - s & 0 & 0 \\ 0 & s_{\mathrm{II}} - s & 0 \\ 0 & 0 & s_{\mathrm{III}} - s \end{vmatrix} = (s_{\mathrm{I}} - s)(s_{\mathrm{II}} - s)(s_{\mathrm{III}} - s) = 0.$$

Виконаємо деякі перетворення

$$(s_{\mathrm{I}} - s)(s_{\mathrm{II}} - s)(s_{\mathrm{III}} - s) = s^3 + \left(s_{\mathrm{I}} s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}} s_{\mathrm{I}}\right) + s_{\mathrm{I}} s_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{III}}.$$

Звідки маємо, що

$$\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} = \left(s_{\mathrm{I}} s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}} s_{\mathrm{I}}\right).$$

Оскільки $s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}} = 0$, то

$$\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} = \frac{1}{2}\left(2 s_{\mathrm{I}} s_{\mathrm{II}} + 2 s_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{III}} + 2 s_{\mathrm{III}} s_{\mathrm{I}} - \left(s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}\left(s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2\right).$$

2.8. Змішані задачі

Задача 2.31. Довести, що будь-який симетричний тензор, наприклад, тензор напруження σ_{ij}, при переході до будь-якої іншої системи перетворюється також у симетричний тензор σ'_{ij}.

Розв'язання

По формулі $\sigma'_{ij} = c_{ip} c_{jq} \sigma_{pq}$ отримуємо $\sigma'_{ij} = c_{ip} c_{jq} \sigma_{pq} = c_{jq} c_{ip} \sigma_{qp} = \sigma'_{ji}$.

Задача 2.32. Головні напруження в точці P такі, що $2\sigma_{\mathrm{II}} = \sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}$. Визначити одиничний вектор нормалі n_i до площадки, на якій $\sigma_N = \sigma_{\mathrm{II}}$ і $\sigma_S = (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})/4$.

Розв'язання

Згідно $\sigma_N = t_i^{(\mathbf{n})} n_i = \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$,

$$\sigma_N = n_1^2 \sigma_{\mathrm{I}} + n_2^2 (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})/2 + n_3^2 \sigma_{\mathrm{III}} = (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})/2,$$

і, оскільки $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, із спільного розв'язання цих рівнянь можна отримати, що $n_1 = n_3$. Далі із $\sigma_\tau^2 = \sigma_S^2 = t_i^{(\mathbf{n})} t_i^{(\mathbf{n})} - \sigma_N^2$, знаходимо

$$\sigma_S^2 = n_1^2 \sigma_{\mathrm{I}}^2 + n_2^2 (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})^2 / 2 + n_3^2 \sigma_{\mathrm{III}}^2 - (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})^2 / 4 = (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 / 16.$$

Підставляючи в це рівняння $n_3 = n_1$ і $n_2^2 - 1 = -n_1^2 - n_3^2 = -2n_1^2$, а потім розв'язуючи його відносно n_1, знаходимо направляючі косинуси $n_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $n_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $n_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 2.33. Показати, що розкласти тензор напруження σ_{ij} на кульову і девіаторну частини можна тільки єдиним способом.

Розв'язання

Припустимо, що існують два розкладання $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda + s_{ij}$, для яких $s_{ii} = 0$ і $s_{ii}^* = 0$. Тоді $\sigma_{ii} = 3\lambda = 3\lambda^*$ і, відповідно, $\lambda = \lambda^*$, а із $\delta_{ij}\lambda + s_{ij} = \delta_{ij}\lambda + s_{ij}^*$ витікає, що $s_{ij} = s_{ij}^*$.

Задача 2.34. Довести, що якщо $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – симетричний тензор з дійсними компонентами, то головні напруження теж дійсні числа.

Розв'язання

За умови дійсних значень компонент тензора напруження його інваріанти теж дійсні числа і, відповідно, усі коефіцієнти рівняння $\sigma^3 - \mathrm{I}_\sigma \sigma^2 + \mathrm{II}_\sigma \sigma - \mathrm{III}_\sigma = 0$ – дійсні величини. З теорії таких рівнянь відомо, що хоч би один корінь (головне значення) повинен бути дійсним числом. Позначимо його через $\sigma_{(3)}$ і розглянемо сукупність осей зі штрихами x_i', причому напрям x_3' відповідає $\sigma_{(3)}$. Відносно таких осей характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}' - \sigma & \sigma_{12}' & 0 \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

або $\left(\sigma_{(3)}-\sigma\right)\left[\left(\sigma'_{11}-\sigma\right)\left(\sigma'_{22}-\sigma\right)-\left(\sigma'_{12}\right)^2\right]=0$.

Оскільки дискримінант квадратичної форми, що стоїть у квадратних скобках, є додатним

$$D=\left(\sigma'_{11}-\sigma'_{22}\right)^2-4\left[\sigma'_{11}\sigma'_{22}-\left(\sigma'_{12}\right)^2\right]=\left(\sigma'_{11}-\sigma'_{22}\right)^2+4\left(\sigma'_{12}\right)^2>0,$$

то і решта коренів повинна бути дійсними числами.

Задача 2.35. Використовуючи метод множників Лагранжа, показати, що екстремальні (максимальне й мінімальне) значення нормального напруження σ_N співпадають з головними напруженнями.

Розв'язання

Розглянемо $\sigma_N=t_i^{(\mathbf{n})}n_i=\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\mathbf{n}=\sigma_{ij}n_i n_j$, за умови $n_i n_i=1$. За аналогією з $F=\sigma_S^2-\lambda n_i n_i$ побудуємо функцію $H=\sigma_N-\lambda n_i n_i$, для якої $\partial H/\partial n_i=0$. Тоді

$$\partial H/\partial n_p=\sigma_{ij}n_{i,p}n_j+\sigma_{ij}n_i n_{j,p}-2\lambda n_{i,p}n_i=$$
$$=\sigma_{ij}\delta_{ip}n_j+\sigma_{ij}n_i\delta_{jp}-2\lambda\delta_{ip}n_i=$$
$$=\sigma_{pj}n_j+\sigma_{ip}n_i-2\lambda\delta_{ip}n_i=2\left(\sigma_{pi}-\lambda\delta_{ip}\right)n_i=0,$$

а це еквівалентно характеристичному рівнянню $\left(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right)n_j=0$ для визначення головних напружень.

Задача 2.36. Припустимо, що компоненти напруження σ_{ij} отримані із симетричного тензорного поля φ_{ij} за допомогою співвідношення $\sigma_{ij}=\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jmn}\varphi_{qn,pm}$. Показати, що за умови відсутності масових сил задовольняються рівняння рівноваги $\sigma_{ij,j}=0$.

Розв'язання

Користуючись результатами задачі 1.58, знайдемо компоненти напруження

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}\left(\varphi_{qq,pp}-\varphi_{qp,qp}\right)+\varphi_{pi,pj}+\varphi_{jp,pi}-\varphi_{pp,ji}-\varphi_{ji,pp},$$

або в розгорутому вигляді запису

$$\sigma_{11}=\varphi_{33,22}+\varphi_{22,33},\qquad \sigma_{12}=\sigma_{21}=-\varphi_{33,21},$$
$$\sigma_{22}=\varphi_{11,33}+\varphi_{33,11},\qquad \sigma_{23}=\sigma_{32}=-\varphi_{11,23},$$
$$\sigma_{33}=\varphi_{22,11}+\varphi_{11,22},\qquad \sigma_{31}=\sigma_{13}=-\varphi_{22,13}.$$

Підставляючи ці значення в рівняння $\sigma_{ij,j}=0$, отримаємо

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+\sigma_{13,3}=\varphi_{33,221}+\varphi_{22,331}-\varphi_{33,212}-\varphi_{22,133}=0,$$
$$\sigma_{21,1}+\sigma_{22,2}+\sigma_{23,3}=-\varphi_{33,211}+\varphi_{11,332}+\varphi_{33,112}-\varphi_{11,233}=0,$$
$$\sigma_{31,1}+\sigma_{32,2}+\sigma_{33,3}=-\varphi_{22,131}-\varphi_{11,232}+\varphi_{22,113}+\varphi_{11,223}=0.$$

Задача 2.37. Показати, що нормаль до поверхні напруження Коші в точці з радіусом-вектором $\mathbf{r}$ паралельна вектору напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$.

Розв'язання

Нехай поверхня напруження задана рівнянням $\varphi = \sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j \pm k^2 = 0$ (k – стала). Нормаль до неї в будь-якій точці визначається як $\nabla\varphi$ або $\partial\varphi/\partial\zeta_i = \varphi_{,i}$. Отже, $\varphi_{,p} = \sigma_{ij}\delta_{ip}\zeta_j + \sigma_{ij}\zeta_i\delta_{jp} = 2\sigma_{pi}\zeta_i$. Але, оскільки, $\zeta_i = rn_i$, останній вираз перетворюється в $2\sigma_{pi}rn_i$ або $2r(\sigma_{pi}n_i) = 2t_p^{(\mathbf{n})}$.

Задача 2.38. Тензор напруження в точці P, віднесений до осей $Ox_1x_2x_3$ має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Нехай нові осі $Ox_1'x_2'x_3'$ отримано поворотом навколо початку координат відліку, тобто перетворенням з матрицею

$$[c_{ij}] = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження на кожній із координатних площадок системи зі штрихами шляхом проектування вектора напруження в початкових осях на напрями осей зі штрихами. Визначити таким чином σ'_{ij}. Перевірити результат використовуючи формулу перетворення $\sigma'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq}$.

Розв'язання

Із $\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_i)} = t_j^{(\mathbf{e}_i)}\mathbf{e}_j$ і тотожності $t_j^{(\mathbf{e}_i)} \equiv \sigma_{ij}$ витікає, що вектори напруження на координатних площадках в системі без штрихів дорівнюють

$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} = 15\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2$, $\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_2)} = -10\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, $\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_3)} = 20\mathbf{e}_3$,

що відповідає рядкам тензора напруження. Проектуючи ці вектори на осі системи зі штрихами, допомогою співвідношення $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = n_1\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} + n_2\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_2)} + n_3\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_3)}$ отримуємо

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1')} = \frac{3}{5}(15\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2) - \frac{4}{5}(20\mathbf{e}_3) = 9\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 - 16\mathbf{e}_3.$$

Після перетворення одиничних базисних векторів ця рівність приймає вигляд

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1')} = 9\left(\frac{3}{5}\mathbf{e}_1' + \frac{4}{5}\mathbf{e}_3'\right) - 6\mathbf{e}_2' - 16\left(-\frac{4}{5}\mathbf{e}_1' + \frac{3}{5}\mathbf{e}_3'\right) = \frac{91}{5}\mathbf{e}_1' - 6\mathbf{e}_2' - \frac{12}{5}\mathbf{e}_3'.$$

Аналогічно отримуємо для

$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_2')} = -6\mathbf{e}_1' + 5\mathbf{e}_2' - 8\mathbf{e}_3'$

і

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_3')} = -\frac{12}{5}\mathbf{e}_1' - 8\mathbf{e}_2' + \frac{84}{5}\mathbf{e}_3'.$$

так що

$$\sigma_{ij}' = \begin{pmatrix} 91/5 & -6 & -12/5 \\ -6 & 5 & -8 \\ -12/5 & -8 & 84/5 \end{pmatrix}.$$

З іншого боку по формулі $\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{c}}_c = \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^T$

$$\sigma_{ij}' = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 91/5 & -6 & -12/5 \\ -6 & 5 & -8 \\ -12/5 & -8 & 84/5 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.39. Показати, що другий інваріант девіатора напруження $\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D}$ пов'язаний з окстаедричним дотичним напруженням співвідношенням $\sigma_{\mathrm{okt}} = \sqrt{-\frac{2}{3}\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D}}$.

Розв'язання

Із задачі 2.22 відомо, що $\sigma_{\mathrm{okt}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2}$, але $\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_M + s_{\mathrm{I}}$, $\sigma_{\mathrm{II}} = \sigma_M + s_{\mathrm{II}}$ і так далі. Тому можна записати, що

$$\sigma_{\mathrm{okt}} = \frac{1}{3}\sqrt{(s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}})^2 + (s_{\mathrm{II}} - s_{\mathrm{III}})^2 + (s_{\mathrm{III}} - s_{\mathrm{I}})^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{2\left(s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2\right) - 2\left(s_{\mathrm{I}}s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}}s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}}s_{\mathrm{I}}\right)}.$$

А оскільки $s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}} = 0$, то і $(s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}})^2 = 0$ або

$s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2 = -2\left(s_{\mathrm{I}}s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}}s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}}s_{\mathrm{I}}\right)$.

Звідки

$$\sigma_{\mathrm{okt}} = \frac{1}{3}\sqrt{-6\left(s_{\mathrm{I}}s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}}s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}}s_{\mathrm{I}}\right)} = \sqrt{-\frac{2}{3}\mathrm{II}_{\sigma_D}}.$$

Задача 2.40. Напружений стан у всіх точках тіла задано тензором напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{pmatrix},$$

де C – довільна стала.

а) Показати, що якщо масові сили дорівнюють нулю, то рівняння рівноваги задовольняються.

б) Обчислити вектор напруження в точці $P(4;-4;7)$ на площині $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ і на сфері $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = (9)^2$.

в) Визначити головні напруження, максимальні дотичні напруження і головні напруження в точці P.

г) Побудувати круги Мора для напруного стану в точці P.

Розв'язання

а) Підставляючи безпосередньо в $\sigma_{ij,j} = 0$ компоненти σ_{ij}, переконуємося в тому, що рівняння рівноваги задовольняють тотожно.

б) Із задачі 1.2 витікає, що одиничний вектор нормалі до площини $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ визначається виразом

$$\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3.$$

Тоді, згідно формули $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j$, вектор напруження на цій площадці в точці P дорівнює

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3\right) \cdot \left(7C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + 7C\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - 4C\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - 4C\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\right) =$$

$$= C\left(\frac{14}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{14}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{8}{3}\mathbf{e}_3 + \frac{4}{3}\mathbf{e}_2\right) = \frac{1}{3}C(14\mathbf{e}_1 + 18\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3).$$

Нормаль до сфери $x_i x_i = 9^2$ в точці P визначається виразом $n_i = \varphi_{,i}$, де $\varphi = x_i x_i - 81$, відповідно $\mathbf{n} = \frac{4}{9}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{9}\mathbf{e}_2 + \frac{7}{9}\mathbf{e}_3$. Вектор напруження в точці P, згідно $\left[t_1^{(\mathbf{n})} \quad t_2^{(\mathbf{n})} \quad t_3^{(\mathbf{n})}\right] = [n_1 \quad n_2 \quad n_3] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$, буде мати вигляд

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7C & 0 \\ 7C & 0 & -4C \\ 0 & -4C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{9}C, & 0, & \frac{16}{9}C \end{bmatrix}.$$

в) Згідно з $\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma\right| = 0$ для головних напружень матимемо рівняння

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 7 & 0 \\ 7 & -\sigma & -4 \\ 0 & -4 & -\sigma \end{vmatrix} = \sigma\left(\sigma^2 - 65\right) = 0,$$

звідки $\sigma_{\text{I}} = \sqrt{65}$, $\sigma_{\text{II}} = 0$, $\sigma_{\text{III}} = -\sqrt{65}$.

Величина максимального дотичного напруження дорівнює

$$\sigma_S = \left(\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}}\right)/2 = \pm\sqrt{65}.$$

Оскільки середнє нормальне напруження в точці P дорівнює

$$\sigma_M = \left(\sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{II}} + \sigma_{\text{III}}\right)/3 = 0,$$

то головні значення девіатора такі ж самі, що і в тензора напруження.

г) Круги Мора показано на рис. 2.16.

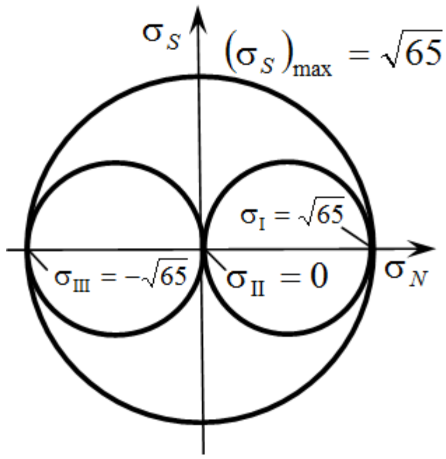


Рис. 2.16. До задачі 2.40

Задача 2.41. Знайти власні числа матриці повороту на кут φ навколо осі x^3

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Однорідна лінійна система рівнянь має нетривіальний розв'язок, якщо визначник цієї системи дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття цього визначника отримуємо характеристичне рівняння відносно можливих власних значень λ.

В результаті отримали кубічне рівняння вигляду

$$\lambda^3-(1+2\cos\varphi)\lambda^2+\left(2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)\lambda-\cos^2\varphi=0 .$$

Після спрощення отримуємо

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\cos\varphi\lambda+1\right)=0 .$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знаходимо

$$\lambda_{1,2}=\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1},\ \lambda_3=1.$$

Задача 2.42. В деякій точці тіла в декартовій ортогональній системі координат тензор напружень задано такими компонентами (Па)

$$\left(\sigma_{ij}\right)=\begin{pmatrix}100 & 100 & 160\\ 100 & 0 & -150\\ 160 & -150 & -60\end{pmatrix}.$$

Для площадки з нормаллю $n_1=1/2,\ n_2=1/2,\ n_3=1/\sqrt{2}$, знайти компоненти вектору $\mathbf{p}_n=\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$, а також величину тангенціального $p_{n\tau}$ і нормального p_{nn} напружень та кут θ між $\mathbf{p}_n$ і $\mathbf{n}$.

Розв'язання

Компоненти вектору напруження $\mathbf{p}_n=\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$

$$p_n^1=\sigma_{1j}n_j=100\frac{1}{2}+100\frac{1}{2}+160\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 213\text{Па},$$

$$p_n^2=\sigma_{2j}n_j=100\frac{1}{2}+0\frac{1}{2}-150\frac{1}{\sqrt{2}}\approx -56\text{Па},$$

$$p_n^3=\sigma_{3j}n_j=160\frac{1}{2}-150\frac{1}{2}-60\frac{1}{\sqrt{2}}\approx -37\text{Па},$$

$$|\mathbf{p}_n|=\sqrt{\left(p_n^1\right)^2+\left(p_n^2\right)^2+\left(p_n^3\right)^2}=\sqrt{213^2+(-56)^2+(-37)^2}\approx 223\text{ Па}.$$

Нормальна складова вектору напружень p_{nn} визначається із співвідношення

$$p_{nn}=p_n^i n_i=213\frac{1}{2}-56\frac{1}{2}-37\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 52\text{ Па}.$$

Величина тангенціальної складової вектору напружень $p_{n\tau}$ визначається за формулою

$$\left(p_{n\tau}\right)^2=p_n^i p_n^i-\left(p_{nn}\right)^2,$$

звідки

$$p_{n\tau}=\sqrt{p_n^i p_n^i-\left(p_{nn}\right)^2}=\sqrt{213^2+(-56)^2+(-37)^2-52^2}\approx 217\text{ Па}.$$

Кут θ між $\mathbf{p}_n$ і $\mathbf{n}$ знаходиться за формулою

$$\cos\theta=p_{nn}/|\mathbf{p}_n|=\frac{52}{223}\approx 0{,}23,$$

$\theta = \arccos(0{,}23) = 76{,}7\ ^\circ$.

Задача 2.43. В точці M декартової системи координат компоненти тензора напружень задані матрицею

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження $\mathbf{p}_n = \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$ на площадці з нормаллю

$$\mathbf{n} = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3.$$

Розв'язання

Визначимо компоненти вектору $\mathbf{p}_n = \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$

$$p_n^1 = \sigma_{1j} n_j = 8\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + 0\left(-\frac{2}{3}\mathbf{e}_2\right) - 4\frac{2}{3}\mathbf{e}_3 = \frac{8}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{8}{3}\mathbf{e}_3 = 0,$$

$$p_n^2 = \sigma_{2j} n_j = 0\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + 5\left(-\frac{2}{3}\mathbf{e}_2\right) - 0\frac{2}{3}\mathbf{e}_3 = -\frac{10}{3}\mathbf{e}_3,$$

$$p_n^3 = \sigma_{3j} n_j = -4\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + 0\left(-\frac{2}{3}\mathbf{e}_2\right) + 4\frac{2}{3}\mathbf{e}_3 = -\frac{4}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{8}{3}\mathbf{e}_3 = \frac{4}{3}\mathbf{e}_3,$$

Тоді

$$\mathbf{p}_n = p_n^1 + p_n^3 + p_n^3 = 0 - \frac{10}{3}\mathbf{e}_3 + \frac{4}{3}\mathbf{e}_3 = -\frac{10}{3}\mathbf{e}_3 + \frac{4}{3}\mathbf{e}_3,$$

що і треба було знайти.

Задача 2.44. В декартовій системі координат компоненти тензора напружень в точці M такі:

$\sigma_{11} = 12,\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = 4,\ \sigma_{23} = 8,\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$.

а) Визначити головні напруження і головні осі тензора напруження.

б) Розкласти тензор напруження на суму кульового тензора і девіатора.

Розв'язання

а) Тензор напружень за умовами задачі

$$\sigma_{ij} = \sigma^{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Головні напруження $\sigma_k, k = 1,2,3$ визначаються із умови

$$\left(\sigma^{ij} - \sigma_k \delta_{ij}\right) n_j^{(k)} = 0,\ k = 1,2,3, \qquad (2.5)$$

де $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – символ Кронекера; $n_j^{(k)}$ – вектор направляючих косинусів для кожної головних осей $k = 1,2,3$.

Для того щоб система рівнянь (2.5), окрім $n_j = 0$, мала ще і нетривіальний розв'язок детермінант $\det\left(\sigma^{ij} - \sigma\delta_{ij}\right)$ із її коефіцієнтів повинен дорівнювати нулю

$$\left|\sigma^{ij} - \sigma\delta_{ij}\right| = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} \sigma^{11} - \sigma & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} - \sigma & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \to \sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \qquad (2.6)$$

де J_1, J_2, J_3 – перший, другий і третій інваріанти тензора напружень σ^{ij};

$$J_1 = \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33};\ J_2 = \begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{13} \\ \sigma^{31} & \sigma^{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{vmatrix};\ J_3 = \det\left(\sigma^{ij}\right).$$

Для тензора напружень маємо, що

$$J_1 = 12 + 0 + 0 = 12;\ J_2 = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -16 - 16 - 64 = -96;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 128 + 128 - 0 - 0 - 768 = -512.$$

Кубічне рівняння для визначення головних напружень $\sigma_k, k = 1,2,3$

$$\sigma^3 - 12\sigma^2 - 96\sigma + 512 = 0.$$

Для розв'язання кубічного рівняння підберемо перший корінь $\sigma_1 = 4$.

Розділимо $\sigma^3 - 12\sigma^2 - 96\sigma + 512$ на $(\sigma - 4)$. Отримаємо $\sigma^2 - 8\sigma - 128 = 0$

$$\begin{array}{l|l} \sigma^3 - 12\sigma^2 - 96\sigma + 512 & \underline{\sigma - 4} \\ \underline{\sigma^3 - 4\sigma^2} & \sigma^2 - 8\sigma - 128 \\ \quad -8\sigma^2 - 96\sigma & \\ \quad \underline{-8\sigma^2 - 32\sigma} & \\ \qquad -128\sigma + 512 & \\ \qquad \underline{-128\sigma + 512} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\sigma_{2,3}=\frac{8\pm\sqrt{64+512}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{8\pm 24}{2},\ \sigma_2=-8,\ \ \sigma_3=16,$$

звідки знаходимо, що

$$\sigma_k=\begin{pmatrix}4\\-8\\16\end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Головні осі тензора напружень будемо визначати із системи рівнянь (2.5). Для головного напруження $\sigma_1=4$ система рівнянь (2.5) для визначення $n_j^{(1)}$ набуває вигляду

$$\begin{cases}8n_1^{(1)}+4n_2^{(1)}+4n_3^{(1)}=0;\\4n_1^{(1)}-4n_2^{(1)}+8n_3^{(1)}=0;\\4n_1^{(1)}+8n_2^{(1)}-4n_3^{(1)}=0.\end{cases} \tag{2.8}$$

Оскільки детермінант (2.8) дорівнює нулю, то для розв’язання системи рівнянь (2.8) будемо використовувати додаткову умову

$$\left(n_1^{(1)}\right)^2+\left(n_2^{(1)}\right)^2+\left(n_3^{(1)}\right)^2=1. \tag{2.9}$$

Визначимо із (2.9) $n_1^{(1)}$

$$n_1^{(1)}=\sqrt{1-\left(n_2^{(1)}\right)^2-\left(n_3^{(1)}\right)^2}\,. \tag{2.10}$$

Із першого рівняння (2.8) знайдемо $n_1^{(1)}$

$$8n_1^{(1)}+4n_2^{(1)}+4n_3^{(1)}=0\rightarrow n_1^{(1)}=-\frac{1}{2}\left[n_2^{(1)}+n_3^{(1)}\right] \tag{2.11}$$

підставимо (2.11) в друге рівняння (2.8) і знайдемо $n_2^{(1)}$

$$4n_1^{(1)}-4n_2^{(1)}+8n_3^{(1)}=0\rightarrow 4\left\{-\frac{1}{2}\left[n_2^{(1)}+n_3^{(1)}\right]\right\}-4n_2^{(1)}+8n_3^{(1)}=0\rightarrow$$

$$\rightarrow -2n_2^{(1)}-2n_3^{(1)}-4n_2^{(1)}+8n_3^{(1)}=0\rightarrow -6n_2^{(1)}+6n_3^{(1)}\rightarrow n_2^{(1)}=n_3^{(1)} \tag{2.12}$$

Тоді з врахуванням (2.12)

$$n_1^{(1)}=\sqrt{1-\left(n_2^{(1)}\right)^2-\left(n_3^{(1)}\right)^2}\rightarrow n_1^{(1)}=\sqrt{1-2\left(n_3^{(1)}\right)^2} \tag{2.13}$$

підставимо (2.13) і (2.12) в третє рівняння (2.8) і знайдемо $n_3^{(1)}$

$$4\sqrt{1-2\left(n_3^{(1)}\right)^2}+8n_3^{(1)}-4n_3^{(1)}=0\rightarrow 4\sqrt{1-2\left(n_3^{(1)}\right)^2}+4n_3^{(1)}=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\sqrt{1-2\left(n_3^{(1)}\right)^2}=-n_3^{(1)}\rightarrow 1-2\left(n_3^{(1)}\right)^2=\left(n_3^{(1)}\right)^2\rightarrow 3\left(n_3^{(1)}\right)^2=1\rightarrow$$

$$\rightarrow n_3^{(1)}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Підходить корінь $n_3^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, тоді

$$n_2^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}},\; n_1^{(1)} = -\frac{1}{2}\left[n_2^{(1)} + n_3^{(1)}\right] = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В результаті для головної осі I маємо такий вектор направляючих косинусів

$$\left[n_j^{(1)}\right]^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Для визначення $n_j^{(2)}$ і $n_j^{(3)}$ головних осей II і III, виконуються аналогічні дії.

Для головного напруження $\sigma_2 = -8$ система рівнянь (2.5) для визначення $n_j^{(2)}$ набуває вигляду

$$\begin{cases} 20n_1^{(2)} + 4n_2^{(2)} + 4n_3^{(2)} = 0; \\ 4n_1^{(2)} + 8n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0; \\ 4n_1^{(2)} + 8n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

$$20n_1^{(2)} + 4n_2^{(2)} + 4n_3^{(2)} = 0 \to n_1^{(2)} = -\frac{1}{5}\left[n_2^{(2)} + n_3^{(2)}\right],$$

$$4n_1^{(2)} + 8n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0 \to 4\left\{-\frac{1}{5}\left[n_2^{(2)} + n_3^{(2)}\right]\right\} + 8n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0 \to$$

$$\to -4n_2^{(2)} - 4n_3^{(2)} + 40n_2^{(2)} + 40n_3^{(2)} = 0 \to n_2^{(2)} = -n_3^{(2)},$$

$$4n_1^{(2)} + 8n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0 \to 4\sqrt{1 - 2\left(n_3^{(1)}\right)^2} - 8n_3^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0 \to$$

$$\to \sqrt{1 - 2\left(n_3^{(1)}\right)^2} = 0 \to 1 - 2\left(n_3^{(1)}\right)^2 = 0 \to \left(n_3^{(1)}\right)^2 = \frac{1}{2} \to n_3^{(1)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Приймаємо, що $n_3^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, тоді $n_2^{(2)} = -n_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а

$$n_2^{(1)} = -\frac{1}{5}\left[n_2^{(2)} + n_3^{(2)}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0.$$

В результаті для головної осі II маємо такий вектор направляючих косинусів

$$\left[n_j^{(2)}\right]^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Для головного напруження $\sigma_3 = 16$ система рівнянь (2.5) для визначення $n_j^{(3)}$ набуває вигляду

$$\begin{cases} -4n_1^{(2)} + 4n_2^{(2)} + 4n_3^{(2)} = 0; \\ 4n_1^{(2)} - 16n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0; \\ 4n_1^{(2)} + 8n_2^{(2)} - 16n_3^{(2)} = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

$$-4n_1^{(2)} + 4n_2^{(2)} + 4n_3^{(2)} = 0 \to n_1^{(2)} = n_2^{(2)} + n_3^{(2)},$$

$$4n_1^{(2)} - 16n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0 \to 4\left(n_2^{(2)} + n_3^{(2)}\right) - 16n_2^{(2)} + 8n_3^{(2)} = 0 \to$$

$$\to 12n_2^{(2)} + 12n_3^{(2)} = 0 \to n_2^{(2)} = n_3^{(2)},$$

$$4n_1^{(2)} + 8n_2^{(2)} - 16n_3^{(2)} = 0 \to 4\sqrt{1 - 2\left(n_3^{(1)}\right)^2} + 8n_3^{(2)} - 16n_3^{(2)} = 0 \to$$

$$\sqrt{1 - 2\left(n_3^{(1)}\right)^2} + 2n_3^{(2)} - 4n_3^{(2)} = 0 \to \sqrt{1 - 2\left(n_3^{(1)}\right)^2} - 2n_3^{(2)} = 0 \to$$

$$\to 1 - 2\left(n_3^{(1)}\right)^2 = 4n_3^{(2)} \to 6\left(n_3^{(1)}\right)^2 = 1 \to n_3^{(1)} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Приймаємо, що $n_3^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $n_2^{(2)} = n_3^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, а

$$n_1^{(2)} = n_2^{(2)} + n_3^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

В результаті для головної осі III маємо такий вектор направляючих косинусів

$$\left[n_j^{(3)}\right]^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Перевірка за $\left(\sigma^{ij} - \sigma_k\delta_{ij}\right)n_j^{(k)} = 0, k = 1,2,3:$

– головна вісь I $\left(\sigma^{ij} - \sigma_k\delta_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$, $\left[n_j^{(1)}\right]^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

– головна вісь II $\left(\sigma^{ij} - \sigma_k \delta_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, $\left[n_j^{(2)}\right]^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 20 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

– головна вісь III $\left(\sigma^{ij} - \sigma_k \delta_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \\ 4 & 8 & -16 \end{pmatrix}$,

$\left[n_j^{(3)}\right]^T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -16 & 8 \\ 4 & 8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) Кульова складова тензору напружень визначається за формулою

$$\left(\sigma^{ij}\right)^s = \frac{1}{3}\sigma^{kk}\delta_{ij},$$

де $\sigma^{kk} = \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33}$.

Для тензора (2.4) будемо мати, що

$$\sigma^{kk} = \sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33} = 12 + 0 + 0 = 12,$$

тоді

$$\left(\sigma^{ij}\right)^s = \frac{1}{3}\sigma^{kk}\delta_{ij} = \frac{1}{3}12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

Девіаторна складова тензора напружень визначається за формулою

$$\left(\sigma^{ij}\right)^d = \sigma^{ij} - \frac{1}{3}\sigma^{kk}\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.9. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 2.45. У точці P задано тензор напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Визначити вектор напруження в точці P на площадці, паралельній площині: а) BGE, б) $BGFC$ в елементарному паралелепіпеді (рис. 2.17).

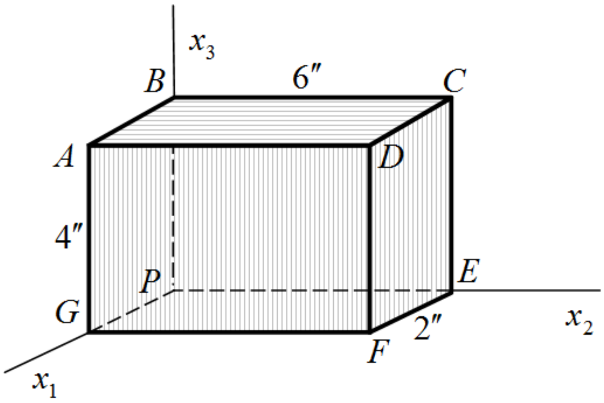


Рис. 2.17. До задачі 2.41

Відповідь:

а) $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = 11\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3$; б) $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(21\mathbf{e}_1 + 14\mathbf{e}_2 + 12\mathbf{e}_3\right)$.

Задача 2.46. Визначити нормальну і дотичну компоненти напруження на площині $BGFC$ за умовами задачі 2.41.

Відповідь:

$$\sigma_N = \frac{63}{5}, \quad \sigma_S = \frac{37{,}7}{5}.$$

Задача 2.47. Головні напруження в точці P такі: $\sigma_{\mathrm{I}} = 12$, $\sigma_{\mathrm{II}} = 3$, $\sigma_{\mathrm{III}} = -6$. Визначити вектор напруження і його нормальну компоненту на октаедричній площині в точці P.

Відповідь:

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(12\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3\right), \ \sigma_N = 3.$$

Задача 2.48. Визначити величини головних напружень тензорів:

а) $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь:

а) $\sigma_{\mathrm{I}} = 2$, $\sigma_{\mathrm{II}} = -1$, $\sigma_{\mathrm{III}} = -1$; б) $\sigma_{\mathrm{I}} = 4$, $\sigma_{\mathrm{II}} = 1$, $\sigma_{\mathrm{III}} = 1$.

Задача 2.49. Розкласти тензор напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{pmatrix}$$

на кульову і девіаторну частини і знайти головні значення напруження.

Відповідь:

$s_{\mathrm{I}} = 31$, $s_{\mathrm{II}} = 8$, $s_{\mathrm{III}} = -39$.

Задача 2.50. Показати, що нормальна компонента вектора напруження на октаедричній площині дорівнює одній третій першого інваріанта тензора напруження.

Задача 2.51. В деякій точці задано тензор напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_{22} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

причому величина σ_{22} не задана. Визначити σ_{22} так, щоб вектор напруження на деякій площадці в цій точці перетворювався в нуль. Знайти одиничну нормаль до цієї вільної від напруження площини.

Відповідь:

$$\sigma_{22} = 1,\ \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Задача 2.52. Побудувати круги Мора і визначити максимальне дотичне напруження для таких напружених станів:

а) $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau \end{pmatrix}$.

Відповідь:

а) $\sigma_S = \tau$, б) $\sigma_S = \dfrac{3}{2}\tau$.

Задача 2.53. Використовуючи результат задачі 1.58 і закон перетворення тензорів напруження $\sigma'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq}$, показати, що добуток $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqm}\sigma_{ip}\sigma_{jq}\sigma_{km}$ є інваріантом.

Задача 2.54. Поле напруження в суцільному середовищі задано тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & \left(1 - x_2^3\right)x_1 & 0 \\ \left(1 - x_2^3\right)x_1 & \left(x_2^3 - 3x_2\right)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Визначити: а) розподіл масових сил, якщо рівняння рівноваги задоволені повсюди; б) величини головних напружень у точці $P\left(a, 0, 2\sqrt{a}\right)$; в) максимальне дотичне напруження в точці P; г) головні значення девіатора напруження в точці P.

Відповідь: а) $b_3 = -4x_3$; б) $a, \quad -a, \quad 8a$; в) $\pm 4{,}5a$;

г) $-\dfrac{11}{3}a, \quad -\dfrac{5}{3}a, \quad \dfrac{16}{3}a.$

Задача 2.55. Отримати формули, що виражають величини нормального і дотичного напруження на площадці з нормаллю $\mathbf{n}$ в точці M через головні компоненти тензора напруження в цій точці. Вважати відомими проекції вектору $\mathbf{n}$ на головні осі тензора напруження.

Відповідь: $p_{nn} = p^i n_i^2$, $p_{n\tau}^2 = \left(p^i n_i\right)^2 - \left(p^i n_i^2\right)^2$.

Задача 2.56. Поле тензора напруження в декартових координатах задано матрицею

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_1 x_2 \gamma & 5x_2^2 \gamma & 0 \\ 5x_2^2 \gamma & 0 & 2x_3^2 \gamma \\ 0 & 2x_3^2 \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \text{const}.$$

Якими повинні бути масові сили, щоб середовище з заданою густиною ρ було в рівновазі?

Відповідь: $b_1 = -13\gamma \dfrac{x_2}{\rho}$, $b_2 = -4\gamma \dfrac{x_3}{\rho}$, $b_3 = 0$.

Задача 2.57. Нехай в декартовій системі координат тензор напруження має компоненти $\sigma_{11} = -\rho g x_1 + \varphi\left(x_2, x_3\right)$, решта компонент σ_{ij} дорівнюють нулю. Густина $\rho = \text{const}, \quad g = \text{const}$. Знайти масові сили, якщо відомо, що середовище знаходиться в рівновазі.

Відповідь:

$b_1 = g$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$.

3. ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН

3.1. Переміщення і деформації

Задача 3.1. Відносно суміщених матеріальних X_i і просторових осей x_i задано поле переміщення суцільного середовища $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, де A – стала. Визначити компоненти вектора переміщення в матеріальній і просторовій формі (тобто в лагранжевих і ейлеревих змінних).

Розв'язання

Компоненти переміщення в матеріальній формі знаходимо безпосередньо із $u_k = x_k - X_k$:

$$u_1 = x_1 - X_1 = 0,\ u_2 = x_2 - X_2 = AX_3,\ u_3 = x_3 - X_3 = AX_2.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь відносно, X_i отримуємо:

$$X_1 = x_1,\ X_2 = \frac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2},\ X_3 = \frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2},$$

а просторові компоненти вектору $\mathbf{u}$ будуть такими:

$$u_1 = 0,\ u_2 = AX_3 = A\frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2},\ u_3 = Ax_2 = A\frac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2}.$$

Тут визначення X_2 і X_3 відбувалося таким чином:

$$x_2 - X_2 = AX_3 \to X_2 = x_2 - AX_3;$$

$$x_3 - X_3 = AX_2 \to x_3 - X_3 = A(x_2 - AX_3) \to X_3 = \frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2};$$

$$X_2 = x_2 - A\frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2} \to X_2 = \frac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2}.$$

Із отриманих результатів видно, що початкова пряма лінія в матеріальній частинці, яка представлена $X_1 = 0$, $X_2 + X_2 = \dfrac{1}{1 + A}$, після деформації займе положення $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 1$. А матеріальна лінія $X_1 = 0$, $X_2 = X_3$ після деформації стане $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$.

Задача 3.2. Для поля переміщень задачі 3.1 визначити зміщене положення матеріальних частинок, які початково складали: а) коло з границею $X_2^2 + X_3^2 = 1/\left(1 - A^2\right)$ в площині $X_1 = 0$; б) нескінченно малий куб, ребра якого лежать на осях координат і мають довжину $dX_i = dX$. Намалювати зміщені конфігурації для випадків *а* і *б*, якщо $A = \dfrac{1}{2}$.

Розв'язання

а) Підстановка координат $X_2 = \dfrac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2}$ і $X_3 = \dfrac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2}$ переводить коло в область, яка обмежена еліпсом

$$X_2^2 + X_3^2 = 1/\left(1 - A^2\right) \to \left(\frac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2}\right)^2 = \frac{1}{1 - A^2} \to$$

$$\to \frac{A^2x_2^2 + x_2^2 - 4Ax_2x_3 + A^2x_3^2 + x_3^2}{\left(1 - A^2\right)^2} = \frac{1 - A^2}{\left(1 - A^2\right)^2} \to$$

$$\to \left(1 + A^2\right)x_2^2 - 4Ax_2x_3 + \left(1 + A^2\right)x_3^2 = \left(1 - A^2\right).$$

За умови $A = \dfrac{1}{2}$ рівняння еліпса набуває вигляду

$$\left(1 + A^2\right)x_2^2 - 4Ax_2x_3 + \left(1 + A^2\right)x_3^2 = \left(1 - A^2\right) \to \left(1 + \frac{1}{4}\right)x_2^2 - 4\frac{1}{4}x_2x_3 + \left(1 + \frac{1}{4}\right)x_3^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \to 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2 = 3.$$

В головних осях x_i^*, які утворюють кути 45° з x_i, $i = 1,2,3$, це рівняння приймає вигляд

$$x_2^{*2} + 9x_3^{*2} = 3.$$

Знайдемо рівняння кола з границею $X_2^2 + X_3^2 = 1/\left(1 - A^2\right)$ за умови $A = \dfrac{1}{2}$.

$1/\left(1 - A^2\right) \to 1/\left(1 - 1/4\right) = 4/3$, тоді

$X_2^2 + X_3^2 = 4/3$.

На рис. 3.1 показано геометричне місце зміщених точок.

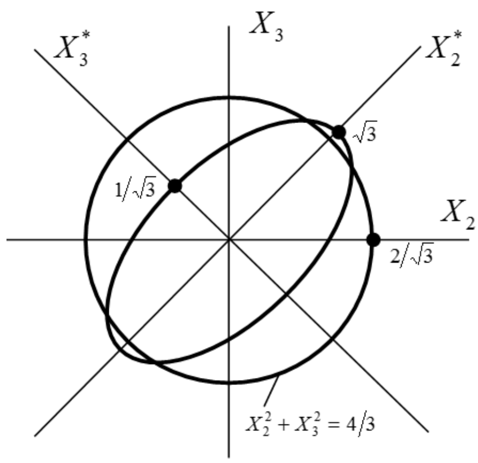


Рис. 3.1. До задачі 3.2 (завдання *а*)

б) Із розв'язку задачі 3.1 переміщення ребр куба знаходяться таким чином. На ребрі $X_1 = X_1$, $X_2 = X_3 = 0$ компоненти переміщення становлять $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. На ребрі $X_1 = X_2 = 0$, $X_3 = X_3$ маємо, що $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = AX_3$, і частинки переміщуються в напрямку X_2 пропорційно їх відстані від початку координат. Для ребра $X_1 = X_3 = 0$, $X_2 = X_2$, $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = AX_2$. Початкове зміщення куба показано на рис. 3.2.

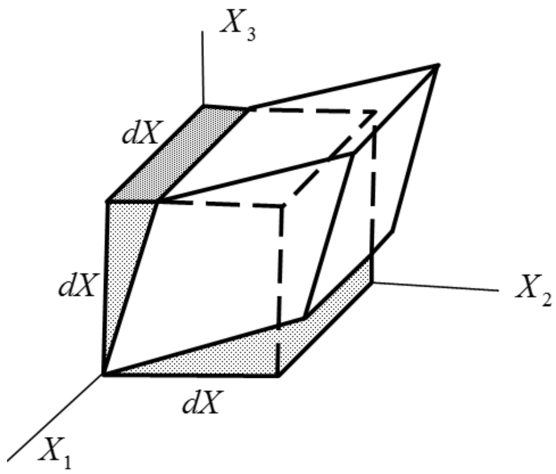


Рис. 3.2. До задачі 3.2 (завдання *б*)

Задача 3.3. Відносно суміщених матеріальних і просторових осей задано вектор переміщення $\mathbf{u} = 4X_1^2\mathbf{e}_1 + X_2X_3^2\mathbf{e}_2 + X_1X_3^2\mathbf{e}_3$. Визначити зміщене положення частинки, що початково знаходилася в точці $(1, 0, 2)$.

Розв'язання

Радіус-вектор початкового положення частинки дорівнює $\mathbf{X} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$. Її зміщення складає

$$\mathbf{u} = 4X_1^2\mathbf{e}_1 + X_2X_3^2\mathbf{e}_2 + X_1X_3^2\mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{u} = 4(1^2)\mathbf{e}_1 + 0(2^2)\mathbf{e}_2 + 1(2)^2\mathbf{e}_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3,$$

і, оскільки, зв'язок між просторовими і матеріальними координатами виражається співвідношенням $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$, радіус-вектор кінцевого положення буде таким

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3 = 5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_3.$$

Задача 3.4. В ортогональній декартовій матеріальній системі координат X_i задано поле переміщення $U_1 = -AX_2X_3$, $U_2 = AX_1X_3$, $U_3 = 0$, де A – стала. Визначити компоненти переміщення в циліндричній просторовій системі координат x_i, якщо обидві системи мають спільний початок.

Розв'язання

Внаслідок геометрії задачі (рис. 3.3) тензор перетворення осей $\alpha_{pK} = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{I}_K$ має вигляд

$$\alpha_{pK}=\begin{pmatrix}\cos x_2 & \sin x_2 & 0\\ -\sin x_2 & \cos x_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

а з узагальненого запису формули маємо $u_p=\alpha_{pK}U_K$. (Тут під координатою x_2 мається на увазі азимутальний кут). Оскільки, декартові і циліндричні координати зв'язані між собою співвідношеннями $X_1=x_1\cos x_2$, $X_2=x_1\sin x_2$, $X_3=x_3$, формула $u_p=\alpha_{pK}U_K=\begin{bmatrix}\cos x_2 & \sin x_2 & 0\\ -\sin x_2 & \cos x_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-AX_2X_3\\ AX_1X_3\\ 0\end{bmatrix}$ дає

$$u_1=(\cos x_2)(-AX_2X_3)+(\sin x_2)AX_1X_3=(-\cos x_2)Ax_1x_3\sin x_2+(\sin x_2)Ax_1x_3\cos x_2=$$
$$=\sin x_2\cos x_2\left(Ax_1x_3-Ax_1x_3\right)=0,$$

$$u_2=(\sin x_2)AX_2X_3+(\cos x_2)AX_1X_3=(\sin x_2)Ax_1x_3\sin x_2+(\cos x_2)Ax_1x_3\cos x_2=$$
$$=Ax_1x_3\left(\sin^2 x_2+\cos^2 x_2\right)=Ax_1x_3,$$
$$u_3=0.$$

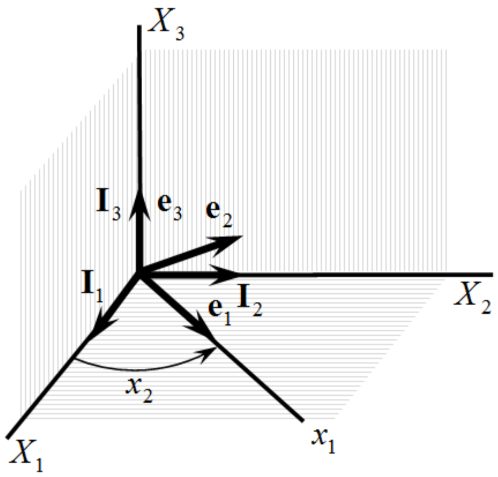


Рис. 3.3. До задачі 3.4

Отриманий результат є зміщенням стрижня під час кручення.

Задача 3.5. Деформація задана в лагранжевій формі: $x_1=X_1+X_3\left(e^2-1\right)$, $x_2=X_2+X_3\left(e^2-e^{-2}\right)$, $x_3=e^2X_3$, де e – константа. Довести, що якобіан J не дорівнює нулю, і знайти ейлереві рівняння, що описують деформацію.

Розв'язання

Згідно з $J=\left|\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|$ отримуємо

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\left(X_1+X_3\left(e^2-1\right)\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial\left(X_1+X_3\left(e^2-1\right)\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial\left(X_1+X_3\left(e^2-1\right)\right)}{\partial X_3}\\ \dfrac{\partial\left(X_2+X_3\left(e^2-e^{-2}\right)\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial\left(X_2+X_3\left(e^2-e^{-2}\right)\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial\left(X_2+X_3\left(e^2-e^{-2}\right)\right)}{\partial X_3}\\ \dfrac{\partial\left(e^2X_3\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial\left(e^2X_3\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial\left(e^2X_3\right)}{\partial X_3}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & e^2-1\\ 0 & 1 & e^2-e^{-2}\\ 0 & 0 & e^2\end{vmatrix}=e^2\neq 0.$$

Тобто якобіан не дорівнює нулю, що є достатньою умовою існування оберненої функції, і тому можливо знайти ейлереві рівняння.

Знайдемо обернені рівняння за допомогою розв’язання системи з трьох рівнянь

$$\begin{cases} x_1=X_1+X_3\left(e^2-1\right);\\ x_2=X_2+X_3\left(e^2-e^{-2}\right); \\ x_3=e^2X_3;\end{cases}\rightarrow X_3=x_3e^{-2};\ X_1=x_1-x_3e^{-2}\left(e^2-1\right);$$

$$X_2=x_2-e^{-2}x_3\left(e^2-e^{-2}\right).$$

В результаті отримали

$X_1=x_1+x_3\left(e^{-2}-1\right),\ X_2=x_2+x_3\left(e^{-4}-1\right),\ X_3=e^{-2}x_3.$

Задача 3.6. Дано поле переміщення $\mathbf{u}=X_1X_3^2\mathbf{e}_1+X_1^2X_2\mathbf{e}_2+X_2^2X_3\mathbf{e}_3$. Визначити окремо матеріальний градієнт $\hat{\mathbf{F}}$ і переміщення $\hat{\mathbf{J}}$ та впевнитись у правильності формули $\hat{\mathbf{J}}=\mathbf{u}\vec{\nabla}=\hat{\mathbf{F}}-\hat{\mathbf{I}}$.

Розв’язання

За заданим вектором переміщення $\mathbf{u}$ знаходимо компоненти $\hat{\mathbf{J}}$ як $J_{ij}=\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\left(X_1X_3^2\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial\left(X_1X_3^2\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial\left(X_1X_3^2\right)}{\partial X_3}\\ \dfrac{\partial\left(X_1^2X_2\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial\left(X_1^2X_2\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial\left(X_1^2X_2\right)}{\partial X_3}\\ \dfrac{\partial\left(X_2^2X_3\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial\left(X_2^2X_3\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial\left(X_2^2X_3\right)}{\partial X_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_3^2 & 0 & 2X_1X_3\\ 2X_1X_2 & X_1^2 & 0\\ 0 & 2X_2X_3 & X_2^2\end{pmatrix}.$$

Оскільки, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{X}$, то поле переміщення також можна представити співвідношеннями для компонент вектора:

$$x_1 = X_1 X_3^2 + X_1 = X_1\left(1 + X_3^2\right),\; x_2 = X_1^2 X_2 + X_2 = X_2\left(1 + X_1^2\right),$$

$$x_2 = X_2^2 X_3 + X_3 = X_3\left(1 + X_2^2\right),$$

за допомогою яких можна знайти матеріальний градієнт $\hat{\mathbf{F}}$, компоненти якого визначаються за формулою $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x\left(X_1\left(1+X_3^2\right)\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x\left(X_1\left(1+X_3^2\right)\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x\left(X_1\left(1+X_3^2\right)\right)}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x\left(X_2\left(1+X_1^2\right)\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x\left(X_2\left(1+X_1^2\right)\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x\left(X_2\left(1+X_1^2\right)\right)}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x\left(X_3\left(1+X_2^2\right)\right)}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x\left(X_3\left(1+X_2^2\right)\right)}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x\left(X_3\left(1+X_2^2\right)\right)}{\partial X_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+X_3^2 & 0 & 2X_1X_3 \\ 2X_1X_2 & 1+X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2X_2 & 1+X_2^2 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньою підстановкою $\hat{\mathbf{F}}$ у вираз $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}$ переконуємося порівнянням з виразом для $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$, що рівність виконується

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} 1+X_3^2 & 0 & 2X_1X_3 \\ 2X_1X_2 & 1+X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2X_2 & 1+X_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3^2 & 0 & 2X_1X_3 \\ 2X_1X_2 & X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2X_2 & X_2^2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.7. Деякий об'єм суцільного середовища виконує переміщення $\mathbf{u} = \left(3X_2 - 4X_3\right)\mathbf{e}_1 + \left(2X_1 - X_3\right)\mathbf{e}_2 + \left(4X_2 - X_1\right)\mathbf{e}_3$. Визначити змiщене положення вектора, що з'єднує частинки $A(1, 0, 3)$ і $B(3, 6, 6)$, вважаючи, що матеріальні і просторові осі співпадають.

Розв'язання

Згідно з $u_k = x_k - X_k$, просторові координати за такого переміщення дорівнюють:

$$x_1 = X_1 + 3X_2 - 4X_3,\; x_2 = X_2 + 2X_1 - X_3,\; x_3 = X_3 + 4X_2 - X_1.$$

Таким чином, у зміщеному положенні частинка A має координати

$$x_1 = X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 1 + 3\cdot 0 - 4\cdot 3 = -11,$$

$$x_2 = 2X_1 + X_2 - X_3 = 2 + 0 - 3 = -1,$$

$x_3 = -X_1 + 4X_2 + X_3 = -1 + 0 + 3 = 2$,

а частинка B – координати

$x_1 = X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 3 + 18 - 24 = -3$,

$x_2 = 2X_1 + X_2 - X_3 = 6 + 6 - 6 = 6$,

$x_3 = -X_1 + 4X_2 + X_3 = -3 + 24 + 6 = 27$.

Тоді в зміщеному положенні вектор, що з'єднує точки A і B, має вигляд

$$\mathbf{V} = (-3 - (-11))\mathbf{e}_1 + (6 - (-1))\mathbf{e}_2 + (27 - 2)\mathbf{e}_3 = 8\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 25\mathbf{e}_3.$$

Задача 3.8. Для поля переміщення задачі 3.7 визначити зміщене положення радіуса-вектору частинки $C(2, 6, 3)$, який паралельний вектору, що з'єднує частинки A і B. Показати, що ці два вектори лишаються паралельними і після деформації.

Розв'язання

Визначимо зміщене положення частинки C за умовами задачі 3.7

$x_1 = X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 2 + 18 - 12 = 8$,

$x_2 = 2X_1 + X_2 - X_3 = 4 + 6 - 3 = 7$,

$x_3 = -X_1 + 4X_2 + X_3 = -2 + 24 + 3 = 25$.

Тоді радіус-вектор частинки C після деформації буде таким

$\mathbf{U} = 8\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 25\mathbf{e}_3$.

Очевидно, що цей вектор паралельний вектору $\mathbf{V}$ (див. задачу 3.7). Отриманий результат є прикладом однорідної деформації для якої справедливе співвідношення $u_i = A_{ij} X_j$.

Задача 3.9. У загальному формулюванні деформація називається однорідною, якщо вона задана полем переміщення вигляду $u_i = A_{ij} X_j$, де A_{ij} – константи або функція часу. Довести, що під час такої деформації: а) плоскі січення лишаються плоскими, б) прямі лінії лишаються прямими.

Розв'язання

а) З $u_k = x_k - X_k$ витікає

$$x_i = X_i + u_i = X_i + A_{ij} X_j = (\delta_{ij} + A_{ij}) X_j.$$

Згідно з визначенням якобіана перетворення $J = \left| \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$, обернені співвідношення $X_i = (\delta_{ij} + B_{ij}) x_j$ існують, якщо детермінант $\left| \delta_{ij} + A_{ij} \right|$ відмінний від нуля. Якщо припустити це, то рівняння матеріальної площини $\beta_i X_j + \alpha = 0$ перейде в $\beta_i (\delta_{ij} + B_{ij}) x_j + \alpha = 0$, що можна записати у вигляді рівняння площини $\lambda_j x_j + \alpha = 0$, де коефіцієнти $\lambda_j = \beta_i (\delta_{ij} + B_{ij})$.

б) Пряму лінію можна розглядати як пересічення двох площин. У деформованому стані, як доказано, площини лишаються площинами і, відповідно, лінія пересічення двох площин теж лишається прямою.

Задача 3.10. Нескінченно малою однорідною деформацією називається така деформація, для якої коефіцієнти A_{ij} в формулі $u_i = A_{ij} X_j$ настільки малі, що ї добутками можна знехтувати порівняно із самими коефіцієнтами. Довести, що повну деформацію, яка отримана в результаті двох послідовних нескінченно малих однорідних деформацій, можна розглядати як суму двох окремих деформацій і порядок, в якому відбувається переміщення, не впливає на кінцеву конфігурацію.

Розв'язання

Нехай $x_i = (\delta_{ij} + A_{ij})X_j$ і $x_i' = (\delta_{ij} + B_{ij})x_j$ визначають послідовні нескінченно малі переміщення. Тоді

$$x_i' = (\delta_{ij} + B_{ij})(\delta_{jk} + A_{jk})X_k = (\delta_{ik} + B_{ik} + A_{ik} + B_{ij}A_{jk})X_k.$$

Нехтуючи добутком $B_{ij}A_{jk}$ як малою величиною вищого порядку, отримуємо

$$x_i' = (\delta_{ik} + B_{ik} + A_{ik})X_k = (\delta_{ik} + C_{ik})X_k,$$

що представляє нескінченно малу однорідну деформацію

$$u_i'' = x_i' - X_i = C_{ik}X_k = (A_{ik} + B_{ik})X_k = (B_{ik} + A_{ik})X_k = u_i + u_i'.$$

3.2. Тензори деформації

Задача 3.11. Деякий об'єм суцільного середовища зазнає деформацію $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, де A – стала. Обчислити тензор деформації Гріна $\hat{\mathbf{G}}$ і використати його для визначення лагранжевого тензора скінченних деформацій $\hat{\mathbf{L}}_G$.

Розв'язання

Тензор деформації Гріна визначається за формулою $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}}$, причому $\hat{\mathbf{F}}$ в матричній формі визначається по формулі

$$[F_{ij}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix},$$

так що

$$[G_{ij}] = [F_{ij}]^T [F_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, згідно з $\hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\mathbf{I}}\right)$, отримуємо

$$\hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.12. У випадку поля переміщення задачі 3.11 обчислити квадрат довжини $(dx)^2$ сторін OA і OB та діагональ OC малого прямокутника, який показано на рис. 3.4 , після деформації.

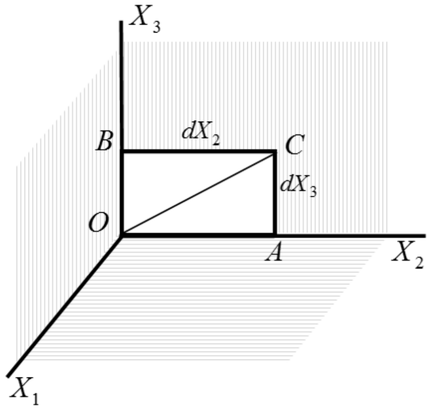


Рис. 3.4. До задачі 3.12

Розв'язання

Скориставшись тензором $\hat{\mathbf{G}}$, що визначено в задачі 3.11, за формулою $(dx)^2 = d\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{X}$ знайдемо квадрат довжини діагоналі OC в матричній формі

$$(dx)^2 = [0, \quad dX_2, \quad dX_3]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(1+A^2\right)(dX_2)^2 + 4A dX_2 dX_3 + \left(1+A^2\right)(dX_3)^2.$$

Подібним чином визначаємо $(dx)^2$ для OA

$$(dx)^2 = [0, \quad dX_2, \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(1+A^2\right)(dX_2)^2,$$

а для OB

$$(dx)^2 = [0, \quad 0, \quad dX_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \left(1+A^2\right)(dX_3)^2.$$

Задача 3.13. Обчислити зміну квадрата довжини лінійного елемента задачі 3.12 і порівняти результат з отриманим по формулі $(dx)^2-(dX)^2=d\mathbf{X}\cdot 2\hat{\mathbf{L}}_G\cdot d\mathbf{X}$, скориставшись тензором деформації $\hat{\mathbf{L}}_G$, який знайдено в задачі 3.11.

Розв'язання

Безпосередньо за результатами задачі 3.12 знайдемо зміну:

а) для OC

$$(dx)^2-(dX)^2=\left(1+A^2\right)\left(dX_2^2+dX_3^2\right)+4AdX_2dX_3-\left(dX_2^2+dX_3^2\right)=$$
$$=A^2\left(dX_2^2+dX_3^2\right)+4AdX_2dX_3;$$

б) для OB

$$(dx)^2-(dX)^2=\left(1+A^2\right)dX_3^2-dX_3^2=A^2dX_3^2;$$

в) для OA

$$(dx)^2-(dX)^2=\left(1+A^2\right)dX_2^2-dX_2^2=A^2dX_2^2.$$

Із рівняння $(dx)^2-(dX)^2=d\mathbf{X}\cdot 2\hat{\mathbf{L}}_G\cdot d\mathbf{X}$ для OC маємо

$$(dx)^2-(dX)^2=\left[0,\quad dX_2,\quad dX_3\right]\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & A^2 & 2A\\ 0 & 2A & A^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ dX_2\\ dX_3\end{bmatrix}=$$
$$=A^2\left(dX_2^2+dX_3^2\right)+4AdX_2dX_3;$$

для OB

$$(dx)^2-(dX)^2=\left[0,\quad 0,\quad dX_3\right]\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & A^2 & 2A\\ 0 & 2A & A^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ dX_3\end{bmatrix}=A^2dX_3^2;$$

для OA

$$(dx)^2-(dX)^2=\left[0,\quad dX_2,\quad 0\right]\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & A^2 & 2A\\ 0 & 2A & A^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ dX_2\\ 0\end{bmatrix}=A^2dX_2^2.$$

Задача 3.14. Для поля переміщення задачі 3.11 обчислити матеріальний градієнт зміщення $\hat{\mathbf{J}}$ і використати цей тензор для визначення лагранжевого тензора скінченних деформацій $\hat{\mathbf{L}}_G$. Порівняти з результатами задачі 3.11.

Розв'язання

Внаслідок умов задачі 3.11 компоненти вектора переміщення дорівнюють $u_1=0$, $u_2=AX_3$, $u_3=AX_2$, так що

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \hat{\mathbf{J}}_c \cdot \hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

Тоді по формулі $\hat{\mathbf{L}}_G = \dfrac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c + \hat{\mathbf{J}}_c \cdot \hat{\mathbf{J}}\right)$, отримуємо лагранжевий тензор скінченних деформацій

$$2\hat{\mathbf{L}}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{pmatrix},$$

що співпадає з результатами задачі 3.11.

Задача 3.15. Дано поле переміщення $x_1 = X_1 + AX_2$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_1$, де A – стала. Обчислити лагранжевий тензор лінійної деформації $\hat{\mathbf{L}}$ і ейлерів тензор лінійної деформації $\hat{\mathbf{E}}$. Порівняти $\hat{\mathbf{L}}$ і $\hat{\mathbf{E}}$ у випадку, коли стала A дуже мала.

Розв’язання

Спочатку визначимо компоненти вектора переміщення за формулою $u_i = x_i - X_i$:

$$u_1 = x_1 - X_1 = X_1 + AX_2 - X_1 = AX_2,$$
$$u_2 = x_2 - X_2 = X_2 + AX_3 - X_2 = AX_3,$$
$$u_3 = x_3 - X_3 = X_3 + AX_1 - X_3 = AX_1.$$

Тоді із $\hat{\mathbf{L}} = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c\right)$, отримуємо

$$2\hat{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{pmatrix},$$

де $\hat{\mathbf{J}} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$, $\hat{\mathbf{J}}_c = \dfrac{\partial u_j}{\partial X_i}$ – компоненти матеріального градієнта.

Знайдемо просторові компоненти координат, тобто виконаємо зворотне перетворення $\left(x_i = f(X_i) \to X_i = F(x_i)\right)$, розв’язуючи систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + AX_2, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = X_3 + AX_1, \end{cases} \to \begin{cases} X_1 = x_1 - AX_2, \\ X_2 = x_2 - AX_3, \\ X_3 = x_3 - AX_1, \end{cases} \to \begin{cases} X_1 = \left(x_1 - Ax_2 + A^2 x_3\right)/\left(1 + A^3\right), \\ X_2 = \left(x_2 - Ax_3 + A^2 x_1\right)/\left(1 + A^3\right), \\ X_3 = \left(x_3 - Ax_1 + A^2 x_2\right)/\left(1 + A^3\right). \end{cases}$$

Підставляючи останні вирази в формули для компонент вектора переміщення, отримуємо

$$\begin{cases} u_1 = AX_2 = A\left(x_2 - Ax_3 + A^2 x_1\right)/\left(1 + A^3\right); \\ u_2 = AX_3 = A\left(x_3 - Ax_1 + A^2 x_2\right)/\left(1 + A^3\right); \\ u_2 = AX_1 = A\left(x_1 - Ax_2 + A^2 x_3\right)/\left(1 + A^3\right). \end{cases}$$

Використовуючи останні вирази, визначимо ейлерів тензор лінійної деформації за формулою $\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}_c\right)$

$$\hat{\mathbf{E}} = \left(\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}_c\right) = \frac{A}{1+A^3}\begin{pmatrix} A^2 & 1 & -A \\ -A & A^2 & 1 \\ 1 & -A & A^2 \end{pmatrix} + \frac{A}{1+A^3}\begin{pmatrix} A^2 & -A & 1 \\ 1 & A^2 & -A \\ -A & 1 & A^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{A}{1+A^3}\begin{pmatrix} 2A^2 & 1-A & 1-A \\ 1-A & 2A^2 & 1-A \\ 1-A & 1-A & 2A^2 \end{pmatrix}.$$

де $\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $\hat{\mathbf{K}}_c = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ – компоненти просторового градієнта.

Якщо стала A є малою величиною, то членами A^2 і вищих порядків можна знехтувати. В результаті отримуємо

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{A}{1+A^3}\begin{pmatrix} 2A^2 & 1-A & 1-A \\ 1-A & 2A^2 & 1-A \\ 1-A & 1-A & 2A^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+A^3}\begin{pmatrix} 2A^3 & A-A^2 & A-A^2 \\ A-A^2 & 2A^2 & A-A^2 \\ A-A^2 & A-A^2 & 2A^2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті $\hat{\mathbf{E}}$ зводиться до $\hat{\mathbf{L}}$.

Задача 3.16. Поле переміщення задано формулою $\mathbf{u} = X_1^2 X_2 \mathbf{e}_1 + \left(X_2 - X_3^2\right)\mathbf{e}_2 + X_2^2 X_3 \mathbf{e}_3$. Визначити вектор відносного переміщення $d\mathbf{u}$ в напрямку осі $-X_2$ в точці $P(1, 2, -1)$. Визначити відносне переміщення $\mathbf{u}_{Q_i} - \mathbf{u}_P$ для точок $Q_1(1, 1, -1)$, $Q_2(1, 3/2, -1)$, $Q_1(1, 7/4, -1)$, $Q_1(1, 15/8, -1)$ і порівняти їх напрямки з напрямом $d\mathbf{u}$.

Розв'язання

Для заданого вектору $\mathbf{u}$ градієнт переміщення $\hat{\mathbf{J}}$ в матричній формі виглядає так

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right]=\begin{bmatrix}2X_1X_2 & X_1^2 & 0\\ 0 & 1 & -2X_3\\ 0 & 2X_2X_3 & X_2^2\end{bmatrix},$$

так що по формулі $d\mathbf{u}=\left(\mathbf{u}\vec{\nabla}\right)_P\cdot d\mathbf{X}$ відносне переміщення в точці P в напрямку $-X_2$ дорівнює

$$[du_i]=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 4\end{bmatrix}.$$

Далі безпосереднім обчисленням із виразу для $\mathbf{u}$ знайдемо в точці $P(1,2,-1)$

$$\mathbf{u}=X_1^2X_2\mathbf{e}_1+\left(X_2-X_3^2\right)\mathbf{e}_2+X_2^2X_3\mathbf{e}_3\rightarrow\mathbf{u}_P=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-4\mathbf{e}_3$$

і в точці $Q_1(1,1,\text{-}1)$

$$\mathbf{u}_{Q_1}=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3.$$

Тоді

$$\mathbf{u}_{Q_1}-\mathbf{u}_P=(1-2)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-(1-4)\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3.$$

Аналогічним чином знаходимо

$$\mathbf{u}_{Q_2}-\mathbf{u}_P=(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3{,}5\mathbf{e}_3)/2,$$

$$\mathbf{u}_{Q_3}-\mathbf{u}_P=(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3{,}75\mathbf{e}_3)/4,$$

$$\mathbf{u}_{Q_4}-\mathbf{u}_P=(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3{,}875\mathbf{e}_3)/8.$$

Ясно, що коли точка Q_i наближається до точки P, напрямок відносного зміщення двох частинок прямує до граничного значення напрямку $d\mathbf{u}$.

Задача 3.17. Для переміщення задачі 3.16 визначити відносне переміщення одиничного вектора, що йде з точки $P(1,2,-1)$ в точку $Q(4,2,3)$.

Розв'язання

Одиничний вектор у напрямку із P в Q є $\mathbf{v}=\frac{3}{5}\mathbf{e}_1+\frac{4}{5}\mathbf{e}_3$, так що по формулі $\frac{d\mathbf{u}}{dX}=\mathbf{u}\vec{\nabla}\cdot\nu_i=\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{v}$, використовуючи матрицю $\mathbf{J}$, що була обчислена в задачі 3.16, отримуємо

$$\left[\frac{du_i}{dX}\right]=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/5\\ 0\\ 4/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12/5\\ 8/5\\ 16/5\end{bmatrix}.$$

Задача 3.18. Для поля переміщення $\mathbf{u}=(x_1-x_3)^2\mathbf{e}_1+(x_2+x_3)^2\mathbf{e}_2-x_1x_2\mathbf{e}_3$ за умови обмежень, прийнятих в теорії малих деформацій $(\mathbf{L}=\mathbf{E})$, визначити тензор лінійної деформації, тензор лінійного повороту і вектор повороту в точці $P(0,2,-1)$.

Розв'язання

У даному випадку градієнт переміщення має матричну форму

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}2(x_1-x_3) & 0 & -2(x_1-x_3)\\ 0 & 2(x_2+x_3) & 2(x_2+x_3)\\ -x_2 & -x_1 & 0\end{bmatrix}$$

і в точці P приймає вигляд

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]_P=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 2\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Розкладемо цю матрицю на симетричну і антисиметричну складові

$$[\varepsilon_{ij}]+[\omega_{ij}]=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

За формулою $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\mathbf{u}$ визначимо вектор повороту $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\mathbf{u}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ (x_1-x_3)^2 & (x_2+x_3)^2 & x_1x_2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial x_1x_2}{\partial x_2}-\frac{\partial(x_1+x_3)^2}{\partial x_3}\right]\mathbf{e}_1-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial x_1x_2}{\partial x_1}-\frac{\partial(x_1-x_3)^2}{\partial x_3}\right]\mathbf{e}_2+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(x_2+x_3)^2}{\partial x_1}-\frac{\partial(x_1-x_3)^2}{\partial x_2}\right]\mathbf{e}_3=$$

$$=\frac{1}{2}[(x_1-2x_3)\mathbf{e}_1-(x_2+2x_3)\mathbf{e}_2+(0-0)\mathbf{e}_3].$$

У точці $P(0,2,-1)$ вектор повороту $\boldsymbol{\omega}$ буде дорівнювати

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}[(0+2)\mathbf{e}_1-(2-2)\mathbf{e}_2+0\mathbf{e}_3]=\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+0\mathbf{e}_3.$$

Задача 3.19. Для поля переміщення задачі 3.18 знайти зміну довжини – відносне подовження в напрямку $\mathbf{v}=(8\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3)/9$ в точці $P(0,2,-1)$.

Розв'язання

Користуючись формулою $\dfrac{dx-dX}{dX}==\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{v}$ і тензором деформації в точці P, який обчислено в задачі 3.18, отримаємо відносне подовження в точці P в напрямку $\mathbf{v}$ як добуток матриць

$$\varepsilon_p^{(\mathbf{v})} = \frac{dx - dX}{dX} = \begin{bmatrix} 8/9 & -1/9 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/9 \\ -1/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} = -\frac{2}{27}.$$

Задача 3.20. Довести, що в теорії малих деформацій зміна прямого кута між двома ортогональними одиничними векторами $\mathbf{v}$ і $\boldsymbol{\mu}$ недеформованої конфігурації дається формулою

$$\gamma_{\nu\mu} = \mathbf{v} \cdot 2\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

Розв'язання

За умови припущення малості градієнтів переміщення одиничні вектори напрямів, що отримані під час деформації із $\mathbf{v}$ і $\boldsymbol{\mu}$, внаслідок $\frac{d\mathbf{u}}{dX} = \mathbf{u}\vec{\nabla} \cdot \nu_i = \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{v}$ мають відповідно вигляд $\mathbf{v} + \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{v}$ і $\boldsymbol{\mu} + \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\mu}$. Напишемо $\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{v}$ в еквівалентній формі $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{J}}_c$ і перемножимо скалярно вектори, які отримано під час деформації. Тоді отримаємо

$\cos\theta = \sin(\pi/2 - \theta) = \sin\gamma_{\nu\mu} \approx \gamma_{\nu\mu}$ або

$\gamma_{\nu\mu} = \left[\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{J}}_c\right] \cdot \left[\boldsymbol{\mu} + \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\mu}\right] = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{v} \cdot \left(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c\right) \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{J}}_c \cdot \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\mu}$. Тут у випадку малих градієнтів переміщення $\hat{\mathbf{J}}_c \cdot \hat{\mathbf{J}}$ мають більш високий порядок малості, порівняно з іншими членами. Окрім того, $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\mu}$ і, відповідно, $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0$. Таким чином, використовуючи $\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c\right) \to 2\hat{\mathbf{L}} = \left(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c\right)$, остаточно отримуємо

$$\gamma_{\nu\mu} = \mathbf{v} \cdot 2\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

Задача 3.21. Використовуючи результати задачі 3.20, знайти зміну прямого кута між векторами $\mathbf{v} = (8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3)/9$ і $\boldsymbol{\mu} = (4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3)/9$ в точці $P(0, 2, -1)$ для поля переміщення задачі 3.18.

Розв'язання

Оскільки в теорії малих деформацій $\mathbf{L} = \mathbf{E}$, компоненти тензорів деформацій $\varepsilon_{ij} = l_{ij}$ і, відповідно, в точці P

$$\gamma_{\nu\mu} = \mathbf{v} \cdot 2\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 8/9 & -1/9 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ -7/9 \end{bmatrix} = \frac{106}{27}.$$

3.3. Коефіцієнти довжини і поворот

Задача 3.22. Для деформації зсуву $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$ задачі 3.11 показати, що коефіцієнти довжини $\Lambda_{(\mathrm{m})}$ лінійного елемента, паралельного осі X_1, дорівнює одиниці (відносне подовження дорівнює нулю). Знайти $\Lambda_{(\mathrm{m})}$ для діагональних напрямків *OC* і *DB* нескінченно малого квадрату *OBCD* (рис. 3.5) і порівняти результатами з безпосередню обчисленими по полю переміщення.

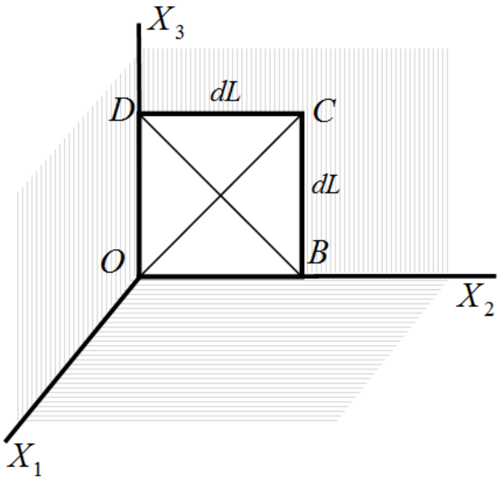


Рис. 3.5. До задачі 3.22

Розв'язання

За формулою $\Lambda^2_{(\mathbf{m})} = \mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{m}$, користуючись матрицею $\hat{\mathbf{G}}$, що знайдена в задачі 3.11, отримаємо квадрат коефіцієнта довжини для напрямку $\mathbf{m} = \mathbf{e}_1$

$$\Lambda^2_{(\mathbf{e}_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Для напрмку $\mathbf{m} = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$ вздовж *OC* аналогічно знаходимо

$$\Lambda^2_{(\mathbf{m})} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = (1+A)^2.$$

Згідно співвідношенням, що визначають переміщення, положення точки C після деформації такі (див. рис. 3.5):

$x_1 = 0$, $x_2 = dL + AdL$, $x_3 = dL + AdL$.

Таким чином,

$(dx)^2 = 2(1+A)^2(dL)^2$,

а оскільки

$$dX = \sqrt{2}dL,$$

квадрат коефіцієнта довжини $(dx/dX)^2 = (1+A)^2$, як показано формулою $\Lambda_{(\mathbf{m})}^2 = \mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{m}$.

Аналогічним чином можна отримати співвідношення $(dx/dX)^2$ для напрямку DB, для якого $\mathbf{m} = (-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$ і відповідно маємо

$$\Lambda_{(\mathbf{m})}^2 = (1-A)^2 \text{ і } (dx/dX)^2 = (1-A)^2.$$

Задача 3.23. Коефіцієнти довжини $\Lambda_{(\mathrm{m})}$ і $\lambda_{(\mathrm{n})}$ однакові тільки в тому випадку, коли напрямок, який характеризується вектором $\mathbf{n}$, отримано під час деформації із напряму вектору $\mathbf{m}$. Для поля переміщення задачі 3.22 обчислити $\lambda_{(\mathrm{n})}^2$, якщо $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$, і показати, що він співпадає з $\Lambda_{(\mathbf{m})}^2$, який обчислено в задачі 3.22 для діагоналі OC.

Розв'язання

Перейдемо від просторових переміщень задачі 3.22 до матеріальних переміщень

$$x_1 = X_1,\; x_2 = X_2 + AX_3,\; x_3 = X_3 + AX_2,$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = X_3 + AX_2, \end{cases} \to \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = x_2 - AX_3, \\ X_3 = x_3 - AX_2, \end{cases} \to \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = (x_2 - Ax_3)/(1-A^2), \\ X_3 = (x_3 - Ax_2)/(1-A^2). \end{cases}$$

Звідки можна знайти тензор Коші $\mathbf{C}$. Далі, використовуючи $\dfrac{1}{\lambda_{(\mathbf{n})}^2} = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{n}$, обчислимо

$$\frac{1}{\lambda_{(\mathbf{n})}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+A^2)/(1-A^2)^2 & -2A/(1-A^2)^2 \\ 0 & -2A/(1-A^2)^2 & (1+A^2)/(1-A^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = (1-A^2)/(1-A^2)^2.$$

Таким чином, $\lambda_{(\mathbf{n})}^2 = (1-A^2)^2/(1-A)^2 = \dfrac{(1-A)^2(1+A)^2}{(1-A)^2} = (1+A)^2$, що співпадає з $\Lambda_{(\mathbf{m})}^2$, який був обчислений для OC. Діагональний елемент OC не змінює свого напрямку під час даної деформації зсуву.

Задача 3.24. Використовуючи полярний розклад градієнта деформації $\hat{\mathbf{F}}$ під час деформації зсуву $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, визначити правий тензор коефіцієнтів довжини $\hat{\mathbf{S}}$ і тензор повороту $\hat{\mathbf{R}}$. Показати, що головні значення тензора $\hat{\mathbf{S}}$ є коефіцієнтами діагоналей OC і DB задачі 3.22.

Розв'язання

Під час полярного розкладу $\hat{\mathbf{F}}$ тензор коефіцієнтів довжини визначається як $\hat{\mathbf{S}} = \sqrt{\hat{\mathbf{G}}}$. По формулі $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ маємо $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{S}}^{-1}$. Згідно $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}}$, або в нашому випадку

$$\left[G_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix}.$$

Головні осі тензора $\hat{\mathbf{G}}$ утворюються поворотом на 45° навколо осі X_1, а сам тензор у головних осях має вигляд

$$\left[G^*_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-A)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+A)^2 \end{bmatrix}.$$

Тому

$$\left[S_{ij}\right] = \left[\sqrt{G^*_{ij}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-A & 0 \\ 0 & 0 & 1+A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{(DB)} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{(OC)} \end{bmatrix}.$$

У системі коолдинат X_i це розкладання записується у вигляді

$$\left[F_{ij}\right] = \left[R_{ik}\right]\left[S_{kj}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}.$$

У цьому прикладі шрадієнт деформації $\hat{\mathbf{F}}$ сам є тензором коефіцієнтів довжини $\hat{\mathbf{S}}$, а тензор повороту $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{I}}$. Це є результат співпадіння головних осей тензорів $\hat{\mathbf{L}}_G$ і $\hat{\mathbf{E}}_A$ для даної деформації зсуву.

Задача 3.25. Нескінченно малий поворот твердого тіла задано формулами $u_1 = -CX_2 + BX_3$, $u_2 = CX_1 - AX_3$, $u_3 = -BX_1 + AX_2$, де A, B, C – дуже малі константи. Довести, що розтяг відсутній за умови $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{I}}$, якщо знехтувати членами, що містять квадрати і добутки констант.

Розв'язання

Спочатку, використовуючи співвідношення $u_i = x_i - X_i$, визначимо просторові координати x_i

$$\begin{cases} u_1 = -CX_2 + BX_3, \\ u_2 = CX_1 - AX_3, \\ u_3 = -BX_1 + AX_2, \end{cases} \rightarrow x_i = u_i + X_i \rightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 - CX_2 + BX_3, \\ x_2 = CX_1 + X_2 - AX_3, \\ x_3 = -BX_1 + AX_2 + X_3. \end{cases}$$

Тепер, для заданого поля переміщень визначимо тензор деформацій Гріна $G_{ij}=\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2}\\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}$,

$$\left[G_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & C & -B\\ -C & 1 & A\\ B & -A & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -C & B\\ C & 1 & -A\\ -B & A & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1+C^2+B^2 & -AB & -AC\\ -AB & 1+A^2+C^2 & -BC\\ -AC & -BC & 1+A^2+B^2\end{bmatrix}.$$

Нехтуючи малими вищого порядку, отримуємо

$$\left[G_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\left[\sqrt{G_{ij}}\right]=\left[S_{ij}\right],$$

що і треба було довести.

3.4. Перетворення тензорів деформації і головні деформації

Задача 3.26. Довести, що деформація зсуву $x_1=X_1$, $x_2=X_2+\sqrt{2}X_3$, $x_3=X_3+\sqrt{2}X_2$, головні напрямки тензорів $\hat{\mathbf{L}}_G$ і $\hat{\mathbf{E}}_A$ співпадають, що було показано в задачі 3.24.

Розв'язання

Згідно з $L_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}-\delta_{ij}\right)$, маємо

$$\left[L_{ij}\right]=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2}\\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&1\end{bmatrix}.$$

Цей тензор у головних осях, що визначається матрицею перетворення

$$\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

приводиться до вигляду

$$\left[L_{ij}^{*}\right]=\left[c_{ik}\right]\left[L_{kp}\right]\left[c_{pj}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1-\sqrt{2}&0\\0&0&1+\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Спочатку визначимо матеріальні координати через просторові

$$\begin{cases}x_1=X_1,\\x_2=X_2+\sqrt{2}X_3,\\x_3=X_3+\sqrt{2}X_2,\end{cases}\to\begin{cases}X_1=x_1,\\X_2=-x_2+\sqrt{2}x_3,\\X_3=-x_3+\sqrt{2}x_2.\end{cases}$$

Аналогічно, згідно $E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)$, отримуємо

$$\left[E_{ij}\right]=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}&\frac{\partial X_2}{\partial x_1}&\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial X_1}{\partial x_2}&\frac{\partial X_2}{\partial x_2}&\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\\\frac{\partial X_1}{\partial x_3}&\frac{\partial X_2}{\partial x_3}&\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial X_1}{\partial x_1}&\frac{\partial X_1}{\partial x_2}&\frac{\partial X_1}{\partial x_3}\\\frac{\partial X_2}{\partial x_1}&\frac{\partial X_2}{\partial x_2}&\frac{\partial X_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial X_3}{\partial x_1}&\frac{\partial X_3}{\partial x_2}&\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&-1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&-1\end{bmatrix}.$$

Перетворенням $\left[E_{ij}\right]$ з використанням матриці $\left[c_{ij}\right]$ цей тензор приводиться до діагонального вигляду

$$\left[E_{ij}^{*}\right]=\left[c_{ik}\right]\left[E_{kp}\right]\left[c_{pj}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1-\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Задача 3.27. Використовуючи визначення $L_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}-\delta_{ij}\right)$, довести, що за умови перетворених координат $x_i=b_{ji}x'_j$ і $X'_i=b_{ij}X_j$ лагранжевий тензор скінченних деформацій L_{ij} перетворюється як декартовий тензор другого рангу.

Розв'язання

Застосовуючи $L_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}-\delta_{ij}\right)$ разом з умовами перетворення координат, що задані в задачі, можна отримати

$$L_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(b_{pk}x'_p\right)}{\partial X'_m}\frac{\partial X'_m}{\partial X_i}\frac{\partial\left(b_{qk}x'_q\right)}{\partial X'_n}\frac{\partial X'_n}{\partial X_j}-\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(b_{mi}b_{nj}\delta_{pq}\frac{\partial x'_p}{\partial X'_m}\frac{\partial x'_q}{\partial X'_n}-\frac{\partial\left(b_{mi}x'_m\right)}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial x_j}\right)=$$

$$=b_{mi}b_{nj}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'_p}{\partial X'_m}\frac{\partial x'_p}{\partial X'_n}-\delta'_{mn}\right)\right]=b_{mi}b_{nj}L'_{mn},$$

оскільки $b_{pk}b_{qk}=\delta_{pq}$.

Задача 3.28. Деяке поле однорідної деформації призводить до тензору скінченних деформацій

$$\left[L_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 6\end{bmatrix}.$$

Визначити головні деформації і напрямки головних осей.

Розв'язання

L_{ij} є симетричним тензором другого рангу, тому головні деформації є коренями характеристичного рівняння

$$\begin{bmatrix} 1-L & 3 & -2 \\ 3 & 1-L & -2 \\ -2 & -2 & 6-L \end{bmatrix} = 0 \to -L^3 + 8L^2 + 4L + 32 = -(L-2)(L+2)(L-8) = 0.$$

Звідки $L_{(1)} = -2$, $L_{(2)} = 2$, $L_{(3)} = 8$.

Тепер знайдемо напрямки головних осей.

Згідно рівняння

$$\left(L_{ij} - L_{(k)}\delta_{ij}\right)n_j^{(k)} = 0, \tag{3.1}$$

для $L_{(1)} = -2$ можна записати

$$\begin{aligned} &(1+2)n_1^{(1)} + 3n_2^{(1)} - 2n_3^{(1)} = 0; \\ &3n_1^{(1)} + (1+2)n_2^{(1)} - 2n_3^{(1)} = 0; \\ &-2n_1^{(1)} - 2n_2^{(1)} + (6+2)n_3^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Звідки $n_3^{(1)} = 0$, $n_1^{(1)} = -n_2^{(1)}$, а оскільки $n_i n_i = 1$, то $2\left(n_1^{(1)}\right)^2 = 1 \to \left(n_1^{(1)}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Тому $n_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_2^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_3^{(1)} = 0$.

Так само, згідно рівняння (3.1), для $L_{(2)} = 2$ можна записати

$$\begin{aligned} &(1-2)n_1^{(2)} + 3n_2^{(2)} - 2n_3^{(2)} = 0; \\ &3n_1^{(2)} + (1-2)n_2^{(2)} - 2n_3^{(2)} = 0; \\ &-2n_1^{(2)} - 2n_2^{(2)} + (6-2)n_3^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Звідки $n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = n_3^{(2)}$, а оскільки $n_i n_i = 1$, то $3\left(n_1^{(2)}\right)^2 = 1 \to \left(n_1^{(2)}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

Тому

$$n_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ n_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ n_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

На кінець, згідно рівняння (3.1), для $L_{(3)} = 8$ можна записати

$$\begin{aligned} &(1-8)n_1^{(3)} + 3n_2^{(3)} - 2n_3^{(3)} = 0; \\ &3n_1^{(3)} + (1-8)n_2^{(3)} - 2n_3^{(3)} = 0; \\ &-2n_1^{(3)} - 2n_2^{(3)} + (6-8)n_3^{(3)} = 0. \end{aligned}$$

Звідки $n_1^{(3)} = n_2^{(3)} = \frac{-n_3^{(3)}}{2}$, а оскільки $n_i n_i = 1$, то $\left(\frac{n_3^{(3)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_3^{(3)}}{2}\right)^2 + \left(n_3^{(3)}\right)^2 = 1 \to \frac{3}{2}\left(n_3^{(3)}\right)^2 = 1 \to n_3^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. Тому

$n_1^{(3)} = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $n_2^{(3)} = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $n_3^{(3)} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Звідки матриця перетворення до головних напрямків осей буде мати вигляд

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Задача 3.29. Для однорідної деформації $x_1 = \sqrt{3}X_1$, $x_2 = 2X_2$, $x_3 = \sqrt{3}X_3 - X_2$ визначити матеріальний еліпсоїд деформації, що отримуються під час деформації сферичної поверхні $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$. Показати, що рівняння цього еліпсоїду має вигляд $x_1^2/\Lambda_{(1)}^2 + x_2^2/\Lambda_{(2)}^2 + x_3^2/\Lambda_{(3)}^2 = 1$.

Розв'язання

Використовуючи $(dX)^2 = d\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot d\mathbf{x} = R^2$ або, що теж саме, виконуючи обернення формул для переміщення і підставляючи результат у рівняння сфери $X_iX_i = 1$, отримаємо рівняння матеріального еліпсоїду деформації вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}X_1, \\ x_2 = 2X_2, \\ x_3 = \sqrt{3}X_3 - X_2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_1 = x_1/\sqrt{3}, \\ X_2 = x_2/2, \\ X_3 = x_3/\sqrt{3} + x_2/2\sqrt{3}, \end{cases}$$

$$X_iX_i = 1 \rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{3}}\frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{2}\frac{x_2}{2} + \left(\frac{x_3}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{2\sqrt{3}}\right) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x_1^2}{3} + \frac{x_2^2}{3} + \frac{x_3^2}{3} + \frac{x_2x_3}{3} = 1 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 = 3.$$

Це рівняння приводиться до каноничного вигляду в головних осях

$$\frac{x_1^2}{3} + \frac{x_2^2}{6} + \frac{x_3^2}{2} = 1$$

за допомогою матриці перетворення

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Використовуючи співвідношення теорії деформації знайдемо тензор деформації $\hat{\mathbf{S}} = \sqrt{\hat{\mathbf{G}}}$ (обчислення подібні до тих, що були проведені в задачі 3.24)

$$\left[S_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \dfrac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}} & \dfrac{\sqrt{3}+3}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Тензор $\hat{\mathbf{S}}$ з використанням матриці перетворення вигляду

$$\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2\\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$$

можна перетворити до головних осей (діагональної форми) за формулою $\left[S_{ij}^{*}\right]=\left[c_{ik}\right]\left[S_{kp}\right]\left[c_{pj}\right]$ (див. задачу 3.26)

$$\left[S_{ij}^{*}\right]=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix},$$

де головні значення коефіцієнтів довжини дорівнюють

$$\Lambda_{(1)}^{2}=3,\ \Lambda_{(2)}^{2}=6,\ \Lambda_{(1)}^{2}=2.$$

Також відмітимо, що ці головні коефіцієнти довжини можна обчислити безпосередньо за формулою $\Lambda_{(\mathbf{m})}^{2}=\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{m}$, використовуючи наведену вище матрицю перетворення $\left[c_{ij}\right]$.

Задача 3.30. Для деформації, заданої в задачі 3.29, визначити просторовий еліпсоїд деформації і показати, що його рівняння $\Lambda_{(1)}^{2}X_1^2+\Lambda_{(2)}^{2}X_2^2+\Lambda_{(2)}^{2}X_3^2=1$.

Розв’язання

Згідно $d\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot d\mathbf{x}=r^2$, сфера $x_i x_i=1$, що отримана в результаті деформації еліпсоїда $\mathbf{X}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{X}=1$ набуває вигляду

$$\left[X_1,\quad X_2,\quad X_3\right]\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -\sqrt{3}\\ 0 & -\sqrt{3} & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}=.$$

$$=3X_1^2+5X_2^2+3X_3^2-2\sqrt{3}X_2X_3=1.$$

Це рівняння еліпсоїду приводиться до канонічного вигляду (у головних осях)

$$3X_1^2+6X_2^2+2X_3^2=1$$

за допомогою тензора перетворення

$$[c_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}.$$

Задача 3.31. Безпосереднім розкладанням перевірити, що другий інваріант $\mathrm{II_L}$ тензора деформації можна представити у вигляді

$$\mathrm{II_L}=\begin{vmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}l_{11} & l_{13}\\ l_{31} & l_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}l_{22} & l_{23}\\ l_{32} & l_{33}\end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислення даних детермінантів призводить до виразу

$$\mathrm{II_L}=l_{11}l_{22}+l_{22}l_{33}+l_{33}l_{11}-\left(l_{12}^2+l_{23}^2+l_{31}^2\right).$$

З іншого боку, формула $\mathrm{II_L}=1/2\left(l_{ii}l_{jj}-l_{ij}l_{ij}\right)$ в розгорнутому вигляді запису дає той самий результат

$$\mathrm{II_L}=\frac{1}{2}\left[(l_{11}+l_{22}+l_{33})l_{jj}-\left(l_{1j}l_{1j}+l_{2j}l_{2j}+l_{3j}l_{3j}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(l_{11}+l_{22}+l_{33})(l_{11}+l_{22}+l_{33})-\left(l_{11}l_{11}+l_{12}l_{12}+l_{13}l_{13}+\right.\right.$$

$$\left.\left.l_{21}l_{21}+l_{22}l_{22}+l_{23}l_{23}+l_{31}l_{31}+l_{32}l_{32}+l_{33}l_{33}\right)\right]=$$

$$=l_{11}l_{22}+l_{22}l_{33}+l_{33}l_{11}-\left(l_{12}^2+l_{23}^2+l_{31}^2\right).$$

Задача 3.32. Однорідна скінченна деформація характеризується співвідношеннями $u_i=A_{ij}X_j$, де A_{ij} – сталі. Знайти вираз для відносної зміни об'єму. Довести, що за малих значень A_{ij} цей вираз зводиться до кубічного розширення.

Розв'язання

Розглянемо прямокутний паралелепіпед з початковими розмірами dX_1, dX_2, dX_3 вздовж осей координат. За даної деформації $x_i=\left(A_{ij}+\delta_{ij}\right)X_j$. Згідно $dx_i=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}dX_j$, цей початковий об'єм dV_0 перетворюється в скошений паралелепіпед з ребрами довжиною $dx_i=\left(A_{i(n)}+\delta_{i(n)}\right)X_{(n)},\ n=1,2,3$. Внаслідок формули $\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k=\lambda$ цей деформований елемент має об'єм

$$dV=\varepsilon_{ijk}\left(A_{i1}+\delta_{i1}\right)\left(A_{j2}+\delta_{j2}\right)\left(A_{k3}+\delta_{k3}\right)dX_1dX_2dX_3.$$

Тоді

$$\frac{dV}{dV_0}=\frac{dV_0+\Delta V}{dV_0}=1+\frac{\Delta V}{dV_0}=\varepsilon_{ijk}\left(A_{i1}+\delta_{i1}\right)\left(A_{j2}+\delta_{j2}\right)\left(A_{k3}+\delta_{k3}\right).$$

Якщо A_{ij} дуже малі, то їх степенями вищими першого можна знехтувати, тоді

$$\frac{\Delta V}{dV_0} = \varepsilon_{ijk}\left(A_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i1}A_{j2}\delta_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j2}A_{k3} + \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3}\right) - 1 = A_{11} + A_{22} + A_{33}.$$

В лінійній теорії коефіцієнт кубічного розширення дорівнює

$l_{ii} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_i}$, що у випадку $u_i = A_{ij}X_j$ дає

$l_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

Задача 3.33. Мала лінійна деформація задана співвідношеннями $u_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3$, $u_2 = x_1 + 7x_2$, $u_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3$. Знайти для такої деформації головні значення деформації (подовження) $\varepsilon_{(n)}$ і головні значення девіатора деформації $e_{(n)}$.

Розв'язання

Спочатку знайдемо симетричний тензор, використовуючи задані співвідношення для компонент переміщення за формулою $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}^T\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T\right] = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Головні значення деформації $\varepsilon_{(n)}$ визначаються за $\left|\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon\right| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 7-\varepsilon & 2 \\ 0 & 2 & 4-\varepsilon \end{vmatrix} = -(\varepsilon - 8)(\varepsilon - 4)(\varepsilon - 3) = 0.$$

Відповідно головні деформації будуть такими

$\varepsilon_{(1)} = 8,\ \varepsilon_{(2)} = 4,\ \varepsilon_{(3)} = 3.$

Тоді тензор деформації в головних осях має вигляд

$$\varepsilon_{ij}^* = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо девіатор тензора деформації за формулою $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_M$, де $\varepsilon_M = \dfrac{\varepsilon_{kk}}{3}$

$$\varepsilon_M = \frac{4+7+4}{3} = 5,\ e_{ij} = \begin{pmatrix} 4-5 & 0 & 0 \\ 0 & 7-5 & 2 \\ 0 & 2 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Головні значення девіатора деформації знаходяться аналогічно до головних значень тензора деформації або напруження

$$\begin{vmatrix} -1-e & 0 & 0 \\ 0 & 2-e & 2 \\ 0 & 2 & -1-e \end{vmatrix} = -(e-3)(e+2)(e+1) = 0.$$

Відповідно головні значення девіатора будуть такими

$e_{(1)} = 3$, $e_{(2)} = -1$, $e_{(3)} = -2$.

Тоді девіатор в головних осях має вигляд

$$e_{ij}^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.5. Плоска деформація і рівняння сумісності

Задача 3.34. Сорокап'ятиградусною розеткою деформації виміряні повздовжні деформації вздовж осей, що показано на рис. 3.6. У точці P знайдено такі компоненти деформації: $\varepsilon_{11} = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon'_{11} = 4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{22} = 7 \cdot 10^{-4}$. Визначити деформацію зсуву ε_{12} в цій точці.

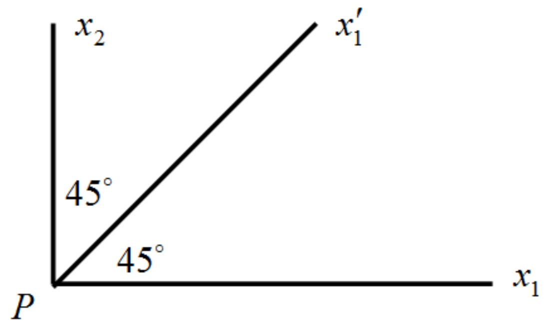


Рис. 3.6. До задачі 3.34

Розв'язання

Скористаємося формулою $\dfrac{dx-dX}{dX}==\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{v}$. Враховуючи, що $\mathbf{v}=(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ – одиничний вектор напрямку x_1', складемо рівняння для ε_{12}

$$[1/\sqrt{2}\quad 1/\sqrt{2}\quad 0]\begin{bmatrix}5\cdot10^{-4} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & 7\cdot10^{-4} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}=4\cdot10^{-4}.$$

Звідки отримуємо

$$\frac{12\cdot10^{-4}+2\varepsilon_{12}}{2}=4\cdot10^{-4} \text{ або } \varepsilon_{12}=-2\cdot10^{-4}.$$

Задача 3.35. Побудувати круги Мора для випадку плоскої деформації

$$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & \sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 3\end{pmatrix}$$

і визначити максимальну деформацію зсуву. Перевірити результат аналітично.

Розв'язання

Для даного стану деформування, віднесеного до осей x_i, точки B ($\varepsilon_{22}=5,\varepsilon_{22}=\sqrt{3}$) і D розташовані на кінцях діаметра найбільшого із внутрішніх кругів (рис. 3.7). Для плоскої деформації величина головного напруження $\varepsilon_{(1)}=0$, тому інші круги Мора виглядають так, як показано на рис. 3.7.

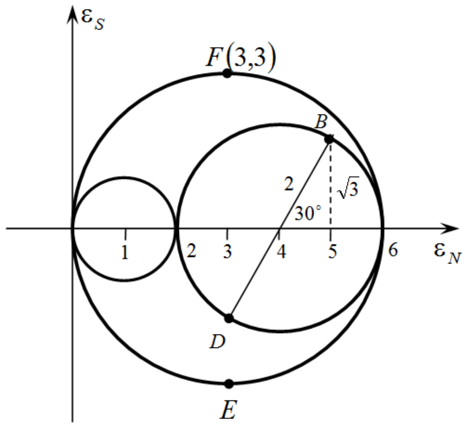


Рис. 3.7. До задачі 3.35

Поворотом на кут 30° (рис. 3.8) навколо осі x_1 (що еквівалентно куту 60° на діаграмі Мора) приведемо тензор деформації до головних осей з головними значеннями $[\varepsilon_{ij}^*]=[c_{ik}][\varepsilon_{kp}][c_{pj}]$

$$\left[\varepsilon_{ij}^*\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & \sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2\\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

де c_{ij} – тензор перетворення координат (осей) знаходиться відповідно до рис. 3.8:

вісь x_1 не перетворюється, оскільки цієї осі відбувається поворот, тому вектор перетворення для $x_1 \to x_1^*$ є таким $\left[1 \quad 0 \quad 0\right]$;

вісь x_2 – поворот на 30° навколо x_1, тому вектор перетворення для $x_2 \to x_2^*$ є таким $\left[0 \quad \cos 30^\circ \quad \sin 30^\circ\right]=\left[0 \quad \sqrt{3}/2 \quad 1/2\right]$;

вісь x_3 – поворот на 30° навколо x_1, тому вектор перетворення для $x_3 \to x_3^*$ є таким $\left[0 \quad -\sin 30^\circ \quad \cos 30^\circ\right]=\left[0 \quad 1/2 \quad \sqrt{3}/2\right]$;

з отриманих векторів і формується тензор перетворення осей другого рангу матриця якого має вигляд

$$\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}.$$

Виконуючи ще один поворот на 45° (рис. 3.9) навколо осі x_3^* (на 90° на діаграмі Мора) прийдемо до системи координат x_i', в якій тензор деформації має такі компоненти $\left[\varepsilon_{ij}'\right]=\left[c_{ik}'\right]\left[\varepsilon_{kp}^*\right]\left[c_{pj}'\right]$

$$\left[\varepsilon_{ij}'\right]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

де c_{ij}' – тензор перетворення координат (осей) знаходиться відповідно до рис. 3.9 аналогічно попередньому перетворенню за рис. 3.8:

вісь x_3^* не перетворюється, оскільки цієї осі відбувається поворот, тому вектор перетворення для $x_3^* \to x_3'$ є таким $\left[0 \quad 0 \quad 1\right]$;

вісь x_1^* – поворот на 45° навколо x_3^*, тому вектор перетворення для $x_1^* \to x_1'$ є таким $\left[\cos 45^\circ \quad \sin 45^\circ \quad 0\right]=\left[1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0\right]$;

вісь x_2^* – поворот на 45° навколо x_3^*, тому вектор перетворення для $x_2^* \to x_2'$ є таким $\left[-\sin 45^\circ \quad \cos 45^\circ \quad 0\right]=\left[-1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0\right]$.

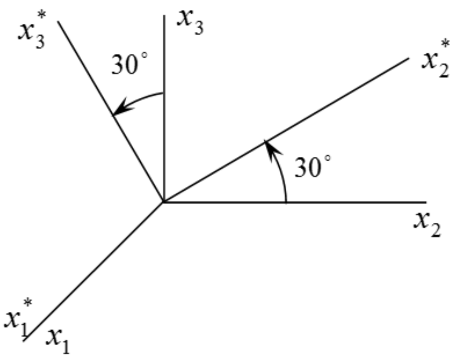


Рис. 3.8. Поворот навколо осі x_1 (до задачі 3.35)

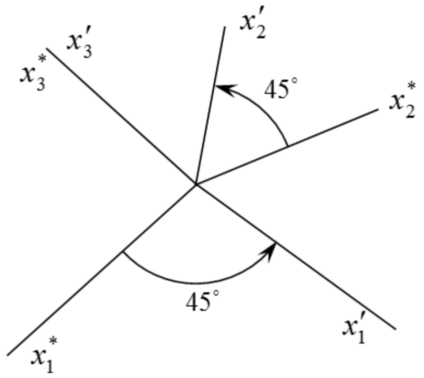


Рис. 3.9. Поворот навколо осі x_3^* (до задачі 3.35)

З отриманих векторів і формується тензор перетворення осей другого рангу, матриця якого має вигляд

$$\left[c'_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

У матриці $\left[\varepsilon'_{ij}\right]$ перші два рядки описують деформований стан у точці F на діаграмі Мора (див. рис. 3.7). Відмітимо, що поворот на -45° навколо x_3^* відповідав би точці E (див. рис. 3.7).

Задача 3.36. Деформований стан суцільного середовища задано тензором

$$\varepsilon_{ij}=\begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_3 \\ x_2^2 & x_3 & x_3^2 \\ x_1x_3 & x_3^2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Чи задовольняються рівняння сумісності?

Розв'язання

Безпосередньою підстановкою в $\vec{\nabla}\times\hat{\mathbf{E}}\times\vec{\nabla}=0$ переконуємося, що всі рівняння, окрім третього, задовольняються тотожно:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\to\frac{\partial^2\left(x_1^2\right)}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\left(x_3\right)}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2\left(x_2^2\right)}{\partial x_1\partial x_2}\to 0\equiv 0;$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\to\frac{\partial^2\left(x_3\right)}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2(5)}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2\left(x_3^2\right)}{\partial x_2\partial x_3}\to 0\equiv 0;$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial x_3\partial x_1}\to\frac{\partial^2(5)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varepsilon\left(x_1^2\right)}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2\left(x_1x_3\right)}{\partial x_3\partial x_1}\to 0\neq 1;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \to \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+\frac{\partial (x_1 x_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial (x_2^2)}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 (x_2^2)}{\partial x_2 \partial x_3} \to$$

$$\to 0 \equiv 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} \to \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon (x_3^2)}{\partial x_1}-\frac{\partial (x_1 x_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial (x_2^2)}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 (x_3)}{\partial x_3 \partial x_1} \to$$

$$0 \equiv 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \to \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial (x_3^2)}{\partial x_1}+\frac{\partial (x_1 x_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial (x_2^2)}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 (5)}{\partial x_1 \partial x_2} \to$$

$$0 \equiv 0.$$

3.6. Змішані задачі

Задача 3.37. Вивести індексну форму лагранжевого тензора скінченних деформацій $\hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{J}}_c + \hat{\mathbf{J}}_c \cdot \hat{\mathbf{J}}\right)$, користуючись його визначення $L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)$.

Розв'язання

Відомо, що градієнт деформації в лагранжевих або матеріальних змінних виражається співвідношенням $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$. Тоді, користуючись $L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)$, можна отримати

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)\left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) - \delta_{ij}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta_{ki}\delta_{kj} + \delta_{ki}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj}\frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right].$$

Задача 3.38. Дано поле переміщення $x_1 = X_1 - CX_2 + BX_3$, $x_2 = CX_1 + X_2 - AX_3$, $x_3 = -BX_1 + AX_2 + X_3$. Показати, що ці переміщення відповідають повороту абсолютно твердого тіла, якщо константи A, B, C дуже малі величини. Визначити вектор повороту $\mathbf{w}$ для нескінченно малого повороту твердого тіла.

Розв'язання

Матеріальний градієнт деформації визначається за формулою $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{x}\vec{\nabla}$ або $\left[F_{ij}\right] = \left[\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\right]$. Тоді для заданого в задачі поля переміщення будемо мати

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & -C & B \\ C & 1 & -A \\ -B & A & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з $\hat{\mathbf{L}}_G = \dfrac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}\right)$, визначимо лагранжевий тензор скінченних деформацій

$$\hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -C & B \\ C & 1 & -A \\ -B & A & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -C & B \\ C & 1 & -A \\ -B & A & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B^2 + C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2 + C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2 + B^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо знехтувати добутками малих констант, то цей тензор деформацій дорівнює нулю, а переміщення зводиться до повороту абсолютно твердого тіла. За формулою вектор повороту дорівнює $\mathbf{w} = \dfrac{1}{2}\vec{\nabla} \times \mathbf{u}$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial X_1} & \dfrac{\partial}{\partial X_2} & \dfrac{\partial}{\partial X_3} \\ -CX_2 + BX_3 & CX_1 - AX_3 & -BX_1 + AX_2 \end{vmatrix} = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3,$$

де $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \left(-CX_2 + BX_3\right)\mathbf{e}_1 + \left(CX_1 - AX_3\right)\mathbf{e}_2 + \left(-BX_1 + AX_3\right)\mathbf{e}_3$ – вектор переміщення.

Задача 3.39. Поворот абсолютно твердого тіла описується полем переміщення $u_1 = 0{,}02X_3$, $u_2 = -0{,}03X_3$, $u_3 = -0{,}02X_1 + 0{,}03X_2$. Визначити переміщення точки $Q(3, \quad 0{,}1, \quad 4)$ відносно точки $P(3, \quad 0, \quad 4)$.

Розв'язання

Поле переміщення для точок Q і P дає

$$\mathbf{u}_Q = 0{,}02X_3\mathbf{e}_1 + (-0{,}03X_3)\mathbf{e}_2 + (-0{,}02X_1 + 0{,}03X_2)\mathbf{e}_3 =$$
$$= 0{,}02\cdot 4\mathbf{e}_1 - 0{,}03\cdot 4\mathbf{e}_2 + (-0{,}02\cdot 3 + 0{,}03\cdot 0{,}1)\mathbf{e}_3 =$$
$$= 0{,}08\mathbf{e}_1 - 0{,}12\mathbf{e}_2 - 0{,}057\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{u}_P = 0{,}02X_3\mathbf{e}_1 + (-0{,}03X_3)\mathbf{e}_2 + (-0{,}02X_1 + 0{,}03X_2)\mathbf{e}_3 =$$
$$= 0{,}02\cdot 4\mathbf{e}_1 - 0{,}03\cdot 4\mathbf{e}_2 + (-0{,}02\cdot 3 + 0{,}03\cdot 0)\mathbf{e}_3 =$$
$$= 0{,}08\mathbf{e}_1 - 0{,}12\mathbf{e}_2 - 0{,}06\mathbf{e}_3.$$

Звідки $d\mathbf{u} = \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P = 0{,}003\mathbf{e}_3$.

Такий самий результат можна отримати скориставшись формулою $d\mathbf{u} = \mathbf{w}\times d\mathbf{X}$, де $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\mathbf{u} = 0{,}03\mathbf{e}_1 + 0{,}02\mathbf{e}_2$,

$$d\mathbf{X} = Q(3,\quad 0{,}1,\quad 4) - P(3,\quad 0,\quad 4) = 0\mathbf{e}_1 + 0{,}1\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$d\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0{,}03 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}003\mathbf{e}_3.$$

Задача 3.40. Для плоскої деформації, що відбувається в площинах, паралельних x_2x_3, визначити вираз для відносного подовження ε'_{22} і деформацію зсуву ε'_{23}, якщо осі зі штрихами і без штрихів розташовані так, як показано на рис. 3.10.

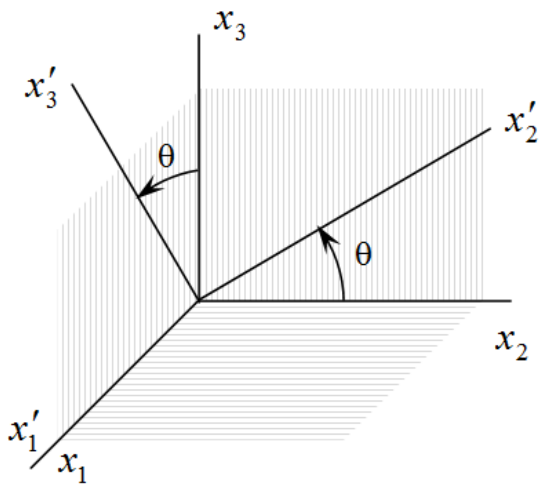


Рис. 3.10. До задачі 3.40

Розв'язання

Із формули $\varepsilon_{vv} = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{v}$ витікає, що компонента деформації ε'_{22} згідно з рис. 3.10 визначається за формулою

$$\varepsilon'_{22}=[0\quad\cos\theta\quad\sin\theta]\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\0&\varepsilon_{23}&\varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}=$$

$$=\varepsilon_{22}\cos^2\theta+2\varepsilon_{23}\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{33}\sin^2\theta=$$

$$=\frac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{2}+\frac{\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}}{2}\cos 2\theta+\varepsilon_{23}\sin 2\theta.$$

Тут використано такі тригонометричні перетворення:

$2\varepsilon_{23}\sin\theta\cos\theta\to\varepsilon_{23}\sin 2\theta;$

$$\varepsilon_{22}\cos^2\theta+\varepsilon_{33}\sin^2\theta\to\frac{\varepsilon_{22}}{2}\cos^2\theta+\frac{\varepsilon_{22}}{2}\cos^2\theta+\frac{\varepsilon_{33}}{2}\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_{33}}{2}\sin^2\theta\to$$

$$\to\frac{\varepsilon_{22}}{2}\left(1-\sin^2\theta\right)+\frac{\varepsilon_{33}}{2}\left(1-\cos^2\theta\right)+\frac{\varepsilon_{22}}{2}\cos^2\theta+\frac{\varepsilon_{33}}{2}\sin^2\theta\to$$

$$\to\frac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{2}+\frac{\varepsilon_{22}}{2}\cos^2\theta-\frac{\varepsilon_{22}}{2}\sin^2\theta-\left(\frac{\varepsilon_{33}}{2}\cos^2\theta-\frac{\varepsilon_{33}}{2}\sin^2\theta\right)\to$$

$$\to\frac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{2}+\frac{\varepsilon_{22}}{2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)-\frac{\varepsilon_{33}}{2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\to$$

$$\to\frac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{2}+\frac{\varepsilon_{22}}{2}\cos 2\theta-\frac{\varepsilon_{33}}{2}\cos 2\theta\to\frac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{2}+\frac{\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}}{2}\cos 2\theta.$$

Аналогічно, використовуючи формулу $\varepsilon_{\nu\mu}=\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{L}}\cdot\boldsymbol{\mu}$ і результат задачі 3.20, знаходимо

$$\varepsilon'_{22}=[0\quad\cos\theta\quad\sin\theta]\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}\\0&\varepsilon_{23}&\varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}=$$

$$=-\varepsilon_{22}\sin\theta\cos\theta+\varepsilon_{23}\cos^2\theta-\varepsilon_{23}\sin^2\theta+\varepsilon_{33}\sin\theta\cos\theta=$$

$$=\varepsilon_{23}\cos 2\theta-\frac{\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}}{2}\sin 2\theta.$$

Задача 3.41. Для однорідної деформації дано тензор малих деформацій

$$[\varepsilon_{ij}]=\begin{bmatrix}0{,}01&-0{,}005&0\\-0{,}005&0{,}02&0{,}01\\0&0{,}01&-0{,}03\end{bmatrix}.$$

Визначити зміну прямого кута ADC на грані елементарного тетраедра $OABC$ (рис. 3.11), якщо $OA=OB=OC$, а точка D – середина ребра AB.

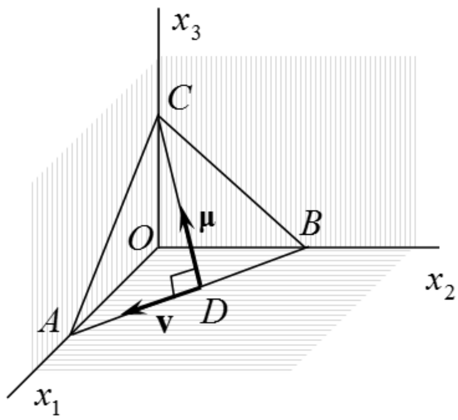


Рис. 3.11. До задачі 3.41

Розв'язання

Одиничні вектори $\mathbf{v}$ і $\boldsymbol{\mu}$, що виходять з точки D, можна записати у вигляді $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ і $\boldsymbol{\mu} = (2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)/\sqrt{6}$. Тоді, використовуючи результат задачі 3.20, отримуємо

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} 0{,}01 & -0{,}005 & 0 \\ -0{,}005 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}01 & -0{,}03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \approx -0{,}0058.$$

Задача 3.42. У деякій точці тензор деформації має вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

тобто в головних осях

$$\varepsilon_{ij}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити інваріанти для кожного із цих тензорів і показати, що вони співпадають.

Розв'язання

Застосовуючи формули $\mathrm{I_E} = \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$, $\mathrm{II_E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$, $\mathrm{III_E} = |\varepsilon_{ij}|$ і $\mathrm{I_{E^*}} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)}$, $\mathrm{II_{E^*}} = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)}$, $\mathrm{III_{E^*}} = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)}$, знаходимо

$$\mathrm{I_E} = \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 5 + 4 + 4 = 13,\ \mathrm{I_{E^*}} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = 6 + 4 + 3 = 13;$$

$$\mathrm{II_E}=\begin{vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=19+19+16=54,$$

$$\mathrm{II_{E^*}}=\varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}+\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)}+\varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)}=6\cdot 4+4\cdot 3+3\cdot 6=24+12+18=54;$$

$$\mathrm{III_E}=\left|\varepsilon_{ij}\right|=\begin{vmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=5\cdot 16-4-4=72,$$

$$\mathrm{III_{E^*}}=\varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)}=6\cdot 4\cdot 3=72.$$

Задача 3.43. Для поля переміщення $x_1=X_1+AX_3$, $x_2=X_2-AX_3$, $x_3=X_3-AX_1+AX_2$ визначити тензор скінченних деформацій $\hat{\mathbf{L}}_G$. Показати, що якщо константа A дуже мала величина, то переміщення представляє поворот абсолютно твердого тіла.

Розв’язання

З умови задачі витікає, що $u_1=x_1-X_1=AX_3$, $u_2=x_2-X_2=-AX_3$, $u_3=x_3-X_3=-AX_1+AX_2$. Тоді з формули $L_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$ отримуємо

$$2\hat{\mathbf{L}}_G=\begin{pmatrix}0 & 0 & A\\ 0 & 0 & -A\\ -A & A & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & -A\\ 0 & 0 & A\\ A & -A & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A^2 & -A^2 & 0\\ -A^2 & A^2 & 0\\ 0 & 0 & 2A^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}A^2 & -A^2 & 0\\ -A^2 & A^2 & 0\\ 0 & 0 & 2A^2\end{pmatrix}.$$

Якщо A мала величина, то членами з A^2 можна знехтувати і тому $\hat{\mathbf{L}}_G\equiv 0$. Вектор повороту, згідно з $\mathbf{w}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\mathbf{u}$ буде дорівнювати

$$\mathbf{w}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3}\\ AX_3 & -AX_3 & -AX_1+AX_2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(-AX_1+AX_2)}{\partial X_2}-\frac{\partial(-AX_3)}{\partial X_3}\right]\mathbf{e}_1-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(-AX_1+AX_2)}{\partial X_1}-\frac{\partial(AX_3)}{\partial X_3}\right]\mathbf{e}_2+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(-AX_3)}{\partial X_1}-\frac{\partial(AX_3)}{\partial X_2}\right]\mathbf{e}_2=$$

$$= \frac{1}{2} 2A\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}(-2A)\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 = A\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2.$$

Задача 3.44. Показати, що поле переміщення $u_1 = Ax_1 + 3x_2$, $u_2 = 3x_1 - Bx_2$, $u_3 = 5$ визначає стан плоскої деформації. Знайти зв'язок між A і B, за умови якого деформація буде ізохоричною (відсутнє об'ємне розширення).

Розв'язання

За заданим полем переміщення і за формулою $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, знайдемо

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 2\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2A & 6 & 0 \\ 6 & -2B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A & 3 & 0 \\ 3 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отриманий тензор відповідає в формі $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ тензору для плоскої деформації. Згідно $D = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii}$, коефіцієнт об'ємного розширення в нашому випадку дорівнює $D = \varepsilon_{ii} = A - B$. Звідки видно, що D буде дорівнювати нулю за умови $A = B$.

Задача 3.45. Так звана дельта-розетка для вимірювання поздовжніх деформацій має форму рівностороннього трикутника і дає змогу вимірювати відносні подовження $\varepsilon_{11}, \varepsilon'_{11}, \varepsilon''_{11}$ в напрямках, що показані на рис. 3.12. Нехай $\varepsilon_{11} = a$, $\varepsilon'_{11} = b$, $\varepsilon''_{11} = c$. Визначити $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$.

Розв'язання

У випадку $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{E}}$ формула $\frac{dx - dX}{dX} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{v}$ для напрямку x'_1 дає такий результат

$$\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \\ 0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0\end{bmatrix} = b,$$

або $2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22} = 4b - a$.

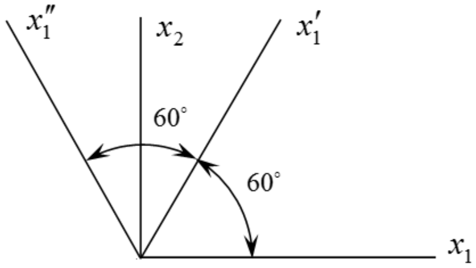


Рис. 3.11. До задачі 3.45

Для напрямку x_1'' аналогічним чином отримуємо такий результат

$$\begin{bmatrix}-\cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \\ 0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0\end{bmatrix} = c,$$

або $-2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22} = 4c - a$.

Розв’язуючи цю систему рівнянь відносно $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ знаходимо

$$\left\{\begin{aligned} 2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22} &= 4b - a, \\ -2\sqrt{3}\varepsilon_{12} + 3\varepsilon_{22} &= 4c - a, \end{aligned}\right. \rightarrow \left\{\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{b - c}{\sqrt{3}}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{3c + \left(4\sqrt{3} - 3\right)b - \sqrt{3}a}{6}. \end{aligned}\right.$$

Задача 3.46. Вивести формулу $\sin\gamma_{23} = \dfrac{2L_{23}}{\Lambda_{(\mathbf{e}_2)}\Lambda_{(\mathbf{e}_3)}} = \dfrac{2L_{23}}{\sqrt{1+2L_{22}}\sqrt{1+2L_{33}}}$, що виражає зміну кута між координатними напрямками X_2 і X_3 у випадку скінченної деформації. Довести, що якщо градієнти переміщення малі величини, то ця формула зводиться до $\gamma_{23} \approx \sin\gamma_{23} = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta = 2l_{23}$.

Розв'язання

Нехай $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ – шукана зміна кута (рис. 3.12). Тоді $\sin\gamma_{23} = \cos(\pi/2 - \theta) = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3$ або згідно $d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}$ і $(dx)^2 = d\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{X}$ маємо

$$\sin\gamma_{23} = \frac{dX_2}{|dx_2|} \cdot \frac{dX_3}{|dx_3|} = \frac{d\mathbf{X}_2 \cdot \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}_3}{\sqrt{d\mathbf{X}_2 \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{X}_2}\sqrt{d\mathbf{X}_3 \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{X}_3}}.$$

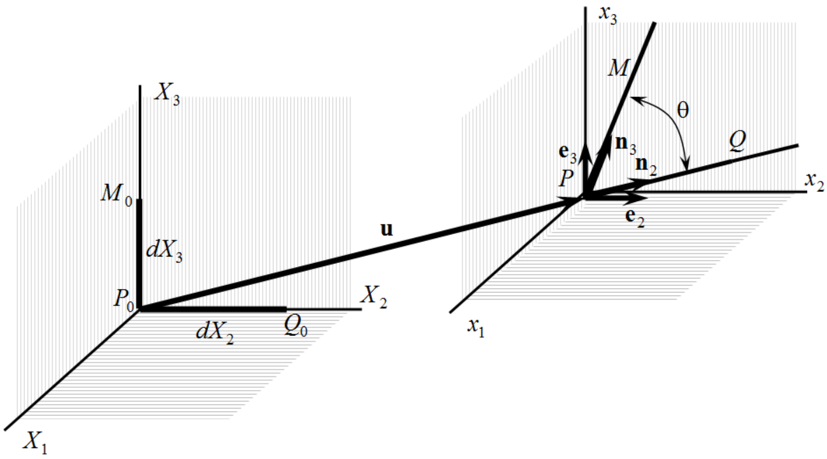


Рис. 3.12. Фізична інтерпретація недіагональних членів l_{ij}

Розділимо чисельник і знаменник цього виразу на $|d\mathbf{X}_2|$ і $|d\mathbf{X}_3|$. Враховуючи те, що $\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}}$ і $\Lambda^2_{(\mathbf{m})} = \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{m}$, отримуємо

$$\sin\gamma_{23} = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{e}_3}{\sqrt{\mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{e}_2}\sqrt{\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{e}_3}} = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{e}_3}{\Lambda_{(\mathbf{e}_2)}\Lambda_{(\mathbf{e}_3)}}.$$

Далі згідно $\hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}\right)$ маємо

$$\mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \left(2\hat{\mathbf{L}}_G + \hat{\mathbf{I}}\right) \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot 2\hat{\mathbf{L}}_G \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{e}_3 = 2L_{23},$$

оскільки $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Згідно з $\Lambda^2_{(\mathbf{e}_2)} = 1 + 2L_{22}$ знаходимо $\Lambda_{(\mathbf{e}_2)} = \sqrt{1 + 2L_{22}}$ і так далі.

Отже,

$$\sin\gamma_{23} = \frac{2L_{23}}{\sqrt{1+2L_{22}}\sqrt{1+2L_{33}}} = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_k}{\partial X_2}\dfrac{\partial u_k}{\partial X_3}}{\sqrt{1 + 2\dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_k}{\partial X_2}\dfrac{\partial u_k}{\partial X_2}}\sqrt{1 + 2\dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_k}{\partial X_3}\dfrac{\partial u_k}{\partial X_3}}},$$

Якщо $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} << 1$, остання рівність зводиться до такого вигляду

$$\sin\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 2l_{23}.$$

Задача 3.47. Для переміщення простого зсуву $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3 + 2X_2/\sqrt{3}$ визначити напрям лінійного елементу в площині X_2X_3, для якого відносне подовження дорівнює нулю.

Розв'язання

Нехай $\mathbf{m} = m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3$ – одиничний вектор нормалі в напрямку нульового подовження. Тоді із $\Lambda^2_{(\mathbf{m})} = \mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{m}$, враховуючи, що $\Lambda^2_{(\mathbf{m})} = 1$, отримуємо

$$\begin{bmatrix} 0 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = 1,$$

де $G_{ij} = \dfrac{\partial x_k}{\partial X_i}\dfrac{\partial x_k}{\partial X_j}$.

В результаті отримуємо рівняння

$7m_2 + 4\sqrt{3}m_2m_3 + 3m_3^2 = 3.$

Окрім того, $m_2^2 + m_3^2 = 1$.

Розв'язуючи таку систему рівнянь, знаходимо

$m_2 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $m_3 = \mp\dfrac{1}{2}$ або $m_2 = 0$, $m_3 = \pm 1$.

Таким чином, нульове подовження мають елементи, що розташовані вздовж осі X_3, і елемент, який йде під кутом 60° до X_3.

3.7. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 3.48. Для переміщення зсуву задачі 3.47 знайти рівняння еліпса, в який переходить коло $X_2^2 + X_3^2 = 1$ під час деформації.

Відповідь: $x_2^2 + 9x_3^2 = 3$.

Задача 3.49. Визначити кут зсуву γ_{23} для деформації задачі 3.47 (рис. 3.13).

Відповідь: $\gamma_{23} = \arcsin\left(2/\sqrt{7}\right)$.

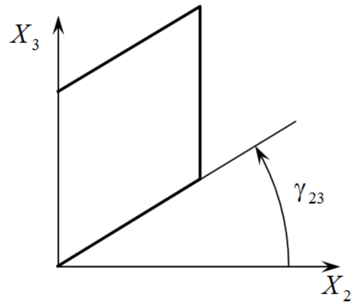


Рис. 3.13. До задачі 3.49

Задача 3.50. Дано поле переміщення $x_1 = X_1 + 2X_3$, $x_2 = X_2 - 2X_3$, $x_3 = X_3 - 2X_1 + 2X_2$. Знайти лагранжевий і ейлерів тензори скінченних деформацій $\hat{\mathbf{L}}_G$ і $\hat{\mathbf{E}}_A$.

Відповідь: $\hat{\mathbf{L}}_G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \hat{\mathbf{E}}_A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 3.51. Знайти діагональну форму обох тензорів задачі 3.50.

Відповідь: $\hat{\mathbf{L}}_G^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \hat{\mathbf{E}}_A^* = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 3.52. Для поля переміщення задачі 3.50 знайти градієнт деформації $\hat{\mathbf{F}}$ і, скориставшись полярним розкладанням $\hat{\mathbf{F}}$, визначити тензор повороту $\hat{\mathbf{R}}$ і правий тензор коефіцієнтів довжини $\hat{\mathbf{S}}$.

Відповідь: $\hat{\mathbf{R}} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3.53. Довести, що перший інваріант тензора $\hat{\mathbf{L}}_G$ можна представити через головні значення коефіцієнтів довжини таким чином

$$\mathrm{I}_{\mathbf{L}_G} = \left[\left(\Lambda^2_{(\mathbf{e}_1)} - 1\right) + \left(\Lambda^2_{(\mathbf{e}_2)} - 1\right) + \left(\Lambda^2_{(\mathbf{e}_3)} - 1\right)\right] / 2.$$

Вказівка: скористатися співвідношенням $\Lambda^2_{(\mathbf{e}_2)} = G_{22} = 1 + 2L_{22}$.

Задача 3.54. В деякій точці задано тензор деформації

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначити відносне подовження в напрямку $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1/2 - \mathbf{e}_2/2 + \mathbf{e}_3/\sqrt{2}$ і зміну кута між напрямками $\mathbf{v}$ і $\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{e}_1/2 + \mathbf{e}_2/2 + \mathbf{e}_3/\sqrt{2}$.

Відповідь: $\varepsilon_{(\nu)} = 6$, $\gamma_{\nu\mu} = 0$.

Задача 3.55. Як виглядає в головних осях тензор ε_{ij} задачі 3.54? Врахувати, що напрямки $\mathbf{v}$ і $\boldsymbol{\mu}$, вказані в цій задачі, є головними (отже, $\gamma_{\nu\mu} = 0$).

Відповідь: $\varepsilon_{ij}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 3.56. Побудувати круги мора для деформованого стану задачі 3.54 і знайти величину максимальної деформації зсуву. Перевірити результат аналітично.

Відповідь: $\gamma_{\max} = 4$.

Задача 3.57. Обчислити усі три інваріанти тензора ε_{ij} задачі 3.54 і тензора ε_{ij}^* задачі 3.55 і порівняти результати.

Відповідь: $\mathrm{I}_{\mathbf{E}} = 6$, $\mathrm{II}_{\mathbf{E}} = -4$, $\mathrm{III}_{\mathbf{E}} = -24$.

Задача 3.58. Для тензора ε_{ij} задачі 3.54 визначити девіатор e_{ij} і обчислити його головні значення.

Відповідь: $e_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$, $e_{ij}^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 3.59. Дано поле переміщення $u_1 = 3x_1x_2^2$, $u_2 = 2x_1x_3$, $u_3 = x_3^2 - x_1x_2$. Визначити тензор ε_{ij} і перевірити, чи задовольняється умови сумісності.

Відповідь: $\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 3x_2^2 & 3x_1x_2 + x_3 & -x_2/2 \\ 3x_1x_2 + x_3 & 0 & x_1/2 \\ -x_2/2 & x_1/2 & 2x_3 \end{bmatrix}$, так.

Задача 3.60. Для дельта-розетки деформацій відносні подовження, величини яких вказано на рис. 3.14. Визначити ε_{12} і ε_{22}.

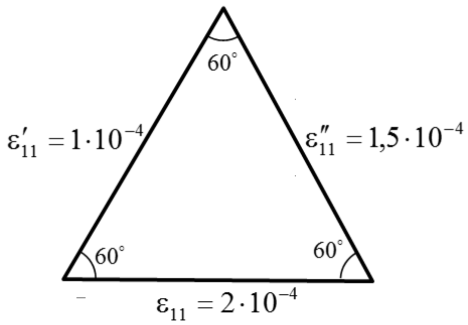


Рис. 3.14. До задачі 3.60

Відповідь: $\varepsilon_{22} = 1 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{12} = -0{,}2885 \cdot 10^{-4}$.

Задача 3.61. Для поля переміщення $x_1 = X_1 + AX_3$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3 - AX_1$ обчислити зміну об'єму і показати, що вона дорівнює нулю, якщо константа A мала величина.

Задача 3.62. В деякій точці середовища, в якій відбулася мала деформація, тензор малих деформацій в декартовій системі координат має таку матрицю компонент

$$\begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}03 & 0 \\ 0{,}03 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}.$$

Знайти найбільше і найменше відносне подовження матеріальних елементів в цій точці. Знайти напрямки матеріальних елементів, які зазнали:

а) найбільше відносне подовження;

б) найменше відносне подовження.

Обчислити відносну зміну об'єму в цій точці.

Відповідь: а) $\mathbf{n}_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$; $d^{(\mathbf{n}_{\max})} = 0{,}04$;

б) $\mathbf{n}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$; $d^{(\mathbf{n}_{\min})} = -0{,}02$; $\frac{\Delta V}{V_0} = 0{,}03$.

Задача 3.63. Подвійним зсувом називається деформація суцільного середовища, яка відповідає закону руху

$$x_1 = X_1 + b(t)X_2,\; x_2 = X_2 + b(t)X_3,\; x_3 = X_3,$$

де x_i – просторові декартові координати; X_i – лагранжеві координати; $b(t)$ – функція часу, причому $b(0) = 0$.

Вважаючи функцію $b(t)$ заданою, знайти тензори деформацій Гріна $\hat{\mathbf{L}}_G$ і Альмансі $\hat{\mathbf{E}}_A$.

$$\text{Відповідь: } \hat{\mathbf{L}}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{b}{2} & \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & \frac{b}{2} & \frac{b^2}{2} \end{pmatrix},\; \hat{\mathbf{E}}_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} & -\frac{b^2}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{b^2}{2} & \frac{b}{2}\left(1+b^2\right) \\ -\frac{b^2}{2} & \frac{b}{2}\left(1+b^2\right) & -\frac{b}{2}\left(1+b^2\right) \end{pmatrix}.$$

Задача 3.64. Знайти компоненти переміщення $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ в ейлеревому описі за умови подвійного зсуву (див. задачу 3.63). Знайти тензор малих деформацій.

Відповідь: $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = b(x_2 - bx_3)\mathbf{e}_1 + bx_3\mathbf{e}_2$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{b}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)$.

4. РУХ І ТЕЧІЯ

4.1. Матеріальні похідні. Швидкість. Прискорення

Задача 4.1. Дано просторовий (ейлеревий) опис руху континууму $x_1 = X_1 e^t + X_3\left(e^t - 1\right)$, $x_2 = X_3\left(e^t - e^{-t}\right) + X_2$, $x_3 = X_3$. Довести, що якобіана J для такого руху відмінний від нуля, і знайти матеріальне (лагранжеве) представлення цього руху, за допомогою обернення рівнянь для переміщення.

Розв'язання

Згідно $J = \left|\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|$, якобіан переходу від просторового до матеріального опису руху континууму (або від ейлеревої системи відліку до лагранжевої) буде дорівнювати

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t .$$

За умови $t \geq 0$, $J > 0$, тобто можливий перехід від ейлеревої системи відліку до лагранжевої.

Обертаючи рівняння руху, за допомого розв'язання системи рівнянь руху відносно X_i методом підстановки, отримуємо матеріальне (лагранжеве) представлення цього руху

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^t + X_3\left(e^t - 1\right), \\ x_2 = X_3\left(e^t - e^{-t}\right) + X_2, \\ x_3 = X_3, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = X_1 e^t + x_3\left(e^t - 1\right), \\ x_2 = x_3\left(e^t - e^{-t}\right) + X_2, \\ X_3 = x_3, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_1 = x_1 e^{-t} + x_3\left(e^{-t} - 1\right), \\ X_2 = x_2 - x_3\left(e^t - e^{-t}\right), \\ X_3 = x_3. \end{cases}$$

Відмітимо, що за обох способів описання руху континууму має вигляд $x_i = X_i$, $i = 1,2,3$ за умови $t = 0$.

Задача 4.2. Дано закон руху континууму $x_1 = X_1$, $x_2 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 + e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2$, $x_3 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 - e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2$. Визначити компоненти швидкості в ейлеревій і лагранжевій формах.

Розв'язання

З другого і третього рівнянь отримуємо:
спочатку складемо рівняння для x_2 і x_3 та виразимо $X_2 + X_3$

$$X_2 + X_3 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right);$$

далі віднімемо від рівняння для x_2 рівняння для x_3 та виразимо $X_2 - X_3$

$$X_2 - X_3 = e^t\left(x_2 - x_3\right).$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо обернені рівняння

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ X_2 + X_3 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right), \\ X_2 - X_3 = e^t\left(x_2 - x_3\right), \end{cases} \to \begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right)/2 + e^t\left(x_2 - x_3\right)/2, \\ X_3 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right)/2 - e^t\left(x_2 - x_3\right)/2. \end{cases}$$

Тоді компоненти переміщення $u_i = x_i - X_i$ можна записати або в лагранжевій формі:

$$u_1 = x_1 - X_1 = X_1 - X_1 = 0,$$
$$u_2 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 + e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2 - X_2,$$
$$u_3 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 - e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2 - X_3,$$

або в ейлеревій формі:

$$u_1 = x_1 - X_1 = x_1 - x_1 = 0,$$
$$u_2 = x_2 - e^{-t}\left(x_2 + x_3\right)/2 - e^t\left(x_2 - x_3\right)/2,$$
$$u_3 = x_3 - e^{-t}\left(x_2 + x_3\right)/2 + e^t\left(x_2 - x_3\right)/2,$$

Згідно $v_i \equiv \dot{u}_i = \dfrac{du_i(\mathbf{X},t)}{dt} = \dfrac{\partial u_i(\mathbf{X},t)}{\partial t}$, отримуємо

$$v_1 = 0,\ v_2 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 - e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2,$$
$$v_3 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 + e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2.$$

З врахуванням співвідношень $X_2 + X_3 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right)$ і $X_2 - X_3 = e^t\left(x_2 - x_3\right)$, ці вирази для компонент швидкості зводяться до

$$v_1 = 0,\ v_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} - \frac{x_2 - x_3}{2} = x_3,\ v_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_2 - x_3}{2} = x_2.$$

З іншого боку, якщо рух задано в ейлеревих змінних, то з формули $v_i(\mathbf{x},t) \equiv \dot{u}_i(\mathbf{x},t) \equiv \dfrac{du_i(\mathbf{x},t)}{dt} = \dfrac{\partial u_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x},t)\dfrac{\partial u_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}$, знаходимо

$$\frac{du_2}{dt} = v_2 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right)/2 - e^t\left(x_2 - x_3\right)/2 + v_2\left(2 - e^{-t} - e^t\right)/2 + v_3\left(-e^{-t} + e^t\right)/2,$$
$$\frac{du_3}{dt} = v_3 = e^{-t}\left(x_2 + x_3\right)/2 + e^t\left(x_2 - x_3\right)/2 + v_2\left(-e^{-t} + e^t\right)/2 + v_3\left(2 - e^{-t} - e^t\right)/2.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно v_2 і v_3, отримуємо, як і для лагранжевої форми $v_2 = x_3$, $v_3 = x_2$, а $v_1 = 0$.

Задача 4.3. Дано поле швидкості $v_1 = x_1/(1+t)$, $v_2 = 2x_2/(1+t)$, $v_3 = 3x_3/(1+t)$. Знайти компоненти вектора прискорення.

Розв'язання

Користуючись формулою $a_i(\mathbf{x},t) \equiv \dfrac{dv_i(\mathbf{x},t)}{dt} = \dfrac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x},t)\dfrac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}$, знаходимо

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{(1+t)}\frac{1}{(1+t)} = -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{(1+t)^2} = 0,$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -\frac{2x_2}{(1+t)^2} + \frac{2x_2}{(1+t)}\frac{2}{(1+t)} = -\frac{2x_2}{(1+t)^2} + \frac{4x_2}{(1+t)^2} = \frac{2x_2}{(1+t)^2},$$

$$a_3 = \frac{dv_3}{dt} = -\frac{3x_3}{(1+t)^2} + \frac{3x_3}{(1+t)}\frac{3}{(1+t)} = -\frac{3x_3}{(1+t)^2} + \frac{9x_3}{(1+t)^2} = \frac{6x_3}{(1+t)^2}.$$

Задача 4.4. Виконати інтегрування виразу для швидкості, що задана в задачі 4.3, і отримати рівняння для переміщення $x_i = x_i(\mathbf{X},t)$ (закон руху). За цими даними визначити компоненти прискорення в лагранжевій формі.

Розв'язання

За визначенням $v_i = \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{d(u_i + X_i)}{dt} = \dfrac{du_i}{dt}$, маємо

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{(1+t)}.$$

Розділяючи змінні, отримуємо

$\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dt}{(1+t)}$ і виконуємо інтегрування

$$\int\frac{dx_1}{x_1} = \int\frac{dt}{(1+t)} \rightarrow \ln x_1 = \ln(1+t) + \ln C,$$

де C – стала інтегрування. Оскільки $x_1 = X_1$ при $t = 0$, то $C = X_1$, і, відповідно, $x_1 = X_1(1+t)$. Точно так само знаходимо

$x_2 = X_2(1+t)^2$ і $x_3 = X_3(1+t)^3$.

Далі, використовуючи $v_i \equiv \dot{u}_i = \dfrac{du_i(\mathbf{X},t)}{dt} = \dfrac{\partial u_i(\mathbf{X},t)}{\partial t}$ і $a_i \equiv \dot{v}_i \equiv \dfrac{dv_i(\mathbf{X},t)}{dt} = \dfrac{\partial v_i(\mathbf{X},t)}{\partial t}$, отримуємо, що

$$v_1 = \frac{\partial(X_1(1+t))}{\partial t} = X_1,\; v_2 = \frac{\partial\left(X_2(1+t)^2\right)}{\partial t} = 2X_2(1+t),$$

$$v_3 = \frac{\partial\left(X_3(1+t)^3\right)}{\partial t} = 3X_3(1+t)^2$$

і

$$a_1 = \frac{\partial(X_1)}{\partial t} = 0,\ a_2 = \frac{\partial(2X_2(1+t))}{\partial t} = 2X_2,\ a_3 = \frac{\partial\left(3X_3(1+t)^2\right)}{\partial t} = 6X_3(1+t).$$

Задача 4.5. Задано закон руху суцільного середовища $x_1 = A + \left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\sin\lambda(A+\omega t)$, $x_2 = -B - \left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\cos\lambda(A+\omega t)$, $x_3 = X_3$. Показати, що траєкторії є колами, а величина швидкості стала величина. Визначити зв'язок між X_1 і X_2 та сталими A і B.

Розв'язання

Перепишемо закон руху у вигляді $x_1 - A = \left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\sin\lambda(A+\omega t)$, $x_2 + B = \left(-e^{-B\lambda}/\lambda\right)\cos\lambda(A+\omega t)$. Піднесемо ці рівності в квадрат

$$(x_1 - A)^2 = \left(e^{-2B\lambda}/\lambda^2\right)\sin^2[\lambda(A+\omega t)],$$
$$(x_2 + B)^2 = \left(e^{-2B\lambda}/\lambda^2\right)\cos^2[\lambda(A+\omega t)].$$

Після складання і, враховуючи те, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, отримаємо

$$(x_1 - A)^2 + (x_2 + B)^2 = e^{-2B\lambda}/\lambda^2 .$$

За формулою $v_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ знайдемо компоненти швидкості:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \omega e^{-B\lambda}\cos\lambda(A+\omega t),$$
$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \omega e^{-B\lambda}\sin\lambda(A+\omega t),$$
$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

отже $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \omega^2 e^{-2B\lambda}$.

На кінець, $x_i = X_i$ при $t = 0$, звідки знаходимо, що

$$X_1 = A + \left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\sin(\lambda A),$$
$$X_2 = -B - \left(e^{-B\lambda}/\lambda\right)\cos(\lambda A).$$

Задача 4.6. Поле швидкості задано вектором $\mathbf{v} = x_1^2 t\mathbf{e}_1 + x_2 t^2\mathbf{e}_2 + x_1 x_3 t\mathbf{e}_3$. Визначити швидкість і прискорення частинки, що знаходиться в момент $t = 1$ в точці $P(1, 3, 2)$.

Розв'язання

Прямою підстановкою знайдемо $\mathbf{v}_P = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$. Користуючись векторною формою формули $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \dfrac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt} = \dfrac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\vec{\nabla}\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, отримаємо поле прискорення

$$\mathbf{a} = x_1^2\mathbf{e}_1 + 2x_2t\mathbf{e}_2 + x_1x_3\mathbf{e}_3 +$$
$$+ \left(x_1^2t\mathbf{e}_1 + x_2t^2\mathbf{e}_2 + x_1x_3t\mathbf{e}_3\right)\cdot\left(2x_1t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + x_1t\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + x_3t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\right),$$

або

$$\mathbf{a} = \left(x_1^2 + 2x_1^3t^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(2x_2t + x_2t^4\right)\mathbf{e}_2 + \left(x_1x_3 + 2x_1^2x_3t^2\right)\mathbf{e}_3 .$$

Таким чином,

$$\mathbf{a}_P = 3\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 .$$

Задача 4.7. Для поля швидкості задачі 4.3 знайти лінії току і траєкторії та довести, що вони співпадають.

Розв'язання

Дотична до лінії току в кожній точці спрямована за вектором швидкості. Отже, для нескінченно малого вектора $d\mathbf{x}$ дотичну до лінії току можна написати рівнянням $\mathbf{v}\times d\mathbf{x} = 0$ і отримати таким чином диференціальні рівняння ліній току

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} .$$

Для вказаної течії ці рівняння мають вигляд

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{2x_2} = \frac{dx_3}{3x_3} .$$

Інтегруючи ці рівняння з врахуванням початкових умов $x_i = X_i$ при $t = 0$, знаходимо для ліній току:

$$\int\frac{dx_1}{x_1} = \int\frac{dx_2}{2x_2} \to \ln\left(\frac{x_1}{C_1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x_2}{C_2}\right) \to \ln\left(\frac{x_1}{C_1}\right)^2 = \ln\left(\frac{x_2}{C_2}\right) \to \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^2 = \frac{x_2}{C_2} \to$$

$$\to \begin{vmatrix} C_1 = X_1, \\ C_2 = X_2 \end{vmatrix} \to \left(\frac{x_1}{X_1}\right)^2 = \frac{x_2}{X_2},$$

$$\left(\frac{x_1}{X_1}\right)^3 = \frac{x_3}{X_3}, \left(\frac{x_2}{X_2}\right)^3 = \left(\frac{x_3}{X_2}\right)^2 .$$

Інтегрування виразів для швидкості $\dfrac{dx_i}{dt} = v_i$ було здійснено в задачі 4.4, в результаті чого отримано закон руху $x_1 = X_1(1+t)$, $x_2 = X_2(1+t)^2$ і $x_3 = X_3(1+t)^3$. Виключаючи з цих рівнянь час t, отримуємо траєкторії, які точно співпадають зі знайденими вище лініями току, наприклад,

$$x_1 = X_1(1+t) \to t = \frac{x_1 - X_1}{X_1},$$

підставляємо в $x_2 = X_2(1+t)^2 \to x_2 = X_2\left(1+\dfrac{x_1 - X_1}{X_1}\right)^2$ і знаходимо

$$x_1 = \frac{X_1\sqrt{x_2}}{\sqrt{X_2}} \to \left(\frac{x_1}{X_1}\right)^2 = \frac{x_2}{X_2} \quad \text{і так далі.}$$

Задача 4.8. В електромагнітному континуумі напруженість магнітного поля дорівнює $\lambda = e^{-At}/r$, де $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ і A – константа, і рух задано полем швидкості $v_1 = Bx_1x_3t$, $v_2 = Bx_2^2t^2$, $v_3 = Bx_2x_3$. Визначити швидкість зміни поля частинки, що розташована в момент $t = 1$ в точці $P(2, -1, 2)$.

Розв'язання

Оскільки $\dfrac{\partial(r^{-1})}{\partial x_i} = -\dfrac{x_i}{r^3}$, формула $\dfrac{dP_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)}{dt} = \dfrac{\partial P_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + v_k\dfrac{\partial P_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}$ дає

$$\dot{\lambda} = -A\frac{e^{-At}}{r} - e^{-At}\frac{\left(Bx_1^2x_3t + Bx_2^3t^2 + Bx_3^2x_2\right)}{r^3}.$$

Таким чином, в точці P в момент $t = 1$

$$\dot{\lambda} = -e^{-A}\left(\frac{A}{3} + \frac{3B}{27}\right) = -\frac{e^{-A}}{9}(3A + B).$$

Задача 4.9. Дано поле швидкості $v_1 = 4x_3 - 3x_2$, $v_2 = 3x_1$, $v_3 = -4x_1$. Визначити компоненти прискорення в точках $P(b, 0, 0)$ і $Q(0, 4b, 3b)$ та звернути увагу на те, що поле швидкості відповідає обертанню абсолютно твердого тіла з кутовою швидкістю, що дорівнює 5, навколо осі, яка спрямована вздовж вектора $\mathbf{e} = (4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)/5$.

Розв'язання

За формулою $a_i(\mathbf{x},t) = \dfrac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x},t)\dfrac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}$ визначимо компоненти вектора прискорення:

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial(4x_3 - 3x_2)}{\partial t} + (4x_3 - 3x_2)\frac{\partial(4x_3 - 3x_2)}{\partial x_1} +$$

$$+ 3x_1\frac{\partial(4x_3 - 3x_2)}{\partial x_2} + (-4x_1)\frac{\partial(4x_3 - 3x_2)}{\partial x_3} = 0 + 0 - 9x_1 - 16x_1 = -25x_1;$$

$$a_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial(3x_1)}{\partial t} + (4x_3 - 3x_2)\frac{\partial(3x_1)}{\partial x_1} +$$

$$+ 3x_1\frac{\partial(3x_1)}{\partial x_2} + (-4x_1)\frac{\partial(3x_1)}{\partial x_3} = 0 + (12x_3 - 9x_2) + 0 + 0 = -9x_2 + 12x_3;$$

$$a_3=\frac{\partial v_3}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\frac{\partial(-4x_1)}{\partial t}+(4x_3-3x_2)\frac{\partial(-4x_1)}{\partial x_1}+$$

$$+3x_1\frac{\partial(-4x_1)}{\partial x_2}+(-4x_1)\frac{\partial(-4x_1)}{\partial x_3}=0+(-16x_3+12x_2)+0+0=12x_2-16x_3.$$

Тоді в точці $P(b,0,0)$ – $\mathbf{a}=-25b\mathbf{e}_1$ і прискорення має тільки доцентрову компоненту, а в точці $Q(0,4b,3b)$, що розташована на осі обертання, $\mathbf{a}=(-25x_1)\mathbf{e}_1+(-9x_2+12x_3)\mathbf{e}_2+(12x_2-16x_3)\mathbf{e}_3=$
$=0\mathbf{e}_1+(-9\cdot 4b+12\cdot 3b)\mathbf{e}_2+(12\cdot 4b-16\cdot 3b)\mathbf{e}_3=(-36b+36b)\mathbf{e}_2+(48b-48b)\mathbf{e}_3=0.$

За даними в задачі компонентами вектора швидкості $v_1=4x_3-3x_2$, $v_2=3x_1$, $v_3=-4x_1$ напишемо вектор швидкості

$$\mathbf{v}=(4x_3-3x_2)\mathbf{e}_1+3x_1\mathbf{e}_2-4x_1\mathbf{e}_3.$$

З іншого боку цей вектор швидкості можна виразити співвідношенням

$$\mathbf{v}'=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x},$$

де $\boldsymbol{\omega}=k\mathbf{e}=k(4\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3)/5$ – кутова швидкість обертання навколо осі – вектора $\mathbf{e}=(4\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3)/5$, k – модуль вектора кутової швидкості, який треба знайти, $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ – вектор координат.

Тоді можна записати такий векторний добуток

$$\mathbf{v}'=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}=k(4\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3)/5\times(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ 0 & k\,4/5 & k\,3/5\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{k}{5}(4x_3-3x_2)\mathbf{e}_1-\frac{k}{5}(-3x_1)+\frac{k}{5}(-4x_1)=\frac{k}{5}\left[(4x_3-3x_2)\mathbf{e}_1+3x_1\mathbf{e}_2-4x_1\mathbf{e}_3\right].$$

Порівнюючи вектори $\mathbf{v}$ і $\mathbf{v}'$, нескладно прийти до висновку, що вони рівними між собою за умови $k=5$. Тоді можна записати, що $\boldsymbol{\omega}=k\mathbf{e}=5\mathbf{e}$, що і треба було показати.

4.2. Швидкість деформації, завихреність

Задача 4.10. Деяка течія задана полем швидкості $v_1=0$, $v_2=A(x_1x_2-x_3^2)e^{-Bt}$, $v_3=A(x_2^2-x_1x_3)e^{-Bt}$, де A і B – сталі. Знайти градієнт швидкості $\partial v_i/\partial x_j$ для цього руху і обчислити тензор швидкості деформації $\hat{\mathbf{D}}$ і тензор завихреності $\hat{\mathbf{V}}$ в точці $P(1,0,3)$ в момент часу $t=0$.

Розв'язання

Згідно з $Y_{ij} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = D_{ij} + V_{ij}$ визначимо спочатку

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3 \\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3 \\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix} Ae^{-Bt};$$

далі визначимо симетричну D_{ij} та несиметричну V_{ij} складові градієнта швидкості $Y_{ij} \equiv \partial v_i / \partial x_j$

$$D_{ij} = D_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2} Ae^{-Bt}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_3 \\ 0 & x_1 & 2x_2 \\ 0 & -2x_3 & -x_1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x_2/2 & -x_3/2 \\ x_2/2 & x_1 & x_2 - x_3 \\ -x_3/2 & x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix} Ae^{-Bt};$$

$$V_{ij} = -V_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2} Ae^{-Bt}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_3 \\ 0 & x_1 & 2x_2 \\ 0 & -2x_3 & -x_1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -x_2/2 & +x_3/2 \\ x_2/2 & 0 & -x_2 - x_3 \\ -x_3/2 & x_2 + x_3 & 0 \end{pmatrix} Ae^{-Bt};$$

а тепер перевіри $Y_{ij} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = D_{ij} + V_{ij}$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & x_2/2 & -x_3/2 \\ x_2/2 & x_1 & x_2 - x_3 \\ -x_3/2 & x_2 - x_3 & -x_1 \end{pmatrix} Ae^{-Bt} + \begin{pmatrix} 0 & -x_2/2 & x_3/2 \\ x_2/2 & 0 & -x_2 - x_3 \\ -x_3/2 & x_2 + x_3 & 0 \end{pmatrix} Ae^{-Bt} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix} Ae^{-Bt}.$$

Цей тензор та його складові можна обчислити в точці $P(1, 0, 3)$ в момент часу $t = 0$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3/2 & -3 & -1 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3/2 & 3 & 0 \end{pmatrix} A =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -6A \\ -3A & 0 & -A \end{pmatrix}.$$

Задача 4.11. Для руху $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + X_1\left(e^{-2t} - 1\right)$ і $x_3 = X_3 + X_1\left(e^{-3t} - 1\right)$ обчислити тензор швидкості деформації $\hat{\mathbf{D}}$ і тензор завихреності $\hat{\mathbf{V}}$. Порівняти компоненти $\hat{\mathbf{D}}$ з $\dfrac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$ – швидкостями зміни компонент ейлеревого тензора малих деформацій $\hat{\mathbf{E}}$.

Розв'язання

У даному випадку компоненти переміщення дорівнюють $u_i = x_i - X_i$:

$u_1 = x_1 - X_1 = X_1 - X_1 = 0$,

$u_2 = x_2 - X_2 = X_2 + X_1\left(e^{-2t} - 1\right) - X_2 = X_1\left(e^{-2t} - 1\right)$,

$u_3 = x_3 - X_3 = X_3 + X_1\left(e^{-3t} - 1\right) - X_3 = X_1\left(e^{-3t} - 1\right)$.

З врахуванням того, що $x_1 = X_1$, компоненти переміщення набувають вигляду:

$u_2 = x_1\left(e^{-2t} - 1\right)$, $u_3 = x_1\left(e^{-3t} - 1\right)$.

За формулою $v_i \equiv \dot{u}_i = \dfrac{du_i(\mathbf{X},t)}{dt} = \dfrac{\partial u_i(\mathbf{X},t)}{\partial t}$ компоненти швидкості будуть дорівнювати:

$$v_1 = \frac{du_1}{dt} = 0, \; v_2 = \frac{du_2}{dt} = \frac{d\left(x_1\left(e^{-2t} - 1\right)\right)}{dt} = -2x_1 e^{-2t},$$

$$v_3 = \frac{du_3}{dt} = \frac{d\left(x_1\left(e^{-3t} - 1\right)\right)}{dt} = -3x_1 e^{-3t}.$$

Відомо, що розкладання градієнта швидкості $\partial v_i / \partial x_j$ дає формулу $\partial v_i / \partial x_j = D_{ij} + V_{ij}$, тобто

$$D_{ij} = D_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$V_{ij}=-V_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t} & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & 3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=D_{ij}+V_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} & -3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & e^{-2t} & 3e^{-3t}/2 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -e^{-2t} & 0 & 0 \\ -3e^{-3t}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно отримуємо розкладання градієнта переміщення $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}$:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e^{-2t}-1 & 0 & 0 \\ e^{-3t}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & e^{-2t}-1 & e^{-3t}-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & e^{-2t}-1 & e^{-3t}-1 \\ e^{-2t}-1 & 0 & 0 \\ e^{-3t}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e^{-2t}-1 & 0 & 0 \\ e^{-3t}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & e^{-2t}-1 & e^{-3t}-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t}+1 & -e^{-3t}+1 \\ e^{-2t}-1 & 0 & 0 \\ e^{-3t}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & e^{-2t}-1 & e^{-3t}-1 \\ e^{-2t}-1 & 0 & 0 \\ e^{-3t}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t}+1 & -e^{-3t}+1 \\ e^{-2t}-1 & 0 & 0 \\ e^{-3t}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e^{-2t}-1 & 0 & 0 \\ e^{-3t}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Порівнючи $\hat{\mathbf{D}}$ з $\dfrac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$ бачимо, що $\dfrac{d\varepsilon_{ij}}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=D_{ij}$ і виконуючи порівняння $\hat{\mathbf{V}}$ з $\dfrac{d\omega_{ij}}{dt}$ бачимо, що $\dfrac{d\omega_{ij}}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}-\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=V_{ij}$.

Задача 4.12. Вихровою лінією називається така лінія, дотична до якої в кожній точці рухомого середовища спрямована за вектором вихору швидкості $\mathbf{\Omega}=\dfrac{1}{2}\mathbf{q}$. Довести, що рівняння вихрових ліній мають вигляд $\dfrac{dx_1}{q_1}=\dfrac{dx_2}{q_2}=\dfrac{dx_3}{q_3}$.

Розв'язання

Нехай $d\mathbf{x}$ – нескінченно малий вектор у напрямку $\mathbf{q}$. Тоді можна написати $\mathbf{q}\times d\mathbf{x}=0$ або

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix}=(q_2dx_3-q_3dx_2)\mathbf{e}_1+(q_3dx_1-q_1dx_3)\mathbf{e}_2+(q_1dx_2-q_2dx_1)\mathbf{e}_3=0,$$

звідки отримуємо рівняння вихрової лінії

$$\frac{dx_1}{q_1}=\frac{dx_2}{q_2}=\frac{dx_3}{q_3}.$$

Задача 4.13. Довести, що поле швидкості $\mathbf{v}=(Ax_3-Bx_2)\mathbf{e}_1+(Bx_1-Cx_3)\mathbf{e}_2+(Cx_2-Ax_1)\mathbf{e}_3$ вихрові лінії є прямими. Написати їх рівняння.

Розв'язання

За визначенням $\mathbf{q}=\vec{\nabla}\times\mathbf{v}=2(C\mathbf{e}_1+A\mathbf{e}_2+B\mathbf{e}_3)$, а, згідно результату задачі 4.12, диференціальні рівняння вихрових ліній будуть такими

$$Adx_3=Bdx_2,\ Bdx_1=Cdx_3,\ Cdx_2=Adx_1.$$

Інтегруючи їх, знайдемо рівняння вихрових ліній у канонічній формі

$$x_3 = B\frac{x_2}{A} + K_1,\; x_1 = C\frac{x_3}{B} + K_2,\; x_2 = A\frac{x_1}{C} + K_3,$$

де K_i – сталі інтегрування.

Задача 4.14. Довести, що поле швидкості задачі 4.13 представляє собою обертання абсолютно твердого тіла, оскільки для нього $\hat{\mathbf{D}} \equiv 0$.

Розв'язання

Обчислимо градієнт швидкості $\partial v_i / \partial x_j$ для $\mathbf{v} = (Ax_3 - Bx_2)\mathbf{e}_1 + (Bx_1 - Cx_3)\mathbf{e}_2 + (Cx_2 - Ax_1)\mathbf{e}_3$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & -B & A \\ B & 0 & -C \\ -A & C & 0 \end{pmatrix} = V_{ij}.$$

Виявляється, що $\partial v_i / \partial x_j$ асиметричним тензором, а це значить, що $D_{ij} \equiv 0$. Це витікає із рівності $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = D_{ij} + V_{ij} = V_{ij}$.

Задача 4.15. Для обертання абсолютно твердого тіла зі швидкістю $\mathbf{v} = 3x_3\mathbf{e}_1 - 4x_3\mathbf{e}_2 + (4x_2 - 3x_1)\mathbf{e}_3$ визначити вектор вихору швидкості $\mathbf{\Omega}$ і показати, що $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}$.

Розв'язання

За визначенням $\mathbf{\Omega} = \dfrac{1}{2}\mathbf{q} = \dfrac{1}{2}\vec{\nabla} \times \mathbf{v}$, $2\mathbf{\Omega} = \mathbf{q}$ або

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ 3x_3 & -4x_3 & 4x_2 - 3x_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(4x_2 - 3x_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(-4x_3)}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(3x_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial(4x_2 - 3x_1)}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(-4x_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(3x_3)}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(4+4)\mathbf{e}_1 +$$

$$+\frac{1}{2}(3+3)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(0-0)\mathbf{e}_3 = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2.$$

Цей вектор спрямований вздовж осі обертання, що можна перевірити за формулою $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x} = \mathbf{v}$

$$(4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \times (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 4 & 3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (3x_3 - 0)\mathbf{e}_1 + (0 - 4x_3)\mathbf{e}_2 + (4x_2 - 3x_1)\mathbf{e}_3 =$$
$$= 3x_3\mathbf{e}_1 - 4x_3\mathbf{e}_2 + (4x_2 - 3x_1)\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}.$$

Задача 4.16. Дано стаціонарне поле швидкості $\mathbf{v} = \left(x_1^3 - x_1x_2^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(x_1^2x_2 + x_2\right)\mathbf{e}_2$. Знайти швидкості частинок відносно точки $P(1,1,3)$ в точках $Q_1(1,0,3)$, $Q_2(1,3/4,3)$, $Q_3(1,7/8,3)$, віднесені до відстані від цих точок до точки P, і показати, що їх величини прямують до відносної швидкості, що визначається формулою $dv_i = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j$, або $d\mathbf{v} = \mathbf{v}\vec{\nabla} \cdot d\mathbf{x}$.

Розв'язання

Безпосереднє обчислення дає:

у точці $P(1,1,3)$

$$\mathbf{v}_P = (1 - 1\cdot 1)\mathbf{e}_1 + (1\cdot 1 + 1)\mathbf{e}_2 = 0\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2;$$

у точці $Q_1(1,0,3)$

$$\mathbf{v}_{Q_1} = (1 - 0)\mathbf{e}_1 + (1\cdot 0 + 0)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2,$$

тоді $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_1} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$,

у точці $Q_2(1,3/4,3)$

$$\mathbf{v}_{Q_2} = \left(1 - 1\cdot\frac{9}{16}\right)\mathbf{e}_1 + \left(1\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right)\mathbf{e}_2 = \frac{7}{16}\mathbf{e}_1 + \frac{6}{4}\mathbf{e}_2,$$

тоді $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_2} = 2\mathbf{e}_2 - \dfrac{7}{16}\mathbf{e}_1 - \dfrac{6}{4}\mathbf{e}_2 = -\dfrac{7}{16}\mathbf{e}_1 + \dfrac{2}{4}\mathbf{e}_2 \to 4\left(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_2}\right) = -\dfrac{7}{4}\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$;

у точці $Q_3(1,7/8,3)$

$$\mathbf{v}_{Q_3} = \left(1 - 1\cdot\frac{49}{64}\right)\mathbf{e}_1 + \left(1\cdot\frac{7}{8} + \frac{7}{8}\right)\mathbf{e}_2 = \frac{15}{64}\mathbf{e}_1 + \frac{14}{8}\mathbf{e}_2,$$

тоді $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_3} = 2\mathbf{e}_2 - \dfrac{15}{64}\mathbf{e}_1 - \dfrac{14}{8}\mathbf{e}_2 = -\dfrac{15}{64}\mathbf{e}_1 + \dfrac{2}{8}\mathbf{e}_2 \to 8\left(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_3}\right) = -\dfrac{15}{8}\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

Визначимо матрицю градієнта швидкості $\mathbf{v} = \left(x_1^3 - x_1x_2^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(x_1^2x_2 + x_2\right)\mathbf{e}_2$

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3 \\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3 \\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

і в точці $P(1,1,3)$ градієнт швидкості у від'ємному напрямку осі x_2 дорівнює

$$\left(\frac{dv_i}{dx}\right)_{(\mathbf{e}_2)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, $\left(\dfrac{d\mathbf{v}}{dx}\right)_{(\mathbf{e}_2)} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, і ця величина, до якої прямує відносна швидкість $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_{Q_i}$, яка віднесена до відстані до точки P.

Задача 4.17. Для стаціонарного поля швидкості $\mathbf{v} = 3x_1^2 x_2 \mathbf{e}_1 + 2x_2^2 x_3 \mathbf{e}_2 + x_1 x_2 x_3^2 \mathbf{e}_3$ визначити швидкість подовження матеріального відрізка в точці $P(1,1,1)$ в напрямку $\mathbf{v} = (3\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3)/5$.

Розв'язання

Визначимо градієнт швидкості

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3 \\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3 \\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 & 0 \\ 0 & 4x_2x_3 & 2x_2^2 \\ x_2x_3^2 & x_1x_3^2 & 2x_1x_2x_3 \end{bmatrix},$$

відповідно його симетрична частина дорівнює

$$\left[D_{ij}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 & 0 \\ 0 & 4x_2x_3 & 2x_2^2 \\ x_2x_3^2 & x_1x_3^2 & 2x_1x_2x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6x_1x_2 & 0 & x_2x_3^2 \\ 3x_1^2 & 4x_2x_3 & x_1x_3^2 \\ 0 & 2x_2^2 & 2x_1x_2x_3 \end{bmatrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 6x_1x_2 & \dfrac{3}{2}x_1^2 & \dfrac{x_2x_3^2}{2} \\ \dfrac{3}{2}x_1^2 & 4x_2x_3 & \dfrac{2x_2^2 + x_1x_3^2}{2} \\ \dfrac{x_2x_3^2}{2} & \dfrac{2x_2^2 + x_1x_3^2}{2} & 2x_1x_2x_3 \end{bmatrix}.$$

У точці $P(1,1,1)$ тензор $\lfloor D_{ij} \rfloor$ приймає такі значення

$$\left[D_{ij}\right]_P = \begin{bmatrix} 6 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 4 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 2 \end{bmatrix}.$$

За формулою $d = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}}_P \cdot \mathbf{v}$ для напрямку $\mathbf{v} = (3\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3)/5$ отримуємо

$$d = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} & 0 & -\dfrac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 4 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ 0 \\ \dfrac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{74}{25}.$$

Задача 4.18. Для руху, заданого в задачі 4.17, визначити в точці P швидкість зміни кута між ортогональними напрямками $\mathbf{v} = (3\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3)/5$ і $\boldsymbol{\mu} = (4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3)/5$.

Розв'язання

Користуючись результатами задачі 3.20, швидкість зсуву $\dot{\gamma}_{\mu\nu}$ можна знайти користуючись формулою $\dot{\gamma}_{\mu\nu} = \boldsymbol{\mu} \cdot 2\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}$

$$\dot{\gamma}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{89}{25},$$

де $2\hat{\mathbf{D}} = 2\begin{bmatrix} 6 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 4 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$

Задача 4.19. Дано стаціонарне поле швидкості $v_1 = 2x_3,\ v_2 = 2x_3,\ v_3 = 0.$ Знайти головні напрямки і головні значення тензора швидкості деформації.

Розв'язання

У даному випадку тензор швидкості деформації є таким

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \partial v_1/\partial x_2 & \partial v_1/\partial x_3 \\ \partial v_2/\partial x_1 & \partial v_2/\partial x_2 & \partial v_2/\partial x_3 \\ \partial v_3/\partial x_1 & \partial v_3/\partial x_2 & \partial v_3/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Визначимо його симетричну

$$[D_{ij}] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

та несиметричну складові

$$[V_{ij}] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді головні значення λ тензора D_{ij} знаходяться із характеристичного рівняння вигляду $\left|D_{ij} - \delta_{ij}\lambda\right| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 2\right) = 0,$$

звідки знаходимо $\lambda_{\mathrm{I}} = \sqrt{2},\ \lambda_{\mathrm{II}} = 0,\ \lambda_{\mathrm{III}} = -\sqrt{2}.$

Для знаходження головних напрямків (осей) використаємо систему рівнянь

$$\left(D_{ij}-\lambda_k\delta_{ij}\right)n_j^{(k)}=0, \tag{4.1}$$

для $\lambda_{\mathrm{I}}=\sqrt{2}$ можна записати

$$-\sqrt{2}n_1^{(1)}+n_3^{(1)}=0;$$
$$-\sqrt{2}n_2^{(1)}+n_3^{(1)}=0;$$
$$n_1^{(1)}+n_2^{(1)}-\sqrt{2}n_3^{(1)}=0.$$

Звідки $n_1^{(1)}=n_2^{(1)}=\dfrac{n_3^{(1)}}{\sqrt{2}}$, а оскільки $n_in_i=1$, то

$$\left(\frac{n_3^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{n_3^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(n_3^{(1)}\right)^2=1\to\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)\left(n_3^{(1)}\right)^2=1\to 2\left(n_3^{(1)}\right)^2=1\to n_3^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тому $n_1^{(1)}=\dfrac{1}{2}$, $n_2^{(1)}=\dfrac{1}{2}$, $n_3^{(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Так само, згідно рівняння (4.1), для $\lambda_{\mathrm{II}}=0$ можна записати

$$n_3^{(2)}=0;$$
$$n_3^{(2)}=0;$$
$$n_1^{(2)}+n_2^{(2)}=0.$$

Звідки $n_1^{(2)}=n_2^{(2)}$, $n_3^{(2)}=0$, а оскільки $n_in_i=1$, то $2\left(n_1^{(2)}\right)^2=1\to\left(n_1^{(2)}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

Тому $n_1^{(2)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n_2^{(2)}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n_3^{(2)}=0$.

На кінець, згідно рівняння (4.1), для $\lambda_{\mathrm{III}}=-\sqrt{2}$ можна записати

$$\sqrt{2}n_1^{(1)}+n_3^{(1)}=0;$$
$$\sqrt{2}n_2^{(1)}+n_3^{(1)}=0;$$
$$n_1^{(1)}+n_2^{(1)}+\sqrt{2}n_3^{(1)}=0.$$

Звідки $n_1^{(3)}=n_2^{(3)}=\dfrac{-n_3^{(3)}}{\sqrt{2}}$, а оскільки $n_in_i=1$, то

$$\left(\frac{n_3^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{n_3^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(n_3^{(3)}\right)^2=1\to\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)\left(n_3^{(3)}\right)^2=1\to 2\left(n_3^{(3)}\right)^2=1\to n_3^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тому

$n_1^{(3)}=-\dfrac{1}{2}$, $n_2^{(3)}=-\dfrac{1}{2}$, $n_3^{(3)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Отже матриця перетворення до головних напрямків осей буде мати вигляд

$$[c_{ij}]=\begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Тепер тензор D_{ij} можна перетворити до головних осей (діагональної форми) за формулою $[D_{ij}^*]=[c_{ik}][D_{kp}][c_{pj}]$

$$[D_{ij}^*]=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T=$$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Задача 4.20. Визначити максимальну швидкість зсуву $\dot{\gamma}_{\max}$ для руху, заданого в задачі 4.19.

Розв'язання

З використанням головних значень деформацій задачі 4.19 $\lambda_{\mathrm{I}}=\sqrt{2}$, $\lambda_{\mathrm{II}}=0$, $\lambda_{\mathrm{III}}=-\sqrt{2}$ знайдемо максимальну швидкість зсуву

$$\dot{\gamma}_{\max}=(\lambda_{\mathrm{I}}-\lambda_{\mathrm{III}})/2=\left(\sqrt{2}-\left(-\sqrt{2}\right)\right)/2=\sqrt{2}.$$

Такий самий результат можна отримати, якщо врахувати те, що вказаний рух представляє собою простий зсув, паралельний площині x_1x_2 в напрямку $\mathbf{v}=(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ (рис. 4.1).

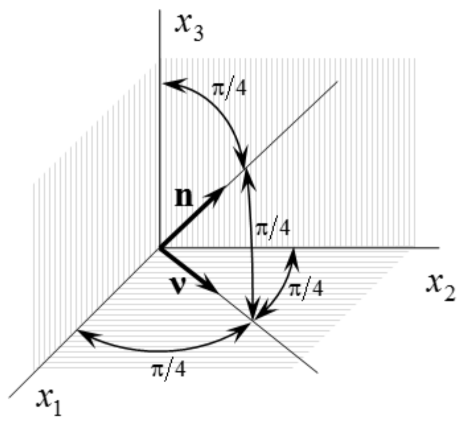


Рис. 4.1. До задачі 4.20

Тому, як і раніше можна записати

$$\dot{\gamma}_{\max} = \dot{\gamma}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,.$$

Слід також відмітити, що максимальна швидкість подовження для даного руху має місце в напрямку $\mathbf{n} = \left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \sqrt{2}\mathbf{e}_3\right)/2$, як було знайдено в задачі 4.19. Таким чином,

$$\lambda_1 = d^{(\mathbf{n})} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,.$$

4.3. Матеріальні похідні від об’єму, площі, інтегралу

Задача 4.21. Обчислити другу похідну за часом від скалярного добутку двох лінійних елементів, тобто знайти $\dfrac{d^2(dx)^2}{dt^2}$.

Розв’язання

Використовуючи формулу $\dfrac{d}{dt}(dx_i) = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k$ і рівність $\dfrac{d}{dt}\left(dx^2\right) = 2d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{x}$ можна записати, що

$$\frac{d\left(dx^2\right)}{dt} = 2D_{ij} dx_i dx_j\,.$$

Тому

$$\frac{d^2\left(dx^2\right)}{dt^2} = 2\left[\frac{dD_{ij}}{dt} dx_i dx_j + D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k dx_j + D_{ij} dx_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx_k\right],$$

Після простої операції з перейменування індексів підсумовування отримаємо

$$\frac{d^2\left(dx^2\right)}{dt^2} = 2\left[\frac{dD_{ij}}{dt} + D_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + D_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right] dx_i dx_j\,.$$

Задача 4.22. Знайти матеріальну похідну $\dfrac{d}{dt}\int\limits_S p_i dS_i$ від потоку деякої векторної величини p_i через поверхню S.

Розв’язання

По формулі

$$\frac{dQ_{ij\dots}(t)}{dt} = \int_S \left[\frac{dQ^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{dt} + \frac{\partial v_q}{\partial x_q} Q^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t) \right] dS_p - \int_S \left[Q^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t) \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right] dS_q,$$ маємо

$$\frac{d}{dt}\int_S p_i dS_i = \int_S \left[\frac{dp_i}{dt} + p_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dS_i - \int_S p_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dS_k =$$

$$= \int_S \left[\frac{dp_i}{dt} + p_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] dS_i .$$

Задача 4.23. Довести, що формулу для похідної від потоку, що отримана в задачі 4.22, можна записати в символічних позначеннях таким чином

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}dS = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{p}) + \nabla\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v}) \right]\cdot\mathbf{n}dS .$$

Розв'язання

Безпосередньо переписуючи в символічних позначеннях результат задачі 4.22, отримуємо

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}dS = \int_S \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{p}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{v} \right]\cdot\mathbf{n}dS =$$

$$= \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{p} + \mathbf{p}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{v} \right]\cdot\mathbf{n}dS.$$

Тепер скористаємося векторною тотожністю (див. задачу 1.65)

$$\nabla\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v}) = \mathbf{p}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{p}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{p} - (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{v}.$$

Тоді можна написати, що

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{n}dS = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{p}) + \nabla\times(\mathbf{p}\times\mathbf{v}) \right]\cdot\mathbf{n}dS .$$

Задача 4.24. Представити теорему Рейнольдса про перенос, що виражена формулами $\frac{d}{dt}\int_V P^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t)dV = \int_V \left[\frac{\partial P^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_p}\left(v_p P^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t) \right) \right] dV$ і $\frac{d}{dt}\int_V P^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t)dV = \int_V \frac{\partial P^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{\partial t} dV + \int_S v_p \left[P^*_{ij\dots}(\mathbf{x},t) \right] dS_p$, в символічних позначеннях.

Розв'язання

Нехай $\mathbf{P}^*(\mathbf{x},t)$ – будь-яка тензорна функція ейлеревих координат і часу. Тоді перше рівняння записується так

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{P}^*(\mathbf{x},t)dV = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\mathbf{P}^*\mathbf{v}\right) \right] dV .$$

По теоремі Гауса-Остроградського цей вираз можна перетворити до співвідношення, яке відповідає другому рівнянню за умовами задачі

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{P}^*(\mathbf{x},t)dV = \int_V \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial t}dV + \int_S \mathbf{P}^*\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS.$$

Задача 4.25. Якщо функція $\mathbf{P}^*(\mathbf{x},t)$ в задачі 4.24 є скалярною величиною, яка дорівнює 1, то інтеграл у лівій частині $\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{P}^*(\mathbf{x},t)dV = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\mathbf{P}^*\mathbf{v}\right)\right]dV$ є просто миттєвий об'єм деякої частини континууму. Знайти матеріальну похідну від цього об'єму.

Розв'язання

Використовуючи векторну форму запису теореми Рейнольдса $\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{P}^*(\mathbf{x},t)dV = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\mathbf{P}^*\mathbf{v}\right)\right]dV$, отримуємо

$$\frac{d}{dt}\int_V dV = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV.$$

Тут $\nabla\cdot\mathbf{v}dV$ являє собою швидкість зміни dV, і тому, $\nabla\cdot\mathbf{v}$ називають швидкістю кубічного розширення. Це співвідношення також можна отримати безпосереднім диференціюванням $dV = JdV_0$.

4.4. Змішані задачі

Задача 4.26. Використовуючи визначення завихреності $\mathbf{q} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$, довести, що $q_i = \varepsilon_{ijk}V_{kj}$ і що $2V_{ij} = \varepsilon_{ijk}q_k$.

Розв'язання

Перетворимо вираз для $\mathbf{q} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ у вигляді суми

$$q_i = \varepsilon_{ijk}v_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\left(v_{[k,j]} + v_{(k,j)}\right),$$

де $v_{[k,j]} = \frac{1}{2}\left(v_{k,j} - v_{j,k}\right)$ – антисиметрична частина тензора – градієнта швидкості $v_{k,j}$, $v_{(k,j)} == \frac{1}{2}\left(v_{k,j} + v_{j,k}\right)$ – симетрична частина $v_{k,j}$.

Оскільки, $\varepsilon_{ijk}v_{(k,j)} = 0$ (див. задачу 1.50), то

$$q_i = \varepsilon_{ijk}v_{[k,j]} = \varepsilon_{ijk}V_{kj},$$

де $V_{kj} = v_{[k,j]}$ – антисиметричний тензор другого рангу.

Звідси, остаточно отримуємо

$$\varepsilon_{irs}q_i = \varepsilon_{irs}\varepsilon_{ijk}V_{kj} = \left(\delta_{rj}\delta_{sk} - \delta_{rk}\delta_{sj}\right)V_{kj} = 2V_{sr}.$$

Задача 4.27. Довести, що прискорення $\mathbf{a}$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{q} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 .$$

Розв'язання

Згідно $a_i = \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$. Звідки отримуємо (спочатку додамо і віднімимо від правої частини $v_k \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}$)

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2 v_k V_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v_k v_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} q_j v_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (v_k v_k)}{\partial x_i},$$

де $\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = V_{ik}$ – антисиметрична частина тензора за визначенням; $v_k \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial (v_k v_k)}{\partial x_i}$ – v_k внесена під знак диференціала; $2 v_k V_{ik} = \varepsilon_{ijk} q_j v_k$ – отримано з використанням результату задачі 4.26 – $2V_{ij} = \varepsilon_{ijk} q_k$ з множенням лівої і правої його частин на v_k.

Перейдемо від індексної форми запису виразу для прискорення вигляду

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} q_j v_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (v_k v_k)}{\partial x_i}$$

до символьної, використаши такі заміни

$$a_i \to \mathbf{a}, \; v_i \to \mathbf{v}, \; \varepsilon_{ijk} q_j v_k \to \mathbf{q} \times \mathbf{v}, \; \frac{1}{2} \frac{\partial (v_k v_k)}{\partial x_i} \to \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2,$$

записуємо

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{q} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 .$$

Задача 4.28. Довести, що $d(\ln J)/dt = \operatorname{div} \mathbf{v}$.

Розв'язання

Напишемо dx_i / dX_P у вигляді $x_{i,P}$, так що

$$J = \varepsilon_{PQR} x_{1,P} x_{2,Q} x_{3,R},$$

і $\dot{J}$ може бути представлено сумою трьох визначників

$$\dot{J} = \varepsilon_{PQR} \left(\dot{x}_{1,P} x_{2,Q} x_{3,R} + x_{1,P} \dot{x}_{2,Q} x_{2,R} + x_{1,P} x_{2,Q} \dot{x}_{3,R} \right).$$

Далі можна записати, що

$$\dot{x}_{1,P} = v_{1,S} x_{S,P}, \; \dot{x}_{2,Q} = v_{2,S} x_{S,Q}, \; \dot{x}_{3,P} = v_{3,S} x_{S,R} .$$

Тут виконано такі перетворення

$$\dot{x}_{1,P}=\frac{dx_1}{dX_p}\Big/dt=\frac{dx_S}{dx_S}\left(\frac{dx_1}{dX_p}\Big/dt\right)=\left[\left(\frac{dx_1}{dx_S}\right)\Big/dt\right]\frac{dx_S}{dX_p}=v_{1,S}x_{S,P}$$ і так далі.

Тому

$$\dot{J}=\varepsilon_{PQR}\left(v_{1,S}x_{S,P}x_{2,Q}x_{3,R}+x_{1,P}v_{2,S}x_{S,Q}x_{2,R}+x_{1,P}x_{2,Q}v_{3,S}x_{S,R}\right).$$

З дев'яти визначників третього порядку, що отримано під час підсумовування останнього виразу по S, тільки три відмінні від нуля. Таким чином, враховуючи те, що $J=\varepsilon_{PQR}x_{1,P}x_{2,Q}x_{3,R}$, можна переписати останній вираз для $\dot{J}$

$$\dot{J}=v_{1,1}J+v_{2,2}J+v_{3,3}J=v_{S,S}J,\text{ або } \dot{J}=J(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

і, відповідно, отримуємо

$$\dot{J}=J(\nabla\cdot\mathbf{v})\rightarrow\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}=\nabla\cdot\mathbf{v}\rightarrow\frac{d(\ln J)}{dt}=\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Задача 4.29. Довести, що за умови усталеного руху середовища $\frac{\partial v_i}{\partial t}=0$ лінії току і траєкторії співпадають.

Розв'язання

Як було показано в задачі 4.7, лінії току в будь-який момент часу t є розв'язками диференціальних рівнянь $\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3}$, а траєкторії – розв'язками диференціальних рівнянь $\frac{dx_i}{dt}=v_i(\mathbf{x},t)$. Якщо $v_i=v_i(\mathbf{x})$, то рівняння траєкторій приймають вигляд

$$dt=\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\frac{dx_3}{v_3}$$

і, відповідно, співпадають з рівняннями ліній току.

Задача 4.30. Для стаціонарного поля швидкості $v_1=x_1^2x_2+x_2^3$, $v_2=-x_1^3-x_1x_2^2$, $v_3=0$ знайти головні значення деформації $\hat{\mathbf{D}}$ у довільній точці $P(x_1,x_2,x_3)$.

Розв'язання

За формулою $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=D_{ij}+V_{ij}$ визначимо градієнт швидкості і його складові – симетричну і антисиметричну

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\begin{pmatrix}2x_1x_2 & x_1^2+3x_2^2 & 0\\ -3x_1^2-x_2^2 & -2x_1x_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2x_1x_2 & x_1^2+3x_2^2 & 0\\ -3x_1^2-x_2^2 & -2x_1x_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\right.$$

$$
+\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & -3x_1^2-x_2^2 & 0 \\ x_1^2+3x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Bigg]+\frac{1}{2}\Bigg[\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2+3x_2^2 & 0 \\ -3x_1^2-x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-
$$

$$
-\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & -3x_1^2-x_2^2 & 0 \\ x_1^2+3x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Bigg]=\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & -x_1^2+x_2^2 & 0 \\ -x_1^2+x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+
$$

$$
+\begin{pmatrix} 0 & 2\left(x_1^2+x_2^2\right) & 0 \\ -2\left(x_1^2+x_2^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Головні значення $d_{(i)}$ є розв'язками характеристичного рівняння $\left|D_{ij}-\delta_{ij}d\right|=0$

$$
\begin{vmatrix} 2x_1x_2-d & -x_1^2+x_2^2 & 0 \\ -x_1^2+x_2^2 & -2x_1x_2-d & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{vmatrix}=-d\left[-4x_1^2x_2^2+d^2-\left(x_1^2-x_2^2\right)^2\right]= .
$$

$$
=d\left(x_1^2+x_2^2+d\right)\left(x_1^2+x_2^2-d\right)=0
$$

Звідки

$$
d_{(1)}=0,\ d_{(2)}=-\left(x_1^2+x_2^2\right),\ d_{(3)}=\left(x_1^2+x_2^2\right).
$$

Отримані значення можна упорядкувати по мірі їх убування

$$
d_{\mathrm{I}}=x_1^2+x_2^2,\ d_{\mathrm{II}}=0,\ d_{\mathrm{III}}=-\left(x_1^2+x_2^2\right).
$$

Задача 4.31. Довести рівність

$$
\frac{d}{dt}\left(dS_i\right)=\frac{d}{dt}\left(J\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)dX_j=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}dS_i-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dS_j,
$$

використавши обчислення матеріальної похідної від площі dS_i з використанням векторного добутку $dS_i=\varepsilon_{ijk}dx_j^{(2)}dx_k^{(3)}$.

Розв'язання

Використовуючи формулу $dx_i=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}dX_j$, отримаємо

$$
dS_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial X_2}dX_2\frac{\partial x_k}{\partial X_3}dX_3 \text{ і}
$$

$$
\frac{\partial x_i}{\partial X_1}dS_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial X_1}\frac{\partial x_j}{\partial X_2}\frac{\partial x_k}{\partial X_3}dX_2dX_3=JdX_2dX_3.
$$

Таким чином,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\frac{\partial x_i}{\partial X_1}dS_i = \delta_{ip}dS_i = dS_p = \frac{\partial X_1}{\partial x_p}JdX_2dX_3,$$

і, враховуючи результат задачі 4.28, знаходимо

$$\frac{dS_p}{dt} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}J\frac{\partial v_p}{\partial x_q} - J\frac{\partial X_1}{\partial x_q}\frac{\partial v_q}{\partial x_p}\right)dX_2dX_3 =$$

$$= \left(\varepsilon_{pjk}\frac{\partial x_j}{\partial X_2}dX_2\frac{\partial x_k}{\partial X_3}dX_3\right)\frac{\partial v_q}{\partial x_q} - \left(\varepsilon_{qjk}\frac{\partial x_j}{\partial X_2}dX_2\frac{\partial x_k}{\partial X_3}dX_3\right)\frac{\partial v_q}{\partial x_p} =$$

$$= \left(\frac{\partial v_q}{\partial x_q}\right)dS_p - \left(\frac{\partial v_q}{\partial x_p}\right)dS_q.$$

Задача 4.32. Використовуючи результати задач 4.27 і 4.23, довести, що матеріальна швидкість зміни потоку завихреності, тобто похідна $\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS$, дорівнює потоку вектора rot від прискорення $\mathbf{a}$.

Розв'язання

Застосуємо операцію rot до виразу прискорення, що отримано в задачі 4.27,

$$\nabla\times\mathbf{a} = \nabla\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\times(\mathbf{q}\times\mathbf{v}) + \nabla\times\nabla\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$$

і врахуємо при цьому, що $\mathbf{q} = \nabla\times\mathbf{v}$ і $\nabla\times\nabla\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = 0$. Тоді

$$\nabla\times\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \nabla\times(\mathbf{q}\times\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{q}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{v}.$$

Якщо в формулу задачі 4.23 замість $\mathbf{p}$ підставити $\mathbf{q}$, то отримаємо потрібний результат

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS = \int_S\left[\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]\cdot\mathbf{n}dS = \int_S(\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}dS.$$

Задача 4.33. Довести, що для вектора завихреності $\mathbf{q}$ має місце рівність

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V q_i dV = \int_S\left[\varepsilon_{ijk}a_k + q_jv_i - q_iv_j\right]dS_j.$$

Розв'язання

Тотожність задачі 4.32 $\nabla\times\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \nabla\times(\mathbf{q}\times\mathbf{v})$ можна переписати в індексній формі

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} a_{k,j} - \varepsilon_{isp}\left(\varepsilon_{pmr} q_m v_r\right)_{,s}.$$

Тоді

$$\int_V \frac{\partial q_i}{\partial t} dV = \int_V \left[\varepsilon_{ijk} a_{k,j} - \left(\varepsilon_{isp}\varepsilon_{pmr} q_m v_r\right)_{,s}\right] dV.$$

Скориставшись теоремою Гауса-Остроградського, отримуємо

$$\int_V \frac{\partial q_i}{\partial t} dV = \int_S \varepsilon_{ijk} a_k dS_j - \int_S \left(\delta_{im}\delta_{sr} - \delta_{ir}\delta_{sm}\right)\left(q_m v_r\right) dS_S =$$

$$= \int_S \left[\varepsilon_{ijk} a_k + q_j v_i - q_i v_j\right] dS_j.$$

Задача 4.34. Ввести просторову систему координат і лагранжеві координати частинок та знайти закон руху в таких випадках:

а) тверде тіло рухається поступально з постійною швидкістю за напрямком та величиною *v*;

б) тверде тіло обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю ω.

Розв'язання

Введемо в просторі декартову систему координат (x_1, x_2, x_3). За лагранжеві координати частинки візьмемо координати (X_1, X_2, X_3) точки простору, в якому частинка знаходилась в момент часу $t = 0$.

а) Нехай вісь x_1 направлена за вектором швидкості v. Рух полягає в перенесенні тіла в напрямку осі x_1 на відстань vt. Тоді закон руху можна записати у вигляді

$$x_1 = vt + X_1,\ x_2 = X_2,\ \ x_3 = X_3,$$

що і треба було знайти.

б) Перший розв'язок. Нехай вісь x_3 направлена вздовж осі обертання, яка є нерухомою в просторі. Тоді рух полягає в повороті навколо неї на кут ωt. Перетворення вектору початкового положення частинки у вектор її положення в момент часу t здійснюється при такому повороті ортогональної матриці

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

Тому закон руху має вигляд (в результаті добутку матриці на вектор)

$$x_1 = X_1 \cos\omega t - X_2 \sin\omega t,\ x_2 = X_1 \sin\omega t + X_2 \cos\omega t,\ x_3 = X_3.$$

Другий розв'язок. Відповідність $F \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$ векторів евклідового простору і трійок чисел не обов'язково встановлюється у вигляді

$$a_1 = x_1,\ a_2 = x_2,\ a_3 = x_3,$$

де (x_1, x_2, x_3) – компоненти радіуса-вектору $\mathbf{r}$ в декартовій системі координат.

Наприклад, можна використовувати циліндричні координати

$$x_1 = R,\ x_2 = \varphi,\ x_3 = z,$$

де R – відстань від кінця вектору $\mathbf{r}$ до осі x_3; φ – кут між площиною, яка проходить через $\mathbf{r}$ і вісь x_3, і площиною x_1Ox_3; $z = x_3$. При обертанні навколо осі x_3 циліндричні координати R і z частинки очевидно не змінюються, а координата φ змінюється за час t на величину ωt, якщо кутова швидкість постійна. Тому закон руху в циліндричних координатах має вигляд

$$R = R_0,\ \varphi = \omega t + \varphi_0,\ z = z_0,$$

тут (R_0, φ_0, z_0) – лагранжеві координати частинки.

Таким чином, декартова система координат не завжди є зручною.

Задача 4.35. Рух середовища відбувається з полем швидкості

$$v_1 = kx_1,\ v_2 = -kx_2,\ v_3 = 0,\ k = \text{const}$$

і полем густини

$$\rho = \rho_0 A x_2 e^{kt},\ \rho_0, A = \text{const}.$$

Знайти швидкість зміни густини в кожній із частинок середовища.

Розв'язання

Напишемо рівняння нерозривності

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

У декартовій системі координат рівняння нерозривності приймає вигляд

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3} = -\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right).$$

Звідки нескладно визначити $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ – швидкість зміни густини

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left(v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}\right) - \rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right).$$

Спочатку знайдемо похідні за координатами

$$v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} = kx_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho_0 A x_2 e^{kt}\right) = 0,$$

$$v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2} = -kx_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho_0 A x_2 e^{kt}\right) = -kx_2\rho_0 A e^{kt},$$

$$v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3} = 0\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho_0 A x_2 e^{kt}\right) = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)=\rho\left(\frac{\partial(kx_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(-kx_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(0)}{\partial x_3}\right)=$$
$$=\rho(k-k+0)=0.$$

Тоді, після підстановки отриманих виразів похідних, отримуємо вираз для швидкості зміни густини в кожній із частинок середовища

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(0-kx_2\rho_0 Ae^{kt}+0\right)-0=kx_2\rho_0 Ae^{kt},$$

що і треба було знайти.

Задача 4.36. Скалярне поле $\operatorname{div}\mathbf{v}$, яке в декартовій системі координат $\left(x'^i\right)$ знаходиться за формулою

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial v'^i}{\partial x'^i},$$

називається дивергенцією векторного поля $\mathbf{v}$.

Покажіть, що в будь-якій системі координат $\left(x^i\right)$ мають місце такі формули:

а) $\operatorname{div}\mathbf{v}=\nabla_i v^i$;

тому природно використовувати позначення $\operatorname{div}\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{v}$, де ∇ – «вектор» з коваріантними компонентами ∇_i;

б) $\nabla_i v^i=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\left(\sqrt{g}v^i\right)}{\partial x^i}$.

Розв'язання

а) Нехай маємо векторне поле швидкості

$$\mathbf{v}=v_i(x_1,x_2,x_3,t)\mathbf{e}_i,$$

оператор «набла» дає такі величини

$$\nabla_i v_i=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\partial_i v_i=v_{i,i},\ i=1,2,3,$$

або

$$\nabla_k v_i=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\partial_k v_i=v_{i,k}\ i,k=1,2,3,$$

які дозволяють їх розглядати як компоненти тензора 2-го рангу, який називається векторним градієнтом швидкості

$$\nabla'_k v'_i=\frac{\partial v'_i}{\partial x'_k}=\frac{\partial\left(v_j\alpha_{ij}\right)}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x'_k}=\alpha_{ij}\alpha_{km}\frac{\partial v_j}{\partial x_m}=\alpha_{ij}\alpha_{km}\nabla_m v_j.$$

Згортка цього тензора дає скаляр у вигляді дивергенції векторного поля

$$\nabla_k v_k=\nabla_i v^i=\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

б) Символи Кристофеля в ортогональних системах координат можна записати як

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}, \qquad (4.2)$$

де g – визначник матриці $\|g_{ij}\|$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\det\|g_{ij}\| = g_{11}g_{22}g_{33}$.

Приведемо доведення формули (4.2) для довільної системи координат. Маємо, що

$$g = \left|g_{ij}\right| = \left|\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right)\right| \text{ і } \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\omega}_{k\beta}\mathbf{e}_{\omega}.$$

При складанні похідної $\dfrac{\partial g}{\partial x^{\beta}}$ треба диференціювати в кожному елементі детермінанта g скалярний добуток двох векторів $\mathbf{e}_i$ та $\mathbf{e}_j$.

При диференціюванні першого фактору $\mathbf{e}_i$ отримуємо три детермінанта, в кожному з яких члени одного рядка з номером i замінені членами $\Gamma^{\omega}_{i\beta}g_{\omega j}$. Легко бачити, що кожний із цих детермінантів дорівнює $\Gamma^{i}_{i\beta}g$, де i – фіксований індекс, який дорівнює номеру відповідного рядка. (Детермінанти при фіксованих $\omega \neq i$ дорівнюють нулю.) Сума трьох детермінантів дорівнює $\sum_{i=1}^{3}\Gamma^{i}_{i\beta}g$. Із симетрії g_{ij} очевидно, що при диференціюванні других факторів $\mathbf{e}_j$ буде отримана точно така ж сума.

Звідси витікає, що

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = 2g\Gamma^{i}_{i\beta},$$

причому в цій формулі за індексом i проводиться підсумовування.

Тоді вираз для дивергенції будь-якого вектору у довільній системі координат можна тепер записати таким чином

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla_{\alpha}v^{\alpha} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + v^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{v^{\beta}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial v^{\alpha}\sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}},$$

або, замінюючи індекс α на i, отримуємо

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}v^i\right)}{\partial x^i},$$

що і треба було довести.

Задача 4.37. В результаті переміщення із початкового стану частинки середовища $(X_1;\ X_2;\ X_3)$ перемістилися в точки з матеріальними координатами (координати Лагранжа)

$$x_i = X_i + aX_i, \quad i = 1,2,3, \quad a = \text{const} > 1$$

відносно просторової декартової системи координат (координати Ейлера).

Показати, що відносне подовження всіх матеріальних елементів однаково, тому така деформація називається всебічним розтягом або стисканням. При яких значеннях a буде відбуватись розтягування, а при яких – стискання?

Розв'язання

Переміщення частинки середовища буде визначатись як різниця між просторовими і початковими координатами

$$u_i = x_i - X_i = X_i + aX_i - X_i = aX_i, \quad i = 1,2,3. \tag{4.3}$$

Лагранжевий (нелінійний) тензор деформації або тензор деформації Гріна визначається співвідношенням

$$2\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}.$$

В нашому випадку диференціюючи (4.3) маємо, що

$$2\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = (a + a + aa)\delta_{ij} = \left(2a + a^2\right)\delta_{ij}. \tag{4.4}$$

Для визначення відносного подовження скористаємося формулою

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\, dX_i dX_j,$$

де ds і ds_0 довжина матеріального елемента до і після деформації.

Звідки відносне подовження тіла буде дорівнювати

$$\sqrt{1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\, d_i d_j} - 1, \tag{4.5}$$

де d_i – компоненти одиничного вектору, які мають той самий напрям, що і $d\xi_i$.

Після підстановки (4.4) у вираз (4.5), отримуємо

$$\sqrt{1 + 2a + a^2} - 1 = \sqrt{(1 + a)^2} - 1 = 1 + a - 1 = a.$$

З останнього виразу витікає, що відносне подовження всіх матеріальних елементів однаково, і така деформація називається всебічним розтягом або стисканням. У випадку коли $a > 1$ виникає розтягування, а при $a < 1$ – стискання.

Задача 4.38. Розподіл швидкості в твердому тілі визначається формулою Ейлера

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Omega \times \mathbf{r},$$

де $\Omega(t)$ – кутова швидкість; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор відносно деякої точки *O*; $\mathbf{v}_0(t)$ – швидкість точки *O*.

Обчислити вектор вихору для такого поля швидкості.

Розв'язання

Вектор вихору визначається за формулою

$$\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

Ротор вектору визначається за формулою

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = [\nabla\times\mathbf{v}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ v_z & v_x \end{vmatrix}\mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\mathbf{e}_z =$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

або

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = [\nabla\times\mathbf{v}]_k = \varepsilon_{kij}\nabla_k v_j,$$

де ε_{kij} – компоненти тензора Леві-Чивіти.

Спочатку визначимо векторний добуток $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$. Вектори можна записати у вигляді

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{\Omega} = 0\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + \Omega\mathbf{e}_z.$$

Тоді

$$\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \Omega \\ y & z \end{vmatrix}\mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} \Omega & 0 \\ z & x \end{vmatrix}\mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}\mathbf{e}_z = \tag{4.6}$$

$$= (0-\Omega y)\mathbf{e}_x + (\Omega x - 0)\mathbf{e}_y + (0-0)\mathbf{e}_z = -\Omega y\mathbf{e}_x + \Omega x\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z.$$

Використовуючи (4.6), розподіл швидкості в твердому тілі можна записати у вигляді

$$\mathbf{v} = (v_{0x} - \Omega y)\mathbf{e}_x + (v_{0y} + \Omega x)\mathbf{e}_y + (v_{0z} + 0)\mathbf{e}_z.$$

Тепер можна визначити ротор

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = [\nabla\times\mathbf{v}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (v_{0x} - \Omega y) & (v_{0y} + \Omega x) & (v_{0z} + 0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (v_{0y} + \Omega x) & (v_{0z} + 0) \end{vmatrix}\mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ (v_{0z} + 0) & (v_{0x} - \Omega y) \end{vmatrix}\mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ (v_{0x} - \Omega y) & (v_{0y} + \Omega x) \end{vmatrix}\mathbf{e}_z =$$

$$= 0\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + (\Omega - (-\Omega))\mathbf{e}_z = 0\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + 2\Omega\mathbf{e}_z.$$

Тоді вектор вихору

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(0\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + 2\Omega\mathbf{e}_z\right) \text{ або } |\boldsymbol{\omega}| = \Omega,$$

що і треба було обчислити.

Задача 4.39. Вивести рівняння нерозривності в змінних Ейлера:

а) в циліндричній системі координат;

б) в сферичній системі координат.

Розв'язання

У довільній системі координат справедлива формула

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial v^m\sqrt{g}}{\partial x^m}, \quad g = \det\left\|g_{ij}\right\|.$$

В ортогональній системі координат $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$, тому $\det\left\|g_{ij}\right\| = g_{11}g_{22}g_{33}$.

Фізичні компоненти v_Φ^m або $\tilde{v}^m$ вектору $\mathbf{v}$, які позначимо для зручності через u^m, визначаються за формулами

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i = u^i\mathbf{e}_i/|\mathbf{e}_i|; \; u^m = v^m\sqrt{g_{mm}},$$

тут підсумовування за m немає.

В ортогональній системі координат рівняння нерозривності має вигляд

$$\sqrt{g}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\sqrt{g_{22}g_{33}}u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\rho\sqrt{g_{11}g_{33}}u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho\sqrt{g_{11}g_{22}}u^3}{\partial x^3} = 0. \qquad (4.7)$$

а) В циліндричній системі координат (рис. 4.2) маємо, що $x^1 = r, \; x^2 = \varphi, \; x^3 = z$, а $u^1 = u_r, \; u^2 = u_\varphi, \; u^3 = u_z$

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi + dz^2$, (скалярний добуток $ds \cdot ds$, де $ds = dr + rd\varphi + dz$) – елементарна відстань між точками суцільного середовища в циліндричній системі координат.

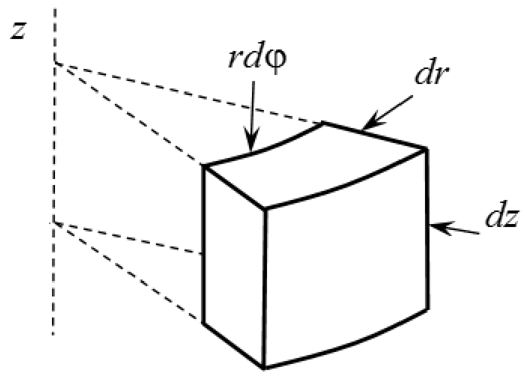


Рис. 4.2. Циліндрична система координат

Модулі базисних коваріантних векторів дорівнюють

$|\mathbf{e}_1| = 1,\ |\mathbf{e}_2| = r,\ |\mathbf{e}_3| = 1,$

тобто

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = 1,\ g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,\ g = \det\|g_{ij}\| = r^2. \qquad (4.8)$$

Тому рівняння нерозривності в циліндричній системі координат отримується з (4.7) з врахуванням (4.8) і приймає вигляд

$$\sqrt{r^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\sqrt{r^2\cdot 1}u_r}{\partial r} + \frac{\partial\rho\sqrt{1\cdot 1}u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\rho\sqrt{1\cdot r^2}u_z}{\partial z} = 0,$$

$$r\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho r u_r}{\partial r} + \frac{\partial\rho u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\rho r u_z}{\partial z} = 0.$$

б) В сферичній системі координат (рис. 4.3) маємо, що $x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \lambda,$($\theta$ – широта, λ –довгота), а $u^1 = u_r,\ u^2 = u_\theta,\ u^3 = u_\lambda$, квадрат елементарної відстані між точками суцільного середовища в сферичній системі координат

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta + r^2\sin^2\theta d\lambda,$$

(скалярний добуток $ds \cdot ds$, де $ds = dr + r d\theta + r\sin\theta d\lambda$).

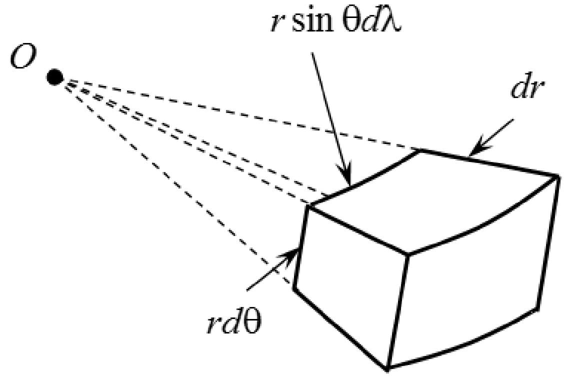


Рис. 4.3. Сферична система координат

Модулі базисних коваріантних векторів дорівнюють

$|\mathbf{e}_1| = 1,\ |\mathbf{e}_2| = r,\ |\mathbf{e}_3| = r\sin\theta,$

тобто

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2\sin^2\theta,\ g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,\quad g = \det\|g_{ij}\| = r^4\sin^2\theta.$$

(4.9)

Тому рівняння нерозривності в сферичній системі координат отримується із (4.7) з урахуванням (4.9) і має вигляд

$$\sqrt{r^4\sin^2\theta}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho\sqrt{r^4\sin^2\theta}u_r}{\partial r} + \frac{\partial\rho\sqrt{1\cdot r^2\sin^2\theta}u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\rho\sqrt{1\cdot r^2}u_\lambda}{\partial\lambda} = 0,$$

$$r^2\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sin\theta\frac{\partial\rho u_r r^2}{\partial r} + r\frac{\partial\rho u_\theta\sin\varphi}{\partial\theta} + r\frac{\partial\rho u_\lambda}{\partial\lambda} = 0.$$

4.5. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 4.40. Дано закон руху середовища $x_1 = X_1 e^t + X_3\left(e^t - 1\right)$, $x_2 = X_2 e^t + X_3\left(e^t - e^{-t}\right)$, $x_3 = X_3$. Показати, що $J \neq 0$, і знайти компоненти швидкості.

Відповідь: $v_1 = \left(X_1 + X_3\right)e^t$, $v_2 = X_3\left(e^t + e^{-t}\right)$, $v_3 = 0$, або $v_1 = x_1 - x_3$, $v_2 = x_3\left(e^t + e^{-t}\right)$, $v_3 = 0$.

Задача 4.41. Поле швидкості задано в змінних Лагранжа $v_1 = -X_2 e^{-t}$, $v_2 = -X_3$, $v_3 = 2t$. Знайти компоненти прискорення в ейлеревій формі.

Відповідь: $a_1 = e^{-t}\left(x_2 + tx_3 - t^3\right)$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$.

Задача 4.42. Довести, що поле швидкості $v_i = \varepsilon_{ijk} b_j x_k + c_i$, де b_i і c_i – сталі вектори, що представляє обертання абсолютно твердого тіла, і визначити вектор вихору швидкості Ω_i для цього руху.

Відповідь: $2\Omega_i = q_i = b_i x_{j,j} - b_i = 2b_i$.

Задача 4.43. Довести, що для течії $v_i = x_i / (1 + t)$ лінії току і траєкторії співпадають.

Задача 4.44. Напруженість електричного поля в області, що займає рухома рідина, дорівнює $\lambda = \left(A\cos 3t\right)/r$, де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ і A – стала. Швидкість рідини задана компонентами $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$. Знайти $d\lambda/dt$ в точці $P\left(x_1, x_2, x_3\right)$.

Відповідь: $d\lambda/dt = \left(-3A\sin 3t\right)/r$.

Задача 4.45. Довести, що для поля швидкості $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2$, $v_3 = 0$ лінії току будуть колами.

Задача 4.46. Дано закон руху суцільного середовища $x_1 = X_1$, $x_2 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 + e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2$, $x_3 = e^t\left(X_2 + X_3\right)/2 - e^{-t}\left(X_2 - X_3\right)/2$. Довести, що $D_{ij} = d\varepsilon_{ij}/dt$ за умови $t = 0$. Порівняти ці ж тензори за умови $t = 0{,}5$.

Задача 4.47. За заданим полем швидкості $v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^3$, $v_2 = -\left(x_1^3 + x_1 x_2^2\right)$, $v_3 = 0$ знайти головні осі і головні значення тензора $\hat{\mathbf{D}}$ в точці $P(1, 2, 3)$.

Відповідь: $D_{ij}^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; $c_{ij} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 4.48. Для поля швидкості задачі 3.41 визначити швидкість подовження матеріального відрізка в напрямку $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)/3$ в точці $P(1, 2, 3)$. Яка максимальна швидкість зсуву в точці P?

Відповідь: $d^{(\mathbf{v})} = -24/9$; $\dot{\gamma}_{\max} = 5$.

Задача 4.49. Довести, що $d(\partial x_i / \partial X_j)/dt = v_{i,k} x_{k,j}$, і, використовуючи цю рівність отримати формулу $\dfrac{d}{dt}(dV) = \dfrac{dv_i}{dx_i} dV$ безпосередньо з $dV = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial x_i}{\partial X_1} \dfrac{\partial x_j}{\partial X_2} \dfrac{\partial x_k}{\partial X_3} dX_1 dX_2 dX_3 = J dV_0$.

Задача 4.50. Довести тотожність
$1/2 \varepsilon_{pqr} (v_s v_{r,s})_{,q} = \Omega_p v_{q,q} + v_q \Omega_{p,q} - \Omega_q v_{p,q}$, де v_i – швидкість, а Ω_i – вектор вихору швидкості. Також показати, що $v_{i,j} v_{j,i} = D_{ij} D_{ij} - 2\Omega_i \Omega_i$.

Задача 4.51. Довести, що матеріальна похідна від сумарної завихреності обчислюється за формулою

$$\frac{d}{dt} \int_V q_i dV = \int_S [\varepsilon_{ijk} a_k + q_j v_i] dS_j .$$

5. ОСНОВНІ ЗАКОНИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

5.1. Рівняння нерозривності

Задача 5.1. Відомо, що за умови безвихрового поля, вектор вихору швидкості дорівнює нулю. Знайти вигляд рівняння нерозривності для такого руху.

Розв'язання

Згідно $\mathbf{q} = \vec{\nabla} \times \mathbf{v}$, $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, якщо $\mathbf{q} = 0$, і, відповідно, $\mathbf{v}$ стає градієнтом скалярного поля $\varphi(x_i, t)$ (див. задачу 1.50). Таким чином, $v_i = \varphi_{,i}$ і рівняння нероривності $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0$ набуває вигляду $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\varphi_{,kk} = 0$ або $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\nabla^2\varphi = 0$.

Задача 5.2. Нехай функція $P^{**}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)$ представляє будь-яку скалярну, векторну або тензорну величину, що віднесена до одиниці маси суцільного середовища, так що $P^{*}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t) = \rho P^{**}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)$. Показати, що

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho P^{**}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, dV = \int_V \rho \frac{dP^{**}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)}{dt} dV .$$

Розв'язання

За формулою

$$\frac{d}{dt}\int_V P^{*}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\, dV = \int_V \left[\frac{dP^{*}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)}{dt} + P^{*}_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dV ,$$

отримуємо

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho P^{**}_{ij\ldots}\, dV = \int_V \left[\frac{d}{dt}\left(\rho P^{**}_{ij\ldots}\right) + \rho P^{**}_{ij\ldots}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] dV =$$

$$= \int_V \left[\rho\frac{dP^{**}_{ij\ldots}}{dt} + P^{**}_{ij\ldots}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right] dV = \int_V \rho \frac{dP^{**}_{ij\ldots}}{dt} dV,$$

оскільки $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0$.

Задача 5.3. Довести, що лагранжева форма $\dfrac{d}{dt}(\rho J) = 0$ рівняння нерозривності і ейлерева його форма $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0$ еквівалентні.

Розв’язання

Виконаємо диференціювання $\frac{d}{dt}(\rho J) = \frac{d\rho}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} = 0$ і скористуємося результатом задачі 4.28 $\frac{dJ}{dt} = Jv_{k,k}$. В результаті отримуємо, що

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = \frac{d\rho}{dt} J + \rho J v_{k,k} = J\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k}\right) = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0.$$

Задача 5.4. Показати, що компоненти швидкості $v_i = \frac{Ax_i}{r^3}$, де $x_i x_i = r^2$ і A – довільна стала, задовольняють рівнянню нерозривності нестисливої рідини.

Розв’язання

Згідно $\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0$ для нестисливої рідини, для якої $\frac{d\rho}{dt} = 0$, отримуємо $v_{k,k} = 0$ або $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Визначимо градієнт швидкості за умовами задачі

$$v_{i,k} = \left(\frac{Ax_i}{r^3}\right)_{,k} = A\left(\frac{x_{i,k}}{r^3} - 3\frac{x_i x_k}{r^5}\right) = A\left(\frac{\delta_{ik}}{r^3} - 3\frac{x_i x_k}{r^5}\right),$$

де $x_{i,k} = \delta_{ik}$.

Тоді для дивергенції швидкості $v_{k,k}$ можна записати

$$v_{k,k} = A\left(\frac{\delta_{kk}}{r^3} - 3\frac{x_k x_k}{r^5}\right) = A\left(\frac{\delta_{kk}}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5}\right) = A\left(\frac{\delta_{kk}}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right) = \frac{A}{r^3}(3-3) = 0,$$

де $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1+1+1 = 3$, $x_k x_k = r^2$ – за умовами задачі.

Оскільки доведено $v_{k,k} = 0$, то рівняння нерозривності нестисливої рідини задовольняється.

Задача 5.5. Для поля швидкості $v_i = \frac{x_i}{1+t}$ показати, що $\rho x_1 x_2 x_3 = \rho_0 X_1 X_2 X_3$.

Розв’язання

В цьому випадку маємо, що дивергенція швидкості

$$v_{k,k} = \frac{3}{1+t},$$

оскільки градієнт швидкості $v_{i,k} = \frac{x_{i,k}}{1+t} = \frac{\delta_{ik}}{1+t}$, а $v_{k,k} = \frac{\delta_{kk}}{1+t}$ і $\delta_{kk} = 3$.

Виконаємо інтегрування рівняння нерозривності $\dfrac{d\rho}{dt}+\rho v_{k,k}=0$ з врахуванням отриманого виразу для дивергенції швидкості , отримаємо

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{3}{1+t}=0\to\int\frac{d\rho}{\rho}=-3\int\frac{dt}{1+t}\to\ln\rho=-\ln(1+t)^3+\ln C\to\ln\rho=\ln\frac{C}{(1+t)^3},$$

де C – стала інтегрування.

Оскільки, $\rho=\rho_0$ за умови $t=0$, то $\ln\rho_0=\ln C\to C=\rho_0$. Тоді

$$\ln\rho=\ln\frac{\rho_0}{(1+t)^3}\to\rho=\frac{\rho_0}{(1+t)^3}.$$

Далі, інтегруючи рівняння $\dfrac{dx_i}{x_i}=\dfrac{dt}{(1+t)}$ (тут підсумовування за i не виконується), знаходимо, що

$$\int\frac{dx_i}{x_i}=\int\frac{dt}{(1+t)}\to\ln x_i=\ln(1+t)+\ln C\to\ln x_i=\ln[C(1+t)].$$

За умови $t=0\to x_i=X_i$, то $\ln X_i=\ln C\to C=X_i$. Тоді

$$x_i=X_i(1+t),$$

звідки витікає

$$\rho x_1x_2x_3=\frac{\rho_0}{(1+t)^3}X_1(1+t)X_3(1+t)X_3(1+t)=\rho_0X_1X_2X_3,$$

тобто

$$\rho x_1x_2x_3=\rho_0X_1X_2X_3.$$

5.2. Кількість руху і момент кількості руху. Рівняння руху

Задача 5.6. Безпосереднім розкладанням обох частин тотожності $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}\mathbf{e}_i=\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v$, що використовується в формулах $\int\limits_V\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}dV=0$ і $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}=0$, довести її справедливість.

Розв'язання

Згідно $\hat{\mathbf{D}}_v=\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}_2+...+\mathbf{a}_N\times\mathbf{b}_N$ і $\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\\sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{pmatrix}$ можемо виконати такі перетворення

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_v=\sigma_{11}\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1+\sigma_{12}\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2++\sigma_{13}\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3+\cdots+\sigma_{33}\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3=$$
$$=(\sigma_{23}-\sigma_{32})\mathbf{e}_1+(\sigma_{31}-\sigma_{13})\mathbf{e}_2+(\sigma_{12}-\sigma_{21})\mathbf{e}_3.$$

Розкриваючи $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}$, приходимо до таких самих виразів: $\sigma_{23}-\sigma_{32}$ для $i=1$, $\sigma_{31}-\sigma_{13}$ для $i=2$, $\sigma_{12}-\sigma_{21}$ для $i=3$. Що і треба було довести.

Тут використано тензор Леві-Чивіти ε_{ijk}, значення компонент якого такі:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\\ \varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=-1,\end{array}\right. \text{решта} = 0.$$

Задача 5.7. Нехай на континуум діють розподілені масові моменти (m_i на одиницю об'єму). Довести, що рівняння руху $\sigma_{ji,j}+\rho b_i=\rho\dot{v}_i$ лишаються чинними, але тензор напруження перестає бути симетричним.

Розв'язання

Рівняння руху отримано з умови рівноваги сил, тому наявність моментів на них не впливає. Однак в $\int_S \varepsilon_{ijk}x_j t_k^{(\mathbf{n})}dS+\int_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho b_k dV=\dfrac{d}{dt}\int_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k dV$ з'являються додаткові члени, так що

$$\frac{d}{dt}\int_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k dV=\int_S \varepsilon_{ijk}x_j t_k^{(\mathbf{n})}dS+\int_V\left(\varepsilon_{ijk}x_j\rho b_k+m_i\right)dV.$$

Отримане рівняння можна звести до рівності вигляду $\int_V\left(\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}+m_i\right)dV=0$ (див. задачу 2.9), і внаслідок довільності об'єму V в даному випадку буде виконуватися співвідношення

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}+m_i=0.$$

Задача 5.8. Теорема про зміну кількості руху в диференціальній формі виражається рівнянням $\dfrac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}=\rho b_i+\left(\sigma_{ij}-\rho v_i v_j\right)_{,j}$. Довести, що рівняння руху $\sigma_{ji,j}+\rho b_i=\rho\dot{v}_i$ витікає з цього рівняння.

Розв'язання

Виконуючи вказане диференціювання та перегрупування членів, отримуємо

$$v_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_{,j}v_j+\rho v_{j,j}\right)+\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j v_{i,j}\right)=\rho b_i+\sigma_{ij,j}.$$

Перший член в дужках у лівій частині рівняння дорівнює нулю, згідно $\dfrac{d\rho}{dt}+\left(\rho v_k\right)_{,k}=0$, а другий член дорівнює ρa_i. Таким чином, можна записати $\rho a_i=\rho b_i+\sigma_{ij,j}$, що співпадає з $\sigma_{ji,j}+\rho b_i=\rho\dot{v}_i$, де $\dot{v}_i=a_i$.

Задача 5.9. Показати, яким чином рівняння $\int_S \varepsilon_{ijk}x_j t_k^{(\mathbf{n})}dS+\int_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho b_k dV=\dfrac{d}{dt}\int_V \varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k dV$ зводиться до форми $\int_V \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}dV=0$.

Розв'язання

Підставляючи в перше рівняння $t_k^{(\mathbf{n})} = \sigma_{pk} n_p$ і, застосовуючи теорему Гауса-Остроградського $\int_V T_{ijk\cdots,p} dV = \int_S T_{ijk\ldots} n_p dS$ до отриманого інтегралу по поверхні для його перетворення в об'ємний, отримаємо

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left[\left(x_j \sigma_{pk} \right)_{,p} + x_j \rho b_k \right] dV = \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} \rho \left(x_j v_k \right) dV .$$

Використовуючи результат задачі 5.2 і виконуючи диференціювання, приводимо останнє рівняння до вигляду

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left\{ x_{j,p} \sigma_{pk} + x_j \left[\sigma_{pk,p} + \rho b_k - \rho \dot{v}_k \right] - \rho v_j v_k \right\} dV = 0 .$$

Сума членів у квадратних скобках дорівнює нулю згідно $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$. Окрім того, $x_{j,p} = \delta_{jp}$, тоді $x_{j,p} \sigma_{pk} = \delta_{jp} \sigma_{pk} = \sigma_{jk}$ і $\varepsilon_{ijk} v_j v_k = 0$, так що остаточно отримуємо

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 .$$

Задача 5.10. Під час руху абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою поле швидкості має вигляд $v_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k = 0$. Довести, що для такого руху рівняння $\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(\mathbf{n})} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV$ зводиться до відомого рівняння моментів динаміки твердого тіла.

Розв'язання

Ліворуч у рівнянні $\int_S \left(\mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(\mathbf{n})} \right) dS + \int_V \left(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} \right) dV = \frac{d}{dt} \int_V \left(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \right) dV$, де $\mathbf{x}$ – радіус-вектор стоїть повний момент M_i усіх поверхневих і масових сил відносно початку відліку. За умови $v_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k$ це рівняння перетворюється таким чином

$$M_i = \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho \varepsilon_{kpq} \omega_p x_q dV = \frac{d}{dt} \int_V \omega_p \rho \left(\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \right) x_j x_q dV =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\omega_p \int_V \rho \left(\delta_{ip} x_q x_q - x_p x_i \right) dV \right] = \frac{d}{dt} \left(\omega_p I_{ip} \right),$$

де $I_{ip} = \int_V \rho \left(\delta_{ip} x_q x_q - x_p x_i \right) dV$ – тензор моментів інерції.

5.3. Енергія. Ентропія. Дисипативна функція

Задача 5.11. Довести, що для руху абсолютно твердого тіла з полем швидкості $v_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k$ інтеграл кінетичної енергії $\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{dK}{dt}$ зводиться до аналогічного виразу з динаміки твердого тіла.

Розв'язання

З рівняння для кінетичної енергії знаходимо

$$K = \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{1}{2}\int_V \rho \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k \varepsilon_{ipq}\omega_p x_q dV =$$

$$= \int_V \rho \omega_p \omega_j \left(\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}\right) x_k x_q dV =$$

$$= \frac{\omega_j \omega_p}{2}\int_V \rho\left(\delta_{jp} x_q x_q - x_p x_j\right) dV = \frac{\omega_j \omega_p}{2} I_{jp},$$

або в символічній формі запису $K = \frac{\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)}{2}$.

Задача 5.12. В деякій точці суцільного середовища дано тензори швидкості деформації і напруження

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Визначити в цій точці величину λ потужності напруження $D_{ij}\sigma_{ij}$.

Розв'язання

Користуючись символьною формою, величина λ визначається через подвійний скалярний добуток тензорів другого рангу

$\lambda = \hat{\mathbf{D}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}$.

Тобто, за допомогою множення кожного компонента тензора D_{ij} на відповідний компонент тензора σ_{ij} і додавання, отримуємо

$\lambda = 4 + 0 - 4 + 0 - 6 + 14 - 4 + 14 + 40 = 58.$

Задача 5.13. Нехай $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Показати, що потужність напруження можна записати виразом $D_{ij}\sigma_{ij} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$.

Розв'язання

Використаємо формулу для $D_{ij} = v_{i,j} - V_{ij}$. Оскільки $V_{ij}\sigma_{ij} = 0$, то

$D_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}\left(-p\delta_{ij}\right) = -p v_{i,i}$.

З рівняння нерозривності $\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = 0$ визначимо

$$v_{i,i} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Таким чином, остаточно отримуємо

$D_{ij}\sigma_{ij} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ за умови $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Задача 5.14. Знайти вигляд рівняння енергії за умови, що $\sigma_{ij} = \left(-p + \lambda^* D_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij}$, а теплопровідність підпорядковується закону Фур'є $q_i = -kT_{,i}$.

Розв'язання

Згідно $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}q_{i,i} + q_m$ напишемо

$$\rho\frac{du}{dt} = \left(-p + \lambda^* D_{kk}\right)\delta_{ij}D_{ij} + 2\mu^* D_{ij}D_{ij} + kT_{,ii} + q_m =$$

$$= \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \left(\lambda^* + 2\mu^*\right)\left(\mathrm{I_D}\right)^2 - 4\mu^*\mathrm{II_D} + kT_{,ii} + q_m,$$

де $\mathrm{I_D}$ і $\mathrm{II_D}$ – відповідно, перший і другий інваріанти тензора швидкості деформації. Заміна $-p\delta_{ij}D_{ij} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ – зроблена на підставі розв'язку задачі 5.13.

Задача 5.15. Нехай $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Написати рівняння для швидкості зміни масової ентропії за умови зворотного термодинамічного процесу.

Розв'язання

У цьому випадку $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)}$ і рівняння $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\varepsilon}_{ij} + T\frac{ds}{dt}$ з врахуванням результату задачі 5.13 дає таке співвідношення

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}.$$

Тут $-p\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$.

Задача 5.16. Задана дисипативна частина тензора напруження $\sigma_{ij}^{(D)} = \beta D_{ik}D_{kj}$. Знайти дисипативну функцію і виразити її через інваріанти швидкості деформації $\hat{\mathbf{D}}$.

Розв'язання

З використанням формули $d\varepsilon_{ij} = D_{ij}dt$ можна записати вираз $\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\varepsilon}_{ij} = \beta D_{ik}D_{kj}D_{ij}$, що є слідом тензора D_{ij} і може бути записаний через головні значення $D_{(1)}, D_{(2)}, D_{(3)}$. Згідно $(\mathbf{T})^n = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{pmatrix}$, слід матриці (тензора) дорівнює

$$D_{ik}D_{kj}D_{ij} = D_{(1)}^3 + D_{(2)}^3 + D_{(3)}^3 = \left(D_{(1)} + D_{(2)} + D_{(3)}\right)^3 -$$
$$-3\left(D_{(1)} + D_{(2)} + D_{(3)}\right)\left(D_{(1)}D_{(2)} + D_{(2)}D_{(3)} + D_{(3)}D_{(1)}\right) + 3D_{(1)}D_{(2)}D_{(3)}.$$

Звідки отримуємо

$$\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\varepsilon}_{ij} = \beta\left(\mathrm{I}_D^3 - 3\mathrm{I}_D\mathrm{II}_D + 3\mathrm{III}_D\right),$$

де $\mathrm{I}_D = D_{(1)} + D_{(2)} + D_{(3)}$, $\mathrm{II}_D = D_{(1)}D_{(2)} + D_{(2)}D_{(3)} + D_{(3)}D_{(1)}$, $\mathrm{III}_D = D_{(1)}D_{(2)}D_{(3)}$.

5.4. Визначальні рівняння

Задача 5.17. Нехай визначальні (фізичні) рівняння мають вигляд $\sigma_{ij} = K_{ijpq}D_{pq}$. Довести, що із-за симетрії тензорів напруження і швидкості деформації тензор четвертого рангу $K_{ijpq} = \overset{4}{\hat{K}}$ має не більше 36 незалежних компонент. Записати ці компоненти у вигляді матриці шостого порядку.

Розв'язання

Оскільки $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, то і $K_{ijpq} = K_{jipq}$. Окрім того, $K_{ijpq} = K_{ijqp}$, оскільки $D_{ij} = D_{ji}$. Подібно зовнішньому добутку двох симетричних тензорів A_{ij} і B_{ij}, що мають по шість незалежних компонент, тензор K_{ijpq} буде мати не більше за 36 різних компонент.

Зазвичай компоненти тензора K_{ijpq} прийнято розміщати таким чином

$$K_{ijpq} = \begin{bmatrix} K_{1111} & K_{1122} & K_{1133} & K_{1123} & K_{1131} & K_{1112} \\ K_{2211} & K_{2222} & K_{2233} & K_{2223} & K_{2231} & K_{2212} \\ K_{3311} & K_{3322} & K_{3333} & K_{3323} & K_{3331} & K_{3312} \\ K_{2311} & K_{2322} & K_{2333} & K_{2323} & K_{2331} & K_{2312} \\ K_{3111} & K_{3122} & K_{3133} & K_{3123} & K_{3131} & K_{3112} \\ K_{1211} & K_{1222} & K_{1233} & K_{1223} & K_{1231} & K_{1212} \end{bmatrix}.$$

Задача 5.18. Якщо припустити, що середовище, яке має визначальні рівняння $\sigma_{ij} = K_{ijpq}D_{pq}$ задачі 5.17, є ізотропним, так що тензор K_{ijpq} має однакові компоненти в будь-якій ортогональній декартовій системі координат, то циклічним перейменуванням осей координат 36 незалежних компонент тензора K_{ijpq} можна скоротити до двох. Показати це.

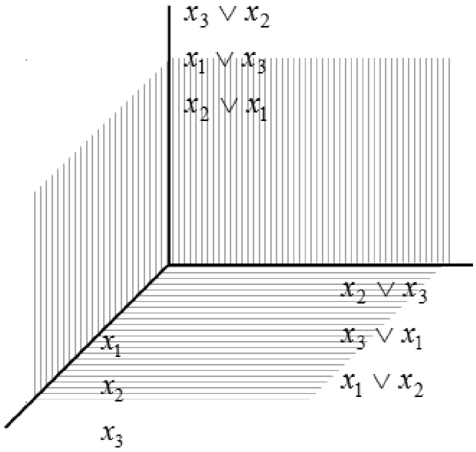
Розв'язання

Координатні напрямки можна перейменувати різними способами (рис. 5.1). Для існування ізотропії вимагається, щоб

$$K_{1122}=K_{1133}=K_{2233}=K_{2211}=K_{3311}=K_{3322}$$

і

$$K_{1212}=K_{1313}=K_{2323}=K_{2121}=K_{3131}=K_{3232}.$$



$\vee$ – означає логічне «або»

Рис. 5.1. До задачі 5.18

Це веде до того, що від 36 компонент лишається 26. Далі, відповідними відображеннями і поворотами осей координат ці 26 компонент за умови ізотропії середовища можуть бути зведені до двох.

Задача 5.19. Для ізотропного середовища компоненти тензора K_{ijpq} можуть бути представлені у вигляді $K_{ijpq}=\lambda^*\delta_{ij}\delta_{pq}+\mu^*\left(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}\right)$. Використати цей вираз і записати визначальні рівняння $\sigma_{ij}=K_{ijpq}D_{pq}$ через λ^* і μ^*.

Розв'язання

Використовуючи $K_{ijpq}=\lambda^*\delta_{ij}\delta_{pq}+\mu^*\left(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}\right)$ можна написати фізичне рівняння для σ_{ij}

$$\sigma_{ij}=\lambda^*\delta_{ij}\delta_{pq}D_{pq}+\mu^*\left(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp}\right)D_{pq}=$$

$$=\lambda^*\delta_{ij}D_{pp}+\mu^*\left(D_{ij}+D_{ji}\right)=\lambda^*\delta_{ij}D_{pp}+2\mu^*D_{ij}.$$

Задача 5.20. Довести, що визначальні рівняння задачі 5.19 можна розбити на групи $\sigma_{ii}=\left(3\lambda^*+2\mu^*\right)D_{ii}$ і $s_{ij}=2\mu^*D'_{ij}$, де s_{ij} і D'_{ij} – девіатори тензорів напруження і швидкості деформації, відповідно.

Розв'язання

Підставимо $\sigma_{ij}=s_{ij}+\delta_{ij}\,\sigma_{kk}/3$ і $D_{ij}=D'_{ij}+\delta_{ij}\,D_{kk}/3$ у вираз для $\sigma_{ij}=\lambda^*\delta_{ij}D_{kk}+2\mu^*D_{ij}$ задачі 5.19. Отримаємо таку рівність

$$s_{ij} + \delta_{ij}\,\sigma_{kk}/3 = \lambda^*\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^*\left(D'_{ij} + \delta_{ij}\,D_{kk}/3\right).$$

З отриманого рівняння видно, що якщо $i \neq j$, то

$$s_{ij} = 2\mu^* D'_{ij}$$

і, відповідно, для $i = j$

$$\sigma_{kk} = \left(3\lambda^* + 2\mu^*\right)D_{kk}\,.$$

5.5. Змішані задачі

Задача 5.21. Довести, що $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{q_i}{\rho}\right) = \dfrac{\varepsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j}}{\rho}$, де ρ – густина, a_i – вектор прискорення, q_i – вектор завихреності.

Розв'язання

Безпосереднім диференціюванням знаходимо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q_i}{\rho}\right) = \frac{\dot q_i}{\rho} - \frac{q_i\dot\rho}{\rho^2}\,.$$

Але відомо, що

$$\dot q_i = \varepsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j} - q_i v_{j,j}$$ – (див. задачу 4.32),

а із рівняння нерозривності $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0$, витікає, що

$$\dot\rho = -\rho v_{i,i}\,.$$

Тоді остаточно отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q_i}{\rho}\right) = \frac{\dot q_i}{\rho} - \frac{q_i\dot\rho}{\rho^2} = \frac{\varepsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j} - q_i v_{j,j}}{\rho} - \frac{q_i\left(-\rho v_{i,i}\right)}{\rho^2} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j} - q_i v_{j,j} + q_i v_{j,j}\right) = \frac{\varepsilon_{ijk}a_{k,j} + q_j v_{i,j}}{\rho}.$$

Задача 5.22. Дано плоску течію нестисливої рідини $v_1 = \dfrac{A\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{r^4}$, $v_2 = \dfrac{A\left(2x_1x_2\right)}{r^4}$, $v_3 = 0$, де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Довести, що таке поле швидкості задовольняє рівнянню нерозривності.

Розв'язання

Для нестисливої рідини рівняння нерозривності має вигляд $v_{i,i} = 0$. За умовами задачі

$$v_{1,1} = A\left[-4x_1\frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{r^6} + \frac{2x_1}{r^4}\right] = -A\frac{2x_1\left(x_1^2 - 3x_2^2\right)}{r^6},\ v_{2,2} = A\frac{2x_1\left(x_1^2 - 3x_2^2\right)}{r^6}.$$

В результаті отримуємо

$$v_{1,1}+v_{2,2}=-A\frac{2x_1\left(x_1^2-3x_2^2\right)}{r^6}+A\frac{2x_1\left(x_1^2-3x_2^2\right)}{r^6}=0\,.$$

Задача 5.23. Довести, що поле швидкості задачі 5.22 є безвихровим.

Розв'язання

Для безвихрової течії необхідно виконання умови $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$. Перевіряємо і бачимо, що за умовами задачі

$$\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ \dfrac{A\left(x_1^2-x_2^2\right)}{r^4} & \dfrac{A(2x_1x_2)}{r^4} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=0\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{A(2x_1x_2)}{r^4}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{A\left(x_1^2-x_2^2\right)}{r^4}\right)\right]\mathbf{e}_3=$$

$$=\left[A\frac{2x_2\left(x_2^2-3x_1^2\right)}{r^6}-A\frac{2x_2\left(x_2^2-3x_1^2\right)}{r^6}\right]\mathbf{e}_3=0.$$

Задача 5.24. Існує плоский потік нестисливої рідини, в якому $v_1=-\dfrac{Ax_2}{r^2}$, де $r^2=x_1^2+x_2^2$. Знайти компоненту v_2 в усьому потоці, якщо $v_2=0$ для $x_1=0$ за усіх значень x_2. Показати, що рух безвихровий, а лінії току є колами.

Розв'язання

Рівняння нерозривності для нестисливої рідини має вигляд $v_{i,i}=0$. Звідки знаходимо

$$v_{1,1}=-v_{2,2}=\frac{2Ax_1x_2}{r^4}\,.$$

Інтегруючи його по x_2 отримуємо

$$v_2=-\int\frac{2Ax_1x_2}{r^4}\,dx_2=\frac{Ax_1}{r^2}+C\,.$$

Константу інтегрування знаходимо з умови задачі – $v_2=0$ для $x_1=0$ за усіх значень x_2

$$v_2=\frac{Ax_1}{r^2}+C\rightarrow 0=\frac{A\cdot 0}{r^2}+C\rightarrow C=0\,.$$

Значить $v_2=\dfrac{Ax_1}{r^2}$.

Для безвихрового руху потрібно виконання умови $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$. Тобто

$$\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ -\dfrac{Ax_2}{r^2} & \dfrac{Ax_1}{r^2} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=0\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Ax_1}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{Ax_2}{r^2}\right)\right]\mathbf{e}_3=$$

$$=\left[-A\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)}{r^2}+A\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)}{r^2}\right]\mathbf{e}_3=0.$$

В задачі 4.7 виведено рівняння ліній току $\dfrac{dx_1}{v_1}=\dfrac{dx_2}{v_2}$. Для даного поля швидкості вони мають вигляд

$$\frac{dx_1}{-\dfrac{Ax_2}{r^2}}=\frac{dx_2}{\dfrac{Ax_1}{r^2}}\rightarrow-\frac{dx_1}{x_2}=\frac{dx_2}{x_1}\rightarrow x_1dx_1+x_2dx_2=0,$$

що після інтегрування дає рівняння кіл

$$x_1^2+x_2^2=\mathrm{const}.$$

Задача 5.25. Визначальні рівняння для деякого середовища мають вигляд $\sigma_{ij}=\left(-p+\lambda^*D_{kk}\right)\delta_{ij}+2\mu^*D_{ij}$, де λ^* і μ^* – сталі. Написати рівняння руху, які виражаються через вектор швидкості v_i.

Розв'язання

Рівняння руху $\rho\dot{v}_i=\rho b_i+\sigma_{ij,j}$ за умовами задачі мають форму

$$\rho\dot{v}_i=\rho b_i-p_{,j}\delta_{ij}+\lambda^*D_{kk,j}\delta_{ij}+2\mu^*D_{ij,j}.$$

За визначенням маємо, що

$$2D_{ij}=v_{i,j}+v_{j,i},$$

так що для

$$D_{kk,j}=v_{k,kj},\ 2D_{ij,j}=v_{i,jj}+v_{j,ij}.$$

Тому

$$\rho\dot{v}_i=\rho b_i-p_{,i}+\left(\lambda^*+\mu^*\right)v_{j,ij}+\mu^*v_{i,jj}.$$

Це рівняння в символічних позначеннях можна записати

$$\rho\dot{\mathbf{v}}=\rho\mathbf{b}-\nabla p+\left(\lambda^*+\mu^*\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})+\mu^*\nabla^2\mathbf{v}.$$

Задача 5.26. Обчислити матеріальну швидкість зміни кінетичної енергії середовища, що займає об’єм V, та пояснити фізичний зміст отриманих інтегралів.

Розв’язання

Для розв’язання задачі використаємо формулу $\dfrac{dK}{dt} = \int\limits_V \rho v_i \dot{v}_i dV$. Робота зовнішніх поверхневих сил (в одиницю часу) дорівнює $\int\limits_S v_i t_i^{(\mathbf{n})} dS$, що можна переписати інакше через тензор напруження і вектор зовнішньої нормалі $\int\limits_S v_i \sigma_{ij} n_j dS$. Застосовуючи до цього інтегралу теорему Гауса-Остроградського $\int\limits_V T_{ij,k} dV = \int\limits_S T_{ij} n_k dS$ і скористаємося рівнянням руху вигляду $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$. Тоді отримаємо

$$\int\limits_S v_i \sigma_{ij} n_j dS = \int\limits_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int\limits_V \rho\left(v_i \dot{v}_i - b_i v_i\right) dV .$$

Звідки отримаємо

$$\frac{dK}{dt} = \int\limits_V \rho b_i v_i dV - \int\limits_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int\limits_S v_i t_i^{(\mathbf{n})} dS .$$

Інтеграли цієї суми представляють потужність масових сил, внутрішніх поверхневих сил і зовнішніх поверхневих сил, відповідно.

Задача 5.27. В нестисливому середовищі, для якого $\sigma_{ij}^{(D)} = \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij}$, відбувається безвихровий рух з потенціалом швидкості φ, так що $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\varphi$. Знайти дисипативну функцію $\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij}$.

Розв’язання

Оскільки для нестисливої рідини $D_{kk} = v_{k,k} = 0$, то отримуємо

$$\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_{ij}^{(D)} D_{ij} = \left(\lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij}\right) D_{ij} = 2\mu^* D_{ij} D_{ij} .$$

Окрім того, $v_i = \varphi_{,i}$, і, відповідно, скаляр $D_{ij} D_{ij} = \varphi_{,ij} \varphi_{,ij}$. Тому

$$\sigma_{ij}^{(D)} D_{ij} = 2\mu^* \varphi_{,ij} \varphi_{,ij} .$$

Виходячи з того, що середовище нестисливе, а рух безвихровий, виконуються такі співвідношення $\varphi_{,ii} = 0$ і $2\varphi_{,ij}\varphi_{,ij} = \left(\varphi_{,i}\varphi_{,i}\right)_{,jj} = \nabla^2 (\nabla\varphi)^2$.

Цікаво також відмітити, що

$$\nabla^4\left(\varphi^2\right) = (\varphi\varphi)_{,iijj} = 2\left(\varphi_{,iijj}\varphi + 4\varphi_{,ijj}\varphi_{,i} + \varphi_{,ii}\varphi_{,jj} + 2\varphi_{,ij}\varphi_{,ij}\right).$$

Це рівняння за умови $\varphi_{,ii} = 0$ зводиться до $4\varphi_{,ij}\varphi_{,ij}$. Тоді остаточно отримуємо

$$\sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} = \mu^* \nabla^2 (\nabla\varphi)^2 = \mu^* \nabla^4\left(\varphi^2\right) / 2 .$$

Задача 5.28. Для середовища, в якому $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, вводиться поняття масової ентропії $h = u + \dfrac{p}{\rho}$. Довести, що, використовуючи це поняття можна записати рівняння енергії у вигляді $\dot{h} = \dfrac{\dot{p}}{\rho} + T\dot{s}$.

Розв'язання

Рівняння енергії $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\varepsilon}_{ij} + T\dfrac{ds}{dt}$ за умовами заданого в задачі закону напруження приймає вигляд

$$\dot{u} = -p\delta_{ij}\frac{D_{ij}}{\rho} + T\dot{s}.$$

Скористуємося результатом задачі 5.13 і визначимо h. Тоді

$$\dot{u} = \dot{h} - \frac{\dot{p}}{\rho} - \frac{p\dot{\rho}}{\rho^2} = -\frac{p\dot{\rho}}{\rho^2} + T\dot{s}.$$

Виконуючи скорочення однакових членів, знаходимо

$$\dot{h} = \frac{\dot{p}}{\rho} + T\dot{s}.$$

Задача 5.29. Нехай середовище задачі 5.25 рухається як нестисливе. Написати рівняння руху, що виражено через вектор завихреності $\mathbf{q}$ за умови відсутності масових сил і сталої густини.

Розв'язання

У разі нестисливості середовища маємо $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. За умови $\mathbf{b} = 0$ рівняння руху задачі 5.25 приймає форму

$$\rho\dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj}.$$

Виконаємо векторне множення оператора ∇ на це рівняння, використовуючи тензор Леві-Чивіти $\overset{3}{\hat{\varepsilon}}$, за умови $\rho = \text{const}$, отримаємо

$$\varepsilon_{pqi}\dot{v}_{i,q} = -\varepsilon_{pqi}\frac{p_{,iq}}{\rho} + \frac{\mu^*}{\rho}\varepsilon_{pqi}v_{i,jjq}.$$

Але $\varepsilon_{pqi}p_{,iq} = 0$, тому, враховуючи $q_p = \varepsilon_{pqi}v_{i,q}$, можна написати

$$q_p = \frac{\mu^*}{\rho}\varepsilon_{pqi}q_{,jj},$$

або в символічних позначеннях

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\mu^*}{\rho}\nabla^2\mathbf{q}.$$

Задача 5.30. Використовуючи закон Фур'є, отримати вираз для масового притоку теплоти $dq^{(e)}$, якщо теплопровідність:

а) $k = \text{const}$; б) $k = k(T)$.

Розв'язання

Маємо, що рівняння притоку теплоти або нестаціонарне рівняння теплопровідності $\rho\dfrac{dq^{(e)}}{dt} = -\text{div}\mathbf{q}$ приймає вигляд

а) $$\frac{dq^{(e)}}{dt} = -\frac{\text{div}\mathbf{q}}{\rho} = -\frac{\text{div}(-k\,\text{grad}T)}{\rho} = \frac{\nabla(k\nabla T)}{\rho} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T = \frac{k}{\rho}\Delta T,$$

де $q^{(e)}$ – масовий притік теплоти, Дж/кг; t – час, с; $\dfrac{dq^{(e)}}{dt}$ – масовий притік теплоти за одиницю часу, Вт/кг; $\mathbf{q}$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м^2; ρ – густина, кг/м^3; k – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); div – оператор дивергенції («набла» $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\ \ \dfrac{\partial}{\partial y}\ \ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$), 1/м; $\Delta = \nabla^2 = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\ \ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\ \ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат, 1/м^2; T – абсолютна температура, К.

б) $$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{1}{\rho}\text{div}\left[k(T)\text{grad}T\right] = \frac{k(T)}{\rho}\Delta T + \frac{1}{\rho}\frac{dk(T)}{dT}(\nabla T)^2.$$

Другий доданок останнього виразу перетворюється таким чином
$$\frac{1}{\rho}\left[\text{div}k(T)\right]\text{grad}T = \frac{1}{\rho}\left[\nabla k(T)\right]\nabla T = \frac{1}{\rho}\frac{dk(T)}{dT}\nabla T\nabla T = \frac{1}{\rho}\frac{dk(T)}{dT}(\nabla T)^2.$$

Тут $\left[\nabla\chi(T)\right] = \dfrac{dk(T)}{dT}\nabla T$ – похідна від функції $k(T)$, яка виражена неявно.

Задача 5.31. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідному шарі суцільного середовища з постійною теплопровідністю, яке знаходиться в стані спокою і розташовано між двома паралельними пластинами з постійними температурами T_1 і T_2, відповідно. Товщина шару дорівнює h.

Розв'язання

Рівняння притоку теплоти для процесу теплопровідності в нерухомому середовищі без внутрішніх джерел теплоти має вигляд $\rho c_p\dfrac{\partial T}{\partial t} = \chi\Delta T$. Очевидно, що $T = T(z)$, вісь z перпендикулярна граничним пластинам, тому для стаціонарного процесу теплопровідності в нерухомому шарі справедливе рівняння

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0. \qquad (5.1)$$

Граничні умови: $T = T_1$ при $z = 0$ і $T = T_2$ при $z = h$.

Перше інтегрування рівняння (5.1) дає

$$\frac{dT}{dz} = C_1. \tag{5.2}$$

Після другого інтегрування отримаємо

$$\int dT = \int C_1 dz \Rightarrow T = C_1 z + C_2, \tag{5.3}$$

Із рівняння (5.3) витікає, що при постійному коефіцієнті теплопровідності температура в плоскому шарі змінюється за лінійним законом. Постійні C_1 і C_2 в рівнянні (5.3) визначаються із граничних умов:

для $z = 0$, $T = T_1$ і $T_1 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1$,

для $z = h$, $T = T_2$ і $T_2 = C_1 \cdot h + T_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{h}$.

Тоді, стаціонарний розподіл температури в однорідному шарі суцільного середовища з постійною теплопровідністю буде мати вигляд (підставляємо значення C_1 і C_2 в рівняння (5.3))

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h} z,$$

що і треба було знайти.

5.6. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 5.32. Довести, що для вектора вихору швидкості $\mathbf{\Omega}$ вірна формула $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{\Omega}}{\rho}\right) = \dfrac{\mathbf{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\mathbf{\Omega}}{dt}$.

Задача 5.33. Довести, що течія з полем швидкості $v_1 = \dfrac{-2x_1 x_2 x_3}{r^4}$, $v_2 = \dfrac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)x_3}{r^4}$, $v_3 = \dfrac{x_2}{r^2}$, де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, задовольняє умові нестисливості. Чи буде ця течія безвихровою?

Задача 5.34. Рівняння нерозривності в декартових координатах x, y, z має такий вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Довести, що в циліндричних координатах r, θ, z рівняння нерозривності буде мати вигляд

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Задача 5.35. Довести, що течія з полем швидкості $v_r = \dfrac{\left(1 - r^2\right)\cos\theta}{r^2}$, $v_\theta = \dfrac{\left(1 + r^2\right)\sin\theta}{r^2}$, $v_3 = 0$ задовольняє рівнянню нерозривності в циліндричних координатах, якщо густина ρ – константа.

Задача 5.36. Довести, що для будь-якої скалярної, векторної або тензорної величини $P_{ij\ldots}(\mathbf{x}, t)$ має місце рівність

$$\int_S P_{ij\ldots}\sigma_{pq}n_q dS = \int_V \left[\sigma_{pq}P_{ij\ldots,q} + \rho P_{ij\ldots}\left(\dot{v}_p - b_p\right)\right]dV .$$

Задача 5.37. Якщо в середовищі, окрім масових сил $\mathbf{b}$, діють масові моменти $\mathbf{h}$, а окрім вектору напруження $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$, ще пари напруження $\mathbf{g}^{(\mathbf{n})}$, то рівняння моментів кількості руху може бути записано у вигляді

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\mathbf{m} + \mathbf{x}\times\mathbf{v})dV = \int_V (\mathbf{h} + \mathbf{x}\times\mathbf{b})dV + \int_S \left(\mathbf{g}^{(\mathbf{n})} + \mathbf{x}\times\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\right)dS ,$$

де $\mathbf{m}$ – розподілений момент кількості руху на одиницю маси.

Довести, що якщо $\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{g}^{(\mathbf{n})}$, то диференціальна форма цього рівняння буде такою

$$\rho\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{h} + \nabla\cdot\hat{\mathbf{G}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v .$$

Задача 5.38. Середовище задано визначальними рівняннями $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \beta D_{ij} + \alpha D_{ik}D_{kj}$. Показати, що $\sigma_{ii} = 3\left(-p - 2\alpha\,\mathrm{II}_D/3\right)$. Припустити, що середовище є нестисливим $D_{ii} = 0$.

Задача 5.39. Довести, що середовище, в якому $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, співвідношення $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\varepsilon}_{ij} + T\dfrac{ds}{dt}$ приймає вигляд $du = Tds - pdv$, де $v = 1/\rho$ – питомий об'єм.

Задача 5.40. Нехай $T\dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{q_{i,i}}{\rho} = \dfrac{dq}{dt}$. Масова вільна енергія за визначенням називається величина $\Psi = u - Ts$. Довести, що рівняння енергії можна написати у вигляді

$$\rho\frac{d\Psi}{dt} + \rho s\frac{dT}{dt} = \sigma_{ij}D_{ij} .$$

Задача 5.41. Існує термодинамічний континуум з визначальними рівняннями

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta_{ij}\left(T - T_0\right),$$

де T_0 – температура початкового стану.

Довести, що $\varepsilon_{kk} = 3\alpha(T - T_0)$, якщо $\sigma_{kk} = 0$.

Задача 5.42. Отримати диференціальне рівняння руху в початковій лагранжевій системі координат.

Задача 5.43. Показати, що масова теплоємність пружного середовища в процесі зі сталими деформаціями дорівнює похідній $\dfrac{\partial u(\varepsilon_{ij}, T)}{\partial T}$.

Задача 5.44. Показати, що в процесах зі сталим тиском для ідеальної рідини і ідеального газу зовнішній притік теплоти до одиниці маси дорівнює прирощенню масової ентальпії h, а ізобарна масова теплоємність c_p визначається як $\dfrac{\partial h(p, T)}{\partial T}$.

Задача 5.45. Для анізотропного середовища з теплопровідністю, що описується законом Фур'є, підрахувати кількість можливих незалежних коефіцієнтів теплопровідності.

Відповідь: 6.

Задача 5.46. За яких умов адіабатна течія ідеальної стисливої рідини або газу є баротропною?

6. ЛІНІЙНА ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ

6.1. Закон Гука. Енергія деформації. Ізотропія

Задача 6.1. Довести, що густину енергії деформації u^* для ізотропного гукового середовища можна виразити через тензор деформації у вигляді $u^* = \lambda\left(\operatorname{tr}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^2/2 + \mu\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ і через тензор напруження у вигляді $u^* = \left[(1+\nu)\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \nu\left(\operatorname{tr}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)^2\right]/(2E)$.

Розв'язання

Підставляючи $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ в $u^* = \dfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, знаходимо

$$u^* = \left(\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}\right)\varepsilon_{ij}/2 = \lambda\,\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}/2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},$$

або в символічних позначеннях

$$u^* = \lambda\left(\operatorname{tr}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)^2/2 + \mu\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Підставляючи $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ в $u^* = \dfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, знаходимо

$$u^* = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left[\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right] = \left[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ii}\sigma_{jj}\right]/(2E),$$

або в символічних позначеннях

$$u^* = \left[(1+\nu)\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \nu\left(\operatorname{tr}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)^2\right]/(2E).$$

Задача 6.2. Розклавши кожний з тензорів напруження і деформації на кульові і девіаторні складові, представити густину енергії деформації $u^*_{(S)}$ і густини енергії викривлення форми (енергії дисторсії) $u^*_{(D)}$.

Розв'язання

Підставляючи $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}/3$ і $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\dfrac{\sigma_{kk}}{3} + s_{ij}$ в $u^* = \dfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, отримуємо

$$u^* = \frac{1}{2}\left(s_{ij} + \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3}\right)\left(e_{ij} + \delta_{ij}\,\varepsilon_{pp}/3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(s_{ij}e_{ij} + \frac{\sigma_{ii}e_{jj}}{3} + \frac{s_{ii}\varepsilon_{jj}}{3} + \frac{\sigma_{ii}\varepsilon_{jj}}{3}\right).$$

Внаслідок того, що $e_{ii} = s_{ii} = 0$, вираз для u^* зводиться до суми

$$u^* = u^*_{(S)} + u^*_{(D)} = \frac{\sigma_{ii}\varepsilon_{jj}}{6} + \frac{s_{ij}e_{ij}}{2}.$$

Задача 6.3. Існує стан усестороннього рівномірного стискання з тензором напруження $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. Отримати формули $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$, $K = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{3}$ для модуля об'ємного стискання (відношення тиску до зміни об'єму).

Розв'язання

Для тензора напруження $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ співвідношення $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\left(-p\delta_{ij}\right) + \frac{\nu}{E}\delta_{ij}(3p),$$

звідки отримуємо

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1+\nu}{E}\left(-p\delta_{ii}\right) + \frac{\nu}{E}\delta_{ii}(3p) = -3p\frac{1+\nu}{E} + 9p\frac{\nu}{E} = \frac{1}{E}\left[-3p(1+\nu) + 9p\nu\right].$$

Тоді

$$K = -\frac{p}{\varepsilon_{ii}} = \frac{E}{3(1+\nu) - 9\nu} = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Аналогічно із закону Гука $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ будемо мати

$$\sigma_{ii} = \lambda\delta_{ii}\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii}.$$

Оскільки $\sigma_{ii} = -p\delta_{ii} = -3p$, то

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii} = -3p \to \varepsilon_{ii} = \frac{-3p}{3\lambda + 2\mu}.$$

Тоді

$$K = -\frac{p}{\varepsilon_{ii}} = \frac{p(3\lambda + 2\mu)}{3p} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}.$$

Задача 6.4. Виразити $u^*_{(S)}$ і $u^*_{(D)}$ задачі 6.2 через технічні пружні модулі K і G та компоненти деформацій.

Розв'язання

В задачі 6.3 отримано $\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii} = \dfrac{3}{3}(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$, і, відповідно, можна записати

$$u^*_{(S)} = \frac{\sigma_{ii}\varepsilon_{jj}}{6} = \frac{3K\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}}{6} = \frac{K\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}}{2} = \frac{K\left(\mathrm{I_E}\right)^2}{2}.$$

Використовуючи компоненти напруження по закону Гука $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$ і за формулою $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\dfrac{\sigma_{kk}}{3} + s_{ij}$, отримаємо

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3}.$$

Оскільки, $\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii}$, то можна зробити такі перетворення

$$\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\frac{(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk}}{3} \to$$

$$\to 3\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 6\mu\varepsilon_{ij} = 3s_{ij} + 3\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \to$$

$$\to 6\mu\varepsilon_{ij} = 3s_{ij} + 2\mu\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \to 2\mu\varepsilon_{ij} = s_{ij} + \frac{2\mu\delta_{ij}\varepsilon_{kk}}{3}.$$

Звідки отримуємо

$$s_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\frac{\delta_{ij}}{3}\right).$$

Таким чином, враховуючи те, що $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}/3 \to e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}/3$, отримаємо

$$u^*_{(D)} = \frac{s_{ij}e_{ij}}{2} = \frac{1}{2}2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\frac{\delta_{ij}}{3}\right)\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{pp}\frac{\delta_{ij}}{3}\right) = \mu\left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}}{3}\right).$$

Відмітимо, що густина енергії розширення $u^*_{(S)}$ виявляється функцією тільки модулю K, а густина енергії викривлення форми $u^*_{(D)}$ виражається через модуль зсуву $\mu = G$.

Задача 6.5. Взагалі u^* можна представити квадратичною формою $u^* = C^*_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M$, коефіцієнти C^*_{KM} якої не обов'язково симетричні. Довести, що цей вираз можна записати у вигляді $u^* = \dfrac{1}{2}C_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M$ і що $\dfrac{\partial u^*}{\partial\varepsilon_K} = \sigma_K$.

Розв'язання

Перетворимо квадратичну форму таким чином

$$u^* = \frac{1}{2}C^*_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M + \frac{1}{2}C^*_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M = \frac{1}{2}C^*_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M + \frac{1}{2}C^*_{PN}\varepsilon_N\varepsilon_P =$$

$$= \frac{1}{2}\left(C^*_{KM} + C^*_{MK}\right)\varepsilon_K\varepsilon_M = \frac{1}{2}C_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M,$$

де $C_{KM} = C_{MK}$.

Тепер обчислимо похідну $\dfrac{\partial u^*}{\partial\varepsilon_R}$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_R} = \frac{1}{2} C_{KM} \left(\varepsilon_{K,R} \varepsilon_M + \varepsilon_K \varepsilon_{M,R} \right) = \frac{1}{2} C_{KM} \left(\delta_{KR} \varepsilon_M + \varepsilon_K \delta_{MR} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(C_{RM} \varepsilon_M + C_{KR} \varepsilon_K \right) = C_{RM} \varepsilon_M = \sigma_R .$$

Задача 6.6. Довести, що для ортотропного пружного середовища (з трьома ортогональними площинами пружної симетрії) матриця пружних констант має вигляд

$$\left[C_{KM} \right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} . \qquad (6.1)$$

Розв'язання

Нехай площина $x_1 x_2$ (або, що те ж саме, $x_1' x_2'$) є площиною пружної симетрії (рис. 6.1). Тоді $\sigma_K = C_{KM} \varepsilon_M$ і одночасно $\sigma_K' = C_{KM} \varepsilon_M'$. Матриця (тензор) перетворення осей x_i в осі x_i' буде такою

$$\left[c_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

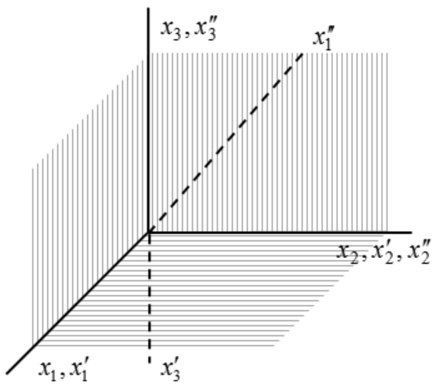


Рис. 6.1. До задачі 6.6

З $\sigma_{ij}' = c_{ip} c_{jq} \sigma_{pq}$ і $\varepsilon_{ij}' = c_{ip} c_{jq} \varepsilon_{pq}$ витікає, що $\sigma_K' = \sigma_K$ і $\varepsilon_K' = \varepsilon_K$ за умови $K = 1{,}2{,}3{,}6$, в той час як $\sigma_K' = -\sigma_K$ і $\varepsilon_K' = -\varepsilon_K$ за умови $K = 4{,}5$. Так, наприклад, для

$\sigma_1' = C_{1M} \varepsilon_M'$ отримаємо

$$\sigma_1' = \sigma_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3 - C_{14} \varepsilon_4 - C_{15} \varepsilon_5 + C_{16} \varepsilon_6 .$$

Але, з іншого боку, $\sigma_1 = C_{1M}\varepsilon_M$, тобто

$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$.

Ці два вирази для $\sigma'_1 = \sigma_1$ співпадають тільки в тому випадку, коли

$C_{14} = C_{15} = 0$.

Точно так само з рівнянь

$\sigma'_2 = \sigma_2$, $\sigma'_3 = \sigma_3$, $\sigma'_4 = -\sigma_4$, $\sigma'_5 = -\sigma_5$, $\sigma'_6 = \sigma_6$

витікає, що

$$C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{64} = C_{65} = C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{51} =$$
$$= C_{52} = C_{53} = C_{56} = 0.$$

Якщо площина x_2x_3 (або $x''_2x''_3$) є другою площиною пружної симетрії, так що $\sigma''_K = C_{KM}\varepsilon''_M$ і матриця перетворення до осей x''_i має вигляд

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то з $\sigma''_{ij} = c_{ip}c_{jq}\sigma_{pq}$ і $\varepsilon''_{ij} = c_{ip}c_{jq}\varepsilon_{pq}$ отримуємо $\sigma''_K = \sigma_K$ і $\varepsilon''_K = \varepsilon_K$ за умови $K = 1,2,3,4$, тоді як $\sigma''_K = -\sigma_K$ і $\varepsilon''_K = -\varepsilon_K$ за умови $K = 5,6$. Звідси витікає, що

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{54} = C_{61} = C_{62} = C_{63} = 0$$

і матриця пружних констант приймає вигляд (6.1).

Симетрія відносно третьої площини x_1x_3 отримується автоматично.

Задача 6.7. Виконати операцію зі зведення матриці пружних констант для ортотропного матеріалу (див. задачу 6.6) до матриці для ізотропного середовища

$$\left[C_{KM}\right] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Розв'язання

Для випадку ізотропії пружні властивості середовища однакові у всіх декартових системах координат. Зокрема, для осей, повернутих так, як показано на рис. 6.2, призводить до подальшого спрощення матриці (див. задачу 6.6) за рахунок рівностей $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{44} = C_{55} = C_{66}$, $C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32}$.

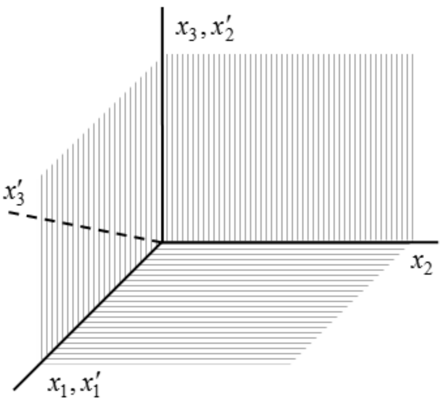


Рис. 6.2. До задачі 6.7

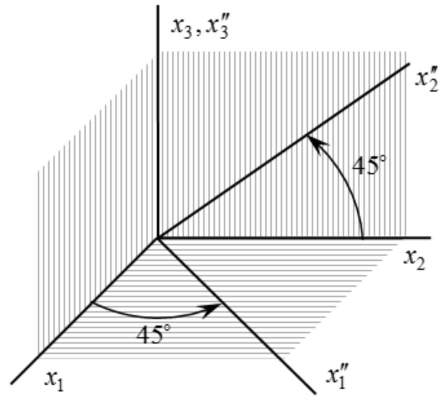


Рис. 6.3. До задачі 6.7

На кінець, для системи осей x_1'', що отримана поворотом на кут 45° навколо осі x_3 (рис. 6.3), матриця (тензор) перетворення осей буде такою

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0 \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

так що $\sigma_6'' = (\sigma_2 - \sigma_1)/2 = (C_{11} - C_{12})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2$ і $\varepsilon_6'' = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Але $\sigma_6'' = C_{44}\varepsilon_6''$, тому $2C_{44} = C_{11} - C_{12}$. Вводячи позначення $\mu = C_{44}$ і $\lambda = C_{12}$, приходимо до шуканої матриці задачі.

Задача 6.8. Виконати операцію обертання закону Гука для напруження через деформацію $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$, щоб отримати співвідношення для деформації через напруження $\varepsilon_{ij} = \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \dfrac{1}{2\mu}\sigma_{ij}$.

Розв'язання

Закон Гука для напруження за умови $i = j$ приймає вигляд

$$\sigma_{ii} = \lambda\delta_{ii}\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii},$$

де $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

Тоді

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{(3\lambda + 2\mu)}$$

Далі визначимо із закону Гука складову $2\mu\varepsilon_{ij}$ з врахуванням ε_{ii}

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \to 2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \to 2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda + 2\mu)}.$$

Тепер з останнього виразу нескладно визначити ε_{ij} через σ_{ij}

$$2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda+2\mu)} \to \varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}.$$

Задача 6.9. Виразити технічні константи ν і E через сталі Ламе λ і μ.

Розв'язання

З рівнянь $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ і $K = \dfrac{3\lambda+2\mu}{3}$ видно, що

$$\frac{E}{(1-2\nu)} = 3\lambda + 2\mu,$$

а з $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \to E = 2\mu(1+\nu)$.

Таким чином, підставляючи вираз для E в $\dfrac{E}{(1-2\nu)} = 3\lambda + 2\mu$, отримуємо

$$\frac{2\mu(1+\nu)}{(1-2\nu)} = 3\lambda + 2\mu \to 2\mu(1+\nu) = (3\lambda+2\mu)(1-2\nu).$$

Звідки знаходимо ν

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Тепер знову скористаємося виразом $E = 2\mu(1+\nu)$ та знайдемо

$$E = 2\mu\left(1 + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right) \to E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.$$

Задача 6.10. Написати матрицю пружних констант для середовища, що має вісь пружної симетрії порядку $N = 4$. Вважати при цьому, що $C_{KM} = C_{MK}$.

Розв'язання

Нехай віссю пружної симетрії буде вісь x_3. Поворотом інших осей на кут $\theta = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ відносно x_3 (рис. 6.4) отримаємо напрямки еквівалентних пружних властивостей за умови $N = 4$. Матриця такого перетворення буде такою

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

і формули $\sigma'_{ij} = c_{ip}c_{jq}\sigma_{pq}$ і $\varepsilon'_{ij} = c_{ip}c_{jq}\varepsilon_{pq}$ приводять до групи рівнянь

$$\sigma'_1 = \sigma_2,\ \sigma'_2 = \sigma_1,\ \sigma'_3 = \sigma_3,\ \sigma'_4 = -\sigma_5,\ \sigma'_5 = \sigma_4,\ \sigma'_6 = -\sigma_6$$

і

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_2,\ \varepsilon'_2 = \varepsilon_1,\ \varepsilon'_3 = \varepsilon_3,\ \varepsilon'_4 = -\varepsilon_5,\ \varepsilon'_5 = \varepsilon_4,\ \varepsilon'_6 = -\varepsilon_6.$$

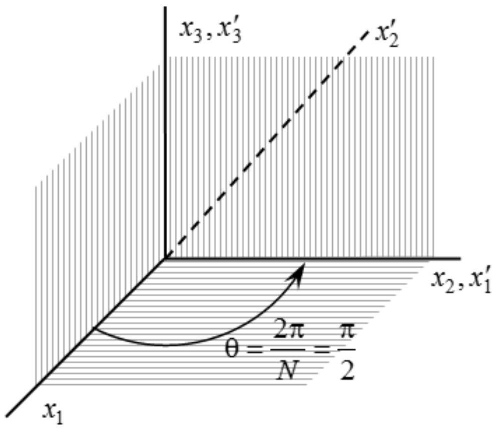


Рис. 6.4. До задачі 6.10

Ці рівняння накладають умови на коефіцієнти C_{KM}. Так, наприклад, із рівності $\sigma_3' = \sigma_3$ витікають рівності

$C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0$, $C_{31} = C_{32}$.

Аналогічно, використовуючи решту п'ять співвідношень для напружень, можна записати матрицю пружних констант так

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{16} & -C_{16} & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

з сімома незалежними сталими.

6.2. Статичні і динамічні задачі теорії пружності

Задача 6.11. Вивести рівняння Нав'є $\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{i,ji} + \rho b_i = 0$.

Розв'язання

Замінимо компоненти деформації в $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ еквівалентними виразами через переміщення, а саме $\varepsilon_{kk} = u_{k,k}$ і $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$, отримаємо

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Таким чином, для $\sigma_{ij,j}$ будемо мати

$$\sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,ki} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}).$$

Підставивши цей вираз в рівняння рівноваги $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$ і перегрупувавши члени, отримаємо шукане рівняння Нав'є

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{i,ji} + \rho b_i = 0.$$

Задача 6.12. Довести, що якщо $\nabla^4 F_i = 0$, то компоненти переміщення $u_i = (\lambda+2\mu)\dfrac{F_{i,jj}}{\mu(\lambda+\mu)} - \dfrac{F_{j,ji}}{\mu}$ є розв'язками рівняння Нав'є $\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{i,ji} + \rho b_i = 0$ за умови відсутності масових сил.

Розв'язання

Диференціюючи заданий розв'язок, знайдемо члени

$$(\mu u_i)_{,jj} = \left[(\lambda+2\mu)\frac{F_{i,jj}}{(\lambda+\mu)} - F_{j,ji}\right]_{,jj} \to \mu u_{i,jj} = (\lambda+2\mu)\frac{F_{i,kkjj}}{(\lambda+\mu)} - F_{k,kijj}$$

і

$$(\lambda+\mu) u_{j,ji} = (\lambda+2\mu)\frac{F_{j,kkji}}{\mu} - \frac{(\lambda+\mu)F_{k,kjji}}{\mu}.$$

Підстановка отриманих виразів у рівняння Нав'є дає

$$(\lambda+2\mu)\frac{F_{j,kkji}}{(\lambda+\mu)} - [\mu - (\lambda+2\mu) + (\lambda+\mu)] F_{j,jkki} = 0.$$

Останнє рівняння задовольняється, якщо

$$F_{i,kkjj} = \nabla^4 F_i = 0.$$

Задача 6.13. Довести, що за умови відсутності масових сил функції $u_i = \varphi_{,i} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,j}$ задовольняють рівнянню руху $\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{i,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i$, якщо кожна із функцій φ і ψ_i є розв'язками тривимірного хвильове рівняння.

Розв'язання

Підставимо функцію u_i в рівняння руху за умовами задачі, отримаємо

$$\mu(\varphi_{,ikk} + \varepsilon_{ijk}\psi_{k,jqq}) + (\lambda+\mu)(\varphi_{,jji} + \varepsilon_{jpq}\psi_{q,pji}) = \rho(\ddot{\varphi}_{,i} + \varepsilon_{ijk}\ddot{\psi}_{k,j}).$$

Але $\varepsilon_{jpq}\psi_{q,pji} = 0$, тому рівняння

$$((\lambda+2\mu)\varphi_{,kk} - \rho\ddot{\varphi})_{,i} + \varepsilon_{ijk}(\mu\psi_{k,qq} - \rho\ddot{\psi}_k)_{,j} = 0$$

задовольняється, якщо

$$\nabla^2\varphi = \rho\ddot{\varphi}/(\lambda+2\mu) \text{ і } \nabla^2\psi_k = \rho\ddot{\psi}_k/\mu.$$

Задача 6.14. Довести, що отримане в задачі 6.13 хвильове рівняння $c^2\nabla^2\varphi = \ddot{\varphi}$, де $c^2 = (\lambda+2\mu)/\rho$, має розв'язок

$$\varphi = \frac{g(r+ct) + h(r-ct)}{r},$$

де g і h – довільні функції своїх аргументів, а $r^2 = x_i x_i$.

Розв'язання

У даному випадку зручно скористатися виразом оператора Лапласа в сферичних координатах $\nabla^2 = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)$, оскільки $\varphi = \varphi(r,t)$. Маємо, що $r^2(\partial\varphi/\partial r) = r(g' + h') - (g + h)$, де штрих означає диференціювання функцій g і h по їх аргументах. Після повторного диференціювання знаходимо

$$\nabla^2\varphi = (g'' + h'')/r .$$

Аналогічно

$$\dot{\varphi} = (g'c - h'c)/r \text{ і } \ddot{\varphi} = c^2(g'' - h'')/r .$$

Тепер видно, що функція φ задовольняє рівнянню $c^2\nabla^2\varphi = \ddot{\varphi}$.

Задача 6.15. Вивести рівняння Бельтрами-Мічела $\sigma_{ij,kk} + \dfrac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) + \dfrac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\rho b_{k,k} = 0$ і вказати форму, яку вони приймають у випадку потенціальних масових сил, тобто коли $\rho b_i = \varphi_{,i}$.

Розв'язання

Підставимо співвідношення $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ в умови сумісності деформації $\dfrac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_k\partial x_m} + \dfrac{\partial^2\varepsilon_{km}}{\partial x_i\partial x_j} - \dfrac{\partial^2\varepsilon_{ik}}{\partial x_j\partial x_m} - \dfrac{\partial^2\varepsilon_{jm}}{\partial x_i\partial x_k} = 0$. Отримаємо

$$(1+\nu)(\sigma_{ij,km} + \sigma_{km,ij} - \sigma_{ik,jm} - \sigma_{jm,ik}) = \nu(\delta_{ij}\Theta_{,km} + \delta_{km}\Theta_{,ij} - \delta_{ik}\Theta_{,jm} - \delta_{jm}\Theta_{,ik}),$$

де $\Theta = \mathrm{I}_\sigma = \sigma_{ii}$.

Тільки шість рівнянь із написаних тут 81 є незалежними. Приймаючи $m = k$ і використовуючи рівняння рівноваги $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$, можемо написати

$$\sigma_{ij,kk} + \Theta_{,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) = \nu(\delta_{ij}\Theta_{,kk} + \Theta_{,ij})/(1+\nu),$$

звідки знаходимо

$$\Theta_{,kk} = -(1+\nu)\rho b_{k,k}/(1-\nu).$$

Підстановка виразу для $\Theta_{,kk}$ в попереднє рівняння приводить до шуканого в задачі результату

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\rho b_{k,k} = 0.$$

Якщо $\rho b_i = \varphi_{,i}$, то

$$\rho(b_{i,j} + b_{j,i}) = 2\varphi_{,ij} \text{ і } \rho b_{k,k} = \varphi_{,kk} = \nabla^2\varphi,$$

так що рівняння Бельтрами-Мічела приймає вигляд

$$\nabla^2\sigma_{ij} = \frac{\Theta_{,ij}}{1+\nu} + 2\varphi_{,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\nabla^2\varphi = 0.$$

6.3. Двовимірні задачі теорії пружності

Задача 6.16. Для плоского напруження, що діє паралельно площині x_1x_2, написати співвідношення між напруженнями і деформаціями, використовуючи коефіцієнти λ і μ. Показати, що ці формули співпадають з $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma}$, $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}$.

Розв'язання

У даному випадку $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, а враховуючи ще закон Гука в узагальненому вигляді $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$, маємо $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ і $\varepsilon_{33} = -\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/(\lambda + 2\mu)$. Враховуючи записані співвідношення, закон Гука можна написати в такому вигляді

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\lambda\mu\delta_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\gamma\gamma}/(\lambda + 2\mu) + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta},$$

де $\alpha, \beta, \gamma = 1{,}2$.

Звідки знаходимо

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 2\mu(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\gamma\gamma}/(\lambda + 2\mu).$$

Тепер формулу для $\sigma_{\alpha\beta}$ можна обернути і знайти

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\lambda\delta_{\alpha\beta}\,\sigma_{\gamma\gamma}/[2\mu(3\lambda + 2\mu)] + \sigma_{\alpha\beta}/2\mu = -\nu\delta_{\alpha\beta}\,\sigma_{\gamma\gamma}/E + (1+\nu)\sigma_{\alpha\beta}/E.$$

Зокрема, звідси витікає, що

$$\varepsilon_{33} = -\lambda\,\varepsilon_{\gamma\gamma}/(\lambda + 2\mu) = -\lambda\,\sigma_{\gamma\gamma}/[2\mu(3\lambda + 2\mu)] = -\nu\,\sigma_{\gamma\gamma}/E.$$

Задача 6.17. Для плоскої деформації, що паралельна площині x_1x_2, написати співвідношення між напруженням і деформацією, використовуючи коефіцієнти ν і E. Показати, що ці формули співпадають з $\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\sigma_{33} = \nu\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\sigma_{\alpha\alpha}$.

Розв'язання

За умовами задачі $u_3 \equiv 0$ і, відповідно, $\varepsilon_{33} = 0$, а з $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ витікає, що

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \lambda\,\sigma_{\alpha\alpha}/[2(\lambda + \mu)].$$

Тепер співвідношення між деформацією і напруженням приймає вигляд (узагальнений закон Гука)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma},$$

звідки

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\sigma_{\alpha\alpha}.$$

Обертаючи співвідношення узагальненого закону Гука, остаточно знаходимо

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma}+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{\alpha\beta}=\lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma}+2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Задача 6.18. Вивести рівняння Нав'є для плоского напруженого стану $\frac{E}{2(1+\nu)}u_{\alpha,\beta\beta}+\frac{E}{2(1+\nu)}u_{\beta,\beta\alpha}+\rho b_\alpha=0$ і показати, що вони еквівалентні відповідним рівнянням для плоскої деформації $\mu u_{\alpha,\beta\beta}+(\lambda+\mu)u_{\beta,\beta\alpha}+\rho b_\alpha=0$, якщо λ замінити на $\lambda'=\frac{2\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)}$.

Розв'язання

Обертання рівності $\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta}-\frac{\nu}{E}\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma}$, $\varepsilon_{33}=-\frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}$ за умови врахування $\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}\right)$ дає

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}\right)+\frac{2\nu E}{2\left(1-\nu^2\right)}\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma,\gamma}.$$

Виконуючи диференціювання останнього виразу по x_β і підстановку отриманого результату в рівняння рівноваги $\sigma_{\alpha\beta,\beta}+\rho b_\alpha=0$, отримуємо

$$\frac{E}{2(1+\nu)}u_{\alpha,\beta\beta}+\frac{E}{2(1+\nu)}u_{\beta,\alpha\beta}+\rho b_\alpha=$$

$$=\mu\vec{\nabla}^2u_\alpha+\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}u_{\beta,\beta\alpha}+\rho b_\alpha=0.$$

Якщо виконати заміну $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}=\frac{2\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)}+\mu=\lambda'+\mu$, то рівняння $\frac{E}{2(1+\nu)}u_{\alpha,\beta\beta}+\frac{E}{2(1+\nu)}u_{\beta,\beta\alpha}+\rho b_\alpha=0$ співпадуть з рівняннями $\mu u_{\alpha,\beta\beta}+(\lambda+\mu)u_{\beta,\beta\alpha}+\rho b_\alpha=0$.

Задача 6.19. Знайти зв'язок між константами A і B, за умови якого функція $\varphi=Ax_1^2x_2^3+Bx_2^5$ буде функцією напружень Ері.

Розв'язання

Згідно $\nabla^2\left(\nabla^2\varphi\right)=\vec{\nabla}^4\varphi=\varphi_{,1111}+2\varphi_{,1122}+\varphi_{,2222}=0$, функція φ повинна бути бігармонічною, тобто

$$\varphi_{,1111}+2\varphi_{,1122}+\varphi_{,2222}=0+24Ax_2+120Bx_2=0,$$

де $\varphi_{,1122}=12Ax_2$, $\varphi_{,2222}=120Bx_2$.

Звідки знаходимо, що задана функція $\varphi = Ax_1^2 x_2^3 + Bx_2^5$ буде функцією напружень Ері, коли

$A = -5B$.

Задача 6.20. Довести, що функцією напруження Ері може слугувати

$$\varphi = \frac{3F}{4c}\left[x_1 x_2 - \frac{x_1 x_2^3}{3c^2}\right] + \frac{P}{4c}x_2^2.$$

Знайти компоненти напруження в області $x_1 > 0$, $-c < x_2 < c$.

Розв'язання

Спочатку визначимо $\vec{\nabla}^4\varphi$ для $\varphi = \frac{3F}{4c}\left[x_1 x_2 - \frac{x_1 x_2^3}{3c^2}\right] + \frac{P}{4c}x_2^2$

$\varphi_{,1111} = 0$, $\varphi_{,1122} = 0$, $\varphi_{,2222} = 0$,

$\vec{\nabla}^4\varphi = \varphi_{,1111} + 2\varphi_{,1122} + \varphi_{,2222} = 0$.

Внаслідок того, що $\vec{\nabla}^4\varphi$ тотожно дорівнює нулю, функція φ може слугувати функцією напруження. Компоненти напруження, обчислені за формулами $\sigma_{11} = \varphi_{,22}$, $\sigma_{12} = -\varphi_{,12}$, $\sigma_{22} = \varphi_{,11}$, будуть такими

$$\sigma_{11} = \varphi_{,22} = -3F\frac{x_1 x_2}{2c^4} + \frac{P}{2c},$$

$$\sigma_{12} = -\varphi_{,12} = -3F\frac{c^3 - x_2^2}{4c^4},$$

$$\sigma_{22} = \varphi_{,11} = 0.$$

Такі напруження виникають у консольної балки під дією повздовжнього навантаження P і поперечного навантаження F на кінці балки (рис. 6.5).

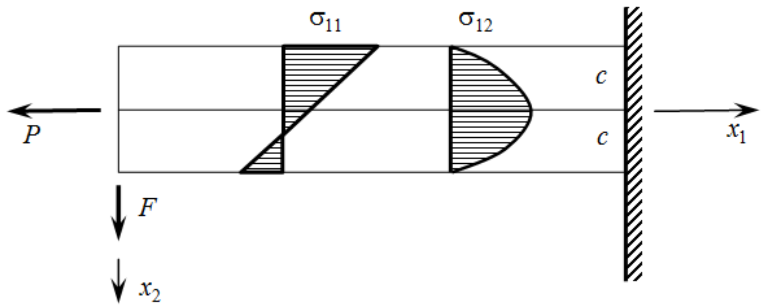


Рис. 6.5. Навантаження консольної балки

Задача 6.21. В задачі 2.36 було показано, що за умови відсутності масових сил рівняння рівноваги задовольняє функції $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jmn}\varphi_{qn,pm}$. Довести, що функцією напруження Ері в цьому випадку слугує $\varphi_{33} = \varphi(x_1, x_2)$, в той час як $\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23} \equiv 0$.

Розв'язання

Компонента φ_{33} є єдиною відмінною від нуля, і тому рівність $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jmn}\varphi_{qn,pm}$ перетворюється в

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ip3}\varepsilon_{jm3}\varphi_{33,pm} \text{ або } \sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma3}\varepsilon_{\beta\zeta3}\varphi_{33,\gamma\zeta}.$$

Оскільки $\varphi_{33} = \varphi$, то

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\zeta} - \delta_{\alpha\zeta}\delta_{\gamma\beta}\right)\varphi_{,\gamma\zeta} = \delta_{\alpha\beta}\varphi_{,\gamma\gamma} - \varphi_{,\alpha\beta}.$$

Тому компоненти напруження виражаються через функцію φ таким чином:

$$\sigma_{11} = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} - \varphi_{,11} = \varphi_{,22},\ \sigma_{12} = -\varphi_{,12},$$

$$\sigma_{22} = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} - \varphi_{,22} = \varphi_{,11}.$$

Задача 6.22. Для розв'язання задачі про диск радіуса a, що знаходиться під дією обертального моменту M, використовується функція напруження Ері $\Phi = B\theta$ в полярних координатах r, θ (рис. 6.6). Знайти компоненти напруження і величину константи B.

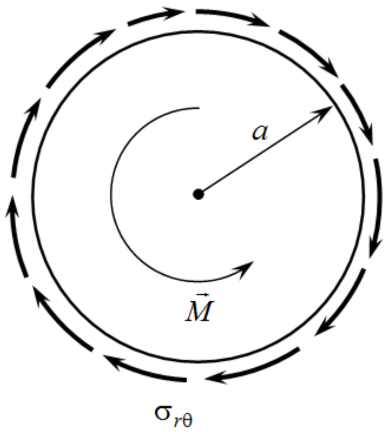


Рис. 6.6. До задачі 6.22

Розв'язання

Обчислимо компоненти навантаження. За формулами $\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ і $\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$ за умови, що $\Phi = B\theta$, отримуємо

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0,$$

а за формулою $\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{B}{r^2}.$$

Для рівноваги моментів відносно центра диску необхідно, щоб

$$M = \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta} a^2 d\theta = \int_0^{2\pi} B d\theta = 2\pi B,$$

де $a^2 = r^2$.

Звідки

$$B = \frac{M}{2\pi}.$$

6.4. Лінійна термопружність

Задача 6.23. Обернути вираз $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}$ і отримати визначальні рівняння термопружності $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta_{ij}(T - T_0)$.

Розв'язання

За умови $i = j$ з $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}$ отримуємо

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ii} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ii}\sigma_{ii}\right) + 3\alpha(T - T_0) \to$$

$$\to \varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{2\mu}\left(1 - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) + 3\alpha(T - T_0) \to \varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{2\mu}\left(\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu}\right) + 3\alpha(T - T_0) \to$$

$$\to \frac{\sigma_{ii}}{3\lambda + 2\mu} = \varepsilon_{ii} - 3\alpha(T - T_0) \to \sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{ii} - 3\alpha(T - T_0)).$$

Розв'язуючи $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}$ відносно σ_{ij}, знаходимо

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}(3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T - T_0))\right) + \alpha(T - T_0)\delta_{ij} \to$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}(\varepsilon_{kk} - 3\alpha(T - T_0)) - 2\mu\alpha\delta_{ij}(T - T_0) =$$

$$= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta_{ij}(T - T_0).$$

Задача 6.24. Вивести рівняння енергії $kT_{,ii} = \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T\dot{\varepsilon}_{ii}$ для термопружності, використовуючи при цьому функцію вільної енергії $f = u - Ts$.

Розв'язання

Припустимо, що вільна енергія є функцією деформації і температури $f = f(\varepsilon_{ij}, T)$. Підставимо функцію f в рівняння (тотожність Гіббса)

$\rho\dot{u}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\rho T\dot{s}$, де точками позначено диференціювання за часом. Тоді отримаємо

$$\left(\sigma_{ij}-\rho\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}-\rho\left(s+\frac{\partial f}{\partial T}\right)\dot{T}=0.$$

Оскільки члени в скобках не залежать від швидкості зміни деформації і температури, то з останньої рівності витікає, що

$$\sigma_{ij}=\rho\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}}\ \text{ і }\ s=-\frac{\partial f}{\partial T}.$$

Рівняння II закону термодинаміки для термопружного середовища має вигляд $Tds=\delta q$, тобто

$$\rho T\dot{s}=\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{\partial s}{\partial T}\dot{T}\right)=-q_{i,i}.$$

Звідси, зокрема, видно, що $T\dfrac{\partial s}{\partial T}=c_v$, де c_v – теплоємність за умови сталої деформації, коли $\dot{\varepsilon}_{ij}=0$. Скориставшись отриманими вище виразами для s і σ_{ij} через f, отримуємо $\dfrac{\partial s}{\partial T}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial T^2}$, тобто $c_v=-T\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)$ і $\dfrac{\partial s}{\partial\varepsilon_{ij}}=-\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varepsilon_{ij}\partial T}=-\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial T}\right)$.

Тому

$$-q_{i,i}=kT_{,ii}=\rho T\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial T}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{c_v}{T}\dot{T}\right).$$

З рівняння $\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij}-(3\lambda+2\mu)\alpha\delta_{ij}(T-T_0)$ видно, що

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial T}=-\alpha(3\lambda+2\mu)\delta_{ij},$$

тому, після підстановки $\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial T}$ в попереднє рівняння енергії, отримуємо

$$kT_{,ii}=\rho c_v\dot{T}+(3\lambda+2\mu)\alpha T\dot{\varepsilon}_{ii},$$

що і треба було вивести.

Задача 6.25. Використовуючи співвідношення $u^*=\dfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ і $\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij}-(3\lambda+2\mu)\alpha\delta_{ij}(T-T_0)$, отримати густину енергії деформації для термопружного середовища.

Розв'язання

Безпосередньою підстановкою σ_{ij}, що виражається визначальним рівнянням термопружності, в рівняння для u^*, знаходимо

$$u^* = \frac{1}{2}\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ij} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(3\lambda + 2\mu)\alpha\delta_{ij}(T - T_0)\varepsilon_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ij} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\varepsilon_{ii}.$$

6.5. Змішані задачі

Задача 6.26. Довести, що густину енергії викривлення форми $u^*_{(D)}$ для лінійного пружного матеріалу можна виразити через головні значення напруження таким чином

$$u^*_{(D)} = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

Розв'язання

Результати задачі 6.2 $u^*_{(D)} = \frac{s_{ij}e_{ij}}{2} = \frac{s_{ij}s_{ij}}{4G}$, можна записати через компоненти напруження таким чином

$$u^*_{(D)} = \frac{(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\sigma_{kk}/3)(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\sigma_{kk}/3)}{4G} = \frac{(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}/3)}{4G},$$

де $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\sigma_{kk}/3$ – девіторні напруження.

Цей вираз, записаний через головні напруження, буде мати вигляд

$$u^*_{(D)} = \frac{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3\right)}{4G} =$$

$$= \frac{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)/3}{4G} =$$

$$= \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

Задача 6.27. Використовуючи результати задачі 6.1, довести, що для пружного матеріалу можна написати $\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$ і $\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$.

Розв'язання

У задачі 6.1 отримано $u^* = \lambda\,\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}/2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$, тому

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_{pq}} = \frac{\lambda}{2}\left[\varepsilon_{ii}\left(\partial\varepsilon_{jj}/\partial\varepsilon_{pq}\right) + \varepsilon_{jj}\left(\partial\varepsilon_{ii}/\partial\varepsilon_{pq}\right)\right] + 2\mu\varepsilon_{ij}\left(\partial\varepsilon_{ij}/\partial\varepsilon_{pq}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\varepsilon_{ii}\delta_{jp}\delta_{jq} + \varepsilon_{jj}\delta_{ip}\delta_{iq}\right] + 2\mu\varepsilon_{ij}\delta_{ip}\delta_{jq} = \frac{\lambda}{2}\left[\varepsilon_{ii}\delta_{pq} + \varepsilon_{jj}\delta_{pq}\right] + 2\mu\varepsilon_{pq} =$$

$$= \lambda\varepsilon_{ii}\delta_{pq} + 2\mu\varepsilon_{pq} = \sigma_{pq}.$$

Аналогічно, з рівності $u^* = \left[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ii}\sigma_{jj}\right]/(2E)$, що отримано в задачі 6.1, маємо

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma_{pq}} = \frac{2(1+\nu)\sigma_{ij}\delta_{ip}\delta_{jq} - \nu\left(\sigma_{ii}\delta_{pq} + \sigma_{jj}\delta_{pq}\right)}{2E} =$$

$$= \frac{(1+\nu)\sigma_{pq} - \nu\delta_{pq}\sigma_{ii}}{E} = \varepsilon_{pq}.$$

Задача 6.28. Виразити густину енергії деформації u^* у вигляді функції інваріантів деформації.

Розв'язання

В задачі 6.1 було встановлено, що $u^* = \lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}/2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$. Але, згідно

$$\mathrm{I_E} = \varepsilon_{ii}, \quad \begin{array}{l} \mathrm{II_E} = 1/2\left(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) \to \mathrm{II_E} = 1/2\left(\mathrm{I_E I_E} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) \to 2\mathrm{II_E} = \left(\mathrm{I_E}\right)^2 - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \to \\ \to \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = -2\mathrm{II_E} + \left(\mathrm{I_E}\right)^2, \end{array}$$

тому після підстановки, отримуємо

$$u^* = \frac{\lambda}{2}\left(\mathrm{I_E}\right)^2 + \mu\left[-2\mathrm{II_E} + \left(\mathrm{I_E}\right)^2\right] = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)\left(\mathrm{I_E}\right)^2 - 2\mu\mathrm{II_E}.$$

Задача 6.29. Циліндричний вал довжиною L і круглого січення радіусом a знаходиться під дією пари сил у торцевому січенні, як показано на рис. 6.7. При цьому відмінними від нуля будуть компоненти напруження $\sigma_{13} = -G\alpha x_2$, $\sigma_{23} = G\alpha x_1$, де α – кут закручування на одиницю довжини валу. Знайти вираз для густини енергії деформації і повну енергію деформації валу.

Розв'язання

Скористаємося результатом задачі 6.1 у вигляді $u^* = \left[(1+\nu)\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \nu(\mathrm{tr}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}})^2\right]/(2E)$. В даному випадку

$$\mathrm{tr}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \text{ і } \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2G^2\alpha^2 r^2,$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Тому

$$u^* = \frac{1+\nu}{2E}2G^2\alpha^2 r^2 = \frac{1}{2G}G^2\alpha^2 r^2 = \frac{1}{2}G\alpha^2 r^2,$$

де $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

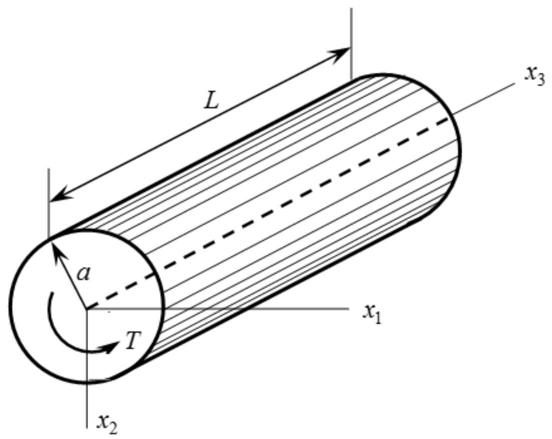


Рис. 6.7. До задачі 6.29

Повна енергія деформації знаходиться у вигляді інтегралу

$$U = \int_V u^* dV = \frac{G\alpha^2}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta dx_3 = \frac{\pi L G \alpha^2 a^4}{4}.$$

Відмітимо, що оскільки

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^a G\alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right) r dr d\theta = \frac{\pi G \alpha a^4}{2},$$

тоді

$$U = \frac{T\alpha L}{2},$$

тобто U дорівнює роботі зовнішнього моменту.

Задача 6.30. Довести, що пружні властивості (закон Гука і густина енергії деформації) середовища, мають вісь пружної симетрії порядку $N = 2$, і середовища з однією площиною пружної симетрії співпадають.

Розв’язання

Поворот осей на кут $\theta = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ призводить до напрямків еквівалентних пружних властивостей. Але до такого самого положення можна прийти за умови відображення відносно площини пружної симетрії.

Задача 6.31. Довести, що матрицю $[C_{KM}]$ з 12 незалежними константами, в якій $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{44} = C_{55} = C_{66}$ і $C_{12} = C_{13} = C_{23}$, можна звести до вигляду $[C_{KM}] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$, поворотом осей на довільний кут θ навколо осі x_3 (рис. 6.8).

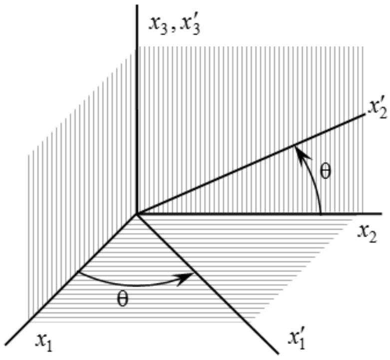


Рис. 6.8. Поворот осей на довільний кут θ навколо осі x_3

Розв'язання

Перетворення осей x_i в осі x_i' за умовами задачі дається тензором (матрицею) перетворення координат

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а згідно $\sigma'_{ij} = c_{ip}c_{jq}\sigma_{pq}$, маємо

$$\sigma'_{12} = (-\sin\theta\cos\theta)\sigma_{11} + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sigma_{12} + (\sin\theta\cos\theta)\sigma_{22}$$

або в позначеннях з одним індексом

$$\sigma'_6 = (-\sin\theta\cos\theta)\sigma_1 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sigma_6 + (\sin\theta\cos\theta)\sigma_2.$$

Точно так само, використовуючи формулу $\varepsilon'_{ij} = c_{ip}c_{jq}\varepsilon_{pq}$ та враховуючи, що

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \quad 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \varepsilon_4,$$
$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \quad 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5,$$
$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_3, \quad 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \varepsilon_6,$$

отримуємо

$$\varepsilon'_6 = (-2\sin\theta\cos\theta)\varepsilon_1 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\varepsilon_6 + (2\sin\theta\cos\theta)\varepsilon_2.$$

Але у разі ізотропного тіла $\sigma'_6 = C_{44}\varepsilon_6$, і, відповідно, в даному випадку $\sigma_2 - \sigma_1 = 2C_{44}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$. На кінець, згідно з видом матриці

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

за вказаних вище умов будемо мати

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \text{ і } \sigma_2 = C_{11}\varepsilon_2 + C_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

і, значить,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (C_{11} - C_{12})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Таким чином,

$$C_{11} - C_{12} = 2C_{44}.$$

Вважаючи, що

$$C_{44} = \mu,\ C_{12} = \lambda,\ C_{11} = \lambda + 2\mu,$$

приходимо до шуканої в задачі форми запису матриці пружних властивостей $[C_{KM}]$.

Задача 6.32. Пружне тіло, підпорядковується закону Гука, знаходиться в рівновазі під дією масових сил b_i і поверхневих сил $t_i^{(\mathbf{n})}$. Довести, що повна енергія деформації дорівнює половині роботи зовнішніх сил на переміщеннях u_i.

Розв'язання

Треба довести, що

$$\int_V \rho b_i u_i dV + \int_S t_i^{(\mathbf{n})} u_i dS = 2\int_V u^* dV.$$

Розглянемо інтеграл по поверхні, в якому зробимо заміну

$$t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ji} n_j,$$

і перетворимо його за теоремою Гауса-Остроградського, вважаючи, що $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

$$\int_S \sigma_{ji} n_j u_i dS = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dV.$$

Використовуючи розкладання градієнта переміщення $u_{i,j}$ на симетричну ε_{ij} і антисиметричну ω_{ij} складові, можна записати

$$\sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij},\ \omega_{ij} = 0.$$

З рівняння рівноваги отримуємо

$$\sigma_{ij,j} = -\rho b_i .$$

Таким чином можна записати

$$\int_S t_i^{(\mathbf{n})} u_i dS = \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = -\int_V \rho b_i u_i dV + 2\int_V \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2} dV .$$

Враховуючи те, що $u^* = \dfrac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, останній інтегральний вираз можна перевисати у вигляді

$$\int_V u^* dV = \frac{1}{2}\left(\int_V \rho b_i u_i dV + \int_S t_i^{(\mathbf{n})} u_i dS \right)$$

і теорема доведена.

Задача 6.33. Скористатися результатом задачі 6.32, щоб встановити єдиність розв'язку статичних задач теорії лінійної пружності, припустивши існування розв'язків $\sigma_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ і $\sigma_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$.

Розв'язання

В лінійній теорії пружності застосування методу суперпозиції розв'язків є обґрунтованим, тобто можна написати $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i = u_1^{(1)} - u_1^{(2)}$, що буде розв'язками рівняння рівноваги за умови $b_i = 0$. Для цього нового розв'язку, як було встановлено в задачі 6.32, справедливим є співвідношення

$$\int_S t_i^{(\mathbf{n})} u_i dS = 2\int_V u^* dV .$$

Оскільки обидва вихідних розв'язки задачі задовольняють граничним умовам, інтеграл у лівій частині частині дорівнює нулю, тому що на границі

$$t_i^{(\mathbf{n})} = t_i^{(1)} - t_i^{(2)}$$

згідно з $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j$ і

$$u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$$

згідно з $u_i = g_i(\mathbf{x})$. Таким чином,

$$\int_V u^* dV = 0 ,$$

але, оскільки u^* – позитивно визначена функція, це можливо тільки тоді, коли

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)} \equiv 0 \text{ або } \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}.$$

Якщо тензори деформації для двох допустимих розв'язків рівні між собою, то за законом Гука і напруження теж рівні між собою. Однакові також і переміщення з точністю до переміщення абсолютно твердого тіла. Таким чином, єдиність розв'язків встановлена.

Задача 6.34. Рівняння Нав'є можна представити в формі

$$\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + \rho b_i = 0,$$

яке у випадку нестискуваності $\left(\nu = \frac{1}{2}\right)$ стає невизначеним. Для такого випадку, використовуючи рівняння рівноваги, довести, що $\mu u_{i,jj} + \frac{\Theta_{,i}}{3} + \rho b_i = 0$.

Розв'язання

З рівняння $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ витікає, що

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ii},$$

а за умови $\nu = \frac{1}{2}$ виходить, що

$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i} = 0.$$

Таким чином, закон Гука для деформації приймає вигляд

$$2\varepsilon_{ij,j} = u_{i,jj} + u_{j,ij} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{ij,j} - \frac{2\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk,j}.$$

Але $u_{j,ij} = 0$ і $E = 3G$, коли $\nu = \frac{1}{2}$. Тому рівняння Нав'є набуває вигляду

$$u_{i,jj} = -\frac{\rho}{G}b_i - \frac{1}{3G}\sigma_{kk,i}$$

або

$$\mu\nabla^2 u_i + \frac{1}{3}\Theta_{,i} + \rho b_i = 0,$$

де $\mu = G$, $\Theta_{,i} = \sigma_{kk,i}$.

Задача 6.35. Для лінійного ізотропного термопружного середовища написати вираз для компонент тензора деформацій ε_{ij} через компоненти напружень σ_{ij}.

Розв'язання

В лінійному ізотропному термопружному середовищі поряд з пружними деформаціями ε_{ij}^e мають також місце температурні деформації ε_{ij}^T, тобто можна записати для компонент тензора деформацій ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^T, \tag{6.2}$$

де ε_{ij}^{e} – тензор пружних деформацій, який визначається із узагальненого закону Гука (через коефіцієнти Ламе (λ, μ) – $\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right]$, або через модуль пружності E і коефіцієнт Пуассона ν – $\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right]$); ε_{ij}^{T} – тензор температурних деформацій, який записується як – $\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha(T_0 - T)\delta_{ij}$, де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; T_0 і T – початкова і поточна температура тіла, відповідно; δ_{ij} – символ Кронекера.

Після підстановки виразів для пружних і температурних деформацій у рівняння (6.2), отримуємо співвідношення для компонент тензора деформацій лінійного ізотропного термопружного середовища

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right] + \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

або

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right] + \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

що і треба було записати.

Задача 6.36. Вважаючи, що деформація ε_{ij} і зміна температури $(T - T_0)$ малі, написати найбільш загальний вигляд функції вільної енергії для:

а) довільного лінійно-пружного середовища;

б) ізотропного середовища.

Користуючись отриманими виразами для вільної енергії і термодинамічними співвідношеннями, знайти вираз для компонент тензора напружень σ_{ij}.

Розв'язання

Вільна енергія F або ізохорно-ізотермічний потенціал виражається функцією

$$F = U - sT, \tag{6.3}$$

де U – внутрішня енергія; s – ентропія; T – температура.

Тоді тотожність Гіббса записана через функцію F, яка задана параметрами стану ε_{ij} і T, має вигляд

$$dF(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{\rho}\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij} - sdT, \tag{6.4}$$

де ρ – густина; ε_{ij} – тензор деформації; σ^{ij} – тензор напружень.

Тотожність Гіббса (6.4) дає можливість отримати іншу форму рівнянь стану

$$\sigma^{ij} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T, \qquad s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}}. \tag{6.5}$$

Після підстановки (6.5) в (6.4), отримуємо

$$dF(\varepsilon_{ij}, T) = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij}} dT. \tag{6.6}$$

Функцію вільної енергії $F(\varepsilon_{ij}, T)$ (6.4) при малих деформаціях і малих змінах температури можна представити розкладанням по ε_{ij}, $(T - T_0)$, $(s - s_0)$ до квадратичних членів включно. При цьому рівняння стану (6.5) лишаються лінійними.

а) використовуючи розкладання функції стану (6.6) в ряд за малими величинами ε_{ij} і $(T - T_0)$, вважаючи, що в напруженому стані деформації відсутні, отримуємо

$$F(\varepsilon_{ij}, T) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_0 (T - T_0) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_0 (T - T_0)^2 +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 \varepsilon_{ij}(T - T_0). \tag{6.7}$$

Виходячи з (6.7) можна записати вираз для компонент тензора напружень

$$\sigma^{ij} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 = A^{ijkl}\varepsilon_{kl} + B^{ij}(T - T_0), \tag{6.8}$$

де $A^{ijkl} = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{ij}$; $B^{ij} = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 \varepsilon_{ij}$.

б) для ізотропного середовища вільна енергія виражається співвідношенням

$$\rho_0 F(J_1, J_2, T) = \frac{\lambda J_2}{2} + \mu J_2 - aJ_1(T - T_0) - \frac{b(T - T_0)^2}{2} + d(T - T_0), \tag{6.9}$$

де $J_1 = \varepsilon_k^k, J_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij}$ – 1,2 інваріанти тензора деформацій, відповідно; λ, μ – коефіцієнти Ламе; a – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Тоді можна записати рівняння стану (6.5) або узагальнений закон Гука для ізотропного пружного середовища при $T \neq const$ для компонент тензора напружень, використовуючи (6.9)

$$\sigma^{ij} = \lambda J_1 \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - a(T - T_0)\delta_{ij}.$$

Задача 6.37. Девіатором тензора напружень називається тензор з компонентами $\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} J_1(p)\delta_{ij}$, де $J_1(p) = \sigma_i^{\ i}$. Написати вираз для інваріантів девіатора напружень I_1^d і I_2^d та з'ясувати їх знаки. Для лінійно-пружного середовища Гука написати вирази для компонент девіатора напружень через компоненти девіатора деформацій $\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} J_1(\varepsilon)\delta_{ij}$.

Розв'язання

Напишемо вирази для інваріантів девіатора напружень:

$$I_1^d = J_1^d = 0, \qquad I_2 = (I_1)^2 - \sigma_{ij}^d \left(\sigma^{ij}\right)^d = -J_2. \qquad (6.10)$$

З (6.10) очевидно, що $J_2^d \geq 0$ і $I_2^d \leq 0$.

Знайдемо σ_{ij} з $\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} J_1(p)\delta_{ij}$ і ε_{ij} з $\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} J_1(\varepsilon)\delta_{ij}$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^d + \frac{1}{3} J_1(p)\delta_{ij} = \sigma_{ij}^d \text{ і } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^d + \frac{1}{3} J_1(\varepsilon)\delta_{ij} = \varepsilon_{ij}^d, \qquad (6.11)$$

оскільки $I_1^d = J_1^d = 0$.

Підставимо значення тензорів напружень і деформацій з (6.11) в закон Гука $\left(\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_k^k + 2\mu\varepsilon_{ij}\right)$, отримаємо, що

$$\sigma_{ij}^d = \lambda\delta_{ij} J_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{ij}^d \to \sigma_{ij}^d = 2\mu\varepsilon_{ij}^d,$$

де $J_1(\varepsilon) = \varepsilon_k^k = 0$.

Задача 6.38. Призматичний стрижень із лінійно-пружного матеріалу знаходиться в рівновазі під дією розтягувальних зусиль, рівномірно розподілених по торцевих січеннях, і при вільних бічних гранях (простий розтяг). Знайти компоненти тензора деформацій при заданій величині напружень на торцях p. Вказати зв'язок між пружними константами середовища E та ν і коефіцієнтами Ламе λ та μ.

Розв'язання

За умовами задачі стрижень знаходиться в умовах одновісного розтягу, тобто $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$, а $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Напруження в напрямку розтягу визначаються із закону Гука

$$\sigma_{11} = p = E\varepsilon_{11}.$$

Звідки

$$\varepsilon_{11} = \frac{p}{E}.$$

Напишемо закон Гука через коефіцієнти Ламе λ та μ

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad i, j = \overline{1,3}$$

і через пружні константи середовища E та ν

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad i, j = \overline{1,3}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових компонентах тензора деформацій

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{6.12}$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \text{ звідки } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{6.13}$$

І навпаки. Із рівняння (6.13) знайдемо E

$$E = 2\mu(1+\nu). \tag{6.14}$$

Тепер підставимо (6.14) в (6.12) і знайдемо ν

$$\lambda = \frac{2\mu(1+\nu)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Далі отримане значення для ν підставимо в (6.14)

$$E = 2\mu\left(1 + \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right), \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.$$

Використовуючи зв'язок між пружними константами і коефіцієнтами Ламе $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ і $E = \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ можна записати, що

$$\varepsilon_{11} = \frac{p}{E} = p\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \text{ і}$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}p\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} = -p\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}.$$

Задача 6.39. Зразок із лінійно-пружного матеріалу знаходиться між двома парами паралельних жорстких стінок, так що його поперечні розміри не можуть змінюватися. На торцях діють однорідні стискуючі напруження p. Знайти напруження і деформації в матеріалі, вважаючи, що між ним та стінками тертя відсутнє.

Розв'язання

За умовами задачі маємо, що:

– на торцях зразка діють однорідні стискуючі напруження p (приймемо цей напрямок за x_1), то нормальні напруження σ_{11} будуть дорівнювати
$\sigma_{11} = -p$ і $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$;
– поперечні розміри зразка не змінюються, тобто поперечна деформація зразка дорівнює нулю
$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$.

Деформацію ε_{11} знайдемо із узагальненого закону Гука для тензора деформації

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}.$$

Тоді для ε_{11} при умові, що $\sigma_{11} = -p$ і $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, маємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\sigma_{11} + 2\sigma_{22}) + \frac{1}{2\mu}\sigma_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(-p + 2\sigma_{22}) - \frac{1}{2\mu}p.$$

Із узагальненого закону Гука для напружень маємо

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

знайдемо складову напруження σ_{22} при умові, що $\varepsilon_{22} = 0$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + 0 + 0) + 2\mu \cdot 0 = \lambda\varepsilon_{11}.$$

В результаті для знаходження ε_{11} і p_{22} маємо лінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(-p + 2\sigma_{22}) - \dfrac{1}{2\mu}p, \\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11}. \end{cases}$$

Підставляючи σ_{22} із другого рівняння системи рівнянь в перше, отримуємо
лінійне рівняння відносно ε_{11}

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(-p + 2\lambda\varepsilon_{11}) - \frac{1}{2\mu}p.$$

В результаті розв’язання цього рівняння, знаходимо

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda p}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{2\lambda^2\varepsilon_{11}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{1}{2\mu}p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\left(1 + \frac{2\lambda^2}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\right) = p\left(\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} - \frac{1}{2\mu}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu) + 2\lambda^2}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = p\frac{\lambda - (3\lambda + 2\mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\left(2\mu(3\lambda + 2\mu) + 2\lambda^2\right) = p(\lambda - (3\lambda + 2\mu)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = p\frac{\lambda-(3\lambda+2\mu)}{2\mu(3\lambda+2\mu)+2\lambda^2} = -p\frac{2(\lambda+\mu)}{2\left[\mu(3\lambda+2\mu)+\lambda^2\right]} =$$

$$= -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+3\lambda\mu+2\mu^2} = -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+\lambda\mu+2\lambda\mu+2\mu^2} =$$

$$= -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda(\lambda+\mu)+2\mu(\lambda+\mu)} = -p\frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)} =$$

$$= -\frac{p}{\lambda+2\mu}.$$

Тобто

$$\varepsilon_{11} = -\frac{p}{\lambda+2\mu}.$$

Тоді

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} = -\frac{p\lambda}{\lambda+2\mu},$$

що і треба було знайти.

Задача 6.40. Напружений стан, що описується кульовим тензором напружень $\sigma_{ij} = -pg_{ij}$, називається всебічним стисканням. Визначити компоненти деформації і відносну зміну об'єму θ. Коефіцієнт пропорційності між p і θ називається модулем об'ємного стискання K. Знайти вираз для K через E і ν та через коефіцієнти Ламе λ і μ.

Розв'язання

Для тензора деформацій при $\sigma_{ij} = -pg_{ij}$ співвідношення $\left(\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\right)$ приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(-pg_{ij} + \frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)}g_{ij}(3p)\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\left(-1+\frac{3\lambda}{3\lambda+2\mu}\right) = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\left(\frac{-3\lambda-2\mu+3\lambda}{3\lambda+2\mu}\right) = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\frac{-2\mu}{3\lambda+2\mu} =$$

$$= -\frac{pg_{ij}}{3\lambda+2\mu} = -\frac{1}{3}\frac{pg_{ij}}{\lambda+\frac{2}{3}\mu}.$$

Відносна зміну об'єму $\theta = \varepsilon_{ii}$,

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{1}{3}\frac{pg_{ii}}{\lambda+\frac{2}{3}\mu} = -\frac{1}{3}\frac{p3}{\lambda+\frac{2}{3}\mu} = -\frac{p}{\lambda+\frac{2}{3}\mu},$$

тоді $\theta = -\dfrac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}$.

Для модуля об'ємного стискання маємо

$$K = -\frac{p}{\varepsilon_{ii}} = -\frac{p}{-\dfrac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}} = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

або через модуль пружності E і коефіцієнт Пуасона ν будемо мати

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3}\frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

де $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ і $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

Що і треба було знайти.

6.6. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 6.41. Довести, що для однорідного ізотропного пружного середовища головні осі тензорів напруження і деформації співпадають.

Задача 6.42. Отримати вираз густини енергії деформації u^* для ортотропного пружного середовища. Використовувати при цьому формули

$$u^* = \frac{1}{2}C_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M \text{ і } [C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Відповідь: $u^* = \frac{1}{2}(C_{11}\varepsilon_1 + 2C_{12}\varepsilon_2 + 2C_{13}\varepsilon_3)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(C_{22}\varepsilon_2 + 2C_{23}\varepsilon_3)\varepsilon_2 +$
$+ C_{33}\varepsilon_3^2 + C_{44}\varepsilon_4^2 + C_{55}\varepsilon_5^2 + C_{66}\varepsilon_6^2.$

Задача 6.43. Визначити вигляд функції густини енергії деформації для випадків: а) плоского напруженого стану; б) плоскої деформації.

Відповідь: а) $u^* = \dfrac{1}{2E}\left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} + 2(1+\nu)\sigma_{12}^2\right];$

б) $u^* = \left(\mu + \dfrac{\lambda}{2}\right)\left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2\right) + \lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2\mu\varepsilon_{12}^2.$

Задача 6.44. Знайти $c(=\text{const})$, для якого функції $u_1 = A\sin\frac{2\pi}{l}(x_1 \pm ct)$, $u_2 = u_3 = 0$ слугують розв'язками рівняння $\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{i,ji} + \rho b_i = \rho\ddot{u}_i$ за відсутності масових сил.

Відповідь: $c = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$.

Задача 6.45. Довести, що для ізотропного лінійно пружного середовища густина енергії викривлення форми дорівнює $u^*_{(D)} = \frac{1}{4G}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\sigma_{jj}\right)$, а густина енергії розширення дорівнює $u^*_{(S)} = \frac{1}{18K}\sigma_{ii}\sigma_{jj}$.

Задача 6.46. Довести, що $\dfrac{1}{1+\nu} = \dfrac{2(\lambda+\mu)}{(3\lambda+2\mu)}$ і $\dfrac{\nu}{1-\nu} = \dfrac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}$.

Задача 6.47. Довести, що для плоскої деформації, яка паралельна площині x_1x_2, компонента масової сили $b_3 = 0$, а компоненти b_1 і b_2 є функціями тільки x_1 і x_2.

Задача 6.48. Використовуючи закони перетворення тензорів напруження і деформації, довести, що пружні константи C_{ijkm} є компонентами декартового тензора четвертого рангу, так що $C'_{ijkm} = c_{ip}c_{jq}c_{kr}c_{ms}C_{pqrs}$.

Задача 6.49. Довести, що функція напруження Ері $\varphi = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 - 6x_2^4$ задовольняють бігармонічному рівнянню $\nabla^4\varphi = 0$, і знайти компоненти напруження, вважаючи деформацію плоскою.

Відповідь: $\sigma_{ij} = 24\begin{pmatrix} x_1^2 - 3x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu\left(x_1^2 - x_2^2\right) \end{pmatrix}$.

Задача 6.50. Знайти деформації, що викликані напруженнями задачі 6.43, і довести, що рівняння сумісності виконуються.

Відповідь:

$$\sigma_{ij} = 24\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\begin{pmatrix} x_1^2 - 3x_2^2 - 2\nu\left(x_1^2 - x_2^2\right) & -2x_1x_2 & 0 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 + x_2^2 - 2\nu\left(x_1^2 - x_2^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.51. Для пружного тіла, що має вісь симетрії порядку $N = 6$, довести, що $C_{22} = C_{11}$, $C_{55} = C_{44}$, $C_{66} = 2(C_{11} - C_{12})$, а з решти пружних констант відмінні від нуля тільки C_{13} і C_{33}.

Задача 6.52. Довести, що в пружному середовищі за умови дії потенціальних масових сил $\rho b_\alpha = \nabla\psi = \psi_{,\alpha}$ рівняння сумісності має вигляд $\nabla^2\sigma_{\alpha\alpha} = \dfrac{1}{1-\nu}\nabla^2\psi$ у випадку плоскої деформації і $\nabla^2\sigma_{\alpha\alpha} = (1+\nu)\nabla^2\psi$ у випадку плоского напруженого стану.

Задача 6.53. Нехай $\nabla^4 F_i = 0$. Довести, що функції $u_i = 2\dfrac{(1-\nu)}{G}\nabla^2 F_i - \dfrac{F_{j,ji}}{G}$ будуть розв'язками рівняння Нав'є, якщо $b_i \equiv 0$ (див. задачі 6.12). Знайти компоненти напруження, коли $\mathbf{F} = \dfrac{B}{r}(x_2\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_2)$, де $r^2 = x_i x_i$.

Відповідь: $\sigma_{11} = -\sigma_{22} = 6\dfrac{QG}{r^5}x_1x_2$, $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{12} = 3\dfrac{QG}{r^5}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$, $\sigma_{13} = -\sigma_{23} = 3\dfrac{QG}{r^5}x_2x_3$, де $Q = 4B\dfrac{1-\nu}{G}$.

Задача 6.54. Функція напруження Ері задана в полярних координатах: $\Phi = Cr^2(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$, де C, α – сталі. Знайти величину C, якщо $\sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{r\theta} = \tau$ за умови $\theta = \alpha$ і $\sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{r\theta} = -\tau$ за умови $\theta = -\alpha$.

Відповідь: $C = \dfrac{\tau}{2\sin 2\alpha}$.

Задача 6.55. Довести, що в задачах термопружності за плоскої деформації
$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \alpha E(T - T_0)$ і $\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}(3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)$, а за умови плоского напруженого стану $\varepsilon_{33} = \dfrac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \alpha(T - T_0)$ і $\varepsilon_{\alpha\beta} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \dfrac{\nu}{E}\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\gamma} + \delta_{\alpha\beta}\alpha(T - T_0)$.

Задача 6.56. Довести, що за умови термопружності рівняння сумісності $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$ можна записати через функцію Ері $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ за умови плоскої деформації у вигляді $\nabla^4\varphi = -\dfrac{\alpha}{1-\nu}E\nabla^2(T - T_0)$, а у випадку плоского напруженого стану – у вигляді $\nabla^4\varphi = -\alpha E\nabla^2(T - T_0)$.

7. МЕХАНІКА РІДИН ТА ГАЗІВ

7.1. Основні властивості рідин. Ньютонівські рідини

Задача 7.1. Довести, що девіатор s_{ij} тензора напружень σ_{ij}, який задовольняє співвідношенню $\sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \tau_{ij}$, дорівнює t_{ij} – девіатору тензора τ_{ij}, що визначений тим самим співвідношенням.

Розв'язання

Із формули $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ знайдемо, що $\sigma_{ii} = -3p + \tau_{ii}$. Отже

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} - \delta_{ij}\left(-3p + \tau_{kk}\right)/3 = \tau_{ij} - \delta_{ij}\frac{\tau_{kk}}{3} = t_{ij}.$$

Задача 7.2. Визначити середнє нормальне напруження $\sigma_{ii}/3$ в нестисливій стоксовій (нелінійній) рідині, для якої $\tau_{ij} = \alpha D_{ij} + \beta D_{ik}D_{kj}$, причому α, β – сталі, де $D_{ij} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) = v_{j,i} + v_{i,j}$ – компоненти тензора швидкості деформації, с$^{-1}$; v_i – компоненти вектора швидкості, м/с.

Розв'язання

Із закону Нав'є-Стокса $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, де τ_{ij} – тензор в'язких напружень, p – тиск, витікає, що $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \alpha D_{ij} + \beta D_{ik}D_{kj}$ і тому $\sigma_{ii} = -3p + \alpha D_{ii} + \beta D_{ik}D_{ki}$. Але $D_{ik} = D_{ki}$ і $D_{ii} = v_{i,i} = 0$ для нестисливої рідини. Таким чином

$$\sigma_{ii}/3 = -p + \beta D_{ij}D_{ji}/3 = -p + 2\beta II_D/3,$$

де II_D – другий інваріант тензора швидкості деформації.

Задача 7.3. Адіабатна течія (без тертя) ідеального газу (що підпорядковується рівнянню Клапейрона) представляє собою баротропну течію (баротропним називається процес, в якому $p = f(\rho)$) і описується рівнянням $p = C\rho^k$, де C і k – сталі, причому $k = c_p/c_v$ – відношення теплоємності за умови сталого тиску і сталого об'єму. Знайти залежності між температурою і густиною, а також між температурою і тиском для даного процесу.

Розв'язання

Підставляючи $p = C\rho^k$ в рівняння стану ідеального газу $p = \rho RT$ (де R – універсальна газова стала, Дж/(кг·К), T – температура, К), знаходимо співвідношення між температурою і густиною

$$C\rho^k = \rho RT \rightarrow \frac{\rho^{k-1}}{T} = \frac{R}{C} = \text{const}.$$

Окрім того, із рівняння $p = C\rho^k \to \rho = \left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{k}}$ і знов із рівняння $p = \rho RT$ отримуємо залежність між температурою і тиском

$$p = \rho RT \to \left(\rho = \left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{k}}\right) \to p = \left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{k}} RT \to \frac{p}{p^{\frac{1}{k}}} = \frac{RT}{C^{\frac{1}{k}}} \to$$

$$\to p^{1-\frac{1}{k}} = \frac{RT}{C^{\frac{1}{k}}} \to \frac{p^{\frac{k-1}{k}}}{T} = \frac{R}{C^{\frac{1}{k}}} = \text{const.}$$

Задача 7.4. Написати визначальне рівняння для ньютонівської рідини з нульовою об'ємною в'язкістю $\chi^* \equiv 0$.

Розв'язання

За умови $\chi^* \equiv 0$, згідно $\chi^* = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^* = 0$, $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$ і з $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}$ витікає, що

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \left(\frac{2}{3}\mu^*\right)\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}.$$

Останній вираз можна переписати через девіатор тензора швидкості деформації

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu^*\left(D_{ij} - \delta_{ij}\frac{D_{kk}}{3}\right) = -p\delta_{ij} + 2\mu^* D'_{ij}.$$

Якщо ввести ще девіатор напружень s_{ij}, то визначальні рівняння можна представити двома співвідношеннями

$s_{ij} = 2\mu^* D'_{ij}$ і $\sigma_{ii} = -3p$.

Задача 7.5. Знайти вираз для потужності напруження $\sigma_{ij}D_{ij}$ в ньютонівській рідині з визначальними рівняннями

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}. \tag{7.1}$$

Розв'язання

Використовуючи визначальні рівняння (7.1), потужність напруження за визначенням буде дорівнювати

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}D_{ij} &= -p\delta_{ij}D_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}D_{kk}D_{ij} + 2\mu^* D_{ij}D_{ij} = \\ &= -pD_{ii} + \lambda^* D_{ii}D_{jj} + 2\mu^* D_{ij}D_{ij}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

У символічних позначеннях ця рівність має вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{D}} = -p\left(\operatorname{tr} \hat{\mathbf{D}}\right) + \lambda^*\left(\operatorname{tr} \hat{\mathbf{D}}\right)^2 + 2\mu^* \hat{\mathbf{D}} : \hat{\mathbf{D}}.$$

Вираз (7.2) можна записати через девіатор D'_{ij}

$$\sigma_{ij} D_{ij} = -pD_{ii} + \lambda^* D_{kk} D_{jj} + 2\mu^* \left(D'_{ij} + \delta_{ij} \frac{D_{kk}}{3} \right)\left(D'_{ij} + \delta_{ij} \frac{D_{qq}}{3} \right) =$$

$$= -pD_{ii} + \chi^* D_{ii} D_{jj} + 2\mu^* D'_{ij} D'_{ij},$$

де $\chi^* = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*$,

або в символічних позначеннях

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{D}} = -p\left(\operatorname{tr} \hat{\mathbf{D}}\right) + \chi^*\left(\operatorname{tr} \hat{\mathbf{D}}\right)^2 + 2\mu^* \hat{\mathbf{D}}' : \hat{\mathbf{D}}'.$$

Задача 7.6. Написати умови, за яких середній нормальний тиск $p_m = -\frac{\sigma_{ii}}{3}$ дорівнює термодинамічному тиску в ньютонівській рідині.

Розв'язання

Визначальне рівняння $\sigma_{ii} = -3p + 3\chi^* D_{ii}$ дає $p_m - p = \chi^* D_{ii}$. Таким чином $p_m = p$ буде в таких випадках:

коли $\chi^* \equiv 0$, тобто коли $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$

і коли $D_{ii} = 0$.

Задача 7.7. Перевірити правильність написання рівнянь руху Нав'є-Стокса-Дюгема нютьнівської рідини $\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda + \mu) v_{j,ji} + \mu v_{i,jj}$ і знайти який вигляд приймає рівняння енергії $\dot{u} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + z$ для цієї рідини, якщо теплопровідність відповідає закону Фур'є $q_i = -kT_{,i}$.

Розв'язання

Враховуючи, що $D_{ii} = v_{i,i}$, співвідношення $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}$ можна записати у вигляді

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} v_{k,k} + \mu^*\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right).$$

Тоді

$$\sigma_{ij,j} = -p_{,j}\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} v_{k,kj} + \mu^*\left(v_{i,jj} + v_{j,ij}\right) = -p_{,i} + \left(\lambda^* + \mu^*\right) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj}.$$

Підставляючи цей вираз в $\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$, безпосередньо перевіряємо виконання $\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \left(\lambda^* + \mu^*\right) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj}$.

Підставимо вищезгадані формули для σ_{ij} і закон Фур'є в рівняння енергії і знайдемо

$$\rho\dot{u} = \left[-p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}v_{k,k} + \mu^*\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)\right]\frac{\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)}{2} - kT_{,ii} + \rho z\,.$$

Після деяких перетворень отримуємо

$$\rho\dot{u} = -pv_{i,j} + \lambda^* v_{i,i}v_{j,j} + \mu^*\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)\frac{\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)}{2} - kT_{,ii} + \rho z\,.$$

Задача 7.8. Знайти сумарну поверхневу силу T_i, що діє на замкнуту поверхню S, яка містить об’єм V ньютонівської рідини (рис. 7.1) з нульовим коефіцієнтом об’ємної в’язкості.

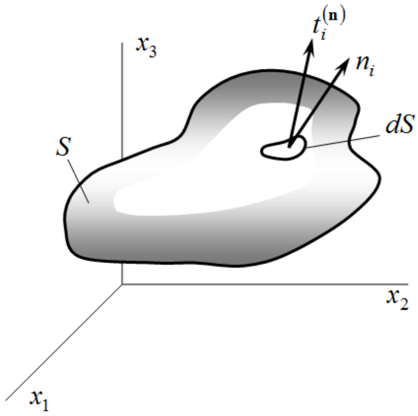


Рис. 7.1. До задачі 7.8

Розв’язання

Елементарна поверхнева сила $dT_i = t_i^{(\mathbf{n})}dS$, а повна сила визначається інтегралом $T_i = \int\limits_S t_i^{(\mathbf{n})}dS$, який, використовуючи властивості напруження, можна представити у вигляді

$$T_i = \int\limits_S \sigma_{ji}n_j dS\,.$$

За умови врахування результату задачі 7.4 у випадку нульового значення коефіцієнта об’ємної в’язкості $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu^* D'_{ij}$ отримуємо

$$T_i = \int\limits_S \left(-p\delta_{ij} + 2\mu^* D'_{ij}\right)n_j dS\,.$$

Застосовуючи теорему Гауса-Остроградського, останній вираз можна переписати у вигляді

$$T_i = \int\limits_V \left(2\mu^* D'_{ij} - p_{,i}\right)dV\,.$$

Задача 7.9. В осесиметричному потоці в напрямку осі x_3 швидкість є функцією x_3 і r, де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Знайти, який вигляд приймає при цьому рівняння нерозривності, якщо вектор швидкості представлений в формі $\vec{v} = q\vec{e}_r + v_3\vec{e}_3$, де $\vec{e}_r$ – одиничний вектор радіального напрямку.

Розв'язання

Рівняння нерозривності в символічних позначеннях має вигляд $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0.$ В даному випадку використовуємо оператор ∇ в циліндричних координатах

$$\nabla\cdot(\rho\vec{v})=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho q)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3}.$$

З врахуванням попереднього рівняння для рівняння нерозривності отримуємо

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho q)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3}=0\to r\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(r\rho q)}{\partial r}+\frac{\partial(r\rho v_3)}{\partial x_3}=0.$$

Задача 7.10. Двовимірна течія є паралельною площині x_1x_2, компонента швидкості v_3 і $\frac{\partial v_3}{\partial x_3}$ дорівнюють нулю. Написати для такого випадку рівняння Нав'є-Стокса і рівняння нерозривності нестисливої рідини.

Розв'язання

Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини мають вигляд

$$\rho\dot{v}_i=\rho b_i-p_{,i}+\mu^* v_{i,jj},\ i.j=1,2,3, \tag{7.3}$$

де b_i – компоненти вектору масової сили, Н/кг; p – тиск, Па; μ – динамічна в'язкість, Па·с.

Рівняння нерозривності для нестисливої рідини внаслідок того, що $\rho=\text{const}\to d\rho/dt=0$, набуває вигляду

$$v_{i,i}=0 \text{ або } \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0. \tag{7.4}$$

Рівняння (7.3) для $i=3$(за умови $v_3=0$) дає $\rho b_3=p_{,3}$,

а для $i=1,2$ дає $\rho\dot{v}_\alpha=\rho b_\alpha-p_{,\alpha}+\mu^* v_{\alpha,\beta\beta},\ \alpha,\beta=1,2$.

Якщо масові сили рівні нулю $(b_i=0)$ і $v_1=v_1(x_1,x_2,t),\ v_2=0,\ p=p(x_1,x_2,t),$ то рівняння Нав'є-Стокса записується тільки для координати x_1

$$\rho\frac{dv_1}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu^*\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)$$

і рівняння нерозривності

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=0.$$

7.2. Усталена течія. Гідростатика. Безвихрова течія

Задача 7.11. Нехай атмосферне повітря є ідеальним газом, температура якого змінюється лінійно з висотою $T = T_0 - \alpha x_3$, де T_0 – температура на поверхні Землі, а координата x_3 відраховується від поверхні Землі угору. Визначити атмосферний тиск як функцію x_3 в умовах гідростатики.

Розв'язання

В цьому випадку із рівняння стану $p = \rho RT$ витікає, що $p = \rho R(T_0 - \alpha x_3)$. Оскільки із масових сил діє тільки постійна сила тяжіння $b_3 = -g$, то рівняння гідростатики $\rho b_3 = p_{,3}$ дає $\dfrac{dp}{dx_3} = -\rho g$ і, враховуючи те, що $\rho = p/[R(T_0 - \alpha x_3)]$, отримуємо

$$\frac{dp}{dx_3} = -pg/[R(T_0 - \alpha x_3)].$$

Розділимо змінні останнього звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dp}{p} = -g/[R(T_0 - \alpha x_3)]dx_3.$$

Загальний розв'язок цього звичайного диференціального рівняння після його інтегрування має вигляд

$\ln p = \dfrac{g}{R\alpha}\ln(T_0 - \alpha x_3) + \ln C$, де C – постійна інтегрування.

Таким чином, після потенціювання отримуємо, що $p = C(T_0 - \alpha x_3)^{\frac{g}{R\alpha}}$,

і якщо $p = p_0$ при $x_3 = 0$, то $C = p_0 T_0^{-\frac{g}{R\alpha}}$, і, відповідно,

$$p = p_0 T_0^{-\frac{g}{R\alpha}}(T_0 - \alpha x_3)^{\frac{g}{R\alpha}} \to p = p_0\left(1 - \frac{\alpha x_3}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}.$$

Задача 7.12. Баротропна рідина (баротропним називається процес, в якому $p = f(\rho)$) описується рівнянням стану $p = \lambda\rho^k$, де λ і k – сталі. Рідина лишається в спокої в полі сили тяжіння, що діє в напрямку x_3. Знайти розподіл тиску в залежності від x_3, якщо для $x_3 = 0$ тиск дорівнює p_0.

Розв'язання

Із рівняння гідростатики $\nabla p = \rho\vec{b}$ (яке є наслідком рівняння Нав'є-Стокса за умови $\vec{v}^T = (0 \quad 0 \quad 0)$) витікають такі рівняння рівноваги

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g\,,\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0\,,\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0\,.$$

Замітимо, що за умови відсутності масових сил у напрямках x_1 і x_2, тобто коли $b_1 = b_2 = 0$, тиск у цих напрямках є постійно величиною. За умови врахуванні залежності

$$p = \lambda\rho^k \to \rho = \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}}$$

рівняння рівноваги для напрямку x_3 приймає вигляд

$$\frac{dp}{dx_3} = -\rho g \to \frac{dp}{dx_3} = -\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}} g \to \frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = -\frac{g}{\lambda^{\frac{1}{k}}}dx_3 \to p^{-\frac{1}{k}}dp = -g\lambda^{-\frac{1}{k}}dx_3\,.$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримуємо загальний його розв’язок

$$\int p^{-\frac{1}{k}}dp = -\int g\lambda^{-\frac{1}{k}}dx_3 \to \frac{k}{k-1}p^{-\frac{1}{k}+1} = -g\lambda^{-\frac{1}{k}}x_3 + C \to \frac{k}{k-1}p^{\frac{k-1}{k}} = -g\lambda^{-\frac{1}{k}}x_3 + C.$$

Але $p = p_0$ за умови $x_3 = 0$, звідки $C = \frac{k}{k-1}p_0^{\frac{k-1}{k}}$. Таким чином

$$p^{\frac{k-1}{k}} = -g\lambda^{-\frac{1}{k}}x_3 + \frac{k}{k-1}p_0^{\frac{k-1}{k}}\,.$$

Задача 7.13. Широка ємність наповнена нестисливою рідиною рухається з постійним прискоренням $\vec{a} = a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ в полі сили тяжіння, що направлена вздовж осі x_3 (рис. 7.2). Знайти нахил вільної поверхні рідини в ємності.

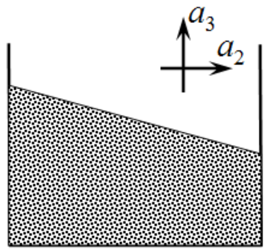


Рис. 7.2. До задачі 7.13

Розв’язання

Із рівняння гідростатики $\nabla p = \rho\vec{b}$ (яке є наслідком рівняння Нав’є-Стокса при $\vec{v}^T = (0 \quad 0 \quad 0)$) витікають такі рівняння рівноваги

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0\,,\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho a_2\,,\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho(g - a_3).$$

Інтегруючи два останніх рівняння, отримуємо

$$p=\rho a_2x_2+f(x_3) \text{ і } p=-\rho(g-a_3)x_3+h(x_3),$$
де f,h – довільні функції своїх аргументів.

Об'єднуючи два останніх рівняння, одержуємо загальну формулу для тиску
$$p=\rho a_2x_2-\rho(g-a_3)x_3+p_0,$$
де p_0 – тиск на початку координат на вільній поверхні рідини. Оскільки всюди на вільній поверхні $p=p_0$, то рівняння шуканої вільної поверхні буде таким
$$\rho a_2x_2-\rho(g-a_3)x_3=0\to\frac{x_2}{x_3}=\frac{(g-a_3)}{a_2}.$$

Задача 7.14. Якщо течія рідини відбувається дуже повільно, так що членами порядку квадрата швидкості й вище можна знехтувати, то отримуємо граничний випадок, який відомий під назвою повзучого руху. Довести, що в такому випадку за усталеного руху нестисливої рідини та нульових масових сил тиск є гармонічною функцією, тобто $\nabla^2p=0$.

Розв'язання

Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини мають вигляд
$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_jv_{i,j}\right)=\rho b_i-p_{,i}+\mu^*v_{i,jj},\ i.j=1,2,3, \tag{7.5}$$
де ρ – густина, кг/м^3; v_i – компоненти вектора швидкості, м/с; t – час, с; b_i – компоненти вектора масової сили, Н/кг; p – тиск, Па; μ^* – динамічна в'язкість, Па·с.

Для випадку повзучого руху рідини рівняння (7.5) можна лінеаризувати (тобто прийняти, що конвективна похідна нехтовно мала $v_jv_{i,j}=0$), що дає
$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=\rho b_i-p_{,i}+\mu^*v_{i,jj},\ i.j=1,2,3. \tag{7.6}$$

З рівняння (7.6) видно, що за умови усталеного руху $\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}=0\right)$ з нульовими масовими силами $(b_i=0)$ отримуємо, що
$$p_{,i}=\mu^*v_{i,jj},\ i.j=1,2,3. \tag{7.7}$$

Застосуємо оператор дивергенції до обох частин (7.7) в результаті отримаємо
$$p_{,ii}=\mu^*v_{i,ijj},\ i.j=1,2,3. \tag{7.8}$$

Враховуючи те, що рівняння нерозривності для нестисливої рідини має вигляд
$$v_{i,i}=0,$$

Одержуємо з (7.8)

$$p_{,ii} = \nabla^2 p = 0,$$

що і треба було довести.

Задача 7.15. Записати рівняння нерозривності і рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема для безвихрового руху через потенціал швидкості φ.

Розв'язання

Течія, за якої тензор вихору $\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \nabla - \nabla \cdot \mathbf{v})$ дорівнює нулю, тобто виконується рівність $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, яка виражає необхідну і достатню умову існування потенціалу швидкості φ, а значить, вектор швидкості для безвихрової течії можна представити таким чином

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi \to v_i = -\varphi_{,i}, \; i = 1,2,3. \tag{7.9}$$

Відповідно до (7.9) маємо $v_i = -\varphi_{,i}$, внаслідок чого рівняння нерозривності приймає вигляд

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \to \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(-\nabla\varphi)] = 0 \to \dot{\rho} - \rho\nabla^2\varphi = 0.$$

Рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема

$$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*)v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj}, \; i, j = 1,2,3, \tag{7.10}$$

де λ^*, μ^* – коефіцієнти в'язкості рідини,

за умови $v_i = -\varphi_{,i}$ запишеться таким чином

$$-\rho\dot{\varphi}_{,i} = \rho b_i - p_{,i} - (\lambda^* + \mu^*)\varphi_{,jji} - \mu^*\varphi_{,ijj}, \; i, j = 1,2,3,$$

або

$$-\rho\left(\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial t} + \varphi_{,k}\varphi_{,ik}\right) = \rho b_i - p_{,i} - (\lambda^* + 2\mu^*)\varphi_{,jji}, \; i, j = 1,2,3,$$

або в символічних позначеннях

$$-\rho\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2}\right) = \rho\mathbf{b} - \nabla p - (\lambda^* + 2\mu^*)\nabla(\nabla^2\varphi).$$

Задача 7.16. Знайти функцію тиску $P(p)$ під час баротропної течії рідини (баротропним називається процес, в якому $p = f(\rho)$) з рівнянням стану $p = \lambda\rho^k$, де λ і k – сталі.

Розв'язання

За наявності баротропності течії, коли $\rho = \rho(p)$, можна ввести за визначенням функцію тиску

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}. \tag{7.11}$$

Виконаємо інтегрування (7.11) з врахуванням $p = \lambda\rho^k \to dp = \lambda\rho^{k-1}d\rho$, отримаємо

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\lambda\rho^{k-1}d\rho}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} \lambda\rho^{k-2}d\rho = \frac{\lambda}{k-1}\rho^{k-1}\Bigg|_{\rho_0}^{\rho} = \left|\lambda = \frac{p}{\rho^k}\right| =$$

$$\frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho^k}\rho^{k-1}\Bigg|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\Bigg|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0}\right).$$

7.3. Ідеальна рідина. Рівняння Бернулі. Циркуляція

Задача 7.17. Інтегруванням рівнянь Ейлера, що записане для баротропної течії рідини за умови дії потенціальних масових сил $\dot{v}_{,i} = -(\Omega + P)_{,i}$, де $-\Omega_{,i} = b_i$, вздовж ліній току отримати рівняння $\Omega + P + \frac{v^2}{2} + \int \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i = C(t)$.

Розв'язання

Рівняння Ейлера вигляду

$$\dot{v}_{,i} = -(\Omega + P)_{,i} \to \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} + \Omega_{,i} + P_{,i} = 0, \qquad (7.12)$$

де $-\Omega_{,i} = b_i$, $P_{,i}$ – похідна від функції тиску $P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}$.

Нехай dx_i – елементарне переміщення вздовж лінії току. Візьмемо скалярний добуток цього переміщення на (7.12) і виконаємо інтегрування

$$\int \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + \int v_j v_{i,j} dx_i + \int \Omega_{,i} dx_i + \int P_{,i} dx_i = C(t). \qquad (7.13)$$

Оскільки

$$\Omega_{,i} dx_i = d\Omega, \text{ то } \int \Omega_{,i} dx_i = \int d\Omega = \Omega \qquad (7.14)$$

і

$$P_{,i} dx_i = dP, \text{ то } \int P_{,i} dx_i = \int dP = P. \qquad (7.15)$$

Окрім того, вздовж лінії току $dx_i = \frac{v_i}{v} ds$, де ds – елемент відстані.

Таким чином для конвективної похідної маємо

$$v_j v_{i,j} dx_i = v_j v_{i,j} \frac{v_i}{v} ds = v_i v_{i,j} \frac{v_j}{v} ds = v_i v_{i,j} dx_j = v_i dv_i.$$

Тому

$$\int v_j v_{i,j} dx_i = \int v_i dv_i = \frac{1}{2} v_i v_i = \frac{v^2}{2}. \qquad (7.16)$$

В результаті, після підстановки (7.14)–(7.16) в (7.13), будемо мати

$$\Omega + P + \frac{v^2}{2} + \int \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i = C(t),$$

що і треба було показати.

Задача 7.18. Рідина з рівнянням стану $p = \lambda\rho^k$, де λ і k – сталі, витікає із великого закритого резервуару через гладку тонку трубку за умови баротропної течії. Тиск в резервуарі дорівнює N атмосферам. Визначити швидкість течії газу, вважаючи тиск у струмені на виході із резервуару рівним атмосферному.

Розв'язання

Застосуємо інтеграл Бернулі до усталеної течії в двох точках: A – в рідині, що знаходиться в спокої в середині резервуару, і B – на вільній поверхні струменя, що витікає. Рівняння $\Omega + P + \frac{v_i v_i}{2} + \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) dx_i = C(t)$ дає $\Omega_A + P_A + \frac{v_A^2}{2} = \Omega_B + P_B + \frac{v_B^2}{2}$. Але $v_A = 0$ і, якщо знехтувати силою тяжіння, то це рівняння прийме вигляд (див. задачу 7.16 – $P(p) = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0}\right)$)

$$\frac{k}{k-1}\left(\frac{p_A}{\rho_A} - \frac{p_B}{\rho_B}\right) = \frac{v_B^2}{2}$$

або

$$v_B^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_B}{\rho_B}\left(\frac{N\rho_B}{\rho_A} - 1\right).$$

Оскільки

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{-\frac{1}{k}} = N^{-\frac{1}{k}},$$

то остаточно будемо мати

$$v_B^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_B}{\rho_B}\left(N^{\frac{k-1}{k}} - 1\right).$$

Задача 7.19. Довести, що в нев'язкої баротропної рідини за умови дії потенціальних сил швидкість зміни циркуляції дорівнює нулю (теорема Кельвіна про сталість циркуляції).

Розв'язання

Формула для визначення матеріальної похідної від циркуляції має вигляд

$$\dot{\Gamma}_c = \oint (\dot{v}_i dx_i + v_i dv_i). \qquad (7.17)$$

Але для даного випадку рівняння для визначення першого доданку в підінтегральному виразі (7.17) можна скористатися рівнянням Ейлера, що записане для баротропної течії рідини за умови дії потенціальних масових сил у вигляді $\dot{v}_i = -(\Omega + P)_{,i}$, де $-\Omega_{,i} = b_i$, і тому

$$\dot{\Gamma}_c = \oint\left(\dot{v}_i dx_i + v_i dv_i\right) \to \dot{\Gamma}_c = \oint\left(-\Omega_{,i} dx_i - P_{,i} dx_i + v_i dv_i\right) =$$
$$= -\oint\left[d\Omega + dP - d\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] == -\oint d\left(\Omega + P - \frac{v^2}{2}\right) = 0 \qquad (7.18)$$

внаслідок того, що підінтегральний вираз є повним диференціалом (відомо, що завжди $\oint du = 0$).

При отриманні співвідношень (7.18) використані такі перетворення:

$$\Omega_{,i} dx_i = d\Omega,\; P_{,i} dx_i = dP,\; \int v_i dv_i = \frac{1}{2} v_i v_i = \frac{v^2}{2}.$$

Задача 7.20. Знайти циркуляцію швидкості по контуру квадрата $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = 0$ (рис. 7.3) в двовимірній течії з полем швидкості $\mathbf{v} = (x_1 + x_2)\mathbf{e}_1 + (x_1^2 - x_2)\mathbf{e}_2$.

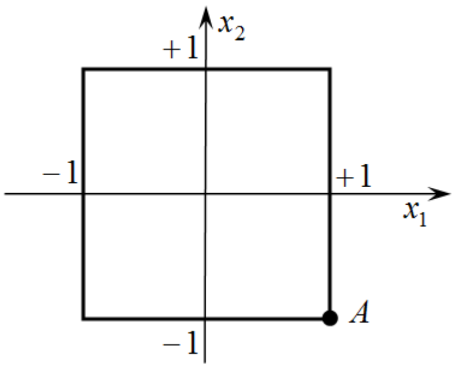


Рис. 7.3. До задачі 7.20

Розв'язання

Скористаємося символьним записом формули $\Gamma_c = \oint \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dS$ за умови, що $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ і $\nabla \times \mathbf{v} = (2x_1 - 1)\mathbf{e}_3$

$$\Gamma_c = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (2x_1 - 1) dx_1 dx_2 = -4.$$

До такого ж результату можна прийти за допомогою формули $\Gamma_c = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$

$$\Gamma_c = \int_{-1}^{1} (1 - x_2) dx_2 + \int_{1}^{-1} (x_1 - 1) dx_1 + \int_{1}^{-1} (1 - x_2) dx_2 + \int_{-1}^{1} (x_1 - 1) dx_1 = -4.$$

Тут інтегрування починається в точці A і ведеться проти годинникової стрілки.

7.4. Потенціальна течія. Плоска потенціальна течія

Задача 7.21. Вивести рівняння газової динаміки ($\left(c^2\delta_{ij} - v_i v_j\right)v_{j,i} = 0 \ \vee \ c^2\nabla\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = 0$, де c – швидкість звуку в середовищі, м/с) та записати ці рівняння через потенціал швидкості φ. Рівняння газової динаміки отримано для усталеної безвихрової течії стисливої рідини за допомогою об'єднання рівнянь Ейлера та нерозривності.

Розв'язання

Рівняння нерозривності для усталеної (стаціонарної) течії має вигляд для стисливої рідини

$$\rho_{,i}v_i + \rho v_{i,i} = 0, \qquad (7.19)$$

а рівняння Ейлера без врахування масових сил мають вигляд

$$\rho v_j v_{i,j} + p_{,i} = 0, \qquad (7.20)$$

де ρ – густина, кг/м^3; v_i – компоненти вектора швидкості, м/с; p – тиск, Па.

З умови баротропності $p = p(\rho)$ витікає $dp = \left(\dfrac{dp}{d\rho}\right)d\rho$, або $p_{,i} = \left(\dfrac{dp}{d\rho}\right)\rho_{,i} = c^2\rho_{,i}$, де c – локальна швидкість звуку. Підставляючи це рівняння в рівняння Ейлера (7.20) і виконуючи множення результату на v_i, знаходимо

$$\rho v_i v_j v_{i,j} + c^2 v_i \rho_{,i} = 0. \qquad (7.21)$$

В результаті множення рівняння нерозривності (7.19) на c^2, отримуємо

$$c^2 v_i \rho_{,i} = -\rho c^2 v_{i,i} = -\rho c^2 \delta_{ij} v_{i,j}. \qquad (7.22)$$

Прирівнюючи рівняння (7.21) і (7.22), отримуємо

$$\rho c^2\delta_{ij}v_{i,j} - \rho v_i v_j v_{i,j} = 0 \rightarrow \left(c^2\delta_{ij} - v_i v_j\right)v_{i,j} = 0. \qquad (7.24)$$

Через потенціал швидкості $\varphi_{,i} = -v_i$ рівняння (7.24) записуються таким чином

$$\left(c^2\delta_{ij} - \varphi_{,i}\varphi_{,j}\right)\varphi_{,ij} = 0.$$

Задача 7.22. Довести, що функція $\varphi = A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)$ задовольняє рівнянню Лапласа. Знайти компоненти швидкості і описати рух.

Розв'язання

Підставимо функцію φ в рівняння Лапласа, що описує потенціальну течію рідини

$$\varphi_{,ii} = 0 \to \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = 0 .$$

Визначимо похідні

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\left[A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)\right]}{\partial x_1^2} = -2A ;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\left[A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)\right]}{\partial x_2^2} = -2A;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2\left[A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)\right]}{\partial x_1^2} = 4A .$$

Тобі будемо мати, що

$$-2A - 2A + 4A \equiv 0,$$

тобто функція $\varphi = A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)$ задовольняє рівнянню Лапласа.

По формулам $v_i = -\varphi_{,i}$ визначимо компоненти швидкості

$$v_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{\partial\left[A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)\right]}{\partial x_1} = 2Ax_1 ;$$

$$v_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\left[A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)\right]}{\partial x_2} = 2Ax_2 ;$$

$$v_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = -\frac{\partial\left[A\left(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)\right]}{\partial x_3} = -4Ax_3 .$$

Використовуючи

$$\frac{dx_2}{2Ax_2} = -\frac{dx_3}{4Ax_3} \to \frac{dx_2}{x_2} = -\frac{dx_3}{2x_3} \to 2x_3dx_2 = -x_2dx_3 \to d\left(x_2^2x_3\right) = d\left(-x_2x_3\right),$$

$$\frac{dx_1}{2Ax_1} = -\frac{dx_3}{4Ax_3} \to \frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_3}{2x_3} \to 2x_3dx_1 = -x_1dx_3 \to d\left(x_1^2x_3\right) = d\left(-x_1x_3\right).$$

Тобто лінії току в площині x_1 мають рівняння $x_2^2x_3 = \mathrm{const}$, а в площині x_2 рівняння $x_1^2x_3 = \mathrm{const}$. Таким чином, потік спрямований вздовж осі x_3 назустріч площині x_1x_2.

Задача 7.23. Довести, що функція току $\psi\left(x_1, x_2\right)$ є сталою вздовж лінії току.

Розв'язання

Із співвідношень, що описують зв'язок між швидкістю v_α і функцією току

$\psi(x_1, x_2)$ вигляду $v_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta 3}\psi_{,\beta}$, де $\varepsilon_{\alpha\beta 3}$ – тензор Леві-Чивіти, і диференціального рівняння лінії току $\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2}$ отримуємо, що

$$-\frac{dx_1}{\psi_{,2}} = \frac{dx_2}{\psi_{,1}},$$

де $v_1 = \psi_{,2} = \frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $v_2 = \psi_{,1} = \frac{\partial\psi(x_1, x_2)}{\partial x_1}$,

або

$\psi_{,1}dx_1 + \psi_{,2}dx_2 = d\psi = 0$ – отримали повний диференціал від функції току. Тоді

$$\psi = \int d\psi = \text{const}.$$

Таким чином вздовж кожної лінії току $\psi = \text{const}$, що і треба було довести.

Задача 7.24. Перевірити, що функція $\varphi = A\left(x_1^2 - x_2^2\right)$ може слугувати потенціалом швидкості нестисливої рідини і описати задану течію.

Розв'язання

Дана функція φ задовольняє рівнянню $\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}$ тотожно, оскільки $2A - 2A = 0$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\left(A\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial(2Ax_1)}{\partial x_1} = 2A$$

і

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\left(A\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial(-2Ax_2)}{\partial x_2} = -2A.$$

Компоненти швидкості знаходяться по формулах

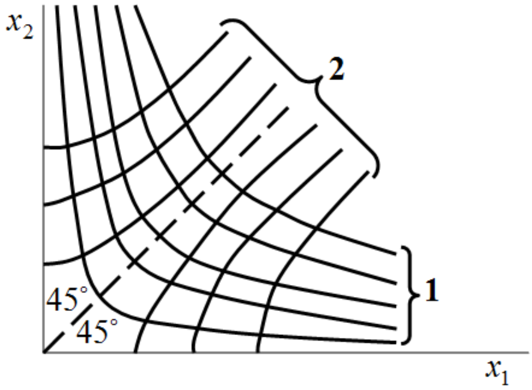
$$v_1 = \varphi_{,2} = \frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial\left(A\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)}{\partial x_2} = -2Ax_2,$$

$$v_2 = \varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(A\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)}{\partial x_1} = 2Ax_1.$$

Лінії току отримуються інтегруванням рівняння

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_2}{x_2} \to x_2 dx_1 = -x_1 dx_2$$

і представляють собою гіперболу $x_1 x_2 = C$ із взаємно перпендикулярними асимптотами (рис. 7.4).



1 – лінії току; 2 – еквіпотенціальні лінії

Рис. 7.4. До задачі 7.24

Еквіпотенціальні лінії $A\left(x_1^2 - x_2^2\right) = C_1$, утворюють сімейство таких самих гіпербол, що є ортогональні лініям току. На кінець, знайдемо функцію току. Відомо, що функція току φ і потенціал ψ задовольняють умовам Коші-Рімана

$$\varphi_{,2} = -\psi_{,1} \to \frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \to -2Ax_2 = -\frac{d\psi}{dx_1} \to$$

$$\to d\psi = 2Ax_2 dx_1.$$

Тоді, після інтегрування, функція току має вигляд

$$\psi = 2Ax_2 x_1 + C_0,$$

яка є сталою величиною вздовж лінії току.

Задача 7.25. Дано потенціал швидкості $\varphi = Ax_1 + Bx_1 / r^2$, де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Знайти функцію току ψ для цієї течії.

Розв'язання

Відповідно до умови Коші-Рімана

$$\psi_{,1} = -\varphi_{,2} = \to = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} \to \frac{d\psi}{dx_1} = -\left(-\frac{2Bx_1x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}\right) \to$$

$$\to \frac{d\psi}{dx_1} = \frac{2Bx_1x_2}{r^4} \to d\psi = \frac{2Bx_1x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} dx_1.$$

Після інтегрування останнього виразу, отримуємо

$$\int d\psi = \int \frac{2Bx_1x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} dx_1 \to \psi = -\frac{Bx_2}{x_1^2 + x_2^2} + f(x_2), \qquad (7.25)$$

де $f(x_2)$ – довільна функція від x_2.

Виконаємо диференціювання виразу для функції току (7.25) по x_2

$$\psi_{,2} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\frac{B\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} + f'\left(x_2\right). \tag{7.26}$$

Але відповідно до умови Коші-Рімана маємо, що

$$\psi_{,2} = \varphi_{,1} = A - \frac{B\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}. \tag{7.27}$$

Прирівнюючи вирази (7.26) і (7.27), отримуємо

$$-\frac{B\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} + f'\left(x_2\right) = A - \frac{B\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \to f'\left(x_2\right) = A,$$

або після інтегрування

$$f\left(x_2\right) = Ax_2 + C. \tag{7.28}$$

Підставляючи (7.28) в (7.25) остаточно отримуємо

$$\psi = Ax_2 - \frac{Bx_2}{x_1^2 + x_2^2} + C,$$

що і треба було знайти.

Задача 7.26. Диференціюванням комплексного потенціалу $\Phi(z) = A/z$ отримати компоненти швидкості.

Розв'язання

За умовами задачі і $z = x_1 + ix_2$ похідна

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = -\frac{A}{z^2} = -\frac{A}{\left(x_1 + ix_2\right)^2}. \tag{7.29}$$

Після деяких алгебраїчних перетворень (7.29) перетворюється до вигляду

$$\frac{d\Phi}{dz} = -A\frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{r^4} + 2Ai\frac{x_1x_2}{r^4}, \tag{7.30}$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Для отримання (7.30) з (7.29) останній вираз було помножено і поділено на спряжений оператор $\left(x_1 - ix_2\right)^2$

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{A\left(x_1 - ix_2\right)^2}{\left(x_1 + ix_2\right)^2\left(x_1 - ix_2\right)^2} = -\frac{A\left(x_1^2 - 2ix_1x_2 + i^2x_1^2\right)}{\left(x_1^2 - i^2x_1^2\right)^2} =$$

$$= -\frac{A\left(x_1^2 - 2ix_1x_2 - x_1^2\right)}{\left(x_1^2 + x_1^2\right)^2} = -A\frac{\left(x_1^2 - x_1^2\right)}{r^4} + 2Ai\frac{x_1x_2}{r^4},$$

де $i^2 = -1$, $\left(x_1^2 + x_1^2\right)^2 = r^4$.

Таким чином, використовуючи залежність $\frac{d\Phi}{dz} = -v_1 + iv_2$, можна записати, що

$$v_1 = A\frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{r^4} \text{ і } v_2 = 2A\frac{x_1 x_2}{r^4}.$$

Відмітимо ще, що якщо використати $\Phi = \frac{A}{(x_1 + ix_2)} = \frac{A(x_1 - ix_2)}{(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)} = \frac{A(x_1 - ix_2)}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{A(x_1 - ix_2)}{r^2}$,

то $\varphi = \frac{Ax_1}{r^2}$, а $\phi = -\frac{Ax_2}{r^2}$, і знову отримуємо, що

$$v_1 = -\varphi_{,1} = A\frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{r^4} \text{ і } v_2 = -\varphi_{,2} = 2A\frac{x_1 x_2}{r^4}.$$

7.5. Змішані задачі

Задача 7.27. Вивести рівняння нерозривності для одновимірної течії нестисливої рідини в трубі току (бічна поверхня труби току утворена лініями току).

Розв'язання

Нехай V – об'єм, що знаходиться між двома довільними січеннями A і B труби току (рис. 7.5). Рівняння збереження маси $\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho(\mathbf{x}, t)dV = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right]dV = 0$ в інтегральній формі для цього об'єму за умови сталої густини ρ записується у вигляді

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0.$$

Перетворимо цей інтеграл по теоремі Гауса-Остроградського, що дасть

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = 0, \qquad (7.31)$$

де $\mathbf{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні S, що обмежує об'єм V.

Із-за того, що на бічній поверхні $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, від інтегралу (7.31) лишаються тільки два члени

$$\int_{S_A} \mathbf{n}_A \cdot \mathbf{v}_A dS + \int_{S_B} \mathbf{n}_B \cdot \mathbf{v}_B dS = 0.$$

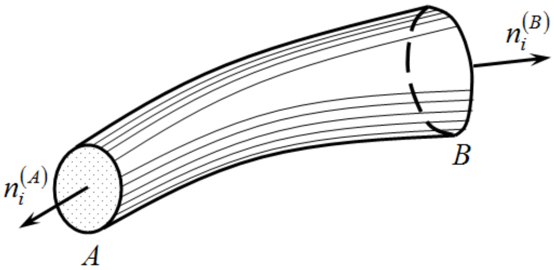


Рис. 7.5. До задачі 7.27

Будемо вважати, що швидкість розподілена рівномірно по січенню і перпендикулярна площинам S_A і S_B. Внаслідок того, що $\mathbf{v}_B = -v_B n_B$, отримаємо $v_A \int\limits_{S_A} dS - v_B \int\limits_{S_B} dS = 0$ або $v_A S_A = v_B S_B = \text{const}$.

Задача 7.28. В деякій точці ньютонівської рідини з нульовим коефіцієнтом об'ємної в'язкості заданий тензор напруження

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & -9 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти тензор τ_{ij}.

Розв'язання

Для рідини за умовами задачі величина гідростатичного напруження дорівнює

$$p_0 = -\frac{\sigma_{ii}}{3} = -\frac{-6-9-3}{3} = 6.$$

Тоді із співвідношення $\sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \tau_{ij}$, отримуємо

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + p_0\delta_{ij} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & -9 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.29. Довести, що тензори σ_{ij} і τ_{ij} в формулі $\sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \tau_{ij}$ мають однакові головні осі.

Розв'язання

Напишемо повністю усі співвідношення для σ_{ij}:

$$\sigma_{11} = -p + \tau_{11},\ \sigma_{22} = -p + \tau_{22},\ \sigma_{33} = -p + \tau_{33},$$
$$\sigma_{12} = \tau_{12},\ \sigma_{23} = \tau_{23},\ \sigma_{13} = \tau_{13}. \qquad (7.32)$$

У головних осях x_i^* тензора σ_{ij} повинні бути виконані рівності:

$$\sigma_{12}^* = \sigma_{23}^* = \sigma_{13}^* = 0.$$

Але останні три рівняння (7.32) при цьому дають $\sigma_{ij}^* = \tau_{ij}^* = 0$, якщо $i \neq j$. А це означає, що осі x_i^* також є головними осями і для тензора τ_{ij}.

Задача 7.30. Для ньютонівської рідини часто вводять дисипативний потенціал Φ_D, що визначається формулою $\Phi_D = \frac{\chi}{2} D_{ii} D_{jj} + 2\mu^* D'_{ij} D'_{ij}$. Довести, що $\frac{\partial \Phi_D}{\partial D_{ij}} = \tau_{ij}$.

Розв'язання

Користуючись визначенням, знаходимо

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial D_{pq}} = \frac{\chi}{2}\left[D_{ii}\frac{\partial D_{jj}}{\partial D_{pq}} + \frac{\partial D_{ii}}{\partial D_{pq}}D_{jj}\right] + 2\mu^* D'_{ij}\frac{\partial D'_{ij}}{\partial D_{pq}}.$$

Але

$$\frac{\partial D_{ii}}{\partial D_{pq}} = \delta_{ip}\delta_{iq} = \delta_{pq} \text{ і } \frac{\partial D'_{ij}}{\partial D_{pq}} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ij}\frac{\delta_{pq}}{3}.$$

Тому

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial D_{pq}} = \chi D_{ii}\delta_{pq} + 2\mu^*\left(D_{ij} - \delta_{ij}\frac{D_{kk}}{3}\right)\left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ij}\frac{\delta_{pq}}{3}\right) =$$

$$= \chi D_{ii}\delta_{pq} + 2\mu^*\left(D_{pq} - \delta_{pq}\frac{D_{ii}}{3}\right).$$

На кінець, внаслідок того, що $\chi = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*$, отримуємо

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial D_{pq}} = \lambda^*\delta_{pq}D_{ii} + 2\mu^* D_{pq} = \tau_{pq}.$$

Задача 7.31. Знайти залежність між тиском і густиною в ідеальному газі за умов задачі 7.11.

Розв'язання

Для $x_3 = 0$ маємо $\rho = \rho_0$ і $p = p_0$. Рівняння стану ідеального газу в нашому випадку буде мати вигляд $p = \rho R(T_0 - \alpha x_3)$ і, відповідно, $p_0 = \rho_0 R T_0$.

Із залежності тиску від висоти, що визначена в задачі 7.11 як $p = p_0\left(1 - \frac{\alpha x_3}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$

, можна отримати

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T}{T_0}^{\left(\frac{g}{R\alpha} - 1\right)}.$$

Рівняння $p = p_0\left(1 - \frac{\alpha x_3}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\alpha}}$ представимо в формі $\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}^{\frac{g}{R\alpha}}$, звідки

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0}^{\frac{R\alpha}{g}},$$

і остаточно знаходимо, що

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}^{\left(1-\frac{R\alpha}{g}\right)}.$$

Задача 7.32. Довести, що в баротропній нев'язкій рідині за умови дії потенціальних сил матеріальна похідна від повної завихреності виражається формулою $\frac{d}{dt}\int\limits_V q_i dV = \int\limits_S v_i q_j dS_j$.

Розв'язання

По формулі $\frac{d}{dt}\int\limits_V P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)dV = \int\limits_V \frac{P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)}{dt}dV + \int\limits_S v_p \left[P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)\right]dS_p$, використовуючи результат задачі 4.33, знаходимо

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V q_i dV = \int\limits_S (\varepsilon_{ijk} a_k + q_j v_i) dS_j .$$

Але в нашому випадку, відповідно $a_i = -(\Omega + P)_{,i}$ маємо

$$a_k = -(\Omega + P)_{,k} .$$

Тоді по теоремі Гауса-Остроградського можна записати

$$\int\limits_S \varepsilon_{ijk} (\Omega + P)_{,k} dS_j = \int\limits_V \varepsilon_{ijk} (\Omega + P)_{,kj} dV = 0$$

внаслідок того, що підінтегральний вираз дорівнює нулю (як добуток симетричного і антисиметричного тензорів). Звідки витікає

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V q_i dV = \int\limits_S q_j v_i dS_j .$$

Задача 7.33. Нестислива ньютонівська рідина рухається всередині закритої посудини з твердими стінками, яка знаходиться в спокої. Довести, що якщо масові сили відсутні, то швидкість зміни з часом кінетичної енергії рідини буде дорівнювати $-\mu^* \int\limits_V q^2 dV$, де q – модуль вектору завихреності.

Розв'язання

Як було встановлено в задачі 5.27, швидкість зміни з часом кінетичної енергії середовища дорівнює

$$\frac{dK}{dt} = \int\limits_V \rho b_i v_i dV - \int\limits_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV + \int\limits_S v_i t_i^{(\mathbf{n})} dS .$$

За умовами задачі перший і третій інтеграли обертаються в нуль і для ньютонівської рідини, використовуючи $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}$, отримуємо

$$\frac{dK}{dt} = -\int\limits_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV = -\int\limits_V \left(-p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}\right) v_{i,j} dV .$$

Але внаслідок нестисливості маємо $v_{i,i} = D_{ii} = 0$, тому

$$\frac{dK}{dt} = -2\mu^* \int_V D_{ij} v_{i,j} dV = -\mu^* \int_V \left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) v_{i,j} dV =$$

$$= -\mu^* \int_V \left(\varepsilon_{kji} q_k\right) v_{i,j} dV = -\mu^* \int_V q_k \left(\varepsilon_{kji} v_{i,j}\right) dV = -\mu^* \int_V q_k q_k dV,$$

де $q_k = \varepsilon_{kji} v_{i,j}$.

Задача 7.34. Довести, що в ідеальній рідині за умови відсутності масових сил швидкість зміни циркуляції $\dot{\Gamma}_c$ виражається інтегралом $-\int_S \varepsilon_{ijk} \left(1/\rho\right)_{,j} p_{,k} dS_i$.

Розв'язання

Розглянемо формулу швидкості циркуляції $\dot{\Gamma}_c = \oint \dot{v}_i dx_i + \oint v_i dv_i$. Другий інтеграл у цій формулі обертається в нуль, оскільки $\oint v_i dv_i = \oint d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$. Із рівняння $\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i}$ за умови $b_i = 0$ маємо, що $\dot{v}_i = -\frac{p_{,i}}{\rho}$. Тоді

$$\dot{\Gamma}_c = \oint \dot{v}_i dx_i = -\oint \left(\frac{p_{,k}}{\rho}\right) dx_k = -\int_S \varepsilon_{ijk} \left(\frac{p_{,k}}{\rho}\right)_{,j} n_i dS.$$

Тут використана формула $\Gamma_c = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} v_{k,j} dS$ для перетворення лінійного інтегралу в інтеграл по поверхні. Виконуючи диференціювання в останній формулі отримуємо

$$\dot{\Gamma}_c = -\int_S \varepsilon_{ijk} \left[\left(\frac{1}{\rho}\right)_{,j} p_{,k} + \frac{p_{,kj}}{\rho}\right] dS_i = -\int_S \varepsilon_{ijk} \left(\frac{1}{\rho}\right)_{,j} p_{,k} dS_i,$$

де $dS_i = n_i dS$.

Задача 7.35. В однорідній масі M ідеального газу відбувається замкнутий квазістатичний процес (цикл Карно):

I) ізотермічне розширення при температурі T_1 зі зміною густини від $\rho = \rho_1$ до $\rho = \rho_2 < \rho_1$;

II) адіабатичне розширення до $\rho = \rho_3 < \rho_2$ і $T = T_2 < T_1$;

III) ізотермічне стискання при температурі T_2 зі зміною густини до $\rho = \rho_4 > \rho_3$;

IV) адіабатне стискання до $\rho = \rho_1$, $T = T_1$.

Обчислити зміну енергії газу, величину роботи, яка здійснюється газом, і кількість теплоти, яку отримує газ на кожній із чотирьох ділянок процесу та в усьому процесі. Показати, що $\rho_1 / \rho_2 = \rho_4 / \rho_3$. Визначити коефіцієнт корисної дії циклу, який визначається як відношення роботи газу в циклі до підведеної до нього теплоти в циклі.

Розв'язання

Спочатку зображено діаграму циклу Карно в $p-v$ координатах (рис. 7.6), де $v=\dfrac{1}{\rho}$ – питомий об'єм робочого тіла (газу), м^3/кг.

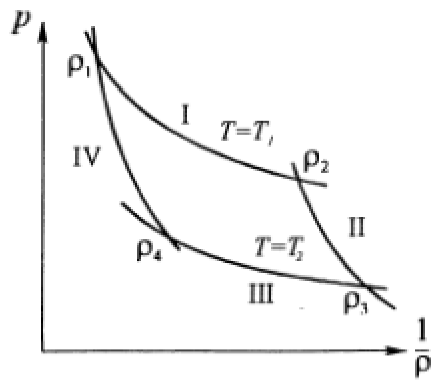


Рис. 7.6. $p-v$ діаграму циклу Карно

Позначимо масу газу через M. Повний диференціал кінетичної енергії робочого тіла дорівнює нулю (тобто $d\varepsilon_{kin}=0$), тому

$$A^{(e)}=-A^{(i)},$$

де $A^{(e)}$ – робота діючих зовнішніх сил на термодинамічну систему; $A^{(i)}$ – робота внутрішніх сил термодинамічної системи; параметри p,ρ,T однакові для всіх частинок суцільного середовища.

Для ділянки (I, рис. 7.6) рівняння енергії має вигляд

$$\Delta U_I = Mc_v\Delta T_I = 0 = Q_I^{(e)} + A_I^{(e)},$$

де ΔU_I – зміна внутрішньої енергії газу за процес (I, рис. 7.6); $c_v=\left(\dfrac{dq}{dT}\right)_{V=\text{const}}$ – масова ізохорна теплоємність газу в процесі, Дж/(кг·К); $\Delta T_I=0$ – зміна температури газу в ізотермічному процесі (I, рис. 7.6), К; $Q_I^{(e)}$ – кількість теплоти, передане газу в процесі (I, рис. 7.6); $A_I^{(e)}$ – робота зовнішніх сил над газом в процесі (I, рис. 7.6).

Робота внутрішніх сил в процесі (I, рис. 7.6) визначається за формулою (враховуючи рівняння Клайперона – $p=R\rho T$ і $v=\dfrac{1}{\rho}\rightarrow dv=-\dfrac{d\rho}{\rho^2}$, можна записати, що $dA=pdv=p\dfrac{d\rho}{\rho^2}=M\dfrac{R\rho T}{\rho^2}d\rho=M\dfrac{RT}{\rho}d\rho$)

$$A_I^{(e)} = -A_I^{(i)} = M\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{RT_1}{\rho}d\rho = -MRT_1\ln\frac{\rho_1}{\rho_2};$$

$$Q_I^{(e)} = -A_I^{(e)} > 0,\ A_I = -A_I^{(e)} > 0,$$

де R – газова постійна.

Тут через A_I позначено роботу газу над зовнішніми тілами в процесі (I, рис. 7.6). Тобто, газ отримує теплоту $Q_I^{(e)}$ і виконує роботу A_I.

В процесі – адіабатного розширення (II, рис. 7.6) газ не отримує теплоти зовні $Q_{II}^{(e)}$; а в адіабатному процесі $p = C\rho^{\gamma}$, $C = \text{const}$, $\gamma = c_p / c_V = 1 + R / c_V$, де γ – показник адіабати, c_p – масова ізобарна теплоємність газу, тому

$$\Delta U_{II} = -A_{II}^{(i)} = M\int_{\rho_2}^{\rho_3}\frac{C\rho^{\gamma}}{\rho^2}d\rho = \frac{MC}{\gamma-1}\left(\rho_3^{\gamma-1} - \rho_2^{\gamma-1}\right) = Mc_V\left(T_2 - T_1\right) < 0;$$

$$A_{II} = A_{II}^{(i)} = Mc_V\left(T_1 - T_2\right) > 0.$$

Тобто газ здійснює роботу A_{II} при розширенні.

Формули для процесів (III) і (IV) аналогічні формулам для (I) і (II) відповідно, причому $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_4}{\rho_3}$.

Для процесу (III) – відводу теплоти від газу, маємо що

$$\Delta U_{II} = Mc_V\Delta T_{II} = 0 = Q_{II}^{(e)} + A_{II}^{(e)},$$

де $\Delta T_I = 0$ – зміна температури газу в ізотермічному процесі (II, рис. 7.6), К;

$$A_{II}^{(e)} = -A_{II}^{(i)} = M\int_{\rho_3}^{\rho_4}\frac{RT_2}{\rho}d\rho = MRT_2\ln\frac{\rho_3}{\rho_4};$$

$$-Q_{II}^{(e)} = A_{II}^{(e)} < 0.$$

Газ віддає теплоту за рахунок виконання над ним роботи зовнішніх сил.

Для процесу (IV) – стискання газу, маємо

$$\Delta U_{IV} = A_{IV}^{(i)} = M\int_{\rho_4}^{\rho_1}\frac{C\rho^{\gamma}}{\rho^2}d\rho = \frac{MC}{\gamma-1}\left(\rho_1^{\gamma-1} - \rho_4^{\gamma-1}\right) = Mc_V\left(T_1 - T_4\right) > 0;$$

$$A_{IV} = A_{IV}^{(e)} = Mc_V\left(T_4 - T_1\right) < 0.$$

Всього за цикл маємо:

$$\Delta U = 0;\ \ Q^{(e)} = Q_I^{(e)} - Q_{II}^{(e)} = MR(T_1 - T_2)\ln\frac{\rho_1}{\rho_2};\ A = Q^{(e)};$$

ККД циклу дорівнює $\eta_t = \frac{A}{Q_I^{(e)}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ і не залежить від M і ступеня розширення в ізотермічному процесі.

Задача 7.36. Показати, що за умови рівноважних квазістатичних ізотермічних процесів прирощення вільної енергії середовища (ΔF) дорівнює роботі зовнішніх сил, що прикладаються до середовища.

Розв'язання

Ізотермічний процес характеризується постійною температурою робочого тіла (газу) $(T = \mathrm{const})$.

Із рівняння стану $pv = RT$ отримуємо рівняння процесу

$pv = \mathrm{const}$.

Ізотермічний процес показано на $T - s$ діаграмі (рис. 7.7).

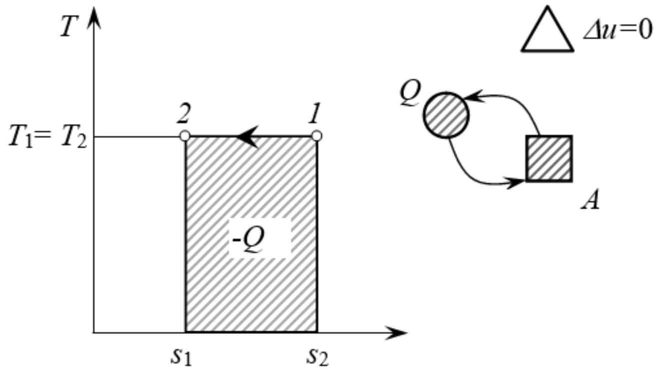


Рис. 7.7. Графік ізотермічного процесу

Рівняння енергії (перший закон термодинаміки) ізотермічного процесу (рисунок 7.7) має вигляд

$$Q^{(i)}_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A^{(i)}_{1-2} \text{ або } \Delta U_{1-2} = Q^{(e)}_{1-2} - A^{(e)}_{1-2}, \tag{7.33}$$

де $Q^{(e)}_{1-2}$ – кількість теплоти, передане газу в ізотермічному процесі (див. рис. 7.7);

ΔU_{1-2} – зміна внутрішньої енергії газу в ізотермічному процесі; $A^{(e)}_{1-2}$ – робота зовнішніх сил над газом в ізотермічному процесі.

З іншого боку зміну внутрішньої енергії газу в процесі можна виразити через теплоємність та зміну температури

$$\Delta U_{1-2} = Mc_V \Delta T_{1-2} = 0, \tag{7.34}$$

де M – маса робочого тіла, кг; $c_v = \left(\dfrac{dq}{dT}\right)_{V=\mathrm{const}}$ – масова ізохорна теплоємність газу в процесі, Дж/(кг·К); $\Delta T_{1-2} = 0$ – зміна температури газу в ізотермічному процесі (див. рис. 7.7), К.

Із (7.34) витікає, що зміна внутрішньої енергії газу в ізотермічному процесі дорівнює нулю. Тобто, зовнішня робота $A^{(e)}_{1-2}$ стискання газу в ізотермічному процесі згідно (7.33) перетворюється в теплоту

$$Q^{(e)}_{1-2} - Q^{(e)}_{1-2} = A^{(e)}_{1-2}. \tag{7.35}$$

Вільна енергія процесу виражається із співвідношення

$$\Delta F_{1-2} = \Delta U_{1-2} - T\Delta s_{1-2}. \qquad (7.36)$$

З врахуванням (7.34) співвідношення для ізотермічного процесу приймає вигляд

$$\Delta F_{1-2} = -T\Delta s_{1-2}. \qquad (7.37)$$

Згідно з другим законом термодинаміки для рівноважного процесу маємо, що

$\Delta s_{1-2} = \dfrac{\Delta Q_{1-2}^{(e)}}{T}$, звідки теплота і робота ізотермічного процесу (7.35)

$$\Delta Q_{1-2}^{(e)} = A_{1-2}^{(e)} = -T\Delta s_{1-2}. \qquad (7.38)$$

Підставляючи (7.35) в рівняння (7.36), отримуємо

$$\Delta F_{1-2} = A_{1-2}^{(e)}.$$

Тобто, в рівноважному квазістатичному ізотермічному процесі прирощення вільної енергії середовища (ΔF) дорівнює роботі зовнішніх сил $A_{1-2}^{(e)}$, що і треба було показати.

Задача 7.37. Показати, що для нестисливої в'язкої рідини ентропія кожної частинки при адіабатному русі в загальному випадку збільшується, а в ізотермічному лишається постійною.

Розв'язання

Напишемо тотожність Гіббса

$$d\Psi = -sdT + \frac{dp}{\rho}, \qquad (7.39)$$

або $d\Psi = -sdT + vdp$,

де $v = 1/\rho$ – масовий об'єм; $\Psi(p,T) \equiv u(T) - Ts + p/\rho$ – термодинамічний потенціал Гіббса; s – ентропія; T – абсолютна температура; p – тиск; ρ – густина.

Виходячи з (7.39) для нестисливої рідини маємо, що ентропія рідини є функцією температури $s = s(T)$

$$s = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_p.$$

Тому ентропія кожної частинки нестисливої в'язкої рідини при адіабатному русі в загальному випадку збільшується

$$ds = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}\right)_p > 0,$$

(тотожність Гіббса можна перетворити до вигляду $du(T)=p\dfrac{d\rho}{\rho^2}+Tds$, а для нестисливої рідини $d\rho=0$, маємо, що $du(T)=Tds$, тому $ds=\dfrac{du(T)}{T}>0$), а при ізотермічному процесі $T=\text{const}$, тому і $s=\text{const}$, що і треба було показати.

Перетворення тотожності Гіббса, що використано в задачі

$$d\left(u-Ts+\frac{p}{\rho}\right)=-sdT+\frac{dp}{\rho}\Rightarrow du-Tds-sdT+\frac{dp}{\rho}-p\frac{d\rho}{\rho^2}=-sdT+\frac{dp}{\rho}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow du-Tds-p\frac{d\rho}{\rho^2}=0\Rightarrow du=Tds+p\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Задача 7.38. Показати, що якщо для деякого ідеального газу виконується рівняння Клайперона $p=R\rho T$, то густина внутрішньої енергії u цього газу і питома теплоємність при постійному об'ємі c_V є функціями тільки температури T і для знаходження виразу для u достатньо задати $c_V(T)$.

Розв'язання

Тотожність Гіббса

$$d\Psi=-sdT+\frac{dp}{\rho},$$

де $\Psi(p,T)\equiv u(T)-Ts+p/\rho$ термодинамічний потенціал Гіббса; s – ентропія; T – температура; p – тиск; ρ – густина.

Можна перетворити тотожність Гіббса, підставляючи $p=R\rho T$, таким чином

$$du=p\frac{d\rho}{\rho^2}+Tds=T\left(R\frac{d\rho}{\rho}+ds\right)=Td(R\ln\rho+s)=Td\varphi, \qquad (7.40)$$

де $\varphi=s+R\ln\rho$.

Перетворення для (7.40)

$$d\left(u-Ts+\frac{p}{\rho}\right)=-sdT+\frac{dp}{\rho}\Rightarrow du-Tds-sdT+\frac{dp}{\rho}-p\frac{d\rho}{\rho^2}=-sdT+\frac{dp}{\rho}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow du-Tds-p\frac{d\rho}{\rho^2}=0\Rightarrow du=Tds+p\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Звідки $u=\text{const}$, якщо $\varphi=\text{const}$, тобто $u=u(\varphi)$, $T=\dfrac{du}{d\varphi}=T(\varphi)$, тому $\varphi=\varphi(T)$, тобто $u=u(T)$. Цей висновок справедливий, якщо наперед вважається, що s і u можуть залежати від T і ρ, але не залежати від похідних T і ρ за часом. Для $\rho=\text{const}$, $du=dq$ і $du=(du/dT)dT$, $dq=c_V dT$, тому

$$c_V = \frac{du}{dT} = c_V(T), \text{ а } u = \int c_V(T)dT,$$

що і треба було показати.

Задача 7.39. Вважаючи, що питома теплоємність c_V відома як функція температури, знайти вираз для густини внутрішньої енергії і ентропії ідеального газу, який описується рівнянням Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{R\rho T}{1 - b\rho} - a\rho^2,$$

де a, b – сталі.

Розв'язання

Напишемо тотожність Гіббса у вигляді (див. задачі 7.37, 7.38)

$$d\left(u - Ts + \frac{p}{\rho}\right) = -sdT + \frac{dp}{\rho} \Rightarrow du = Tds + p\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

В останній вираз підставимо $p = \frac{R\rho T}{1 - b\rho} - a\rho^2$ і отримаємо

$$du = Tds + p\frac{d\rho}{\rho^2} = Tds + \left(\frac{R\rho T}{1 - b\rho} - a\rho^2\right)\frac{d\rho}{\rho^2} = Tds + \frac{RT}{\rho(1 - b\rho)} - ad\rho =$$

$$= T\left[\frac{RT}{\rho(1 - b\rho)} + ds\right] - ad\rho,$$

тобто можна записати, що $d(u + a\rho) = Td\varphi$, де $\varphi \equiv s + R\ln\rho - R\ln(1 - b\rho)$ – первісна.

Тому можна записати

$$u + a\rho = f(\varphi),\ T = \frac{d(u + a\rho)}{d\varphi} = T(\varphi),\ \varphi = \varphi(T),\ u + a\rho = f_1(T).$$

Тепер розглянемо процес, в якому $\rho = \text{const}$, тоді виконується

$$du = f_1'(T)dT = c_V dT, \text{ отже } f_1 = \int c_V dT.$$

Отже,

$$u = \int c_V dT - a\rho.$$

Окрім того, для $\rho = \text{const}$ виконується

$$du = Td\varphi, \text{ тобто } d\varphi = c_V\frac{dT}{T},\ \varphi = \int \frac{c_V}{T}dT.$$

Звідки, використовуючи вираз

$$\varphi \equiv s + R\ln\rho - R\ln(1 - b\rho),$$

маємо, що

$$s = \varphi + \frac{R\ln(1 - b\rho)}{\ln\rho}$$

або $s = \int \frac{c_V}{T} dT + R \ln \frac{1 - b\rho}{\rho}$, що і треба було знайти.

7.6. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 7.40. Дано визначальні рівняння ізотропної рідини $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + K_{ijpq} D_{pq}$, де K_{ijpq} – сталі, що не залежать від координат. Довести, що головні осі тензора напруження і тензора швидкості деформації співпадають.

Задача 7.41. Довести наступне твердження: якщо має місце рівність $\frac{d\rho}{dt} = 0$, то в ньютонівській рідині $-\frac{\sigma_{ii}}{3} = p$.

Задача 7.42. Довести, що визначальні рівняння ньютонівської рідині з нульовим коефіцієнтом в'язкості можна представити двома групами рівнянь: $s_{ij} = 2\mu^* D_{ij}$ і $-\sigma_{ii} = 3p$.

Задача 7.43. Довести, що, використовуючи завихреності $\mathbf{q}$, рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини можна записати таким чином

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \frac{\nabla p}{\rho} - v^* \nabla \times \mathbf{q},$$

де $v^* = \frac{\mu^*}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Показати, що для безвихрового руху ці рівняння приводяться до вигляду $\rho\dot{\mathbf{v}} = \nabla \mathbf{b} - \nabla p$.

Задача 7.44. Рух рідини відбувається по радіусам зі швидкістю $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r,t)$, де $r^2 = x_i x_i$. Довести, що рівняння нерозривності має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v\right) = 0.$$

Задача 7.45. Рідина обертається як тверде тіло зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі x_3. Із масових сил діє тільки сила тяжіння. Довести, що $\frac{p}{\rho} - \omega^2 \frac{r^2}{2} + g x_3 = \text{const}$.

Задача 7.46. Ідеальний газ знаходиться в полі сили тяжіння в умовах ізотермічності (за умови сталої температури T_0). Довести, що $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g x_3}{R T_0}}$, де ρ_0 і p_0 – густина і тиск за умови $x_3 = 0$.

Задача 7.47. Масові сили потенційні, тобто $b_i = -\Omega_{,i}$, і процес баротропний. Довести, що для безвихрового руху можна виконати інтегрування рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема і отримати співвідношення (див. задачу 7.15)

$$-\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\nabla^2\varphi}{2}\right)+\rho\Omega+P+\left(\lambda^*+2\mu^*\right)\nabla^2\varphi=f(t).$$

Задача 7.48. Показати, що в нев'язкої рідини за умови потенціальних масових сил і сталій густині, вектори швидкості і завихреності зв'язані співвідношенням $\dot{q}_i-q_jv_{i,j}=0$. Довести, що для стаціонарного потоку тієї ж рідини $v_jq_{i,j}=q_jv_{i,j}$.

Задача 7.49. Довести, що для баротропного процесу, в якому $\rho=\rho(p)$ і функція $P(\rho)$, яка визначена формулою $P(\rho)=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}$, виконується рівність $\mathrm{grad}P=\mathrm{grad}\frac{p}{\rho}$.

Задача 7.50. Довести, що рівняння Бернулі $\Omega+P+\frac{v_iv_i}{2}+\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)dx_i=C(t)$ під час усталеного руху ідеального газу записується у вигляді:

а) $\Omega+p\ln\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\mathrm{const}$ – під час ізотермічної течії;

б) $\Omega+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\mathrm{const}$ – під час ізоентропійної течії.

Задача 7.51. Довести, що поле швидкості $v_1=2\frac{x_1x_2x_3}{r^4}$, $v_2=\left(x_1^2-x_2^2\right)\frac{x_3}{r^4}$, $v_3=\frac{x_2}{r^2}$, де $r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, можливе під час руху нестисливої рідини. Чи буде такий рух безвихровим?

Відповідь: так.

Задача 7.52. Потенціал швидкості $\Phi(z)=\varphi+i\psi$ є аналітичною функцією комплексного змінного $z=x_1+ix_2=re^{i\theta}$. Показати, що в полярних координатах

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ \text{і}\ \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Задача 7.53. Виходячи з загальних рівнянь руху суцільного середовища отримати рівняння руху ідеальної рідини – рівняння Ейлера. За визначенням в ідеальній рідині тензор напруження має вигляд $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$.

Задача 7.54. Вивести рівняння Ейлера на підставі закону збереження кількості руху індивідуального об'єму V ідеальної рідини.

Задача 7.55. Нехай рух ідеальної рідини є потенціальним, тобто $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Зовнішні масові сили мають потенціал $\mathbf{F} = \operatorname{grad}U$. Рух баротропний, тобто густина ρ залежить тільки від тиску p. Показати, що рівняння Ейлера мають інтеграл Коші-Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P - U = F(t),$$

де P – функція тиску; $F(t)$ – довільна функція.

Задача 7.56. З рівняння енергії для стаціонарного адіабатного руху ідеальної рідини в потенціальному полі масових сил вивести співвідношення

$$\frac{v^2}{2} + h - U = \mathrm{const}$$

вздовж ліній току (інтеграл Бернулі). Тут $h = u + \dfrac{p}{\rho}$ масова ентальпія, U – потенціал масових сил.

Задача 7.57. Чи змінилася внутрішня енергія повітря, що знаходиться в кімнаті, якщо його температура підвищилася від T_1 до $T_2 > T_1$, а тиск не змінився? Повітря вважати ідеальним газом.

8. ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ

8.1. Основні поняття. Явище текучості

Задача 8.1. Використовуючи визначення $e = \dfrac{L - L_0}{L_0}$ і $\varepsilon = \ln\left(\dfrac{L}{L_0}\right)$, отримати співвідношення між логарифмічною ε і технічною e деформаціями. Як зв'язані прирощення цих величин?

Розв'язання

Формулу $e = \dfrac{L - L_0}{L_0}$ можна перетворити до вигляду

$$e = \frac{L}{L_0} - 1 \rightarrow \frac{L}{L_0} = e + 1.$$

Тоді з $\varepsilon = \ln\left(\dfrac{L}{L_0}\right)$ отримуємо

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \rightarrow \left|\frac{L}{L_0} = e + 1\right| \rightarrow \varepsilon = \ln(e + 1).$$

Диференціюючи останню рівність, знаходимо

$$\frac{d\varepsilon}{de} = \frac{1}{e + 1} = \frac{L_0}{L}.$$

Внаслідок того, що

$$\frac{d\varepsilon}{dL} = \left[\ln\left(\frac{L}{L_0}\right)\right]' \rightarrow d\varepsilon = \frac{dL}{L} \rightarrow dL = Ld\varepsilon,$$

а з формули

$$\frac{d\varepsilon}{de} = \frac{L_0}{L} \rightarrow Ld\varepsilon = L_0 de.$$

Тобто можна записати

$$dL = Ld\varepsilon = L_0 de.$$

Задача 8.2. Під час навантаження P в одномірному випробуванні зразка істинне напруження $\sigma = \dfrac{P}{A}$, в той час як технічне приймається у вигляді $S = \dfrac{P}{A_0}$, де A_0 – початкова площа перетину, а A – поточна її величина. Знайти умови максимуму навантаження під час пластичного деформування зі збереженням об'єму $(A_0 L_0 = AL)$.

Розв'язання

В даному випадку

$$S=\frac{P}{A_0}\to S=\frac{P}{A}\frac{A}{A_0}\to S=\sigma\frac{A}{A_0}\to S=\sigma\frac{L_0}{L}\to S=\frac{\sigma}{e+1},$$

де $\frac{A}{A_0}=\frac{L_0}{L}$; $\frac{L_0}{L}=\frac{1}{e+1}$ – із задачі 8.1.

Ділянка максимального навантаження на $S-e$ діаграмі знаходиться там, де похідна $\frac{dS}{de}=0$. Виконуючи диференціювання отримуємо

$$\frac{dS}{de}=\frac{d\sigma/d\varepsilon-\sigma}{(1+e)^2}.$$

Очевидно, що ця похідна дорівнює нулю, якщо $d\sigma/d\varepsilon=\sigma$.

Використовуючи результат задачі 8.1, останню умову можна переписати у вигляді $\frac{d\sigma}{de}=\frac{\sigma}{e+1}$.

Задача 8.3. У якості міри впливу проміжного головного напруження на пластичний стан використовують параметр Лоде $\mu=\frac{2\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}}$. Довести, що параметр Лоде можна виразити через головні значення девіатора напруження формулою $\mu=\frac{3s_{\mathrm{II}}}{s_{\mathrm{I}}-s_{\mathrm{III}}}$.

Розв'язання

Головні значення девіатора напруження визначаються формулою $s_{(k)}=\sigma_{(k)}-\sigma_M$. Звідки можна записати

$\sigma_{\mathrm{I}}=s_{\mathrm{I}}+\sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{II}}=s_{\mathrm{II}}+\sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{III}}=s_{\mathrm{III}}+\sigma_M$, причому $\sigma_M=\frac{\sigma_{ii}}{3}$.

Тоді

$$\mu=\frac{2\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}}\to\mu=\frac{2(s_{\mathrm{II}}+\sigma_M)-(s_{\mathrm{I}}+\sigma_M)-(s_{\mathrm{III}}+\sigma_M)}{(s_{\mathrm{I}}+\sigma_M)-(s_{\mathrm{III}}+\sigma_M)}\to$$

$$\to\mu=\frac{2s_{\mathrm{II}}-s_{\mathrm{I}}-s_{\mathrm{III}}}{s_{\mathrm{I}}-s_{\mathrm{III}}}\to\left|\pm s_{\mathrm{II}}\right|\to\mu=\frac{3s_{\mathrm{II}}-(s_{\mathrm{I}}+s_{\mathrm{II}}+s_{\mathrm{III}})}{s_{\mathrm{I}}-s_{\mathrm{III}}}.$$

Але відомо, що $s_{\mathrm{I}}+s_{\mathrm{II}}+s_{\mathrm{III}}=\mathrm{I}_{\Sigma_D}\equiv 0$, і, відповідно,

$\mu=\frac{3s_{\mathrm{II}}}{s_{\mathrm{I}}-s_{\mathrm{III}}}$, що і треба було довести.

Задача 8.4. Для напруженого стану $\sigma_{11}=\sigma$, $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$, $\sigma_{12}=\tau$, $\sigma_{22}=\sigma_{13}=0$, який виникає під час дослідження на розтяг-кручення тонкостінної труби, отримати криві текучості в площині $\sigma-\tau$ згідно з критеріями Треска і Мізеса, якщо межа текучості під час простого розтягування дорівнює σ_Y.

Розв'язання

Під час напруженого стану за умовами задачі головні значення напруження дорівнюють

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{\left(\sigma + \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}\right)}{2}, \; \sigma_{\text{II}} = 0, \; \sigma_{\text{III}} = \frac{\left(\sigma - \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}\right)}{2},$$

як показує діаграма Мора на рис. 8.1. Таким чином, по формулі $\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}} = \sigma_Y$ знайдемо криву Треска

$$\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} = \sigma_Y \text{ або } 4\tau^2 + \sigma^2 = \sigma_Y^2.$$

Це є рівнянням еліпсу в площині $\sigma - \tau$. Аналогічно, формула $(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2 = 2\sigma_Y^2$ описує криву текучості Мізеса у вигляді еліпса

$$\left(\frac{\sigma + \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}}{2} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{\sigma - \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma - \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}}{2} - \frac{\sigma + \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(\sigma + \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}\right)^2 + \left(\sigma - \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sigma^2 + 2\sigma\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} + \left(4\tau^2 + \sigma^2\right) + \sigma^2 - 2\sigma\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2} + \left(4\tau^2 + \sigma^2\right) + 4\left(4\tau^2 + \sigma^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[8\sigma^2 + 24\tau^2\right] = 2\sigma^2 + 6\tau^2,$$

тоді

$$2\sigma^2 + 6\tau^2 = 2\sigma_Y^2 \rightarrow \sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_Y^2.$$

Еліпси текучості Мізеса і Треска для цього випадку порівнюються на рис. 8.2.

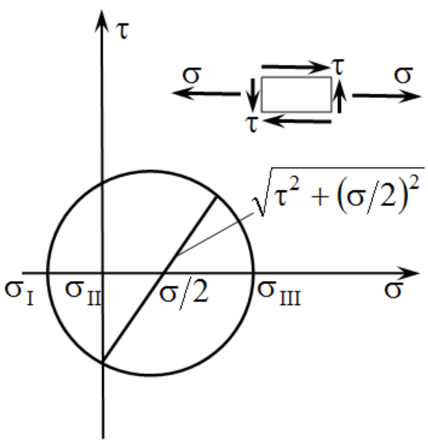


Рис. 8.1. Діаграма Мора

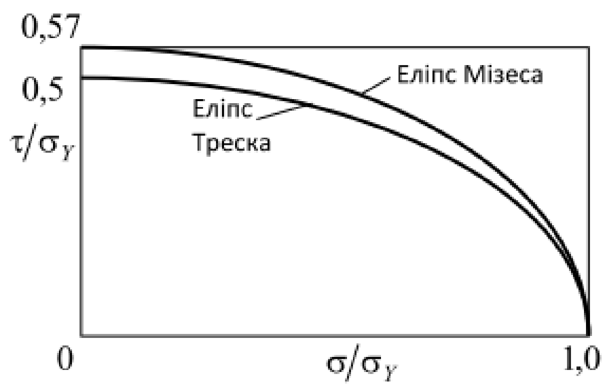


Рис. 8.2. Еліпси текучості Мізеса і Треска

Задача 8.5. Перетворити умову пластичності Мізеса $-\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} = C_Y$ до форми $(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 = 6C_Y$, тобто записати її через головні напруження.

Розв'язання

Використовуючи формули $-\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} = -(s_{\mathrm{I}}s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{II}}s_{\mathrm{III}} + s_{\mathrm{III}}s_{\mathrm{I}})$ і $\sigma_{\mathrm{I}} = s_{\mathrm{I}} + \sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{II}} = s_{\mathrm{II}} + \sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{III}} = s_{\mathrm{III}} + \sigma_M$, причому $\sigma_M = \dfrac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{3}$, можна отримати

$$-\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} = -[(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_M)(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_M) + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_M)(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_M) + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_M)(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_M)] =$$

$$= -\left(\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}} + 3\sigma_M^2 - 2\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_M - 2\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_M - 2\sigma_{\mathrm{III}}\sigma_M\right) =$$

$$= \left| 3\sigma_M^2 - 2\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_M - 2\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_M - 2\sigma_{\mathrm{III}}\sigma_M = -\frac{(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}})^2}{3} \right| =$$

$$= -\left(\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}} - \frac{(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}})^2}{3} \right) =$$

$$= -\left(\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}} - \frac{\sigma_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2 + 2\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + 2\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + 2\sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}}}{3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{I}}^2 - \sigma_{\mathrm{II}}^2 - \sigma_{\mathrm{III}}^2\right) =$$

$$= \frac{2}{6}\left(\sigma_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2 - \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{I}}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2\right].$$

Таким чином, можна записати

$$(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 = 6C_Y.$$

Задача 8.6. Нехай ортогональна система координат $OXYZ$ орієнтована так, що площина XY співпадає з Π-площиною, а вісь σ_{III} лежить в площині YOZ (рис. 8.3). Довести, що поверхня текучості Мізеса перетинає Π-площину по колу Мізеса (рис. 8.4).

Розв'язання

Таблиця коефіцієнтів перетворення одної системи осей координат в іншу має вигляд

	σ_{I}	σ_{II}	σ_{III}
X	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
Y	$-1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{6}$	$2/\sqrt{6}$
Z	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

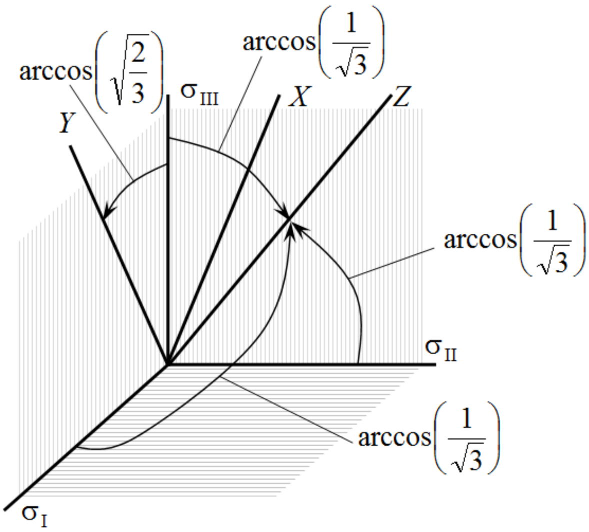


Рис. 8.3. Системи координат до задачі 8.6

Вісь σ_{III} лежить в площині YOZ, то $\sigma_{III\,X} = 0$. Площина XY співпадає з Π-площиною, для якої справедливим є рівняння $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$. Тоді, розглядаючи це рівняння в проекції на вісь X, яка є бісектрисою $\angle(-\sigma_I O \sigma_{II})$, будемо мати, що єдино вірними коефіцієнтами для σ_I і σ_{II} будуть такі – $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_I + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_{II} + 0\sigma_{III} = 0$. Аналогічним чином отримаємо і для проекції на вісь Y $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\sigma_I + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\sigma_{II} + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\sigma_{III} = 0$.

Тут $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Використовуючи коефіцієнти таблиці можна записати, що

$\sigma_I = -X/\sqrt{2} - Y/\sqrt{6} + Z/\sqrt{3}$, $\sigma_{II} = X/\sqrt{2} - Y/\sqrt{6} + Z/\sqrt{3}$,

$\sigma_{III} = 2Y/\sqrt{6} + Z/\sqrt{3}$.

Тоді формула $(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2$ зводиться до рівняння

$$\left(-\sqrt{2}X\right)^2 + \left(X/\sqrt{2} - 3Y/\sqrt{6}\right)^2 + \left(X/\sqrt{2} + 3Y/\sqrt{6}\right)^3 = 2\sigma_Y^2,$$

яке після спрощення

$$2X^2 + X^2/2 - 2XY/\sqrt{13} + 9Y^2/6 + X^2/2 + 2XY/\sqrt{13} + 9Y^2/6 =$$

$$= 2X^2 + X^2/2 + X^2/2 + 3Y^2/2 + 3Y^2/2 =$$

$$= 3X^2 + 3Y^2$$

призводить до кола Мізеса

$$3X^2 + 3Y^2 = 2\sigma_Y^2,$$

що показано на рис. 8.4.

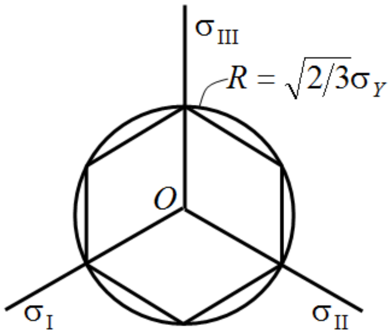


Рис. 8.4. Коло Мізеса

Задача 8.7. Використовуючи перетворення координат задачі 8.6, довести, що рівняння $\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}=0$ є рівнянням Π-площини.

Розв'язання

Підставляючи в рівняння $\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}=0$ вирази $\sigma_{\mathrm{I}},\sigma_{\mathrm{II}},\sigma_{\mathrm{III}}$, що знайдені в задачі 8.6, отримуємо рівняння

$$\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}=-X/\sqrt{2}-Y/\sqrt{6}+Z/\sqrt{3}+X/\sqrt{2}-Y/\sqrt{6}+Z/\sqrt{3}+$$
$$+2Y/\sqrt{6}+Z/\sqrt{3}=3Z/\sqrt{3}=\sqrt{3}Z=0,$$

розв'язком якого є $Z=0$, а це і є площина XY (Π-площина).

Задача 8.8. Для двовісного напруженого стану, коли $\sigma_{\mathrm{II}}=0$, знайти поверхні текучості Мізеса і Треска й порівняти їх, користуючись діаграмою в площині $\sigma_{\mathrm{I}}/\sigma_Y$, $\sigma_{\mathrm{III}}/\sigma_Y$.

Розв'язання

Якщо $\sigma_{\mathrm{II}}=0$, тоді критерій Мізеса

$(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2=2\sigma_Y^2$ набуває вигляду

$$\sigma_{\mathrm{I}}^2+\sigma_{\mathrm{III}}^2+\sigma_{\mathrm{III}}^2-2\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{III}}+\sigma_{\mathrm{I}}^2=2\sigma_Y^2\to 2\sigma_{\mathrm{III}}^2-2\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{III}}+2\sigma_{\mathrm{I}}^2=2\sigma_Y^2\to$$
$$\to\sigma_{\mathrm{I}}^2-\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{III}}+\sigma_{\mathrm{III}}^2=\sigma_Y^2.$$

Останнє рівняння представляє собою еліпс

$$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{I}}}{\sigma_Y}\right)^2-\frac{\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_Y^2}+\left(\frac{\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_Y}\right)^2=1$$

з осями від кутом 45° до вказаних координатних напрямків $\left(\dfrac{\sigma_{\mathrm{I}}}{\sigma_Y},\dfrac{\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_Y}\right)$. Аналогічно критерій Треска, тобто формула $\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}=\sigma_Y$, разом з рівностями $\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{II}}=\sigma_Y$, $\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_Y$ призводить до шестикутника Треска (рис. 8.5), утвореного відрізками AB і ED з рівняннями $\frac{\sigma_{\mathrm{I}}}{\sigma_Y}-\frac{\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_Y}=\pm 1$, DC і FA з рівняннями $\frac{\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_Y}=\pm 1$ і BC та EF з рівняннями $\frac{\sigma_{\mathrm{I}}}{\sigma_Y}=\pm 1$, відповідно.

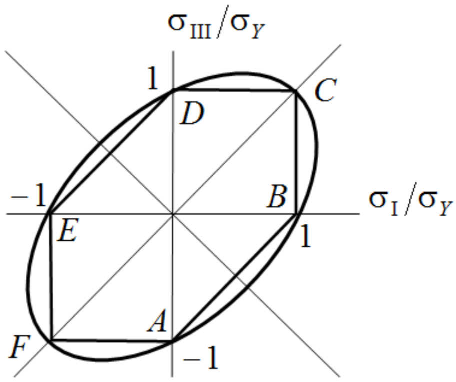


Рис. 8.5. Діаграма поверхонь текучості Мізеса і Треска

Задача 8.9. В енергетичній теорії критерій Мізеса дістав назву викривлення форми. Довести, що якщо енергію викривлення форми на одиницю об'єму $u^*_{(D)}$ покласти рівною сталій текучості C_Y, то в результаті отримаємо критерій Мізеса в формі $(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2=2\sigma_Y^2$.

Розв'язання

В задачі 6.26 було знайдено вираз для $u^*_{(D)}$ через головні напруження

$$u^*_{(D)}=\frac{(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2}{12G}.$$

Під час одновісного розтягування або стискання, коли $\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_Y$, $\sigma_{\mathrm{II}}=\sigma_{\mathrm{III}}=0$, із цієї формули витікає, що

$$u^*_{(D)}=\frac{2\sigma_Y^2}{12G}=\frac{\sigma_Y^2}{6G}.$$

Тоді після підстановки $u^*_{(D)}$ в перше рівняння отримуємо звичайну форму критерія Мізеса

$$(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2=2\sigma_Y^2.$$

8.2. Пластичні деформації. Зміцнення

Задача 8.10. Довести, що рівняння Прандтля-Рейса

$$d\varepsilon_{ij}^P=s_{ij}d\lambda \tag{8.1}$$

містить в собі твердження, що головні осі тензора прирощення пластичної деформації співпадають з головними осями тензора напруження. Записати ці рівняння через головні напруження.

Розв’язання

Із формули $d\varepsilon_{ij}^{P} = s_{ij} d\lambda$ видно, що в системі координат, в якій дорівнюють нулю дотичні напруження, відсутні також і прирощення пластичної деформації зсуву. В системах головних осей рівняння (8.1) приймає вигляд

$$\frac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^{P}}{s_{\mathrm{I}}} = \frac{d\varepsilon_{\mathrm{II}}^{P}}{s_{\mathrm{II}}} = \frac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^{P}}{s_{\mathrm{III}}} = d\lambda .$$

Таким чином,

$$d\varepsilon_{\mathrm{I}}^{P} = (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{M}) d\lambda ,\ d\varepsilon_{\mathrm{II}}^{P} = (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{M}) d\lambda ,\ d\varepsilon_{\mathrm{III}}^{P} = (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{M}) d\lambda .$$

Послідовним відніманням знаходимо

$$\frac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^{P} - d\varepsilon_{\mathrm{II}}^{P}}{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}} = \frac{d\varepsilon_{\mathrm{II}}^{P} - d\varepsilon_{\mathrm{III}}^{P}}{\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}} = \frac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^{P} - d\varepsilon_{\mathrm{I}}^{P}}{\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}} = d\lambda .$$

Задача 8.11. Довести, що у випадку плоскої пластичної деформації, коли $\varepsilon_{33} = 0$, $d\varepsilon_{33} = 0$, $\sigma_{22} = 0$, рівняння Леві-Мізеса $d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\lambda$ (8.1) приводить до тотожного збігу критеріїв текучості Треска і Мізеса (записаних через межу текучості під час чистого зсуву k).

Розв’язання

Для умов задачі рівняння (8.1) використовуючи $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \dfrac{\sigma_{kk}}{3}$ можна записати так:

$$d\varepsilon_{11} = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} d\lambda , d\varepsilon_{22} = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{3} d\lambda ,$$

$$0 = \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11}}{3} d\lambda \to 0 = 2\sigma_{33} - \sigma_{11},$$

де $s_{11} = \sigma_{11} - \dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{3} = \dfrac{2\sigma_{11} - \sigma_{33}}{3}$, $s_{22} = 0 - \dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{3} = -\dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{3}$,

$$s_{33} = \sigma_{33} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{3} = \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11}}{3} .$$

За умови відсутності дотичних напружень

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{11},\ \sigma_{\mathrm{II}} = \sigma_{33} = \sigma_{11}/2 ,\ \sigma_{\mathrm{III}} = 0 = \sigma_{22} .$$

Тоді із формули $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = 2k$ знаходимо критерій Треска у вигляді $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \sigma_{11} = 2k$, а із $(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 = 6k^2$ для даного випадку отримуємо для критерію Мізеса

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sigma_{11}}{2}\right)^2+(-\sigma_{11})^2=6k^2,$$

або

$$\sigma_{11}^2=4k^2,$$

тобто

$$\sigma_{11}=2k.$$

Задача 8.12. Довести, що із рівняння Прандтля-Рейса витікає рівність параметра Лоде μ (див. задачу 8.3) і величини

$$\nu=\frac{2d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P-d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P-d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P-d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}.$$

Розв'язання

Із співвідношення $d\varepsilon_{ij}^P=s_{ij}d\lambda$ отримуємо

$$\nu=\frac{2d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P-d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P-d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P-d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}\to\nu=\frac{(2s_{\mathrm{II}}-s_{\mathrm{I}}-s_{\mathrm{III}})d\lambda}{(s_{\mathrm{I}}-s_{\mathrm{III}})d\lambda}\to$$

$$\to\nu=\frac{2(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_M)-(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_M)-(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_M)}{(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_M)-(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_M)}\to$$

$$\to\nu=\frac{2\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}}}=\mu.$$

Задача 8.13. Довести, що для другого інваріанта девіатора напруження $\mathrm{II}_{\Sigma_D}=s_{ij}s_{ij}/2$ виконується рівність $\dfrac{\partial\mathrm{II}_{\Sigma_D}}{\partial\sigma_{ij}}=s_{ij}$.

Розв'язання

Користуючись виразом для II_{Σ_D}, знаходимо

$$\frac{\partial\mathrm{II}_{\Sigma_D}}{\partial\sigma_{pq}}=\frac{\partial s_{ij}}{\partial\sigma_{pq}}s_{ij},$$

де $\dfrac{\partial s_{ij}}{\partial\sigma_{pq}}=\dfrac{\partial\left(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\dfrac{\sigma_{kk}}{3}\right)}{\partial\sigma_{pq}}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\dfrac{\delta_{ij}\delta_{pq}}{3}$.

Таким чином,

$$\frac{\partial\mathrm{II}_{\Sigma_D}}{\partial\sigma_{pq}}=\left(\delta_{ip}\delta_{jq}-\frac{\delta_{ij}\delta_{pq}}{3}\right)s_{ij}=s_{pq},$$

оскільки

$$s_{ii}=\mathrm{II}_{\Sigma_D}=0.$$

Задача 8.14. Нехай пластичний потенціал має вигляд $g(\sigma_{ij}) = \mathrm{II}_{\Sigma_D}$. Довести, що співвідношення

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \qquad (8.2)$$

для пластичного потенціалу перетворюється в рівняння Прандтля-Рейса.

Розв'язання

Доведення зразу витікає із результату задачі 8.13, оскільки в цьому випадку $\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$ і, відповідно, (8.2) зводиться до рівняння Прандтля-Рейса $d\varepsilon_{ij}^P = s_{ij} d\lambda$.

Задача 8.15. Записати в розгорнутому вигляді вираз

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \qquad (8.3)$$

і довести, що еквівалентне напруження σ_{ekv} можна записати в формі

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}. \qquad (8.4)$$

Розв'язання

Із рівності (8.3) маємо

$$\sigma_{ekv}^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{3}{2}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{pp}}{3}\right)\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{qq}}{3}\right) = \frac{3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}}{2}.$$

Записуючи останній вираз в розгорнутому вигляді з врахуванням симетрії $\hat{\sigma}$, отримуємо

$$\frac{3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}}{2} \to$$

$$\to \frac{3(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{2} =$$

$$= \frac{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11}) + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}{2} =$$

$$= \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}{2},$$

що і стверджується формулою (8.4).

Задача 8.16. В теорії пластичного потенціалу вектор прирощення пластичної деформації перпендикулярний поверхні навантаження (текучості) в будь-якій регулярній точці. Довести, що якщо задовольняється критерій Мізеса, то виконується рівняння

$$\frac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{s_{\mathrm{I}}}=\frac{d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P}{s_{\mathrm{II}}}=\frac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{s_{\mathrm{III}}}.$$

Розв'язання

Нехай числа n_1, n_2, n_3 задають напрямки нормалі до поверхні текучості $f_1(\sigma_{ij})$, тобто цю нормаль можна характеризувати вектором $\mathbf{n}=\mathrm{grad} f_1$, а цього необхідно, щоб $\dfrac{n_1}{\partial f_1/\partial\sigma_{\mathrm{I}}}=\dfrac{n_2}{\partial f_1/\partial\sigma_{\mathrm{II}}}=\dfrac{n_3}{\partial f_1/\partial\sigma_{\mathrm{III}}}$, причому, згідно критерію Мізеса,

$$f_1=(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2-2\sigma_Y^2=0.$$

Тоді $\partial f_1/\partial\sigma_{\mathrm{I}}=2(2\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})=6s_{\mathrm{I}}$ і так далі, а оскільки вектор прирощення пластичної деформації направлений по нормалі до f_1, звідси витікає, що

$$\frac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{s_{\mathrm{I}}}=\frac{d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P}{s_{\mathrm{II}}}=\frac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{s_{\mathrm{III}}}.$$

Задача 8.17. Знайти відношення прирощень пластичних деформацій: а) для простого розтягу, коли $\sigma_{11}=\sigma_Y$; б) для двохвісного напруженого стану, коли $\sigma_{11}=-\sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{22}=\sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{13}=0$; в) для чистого зсуву, коли $\sigma_{12}=\sigma_Y/\sqrt{3}$.

Розв'язання

а) За даних умов $\sigma_{11}=\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_Y$, $\sigma_{\mathrm{II}}=\sigma_{\mathrm{III}}=0$ і $s_{\mathrm{I}}=2\sigma_Y/3$, $s_{\mathrm{II}}=s_{\mathrm{III}}=-\sigma_Y/3$,

оскільки $s_{\mathrm{I}}=\sigma_{\mathrm{I}}-\dfrac{\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}}{3}=\sigma_Y-\dfrac{\sigma_Y}{3}=2\sigma_Y/3$ і так далі.

Використовуючи результат задачі 8.16, знаходимо

$$\frac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{s_{\mathrm{I}}}=\frac{d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P}{s_{\mathrm{II}}}=\frac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{s_{\mathrm{III}}}\to\frac{3d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{2\sigma_Y}=-\frac{3d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P}{\sigma_Y}=-\frac{3d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{\sigma_Y}\to$$

$$\to\frac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{2}=-\frac{d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P}{1}=-\frac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{1}.$$

б) В даному випадку $\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_Y/\sqrt{3}$, $\sigma_{\mathrm{II}}=0$, $\sigma_{\mathrm{III}}=-\sigma_Y/\sqrt{3}$ і

$$s_{\mathrm{I}}=\sigma_{\mathrm{I}}-\frac{\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}}{3}=\sigma_Y/\sqrt{3}-\frac{\sigma_Y/\sqrt{3}+0-\sigma_Y/\sqrt{3}}{3}=\sigma_Y/\sqrt{3},$$

$$s_{\mathrm{II}}=\sigma_{\mathrm{II}}-\frac{\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}}{3}=0-\frac{\sigma_Y/\sqrt{3}+0-\sigma_Y/\sqrt{3}}{3}=0,$$

$$s_{\mathrm{III}} = \sigma_{\mathrm{III}} - \frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{3} = -\sigma_Y \big/ \sqrt{3} - \frac{\sigma_Y \big/ \sqrt{3} + 0 - \sigma_Y \big/ \sqrt{3}}{3} = -\sigma_Y \big/ \sqrt{3}.$$

Таким чином,

$\dfrac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{s_{\mathrm{I}}} = \dfrac{d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P}{s_{\mathrm{II}}} = \dfrac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{s_{\mathrm{III}}} \to \dfrac{\sqrt{3}d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{\sigma_Y} = -\dfrac{\sqrt{3}d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{\sigma_Y} \to \dfrac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{1} = -\dfrac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{1}$, а третій член опускається, оскільки зазвичай припускається, що за обернення в нуль знаменника і чисельник теж обертається в нуль.

в) У цьому випадку $\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_Y \big/ \sqrt{3}$, $\sigma_{\mathrm{II}} = 0$, $\sigma_{\mathrm{III}} = -\sigma_Y \big/ \sqrt{3}$ і знову отримуємо, що $\dfrac{d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P}{1} = -\dfrac{d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P}{1}$.

Задача 8.18. Знайти прирощення роботи на пластичних деформаціях dW^P і прирощення еквівалентної пластичної деформації $d\varepsilon_{ekv}^P$ для двохвісного напруженого стану, коли $\sigma_{11} = -\sigma_Y \big/ \sqrt{3}$, $\sigma_{22} = \sigma_Y \big/ \sqrt{3}$, $\sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$, якщо пластична деформація відбувається так, що $d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P = C$, де C – деяка стала.

Розв'язання

Вираз для прирощення роботи $dW^P = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^P$ в головних осях має вигляд $dW^P = \sigma_{\mathrm{I}} d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P + \sigma_{\mathrm{II}} d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P + \sigma_{\mathrm{III}} d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P$. Для вказаного напруженого стану результат задачі 8.17 показує, що $d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P = -d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P$, $d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P = 0$. Звідси витікає, що

$$dW^P = -\sigma_Y C \big/ \sqrt{3} + \sigma_Y \big/ \sqrt{3} \left(-C\right) = -2C\,\sigma_Y \big/ \sqrt{3}.$$

Використовуючи формулу

$$d\varepsilon_{ekv}^P = \left\{ \frac{2}{9} \left[\left(d\varepsilon_{11}^P - d\varepsilon_{22}^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_{22}^P - d\varepsilon_{33}^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_{33}^P - d\varepsilon_{11}^P \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3} \left[\left(d\varepsilon_{12}^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_{23}^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_{31}^P \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

знаходимо в головних значеннях

$$d\varepsilon_{ekv}^P = \frac{\left\{ 2 \left[\left(d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P - d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_{\mathrm{II}}^P - d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P \right)^2 + \left(d\varepsilon_{\mathrm{III}}^P - d\varepsilon_{\mathrm{I}}^P \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}{3} =$$

$$= \frac{\left\{ 2 \left[C^2 + C^2 + 4C^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{\sqrt{12C^2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2C}{\sqrt{3}}.$$

Задача 8.19. Перевірити правильність співвідношення $d\varepsilon_{ij}^{P} = \frac{3}{2}\frac{dW^{P}}{\sigma_{ekv}^{2}}s_{ij}$ за допомогою доведення, що прирощення роботи на пластичних деформаціях для матеріалу Прандтля-Рейса дорівнює $dW^{P} = \sigma_{ekv}d\varepsilon_{ekv}^{P}$.

Розв'язання

Для матеріалу Прандтля-Рейса, що задовольняє рівнянню $d\varepsilon_{ij}^{P} = s_{ij}d\lambda$, формула $dW^{P} = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{P} = s_{ij}d\varepsilon_{ij}^{P}$ дає $dW^{P} = s_{ij}s_{ij}d\lambda$. Але, згідно з формулою $d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}}$, отримуємо $dW^{P} = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\frac{d\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}}$, а якщо врахувати визначення $\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \to \sigma_{ekv}^{2} = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}$, останній вираз спроститься до такого

$$dW^{P} = \frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\frac{d\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}} \to dW^{P} = \sigma_{ekv}^{2}\frac{d\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}} \to dW^{P} = \sigma_{ekv}d\varepsilon_{ekv}^{P}.$$

Таким чином, у даному випадку

$$d\varepsilon_{ekv}^{P} = \frac{dW^{P}}{\sigma_{ekv}}.$$

Співвідношення $d\varepsilon_{ij}^{P} = \frac{3}{2}\frac{dW^{P}}{\sigma_{ekv}^{2}}s_{ij}$ тепер зразу витікає з $d\varepsilon_{ij}^{P} = s_{ij}d\lambda$ і $d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}}$.

Задача 8.20. Для матеріалу, що задовольняє критерію текучості Мізеса, в якості функції текучості в законах зміцнення $f_1(\sigma_{ij}) = F(W^{P})$ і $f_1(\sigma_{ij}) = H(\varepsilon_{ekv}^{P})$ можна взяти еквівалентне напруження σ_{ekv}. Довести, що в цьому випадку виконується рівність $\sigma_{ekv}F' = H'$, де F' і H' – похідні від функцій, що характеризують зміцнення, по їх аргументах.

Розв'язання

Закон зміцнення $f_1(\sigma_{ij}) = F(W^{P})$ за умовами задачі набуває вигляду $\sigma_{ekv} = F(W^{P})$, і значить $d\sigma_{ekv} = F'dW^{P}$. Аналогічно закон $f_1(\sigma_{ij}) = H(\varepsilon_{ekv}^{P})$ записується таким чином $\sigma_{ekv} = H(\varepsilon_{ekv}^{P})$, і тоді $d\sigma_{ekv} = H'd\varepsilon_{ekv}^{P}$. Таким чином, $F'dW^{P} = H'd\varepsilon_{ekv}^{P}$.

Із формули $dW^{P} = \sigma_{ekv}d\varepsilon_{ekv}^{P}$ зразу можна отримати, що

$$F'dW^P = H'd\varepsilon^P_{ekv} \to F'\sigma_{ekv}d\varepsilon^P_{ekv} = H'd\varepsilon^P_{ekv} \to$$
$$\to \sigma_{ekv}F' = H'.$$

8.3. Деформаційна теорія пластичності

Задача 8.21. Основу деформаційної теорії пластичності Генкі складають такі співвідношення: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^E_{ij} + \varepsilon^P_{ij}$, причому $\varepsilon^E_{ij} = e^E_{ij} + \delta_{ij}\dfrac{\varepsilon^E_{kk}}{3} = \dfrac{s_{ij}}{2G} + \delta_{ij}(1-2\nu)\dfrac{\sigma_{kk}}{3E}$ і $\varepsilon^P_{ij} = \varphi s_{ij}$. Довести, що ці рівності еквівалентні формулам $e_{ij} = \left(\varphi + \dfrac{1}{2G}\right)s_{ij}$ і $\varepsilon_{ii} = (1-2\nu)\dfrac{\sigma_{ii}}{E}$.

Розв'язання

Серед рівнянь $\varepsilon^P_{ij} = \varphi s_{ij}$ міститься і таке: $\varepsilon^P_{ii} = 0$, а це означає, що $\varepsilon^P_{ij} = e^P_{ij} = \varphi s_{ij}$. Із рівності $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^E_{ij} + \varepsilon^P_{ij}$ витікає, що тоді $\varepsilon_{ii} = \varepsilon^E_{ii}$. Із тої ж рівності отримується ще співвідношення $e_{ij} + \delta_{ij}\dfrac{\varepsilon_{kk}}{3} = e^E_{ij} + \delta_{ij}\dfrac{\varepsilon^E_{kk}}{3} + e^P_{ij}$, яке зводиться до вигляду $e_{ij} = e^E_{ij} + e^P_{ij} = \left(\varphi + \dfrac{1}{2G}\right)s_{ij}$, а це і є перша шукана формула. Окрім того, із рівності $\varepsilon_{ii} = \varepsilon^E_{ii}$ отримуємо $\varepsilon_{ii} = (1-2\nu)\dfrac{\sigma_{kk}}{E}$, що і представляє собою другу шукану формулу.

Задача 8.21. Перевірте той факт, що параметр Генкі φ можна представити формулою $\varphi = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon^P_{ekv}}{\sigma_{ekv}}$.

Розв'язання

Підносячи до квадрату і складаючи компоненти тензорів в рівнянні $\varepsilon^P_{ij} = \varphi s_{ij}$, приходимо до такої рівності $\varepsilon^P_{ij}\varepsilon^P_{ij} = \varphi^2 s_{ij}s_{ij}$ або

$$\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon^P_{ij}\varepsilon^P_{ij}}{s_{ij}s_{ij}}} \to \left|\begin{array}{l} \sigma^2_{ekv} = \dfrac{3}{2}s_{ij}s_{ij} \\ s_{ij}s_{ij} = \dfrac{2}{3}\sigma^2_{ekv} \end{array}\right| \to \varphi = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\varepsilon^P_{ij}\varepsilon^P_{ij}}{\sigma^2_{ekv}}} \to \varphi = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon^P_{ij}\varepsilon^P_{ij}}}{\sigma_{ekv}}.$$

Враховуючи те, що $\varepsilon_{ekv}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^{p} d\varepsilon_{ij}^{p}}$, тоді $\varepsilon_{ij}^{p} d\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{3}{2}\left(\varepsilon_{ekv}^{p}\right)^{2}$. Підставляючи останній вираз в $\varphi = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon_{ij}^{P}\varepsilon_{ij}^{P}}}{\sigma_{ekv}}$, отримуємо

$$\varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\left(\varepsilon_{ekv}^{p}\right)^{2}}}{\sigma_{ekv}} \rightarrow \varphi = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_{ekv}^{p}}{\sigma_{ekv}},$$

що і треба було довести.

8.4. Задачі пружнопластичності

Задача 8.23. Балка прямокутного перетину із пружно-ідеально-пластичного матеріалу знаходиться під навантаженням на чистий згин. Користуючись елементарною теорією балок, знайти величину згинального моменту, що діє на кінці балки, за якого пружне ядро балки простягається від $-a$ до a, як це показано на рис. 8.6.

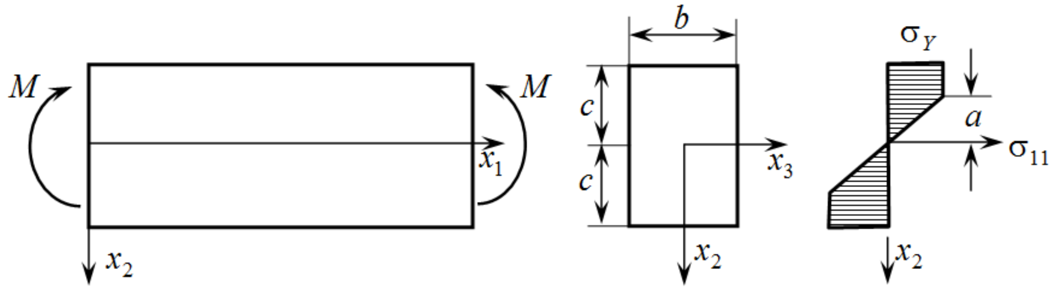


Рис. 8.6. Згин балки

Розв'язання

У даному випадку єдиним відмінним від нуля напруженням є згинальне напруження σ_{11}. У пружному ядрі всередині балки $(-a < x_2 < a)$ має місце рівність

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = E\frac{x_2}{R},$$

де R – радіус кривизни зігнутої осі балки, а E – модуль пружності.

У пластичній зоні $\sigma_{11} = \sigma_Y$. Таким чином,

$$M = 2\int_0^a \frac{E}{R}(x_2)^2 b dx_2 + 2\int_a^c x_2\sigma_Y b dx_2 = \frac{2}{3}\frac{Ea^3}{R}b - b\sigma_Y\left(a^2 - c^2\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\sigma_Y a^2 b - b\sigma_Y\left(a^2 - c^2\right) = b\sigma_Y\left(c^2 - \frac{a^2}{3}\right),$$

де $\sigma_Y = \dfrac{Ea}{R}$, тобто використана умова неперервності напруження на границі між пружною і пластичною зонами.

З отриманої формули видно, що

$$M = 2bc^2 \frac{\sigma_Y}{3},$$

коли пластична зона тільки з’являється (за умови $a = c$)

$$M = b\sigma_Y \left(a^2 - \frac{a^2}{3} \right) = 2bc^2 \frac{\sigma_Y}{3},$$

і

$$M = bc^2 \sigma_Y,$$

коли вся балка знаходиться в пластичному стані (при $a = 0$)

$$M = b\sigma_Y \left(c^2 - \frac{0^2}{3} \right) = bc^2 \sigma_Y .$$

Задача 8.24. Знайти згинальний момент балки із матеріалу з кусково-лінійним зміцненням (так, що за межею текучості $\sigma_{11} = \sigma_Y + A\left(\varepsilon_{11} - \dfrac{\sigma_Y}{E} \right)$), на яку діє навантаження, як в задачі 8.23.

Розв’язання

Розподіл напружень в такій балці показано на рис. 8.7.

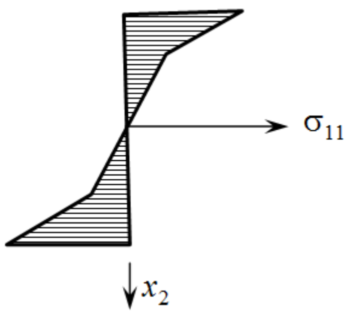


Рис. 8.7. Розподіл напруження балки із матеріалу з кусково-лінійним зміцненням

Деформація визначається за формулою $\varepsilon_{11} = \dfrac{x_2}{R}$, і, відповідно,

$$M = 2\int_0^a \frac{E}{R} (x_2)^2 b dx_2 + 2\int_a^c \left[\sigma_Y + \left(\frac{x_2}{R} - \frac{\sigma_Y}{E} \right) \right] x_2 b dx_2 =$$

$$= \frac{2Ea^3 b}{3R} + 2b \left\{ \frac{\sigma_Y}{2} \left(1 - \frac{A}{E} \right) \left(c^2 - a^2 \right) + \frac{A\left(c^3 - a^3 \right)}{3R} \right\}.$$

Скориставшись умовою, що $\sigma_Y = \dfrac{Ea}{R}$, знайдемо

$$M = c^2 b\sigma_Y \left(1 - \frac{A}{E}\right) + 2c^3 b\frac{A}{3R} + b\sigma_Y^3 R^2 \left(\frac{A}{E} - 1\right) \Big/ \left(3E^2\right).$$

Задача 8.25. Круглий вал радіуса c із пружно-ідеально-пластичного матеріалу закручується на кінцях моментом T, як показано на рис. 8.8. Знайти величину крутного моменту, за якого всередині валу лишається пружне ядро радіуса a.

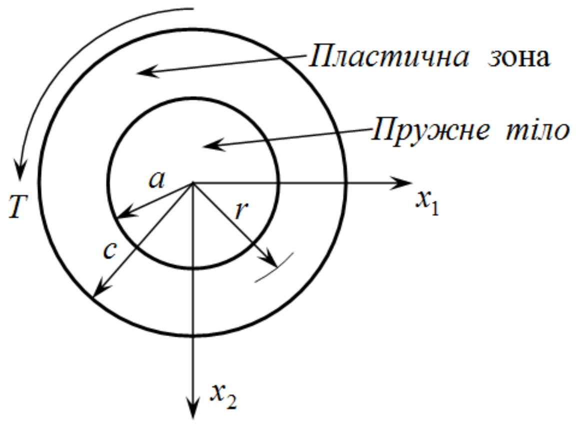


Рис. 8.8. Кручення валу із пружно-ідеально-пластичного матеріалу

Розв'язання

У даному випадку дотичне напруження σ_{12} розподілене таким чином: $\sigma_{12} = k\dfrac{r}{a}$ за умови $0 \le r \le a$ і $\sigma_{12} = k$ за умови $a \le r \le c$, де k – межа текучості матеріалу під час чистого зсуву. Тоді

$$T = 2\pi\int_0^a k\frac{r^3}{a}dr + 2\pi\int_a^c kr^2 dr = \frac{\pi a^3 k}{2} - \frac{2\pi k}{3}\left(a^3 - c^3\right).$$

Таким чином, крутний момент, який характеризує початок появи пластичної зони $(a = c)$, дорівнює $T_1 = \dfrac{\pi c^3 k}{2}$. Вал повністю знаходиться в пластичному стані $(a = 0)$ за умови $T_2 = \dfrac{2\pi c^3 k}{3} = \dfrac{4}{3}T_1$.

Задача 8.26. Товстостінна сферична оболонка, розміри якої вказано на рис. 8.9, знаходиться під дією зростаючого тиску p_0. Використовуючи критерій Мізеса, знайти той тиск, за якого вперше з'являється пластичний стан.

Розв'язання

У зв'язку з симетрією діючого навантаження головні напруження є компонентами в сферичних координатах

$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{II}}$, $\sigma_{rr} = \sigma_{\mathrm{III}}$.

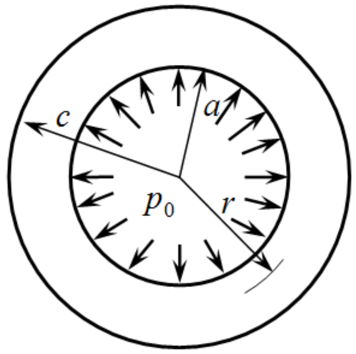


Рис. 8.9. Товстостінна сферична оболонка під тиском

Тоді критерій Мізеса $(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 = 2\sigma_Y^2$ буде виглядати

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_Y .$$

Можна показати, що компоненти напруження в пружному стані представляються виразами

$$\sigma_{rr} = -p_0 \frac{b^3/r^3 - 1}{b^3/a^3 - 1}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = p_0 \frac{b^3/(2r^3) + 1}{b^3/a^3 - 1}.$$

Тому

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_Y \to \sigma_Y = p_0 \frac{b^3/(2r^3) + 1}{b^3/a^3 - 1} + p_0 \frac{b^3/r^3 - 1}{b^3/a^3 - 1} \to$$

$$\to \sigma_Y = \frac{3b^3 p_0}{2r^3(b^3/a^3 - 1)},$$

звідки $p_0 = \dfrac{2\sigma_Y(1 - b^3/a^3)}{3}$. При цьому тиску з'являється пластичний стан на внутрішній границі оболонки (за умови $r = a$).

8.5. Теорія ліній ковзання

Задача 8.27. Перевірити, що формула $\sigma_{(1)} = -p + k$, $\sigma_{(2)} = -p - k$, $\sigma_{(3)} = -p,$ дійсно дає головні значення тенора напруження $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$, якщо прийнята умова $\sigma_{33} = \dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$.

Розв'язання

Головні значення тензора напружень знаходяться із рівняння

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -p-\sigma \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкладаючи визначник по третьому стовпцю, отримуємо

$$(-p-\sigma)\left[(\sigma_{11}-\sigma)(\sigma_{22}-\sigma)-\sigma_{12}^2\right] = (-p-\sigma)\left[\sigma^2-(\sigma_{11}+\sigma_{22})\sigma-\sigma_{12}^2\right] = 0 .$$

Очевидно, коренями рівняння будуть $\sigma=-p$ і

$$\sigma = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2}{4}+\sigma_{12}^2} = -p \pm k .$$

Задача 8.28. Скориставшись умовою сталості границі текучості під час чистого зсуву k, підставити вирази $\sigma_{11}=-p-k\sin 2\varphi$, $\sigma_{22}=-p+k\sin 2\varphi$, $\sigma_{12}=k\cos 2\varphi$ в рівняння рівноваги і, виконавши інтегрування, довести справедливість співвідношень $p+2k\varphi=C_1$ і $p-2k\varphi=C_2$.

Розв'язання

Напишемо рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0.$$

Після підстановки в них виразів для компонент напруження за умовами задачі отримуємо наступне

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1}-k(2\cos 2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+k(-2\sin 2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0,$$

$$-k(2\sin 2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-\frac{\partial p}{\partial x_2}+k(2\cos 2\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0.$$

Якщо x_1– координата вздовж α-лінії, а x_2– вздовж β-лінії, то $\varphi=0$ і рівняння рівноваги приймають вигляд:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1}-2k\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0 \text{ вздовж } \alpha\text{-лінії і}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2}+2k\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0 \text{ вздовж } \beta\text{-лінії.}$$

Інтегрування цих рівнянь виконати неважко, в результаті чого отримуємо

$p+2k\varphi=C_1$ вздовж α-лінії і

$p-2k\varphi=C_2$ вздовж β-лінії, що і треба було довести.

Задача 8.29. Під час штамповки з витяжкою без тертя через квадратну матрицю, що приводить до зменшення перетину на 50%, лінії ковзання заповнюють віялоподібну область, яка складається із радіальних прямих β-ліній і дуг кіл – α-ліній (рис. 8.10). Знайти компоненти швидкості вздовж цих ліній ковзання, виражених через швидкість подачі матеріалу U і полярні координати r і θ.

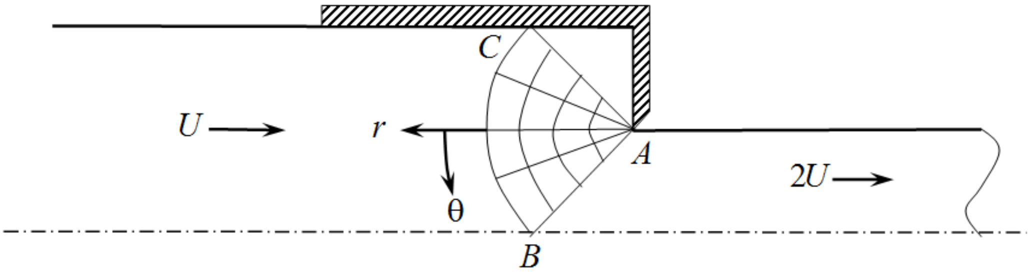


Рис. 8.10. Штамповка з витяжкою

Розв'язання

Вздовж прямих β-ліній $d\varphi = 0$ і по формулі $dv_2 + v_1 d\varphi = 0$ знаходимо $dv_2 = 0$, або $v_2 = \text{const}$. Оскільки нормальна компонента швидкості вздовж BC неперервна, в даній задачі ця константа повинна бути рівна $U\cos\theta$, тобто

$$v_2 = U\cos\theta.$$

Вздовж кругових α-ліній $d\varphi = d\theta$ і по формулі $dv_1 - v_2 d\varphi = 0$ отримуємо

$$v_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\theta} U\cos\theta d\theta = U\left(\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

8.6. Змішані задачі

Задача 8.30. Довести, що умову пластичності Мізеса можна записати через октаедричні дотичні напруження σ_{oct} (див. задачу 2.22) таким чином $\sigma_{oct} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sigma_Y$.

Розв'язання

Октаедричні дотичні напруження через головні напруження записуються формулою

$$3\sigma_{oct} = \sqrt{(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2}.$$

Відповідно до $(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2 = 2\sigma_Y^2$, маємо

$$9\sigma_{oct}^2 = (\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2 = 2\sigma_Y^2.$$

Задача 8.31. Довести, що рівняння $(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2 = 6k^2$, що виражає критерій Мізеса, можна записати у вигляді $s_{\text{I}}^2 + s_{\text{II}}^2 + s_{\text{III}}^2 = 2k^2$.

Розв'язання

Згідно з рівняннями $\sigma_{\mathrm{I}} = s_{\mathrm{I}} + \sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{II}} = s_{\mathrm{II}} + \sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{III}} = s_{\mathrm{III}} + \sigma_M$ рівняння критерію Мізеса приймає форму

$$(s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}})^2 + (s_{\mathrm{II}} - s_{\mathrm{III}})^2 + (s_{\mathrm{III}} - s_{\mathrm{I}})^2 = 6k^2 .$$

Розкриваючи скобки і перегруповуючи члени, це рівняння можна записати так

$$s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2 - \frac{(s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}})^2}{3} = 2k^2 .$$

Але відомо, що

$$s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}} = \mathrm{I}_{\Sigma_D} \equiv 0 ,$$

тому отримуємо шукане рівняння

$$s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2 = 2k^2 .$$

Задача 8.32. За якого значення $\mu = \dfrac{2\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}$, де μ – параметр Лоде, критерії Треска і Мізеса співпадають?

Розв'язання

Із формули, що визначає величину μ, маємо

$$\sigma_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2} + \mu \frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} .$$

Якщо підставити цей вираз у критерій Мізеса $(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 = 2\sigma_Y^2$, то після деяких алгебраїчних перетворень будемо мати (виконаємо спрощення послідовно)

$$\left(\sigma_{\mathrm{I}} - \frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2} + \mu \frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2}\right)^2 = \frac{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 (\mu - 1)^2}{4},$$

$$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2} + \mu \frac{\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2} - \sigma_{\mathrm{III}}\right)^2 = \frac{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 (\mu + 1)^2}{4},$$

$$\frac{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 (\mu - 1)^2}{4} + \frac{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 (\mu + 1)^2}{4} + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 =$$

$$= \frac{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 (\mu^2 + 3)}{2},$$

$$\frac{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 (\mu^2 + 3)}{2} = 2\sigma_Y^2 \rightarrow (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 = \frac{4\sigma_Y^2}{\mu^2 + 3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \frac{2\sigma_Y}{\sqrt{\mu^2 + 3}} .$$

Критерій Треска записується рівнянням $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \sigma_Y$. Очевидно, якщо $\mu = 1$, обидва критерії співпадають. Коли $\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{II}}$, то $\mu = 1$. Цей випадок іноді називають вісесиметричним станом.

Задача 8.33. Для напруженого стану

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

де σ і τ – сталі, знайти умови пластичності, що відповідають критеріям Треска і Мізеса.

Розв'язання

Легко показати, що головні значення даного тензора будуть такими:

$$\begin{vmatrix} \sigma - \sigma' & \tau & 0 \\ \tau & \sigma - \sigma' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \sigma' \end{vmatrix} = 0 \to (\sigma - \sigma')\left[(\sigma - \sigma')^2 - \tau^2\right] = 0 \to$$

$$\to (\sigma - \sigma')\left[\sigma'^2 - 2\sigma\sigma' + \sigma^2 - \tau^2\right] = 0,$$

звідки отримуємо, що

$$\sigma_{\mathrm{II}} = \sigma,\ \sigma_{\mathrm{I,III}} = \frac{2\sigma \pm \sqrt{4\sigma^2 - 4\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} = \sigma \pm \tau.$$

Тоді критерій Треска $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \sigma_Y$ приводить до рівняння

$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \sigma_Y \to \sigma + \tau - \sigma + \tau = \sigma_Y \to 2\tau = \sigma_Y,$$

а критерій Мізеса дає

$$(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 = 2\sigma_Y^2 \to$$

$$\to (\sigma + \tau - \sigma)^2 + (\sigma - \sigma + \tau)^2 + (\sigma - \tau - \sigma - \tau)^2 = 2\sigma_Y^2 \to$$

$$\to \tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2 = 2\sigma_Y^2 \to 6\tau^2 = 2\sigma_Y^2 \to$$

$$\to \tau = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}.$$

Знову переконуємося в тому, що в обох критеріях фігурує τ і відсутнє σ, тобто, що гідростатичний тиск ніяким чином не впливає ні на характеристики пластичного стану, ні на саму наявність такого стану.

Задача 8.34. Довести, що якщо рівняння Прандтля-Рейса виконується, то виконується і умова матеріалу для пластичної деформації. Записати ці рівняння через миттєві напруження.

Розв'язання

Із рівняння $d\varepsilon_{ij}^P = s_{ij} d\lambda$ видно, що $d\varepsilon_{ii}^P = s_{ii} d\lambda = 0$, оскільки $s_{ii} = \mathrm{I}_{\Sigma_D} = 0$, і, відповідно, умова нестисливості $d\varepsilon_{ii}^P = 0$ виконується.

Напишемо рівняння Прандтля-Рейса через компоненти тензора напруження

$$d\varepsilon_{ii}^P = \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3}\right)d\lambda .$$

Таким чином,

$$d\varepsilon_{11}^P = \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}\right)d\lambda = \frac{2}{3}\left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{22}+\sigma_{33}}{2}\right)d\lambda ,$$

$$d\varepsilon_{22}^P = \frac{2}{3}\left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{2}\right)d\lambda ,$$

$$d\varepsilon_{33}^P = \frac{2}{3}\left(\sigma_{33} - \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)d\lambda$$

для нормальних компонент і

$$d\varepsilon_{12}^P = \sigma_{12}d\lambda ,\ d\varepsilon_{23}^P = \sigma_{23}d\lambda ,\ d\varepsilon_{31}^P = \sigma_{31}d\lambda$$

для дотичних компонент.

Задача 8.35. Використовуючи критерій Мізеса, довести, що в Π-площині компоненти девіатора напружень на кривій текучості дорівнюють

$$s_{\mathrm{I}} = -\frac{2\sigma_Y \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{3},\ s_{\mathrm{II}} = \frac{2\sigma_Y \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}{3},\ s_{\mathrm{III}} = \frac{2\sigma_Y \sin\theta}{3},$$

де $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{Y}{X}$ (визначення X і Y за даними задачі 8.6).

Розв'язання

Радіус кола текучості Мізеса дорівнює $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y$, так що за визначенням $X = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \cos\theta$, $Y = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \sin\theta$ на кривій текучості. Таблиця коефіцієнтів перетворення осей координат, що наведена в задачі 8.6, разом з рівностями $\sigma_{\mathrm{I}} = s_{\mathrm{I}} + \sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{II}} = s_{\mathrm{II}} + \sigma_M$, $\sigma_{\mathrm{III}} = s_{\mathrm{III}} + \sigma_M$ дає можливість отримати рівняння $s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}} = -\sqrt{2}X = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y \cos\theta$ і $s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} - 2s_{\mathrm{III}} = -\sqrt{6}Y = -2\sigma_Y \sin\theta$. Відомо також і рівняння Π-площини $s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + s_{\mathrm{III}} = 0$. Розв'язуючи разом ці три рівняння знаходимо

$$s_{\mathrm{III}} = -s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}},$$

$$s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} + 2s_{\mathrm{I}} + 2s_{\mathrm{II}} = -2\sigma_Y \sin\theta \to 3(s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}}) = -2\sigma_Y \sin\theta \to$$

$$\to s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{II}} = -\frac{2\sigma_Y \sin\theta}{3}.$$

Тобто $s_{\mathrm{III}} = \dfrac{2\sigma_Y \sin\theta}{3}$.

Далі $s_{\mathrm{II}} = -s_{\mathrm{I}} - \dfrac{2\sigma_Y \sin\theta}{3}$,

$$s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y \cos\theta \to s_{\mathrm{I}} + s_{\mathrm{I}} + \frac{2\sigma_Y \sin\theta}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y \cos\theta \to$$

$$\to 2s_{\mathrm{I}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_Y \cos\theta - \frac{2\sigma_Y \sin\theta}{3} \to s_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_Y \cos\theta - \frac{\sigma_Y \sin\theta}{3} \to$$

$$\to s_{\mathrm{I}} = -\sigma_Y\left(\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{3} + \frac{\sin\theta}{3}\right) \to s_{\mathrm{I}} = -\frac{2}{3}\sigma_Y\left(\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{2}\right) \to$$

$$\to \left| \begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{2}\right) = \\ &= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \right| \to s_{\mathrm{I}} = -\frac{2\sigma_Y \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{3}.$$

І останнє

$$s_{\mathrm{II}} = -s_{\mathrm{I}} - \frac{2\sigma_Y \sin\theta}{3} \to s_{\mathrm{II}} = \frac{2\sigma_Y \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{3} - \frac{2\sigma_Y \sin\theta}{3} \to$$

$$\to s_{\mathrm{II}} = \frac{2\sigma_Y \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}{3} - \frac{2\sigma_Y \sin\theta}{3} \to s_{\mathrm{II}} = \frac{2\sigma_Y}{3}\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\theta\right) \to$$

$$\to s_{\mathrm{II}} = \frac{2\sigma_Y \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}{3}.$$

Задача 8.36. Пружно-ідеально-пластичний нестисливий матеріал знаходиться під навантаженням в умовах плоскої деформації між двома жорсткими пластинами, так що $\sigma_{22} = 0$ і $\varepsilon_{33} = 0$ (рис. 8.11). Використовуючи критерій Мізеса, визначити напруження σ_{11} в момент появи пластичності і відповідну деформацію ε_{11}.

Розв'язання

Співвідношення, що зв'язують напруження з деформацією в пружному стані

$$E\varepsilon_{33} = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

за умовами задачі зводиться до рівняння

$\sigma_{33} = \nu\sigma_{11}$.

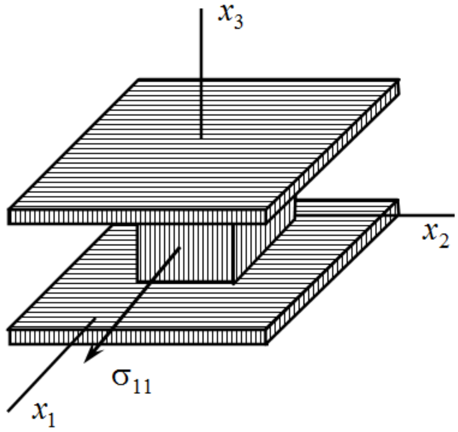


Рис. 8.11. Плоска деформація між двома жорсткими пластинами пружно-ідеально-пластичного нестисливого матеріалу

Тоді головні напруження за умови $\sigma_{12} = 0$ будуть дорівнювати

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \nu\sigma_{11} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\nu\sigma_{11} - \sigma)[(\sigma_{11} - \sigma)(0 - \sigma)] = 0,$$

$$\sigma(\sigma_{11} - \sigma) = 0 \rightarrow \sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{11}, \sigma_{\mathrm{III}} = 0,$$

$$(\nu\sigma_{11} - \sigma) = 0 \rightarrow \sigma_{\mathrm{II}} = \nu\sigma_{11}.$$

По формулі $(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2 = 2\sigma_Y^2$ будемо мати при $\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{11}, \sigma_{\mathrm{II}} = \nu\sigma_{11}, \sigma_{\mathrm{III}} = 0$

$$(\sigma_{11} - \nu\sigma_{11})^2 + (\nu\sigma_{11})^2 + (\sigma_{11})^2 = 2\sigma_Y^2,$$

$$(\sigma_{11}(1 - \nu))^2 + (\nu\sigma_{11})^2 + (\sigma_{11})^2 = 2\sigma_Y^2,$$

звідки знаходимо, що на межі текучості напруження стискання,

$$\sigma_{11} = -\frac{\sigma_Y}{\sqrt{1 + \nu - \nu^2}}.$$

Аналогічно, із співвідношення

$$E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

знаходимо, що на межі текучості

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\sigma_Y(1 - \nu)}{E\sqrt{1 + \nu + \nu^2}}.$$

Задача 8.37. Балка прямокутного перетину із пружно-ідеально-пластичного матеріалу піддається навантаженню, що призводить до чистого згину (рис. 8.12). Навантаження зростає до такого значення моменту, що увесь матеріал балки повністю переходить в пластичний стан. Знайти залишкове напруження в балці після того, як згинальний момент M знято.

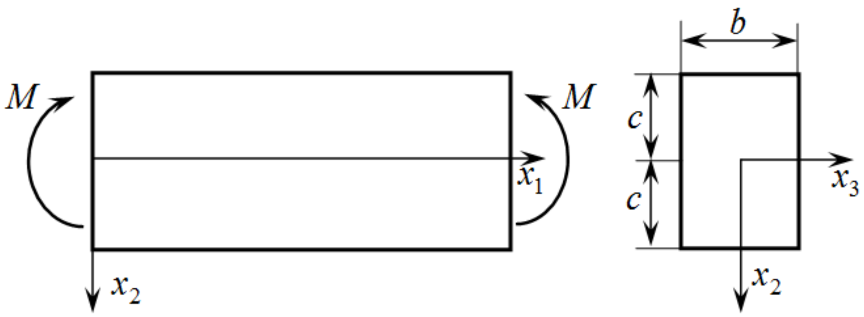


Рис. 8.12. Згин балки прямокутного перетину із пружно-ідеально-пластичного матеріалу

Розв'язання

Все січення балки повністю вважається в пластичному стані, коли момент досягає значення $M = bc^2\sigma_Y$ (див. задачу 8.23). За такого моменту пружне напруження в крайніх волокнах було б рівним

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{3\sigma_Y}{2},$$

де $I = \frac{2}{3}bc^2$ – момент інерції січення балки відносно осі x_3. Наступне зняття моменту M еквівалентно прикладенню відповідно розподілених від'ємних пружних напружень, що дає в результаті залишкове напруження, яке показано на рис. 8.13.

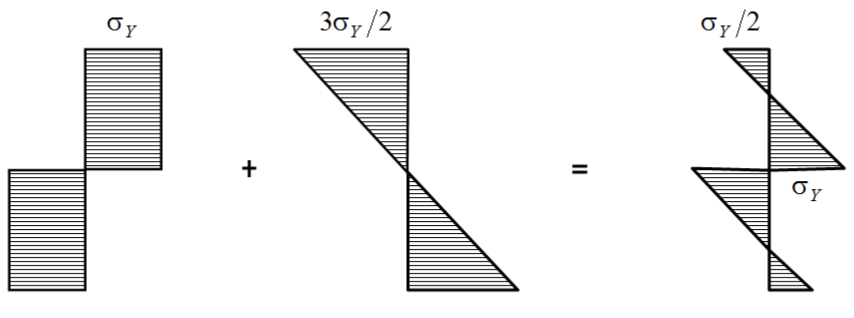


Рис. 8.13. Епюри напруження при згині балки прямокутного перетину: *а* – пластичне напруження; *б* – від'ємне пружне напруження; *в* – залишкове напруження

Задача 8.38. Товстостінна циліндрична труба закрита з торців (рис. 8.14) знаходиться під дією внутрішнього тиску p_0. Знайти значення p_0, при якому вперше досягається межа текучості. Прийняти критерії текучості: а) Мізеса; б) Треска.

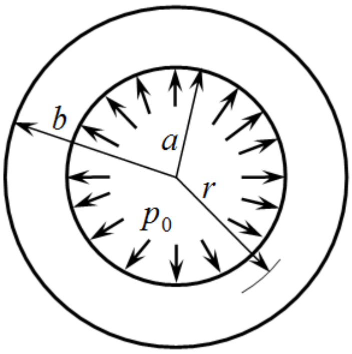


Рис. 8.14. Товстостінна циліндрична труба під тиском

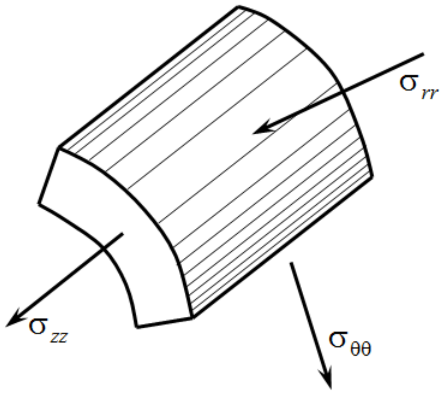


Рис. 8.15. Компоненти напруження в циліндричних координатах

Розв’язання

Компоненти напруження в циліндричних координатах (рис. 8.15) будуть головними напруженнями. Аналіз пружного стану дає змогу показати, що

$$\sigma_{rr} = -\frac{p_0\left(b^2/r^2 - 1\right)}{Q}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p_0\left(b^2/r^2 + 1\right)}{Q}, \quad \sigma_{zz} = \frac{p_0}{Q},$$

де $Q = \left(b^2/a^2 - 1\right)$.

а) За умовами задачі критерій Мізеса має вигляд

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 = 2\sigma_Y^2$$

або

$$\left(-\frac{p_0\left(b^2/r^2 - 1\right)}{Q} - \frac{p_0\left(b^2/r^2 + 1\right)}{Q}\right)^2 + \left(\frac{p_0\left(b^2/r^2 + 1\right)}{Q} - \frac{p_0}{Q}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{p_0}{Q} + \frac{p_0\left(b^2/r^2 - 1\right)}{Q}\right)^2 = 2\sigma_Y^2 \to$$

$$\to p_0^2\left[4\frac{b^4}{r^4} + \frac{b^4}{r^4} + \frac{b^4}{r^4}\right] = 2Q^2\sigma_Y^2 \to 6p_0^2\frac{b^4}{r^4} = 2Q^2\sigma_Y^2 \to$$

$$\to p_0^2\frac{b^4}{r^4} = \frac{Q^2\sigma_Y^2}{3}.$$

Межа текучості вперше досягається за умови $r = a$ і тоді

$$p_0^2\frac{b^4}{a^4} = \frac{Q^2\sigma_Y^2}{3} \to p_0^2\frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2\frac{\sigma_Y^2}{3} \to p_0^2\frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{b^4}{a^4} - 2\frac{b^2}{a^2} + 1\right)\frac{\sigma_Y^2}{3} \to$$

$$p_0^2 = \left(1 - 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}\right)\frac{\sigma_Y^2}{3} \to p_0^2 = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2\frac{\sigma_Y^2}{3}.$$

Звідки

$$p_0 = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

б) Критерій Треска зводиться до рівності

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_Y,$$

оскільки головні напруження утворюють нерівність $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$. Тобто σ_{zz} – займає проміжне значення. Таким чином можна записати, підставляючи значення $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}$ у вираз для критерію Треска

$$\frac{p_0\left(b^2/r^2 + 1\right)}{Q} + \frac{p_0\left(b^2/r^2 - 1\right)}{Q} = \sigma_Y \to 2p_0\frac{b^2}{r^2} = Q\sigma_Y.$$

Знов межа текучості досягається за умови $r = a$ і тоді, підставляючи значення для Q, отримуємо

$$2p_0\frac{b^2}{r^2} = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\sigma_Y \to p_0 = \frac{\sigma_Y}{2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Задача 8.39. Для пружнопластичного середовища з критерієм текучості Мізеса, диференціюючи за часом рівність

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

і використовуючи закон Гука і асоціативний закон, отримати рівняння Прандтля-Рейса

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\dot{p}_{ij}^{(d)} + \dot{\lambda}p_{ij}^{(d)}, \qquad \varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K}p_{kk}.$$

Розв'язання

Диференціюючи за часом рівність $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$, отримуємо

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \tag{8.5}$$

де $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – прирощення (або швидкість) сумарної деформації (похідна за часом), $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ – прирощення пружної деформації, $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ – прирощення пластичної деформації.

В теорії пластичності рівність $f\left(\sigma_{ij}, h\right) = 0$ називається критерієм текучості. Тут σ_{ij}, h – тензор напружень і параметр зміцнення матеріалу, відповідно.

Критерієм текучості Мізеса визначається співвідношенням

$$\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 = 2\sigma_s^2,$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні значення тензору напружень (визначаються як власні значення тензора напружень), σ_s – межа плинності матеріалу, яка може бути постійною або функцією параметру зміцнення h, або $\sigma_s = \sigma_{\text{ekvM}}$ – еквівалентне напруження за Мізесом.

Критерій текучості Мізеса можна також виразити через тензор девіаторних напружень

$$\sigma_{\text{ekvM}} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^{(d)} s_{ij}^{(d)}}, \qquad (8.6)$$

де $s_{ij}^{(d)} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1,3}$ – тензор девіаторних напружень, Па; $I_1 = \sigma_{kk}$, Па.

Тобто еквівалентні напруження за Мізесом не залежать від нормальних напружень σ_{kk}.

Прирощення пластичних деформацій в теорії пластичної течії знаходяться за допомогою асоціативного закону

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \begin{cases} \dot{\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \dot{\lambda} \geq 0, \text{ при } f(\sigma_{ij}, h) = 0, \\ 0, \text{ при } f(\sigma_{ij}, h) < 0. \end{cases}$$

Тут $\dot{\lambda}$ розглядається як єдиний символ, в інших випадках точка над символом позначає похідну за часом. $\dot{\lambda}$ – коефіцієнт пропорційності, який характеризує пластичні властивості матеріалу.

Асоціативний закон можна також записати через тензор девіаторних напружень $s_{ij}^{(d)}$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda} \sigma_{ij}^{(d)}. \qquad (8.7)$$

Із асоціативного закону витікає, що $\dot{\varepsilon}_{kk}^{p} = 0$ і відповідно, $\varepsilon_{kk}^{p} = 0$. Тобто при пластичних деформаціях тіло не змінює свій об'єм.

Еквівалентна пластична деформація за Мізесом визначається співвідношенням

$$\dot{\varepsilon}_{\text{ekvM}}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}}, \qquad (8.8)$$

Використовуючи еквівалентне напруження за Мізесом (8.6) і пластичну деформацію (8.8) одержимо вираз для $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{\text{ekvM}}^{p}}{\sigma_{\text{ekvM}}}.$$

З вихідних положень теорії пластичної течії витікає, що зміна об'єму матеріалу пов'язана із пружними деформаціями, які пропорційні $\frac{1}{3}\sigma_{kk}$. Тобто

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} \sigma_{kk}, \qquad (8.9)$$

де $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, λ, μ – коефіцієнти Ламе.

Прирощення пружних деформацій визначається із закону Гука, який з врахуванням (8.6) приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}^{(d)}. \tag{8.10}$$

Підставляючи (8.7) і (8.10) в (8.5), отримуємо рівняння Прандтля-Рейса

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{ij}^{(d)} + \dot{\lambda}\sigma_{ij}^{(d)}, \qquad \varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K}\sigma_{kk},$$

що і треба було отримати.

Задача 8.40. Пружнопластичне середовище, яке підпорядковується критерію Мізеса, рухається в умовах плоскої деформації в декартовій площині (x_1, x_2). Вважаючи початковий стан напруженим, показати, що:

1) під час руху виконується $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$;

2) якщо середовище нестисливе, то виконується

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$

і критерій текучості Мізеса приймає вигляд

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2,$$

де $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання

З умов плоскої деформації витікає, що $\varepsilon_{13} = 0$ і $\varepsilon_{23} = 0$. Тоді, скориставшись рівнянням Прантля-Рейса $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{ij}^{(d)} + \dot{\lambda}\sigma_{ij}^{(d)}$, отримуємо, що

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{13} + \dot{\lambda}\sigma_{13} = 0,$$ звідки знаходимо, що $\sigma_{13} = 0$,

і

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu}\dot{\sigma}_{23} + \dot{\lambda}\sigma_{23} = 0,$$ звідки очевидно, що $\sigma_{23} = 0$.

Критерій Мізеса в тривимірному випадку записується через компоненти тензора напружень у вигляді

$$\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = \sigma_s^2.$$

Враховуючи те, що $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ і $\sigma_{33} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$ маємо

$$\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+\frac{1}{2}\left(\sigma_{22}-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}-\sigma_{11}\right)^2+3\sigma_{12}^2=\sigma_s^2. \quad (8.11)$$

Спростимо спочатку частину рівняння (8.11)

$$\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+\frac{1}{2}\left(\sigma_{22}-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}-\sigma_{11}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+\left(\frac{\sigma_{22}}{2}-\frac{\sigma_{11}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{22}}{2}-\frac{\sigma_{11}}{2}\right)^2\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+2\left(\frac{\sigma_{22}}{2}-\frac{\sigma_{11}}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+\frac{2}{4}(\sigma_{22}-\sigma_{11})^2\right]=\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+\frac{1}{2}(\sigma_{22}-\sigma_{11})^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sigma_{11}{}^2-2\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}{}^2+\frac{1}{2}\left(\sigma_{22}{}^2-2\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{11}{}^2\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sigma_{11}{}^2-3\sigma_{11}\sigma_{22}+\frac{3}{2}\sigma_{22}{}^2\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\sigma_{11}{}^2-2\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}{}^2\right]=\frac{3}{4}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2.$$

Після підстановки отриманого виразу в (8.11) отримуємо

$$\frac{3}{4}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+3\sigma_{12}^2=\sigma_s^2 \Leftrightarrow (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2=\frac{4}{3}\sigma_s^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2=4k^2,$$

де $k=\dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ – початкова межа текучості при чистому зсуві.

Що і треба було довести.

8.7. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 8.41. Дано закон одновимірної залежності напруження-деформація $\sigma = K\varepsilon^n$, причому K і n – сталі, а ε – істинна деформація. Довести, що максимальне навантаження має місце за умови $\varepsilon = n$.

Задача 8.42. Розв’язати задачу 8.4, записавши критерії Мізеса і Треска через межу текучості для чистого зсуву k, а не через σ_Y.

Відповідь: Мізеса – $\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{3}k}\right)^2+\left(\dfrac{\tau}{k}\right)^2=1;$

$$\text{Треска} - \left(\frac{\sigma}{2k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2 = 1.$$

Задача 8.43. Прийнявши умови задачі 8.6, переконатися в правильності геометричної побудови на рис. 8.16

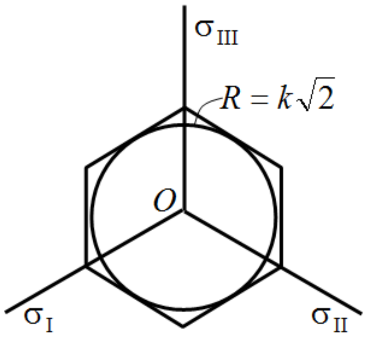


Рис. 8.16. Криві текучості, що відповідають критерію Треска

Задача 8.44. Використовуючи визначення параметра Лоде μ (див. задачу 8.3) і критерій Мізеса, довести, що

$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \frac{2\sigma_Y}{\sqrt{3+\mu^2}}.$$

Задача 8.45. Довести, що в Π-площині виконується формула $\mu = -\sqrt{3}\mathrm{tg}\theta$, де $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{Y}{X}$ (X і Y визначені в задачі 8.6).

Задача 8.46. Довести, що інваріанти девіатора напружень $\mathrm{II}_{\Sigma_D} = s_{ij}\, s_{ij}/2$ і $\mathrm{III}_{\Sigma_D} = s_{ij}\, s_{jk} s_{ki}/3$ можна представити відповідно у вигляді $\mathrm{II}_{\Sigma_D} = \left(s_{\mathrm{I}}^2 + s_{\mathrm{II}}^2 + s_{\mathrm{III}}^2\right)/2$ і $\mathrm{III}_{\Sigma_D} = \left(s_{\mathrm{I}}^3 + s_{\mathrm{II}}^3 + s_{\mathrm{III}}^3\right)/3$.

Задача 8.47. Довести, що критерій Мізеса можна записати в формі

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right) = 6k^2.$$

Задача 8.48. Використовуючи метод розв'язання задачі 8.17, знайти відношення прирощення пластичної деформації: а) для двовісного розтягнення, коли $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_Y$; б) для розтягнення з крученням, коли $\sigma_{11} = \sigma_Y/2$, $\sigma_{12} = \sigma_Y/2$.

Відповідь: а) $d\varepsilon_{11}^P = d\varepsilon_{22}^P = -d\varepsilon_{33}^P/2$;

б) $d\varepsilon_{11}^P/2 = -d\varepsilon_{22}^P = -d\varepsilon_{33}^P = d\varepsilon_{12}^P/3$.

Задача 8.49. Перевірте наступні еквівалентні вирази для прирощення ефективної пластичної деформації $d\varepsilon_{ekv}^P$:

а) $d\varepsilon_{ekv}^P = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left[\left(d\varepsilon_{11}^P\right)^2 + \left(d\varepsilon_{22}^P\right)^2 + \left(d\varepsilon_{33}^P\right)^2 + 2\left[\left(d\varepsilon_{12}^P\right)^2 + \left(d\varepsilon_{23}^P\right)^2 + \left(d\varepsilon_{31}^P\right)^2\right]\right]^{\frac{1}{2}}$;

б) $d\varepsilon_{ekv}^{P} = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big[\left(d\varepsilon_{11}^{P} - d\varepsilon_{22}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{22}^{P} - d\varepsilon_{33}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{33}^{P} - d\varepsilon_{11}^{P}\right)^2 +$

$$+ 6\Big[\left(d\varepsilon_{12}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{23}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{31}^{P}\right)^2\Big]\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Зверніть увагу на те, що в обох випадках $d\varepsilon_{ekv}^{P} = d\varepsilon_{11}^{P}$ за умови одновісного розтягування напруженням σ_{11}.

Задача 8.50. Тонкостінна труба із пружно-ідеально-пластичного матеріалу зазнає навантаження на розтяг і кручення. Першим прикладається напруження вздовж осі труби $\sigma = \sigma_Y/2$, яке лишається сталим, в той час коли дотичне напруження τ рівномірно збільшується починаючи від нуля. Базуючись на критерії Мізеса, знайти, за якого значення τ починається перехід до пластичного стану.

Відповідь: $\tau = \sigma_Y/2$.

Задача 8.51. Балка трикутного поперечного січення (рис. 8.17) піддається навантаженню на чистий згин. Знайти положення нейтральної осі балки NA (її відстань b від вершини трикутника) в умовах, коли січення повністю знаходиться в пластичному стані.

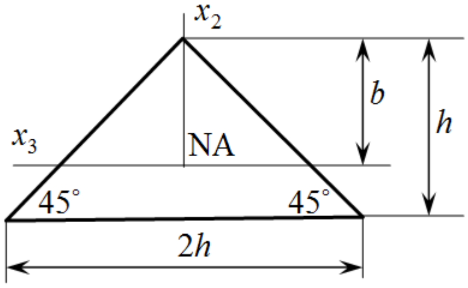


Рис. 8.17. Розміри балки трикутного поперечного січення

Відповідь: $b = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$.

Задача 8.52. Показати, що тензор напруження $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ має вигляд

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & k & 0 \\ k & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

в системі координат, що повернута навколо осі x_3 на кут θ (рис. 8.18).

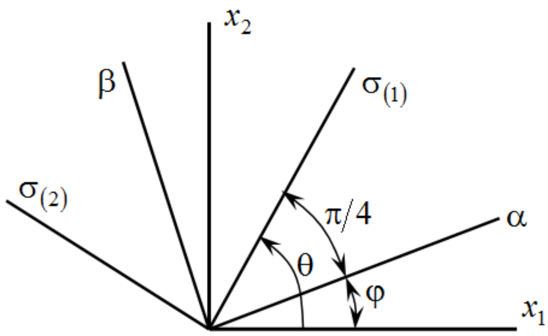


Рис. 8.18. До задачі 8.50

Задача 8.53. Лінії ковзання утворюють віялоподібну область з кутом 30°. α-лінії – дуги кіл, β-лінії – радіуси (рис. 8.19). Тиск на лінії AB дорівнює k. Знайти тиск на лінії AC.

Відповідь: $p = k\left(1+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

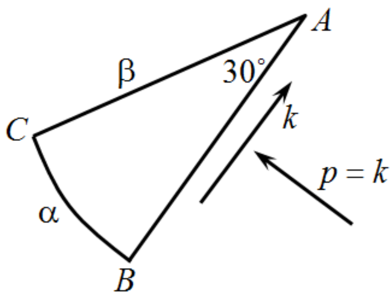


Рис. 8.19. До задачі 8.51

Задача 8.54. В пружнопластичному середовищі зі зміцненням відбувається пластична течія $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \neq 0$. Виразити множник λ в асоціативному законі через швидкість зміни напруження $\dot{\sigma}_{ij}$. Зверніть увагу, що для ідеальнопластичного середовища цього зробити неможливою Чому?

Задача 8.55. Значення функції f, що задає критерії текучості, не залежить від кульової складової тензора напруження. Показати, якщо виконано асоціативний закон, то пластичні деформації задовольняють умові нестисливості $\dot{\varepsilon}_{kk}^{p} = 0$.

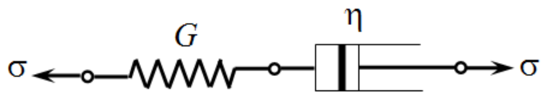
9. ЛІНІЙНА В'ЯЗКОПРУЖНІСТЬ

9.1. Найпростіші механічні моделі в'язкопружної поведінки

Задача 9.1. Перевірте правильність співвідношень між напруженнями і деформаціями, що представлені формулами $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta}$ і $\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ для моделей Максвела і Кельвіна, відповідно.

Розв'язання

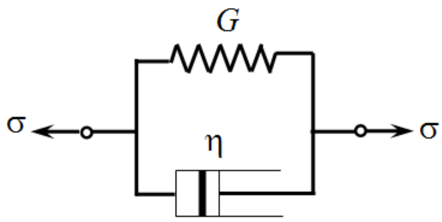
В моделі Максвела повна швидкість деформація $\dot{\varepsilon}$ дорівнює сумі швидкості деформації пружини $\dot{\varepsilon}_S$ і переміщення поршня у в'язкого елементу $\dot{\varepsilon}_D$ (рис. 9.1). Тобто можна записати, що $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_S + \dot{\varepsilon}_D$. Оскільки напруження в елементах (пружному і в'язкому) дорівнює σ, а швидкості деформації відповідних елементів моделі дорівнюють $\dot{\varepsilon}_S = \dot{\sigma}/G$ і $\dot{\varepsilon}_D = \sigma/\eta$, то після підстановки цих виразів у формулу для $\dot{\varepsilon}$, отримуємо шукане співвідношення моделі в'язкопружного середовища Максвела – $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/G + \sigma/\eta$.



σ – напруження, Па; G – модуль зсуву, Па; η – в'язкість, Па·с

Рис. 9.1. Модель в'язкопружного середовища Максвела

В моделі Кельвіна (рис. 9.2) напруження системи σ дорівнює сумі напружень, спричинених пружним σ_S і в'язким σ_D елементами моделі, тобто можна записати $\sigma = \sigma_S + \sigma_D$. Враховуючи те, що $\sigma_S = G\varepsilon$, а $\sigma_D = \eta\dot{\varepsilon}$, то після підстановки цих значень у формулу для σ, отримуємо шукане співвідношення моделі в'язкопружного середовища Кельвіна – $\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$. Що і треба було показати.



σ – напруження, Па; G – модуль зсуву, Па; η – в'язкість, Па·с

Рис. 9.2. Модель в'язкопружного середовища Кельвіна

Задача 9.2. Використовуючи операторну форму запису співвідношення між напруженнями і деформаціями для моделі Кельвіна, отримати закон, який зв'язує напруження і деформацію в стандартному лінійному твердому тілі (рис. 9.3).

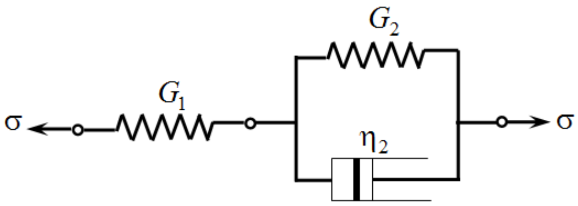


Рис. 9.3. Модель стандартного лінійного тіла (трьохпараметрична)

Розв'язання

В моделі стандартного лінійного тіла повна деформація ε дорівнює сумі деформацій пружного тіла ε_S і елемента Кельвіна ε_K, тобто $\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_K$ або в операторній формі $\varepsilon = \sigma / G_1 + \sigma / \{G_2 + \eta_2 \partial_t\}$. Звідси знаходимо, що

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G_1} + \frac{\sigma}{\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}} \to \varepsilon = \frac{\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}\sigma + G_1 \sigma}{G_1 \{G_2 + \eta_2 \partial_t\}} \to$$

$$\to G_1 \{G_2 + \eta_2 \partial_t\} \varepsilon = \{G_2 + \eta_2 \partial_t\} \sigma + G_1 \sigma$$

і, відповідно

$$G_1 G_2 \varepsilon + G_1 \eta_2 \partial_t \varepsilon = (G_1 + G_2)\sigma + \eta_2 \partial_t \sigma,$$

або

$$G_1 G_2 \varepsilon + G_1 \eta_2 \dot{\varepsilon} = (G_1 + G_2)\sigma + \eta_2 \dot{\sigma}.$$

Задача 9.3. Написати співвідношення, що зв'язують напруження і деформації в чотирьохпараметричній моделі (рис. 9.4). За умови $\eta_1 \to \infty$ порівняти з результатом задачі 9.2 $G_1 G_2 \varepsilon + G_1 \eta_2 \dot{\varepsilon} = (G_1 + G_2)\sigma + \eta_2 \dot{\sigma}$.

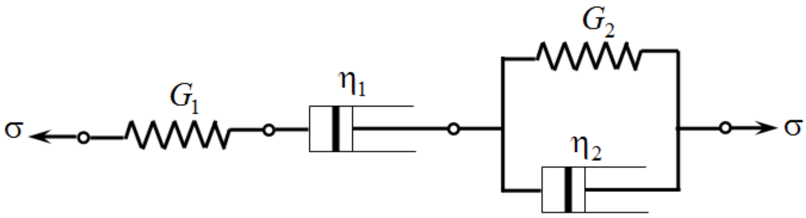


Рис. 9.4. Чотирьохпараметрична модель в'язкопружного середовища

Розв'язання

Для моделі (див. рис. 9.4) повна деформація ε визначається як сума моделей Максвела і Кельвіна, тобто

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_K,$$

де $\varepsilon_K = \dfrac{\sigma}{\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}}$,

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}_M}{\{\partial_t / G_1 + 1/\eta_1\}} = \frac{\varepsilon_M \{\partial_t\}}{\{\partial_t / G_1 + 1/\eta_1\}} \to \varepsilon_M = \{\partial_t / G_1 + 1/\eta_1\} \sigma \frac{1}{\{\partial_t\}} =$$

$$= \{\partial_t + G_1/\eta_1\} \frac{\sigma}{G_1} \frac{1}{\{\partial_t\}} = \left\{\partial_t + \frac{1}{\tau_1}\right\} \frac{\sigma}{G_1} \frac{1}{\{\partial_t\}},$$

де $\tau_1 = \eta_1 / G_1$ – час запізнення. Після підстановки виразів ε_K і ε_M в формулу для повної деформації ε отримуємо відповідне співвідношення в операторній формі

$$\varepsilon = \left\{ \partial_t + \frac{1}{\tau_1} \right\} \frac{\sigma}{G_1} \frac{1}{\{\partial_t\}} + \frac{\sigma}{\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}}.$$

Приведемо до спільного знаменника і згрупуємо члени

$$\varepsilon = \left\{ \partial_t + \frac{G_1}{\eta_1} \right\} \frac{\sigma}{G_1} \frac{1}{\{\partial_t\}} + \frac{\sigma}{\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}} \to$$

$$\to \varepsilon = \{\eta_1 \partial_t + G_1\} \frac{\sigma\{G_2 + \eta_2 \partial_t\} + \sigma G_1 \eta_1 \{\partial_t\}}{G_1 \eta_1 \{\partial_t\}\{G_2 + \eta_2 \partial_t\}} \to$$

$$\to \varepsilon G_1 \eta_1 \{\partial_t\}\{G_2 + \eta_2 \partial_t\} = \{\eta_1 \partial_t + G_1\} \sigma \{G_2 + \eta_2 \partial_t\} + \sigma G_1 \eta_1 \{\partial_t\} \to$$

$$\to \varepsilon G_1 \eta_1 \{\partial_t\}\{G_2 + \eta_2 \partial_t\} = \{\eta_1 \partial_t + G_1\} \sigma \{G_2 + \eta_2 \partial_t\} + \sigma G_1 \eta_1 \{\partial_t\} \to$$

$$\to G_1 G_2 \eta_1 \varepsilon \{\partial_t\} + G_1 \eta_1 \eta_2 \varepsilon \{\partial_t^2\} = \eta_1 \eta_2 \sigma \{\partial_t^2\} + G_1 G_2 \sigma +$$

$$+ G_2 \eta_1 \sigma \{\partial_t\} + G_1 \eta_2 \sigma \{\partial_t\} + G_1 \eta_1 \sigma \{\partial_t\} \to$$

$$\to G_1 G_2 \eta_1 \varepsilon \{\partial_t\} + G_1 \eta_1 \eta_2 \varepsilon \{\partial_t^2\} = \eta_1 \eta_2 \sigma \{\partial_t^2\} + [G_1 \eta_2 + (G_1 + G_2) \eta_1] \sigma \{\partial_t\} +$$

$$+ G_1 G_2 \sigma$$

замінимо операторну форму запису похідних на звичайну з крапками, отримаємо

$$G_1 \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} + G_1 G_2 \eta_1 \dot{\varepsilon} = \eta_1 \eta_2 \ddot{\sigma} + [G_1 \eta_2 + (G_1 + G_2) \eta_1] \dot{\sigma} + G_1 G_2 \sigma,$$

розділимо ліву і праву частину рівняння на $\eta_1 \eta_2$, отримаємо

$$G_1 \ddot{\varepsilon} + G_1 G_2 \, \dot{\varepsilon} / \eta_2 = \ddot{\sigma} + [G_1 / \eta_1 + (G_1 + G_2) / \eta_2] \dot{\sigma} + G_1 G_2 \, \sigma / (\eta_1 \eta_2).$$

За умови $\eta_1 \to \infty$ останнє співвідношення приймає вигляд

$$G_1 \ddot{\varepsilon} + G_1 G_2 \, \dot{\varepsilon} / \eta_2 = \ddot{\sigma} + (G_1 + G_2) / \eta_2 \, \dot{\sigma}$$

або, після інтегрування за часом, отримуємо $G_1 \eta_2 \dot{\varepsilon} + G_1 G_2 \varepsilon = \eta_2 \dot{\sigma} + (G_1 + G_2) \sigma$, що еквівалентно результату задачі 9.2 $G_1 G_2 \varepsilon + G_1 \eta_2 \dot{\varepsilon} = (G_1 + G_2) \sigma + \eta_2 \dot{\sigma}$.

Задача 9.4. Розглядаючи модель, що показана на рис. 9.5, як окремий випадок узагальненої моделі Максвела, знайти для неї співвідношення між напруженнями і деформаціями.

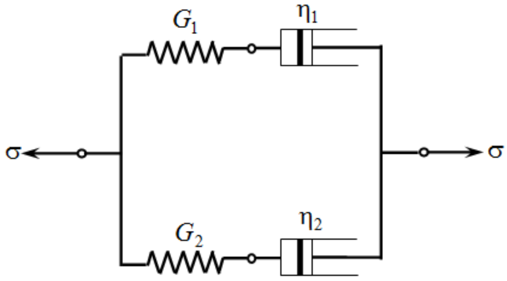


Рис. 9.5. Узагальнена модель Максвела

Розв'язання

За умови $N = 2$ (див. рис. 9.5) співвідношення між напруженнями і швидкістю деформації для моделі Максвела $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$ набуває вигляду

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t / G_1 + 1/\eta_1\}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t / G_2 + 1/\eta_2\}}.$$

Якщо ввести величину часу запізнення $\tau_1 = \eta_1 / G_1$ і $\tau_2 = \eta_2 / G_2$ та винести G_1 і G_2 за дужки в доданках, то функція $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$ буде мати вигляд

$$\sigma = \frac{G_1\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t + 1/\tau_1\}} + \frac{G_2\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t + 1/\tau_2\}}.$$

Приведемо до спільного знаменника і згрупуємо члени

$$\{\partial_t + 1/\tau_2\}\{\partial_t + 1/\tau_1\}\sigma = G_1\{\partial_t + 1/\tau_2\}\dot{\varepsilon} + G_2\{\partial_t + 1/\tau_1\}\dot{\varepsilon} \to$$

$$\to \{\partial_t + 1/\tau_2\}(\dot{\sigma} + \sigma/\tau_1) = G_1\{\partial_t + 1/\tau_2\}\dot{\varepsilon} + G_2\{\partial_t + 1/\tau_1\}\dot{\varepsilon}.$$

Розкриємо оператори і перегрупуємо члени окремо для лівої і правої частини рівняння $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$

$$\{\partial_t + 1/\tau_2\}(\dot{\sigma} + \sigma/\tau_1) = \dot{\sigma}\{\partial_t\} + \dot{\sigma}/\tau_2 + \sigma\{\partial_t\}/\tau_1 + \sigma/(\tau_1\tau_2) =$$

$$= \ddot{\sigma} + \dot{\sigma}/\tau_2 + \dot{\sigma}/\tau_1 + \sigma/(\tau_1\tau_2) = \ddot{\sigma} + (\tau_1 + \tau_2)\dot{\sigma}/(\tau_1\tau_2) + \sigma/(\tau_1\tau_2),$$

$$G_1\{\partial_t + 1/\tau_2\}\dot{\varepsilon} + G_2\{\partial_t + 1/\tau_1\}\dot{\varepsilon} = (G_1\{\partial_t\} + G_1/\tau_2)\dot{\varepsilon} + (G_2\{\partial_t\} + G_2/\tau_1)\dot{\varepsilon} =$$

$$= G_1\dot{\varepsilon}\{\partial_t\} + G_2\dot{\varepsilon}\{\partial_t\} + (G_1/\tau_2 + G_2/\tau_1)\dot{\varepsilon} = G_1\ddot{\varepsilon} + G_2\ddot{\varepsilon} + (G_1/\tau_2 + G_2/\tau_1)\dot{\varepsilon} =$$

$$= (G_1 + G_2)\ddot{\varepsilon} + (G_1/\tau_2 + G_2/\tau_1)\dot{\varepsilon},$$

остаточно отримуємо

$$\ddot{\sigma} + (\tau_1 + \tau_2)\dot{\sigma}/(\tau_1\tau_2) + \sigma/(\tau_1\tau_2) = (G_1 + G_2)\ddot{\varepsilon} + (G_1/\tau_2 + G_2/\tau_1)\dot{\varepsilon},$$

що і треба було знайти.

Задача 9.5. Модель, яка показана на рис. 9.6, можна вважати виродженим випадком узагальненої моделі Максвела $(N = 3)$ за умови $G_1 = \eta_2 = \infty$. Використовуючи ці значення коефіцієнтів у рівнянні $\sigma = \sum_{i=1}^{3} \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t / G_i + 1/\eta_i\}}$, записати співвідношення між напруженнями і швидкостями деформації для цієї моделі.

Розв'язання

Для випадку рис. 9.6 рівняння для узагальненої моделі Максвела приймає вигляд

$$\sigma = \eta_1\dot{\varepsilon} + \frac{G_2\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t\}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t / G_3 + 1/\eta_3\}}$$

або після зведення до спільного знаменника і його відкидання отримуємо

$$\{\partial_t / G_3 + 1/\eta_3\}\sigma\{\partial_t\} = \{\partial_t / G_3 + 1/\eta_3\}\eta_1\dot{\varepsilon}\{\partial_t\} + \{\partial_t / G_3 + 1/\eta_3\}G_2\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}\{\partial_t\},$$

$$\{\partial_t / G_3 + 1/\eta_3\}\dot{\sigma} = \{\partial_t / G_3 + 1/\eta_3\}\eta_1\ddot{\varepsilon} + \{\partial_t / G_3 + 1/\eta_3\}G_2\dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon},$$

$$\{\partial_t/G_3 + 1/\eta_3\}\dot{\sigma} = \{\partial_t/G_3 + 1/\eta_3\}(\eta_1\ddot{\varepsilon} + G_2\dot{\varepsilon}) + \dddot{\varepsilon}\,.$$

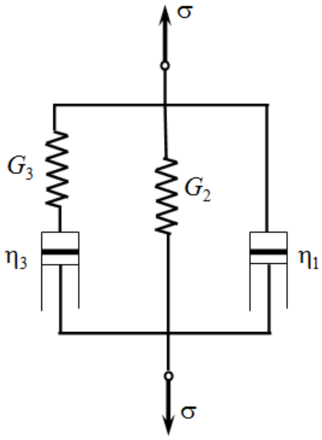


Рис. 9.6. Вироджений випадок узагальненої моделі Максвела

Виконуючи дії, що вказані операторами, отримуємо

$$\ddot{\sigma}/G_3 + \dot{\sigma}/\eta_3 = \eta_1\dddot{\varepsilon}/G_3 + (1 + G_2/G_3 + \eta_1/\eta_3)\ddot{\varepsilon} + G_2/\eta_3\,\dot{\varepsilon}\,.$$

Після інтегрування за часом, отримуємо

$$\dot{\sigma}/G_3 + \sigma/\eta_3 = \eta_1\ddot{\varepsilon}/G_3 + (1 + G_2/G_3 + \eta_1/\eta_3)\dot{\varepsilon} + G_2/\eta_3\,\varepsilon\,,$$

домножимо ліву і праву частини на $G_3\eta_3$

$$\eta_3\dot{\sigma} + G_3\sigma = \eta_1\eta_3\ddot{\varepsilon} + (G_3\eta_3 + G_2\eta_3 + G_3\eta_1)\dot{\varepsilon} + G_2G_3\varepsilon.$$

9.2. Повзучість і релаксація

Задача 9.6. Знайти вирази для характеристик повзучості в моделях Кельвіна і Максвела безпосереднім інтегрування рівнянь $\dot{\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon}{\tau} = \dfrac{\sigma_0[U(t)]}{\eta}$ і $\dot{\sigma} + \dfrac{\sigma}{\tau} = G\varepsilon_0[\delta(t)]$ відповідно.

Розв'язання

Користуючись інтегруючим множником $e^{t/\tau}$, із рівняння $\dot{\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon}{\tau} = \dfrac{\sigma_0[U(t)]}{\eta}$ знаходимо

$$\varepsilon e^{t/\tau} = \frac{\sigma_0}{\eta}\int_0^1 e^{t'/\tau}[U(t')]dt',$$

а застосовуючи формулу $\int\limits_{-\infty}^{t} f(t')[U(t'-t_1)]dt' = [U(t-t_1)]\int\limits_{t_1}^{t} f(t')dt'$, маємо

$$\varepsilon e^{t/\tau} = \left(\sigma_0\frac{[U(t)]}{\eta}\right)\left[\tau e^{t'/\tau}\right]_0^t = \left(\frac{\sigma_0}{G}\right)\left(e^{t/\tau} - 1\right)[U(t)],$$

або після ділення на $e^{t/\tau}$

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma_0}{G}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)[U(t)].$$

Тепер візьмемо $e^{t/\tau}$ в якості інтегруючого множника в $\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = G\varepsilon_0[\delta(t)]$. Тоді

$$\sigma e^{t/\tau} = G\varepsilon_0 \int_0^1 e^{t'/\tau}[\delta(t')]dt',$$

і за формулою $\int_{-\infty}^{t} f(t')[\delta(t' - t_1)]dt' = f(t_1)[U(t - t_1)]$ отримуємо

$$\sigma e^{t/\tau} = G\varepsilon_0[U(t)] \text{ або } \sigma = G\varepsilon_0 e^{-t/\tau}[U(t)].$$

Задача 9.7. Знайти деформацію повзучості для стандартного лінійного твердого тіла (див. рис. 9.3).

Розв'язання

Внаслідок того, що $\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_K$, деформація повзучості для даної моделі, відповідно $\sigma = G\varepsilon$ і $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)[U(t)]$, обчислюється по формулі

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)\right]\sigma_0[U(t)].$$

Той самий результат можна отримати, якщо покласти $\eta_2 = \infty$ в узагальненій моделі Кельвіна (для $N = 2$), де деформація дорівнює $\varepsilon = \sum_{i=1}^{2} J_i\left(1 - e^{-t/\tau_i}\right)\sigma_0[U(t)]$ або безпосереднім інтегруванням рівняння закону, що зв'язує напруження і деформації для стандартного твердого тіла.

Задача 9.8. Експеримент з дослідження зворотної повзучості полягає в навантаженні, як в досліді на повзучість: $\sigma = \sigma_0$ зберігається деякий період часу, а потім миттєво зникає. Знайти криву деформації зворотної повзучості для стандартного твердого тіла (див. рис. 9.3) за умови закону навантаження, що показаний на рис. 9.7.

Розв'язання

Доки прикладене навантаження (тобто для $t < 2\tau_2$), що знайдено в задачі 9.7, деформація змінюється за законом

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\left[\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)\right].$$

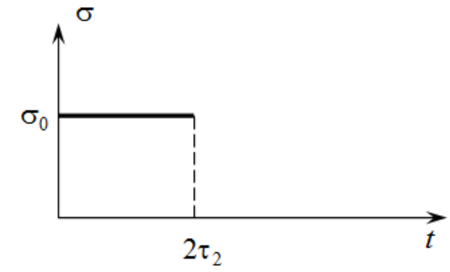


Рис. 9.7. Закон навантаження

В момент часу $t = 2\tau_2$ навантаження знімається, σ стає нульовим і одночасно відновлюється пружна деформація σ_0/G_1. Для моменту часу $t > 2\tau_2$ зміна деформації описується рівнянням $\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau_2 = 0$, яке відображає закон зв'язку між напруженням і деформацією для вказаної моделі для $\sigma = 0$. Розв'язком цього диференціального рівняння є $\varepsilon = Ce^{-T/\tau_2}$, де C – стала інтегрування, а $T = t - 2\tau_2$. Для $T = 0$ маємо $\varepsilon = C = \sigma_0\left(1 - e^{-2}\right)/G_2$, тоді

$$\varepsilon = \sigma_0\left(1 - e^{-2}\right)e^{-T/\tau_2}/G_2 = \sigma_0\left(e^2 - 1\right)e^{-t/\tau_2}/G_2 \text{ для } t > 2\tau_2.$$

Розглянемо перетворення $e^{-T/\tau_2} \to e^{-t/\tau_2}$ більш детально

$$e^{-T/\tau_2} = e^{-(t-2\tau_2)/\tau_2} = e^{-t/\tau_2-(-2)} = e^{-t/\tau_2+2} = e^{-t/\tau_2}e^2,$$

після множення на e^{-2}, що є знаменником, одержуємо

$$e^{-t/\tau_2}e^2e^{-2} = e^{-t/\tau_2}.$$

Задача 9.9. Модель, що показана на рис. 9.8, розтягується зі сталою швидкістю $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0/t_1$, як показано на рис. 9.9.

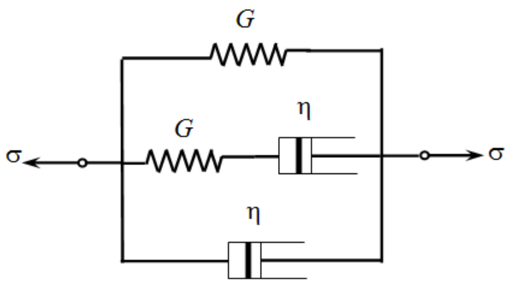


Рис. 9.8. Модель в'язкопружності

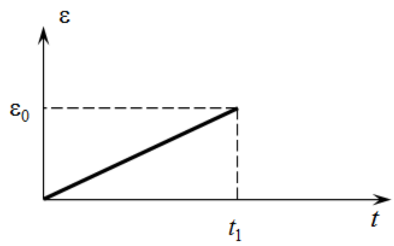


Рис. 9.9. Закон деформування

Знайти напруження в такій моделі за умови вказаного процесу деформування.

Розв'язання

За результатами задачі 9.5 залежність між напруженням і деформацією в такій моделі буде описуватися рівнянням $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = \eta\ddot{\varepsilon} + 3G\dot{\varepsilon} + G\varepsilon/\tau$, а для нашого випадку рівнянням $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = 3G\varepsilon_0/t_1 + G\varepsilon_0 t/\tau t_1$. Виконаємо інтегрування останнього виразу і знайдемо $\sigma = \varepsilon_0\left(2\eta + Gt\right)/t_1 + Ce^{-t/\tau}$, де C – стала інтегрування. За умови $t = 0$, $\sigma = \eta\varepsilon_0/t_1$ і, відповідно, $C = -\eta\varepsilon_0/t_1$.

Таким чином, $\sigma = \varepsilon_0 \left(2\eta + Gt - \eta e^{-t/\tau}\right)/t_1$. Відмітимо, що той самий результат отримується за умови інтегрування рівняння іншим способом

$$\sigma e^{t/\tau} = \frac{\varepsilon_0}{t_1}\int_0^t 3Ge^{t'/\tau}dt' + \frac{\varepsilon_0}{t_1}\int_0^t \frac{Gt'e^{t'/\tau}}{\tau}dt' + \frac{\eta\varepsilon_0}{t_1}.$$

Задача 9.10. Безпосереднім інтегруванням знайти закон, що зв'язує напруження і деформацію для стандартного лінійного твердого тіла в процесі релаксації напруження, якщо деформація задана законом $\varepsilon = \varepsilon_0[U(t)]$.

Розв'язання

Напишемо співвідношення між напруженнями і деформаціями (див. задачу 9.2) для даного випадку у вигляді

$$\dot{\sigma} + (G_1 + G_2)\frac{\sigma}{\eta_2} = \varepsilon_0 G_1\left([\delta(t)] + G_1 G_2\frac{[U(t)]}{\eta_2}\right).$$

Якщо скористатися інтегрувальним множником $e^{(G_1+G_2)t/\eta_2}$, то

$$\sigma e^{(G_1+G_2)t/\eta_2} = \varepsilon_0 G_1 \int_0^t [\delta(t')]e^{(G_1+G_2)t'/\eta_2}dt' + \frac{\varepsilon_0 G_1 G_2}{\eta_2}\int_0^t [U(t')]e^{(G_1+G_2)t'/\eta_2}dt'.$$

Обчислюючи інтеграли за допомогою формул

$$\int_{-\infty}^t f(t')[U(t'-t_1)]dt' = [U(t-t_1)]\int_{t_1}^t f(t')dt' \text{ і } \int_{-\infty}^t f(t')[\delta(t'-t_1)]dt' = f(t_1)[U(t-t_1)],$$

знаходимо

$$\sigma = \varepsilon_0 G_1\left(G_2 + G_1 e^{-(G_1+G_2)t/\eta_2}\right)[U(t)](G_1 + G_2).$$

9.3. Функції повзучості і релаксації. Інтеграли спадковості

Задача 9.11. Знайти функцію релаксації $\varphi(t)$ для трьохпараметричної моделі, що показана на рис. 9.10.

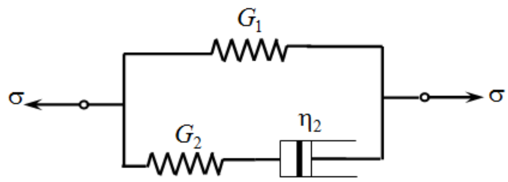


Рис. 9.10. Модель до задачі 9.11

Розв'язання

Співвідношення між напруженням і деформацією для вказаної моделі має вигляд

$$\dot{\sigma} + \sigma/\tau_2 = (G_1 + G_2)\dot{\varepsilon} + G_1 G_2\,\varepsilon/\eta_2.$$

Тоді за умови $\varepsilon = \varepsilon_0[U(t)]$ і $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0[\delta(t)]$ за допомогою інтегруючого множника e^{t/τ_2} можна записати

$$\sigma e^{t/\tau_2} = \varepsilon_0 \left(G_1 + G_2\right) \int\limits_0^t e^{t'/\tau_2} \left[\delta\left(t'\right)\right] dt' + \frac{\varepsilon_0 G_1 G_2}{\eta_2} \int\limits_0^t e^{t'/\tau_2} \left[U\left(t'\right)\right] dt'.$$

Відмітимо, що користуючись формулами

$$\int\limits_{-\infty}^t f\left(t'\right)\left[U\left(t'-t_1\right)\right] dt' = \left[U\left(t-t_1\right)\right] \int\limits_{t_1}^t f\left(t'\right) dt' \text{ і } \int\limits_{-\infty}^t f\left(t'\right)\left[\delta\left(t'-t_1\right)\right] dt' = f\left(t_1\right)\left[U\left(t-t_1\right)\right],$$

знаходимо $\sigma = \varepsilon_0 \left(G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}\right) = \varepsilon_0 \varphi(t)$, тобто $\varphi(t) = G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}$. Також відмітимо, що цей же результат можна також отримати, якщо покласти $\eta_1 \to \infty$ в формулі $\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} G_i e^{-t/\tau_i} \left[U(t)\right]$ для узагальненої моделі Максвела.

Задача 9.12. Використовуючи функцію релаксації $\varphi(t) = G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}$ для моделі, що запропонована в задачі 9.11, знайти функцію повзучості по формулі $\overline{\psi}(s)\overline{\varphi}(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

Розв’язання

Перетворенням Лапласа функції $\varphi(t) = G_1 + G_2 e^{-t/\tau_2}$ буде $\overline{\varphi}(s) = G_1/s + G_2/\left(s + 1/\tau_2\right)$ (див. таблицю перетворень Лапласа). Тоді за формулою $\overline{\psi}(s)\overline{\varphi}(s) = \dfrac{1}{s^2}$ знаходимо

$$\overline{\psi}(s)\overline{\varphi}(s) = \frac{1}{s^2} \to \overline{\psi}(s)\left[G_1/s + G_2/\left(s + 1/\tau_2\right)\right] = \frac{1}{s^2} \to$$

$$\to \overline{\psi}(s) = \frac{\left(s + \dfrac{1}{\tau_2}\right)}{\left[G_1 s\left(s + \dfrac{1}{\tau_2}\right) + G_2 s^2\right]} = \frac{1}{G_1 s} - \frac{\dfrac{G_2}{G_1\left(G_1 + G_2\right)}}{s + \dfrac{G_1}{\left(G_1 + G_2\right)\tau_2}}.$$

Користуючись таблицею перетворень Лапласа можна перетворити цей вираз і отримати таке співвідношення

$$\psi = \frac{1}{G_1} - \frac{G_2}{G_1\left(G_1 + G_2\right)} e^{-\frac{G_1 t}{\left(G_1 + G_2\right)\tau_2}}.$$

Даний результат можна перевірити інтегруванням співвідношення між напруженням і деформацією для вказаної моделі за законом навантаження, який використовується в дослідженнях на повзучість.

Задача 9.13. До матеріалу, що описується моделлю Кельвіна, прикладається напруження, яке лінійно зростає з часом до значення σ_1, а потім довгий час зберігає сталу величину σ_1 (рис. 9.11). Обчислити спричинену цим напруженням деформацію, припускаючи при цьому, що $\dfrac{\sigma_1}{t_1} = \lambda$.

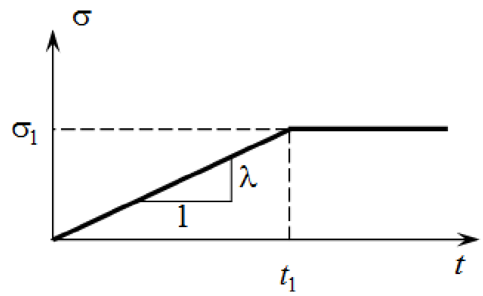


Рис. 9.11. Схема навантаження

Розв'язання

Закон зміни напруження можна записати таким чином

$\sigma = \lambda t[U(t)] - \lambda(t - t_1)[U(t - t_1)]$.

Підставляючи цей вираз у рівняння для моделі Кельвіна $\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$, отримуємо з використанням інтегруючого множника $e^{t/\tau}$

$$\varepsilon e^{t/\tau} = \frac{\lambda}{\eta}\left\{\int_0^t t' e^{t'/\tau}[U(t')]dt' - \int_{t_1}^t (t' - t_1)e^{t'/\tau}[U(t' - t_1)]dt'\right\}.$$

Виконуючи інтегрування за допомогою $\int\limits_{-\infty}^{t} f(t')[U(t' - t_1)]dt' = [U(t - t_1)]\int\limits_{t_1}^{t} f(t')dt'$, знаходимо

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\eta}\left\{\left(t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right)[U(t)] - \left((t - t_1) + \tau\left(e^{(t_1 - t)/\tau} - 1\right)\right)[U(t - t_1)]\right\}.$$

Для $t \to \infty$ цей вираз зводиться до вигляду $\varepsilon = \lambda\dfrac{t_1}{G} = \dfrac{\sigma_1}{G}$.

Задача 9.14. Скориставшись інтегралом повзучості $\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \dfrac{d\sigma(t')}{dt'}\psi(t - t')dt'$ і функцією повзучості для моделі Кельвіна, перевірити результат задачі 9.13.

Розв'язання

Для моделі Кельвіна функція повзучості $\psi(t) = \dfrac{1 - e^{-t/\tau}}{G}$ формула

$\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \dfrac{d\sigma(t')}{dt'}\psi(t - t')dt'$ призводить до такого результату

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{t} \frac{\lambda}{G}\{[U(t')] + t'[\delta(t')] - [U(t'-t_1)] - (t'-t_1)[\delta(t'-t_1)]\}\left(1 - e^{-(t-t')/\tau}\right)dt'.$$

який за допомогою $\int_{-\infty}^{t} f(t')[U(t'-t_1)]dt' = [U(t-t_1)]\int_{t_1}^{t} f(t')dt'$ і $\int_{-\infty}^{t} f(t')[\delta(t'-t_1)]dt' = f(t_1)[U(t-t_1)]$ зводиться до співвідношення

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{G}\left\{[U(t)]\int_{0}^{t}\left(1 - e^{-(t-t')/\tau}\right)dt' - [U(t-t_1)]\int_{t_1}^{t}\left(1 - e^{-(t-t')/\tau}\right)dt'\right\}.$$

Безпосереднє визначення цих інтегралів підтверджує результат, що отримано в задачі 9.13

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{G}\left\{\left[t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right][U(t)] - \left[(t-t_1) + \tau\left(e^{-(t-t_1)/\tau} - 1\right)\right][U(t-t_1)]\right\},$$

де інтеграли $\int_{0}^{t}\left(1 - e^{-(t-t')/\tau}\right)dt' = t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$ і

$$\int_{t_1}^{t}\left(1 - e^{-(t-t')/\tau}\right)dt' = t - t_1 + \tau\left(e^{-(t-t_1)/\tau} - 1\right).$$

Задача 9.15. Застосовуючи принцип суперпозиції, знайти реакцію матеріалу Кельвіна на закон навантаження, що показано на рис. 9.12.

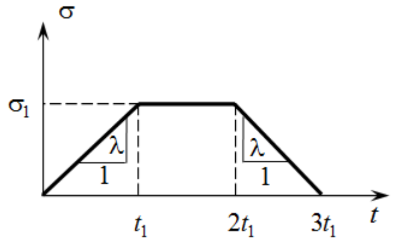


Рис. 9.12. Схема навантаження моделі Кельвіна

Розв’язання

Вказану зміну навантаження можна представити у вигляді окремих послідовних навантажень, які задано нахиленими прямими в площині $\sigma - t$, як показано на рис. 9.13.

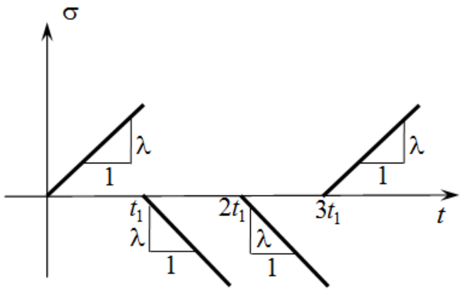


Рис. 9.13. Схема навантаження моделі Кельвіна у вигляді окремих послідовних навантажень

В задачі 9.13 знайдено, що для навантаження такого типу деформація обчислюється за формулою $\varepsilon(t)=\dfrac{\lambda}{G}\left\{\left[t+\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)\right]\left[U(t)\right]-\left[(t-t_1)+\tau\left(e^{-(t-t_1)/\tau}-1\right)\right]\left[U(t-t_1)\right]\right\}$. Тому в даному випадку вона буде складатися із послідовних навантажень (див. рис. 9.13)

$$\varepsilon(t)=\frac{\lambda}{G}\left\{\left[t+\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)\right]\left[U(t)\right]-\left[(t-t_1)+\tau\left(e^{-(t-t_1)/\tau}-1\right)\right]\left[U(t-t_1)\right]-\right.$$
$$-\left[(t-2t_1)+\tau\left(e^{-(t-2t_1)/\tau}-1\right)\right]\left[U(t-2t_1)\right]+$$
$$\left.+\left[(t-3t_1)+\tau\left(e^{-(t-3t_1)/\tau}-1\right)\right]\left[U(t-3t_1)\right]\right\}.$$

Замітимо, що $\varepsilon\to 0$ за умови $t\to\infty$.

9.4. Комплексні модулі і піддатливість

Задача 9.16. Знайти комплексний модуль G^* і кут запізнювання δ для моделі Максвела (див. рис. 9.1).

Розв'язання

Напишемо формулу $\dfrac{\dot\sigma}{G}+\dfrac{\sigma}{\eta}=\dot\varepsilon$ у вигляді $\dot\sigma+\dfrac{\sigma}{\tau}=G\dot\varepsilon$, де $\tau=\eta/G$ – час запізнення, і підставимо в неї вирази $\sigma^*=\sigma_0e^{i\omega t}$ і $\varepsilon^*=\varepsilon_0e^{i(\omega t-\delta)}$. В результаті отримаємо

$$\dot\sigma+\frac{\sigma}{\tau}=G\dot\varepsilon\to\dot\sigma^*+\frac{\sigma}{\tau}=G\dot\varepsilon^*\to i\omega\sigma_0e^{i\omega t}+\frac{\sigma_0e^{i\omega t}}{\tau}=Gi\omega\varepsilon_0e^{i(\omega t-\delta)},$$

де $\dot\sigma^*=i\omega\sigma_0e^{i\omega t}$ і $\dot\varepsilon^*=i\omega\varepsilon_0e^{i(\omega t-\delta)}$.

Звідки

$$i\omega\sigma_0e^{i\omega t}+\frac{\sigma_0e^{i\omega t}}{\tau}=Gi\omega\varepsilon_0e^{i(\omega t-\delta)}\to i\omega\tau\sigma_0e^{i\omega t}+\sigma_0e^{i\omega t}=Gi\omega\tau\varepsilon_0e^{i(\omega t-\delta)}\to$$

$$\to\sigma_0e^{i\omega t}(1+i\omega\tau)=Gi\omega\tau\varepsilon_0e^{i(\omega t-\delta)}\to\frac{\sigma_0e^{i\omega t}}{\varepsilon_0e^{i(\omega t-\delta)}}(1+i\omega\tau)=Gi\omega\tau\to$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_0 e^{i\delta}}{\varepsilon_0}(1+i\omega\tau) = Gi\omega\tau \rightarrow \frac{\sigma_0 e^{i\delta}}{\varepsilon_0} = \frac{Gi\omega\tau}{(1+i\omega\tau)} = G^*,$$

або в стандартній формі

$$G^* = \frac{Gi\omega\tau}{(1+i\omega\tau)} \rightarrow G^* = \frac{Gi\omega\tau(1-i\omega\tau)}{(1+i\omega\tau)(1-i\omega\tau)} = \frac{G\left(\omega^2\tau^2 + i\omega\tau\right)}{1+\omega\tau^2}.$$

Тут враховано, що число $i^2 = -1$.

З рис. 9.14 знаходимо, що $\mathrm{tg}\delta = \dfrac{G_2}{G_1} = \dfrac{G\omega\tau}{G\omega^2\tau^2} = \dfrac{1}{\omega\tau}$.

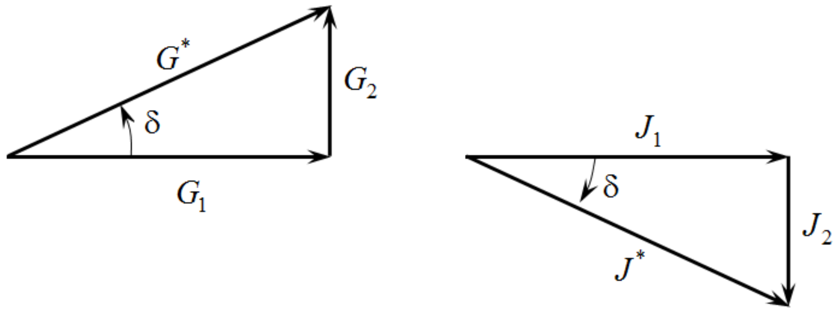


Рис. 9.14. Векторні діаграми G^* і J^*

Задача 9.17. Показати, що результат задачі 9.16 можна отримати також безпосередньо із визначення $\dfrac{\sigma}{\varepsilon} = G^*$ простою заміною оператора $\{\partial_t\}$ на $i\omega$ в рівнянні $\left\{\dfrac{\partial_t}{G} + \dfrac{1}{\eta}\right\}\sigma = \{\partial_t\}\varepsilon$.

Розв'язання

Після запропонованої заміни в умові задачі рівняння $\left\{\dfrac{\partial_t}{G} + \dfrac{1}{\eta}\right\}\sigma = \{\partial_t\}\varepsilon$ приймає вигляд

$$\left\{\frac{i\omega}{G} + \frac{1}{\eta}\right\}\sigma = i\omega\varepsilon \rightarrow \left\{i\omega + \frac{G}{\eta}\right\}\sigma = Gi\omega\varepsilon \rightarrow \left\{i\omega + \frac{1}{\tau}\right\}\sigma = Gi\omega\varepsilon,$$

де $\tau = \eta/G$ – час запізнення,

звідки знаходимо, що

$$G^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Gi\omega}{i\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{Gi\omega\tau}{1+i\omega\tau},$$ що і було отримано в попередній задачі.

Задача 9.18. На окремому прикладі рівняння $\sigma = \sum_{i=1}^{N} \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t / G_i + 1/\eta_i\}}$ для узагальненої моделі Максвела показати справедливість правила, яке стверджує, що за умови паралельного з'єднання моделей їх комплексні модулі додаються.

Розв'язання

В задачі 9.17 для комплексного модуля моделі Максвела отримано вираз $G^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Gi\omega\tau}{1 + i\omega\tau}$. Рівняння $\sigma = \sum_{i=1}^{N} \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t / G_i + 1/\eta_i\}}$ можна записати у вигляді

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \frac{G_i \{\partial_t\} \varepsilon}{\{\partial_t + 1/\tau_i\}}.$$

Тоді комплексний модуль узагальненої моделі Максвела буде визначатися формулою

$$G^* = \sum_{k=1}^{N} \frac{G_k i\omega\tau_k}{1 + i\omega\tau_k} = \sum_{k=1}^{N} G_k .$$

Задача 9.19. Перевірити співвідношення $J_1 = \frac{1}{\left[G_1\left(1 + \mathrm{tg}^2\delta\right)\right]}$ між модулем накопичення і піддатливістю накопичення.

Розв'язання

Відповідно до формул $\frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = G^*(i\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = G_1 + iG_2$ і $\frac{\varepsilon^*}{\sigma^*} = J^*(i\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} e^{-i\delta} = J_1 - iJ_2$, маємо $J^* = \frac{1}{G^*}$, тоді

$$J_1 - iJ_2 = \frac{1}{G_1 + iG_2} = \frac{G_1 - iG_2}{G_1^2 + G_2^2},$$ (помножено на спряжений)

тобто

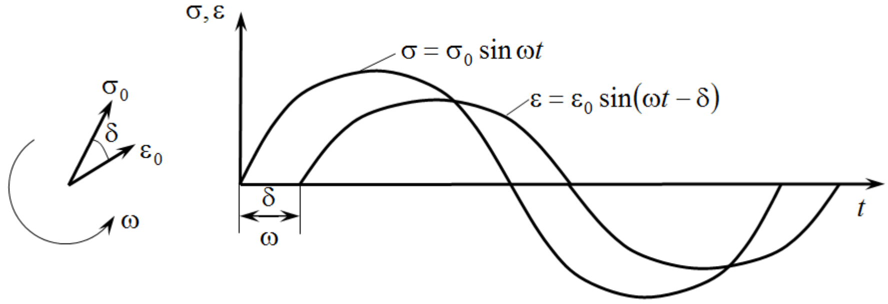
$$J_1 - iJ_2 = \frac{G_1 - iG_2}{G_1^2 + G_2^2} \to J_1 - iJ_2 + \frac{iG_2}{G_1^2 + G_2^2} = \frac{G_1}{G_1^2 + G_2^2} \to$$

$$\to J_1 - iJ_2 + iJ_2 = \frac{G_1}{G_1^2 + G_2^2} \to J_1 = \frac{G_1}{G_1^2 + G_2^2} = \frac{1}{G_1\left[1 + \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2\right]} \to$$

$$\to J_1 = \frac{1}{G_1\left(1 + \mathrm{tg}^2\delta\right)},$$

де $iJ_2 = \frac{iG_2}{G_1^2 + G_2^2}$, $\mathrm{tg}\delta = \frac{G_2}{G_1}$.

Задача 9.20. Для циклічного навантаження (рис. 9.15) за допомогою обчислення інтегралу $\int \sigma d\varepsilon$ по одному циклу показати, що дисипація енергії за один цикл прямо пропорційна піддатливості втрати J_2.



а *б*

Рис. 9.15. Графіки зміни напруження і деформації під час одномірного навантаження за законом $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$

Розв'язання

Для векторів напруження і деформації, показаних на рис. 9.15, обчислення інтегралу $\int \sigma d\varepsilon$ за цикл дає

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} dt = \left| \begin{array}{l} \sigma = \sigma_0 \sin \omega t \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \left(\varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta)\right)' = \\ = \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \end{array} \right| = \int_0^{2\pi/\omega} (\sigma_0 \sin \omega t) \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t - \delta) dt =$$

$$= \sigma_0 \varepsilon_0 \omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) dt =$$

$$= \sigma_0 \omega \left[\varepsilon_0 \cos \delta \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t dt + \varepsilon_0 \sin \delta \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \sin \omega t dt \right] =$$

$$= \left| \times \frac{\sigma_0}{\sigma_0} \right| = \sigma_0^2 \omega \left[\frac{\varepsilon_0 \cos \delta}{\sigma_0} \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t \sin \omega t dt + \frac{\varepsilon_0 \sin \delta}{\sigma_0} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt \right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon_0 \cos \delta}{\sigma_0} = J_1 \\ \dfrac{\varepsilon_0 \sin \delta}{\sigma_0} = J_2 \end{array} \right| = \sigma_0^2 \omega \left[J_1 \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\cos \omega t}{\omega} d(\cos \omega t) + J_2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt \right] =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}\frac{\cos\omega t}{\omega}d(\cos\omega t)=\left.\frac{\sin^2\omega t}{2\omega}\right|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=0\\ \displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t dt=\left.\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right)\right|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{\pi}{\omega}\end{array}\right|=\sigma_0^2\omega\left[J_2\cdot 0+J_2\frac{\pi}{\omega}\right]=\sigma_0^2\pi J_2.$$

Під час обчислення визначеного інтегралу треба було взяти такі границі первісних функцій:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\omega t}{2\omega}=0,\ \lim_{t\to\frac{2\pi}{\omega}}\frac{\sin^2\omega t}{2\omega}=0 \text{ і } \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}=0,\ \lim_{t\to\frac{2\pi}{\omega}}\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}=0.$$

9.5. Тривимірна теорія в'язкопружності. Аналіз напруженого стану

Задача 9.21. Комбінуючи співвідношення $\{P\}s_{ij}=2\{Q\}e_{ij}$ і $\sigma_{ii}=3K\varepsilon_{ii}$, отримати визначальні рівняння $\sigma_{ij}=\delta_{ij}\{R\}\varepsilon_{kk}+\{S\}\varepsilon_{ij}$ і знайти вигляд операторів $\{R\}$ і $\{S\}$.

Розв'язання

Використовуючи вирази для девіаторних напружень $s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ і девіаторних деформацій $e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3$, напишемо рівняння $\{P\}s_{ij}=2\{Q\}e_{ij}$ в формі $\{P\}(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_{kk}/3)=2\{Q\}(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3)$ і замінимо σ_{kk} в цьому виразі на $\sigma_{kk}=3K\varepsilon_{kk}$, отримаємо

$$\{P\}(\sigma_{ij}-\delta_{ij}3K\varepsilon_{kk}/3)=2\{Q\}(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3)\to$$
$$\to\sigma_{ij}\{P\}=\{P\}\delta_{ij}3K\varepsilon_{kk}/3-2\{Q\}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3+2\{Q\}\varepsilon_{ij}\to$$
$$\to\sigma_{ij}=\delta_{ij}\{(3KP-2Q)/3P\}\varepsilon_{kk}+\{2Q/P\}\varepsilon_{ij}.$$

Звідки вигляд операторів $\{R\}$ і $\{S\}$ буде таким

$$\{R\}=\{(3KP-2Q)/3P\},\qquad \{S\}=\{2Q/P\}.$$

Задача 9.22. Брус із матеріалу Кельвіна знаходиться в стані одновісного розтягу, так що $\sigma_{11}=\sigma_0[U(t)]$, $\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=0$, причому σ_0 стала величина. Знайти деформацію ε_{11} за умови такого закону навантаження.

Розв'язання

Із рівності $\sigma_{ii}=3K\varepsilon_{ii}$ для даного випадку маємо $3\varepsilon_{ii}=\sigma_0[U(t)]/K$, а рівняння $\{P\}s_{ij}=2\{Q\}e_{ij}$ за умови $i=j=1$ набуває вигляду $\{P\}(\sigma_{11}-\sigma_{11}/3)=2\{Q\}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{11}/3)$. Але співвідношення $\sigma=\{G+\eta\partial_t\}\varepsilon$ показує, що для матеріалу Кельвіна $\{P\}=1$ і $\{Q\}=\{G+\eta\partial_t\}$. Тому можна записати

$(\sigma_{11}-\sigma_{11}/3)\to(3K\varepsilon_{11}-3K\varepsilon_{11}/3)\to 2K\varepsilon_{11}/3\to 2K\sigma_0[U(t)]/3K\to 2\sigma_0[U(t)]/3,$

а $\quad (\varepsilon_{11}-\varepsilon_{11}/3)\to(\varepsilon_{11}-\sigma_0[U(t)]/9K)$

тоді

$$\{P\}(\sigma_{11}-\sigma_{11}/3)=2\{Q\}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{11}/3)\to$$
$$2\sigma_0[U(t)]/3=2\{G+\eta\partial_t\}(\varepsilon_{11}-\sigma_0[U(t)]/9K)\to,$$
$$\to\sigma_0[U(t)]/3=\{G+\eta\partial_t\}(\varepsilon_{11}-\sigma_0[U(t)]/9K)$$

або

$$G\varepsilon_{11}+\eta\{\partial_t\}\varepsilon_{11}=\frac{3K\sigma_0[U(t)]+G\sigma_0[U(t)]+\eta\sigma_0\{\partial_t\}[U(t)]}{9K}\to$$

$$\to\left|\begin{array}{c}\{\partial_t\}\varepsilon_{11}=\dot{\varepsilon}_{11}\\ \{\partial_t\}[U(t)]=\{\partial_t\}[\delta(t)]\end{array}\right|\to\eta\dot{\varepsilon}_{11}+G\varepsilon_{11}+=\frac{3K\sigma_0[U(t)]+G\sigma_0[U(t)]+\eta\sigma_0[\delta(t)]}{9K}\to$$

$$\to\left|\begin{array}{c}/\eta\\ \tau=\eta/G\end{array}\right|\to\dot{\varepsilon}_{11}+\varepsilon_{11}/\tau=\frac{\sigma_0[U(t)](3K+G)+\eta\sigma_0[\delta(t)]}{9\eta K}.$$

Розв’язуючи це диференціальне рівняння, отримуємо

$$\varepsilon_{11}=\frac{\sigma_0(3K+G)\left(1-e^{-t/\tau}\right)[U(t)]}{9KG}+\frac{\sigma_0e^{-t/\tau}[U(t)]}{9K}.$$

За умови $t\to\infty$ маємо $\varepsilon_{11}\to\sigma_0\dfrac{3K+G}{9KG}=\dfrac{\sigma_0}{E}$, де $E=\dfrac{9KG}{3K+G}$ – модуль пружності при розтягу, Па.

Задача 9.23. Матеріал Кельвіна заповнює форму з жорсткими стінками, так що $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=0$, коли прикладається напруження за законом $\sigma_{11}=-\sigma_0[U(t)]$ (рис. 9.16). Знайти ε_{11} і компоненти тензору напруження $\sigma_{22}=\sigma_{33}$, що виникають за рахунок наявності стінок форми.

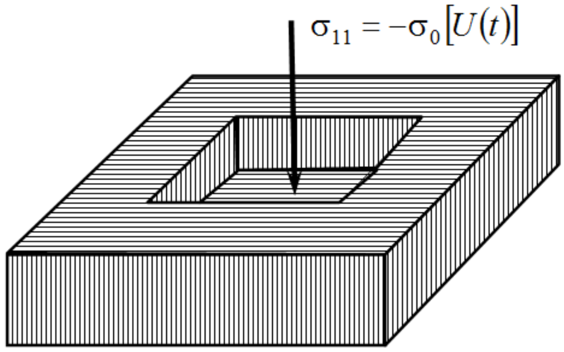


Рис. 9.16. Форма з жорсткими стінками, яка заповнена матеріалом Кельвіна під навантаженням

Розв'язання

За умовою задачі $\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11}$ і $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, тому для матеріалу Кельвіна рівність $\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$ набуває вигляду $\sigma_{11} + 2\sigma_{22} = 3K\varepsilon_{11}$, а із $\{P\}s_{ij} = 2\{Q\}e_{ij}$ витікає $2(\sigma_{11} - \sigma_{22})/3 = 2G\{1 + \tau\partial_t\}(2\varepsilon_{11}/3)$. Комбінуючи ці співвідношення, отримуємо диференціальне рівняння

$$\dot{\varepsilon}_{11} + \frac{(4G + 3K)\varepsilon_{11}}{4G\tau} = -\frac{3\sigma_0[U(t)]}{4G\tau},$$

яке після інтегрування набуває вигляду

$$\varepsilon_{11} = -3\sigma_0[U(t)]\frac{\left(1 - e^{-(4G+3K)t/(4G\tau)}\right)}{(4G + 3K)}.$$

Підставляючи цю рівність в $\sigma_{11} + 2\sigma_{22} = 3K\varepsilon_{11}$ для σ_{22}, отримуємо

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{11} - 3K\varepsilon_{11}}{2} \to \sigma_{22} = \sigma_0[U(t)]\left(\frac{1}{2} - \frac{9K\left(1 - e^{-(4G+3K)t/(4G\tau)}\right)}{8G + 6K}\right).$$

Задача 9.24. Радіальна компонента напруження в пружному напівпросторі під час дії концентрованого навантаження P, яке прикладене в початку координат (рис. 9.17), виражається формулою

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi}[(1 - 2\nu)\alpha(r, z) - \beta(r, z)],$$

де α і β відомі функції. Нехай закон навантаження заданий функцією $P = P_0[U(t)]$. Знайти радіальну компоненту напруження в напівпросторі із в'язкопружного матеріалу Кельвіна, користуючись принципом відповідності.

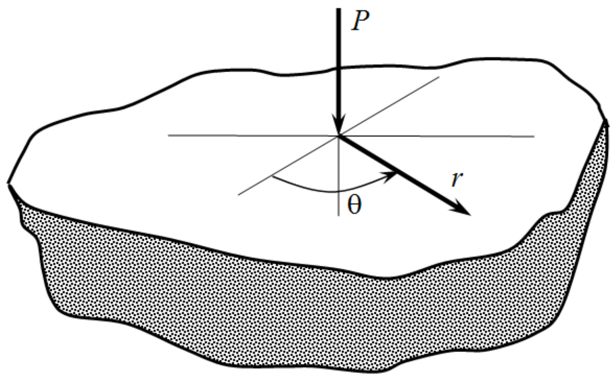


Рис. 9.17. Напівпростор із в'язкопружного матеріалу Кельвіна, до якого прикладене концентроване навантаження P

Розв'язання

Члену $(1 - 2\nu)$ у в'язкопружному середовищі відповідає оператор

$$\frac{\{3Q\}}{\{3KP + Q\}}.$$

Отже, для кельвінівського тіла перетворення Лапласа розв'язку в'язкопружної задачі буде мати вигляд

$$\overline{\sigma}_{rr} = \frac{P_0}{2\pi s}\left[\frac{G+\eta s}{3K+G+\eta s}\alpha(r,z)-\beta(r,z)\right].$$

Цей вираз можна обернути, якщо представити його у вигляді суми дробу і скориставшись таблицями перетворень Лапласа. В результаті отримаємо напруження у в'язкопружному середовищі

$$\sigma_{rr} = \frac{3P_0}{2\pi}\left[\left(\frac{G}{3K+G}+\frac{3K}{3K+G}e^{-(3K+G)t/\eta}\right)\alpha(r,z)-\beta(r,z)\right].$$

Задача 9.25. Принцип відповідності можна використовувати для отримання не тільки напруження, але й переміщення. Переміщення поверхні пружного напівпростору, що розглянуто в задачі 9.24, за напрямком z задано формулою $w_{z=0} = \frac{P(1-\nu^2)}{E\pi r}$. Знайти переміщення поверхні напівпростору із в'язкопружного середовища в умовах згаданої задачі.

Розв'язання

Оператор теорії в'язкопружності, що відповідає члену $\frac{1-\nu^2}{E}$ пружного розв'язку, буде мати вигляд $\frac{\{3K+4Q\}}{4Q\{3K+Q\}}$. Тоді для матеріалу Кельвіна перетворення Лапласа для переміщення має вигляд

$$\overline{w}_{z=0} = \frac{P_0(3K+4(G+\eta s))}{4\pi r s(3K+G+\eta s)(G+\eta s)}.$$

Після доволі тривалих перетворень і обернення, скориставшись таблицями перетворень Лапласа, отримуємо

$$w_{z=0} = \frac{P_0(3K+4G)}{4\pi r^2(3K+G)}\left[\frac{1}{G}-\frac{3e^{-(3K+G)t/\eta}}{3K+4G}-\frac{3K+G}{G(3K+4G)}e^{-t/\eta}\right].$$

Відмітимо, що $w_{z=0}=0$ за умови $t=0$ і, що $w_{z=0}$ прямує до $\frac{P_0(1-\nu^2)}{E\pi r}$, коли $t\to\infty$, тобто до пружного переміщення.

Задача 9.26. Припускається, що рівномірно навантажена вільно оперта балка виготовлена із матеріалу Максвела (рис. 9.18). Знайти напруження згину σ_{11} і величину прогину $w(x_1,t)$, якщо навантаження задано у вигляді $p = p_0[U(t)]$.

Розв'язання

Напруження згину для вільно обпертої балки не залежить від властивостей матеріалу, тому значення цього напруження і для пружного, і для в'язкопружного матеріалу буде однаковим. Прогин пружної балки визначається формулою

$$w(x_1) = \frac{p_0 \alpha(x_1)}{24EI},$$

де $\alpha(x_1)$ – відома функція, а I – момент інерції поперечного січення балки.

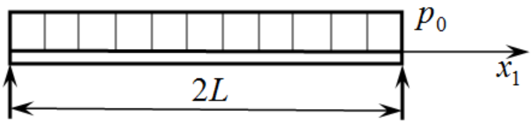


Рис. 9.18. Схема навантаження балки із матеріалу Максвела

Для матеріалу Максвела $\{P\} = \{\partial_t + 1/\tau\}$ і $\{Q\} = \{G\partial_t\}$, так що перетворення Лапласа для величини прогину буде мати вигляд

$$\overline{w} = \frac{p_0 \alpha(x_1)}{24I}\left(\frac{3K/\tau + (3K+G)s}{9KGs^2}\right).$$

Після обернення цього виразу отримаємо

$$w(x_1, t) = \frac{p_0 \alpha(x_1)}{24I}\left(\frac{t}{3\eta} + \frac{3K+G}{9KG}\right).$$

Прогин $w(x_1, 0) = \dfrac{p_0 \alpha(x_1)}{24EI}$ за умови $t = 0$ дорівнює прогину пружної балки. Тут $E = \dfrac{9KG}{3K+G}$ – модуль пружності при розтягу.

Задача 9.27. Показати, що якщо матеріал вважається нестисливим $(\nu = 1/2)$, то за умови $t \to \infty$ напруження $\sigma_{22} = \sigma_0 [U(t)]\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{9K\left(1 - e^{-(4G+3K)t/(4G\tau)}\right)}{8G+6K}\right)$, яке було знайдено в задачі 9.23, прямує до σ_0, а середовище веде себе як рідина.

Розв'язання

За умови $t \to \infty$ маємо

$$\sigma_{22}\big|_{t\to\infty} = \sigma_0\left(\frac{1}{2} - \frac{9K}{8G+6K}\right) = \sigma_0\left(\frac{4G+3K-9K}{8G+6K}\right) = \sigma_0\left(\frac{4G-6K}{8G+6K}\right) =$$

$$= \sigma_0\left(\frac{2G-3K}{4G+3K}\right) = -\sigma_0\left(\frac{3K-2G}{3K+4G}\right).$$

Тут $[U(t)]\big|_{t\to\infty} = 1$.

Вираз $\sigma_{22}\big|_{t\to\infty} = -\sigma_0\left(\dfrac{3K-2G}{3K+4G}\right)$ можна переписати у вигляді

$$\sigma_{22}\big|_{t\to\infty} = -\sigma_0 \frac{\nu}{1-\nu}$$

де $\nu = \dfrac{3K-2G}{6K+2G}$ – коефіцієнт Пуасона.

Таким чином за умови $\left(\nu = \frac{1}{2}\right)$ будемо мати

$$\sigma_{22}\big|_{t\to\infty} = -\sigma_0 \frac{\nu}{1-\nu} \to \sigma_{22}\big|_{t\to\infty} = -\sigma_0 \frac{1/2}{1-1/2} = -\sigma_0 \frac{1/2}{1/2} = -\sigma_0\,,$$

що і треба було показати.

9.6. Змішані задачі

Задача 9.28. Написати визначальне співвідношення для комбінованої моделі Кельвіна-Максвела, що представлена на рис. 9.19. Вивести з нього визначальні співвідношення (фізичні рівняння) для моделей Кельвіна і Максвела.

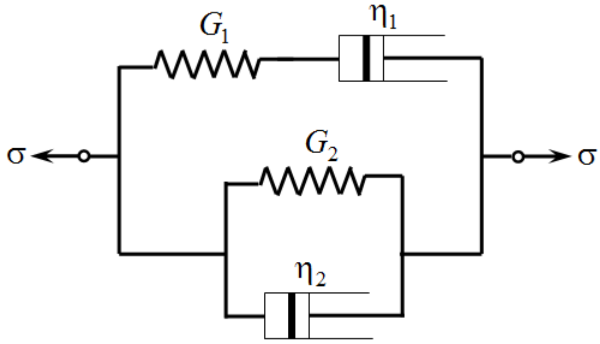


Рис. 9.19. Комбінована модель Кельвіна-Максвела

Розв'язання

Для моделі (див. рис. 9.19) можна записати таке фізичне рівняння

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_K = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left\{\dfrac{\partial_t}{G_1} + \dfrac{1}{\eta_1}\right\}} + \left\{G_2 + \eta_2 \partial_t\right\}\varepsilon\,.$$

Виконуючи вказане операторами диференціювання за часом, отримуємо

$$\left\{\frac{\partial_t}{G_1} + \frac{1}{\eta_1}\right\}\sigma = \dot{\varepsilon} + \left\{\frac{\partial_t}{G_1} + \frac{1}{\eta_1}\right\}\left\{G_2 + \eta_2 \partial_t\right\}\varepsilon \to$$

$$\to \frac{\dot{\sigma}}{G_1} + \frac{\sigma}{\eta_1} = \dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{G_1}\dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{\eta_1}\varepsilon + \frac{\eta_2}{\eta_1}\dot{\varepsilon} + \frac{\eta_2}{G_1}\ddot{\varepsilon} \to \left|\times G_1\right| \to$$

$$\to \dot{\sigma} + \frac{\sigma G_1}{\eta_1} = G_1\dot{\varepsilon} + \frac{G_2 G_1}{G_1}\dot{\varepsilon} + \frac{G_1 G_2}{\eta_1}\varepsilon + \frac{G_1\eta_2}{\eta_1}\dot{\varepsilon} + \frac{G_1\eta_2}{G_1}\ddot{\varepsilon} \to \left|\frac{G_1}{\eta_1} = \tau_1\right| \to$$

$$\to \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} = \eta_2\ddot{\varepsilon} + G_1\dot{\varepsilon} + G_2\dot{\varepsilon} + \frac{\eta_2}{\tau_1}\dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{\tau_1}\varepsilon \to$$

$$\to \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} = \eta_2\ddot{\varepsilon} + \left(G_1 + G_2 + \frac{\eta_2}{\tau_1}\right)\dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{\tau_1}\varepsilon.$$

Якщо в цьому рівнянні покласти $\eta_2 = 0$ (тобто паралельно з'єднати з вузлом Максвела пружний елемент), то воно набуде такого вигляду

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} = (G_1 + G_2)\dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{\tau_1}\varepsilon.$$

Якщо до того ж задати $G_2 = 0$, то отримаємо визначальне рівняння для моделі Максвела

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} = G_1\dot{\varepsilon}.$$

Аналогічно, якщо спочатку покласти $G_2 = 0$ (тобто паралельно з'єднати з вузлом Максвела в'язкий елемент), то рівняння буде мати вигляд

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} = \eta_2\ddot{\varepsilon} + \left(G_1 + \frac{\eta_2}{\tau_1}\right)\dot{\varepsilon},$$

а коли ще й додати умову $\eta_2 = 0$, воно знов зводиться до фізичного рівняння Максвела.

Якщо визначальне співвідношення для цієї чотирьохпараметричної моделі (див. рис. 9.19) записати у вигляді

$$\frac{\dot{\sigma}}{G_1} + \frac{\sigma}{\eta_1} = \dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{G_1}\dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{\eta_1}\varepsilon + \frac{\eta_2}{\eta_1}\dot{\varepsilon} + \frac{\eta_2}{G_1}\ddot{\varepsilon} \to \left|\times G_1\eta_1\right| \to$$

$$\to \eta_1\dot{\sigma} + G_1\sigma = \eta_1\eta_2\ddot{\varepsilon} + G_1\eta_1\dot{\varepsilon} + G_1\eta_1\frac{G_2}{G_1}\dot{\varepsilon} + G_1\eta_1\frac{\eta_2}{\eta_1}\dot{\varepsilon} + G_1\eta_1\frac{G_2}{\eta_1}\varepsilon \to$$

$$\to \eta_1\dot{\sigma} + G_1\sigma = \eta_1\eta_2\ddot{\varepsilon} + (G_1\eta_1 + G_2\eta_1 + G_1\eta_2)\dot{\varepsilon} + G_1G_2\varepsilon$$

і покласти $\eta_1 = 0$, то в результаті отримується визначальне рівняння Кельвіна

$$G_1\sigma = (G_1\eta_2)\dot{\varepsilon} + G_1G_2\varepsilon \to \left|/\,G_1\right| \to \sigma = \eta_2\dot{\varepsilon} + G_2\varepsilon.$$

Точно так само, якщо прийняти $G_1 = 0$, то рівняння зводиться до вигляду

$$\eta_1\dot{\sigma} = \eta_1\eta_2\ddot{\varepsilon} + (G_2\eta_1)\dot{\varepsilon} \to \left|/\,\eta_1\right| \to \dot{\sigma} = \eta_2\ddot{\varepsilon} + G_2\dot{\varepsilon},$$

що теж представляє модель Кельвіна.

Задача 9.29. Скористатися принципом суперпозиції і отримати деформацію зворотної повзучості для стандартного лінійного твердого тіла (див. рис. 9.3). Порівняти результат з тим, який отримано в задачі 9.8.

Розв'язання

Для закону навантаження (рис. 9.20)

$$\sigma=\sigma_0\left[U(t)\right]-\sigma_0\left[U(t-2\tau_2)\right],$$

деформацію можна записати скориставшись виразом, який був знайденим в задачі 9.7

$$\varepsilon(t)=\sigma_0\left[\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\left(1-e^{-t/\tau_2}\right)\right]\left[U(t)\right]-\sigma_0\left[\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\left(1-e^{-(t-2\tau_2)/\tau_2}\right)\right]\left[U(t-2\tau_2)\right].$$

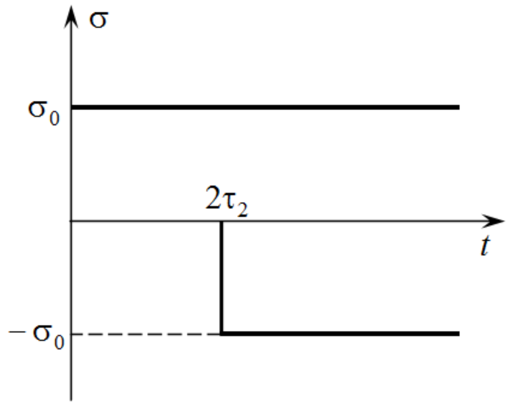


Рис. 9.20. Закон навантаження

В момент $t>2\tau_2$ обидві ступінчасті функції дорівнюють одиниці, відповідно, будемо мати

$$\varepsilon(t)=\sigma_0\frac{\left[-e^{-t/\tau_2}+e^{-(t-2\tau_2)/\tau_2}\right]}{G_2}=\sigma_0\frac{\left(e^2-1\right)e^{-t/\tau_2}}{G_2},$$

що відповідає результату задачі 9.8.

Задача 9.30. Знайти напруження в моделі, що запропонована в задачі 9.9, за умови деформації за законом, який показано на рис. 9.21. Показати, що в кінці кінців все напруження буде припадати на «вільний» пружний елемент.

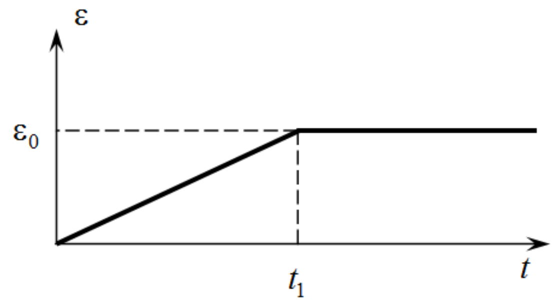


Рис. 9.21. Закон навантаження

Розв'язання

Розв'язок задачі 9.9 $\sigma=\varepsilon_0\left(2\eta+Gt-\eta e^{-t/\tau}\right)/t_1$ і принцип суперпозиції дає можливість знайти напруження у вигляді

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(\eta\left(2 - e^{-t/\tau}\right) + Gt\right)\left[U(t)\right]/t_1 -$$
$$- \varepsilon_0 \left(\eta\left(2 - e^{-(t-t_1)/\tau}\right) + G(t - t_1)\right)\left[U(t - t_1)\right]/t_1 .$$

Для моментів часу $t > t_1$ напруження дорівнює

$$\sigma = \varepsilon_0\, \eta\left(e^{t_1/\tau} - 1\right)e^{-t/\tau}/t_1 + G\varepsilon_0 ,$$

а для $t \to \infty$ напруження стає рівним $\sigma = G\varepsilon_0$.

Задача 9.31. «Логарифмічний спектр запізнення» L визначається через звичайний спектр запізнення J формулою $L(\ln\tau) = \tau J(\tau)$. Користуючись цим визначенням, знайти функцію повзучості $\psi(t)$ як функцію від $L(\ln\tau)$.

Розв'язання

Нехай $\ln\tau = \lambda$, тобто $e^{\lambda} = \tau$. Тоді $\dfrac{d\tau}{d\lambda} = e^{\lambda} = \tau$ або $d\tau = \tau d(\ln\tau)$. Тепер формула $\psi(t) = \int_0^{\infty} J(\tau)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)d\tau$ дає можливість записати

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} L(\ln\tau)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)d(\ln\tau).$$

Аналогічно, якщо функція $H(\ln\tau) = \tau G(\tau)$ визначає логарифмічний спектр релаксації, то функцію $\varphi(t)$, введену формулою $\varphi(t) = \int_0^{\infty} G(\tau)e^{-t/\tau}d\tau$, можна представити у вигляді

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} H(\ln\tau)e^{-t/\tau}d(\ln\tau).$$

Задача 9.32. Для моделі Максвела (див. рис. 9.1) знайти модулі накопичення і втрати G_1 і G_2 як функції $\ln(\omega\tau)$ і побудувати графіки цих функцій.

Розв'язання

В задачі 9.16 встановлено, що для матеріалу Максвела можна записати

$$G^* = \frac{G\left(\omega^2\tau^2 + i\omega\tau\right)}{1 + \omega\tau^2}.$$

Таким чином

$$G_1(\lambda) = \frac{G\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{Ge^{2\lambda}}{1 + e^{2\lambda}},$$

де $\lambda = \ln(\omega\tau)$.

Для $\lambda = 0$ маємо $G_1 = \frac{G \cdot 1}{1+1} = \frac{G}{2}$, для $\lambda = \infty$ маємо $G_1 = G$ $\left(\lim\limits_{\lambda \to \infty} \frac{Ge^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}} = G\right)$ і для $\lambda = -\infty$ маємо $G_1 = 0$ $\left(\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \frac{Ge^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}} = 0\right)$. Так само знаходимо

$$G_2(\lambda) = \frac{Ge^{\lambda}}{1+e^{2\lambda}},$$

що дає: для $\lambda = 0$ маємо $G_2 = \frac{G \cdot 1}{1+1} = \frac{G}{2}$, а для $\lambda = \pm\infty$ маємо $G_2 = 0$ $\left(\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} \frac{Ge^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}} = 0\right)$. Графіки цих функцій наведено на рис. 9.22.

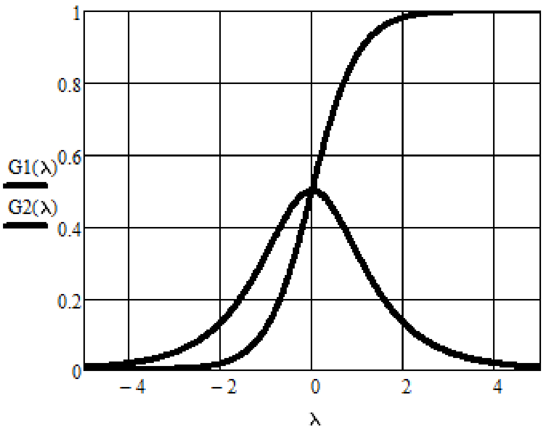


Рис. 9.22. Графіки функцій $G_1(\lambda) = \frac{Ge^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}$ і $G_2(\lambda) = \frac{Ge^{\lambda}}{1+e^{2\lambda}}$ за умови $G = 1$

Задача 9.33. Знайти вигляд оператора у визначальних співвідношеннях в'язкопружності $\{P\}s_{ij} = 2\{Q\}e_{ij}$ і $\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$, що відповідає пружній сталій ν (коефіцієнту Пуасона).

Розв'язання

Під час одновісного розтягнення $\sigma_{11} = \sigma_0$. Формула $\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$ при діленні її обох частин на $9K$ набуває вигляду $\frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{9K} \to \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{\sigma_0}{9K}$, а формула $\{P\}s_{ij} = 2\{Q\}e_{ij}$ за умови підстановки $i = j = 1$ і після перетворень дає

$$\{P\}s_{ij} = 2\{Q\}e_{ij} \to \{P\}(\sigma_{11} - \sigma_{11}/3) = 2\{Q\}\left(\varepsilon_{11} - \frac{\sigma_0}{9K}\right) \to$$

$$\to \{P\}(\sigma_0 - \sigma_0/3) = 2\{Q\}\left(\varepsilon_{11} - \frac{\sigma_0}{9K}\right) \to \{P\}\frac{2}{3}\sigma_0 = 2\{Q\}\left(\varepsilon_{11} - \frac{\sigma_0}{9K}\right) \to$$

$$\to \{9KP\}\frac{\sigma_0}{3} = \{9KQ\}\varepsilon_{11} - \{Q\}\sigma_0 \to \{9KQ\}\varepsilon_{11} = \sigma_0\{3KP + Q\} \to$$

$$\to \varepsilon_{11} = \sigma_0 \frac{\{3KP + Q\}}{\{9KQ\}}.$$

Точно так само за умови $i = j = 2$ із $\{P\}s_{ij} = 2\{Q\}e_{ij}$ отримуємо, враховуючи $\sigma_{22} = 0$

$$\{P\}(0 - \sigma_0/3) = 2\{Q\}\left(\varepsilon_{22} - \frac{\sigma_0}{9K}\right) \to -\{P\}\frac{\sigma_0}{3} = 2\{Q\}\left(\varepsilon_{22} - \frac{\sigma_0}{9K}\right) \to$$

$$\to -\{3KP\}\sigma_0 = \{18KQ\}\varepsilon_{22} - \{2Q\}\sigma_0 \to \{18KQ\}\varepsilon_{22} = \{2Q\}\sigma_0 - \{3KP\}\sigma_0 \to$$

$$\to \varepsilon_{22} = \sigma_0 \frac{\{2Q - 3KP\}}{\{18KQ\}}.$$

Таким чином, в операторній формі можна записати

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\left[\sigma_0 \frac{\{2Q - 3KP\}}{\{18KQ\}}\right] \Bigg/ \left[\sigma_0 \frac{\{3KP + Q\}}{\{9KQ\}}\right] =$$

$$= -\frac{\{2Q - 3KP\}}{2\{3KP + Q\}} = \frac{\{3KP - 2Q\}}{\{6KP + 2Q\}}.$$

Задача 9.34. Циліндр із в’язкопружного матеріалу розміщено в щільно припасованій формі з жорсткими стінками (рис. 9.23), так що $\varepsilon_{rr} = 0$ (радіальна компонента деформації відсутня). Під час розширення матеріал веде себе як пружний. Функція повзучості дорівнює $\psi = A + Bt + Ce^{\lambda t}$, де A, B, C, λ – сталі. Знайти $\sigma_{33}(t)$, якщо $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_0[U(t)]$.

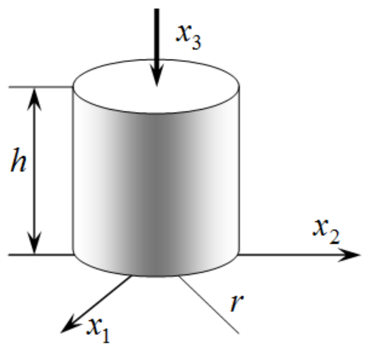


Рис. 9.23. Циліндр із в’язкопружного матеріалу

Розв'язання

Для даного середовища $\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$, і внаслідок симетрії задачі $(\sigma_{11} = \sigma_{22},\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0)$ ця рівність має вигляд $2\sigma_{11} + \sigma_{33} = 3K\varepsilon_{33}$. Відповідно до формули $\sigma_{ii} = \int\limits_0^t \varphi_v(t-t')\dfrac{\partial\varepsilon_{ii}}{\partial t'}dt'$ для $i = j = 1$ маємо

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = -\int\limits_0^t \frac{d\varepsilon_{33}}{dt'}\varphi(t-t')dt'.$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь

$$\begin{cases} 2\sigma_{11} + \sigma_{33} = 3K\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{11} - \sigma_{33} = -\int\limits_0^t \dfrac{d\varepsilon_{33}}{dt'}\varphi(t-t')dt', \end{cases}$$

відносно σ_{33}, знаходимо

$$\sigma_{11} = -\sigma_{33}/2 + 3/2\,K\varepsilon_{33},$$

$$-\sigma_{33}/2 + 3/2\,K\varepsilon_{33} - \sigma_{33} = -\int\limits_0^t \frac{d\varepsilon_{33}}{dt'}\varphi(t-t')dt' \to$$

$$\to -\frac{3}{2}\sigma_{33} + \frac{3}{2}K\varepsilon_{33} = -\int\limits_0^t \frac{d\varepsilon_{33}}{dt'}\varphi(t-t')dt' \to$$

$$\to \sigma_{33} = K\varepsilon_{33} + \frac{2}{3}\int\limits_0^t \frac{d\varepsilon_{33}}{dt'}\varphi(t-t')dt'.$$

Функцію релаксації φ можна знайти, користуючись формулою $\overline{\psi}(s)\overline{\varphi}(s) = \dfrac{1}{s^2}$. В результаті отримаємо

$$\varphi = \frac{\left[(r_1-\lambda)e^{r_1 t} - (r_2-\lambda)e^{r_2 t}\right]}{r_1 - r_2}.$$

де $r_{1,2} = \dfrac{A\lambda - B \pm \sqrt{(A\lambda + B)^2 + 4BC\lambda}}{2(A+C)}$.

Таким чином, остаточно маємо

$$\sigma_{33} = K\dot{\varepsilon}_0 t + \frac{2}{3}\int\limits_0^t \dot{\varepsilon}_0 \frac{\left[(r_1-\lambda)e^{r_1(t-t')} - (r_2-\lambda)e^{r_2(t-t')}\right]}{r_1 - r_2}\left[U(t')\right]dt',$$

і після інтегрування приходимо до виразу

$$\sigma_{33} = K\dot{\varepsilon}_0 t + 2\dot{\varepsilon}_0 \frac{\left[-(r_1-\lambda)\left(1-e^{r_1 t}\right)/(3r_1) + (r_2-\lambda)\left(1-e^{r_2 t}\right)/(3r_2)\right]}{r_1 - r_2}\left[U(t')\right].$$

Задача 9.35. Поздовжній згин стрижня із в'язкопружного матеріалу в умовах повзучості в межах лінійної теорії можна досліджувати за допомогою принципу відповідності. Знайти цим методом величину прогину $w(x_1, t)$ шарнірно закріпленого на кінцях стрижня із матеріалу Кельвіна (рис. 9.24).

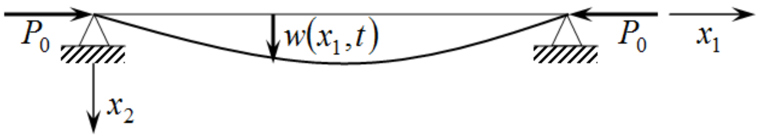


Рис. 9.24. Прогин шарнірно закріпленого на кінцях стрижня

Розв'язання

Прогин пружного стрижня описується рівнянням $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + P_0 \dfrac{w}{EI} = 0$. Для матеріалу Кельвіна модуль пружності E потрібно замінити оператором $\{E + \eta\partial_t\}$. Значить для в'язкопружного матеріалу повинно виконуватися рівняння

$$\{E + \eta\partial_t\}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + P_0 \frac{w}{I} = 0.$$

Будемо шукати величину прогину у вигляді добутку двох функцій залежних відповідно від координати і від часу

$$w(x_1, t) = W(x_1)\theta(t).$$

Після підстановки $w(x_1, t)$ в останнє рівняння приходимо до диференціального рівняння вигляду

$$\{E + \eta\partial_t\}\frac{d^2(W(x_1)\theta(t))}{dx_1^2} + P_0 \frac{W(x_1)\theta(t)}{I} = 0 \to$$

$$\to \{E\theta(t) + \eta\dot{\theta}(t)\}\frac{d^2 W(x_1)}{dx_1^2} + P_0 \frac{W(x_1)\theta(t)}{I} = 0$$

звідки

$$\eta\dot{\theta}(t)\frac{d^2 W(x_1)}{dx_1^2} + E\theta(t)\frac{d^2 W(x_1)}{dx_1^2} + P_0 \frac{W(x_1)\theta(t)}{I} = 0 \to \left| / \left[E\frac{d^2 W(x_1)}{dx_1^2} \right] \right| \to$$

$$\to \frac{\eta}{E}\dot{\theta}(t) + \theta(t) + P_0 \frac{W(x_1)\theta(t)}{EI\left[\dfrac{d^2 W(x_1)}{dx_1^2}\right]} = 0 \to$$

$$\to \left|\begin{matrix}\frac{\eta}{E}=\tau \\ /\tau\end{matrix}\right| \to \dot{\theta}(t)+\left[1+\frac{P_0 W(x_1)}{EI\left[\frac{d^2W(x_1)}{dx_1^2}\right]}\right]\frac{\theta(t)}{\tau}=0.$$

Але відомо, що навантаження під час поздовжнього згину пружного стрижня дорівнює

$$P_B=-EI\frac{\left[\frac{d^2W}{dx_1^2}\right]}{W},$$

тому можна записати останнє рівняння у вигляді

$$\dot{\theta}+\left[1+\frac{P_0}{P_B}\right]\frac{\theta}{\tau}=0,$$

виконати інтегрування його за часом і отримати розв'язок для

$$\theta(t)=e^{(P_0/P_B-1)t/\tau}.$$

Остаточно прогин під час поздовжнього згину в умовах повзучості визначається виразом

$$w(x_1,t)=W(x_1)\theta(t)\to$$

$$\to w(x_1,t)=W(x_1)e^{(P_0/P_B-1)t/\tau}.$$

Задача 9.36. Сформулюйте задачу про стаціонарні коливання балки із в'язкопружного матеріалу, припускаючи, що визначальні рівняння цього середовища задані формулами $\{P\}s_{ij}=2\{Q\}e_{ij}$ і $\sigma_{ii}=3K\varepsilon_{ii}$.

Розв'язання

Вільні коливання балки із пружного матеріалу описуються рівнянням $EI\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$. Згідно до $\{P\}s_{ij}=2\{Q\}e_{ij}$ і $\sigma_{ii}=3K\varepsilon_{ii}$, оператор рівнянь теорії в'язкопружності, що відповідає E, дорівнює $\left\{\frac{9KQ}{3KP+Q}\right\}$. Якщо прогин шукати у вигляді $w(x_1,t)=W(x_1)\theta(t)$, то диференціальне рівняння коливань в'язкопружної балки можна розділити на два рівняння – одне з похідними за просторовими координатами

$$\frac{d^4W}{dx_1^4}+k^4W=0,$$

а друге з похідними за часом

$$\{3KP+Q\}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{k^4I}{\rho A}\{9KQ\}\theta=0.$$

Розв’язок W_i просторового рівняння дає форму i-го головного коливання, а рівняння залежне від часу для $k = k_i$ має розв’язок $\theta_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} e^{\lambda_{ij} t}$, де N залежить від порядку оператора. Таким чином, загальний розв’язок є сума вигляду

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} W(x_1) A_{ij} e^{\lambda_{ij} t},$$

в якій λ_{ij} – комплексні величини.

9.7. Додаткові задачі для самоконтролю

Задача 9.37. Написати визначальне рівняння для чотирьохпараметричної моделі, що показана на рис. 9.25.

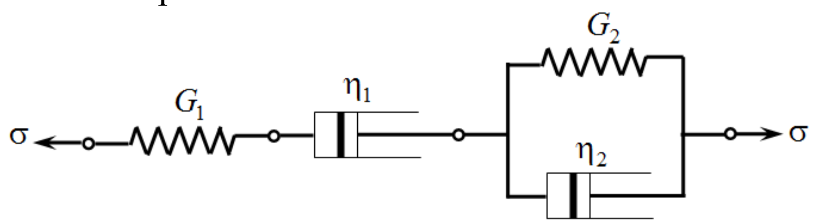


Рис. 9.25. Чотирьохпараметрична модель в’язкопружного середовища

Відповідь: $\ddot{\sigma} + [G_1/\eta_2 + G_2/\eta_2 + G_1/\eta_1]\dot{\sigma} + G_1 G_2\, \sigma/(\eta_1 \eta_2) = G_1 \ddot{\varepsilon} + G_1 G_2\, \dot{\varepsilon}/\eta_2$.

Задача 9.38. Безпосереднім інтегруванням рівняння

$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau = \sigma_0 [U(t)](G_1 + G_2)/(G_1 \eta_2) + \sigma_0 [\delta(t)]/G_1$$

знайти деформацію повзучості для стандартного лінійного твердого тіла (див. задачу 9.7).

Задача 9.39. Вивести визначальні співвідношення для моделі Кельвіна і для моделі Максвела із співвідношення, встановленого в задачі 9.5 для запропонованої в цій задачі чотирьохпараметричній моделі.

Вказівка: покласти $G_3 = 0$ і так далі.

Задача 9.40. Скориставшись рівнянням $\overline{\psi}(s)\overline{\varphi}(s) = \dfrac{1}{s^2}$ для знаходження функції $\psi(t)$, якщо $\varphi(t) = a(b/t)^m$ і $m < 1$.

Вказівка: покласти $m = 1 - k$, так що $\varphi(t) = a b^m t^{k-1}$.

Відповідь: $\psi(t) = \dfrac{\sin \pi m}{a m \pi} \left(\dfrac{t}{b} \right)^m$.

Задача 9.41. Знайти функцію повзучості і функцію релаксації для моделі, що зображена на рис. 9.26.

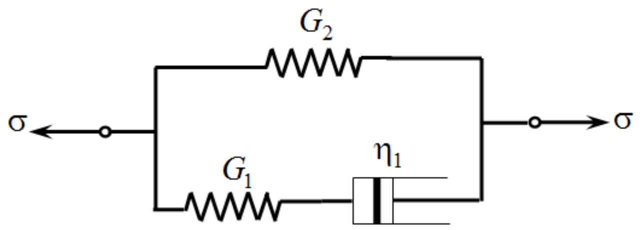


Рис. 9.26. Модель до задачі 9.41

Відповідь: $\psi(t) = \dfrac{1}{G_2} - \dfrac{G_1 e^{-G_2 t/[\tau_1(G_1+G_2)]}}{G_2(G_1+G_2)}$, $\varphi(t) = G_2 + G_1 e^{-t/\tau_1}$.

Задача 9.42. Знайти G^* для моделі, яка представлена на рис. 9.27.

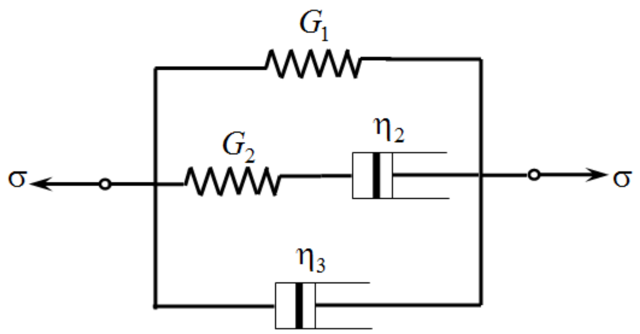


Рис. 9.27. Модель до задачі 9.42

Відповідь: $G^* = \dfrac{G_1(1+\omega^2\tau_2^2) + G_2\omega^2\tau_2^2}{1+\omega^2\tau_2^2} + i\dfrac{\omega(G_2\tau_2 + \eta_3(1+\omega^2\tau_2^2))}{1+\omega^2\tau_2^2}$.

Задача 9.43. В моделі, що використана в задачі 9.42, покласти $G_1 = G_2 = G$ і $\eta_2 = \eta_3 = \eta$ та визначити закон зміни напруження під час деформації за законом (рис. 9.28).

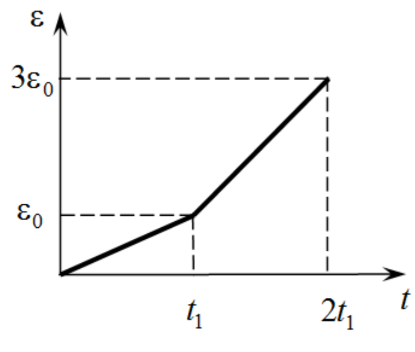


Рис. 9.28. Модель до задачі 9.43

Відповідь: $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0}{t_1}\left[G(2t - t_1) + \eta\left(4 - \left(1 + e^{t_1/\tau}\right)e^{-t/\tau}\right)\right]$ для $t_1 < t < 2t_1$.

Задача 9.44. В'язкопружний матеріал з визначальним рівнянням $\dot{\sigma}+\alpha\sigma=\beta\dot{\varepsilon}+\gamma\varepsilon$ (де α,β,γ – сталі) піддається навантаженню за таких умов: $\sigma_{11}=-\sigma_0[U(t)]$, $\sigma_{22}=0$, $\varepsilon_{33}=0$ (рис. 9.29). Вважаючи, що $\sigma_{ii}=3K\varepsilon_{ii}$, знайти $\sigma_{33}(t)$, $\sigma_{33}(0)$ і $\sigma_{33}(\infty)$.

Відповідь: $\sigma_{33}=-\sigma_0\left[\dfrac{3\alpha K-2\gamma}{2(3\alpha K+\gamma)\lambda}+\left(\dfrac{3K-2\beta}{2(3K+\beta)}-\dfrac{3\alpha K-2\gamma}{2(3\alpha K+\gamma)\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]$,

де $\lambda=\dfrac{3\alpha K+\gamma}{3K+\beta}$.

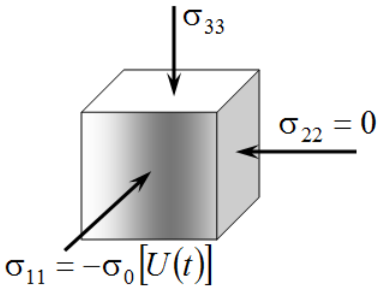


Рис. 9.29. Схема навантаження в'язкопружного матеріалу

Задача 9.45. Шарнірно закріплений на кінцях стрижень виготовлено із матеріалу Максвела, для якого $\dot{\sigma}+\dfrac{\sigma}{\tau}=E\dot{\varepsilon}$. Початкова форма стрижня задана величиною прогину $w=w_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$. Прикладена сила дорівнює $P_0[U(t)]$ (рис. 9.30). Знайти величину прогину $w(x_1,t)$ в наступні моменти часу як функцію від P_B – навантаження під час поздовжнього згину пружного стрижня.

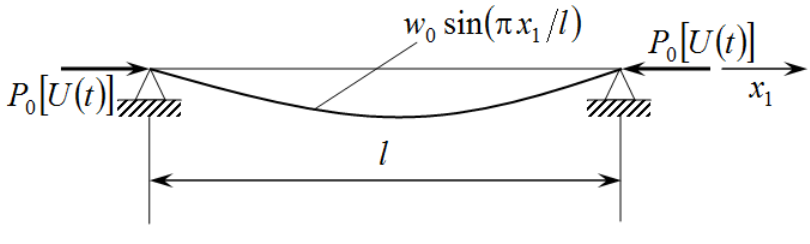


Рис. 9.30. Прогин шарнірно закріпленого на кінцях стрижня

Відповідь: $w(x_1,t)=w_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)e^{\frac{-t}{(1-P_B/P_0)\tau}}$.

Додаток А

Теоретичні відомості для розв'язання задач

А.1. Математичні основи. Введення в тензорний аналіз

А.1.1. Визначення тензора. Тензором називається геометрична величина, яка має n^r компонент (n – розмірність простору, r – ранг тензора), який за зміни координатної системи перетворюється згідно формул перетворення:

$$b_{kl} = c_{ks'} c_{lt'} b_{s't'},$$

де b_{kl} і $b_{s't'}$ – компоненти тензорів 2-го рангу в зміненій і вихідній системах координат; $c_{ks'}$ – тензор перетворення координат.

Згідно визначення тензора, **скаляр** це тензором нульового рангу, а **вектор** – тензор 1-го рангу.

Тобто, тензор як математичний об'єкт існує незалежно від системи координат. В той же час в кожній системі координат його можна задавати деякою сукупністю величин, які називаються компонентами тензора. Якщо компоненти тензора задані в одній системі координат, то вони визначені і в будь-якій іншій системі, бо визначення тензора включає закон перетворення його компонент.

А.1.2. Фізичні закони механіки суцільного середовища виражають тензорними рівняннями. Внаслідок лінійності і однорідності тензорних перетворень тензорні рівняння, що є вірними в одній системі координат, також вірні і в будь-якій іншій. Така **інваріантність** тензорних співвідношень відносно перетворення координат є одною із основних причин того, що тензорне числення вельми корисно під час вивчення механіки суцільного середовища.

А.1.3. Поняття вектора. Вектор це геометрична величина, яка характеризується модулем і напрямком. Наприклад, вектор швидкості позначається як $\mathbf{v}$ (або $\vec{v}$), а його модуль – $|\mathbf{v}|$. **Вектори є однаковими**, якщо вони однаково направлені і мають однакову довжину. **Одиничним вектором** називається вектор, у якого його довжина дорівнює одиниці. **Нульовий вектор** має нульову довжину і невизначений напрям. **Від'ємним** по відношенню до даного називається вектор з тим же модулем, але протилежно направлений.

А.1.4. Представлення векторів у прямокутних і косокутних прямолінійних системах координат. Вектор $\mathbf{a}$ в декартовій системі координат можна розкласти за основним базисом $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ (або $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) – одиничними векторами

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3,$$

де a^1, a^2, a^3 – компоненти вектору $\vec{a}$ в декартовій системі координат, які являють собою числа або скаляри.

Розкладання вектору $\mathbf{a}$ в косокутній (афінній) системі координат за основним базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ має вигляд

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$

де a_1, a_2, a_3 – компоненти вектору $\vec{a}$ в афінній системі координат.

А.1.5. Основний і взаємний векторні базиси. Основним базисом декартової системи координат є три орти $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – тріедр одиничних векторів. Причому компоненти вектору $\vec{a}$ визначаються як скалярний добуток (який позначається знаком $\cdot$) вектору $\mathbf{a}$ на базисні вектори $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_1; \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_2; \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_3 \text{ або } a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_i.$$

Основним базисом афінної системи координат є три орти $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Компоненти вектору $\vec{a}$ визначаються таким чином:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1; \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2; \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 \text{ або } a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Взаємний базис позначається верхніми індексами і визначається формулами:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},$$

де $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ – одночасний скалярний і векторний добуток, який називається **змішаним добутком**. При цьому спочатку виконується векторний добуток, а потім скалярний. Результатом змішаного добутку $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ є скаляр.

А.1.6. Складання векторів підпорядковується правилу паралелограма або, що еквівалентно правилу трикутника. Алгебраїчно операція складання виражається векторною рівністю

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{c}.$$

Віднімання векторів виконується шляхом додавання від'ємного вектору

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{d}.$$

Операції складання і віднімання векторів мають властивості комутативності і асоціативності

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{g} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) = \mathbf{h}.$$

А.1.7. Добуток вектора на скаляр у загальному випадку дає новий вектор, що має той же напрямок, що і вихідний, але іншу довжину. Виключенням є множення на нуль, яке дає в результаті нульовий вектор, і множення на одиницю, яке не змінює вектор. Операція множення вектору на скаляр асоціативна і дистрибутивна, тобто

$$m(n\mathbf{b}) = (mn)\mathbf{b} = n(m\mathbf{b}),$$

$$(m + n)\mathbf{b} = (n + m)\mathbf{b} = m\mathbf{b} + n\mathbf{b},$$

$$m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m(\mathbf{b} + \mathbf{a}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}.$$

Результат множення вектору на величину обернену до його модуля дає **одиничний вектор** того ж напрямку

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

А.1.8. Скалярний добуток двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ дає скаляр

$$\lambda = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \text{ або } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

де θ – найменший кут між векторами (рад).

Скалярний добуток вектору $\mathbf{a}$ на одиничний вектор $\mathbf{e}$ дає проекцію $\mathbf{a}$ на напрямок $\mathbf{e}$.

А.1.9. Векторним добутком векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається вектор $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)\mathbf{e},$$

де θ – кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, менший за π, рад; $\mathbf{e}$ – одиничний вектор, перпендикулярний до площини векторів і направлений так, що поворот за правилом правої руки навколо $\mathbf{e}$ на θ переміщує $\mathbf{a}$ в $\mathbf{b}$.

Модуль $\mathbf{v}$ дорівнює площі паралелограма з суміжними сторонами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Векторний добуток не комутативний.

А.1.10. Змішаним добутком називається скалярний добуток двох векторів, один з яких сам є векторним добутком

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \lambda.$$

Величина λ змішаного добутку дорівнює об’єму паралелепіпеда з ребрами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

А.1.11. Подвійний векторний добуток – це векторний добуток двох векторів, один з яких сам є векторним добутком

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{w}.$$

Вектор $\mathbf{w}$ лежить в площині векторів $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$.

А.1.12. Діади і діадики. Діадою називається **невизначений добуток** двох векторів (або тензорний добуток, який позначається $\otimes$), який за визначенням задається записом векторів один за другим. Невизначений добуток у загальному випадку не комутативний, тобто $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$. **Діадиком** $\hat{\mathbf{D}}$ називається тензор другого рангу. Тут знак ^ вказує на те, що це тензор другого рангу. $\hat{\mathbf{D}}$ завжди може бути представлений у вигляді суми скінченого ряду діад

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N\mathbf{b}_N \text{ або } \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{ab}.$$

Діадик спряжений до вихідного

$$\hat{\mathbf{D}}_c = \hat{\mathbf{D}}^T = \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{b}_N\mathbf{a}_N.$$

Скаляр діадика

$$\hat{\mathbf{D}}_s = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N\cdot\mathbf{b}_N.$$

Вектор діадика

$$\hat{\mathbf{D}}_v = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{a}_N \times \mathbf{b}_N .$$

А.1.13. Невизначений добуток векторів – властивості дистрибутивності

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac},$$
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{ad} + \mathbf{bc} + \mathbf{bd},$$
$$(\lambda + \mu)\mathbf{ab} = \lambda\mathbf{ab} + \mu\mathbf{ab},$$
$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{ab},$$

де λ, μ – скаляри.

А.1.14. Одиничний діадик $\hat{\mathbf{I}}$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

де $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – вектори будь-якого ортонормованого базису в тривимірному евклідовому просторі.

Властивість:

$$\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{v}.$$

А.1.15. Скалярний добуток $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}$ є вектором

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N = \mathbf{u},$$
$$\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}) + \ldots + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

Векторний добуток $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{D}} \times \mathbf{v}$ є діадиком

$$\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + \ldots + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N,$$
$$\hat{\mathbf{D}} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{v}) + \ldots + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N \times \mathbf{v}).$$

А.1.16. Скалярний добуток двох діад $\mathbf{ab}$ і $\mathbf{cd}$ за визначенням є діада

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad}.$$

Скалярний добуток будь-яких двох діадиків $\hat{\mathbf{D}}$ і $\hat{\mathbf{E}}$ теж є діадиком

$$\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{a}_N\mathbf{b}_N) \cdot (\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{d}_2 + \ldots + \mathbf{c}_N\mathbf{d}_N) =$$
$$= (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{d}_1 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2)\mathbf{a}_2\mathbf{d}_2 + \ldots + (\mathbf{b}_N \cdot \mathbf{c}_N)\mathbf{a}_N\mathbf{d}_N = \mathbf{G}.$$

А.1.17. Подвійний скалярний, змішаний і подвійний векторний добуток діад $\mathbf{ab}$ і $\mathbf{cd}$ за аналогією визначається таким чином:

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \lambda \qquad \text{(скаляр)},$$
$$\mathbf{ab} \mathop{\cdot}\limits^{\times} \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{h} \qquad \text{(вектор)},$$
$$\mathbf{ab} \mathop{\times}\limits^{\cdot} \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = \mathbf{g} \qquad \text{(вектор)},$$
$$\mathbf{ab} \mathop{\times}\limits^{\times} \mathbf{cd} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = \mathbf{uw} \qquad \text{(діада)}.$$

А.1.18. Подвійний скалярний добуток діад

$$\mathbf{ab}\cdot\cdot\mathbf{cd}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})=\lambda \qquad \text{(скаляр).}$$

А.1.19. Симетричний діадик

$$\hat{\mathbf{D}}=\hat{\mathbf{D}}_c,$$

і антисиметричний діадик

$$\hat{\mathbf{D}}=-\hat{\mathbf{D}}_c.$$

А.1.20. Розклад діадика на суму симетричного і несиметричного діадиків

$$\hat{\mathbf{D}}=\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{D}}+\hat{\mathbf{D}}_c\right)+\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{D}}-\hat{\mathbf{D}}_c\right)=\hat{\mathbf{G}}+\hat{\mathbf{H}},$$

де $\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{D}}_c+\hat{\mathbf{D}}\right)=\hat{\mathbf{G}}$ – симетричний діадик; $\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{D}}_c-\hat{\mathbf{D}}\right)=\hat{\mathbf{H}}$ – антисиметричний діадик.

А.1.21. Скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ в декартових компонентах

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\left(a_1\mathbf{i}_1+a_1\mathbf{i}_2+a_1\mathbf{i}_3\right)\cdot\left(b_1\mathbf{i}_1+b_2\mathbf{i}_2+b_3\mathbf{i}_3\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

А.1.22. Векторний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ в декартових компонентах

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\mathbf{i}_1+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\mathbf{i}_2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\mathbf{i}_3.$$

А.1.23. Змішаний добуток векторів в декартових компонентах

$$[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

А.1.24. Діада $\mathbf{ab}$ в декартових координатах

$$\mathbf{ab}=\left(a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+a_3\mathbf{i}_3\right)\left(b_1\mathbf{i}_1+b_2\mathbf{i}_2+b_3\mathbf{i}_3\right)=a_1b_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1+a_1b_2\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2+a_1b_3\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3+$$
$$+a_2b_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1+a_2b_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2+a_2b_3\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3+a_3b_1\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1+a_3b_2\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2+a_3b_3\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3.$$

А.1.25. Індексні позначення тензорів. Тензор другого рангу позначається таким чином

$$\hat{\mathbf{A}}=A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

де A_{ij} – компоненти тензора; $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – векторний супровід тензора 2-го рангу.

Іноді тензори записують у вигляді квадратної матриці

$$A_{ij}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

А.1.26. Погодження про підсумовування. За індексами, що повторюються двічі, виконується підмумовування. Ці індекси називаються німими

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = v_i\mathbf{e}_i,$$

де v_1, v_2, v_3 – декартові компоненти вектора $\mathbf{v}$; i – індекс, за яким виконується підсумовування; $\mathbf{e}_i$ – векторний супровід тензора.

А.1.27. Формули перетворення координат. Нехай

$$\theta^i = \theta^i\left(x^1, x^2, x^3\right)$$

визначають для будь-якої точки $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ системи координат x^i новий набір її координат $\left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right)$ в системі координат θ^i. Відносно функцій θ^i, що зв'язують дві сукупності змінних величин (координат), припускається, що вони однозначні, неперервні і дифенціюються. Визначник

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\theta^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial\theta^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial\theta^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\theta^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial\theta^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial\theta^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial\theta^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial\theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \text{ або } J = \left|\frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}\right|,$$

називається якобіаном перетворення. Якщо якобіан не дорівнює нулю, то рівняння $\theta^i = \theta^i\left(x^1, x^2, x^3\right)$ можна локально єдиним чином розв'язати відносно x^i

$$x^i = x^i\left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right).$$

Наведені формули справедливі як для декартових, так і криволінійних координат.

А.1.28. Закони перетворення контраваріантних тензорів. У загальному випадку величини b^i, зв'язані з точкою P, представляють компоненти **контраваріантного** тензора першого рангу, якщо під час перетворення координат ці величини перетворюються за законом

$$b'^i = \frac{\partial\theta^i}{\partial x^j} b^j,$$

причому частинні похідні обчислені в точці P. У формулі для перетворення b^j є компонентами тензора в системі координат x^j, а b'^i – його компоненти в системі координат θ^i. У загальній теорії тензорів для позначення контраваріантних тензорів використовуються верхні індекси.

Узагальнення правила перетворення векторів призводить до визначення контраваріантного тензора другого рангу, компоненти якого за правилом перетворення мають вигляд

$$B'^{ij} = \frac{\partial\theta^i}{\partial x^r}\frac{\partial\theta^j}{\partial x^s} B^{rs}.$$

Контраваріантні тензори третього, четвертого та більш вищих рангів визначаються аналогічним чином.

А.1.29. Закони перетворення коваріантних тензорів. В загальному випадку величини b_i називаються компонентами **коваріантного** тензора першого рангу, якщо вони перетворюються за правилом

$$b_i' = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} b_j ,$$

де b_i' є коваріантними компонентами вектору в системі координат θ^i, а b_i – компонентами в системі координат x^i.

Коваріантні тензори другого рангу підпорядковуються закону перетворення вигляду

$$B_{ij}' = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^j} B_{rs} .$$

Коваріантні тензори більш високого рангу і **змішані** тензори визначаються очевидним чином

$$T'^{r}_{\cdot sp} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} T^{m}_{\cdot nq} .$$

А.1.30. Метричний тензор. Нехай x^i представляє систему ортогональних декартових координат в евклідовому тривимірному просторі, а θ^i – будь-яку іншу систему ортогональних прямолінійних або криволінійних координат у тому ж самому просторі. Вектор $\mathbf{x}$, що має декартові компоненти x^i, називається *радіусом-вектором* довільної точки $P\left(x^1, x^2, x^3\right)$ в декартовій системі. Квадрат діференціала відстані ds між близькими точками в цій системі координат $P(\mathbf{x})$ і $Q(\mathbf{x}+d\mathbf{x})$ дається формулою

$$(ds)^2 = dx^i dx^i .$$

Із формули перетворення координат витікає зв'язок між диференціалами

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p .$$

Після підставки останнього виразу в попередній маємо

$$(ds)^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^p d\theta^q = g_{pq} d\theta^p d\theta^q ,$$

де $g_{pq} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \dfrac{\partial x^i}{\partial \theta^q}$ – тензор другого рангу, який називається **метричним** або **фундаментальним** тензором простору.

Якщо θ^i теж утворюють ортогональну декартову систему, скажімо x'^i, тоді

$$g_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^i}{\partial x'^q} = \delta_{pq},$$

де $\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad p = q; \\ 0 & \text{при} \quad p \neq q, \end{cases}$ – дельта або символ Кронекера.

А.1.31. Декартові тензори. Система координат, для якої квадрат нескінченно молого елемента довжини має вигляд $(ds)^2 = g_{pq} d\theta^p d\theta^q$, називається системою **однорідних координат**. Перетворення, що переводять одну систему однорідних координат в іншу, є **ортогональними** перетвореннями, і якщо обмежитись твльки ортогональними перетвореннями, то тензори, які визначено таким чином, називаються **декартовими тензорами**. Зокрема, це вірно для законів перетворення ортогональних декартових систем координат зі спільним початком. Для декартових тензорів немає різниці між контраваріантними і коваріантними компонентами, і тому у виразах, що представляють декартові тензори, прийнято користуватися виключно нижніми індексами. В законах перетворення, що визначають декартові тензори, частинні похідні виду $\dfrac{\partial x^j}{\partial \theta^i}$ в загальних тензорних визначеннях заміняються на константи.

А.1.32. Закони перетворення декартових тензорів. Нехай $Ox_1x_2x_3$ і $Ox'_1x'_2x'_3$ – дві ортогональні декартові системи координат зі спільним початком у довільній точці O. Можна вважати, що система координат зі штрихами отримана із системи без штрихів поворотом вісей навколо координат або відображенням вісей відносно одної із координатних площин, або, може бути, комбінацією того й іншого. Якщо величиною c_{ij} позначено косинус кута між i-ю віссю системи зі штрихами і j-ю віссю системи без штрихів, тобто $c_{ij} = \cos(x_i, x_j)$, то орієнтацію будь-якої вісі кожної системи відносно другої зручно задати тензором перетворення

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Компоненти вектора у вихідній і перетвореній системах зв'язані співвідношенням

$$v_j = c_{ij} v'_i.$$

Ця рівність дає **закон перетворення** декартових тензорів першого рангу. Зворотне перетворення дається формулою

$$v'_i = c_{ij} v_j.$$

Природнім узагальненням формули $v_j = c_{ij} v'_i$ є **закон перетворення** будь-якого тензора другого рангу

$$T'_{ij} = c_{ip} c_{jq} T_{pq},$$

і формула для зворотнього перетворення

$$T_{ij} = c_{pi} c_{qj} T'_{pq}.$$

А.1.33. Дельта Кронекера. Для представлення величин типу $c_{ij} c_{ik}$, можна користуватися **дельтою Кронекера**, яка визначається таким чином

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Символ Кронекера завдяки своїм властивостям є аналогом в індексних позначеннях одиничного тензора другого рангу $\hat{\mathbf{I}}$.

Символ Кронекера іноді називають **оператором заміни**, тому що він дає, наприклад, такі перетворення

$$\delta_{ij} b_j = \delta_{i1} b_1 + \delta_{i2} b_2 + \delta_{i3} b_3 = b_t,$$

або $\delta_{ij} F_{ik} = \delta_{1i} F_{1k} + \delta_{2i} F_{2k} + \delta_{3i} F_{3k} = F_{jk}$.

За допомогою дельти Кронекера умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти рівняння $v_j = c_{ij} c_{ik} v_k$, можна записати таким чином

$$c_{ij} c_{ik} = \delta_{jk}.$$

А.1.34. Умови ортогональності. В розгорнутому вигляді співвідношення $c_{ij} c_{ik} = \delta_{jk}$ складається із дев'яти рівностей, які називаються **умовами ортогональності** або **ортонормованості**. Ці умови, накладаються на направляючі косинуси c_{ij}. Але співвідношення $v_j = c_{ij} v'_i$ і $v'_i = c_{ij} v_j$ можна зкомбінувати інакше та отримати рівність $v'_i = c_{ij} c_{kj} v'_k$, що дає форму умов ортогональності

$$c_{ij} c_{kj} = \delta_{ik}.$$

Лінійні перетворення типу $v_j = c_{ij} v'_i$ і $v'_i = c_{ij} v_j$, коефіцієнти яких задовольняють умови ортогональності $c_{ij} c_{kj} = \delta_{ik}$, називаються **ортогональними перетвореннями**. Поворот вісей координат і відображення їх відносно будь-якої координатної площини є ортогональними перетвореннями.

А.1.35. Додавання декартових тензорів. Декартові тензори однакового рангу можна додавати або віднімати покомпонентно відповідно до такого правила

$$A_{ijk\ldots} \pm a B_{ijk\ldots} = T_{ijk\ldots}.$$

Сума тензорів є тензор того ж рангу, що і доданки. При цьому однакові індекси розташовані в одній і тій же послідовності в кожному члені.

А.1.36. Добуток тензора на скаляр. Добуток всіх компонент тензора на скаляр дає новий тензор того ж рангу

$b_i = \lambda a_i$ або $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$,

$B_{ij} = \lambda A_{ij}$ або $\hat{\mathbf{B}} = \lambda \hat{\mathbf{A}}$.

А.1.37. Зовнішнім добутком двох тензорів довільного рангу називається новий тензор, у якого компоненти утворені множенням кожної компоненти одного тензора на кожну компоненту другого. Ранг отриманого тензора дорівнює сумі рангів співмножників. Типовими прикладами зовнішнього добутку є наступні вирази:

а) $a_i b_j = T_{ij}$; в) $D_{ij} T_{km} = \Phi_{ijkm}$;

б) $v_i F_{jk} = \alpha_{ijk}$; г) $\varepsilon_{ijk} v_m = \Theta_{ijkm}$.

Як видно із цих прикладів, зовнішній добуток отримується простим простим написанням тензорів, що перемножуються, один за одним. Відмітимо, що саме ця операція утворює з двох векторів діаду.

А.1.38. Згорткою тензора по двох вільних індексах називається така операція, коли два індекси позначаються одною і тою ж буквою, внаслідок чого вони стають індексами підсумовування. В результаті згортання отримується знов тензор (згортку), ранг якого на дві одиниці менший за вихідний. Така згортка також називається скалярною згорткою.

а) Згортки тензора T_{ij} і діади $u_i v_j$:

$T_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$, $u_i v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

б) Згортки тензора $E_{ij} a_k$:

$E_{ij} a_j = b_i$, $E_{ij} a_i = c_j$, $E_{ii} a_k = d_k$.

в) Згортки тензора $E_{ij} F_{km}$:

$E_{ij} F_{im} = G_{jm}$, $E_{ij} F_{kk} = P_{ij}$,

$E_{ij} F_{ki} = H_{jk}$, $E_{ij} F_{jm} = Q_{im}$,

$E_{ii} F_{km} = K_{km}$, $E_{ij} F_{kj} = R_{ik}$.

А.1.39. Внутрішнім добутком двох тензорів називається результат операції згортання, що застосовується до зовнішнього добутку даних тензорів, причому індекси, що співпадають, повинні фігурувати по одному із співмножників.

Зовнішній добуток	Внутрішній добуток: індексні позначення	символьні позначення
$a_i b_j$	$a_i b_i$	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$;
$a_i E_{jk}$	$a_i E_{ik} = f_k$	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{f}$;
	$a_i E_{ji} = h_j$	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{h}$;
$E_{ij} F_{km}$	$E_{ij} F_{jm} = G_{im}$	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{G}$;
$E_{ij} E_{km}$	$E_{ij} E_{jm} = B_{im}$	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}=(\mathbf{E})^2$.

А.1.40. Тензор Леві-Чивіти. Спеціальний тензор третього рангу ε_{ijk} або $\overset{3}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, відомий як **тензор Леві-Чивіти (альтернуючий тензор)**, компоненти якого визначаються таким чином

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3; \\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3; \\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i=j, \text{ або } j=k, \text{ або } k=i). \end{cases}$$

Тобто, скориставшись рис. А.1 нескладно записати:

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$

$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1,$

а всі інші 18 компонент, у яких індекси повторюються, дорівнюють нулю.

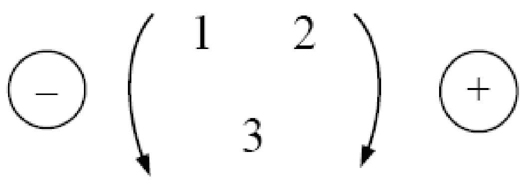


Рис. А.1. До визначення ε_{ijk}

За допомогою тензора Леві-Чивіти векторний добуток $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$ можна записати в індексній формі

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i,$$

і змішаний добуток векторів $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\lambda$

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \lambda.$$

А.1.41. Матричні представлення декартових тензорів. Оскільки в тривимірному просторі будь-який тензор другого рангу можна виразити в дев'ятичленній формі, а його компоненти записати у вигляді квадратної матриці, дуже корисним є представлення представлення тензорів другого рангу (діадиків) квадратними матрицями третього порядку. Тензор першого рангу (вектор) можна записати або у вигляді рядка, тобто (1×3)-матриці, або у вигляді стопця (3×1)-матриці. Хоч і кожний декартовий тензор, ранг якого не вищий за двох (діадик, вектор, скаляр) можна представити у вигляді матриці, але не кожна матриця представляє тензор.

Якщо обидві матриці третього рангу в добутку $\mathbf{AB}=\mathbf{C}$ представляють тензори другого рангу в тривимірному просторі, то операція множення матриць еквівалентна внутрішньому добутку тензорів і в індексній формі запису виглядає так

$$A_{ij}B_{jk} = C_{ik},$$

де індекси i, j, k приймають значення 1,2,3.

Розшифрування останньої формули дає правило множення матриць за принципом «рядок на стовпець»: елементи i-го рядку першої матриці множаться почерзі на елементи k-го стовпця другої матриці, ці добутки підсумовуються і дають елемент, що стоїть на перетині i-го рядку та k-го стовпця результуючої матриці. Деяка добутки такого типу, часто зустрічаються в механіці суцільного середовища і наведені нижче для порівняння.

а) Скалярний добуток двох векторів:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \lambda, \quad \lfloor a_{1j} \rfloor [b_{j1}] = [\lambda],$$

$$a_i b_i = b_i a_i = \lambda, \qquad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

б) Скалярний добуток вектора на тензор другого рангу:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{b}, \ a_i E_{ij} = b_j, \quad \lfloor a_{1i} \rfloor [E_{ij}] = \lfloor b_{1j} \rfloor,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 E_{11} + a_2 E_{21} + a_3 E_{31}, \\ a_1 E_{12} + a_2 E_{22} + a_3 E_{32}, \\ a_1 E_{13} + a_2 E_{23} + a_3 E_{33} \end{bmatrix}.$$

б) Скалярний добуток тензор другого рангу на вектора:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{c}, \ E_{ij} a_i = c_j, \quad [E_{ij}] [a_{j1}] = [c_{i1}],$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 E_{11} + a_2 E_{21} + a_3 E_{31} \\ a_1 E_{12} + a_2 E_{22} + a_3 E_{32} \\ a_1 E_{13} + a_2 E_{23} + a_3 E_{33} \end{bmatrix}.$$

А.1.42. Симетрія диадиків, матриць і тензорів. Діадик $\hat{\mathbf{D}}$ називається симетричним (або антисометричним), якщо він дорівнює (або протилежний за знаком) спряженому з ним діадику $\hat{\mathbf{D}}_c$. Подібно цьому тензор другого рангу D_{ij} є **симетричним**, якщо

$$D_{ij} = D_{ji},$$

і **антисиметричним** або **кососиметричним**, якщо

$$D_{ij} = -D_{ji}.$$

тобто, D_{ij} можна розкласти на дві складові

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(D_{ij} + D_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(D_{ij} - D_{ji}\right),$$

або у скороченій формі запису

$$D_{ij} = D_{(ij)} + D_{[ji]},$$

де індексами в круглих дужках позначено симетричну частину D_{ij}, а індексами у квадратних дужках – антисиметричну частину.

Квадратна матриця $\mathbf{A}$ симетрична, якщо вона дорівнює своїй транспонованій матриці $\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Антисиметрична матриця дорівнює своїй транспозиції з від'ємним знаком

$$\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Властивості симетрії можна розповсюдити на тензори більш високого рангу (більшого за другий). У загальному випадку довільний тензор називається симетричним відносно пари індексів, якщо значення кожної його компоненти не змінюється за заміни місцями цих індексів. Тензор антисиметричний за парою індексів, якщо заміна їх один на другого веде до зміни знака, але не абсолютної величини компоненти.

а) $R_{ijkm} = R_{ikjm}$, (симетричний за k і j);

б) $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$, (антисиметричний за k і j);

в) $G_{ijkm} = G_{jikm} = G_{ijmk} = G_{jimk}$, (симетричний за i і j, k і m);

г) $\beta_{ijk} = \beta_{ikj} = \beta_{kji} = \beta_{jik}$, (симетричний за всіма індексами).

А.1.43. Головні значення і головні напрямки симетричних тензорів другого рангу. Головні значення тезору T_{ij} визначаються рівнянням вигляду

$$\left|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0.$$

В розгорнутому вигляді це кубічне рівняння відносно λ

$$\lambda^3 - \mathrm{I_T}\lambda^2 + \mathrm{II_T}\lambda - \mathrm{III_T} = 0,$$

яке називається **характеристичним рівнянням** тензора T_{ij}, а його скалярні коефіцієнти дорівнюють

$$\mathrm{I_T} = T_{ii} = \mathrm{tr}\left(T_{ij}\right),$$

де $\mathrm{tr}\left(T_{ij}\right)$ – слід тензора T_{ij},

$$\mathrm{II_T} = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}\right), \qquad \mathrm{III_T} = \left|T_{ij}\right| = \det T_{ij},$$

називаються відповідно, першим, другим і третім **інваріантами** тензора T_{ij}.

Три кореня кубічного рівняння, позначені як $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$, називаються головними значеннями тензора T_{ij}. У симетричного тензора з дійсними компонентами головні значення теж дійсні. Якщо вони різні, то три головних напрямки ортогональні. У головних осях матриця із компонент тензора приводиться до діагональної форми

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}.$$

Якщо $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$, то діагональний вигляд тензора не залежить від вибору осей, що відповідають $\lambda_{(1)}$ і $\lambda_{(2)}$, і треба встановити тільки головну вісь, яка відповідає $\lambda_{(3)}$. Якщо всі головні значення рівні між собою, то будь-який напрямок є головним. Якщо головні значення упорядковані, то прийнято позначати їх через $\lambda_{(\mathrm{I})}, \lambda_{(\mathrm{II})}, \lambda_{(\mathrm{III})}$ і розташовувати їх у порядку спадання: $\lambda_{(\mathrm{I})} > \lambda_{(\mathrm{II})} > \lambda_{(\mathrm{III})}$.

Головні напрямки тензора визначаються системою рівнянь

$$\left(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)n_j = 0$$

з додатковою умовою $n_i n_i = 1$.

Розв'язками останньої системи рівнянь є $n_i^{(j)}$ – направляючі косинуси j-го головного напрямку.

А.1.44. Степені тензорів другого рангу. Безпосереднім матричним множенням квадрат тензора T_{ij} отримується як внутрішнім добутком $T_{ik}T_{kj}$, куб – як добуток $T_{ik}T_{km}T_{mj}$ і так далі. Таким чином, якщо T_{ij} представлений в діагональній формі (А.1.43), то n-степінь цього тензора (і відповідної матриці) дається формулою

$$(\mathbf{T})^n = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{pmatrix} \text{ або } \Gamma^n = \begin{bmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{bmatrix}.$$

А.1.45. Співвідношення Гамільтона-Келі. Якщо, усі головні значення задовольняють рівнянню $\lambda^3 - \mathrm{I_T}\lambda^2 + \mathrm{II_T}\lambda - \mathrm{III_T} = 0$, а матриця має діагональний вигляд $\Gamma^n = \begin{bmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{bmatrix}$, тому сам тензор $\mathbf{T}$ буде задавольняти характеристичному рівнянню. Таким чином

$$\Gamma^3 - \mathrm{I}_\mathrm{T}\Gamma^2 + \mathrm{II}_\mathrm{T}\Gamma - \mathrm{III}_\mathrm{T}\hat{\mathbf{I}} = 0,$$

де $\hat{\mathbf{I}}$ – одинична матриця.

Це співвідношення називається **співвідношенням Гамільтона-Келі**.

А.1.46. Тензорні поля. Тензоне поле ставить у відповідність кожній точці простору і кожному моменту часу $(\mathbf{x}, t)$ тензор $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, де радіус-вектор $\mathbf{x}$ змінюється в заданій області простору, а t – в заданому інтервалі часу. Тензорне полее називається неперервним (або диференційованим), якщо компоненти $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ є неперервними (або диференційованими) функціями $\mathbf{x}$ і t. Якщо компоненти тензора залежать тільки від $\mathbf{x}$, то тензорне поле називається **стаціонарним**.

В ортогональній декартовій системі координат, де радіус-вектор будь-якої точки має вигляд

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i,$$

поля тензорів різного рангу можна записати в індексних і символьних позначеннях, наприклад:

а) скалярне поле $\varphi = \varphi(x_i, t)$ або $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$;

б) векторне поле $v_i = v_i(\mathbf{x}, t)$ або $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$;

в) поле тензора другого рангу $T_{ij} = T_{ij}(\mathbf{x}, t)$ або $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$.

А.1.47. Диференціювання компонент тензора по кординаті x_i позначається диференціальним оператором $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ або скорочено в індексній формі запису ∂_i, що вказує на те, що це тензорний оператор першого рангу. У символічних позначеннях для запису цієї операції використовується символ ∇ (набла) або оператор Гамітьтона, який записується у вигляді

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \partial_i.$$

Частинне диференціювання по змінній x_i іноді зображають нижнім індексом після коми, як показано в наступних прикладах:

а) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}$, г) $\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}$, б) $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}$, д) $\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}$,

в) $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$, е) $\dfrac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,km}$.

Наведені приклади показують, що в процесі диференціювання оператор ∂_i призводить до тензору на один порядок вищого за вихідний, якщо i лишається вільним індексом (випадки «а» і «в»), і до тензору на один порядок нижчого за вихідний, якщо i становиться німим індексом підсумовування (випадок «б»).

Важливі диференціальні оператори, що використовуються в механіці континуума:

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \text{ або } \partial_i\varphi = \varphi_{,i},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \text{ або } \partial_i v_i = v_{i,i},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \text{ або } \varepsilon_{ijk}\partial_j v_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j},$$

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi \text{ або } \partial_{ii}\varphi = \varphi_{,ii}.$$

У наведених диференціальних операторах оператор ∇ у залежності від типу добутка може бути як градієнтом, так і дівергенцією і ротором.

А.1.48. Кривопінійні інтеграли. Теорема Стокса стверджує, що криволінійний інтеграл від функції $\mathbf{F}$ або F_i вздовж замкнутої кривої C, що стягується в точку, можна представити у вигляді інтеграла по будь-якій двосторонній поверхні S, границею якої слугує контур C, тобто

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dS \text{ – у векторній формі,}$$

$$\oint_C F_i dx_i = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} dS \text{ – в тензорній формі,}$$

де $\mathbf{n}$ або n_i – вектор нормалі до поверхні S (при визначенні $\mathbf{n}$ обхід контура C виконується за правилом правого гвинта); dS – елемент поверхні; ε_{ijk} – тензор Леві-Чивіти.

А.1.49. Теорема Гауса-Остроградського (теорема про дивергенцію) дає перетворення інтеграла по об’єму в інтеграл по поверхні. У звичайному формулюванні теорема стверджує, що для векторного поля $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS \text{ – у векторній формі,}$$

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S v_i n_i dS \text{ – в тензорній формі,}$$

де $\mathbf{n}$ або n_i – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, що обмежує об’єм V, всередині якого визначено векторне поле $\mathbf{v}$ або v_i.

Теорема Гауса-Остроградського в узагальненій формі для полів тензорів будь-якого рангу

$$\int\limits_V T_{ijk\cdots,p} dV = \int\limits_S T_{ijk\ldots} n_p dS .$$

А.2. Напружений стан

А.2.1. Поняття суцільного середовища. В багатьох дослідженнях поведінки матеріалів важливим є не поведінка їх окремих молекул, а матеріалу як цілого. В описі феноменів макроскопічних процесів не враховується молекулярна структура речовини, а припускається, що вона неперервно розподілена по усьому займаному їй об’єму і повністю заповнює цей об’єм. Така концепція **суцільності** речовини є основним постулатом механіки суцільного середовища – **континууму**. У межах обмежень, за яких гіпотеза суцільності справедлива, ця концепція забезпечує основу для єдиноподібного вивчення поведінки твердих, рідин і газів.

Прийняття гіпотези суцільності як основи для математичного описання поведінки матеріалів означає, що поля величин, таких, як напруження, переміщення та ін., виражаються кусково-неперервними функціями координат і часу. Тобто, це дає змогу під час дослідження руху деформованих середовищ використовувати добре вивчений та апробований апарат неперервних функцій, диференціальне і інтегральне числення.

А.2.2. Однорідність. Ізотропія. Густина. Однорідним називається середовище, що має однакові властивості у всіх точках, займаного ним об’єму.

Середовище (матеріал) буде **ізотропним** по відношенню до деякої властивості, якщо ця властивість в точці виявляється однаковою за всіма напрямками. Матеріал є **анізотропним** по відношенню до тих властивостей, які залежать від напрямку в будь-якій його точці.

Поняття **густини** вводиться для околу точки суцільного середовища як ліміт відношення маси до об’єму

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV},$$

де ΔM – маса елементу об’єму ΔV (м^3) континууму, кг.

Масова густина ρ є скалярною величиною.

А.2.3. Масові сили. Сили, які діють на всі елементи об’єму суцільного середовища, називаються **масовими силами**. Прикладом таких сил можуть слугувати сили гравітації та інерції. Ці сили позначаються через $\mathbf{b} = b_i$ (сила, що віднесена до одиниці маси) або $\mathbf{p} = p_i$ (сила, що віднесена до одиниці об'єму). Між собою вони зв'язані співвідношенням, що включає густину

$\rho b_i = p_i$ або $\rho\mathbf{b} = \mathbf{p}$.

А.2.4. Поверхневі сили. Сили, що діють на елемент поверхні середовища, граничної або внутрішньої, називаються **поверхневими силами**. Вони позначаються через $\mathbf{f} = f_i$ (сила, що віднесена до одиниці площі). Сили контактної взаємодії між тілами теж відносяться до типу поверхневих сил.

А.2.5. Принцип напруження Коші. Нехай на матеріальний континуум довільним об'ємом V діють поверхневі f_i і масові b_i сили. Матеріал всередині V, обмеженого поверхнею S, взаємодіє з матеріалом поза цим об'ємом. Візьмемо n_i у якості одиничного вектору зовнішньої нормалі в точці P до малої площадки ΔS поверхні S і позначимо через Δf_i результуючу силу, що діє через площадку ΔS на матеріал всередині V зі сторони зовнішнього середовища. Причому розподіл сили на ΔS є не обов'язково однорідним. У загальному випадку цей розподіл еквівалентний силі Δf_i і моменту сили ΔM_i, що прикладені в точці P. **Принцип напруження Коші** стверджує, що відношення $\Delta f_i / \Delta S$ прямує до певної границі df_i / dS, коли ΔS стягується в точку P, в той час як момент сили ΔM_i відносно точки P прямує до нуля.

А.2.6. Вектор напруження. Вектор напруження визначається як результуючий вектор df_i / dS

$$t_i^{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \text{ або } \mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{f}}{dS}.$$

Позначення $t_i^{(\mathbf{n})}$ або $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$ використовуються для того, щоб підкреслити той факт, що вектор напруження в даній точці P суцільного середовища, очевидно, залежить від орієнтації обраного елемента поверхні ΔS, яка задається одиничним вектором нормалі n_i або $\mathbf{n}$.

А.2.7. Напружений стан в точці. Принцип напруження Коші ставить у відповідність вектор напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$ для будь-якої довільної точки P суцільного середовища кожному одиничному вектору нормалі n_i, який визначає орієнтацію нескінченно малого елемента поверхні, що містить точку P. Сукупність усіх можливих пар таких векторів $t_i^{(\mathbf{n})}$ і n_i в точці P визначає **напружений стан** у цій точці. Для того, щоб повністю описати напружений в даній точці, немає необхідності вказувати всі пари можливих векторів напруження і нормалі. Це можна зробити, задаючи вектори напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках у точці P.

А.2.8. Тензор напруження. Кожний з трьох векторів напруження на площадках, паралельних координатним площинам, можна виразити через декартові компоненти:

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} = t_1^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_3 = t_j^{(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_j,$$

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_2)} = t_1^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_3 = t_j^{(\mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_j,$$

$$\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_3)} = t_1^{(\mathbf{e}_3)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(\mathbf{e}_3)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(\mathbf{e}_3)}\mathbf{e}_3 = t_j^{(\mathbf{e}_3)}\mathbf{e}_j.$$

Дев’ять компонент векторів напружень

$$t_j^{(\mathbf{e}_i)} \equiv \sigma_{ij}$$

є компонентами декартового тензора другого рангу, який називається **тензором напруження**.

Тензор напруження можна записати в символьній формі $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, так що його розгорнуте представлення (покомпонентне і матричне) будуть мати такий вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ або } \left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

А.2.9. Нормальні і дотичні напруження. Компоненти $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, тензора напруження $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, що відповідають перпендикулярним до вказаних площин силам, називаються **нормальними напруженнями**. Компоненти $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$, що діють у дотичних площинах, називаються **дотичними напруженнями** або **напруженнями зсуву**.

А.2.10. Зв'язок між тензором напруження і вектором напруження встановлюється співвідношенням вигляду

$$t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ij} n_j, \text{ або } \mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Це співвідношення можна також представити в матричній формі

$$\left[t_{1j}^{(\mathbf{n})}\right] = \left[n_{1k}\right]\left[\sigma_{kj}\right],$$

або в розгорнутому вигляді

$$\left[t_1^{(\mathbf{n})} \quad t_2^{(\mathbf{n})} \quad t_3^{(\mathbf{n})}\right] = \left[n_1 \quad n_2 \quad n_3\right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

А.2.11. Рівновага сил і моментів. Для рівноваги довільного об’єму V суцільного середовища під дією системи поверхневих сил $t_i^{(\mathbf{n})}$ і масових сил b_i (включаючи інерційні) треба, щоб результуючі сила і момент, які діють на цей об'єм, були рівними нулю. Підсумовування поверхневих і масових сил призводить до інтегрального співвідношення

$$\int_S t_i^{(\mathbf{n})} dS + \int_V \rho b_i dV = 0, \text{ або } \int_S \mathbf{t}^{(\mathbf{n})} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0.$$

Замінюючи тут $t_i^{(\mathbf{n})}$ на $\sigma_{ji} n_j$ і переходячи від інтегралу по поверхні до інтегралу по об'єму за допомогою теореми Гауса-Остроградського (А.1.49), приводимо рівняння до вигляду

$$\int_V \left(\sigma_{ji,j} + \rho b_i\right) dV = 0, \text{ або } \int_V \left(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b}\right) dV = 0.$$

Оскільки об'єм V довільний, підінтегральний вираз у попередній формулі повинен обернутися в нуль, так що можна записати рівняння

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0, \text{ або } \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0,$$

що називаються **рівняннями рівноваги**.

А.2.12. Симетрія тензора напруження. За умови відсутності розподілених моментів (поверхневих і масових пар) для рівноваги моментів відносно початку відліку потребується, щоб

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(\mathbf{n})} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0 \text{ або } \int_S \left(\mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\right) dS + \int_V \left(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}\right) dV = 0,$$

де x_j – радіус-вектор елемента поверхні або об'єму.

Використавши підстановку $t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ji} n_j$ і застосовуючи теорему Гауса-Остроградського і використовуючи рівняння рівноваги, після об'єднання інтегралів в останньому виразі, приходимо до рівняння

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0, \text{ або } \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v dV = 0.$$

Завдяки довільності об'єму V із $\int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v dV = 0$ витікає, що

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}}_v = 0.$$

Остання формула містить у собі рівності $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ або

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji},$$

що свідчить про те, що **тензор напружень симетричний**.

Враховучи симетрію σ_{ij}, рівняння рівноваги можна переписати у вигляді

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0.$$

А.2.13. Закони перетворення тензорів напруження. Згідно з закони перетворення декартових тензорів першого рангу (А.1.32), компоненти вектору напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$, віднесені до осей системи координат без штрихів, зв'язані з компонентами $t_i'^{(\mathbf{n})}$ в системі координат зі штрихами формулою

$$t_i'^{(\mathbf{n})} = c_{ij} t_i^{(\mathbf{n})} \text{ або } \mathbf{t}'^{(\mathbf{n})} = \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}.$$

Подібним чином за правилом перетворення (А.1.32) для декартових тензорів другого рангу компоненти тензора напружень у двох системах пов'язані таким співвідношенням

$$\sigma'_{ij} = c_{ip} c_{jq} \sigma_{pq} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{c}}_c .$$

В матричній формі перетворення вектору напруження записується у вигляді

$$\left[t_{i1}'^{(\mathbf{n})}\right] = \left[c_{ij}\right]\left[t_{i1}^{(\mathbf{n})}\right],$$

а перетворення тензора напружень – у вигляді

$$\left[\sigma'_{ij}\right] = \left[c_{ip}\right]\left[\sigma_{pq}\right]\left[c_{qj}\right].$$

А.2.14. Поверхні напруження Коші. Нехай в точці P суцільного середовища тензор напружень має компоненти σ_{ij}, що віднесені до напрямків, паралельним локальним декартовим осям $P\zeta_1\zeta_2\zeta_3$. Рівняння

$$\sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j = \pm k^2 \quad (k \text{ – стала})$$

представляє геометрично подібні поверхні другого порядку (квадрики), що мають спільний центр у точці P. Вибір знаку плюс або мінус забезпечує те, що поверхні будуть дійсними.

Розглянемо вектор напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$ на площадці з одиничною нормаллю n_i. Радіус-вектор $\mathbf{r}$, що має напрям $\mathbf{n}$ до довільної точки поверхні, має компоненти $\zeta_i = |\mathbf{r}| n_i = r n_i$. У точці P нормальна складова $\sigma_N n_i$ вектору напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$ має величину

$$\sigma_N = t_i^{(\mathbf{n})} n_i = \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j .$$

Геометричне місце точок $\sigma_N r^2 = \mathrm{const} = \pm k^2$, тобто поверхня

$$\sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_N r^2 = \pm k^2$$

називається **поверхнею напружень Коші** (або **квадрикою Коші**). Із цього визначення витікає, що величина σ_N є нормальною компонентою напруження на площадці dS, перпендикулярна радіусу-вектору $\mathbf{r}$ в точці P, і обернено пропорційна квадрату відстані вздовж $\mathbf{r}$ від точки P до поверхні напружень Коші, тобто $\sigma_N = \pm k^2 / r^2$. Крім того, можна показати, що вектор напруження

$t_i^{(\mathbf{n})}$, що діє на такій площадці dS, паралельний нормалі до площини, яка є дотичною до поверхні напружень Коші в точці, радіус-вектор якої є $\mathbf{r}$.

А.2.16. Головні напруження. Інваріанти тензора напружень. Еліпсоїд напружень. Для головного напрямку має місце рівність

$$t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma n_j \text{ або } \mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \sigma \mathbf{n},$$

де σ – величина вектору напруження, яка називається **головним напруженням**.

Використовуючи тотожності $n_i = \delta_{ij} n_j$ і $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, приходимо до рівняння

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma) n_j = 0 \text{ або } (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{I}\sigma) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Три рівняння містять чотири невідомих, а саме три направляючих косинуси n_i і величину головного напруження σ.

Для того щоб система рівнянь мала, окрім $n_i = 0$, ще і нетривіальний розв'язок, її детермінант із коефіцієнтів $|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma|$ повинен дорівнювати нулю, тобто

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma| = 0,$$

яке після розкриття приводить до кубічного рівняння вигляду

$$\sigma^3 - \mathrm{I}_\sigma \sigma^2 + \mathrm{II}_\sigma \sigma - \mathrm{III}_\sigma = 0,$$

де $\mathrm{I}_\sigma = \sigma_{ii} = \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$, $\mathrm{II}_\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij})$, $\mathrm{III}_\sigma = |\sigma_{ij}| = \det(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ називаються відповідно **першим, другим і третім інваріантами тензора напруження**.

Три корені кубічного рівняння $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}$ є значеннями трьох головних напружень. Кожному головному напруженню $\sigma_{(k)}$ відповідає головна вісь, для якої направляючі косинуси $n_i^{(k)}$ знаходяться із розв'язків рівнянь

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij}) n_j^{(k)} = 0, \text{ або } (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_{(k)}\mathbf{I}) \mathbf{n}^{(k)} = 0 \quad (k = 1,2,3).$$

Для позначення головних напружень також використовуються римські цифри для того, щоб показати, що головні напруження упорядковані, тобто $\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}} > \sigma_{\mathrm{III}}$.

У просторі головних напружень, де осі координат співпадають з головними осями тензора напруження, а одиницями вимірювання координат слугують величини $(t_1^{(\mathbf{n})}, t_2^{(\mathbf{n})}, t_3^{(\mathbf{n})})$, довільний вектор напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$ має компоненти

$$t_1^{(\mathbf{n})} = \sigma_{(1)} n_1,\ t_2^{(\mathbf{n})} = \sigma_{(2)} n_2,\ t_3^{(\mathbf{n})} = \sigma_{(3)} n_3.$$

Але оскільки $(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$ для кожного одиничного вектору n_i, то вектор $t_i^{(\mathbf{n})}$ у просторі головних напружень задовольняє рівнянню

$$\frac{\left(t_1^{(\mathbf{n})}\right)^2}{\left(\sigma_{(1)}\right)^2} + \frac{\left(t_2^{(\mathbf{n})}\right)^2}{\left(\sigma_{(2)}\right)^2} + \frac{\left(t_3^{(\mathbf{n})}\right)^2}{\left(\sigma_{(3)}\right)^2} = 1,$$

яке і називається **рівнянням еліпсоїда**, відомого під назвою **еліпсоїд напруження Ламе**.

А.2.17. Максимальне і мінімальне дотичне напруження. Розкладемо вектор напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$ на ортогональні компоненти – нормальну σ_N і дотичну σ_τ до елемента поверхні dS, на якому він діє. Величину нормальної компоненти можна визначити по формулі $\sigma_N = t_i^{(\mathbf{n})} n_i$, а квадрат величини дотичної компоненти σ_τ (напруження зсуву σ_S) отримується як різниця

$$\sigma_\tau^2 = \sigma_S^2 = t_i^{(\mathbf{n})} t_i^{(\mathbf{n})} - \sigma_N^2 .$$

Квадрат величини дотичного напруження як функції направляючих косинусів n_i і головних напружень можна представити у вигляді

$$\sigma_S^2 = \sigma_{\mathrm{I}}^2 n_1^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 n_2^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2 n_3^2 - \left(\sigma_{\mathrm{I}} n_1^2 + \sigma_{\mathrm{II}} n_2^2 + \sigma_{\mathrm{III}} n_3^2\right)^2 .$$

Максимальне і **мінімальне** значення $\sigma_\tau = \sigma_S$ можна отримати методом множників Лагранжа. Процедура полягає в побудові функції

$$F = \sigma_S^2 - \lambda n_i n_i ,$$

де λ – скаляр, який називається множником Лагранжа.

Останнє рівняння представляє функцію направляючих косинусів n_i, так що умова екстремуму (максимуму або мінімуму) величини F має вигляд $\partial F / \partial n_i = 0$.

Розв’язуючи ці рівняння знаходимо, що мінімальні дотичні напруження дорівнюють $\sigma_S = 0$, а максимальні

$$n_1 = 0,\ \ n_2 = \pm 1/\sqrt{2},\ \ n_3 = \pm 1/\sqrt{2},\ \ \sigma_S = (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})/2;$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2},\ \ n_2 = 0,\ \ n_3 = \pm 1/\sqrt{2},\ \ \sigma_S = (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})/2;$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2},\ \ n_2 = \pm 1/\sqrt{2},\ \ n_3 = 0,\ \ \sigma_S = (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})/2.$$

Таким чином, із отриманих даних витікає, що максимальна компонента дотичного напруження діє в площині, яка ділить навпіл прямий кут між напрямками максимального і мінімального головних напружень.

А.2.18. Круги Мора для напруження. Побудова кругів Мора на площині напружень, де вісь σ_N є віссю абсцис, а вісь σ_S – віссю ординат (рис. А.2), базується на таких рівняннях

$$(n_1)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{III}}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})}, \tag{A.1}$$

$$(n_2)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{I}}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{I}})}, \tag{A.2}$$

$$(n_3)^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{II}}) + (\sigma_S)^2}{(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{II}})}. \tag{A.3}$$

Оскільки із $\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}} > \sigma_{\mathrm{III}}$ витікає, що $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}} > 0$ і $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} > 0$, а величина $(n_1)^2$ невід'ємна, то чисельник у правій частині (А.1) задовольняє співвідношенню

$$(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{III}}) + (\sigma_S)^2 \geq 0,$$

яке в площині напружень (σ_N, σ_S) представляє точки, що лежать поза кругом

$$[\sigma_N - (\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})/2]^2$$

і на його границі. На рис. А.2 цей круг позначено літерою C_1.

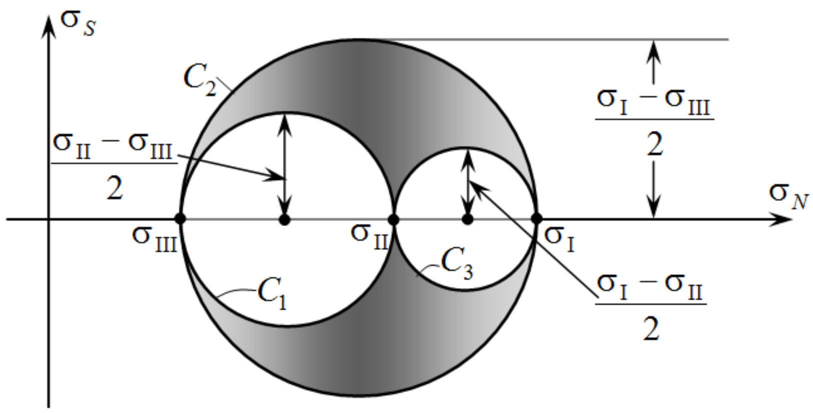


Рис. А.2. Круги Мора

Точно так само із $\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}} > \sigma_{\mathrm{III}}$ витікає, що $\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}} > 0$ і $\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{I}} < 0$. Крім того, величина $(n_2)^2$ невід'ємна. Тоді в формулі (А.2) чисельник у правій частині задовольняє нерівності

$$(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{I}}) + (\sigma_S)^2 \leq 0,$$

яка представляє точки всередині круга

$$[\sigma_N - (\sigma_{\mathrm{III}} + \sigma_{\mathrm{I}})/2]^2 + (\sigma_S)^2 = [(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})/2]^2,$$

позначеного на рис. А.2 літерою C_2, і на його границі.

На кінець, із $\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}} > \sigma_{\mathrm{III}}$ видно, що $\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}} < 0$ і $\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{II}} < 0$, а величина $(n_3)^2$ невід'ємна, тому із формули (А.3) витікає нерівність

$$(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{II}}) + (\sigma_S)^2 \geq 0,$$

яка представляє точки поза кругом

$$\left[\sigma_N - (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}})/2\right]^2 + (\sigma_S)^2 = \left[(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})/2\right]^2,$$

позначеного на рис. А.2 літерою C_3, і на його границі.

Кожна «точка напруження» (пара величин σ_N і σ_S) на площині напружень (σ_N, σ_S) відповідає вектору напруження $t_i^{(\mathbf{n})}$, а напружений стан у точці P, описаний формулами (2.58), можна представити на рис. А.2 затіненою областю, яка обмежена кругами Мора для напруження. Ця побудова підтверджує, що максимальне напруження зсуву дорівнює $(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})/2$, як було встановлено в п. А.2.17.

Зв'язок між діаграмою напруження Мора і фізичним напруженим станом може бути встановлений за допомогою рис. А.3, на якому зображено перший октант сфери з центром у точці P суцільного середовища.

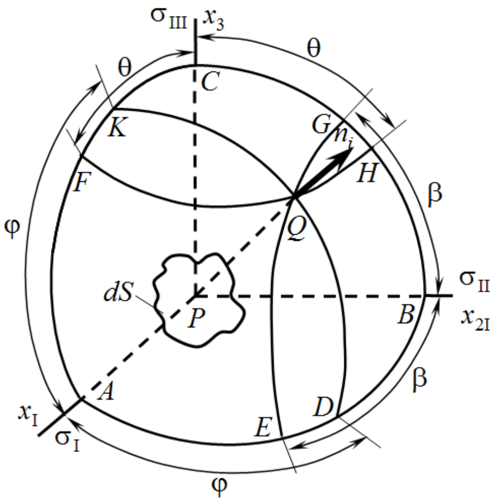


Рис. А.3. Зв'язок між діаграмою напруження Мора і фізичним напруженим станом

А.2.19. Плоский напружений стан. Коли одне і тільки одне із головних напружень дорівнює нулю, говорять, що існує **плоский напружений стан**. Якщо головні напруження неупорядковані і в якості нульового головного напруження взято напрямок x_3, то плоский напружений стан має тільки компоненти в площинах, паралельних площинам x_1x_2. За умови довільного вибору орієнтації ортогональних осей x_1 і x_2 матриця напружень маж вигляд

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

А.2.20. Девіатор і кульовий тензор напруження. Тензор напруження σ_{ij} можна розкласти на два тензори, один з яких називається **кульовим тензором** або **тензором гідростатичних напружень** і має вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_M = \sigma_M \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix},$$

де $\sigma_M = -p = \dfrac{\sigma_{kk}}{3}$ – середнє значення нормального напруження, Па.

Другий тензор, на який можна розкласти σ_{ij}, називається **девіатором напруження** і має вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Розглянуте розкладання тензора напруження σ_{ij} записується формулами

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} + s_{ij} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_M \mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_D.$$

Головні осі девіатора s_{ij} співпадають з головними осями тензора σ_{ij}. Таким чином, головні значення девіатора напружень дорівнює

$$s_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_M .$$

Характеристичне рівняння для девіатора напруження так само, як і характеристичне рівняння (див. А.2.16) для тензора напруження, представляє собою кубічне рівняння вигляду

$$s^3 + \mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D} s - \mathrm{III}_{\hat{\sigma}_D} = 0 \text{ або } s^3 + \left(s_\mathrm{I} s_\mathrm{II} + s_\mathrm{II} s_\mathrm{III} + s_\mathrm{III} s_\mathrm{I}\right)s - s_\mathrm{I} s_\mathrm{II} s_\mathrm{III} = 0 .$$

Легко показати, що перший інваріант девіатора напружень тотожно дорівнює нулю, що і пояснює його відсутність у попередньому рівнянні.

А.3. Деформований стан

А.3.1. Частинки і точки. Термін «точка» використовується виключно для позначення місця в нерухомому просторі. Термін «частинка» означає малий елемент об'єму (або **матеріальну точку**) суцільного середовища. Тобто, **точка** є місце в просторі, а **частинка** – мала частина матеріального континууму.

А.3.2. Конфігурація суцільного середовища. Якщо в певній системі координат вказано відповідність частинок деякого об'єму суцільного середовища і точок простору, які вони займають в момент часу t, то говорять, що в цей момент часу задана **конфігурація суцільного середовища**.

А.3.3. Деформація і течія. Термін **деформація** відноситься до зміни форми континууму від деякої початкової (недеформованої) конфігурації до поточної (деформованої конфігурації). Під час вивчення деформації враховується тільки початкова і кінцева конфігурації. Проміжному стану, або послідовності конфігурацій, за якими відбувається деформація, увага не приділяється.

У протилежність цьому термін **течія** використовується для позначення неперервного стану руху континууму. Насправді, вивчення історії конфігурацій є невід'ємною частиною дослідження течії, для якої задано змінне у часі поле швидкості.

А.3.4. Радіус-вектор. У початковому стані характерна частинка середовища займає точку P_0 простору і має **радіус-вектор**

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{i}_1 + X_2\mathbf{i}_2 + X_3\mathbf{i}_3 = X_K\mathbf{i}_K$$

відносно ортогональних декартових координат $OX_1X_2X_3$.

Тут у якості індексів підсумовування використані великі літери, і вони застосовуються для того, щоб особливо підкреслити зв'язок деяких виразів з системою координат простору початкового стану (X_1, X_2, X_3), які називаються **матеріальними координатами**.

У деформованому стані частинка, яка спочатку була в точці P_0 займе положення P і буде мати відносно ортогональних декартових координат $ox_1x_2x_3$ **радіус-вектор**

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_i\mathbf{e}_i.$$

Тут у якості нижніх індексів використані малі букви, щоб вказати на зв'язок з координатами (x_1, x_2, x_3), які дають поточне положення частинки і називаються **просторовими координатами**.

А.3.5. Вектор переміщення. Вектор $\mathbf{u}$, що з'єднує точки P_0 і P (відповідно початкове і кінцеве положення частинки), називається **вектором переміщення**, який можна записати у вигляді

$$\mathbf{u} = u_k\mathbf{e}_k \text{ або } \mathbf{U} = U_K\mathbf{i}_K,$$

де компоненти U_K і u_k зв'язані через направляючі косинуси c_{kK}. Згідно до закону перетворення декартових тензорів (див. А.1.32), одиничний вектор $\mathbf{e}_k$ виражається через матеріальні базисні вектори $\mathbf{i}_K$ таким чином

$$\mathbf{e}_k = c_{kK}\mathbf{i}_K.$$

Після підстановки в рівняння для переміщення, отримуємо

$$\mathbf{u} = u_k(c_{kK}\mathbf{i}_K) = U_K\mathbf{i}_K = \mathbf{U},$$

звідки

$$U_K = c_{kK}u_k.$$

Якщо вектор $\mathbf{b}$ слугує для визначення положення початку координат o відносно точки O. Тоді очевидно, що вектор переміщення

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{x} - \mathbf{X}.$$

В механіці суцільного середовища є можливість сумістити системи координат $OX_1X_2X_3$ і $ox_1x_2x_3$. Тоді $\mathbf{b} \equiv 0$, а вираз для $\mathbf{u}$ приймає вигляд

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}.$$

В декартових компонентах ця рівність у загальному випадку виглядає так

$$u_k = x_k - c_{kK} X_K.$$

Однак для суміщених осей тріедри одиничних базисних векторів обох систем однакові, а це веде до того, що направляючі косинуси c_{kK} перетворюється в дельти Кронекера. Внаслідок цього останній вираз спрощується і зводиться до вигляду

$$u_k = x_k - X_k.$$

А.3.6. Лагранжевий і ейлерів опис руху. Якщо в деякому об'ємі суцільного середовища відбувається деформація (або течія), то його частинки рухаються вздовж різних шляхів у просторі. Такий рух можна описати рівняннями вигляду

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t) \text{ або } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tag{A.4}$$

які дають положення частинки x_i в її поточний момент, яка займала в момент $t = 0$ точку (X_1, X_3, X_3). Таким чином, (А.4) можна тлумачити як встановлення відповідності між точками початкової конфігурації і їх положенням в поточному стані. Припускається, що така відповідність взаємно однозначна і неперервна з неперервними частинними похідними будь-якого порядку. Такий спосіб описання руху або деформації, виражений формулою (А.4), називається **лагранжевим**.

З іншого боку, якщо рух або деформація задаються рівнянням вигляду

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t) \text{ або } \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \tag{A.5}$$

у яких незалежними змінними є координати x_i і час t, спосіб описання називається **ейлеревим**. Цей опис можна розглядати як такий, який дає можливість прослідкувати до початкового положення частинки, яка зараз займає положення (x_1, x_2, x_3). Якщо (А.5) дає неперервну взаємно однозначну відповідність з частинними похідними, як це було припущено для (А.4), то ці дві відповідності представлені єдиною парою взаємно обернених функцій. Необхідною і достатньою умовою існування оберненої функції є відмінність від нуля значення якобіана

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|.$$

Наприклад, нехай лагражевий опис руху представлено рівняннями

$$x_1 = X_1 + X_2 \left(e^t - 1\right),$$
$$x_2 = X_1 \left(e^{-t} - 1\right) + X_2,$$
$$x_3 = X_3$$

має взаємно обернене ейлереве формулювання

$$X_1 = \frac{-x_1 + x_2\left(e^t - 1\right)}{1 - e^t - e^{-t}},$$
$$X_2 = \frac{x_1\left(e^{-t} - 1\right) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}},$$
$$X_3 = x_3.$$

А.3.7. Градієнти деформації. Градієнти переміщення. Частинне диференціювання (А.4) по X_j призводить до тензору $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, який називається **матеріальним градієнтом деформації**. У символічних позначеннях $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ представляється тензором другого рангу

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{x}\vec{\nabla} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3}\mathbf{e}_3,$$

де $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial X_j}\mathbf{i}_i = \frac{\partial}{\partial X_j}\mathbf{e}_i$ – матеріальні і просторові осі припускаються суміщеними.

Частинне диференціювання (А.5) по x_j призводить до тензору $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, який називається **просторовим градієнтом деформації**. Цей тензор є діадиком вигляду

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{X}\vec{\nabla} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3}\mathbf{e}_3.$$

Матеріальний і просторовий тензори деформації пов’язані між собою правилом частинного диференціювання

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik}.$$

Частинне диференціювання вектору переміщення u_i по координатах призводить або до **матеріального градієнту переміщення** $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$, або до **просторового градієнту переміщення** $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. За допомогою формули $u_k = x_k - X_k$, яка представляє u_i через різницю координат, ці тензори виражаються через градієнти деформації лагранжевих або матеріальних змінних

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \text{ або } \hat{\mathbf{J}} = \mathbf{u}\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}$$

і в елеревих або просторових змінних

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \text{ або } \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{u}\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{H}}.$$

А.3.8. Тензори деформацій. Тензори скінченних деформацій. На рис. А.4 початкова (недеформована) і кінцева (деформована) конфігурації віднесені до суміщених ортогональних декартових вісей координат $OX_1X_2X_3$ і $ox_1x_2x_3$. Сусідні частинки, що знаходидись у точках P_0 і Q_0 до деформації, переміщуються в точки P і Q деформованої конфігурації.

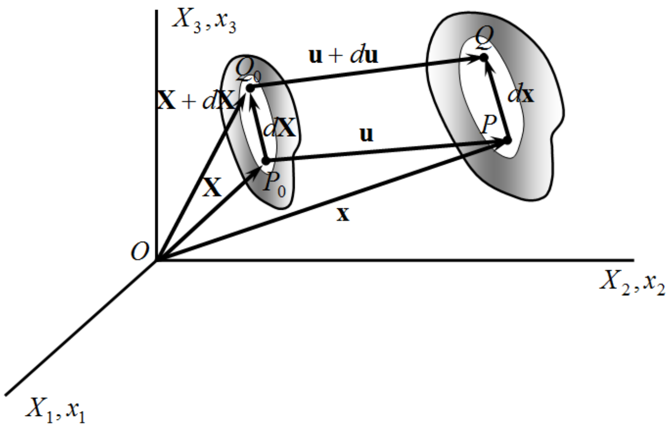


Рис. А.4. До визначення тензорів деформації

Квадратом нескінченно малої відстані між P_0 і Q_0 є

$$(dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j . \tag{А.6}$$

Відповідно до (А. 5), диференціал відстані dX_i, очевидно, дорівнює

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \text{ або } d\mathbf{X} = \hat{\mathbf{H}} d\mathbf{x},$$

так що квадрат довжини $(dX)^2$ можна написати у вигляді

$$\left(dX\right)^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}dx_i dx_j = C_{ij}dx_i dx_j \text{, або } \left(dX\right)^2 = d\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot d\mathbf{x}, \qquad \text{(A.7)}$$

де тензор другого рангу

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \text{ або } \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{H}}_c \cdot \hat{\mathbf{H}},$$

називається **тензором деформацій Коші**.

У деформованій конфігурації квадрат нескінченно малої відстані між P і Q дорівнює

$$\left(dx\right)^2 = d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i = \delta_{ij}dx_i dx_j. \qquad \text{(A.8)}$$

Згідно з (А.4) диференціал відстані має вигляд

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}dX_j \text{ або } d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}}\cdot d\mathbf{X},$$

оскільки квадрат довжини $\left(dx\right)^2$ може бути записаний таким чином

$$\left(dx\right)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}dX_i dX_j = G_{ij}dX_i dX_j \text{ або } \left(dx\right)^2 = d\mathbf{X}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot d\mathbf{X}, \text{(A.9)}$$

де тензор другого рангу

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \text{ або } \hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \hat{\mathbf{F}},$$

називається **тензором деформацій Гріна**.

Різниця $\left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2$ для двох сусідніх частинок суцільного середовища використовується як **міра деформації** деякого околу цих частинок між початковим і кінцевим станом. Якщо ці різниця тотожно рівна нулю для всіх сусідніх частинок, то говорять, що має місце **абсолютно жорстке переміщення** (переміщення суцільного середовища як абсолютно жорсткого тіла). Використовуючи (А.9) і (А.6), цю різницю можна представити у вигляді

$$\left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)dX_i dX_j = 2L_{ij}dX_i dX_j,$$

$$\text{або } \left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2 = d\mathbf{X}\cdot\left(\hat{\mathbf{F}}_c\cdot\hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}\right)\cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}\cdot 2\hat{\mathbf{L}}_G\cdot d\mathbf{X}, \qquad \text{(A.10)}$$

де тензор другого рангу

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{L}}_G = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{F}}_c\cdot\hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{I}}\right), \qquad \text{(A.11)}$$

називається **лагранжевим тензором скінченних деформацій** або **тензором скінченних деформацій Гріна**.

Використовуючи (А.8) і (А.7), різницю $\left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2$ можна представити у вигляді

$$\left(dx\right)^2-\left(dX\right)^2=\left(\delta_{ij}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)dx_i dx_j=2E_{ij}dx_i dx_j,$$

або $\left(dx\right)^2-\left(dX\right)^2=d\mathbf{x}\cdot\left(\hat{\mathbf{I}}-\hat{\mathbf{H}}_c\cdot\hat{\mathbf{H}}\right)\cdot d\mathbf{x}=d\mathbf{x}\cdot 2\hat{\mathbf{E}}_A\cdot d\mathbf{x},$ (A.12)

де тензор другого рангу

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{E}}_A=\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{I}}-\hat{\mathbf{H}}_c\cdot\hat{\mathbf{H}}\right), \quad (A.13)$$

називається **ейлеревим тензором скінченних деформацій** або **тензором скінченних деформацій Альмансі**.

Особливо корисна така форма лагранжевого і ейлеревого тензорів скінченних деформацій, коли ці тензори представлені у вигляді функцій градієнта переміщення $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}=\hat{\mathbf{J}}$

$$L_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{L}}_G=\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}}+\hat{\mathbf{J}}_c+\hat{\mathbf{J}}_c\cdot\hat{\mathbf{J}}\right). \quad (A.14)$$

Так само можна перетворити ейлерів тензор з використанням $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}=\hat{\mathbf{K}}$

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{E}}_A=\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{K}}+\hat{\mathbf{K}}_c-\hat{\mathbf{K}}_c\cdot\hat{\mathbf{K}}\right). \quad (A.15)$$

А.3.9. Теорія малих деформацій у механіці суцільних середовищ відповідно базується на припущенні малості градієнтів переміщення порівняно з одиницею. Основною мірою деформації слугує різниця $\left(dx\right)^2-\left(dX\right)^2$, яку можна виразити через градієнти переміщення, підставляючи (А.14) і (А.15) в (А.10) і (А.12), відповідно. Якщо градієнти переміщення малі величини, то тензори деформацій в (А.10) і (А.12) зводяться до тензорів нескінченно малих деформацій, а результуючі співвідношення представляють малі деформації.

А.3.10. Тензори нескінченно малих деформацій. Якщо компоненти градієнта переміщення $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ є малими порівняно з одиницею, то і їх добутки, що є нелінійними членами в (А.14), є нехтовно малими величинами і ними можна знехтувати. В результаті отримуємо лінійний **лагранжевий тензор нескінченно малих деформацій**

$$l_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{L}}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla}+\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)=\frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{J}}+\hat{\mathbf{J}}_c\right).$$

Аналогічно, якщо $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} << 1$, то нелінійним членом $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ в (А.15) також можна знехтувати і отримати лінійний **ейлерів тензор нескінченно малих деформацій**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}_c\right).$$

За умови малих переміщень та їх градієнтів різниця між матеріальними та просторовими координатами частинки середовища стає нехтовно малою. Компоненти матеріального градієнта $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ і компоненти просторового градієнта $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ стають майже однаковими, тому ейлерів та лагранжевий тензори нескінченно малих деформацій приймаються рівними між собою. Таким чином можна записати такі рівності

$$l_{ij} = \varepsilon_{ij} \text{ або } \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{E}}.$$

А.3.11. Відносне переміщення. На рис. А.5 переміщення двох сусідніх частинок зображені векторами $u_i^{(P_0)}$ і $u_i^{(Q_0)}$. Вектор

$$du_i = u_i^{(Q_0)} - u_i^{(P_0)} \text{ або } d\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(Q_0)} - \mathbf{u}^{(P_0)},$$

називається **вектором відносного переміщення** частинки, що розташована спочатку у точці Q_0, відносно частинки, яка займала положення P_0. Припустимо, що для поля переміщення виконані умови неперервності: тоді $u_i^{(Q_0)}$ можна розкласти в ряд Тейлора в околі точки P_0. Нехтуючи в цьому розкладанні членами більш високого порядку, для вектору відносного переміщення отримуємо

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)_{P_0} dX_j \text{ або } d\mathbf{u} = \left(\mathbf{u}\vec{\nabla}\right)_{P_0} \cdot d\mathbf{X}.$$

Ці похідні є компонентами матеріального градієнту переміщення і представляють **лагранжеву форму** вектора відносного переміщення.
Корисно також визначити **вектор відносного переміщення**, що віднесений до одиниці довжини відрізка, що розглядається, $\frac{du_i}{dX}$, де dX – модуль нескінченно малої відстані вектору відстані dX_i. Відповідно до цього, якщо ν_i – одиничний вектор напрямку dX_i, так що $dX_i = \nu_i dX$, то

$$\frac{du_i}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\nu_j \text{ або } \frac{d\mathbf{u}}{dX} = \mathbf{u}\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nu} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\nu},$$

де $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{u}\vec{\nabla}$.

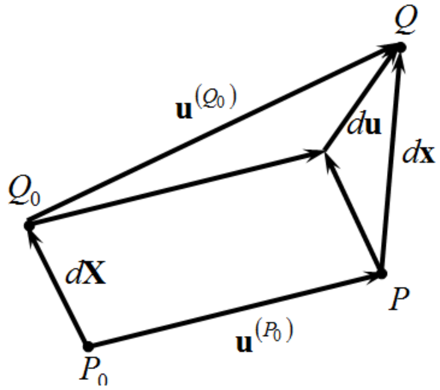


Рис. А.5. До визначення вектору відносного переміщення

У разі **ейлеревого підходу** маємо для **вектору відносного переміщення**

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \text{ або } d\mathbf{u} = \mathbf{u}\vec{\nabla} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x},$$

а для **вектору відносного переміщення**, що відноситься до одиниці довжини

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mu_j \text{ або } \frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{u}\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} = \hat{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

А.3.12. Тензор лінійного повороту. Вектор повороту. Оскільки матеріальний градієнт переміщення $\frac{du_i}{dX_j}$ можна єдиним чином розкласти на симетричну і антисиметричну частини, то вектор відносного переміщення du_i можна записати у вигляді

$$du_i = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)\right] dX_j,$$

$$\text{або } d\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{u}\right)\right] \cdot d\mathbf{X}.$$

Перший член у квадратних дужках попередньої формули є лагранжевий тензор лінійної деформації l_{ij}. Другий член називається **лагранжевим тензором лінійного повороту** і позначається

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{W}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{u}\right).$$

Якщо тензор деформації l_{ij} тотожно рівний нулю в околі точки P_0, то відносне переміщення околу цієї точки буде нескінченно малим поворотом твердого тіла. Цей нескінченно малий поворот можна представити **лагранжевим вектором лінійного повороту**

$w_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{kj}$ або $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\mathbf{u}$.

Тоді відповідне відносне переміщення через w_i запишеться таким чином $du_i = \varepsilon_{ijk}w_j dX_k$ або $d\mathbf{u} = \mathbf{w}\times d\mathbf{X}$.

Розкладання ейлеревого градієнта переміщення $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ дає

$$du_i = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]dx_j,$$

або $d\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{u}\right)\right]\cdot d\mathbf{x}$.

Перший член у квадратних дужках є ейлеревим тензором лінійної деформації ε_{ij}. Другий член є **ейлерів тензор лінійного повороту**

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{u}\right).$$

Остання формула визначає **ейлерів вектор лінійного повороту**

$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{kj}$ або $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\mathbf{u}$.

Тоді відносне переміщення виражається через ω_i наступним чином

$du_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j dx_k$ або $d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{x}$.

А.3.13. Геометричний зміст тензорів лінійних деформацій. В теорії малих деформацій лагранжевий тензор скінченних деформацій L_{ij} у формулі (А.10) можна замінити лагранжевим тензором лінійних деформацій l_{ij}, і тоді ця формула прийме вигляд

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx - dX) = 2l_{ij}dX_i dX_j,$$

або $(dx)^2 - (dX)^2 = d\mathbf{X}\cdot 2\hat{\mathbf{L}}\cdot d\mathbf{X}$.

Для малих деформацій $dx \approx dX$, тому останню рівність можна представити так

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{ij}\frac{dX_i}{dX}\frac{dX_j}{dX} = l_{ij}\nu_i\nu_j \text{ або } \frac{dx - dX}{dX} = \boldsymbol{\nu}\cdot\hat{\mathbf{L}}\cdot\boldsymbol{\nu}. \quad (А.16)$$

Ліва частина (А.16) характеризує зміну довжини нескінченно малого елементу, що відноситься до одиниці початкової довжини, і називається коефіцієнтом відносного подовження лінійного елементу, який у початковому стані мав направляючі косинуси $\frac{dX_i}{dX}$.

Застосуємо формулу (А.16) до нескінченно малого лінійного елементу P_0Q_0, що розташований відносно локальних осей у точці P_0 і отримаємо коефіцієнт відносного подовження цього елементу. Оскільки в цьому випадку P_0Q_0 розташований вздовж осі X_2,

$$\frac{dX_1}{dX} = \frac{dX_3}{dX} = 0, \ \frac{dX_2}{dX} = 1,$$

і тому відповідно до (А.16)

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2}.$$

Отже, виявляється, що коефіцієнт відносного подовження елементу, який на початку був розташований вздовж напрямку X_2, дорівнює компоненті l_{22}. Точно так само для елементів, що у початковий момент лежали вздовж осей X_1 і X_3, по формулі (А.16) коефіцієнти відносного подовження дорівнюють l_{11} і l_{33}, відповідно. Таким чином, діагональні члени тензора лінійних деформацій взагалі представляють собою коефіцієнти відносного подовження вздовж осей координат.

Фізична інтерпретація недіагональних членів l_{ij} базується на розгляді лінійних елементів, які спочатку лежать вздовж двох осей координат. Лінійні елементи P_0Q_0 і P_0M_0, які спочатку знаходилися на осях X_2 і X_3, після деформації перетворюються відповідно у лінійні елементи PQ і PM в локальній системі координат з осями, паралельними вихідним, і початком у точці P. Спочатку прямий кут між лінійними елементами перетворюється на кут θ.

Окрім того, якщо розглянути зміну прямого кута між цими елементами $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ і враховуючи те, що в лінійній теорії кут γ_{23} є малою величиною, то можна записати

$$\gamma_{23} \approx \sin\gamma_{23} = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta = 2l_{23}.$$

Отже, недіагональні члени тензора лінійних деформацій дорівнюють половині величини зміни кута між двома спочатку ортогональними лінійними елементами. Такі компоненти деформації деформаціями зсуву, а із-за множника 2 в останній формулі, ці компоненти тензора деформації дорівнюють половині звичайних «технічних» деформацій зсуву.

Міркування, що були проведені для виявлення фізичного змісту компонент l_{ij}, в основному аналогічні тим, які можуть бути застосовані і для ейлерева тензора лінійних деформацій ε_{ij}. Основна відмінність полягає у виборі лінійних елементів, які за умови ейлеревого підходу повинні бути направлені вздовж осей координат після факту деформації. Діагональні члени є коефіцієнтами відносного подовження, а недіагональні – деформаціями зсуву. Для деформацій, коли $\varepsilon_{ij} = l_{ij}$, різниці між ейлеревими і лагранжевими системами відліку не існує.

А.3.14. Коефіцієнт довжини. Інтерпретація скінченних деформацій. Важливою мірою деформації нескінченно малого лінійного елементу є відношення dx/dX, відоме під назвою **коефіцієнт довжини**. Цю величину можна визначити як для точки P_0 в недеформованому стані, та і для точки P в деформованому стані. Так, згідно (А.9) квадрат коефіцієнта довжини в точці P_0 для лінійного елемента, взятого вздовж одиничного вектору $\mathbf{m} = d\mathbf{X}/dX$, дається формулою

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)^2_{P_0} = \Lambda^2_{(\mathbf{m})} = G_{ij}\frac{dX_i}{dX}\frac{dX_j}{dX} \text{ або } \Lambda^2_{(\mathbf{m})} = \mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{m}. \qquad (А.17)$$

Аналогічно, згідно (А.7) обернена велична квадрата коефіцієнта довжини для лінійного елемента в точці P, взятого вздовж одиничного вектору $\mathbf{n} = d\mathbf{x}/dx$, дається формулою

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2_{P_0} = \frac{1}{\lambda^2_{(\mathbf{n})}} = C_{ij}\frac{dx_i}{dx}\frac{dx_j}{dx} \text{ або } \frac{1}{\lambda^2_{(\mathbf{n})}} = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{n}. \qquad (А.18)$$

Для елемента, який спочатку розташований вздовж осі X_2, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_2$, і тому $dX_1/dX = dX_3/dX = 0,\ dX_2/dX = 1$, так що (А.17) набуває вигляду

$$\Lambda^2_{(\mathbf{e}_2)} = G_{22} = 1 + 2L_{22}.$$

Такіж результати отримуються і для $\Lambda^2_{(\mathbf{e}_1)}$ і $\Lambda^2_{(\mathbf{e}_3)}$.

Для елемента, паралельного x_2 після деформації, формула (А.18) дає

$$1/\lambda^2_{(\mathbf{e}_2)} = C_{22} = 1 - 2E_{22}$$

і аналогічні вирази для $1/\lambda^2_{(\mathbf{e}_1)}$ і $1/\lambda^2_{(\mathbf{e}_3)}$.

У загальному випадку $\Lambda^2_{(\mathbf{e}_2)}$ не дорівнює $\lambda^2_{(\mathbf{e}_2)}$, оскільки елемент до деформації розташований вздовж осі X_2, не обов'язково буде після деформації спрямований вздовж осі x_2.

Поняття коефіцієнта довжини дає основу для інтерпретації тензорів скінченних деформацій. Так, зміна довжини, що припадає на одиницю початкової довжини (відносне подовження), визначається відношенням

$$\frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1 = \Lambda_{(\mathbf{m})} - 1,$$

а для елемента P_0Q_0, розташованого вздовж осі X_2, відносне подовження складає

$$L_{(2)} = \Lambda_{(\mathbf{e}_2)} - 1 = \sqrt{1 + 2L_{22}} - 1.$$

Відносні подовження $L_{(1)}$ і $L_{(3)}$ виражаються подібними рівностями через L_{11} і L_{33} відповідно.

Зміна кута між двома малими лінійними елементами характеризується величиною $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ і виражається через $\Lambda_{(\mathbf{e}_2)}$ і $\Lambda_{(\mathbf{e}_3)}$ таким чином

$$\sin\gamma_{23} = \frac{2L_{23}}{\Lambda_{(\mathbf{e}_2)}\Lambda_{(\mathbf{e}_3)}} = \frac{2L_{23}}{\sqrt{1+2L_{22}}\sqrt{1+2L_{33}}}.$$

Якщо деформації малі, то останнє рівняння зводиться до

$$\gamma_{23} \approx \sin\gamma_{23} = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta = 2l_{23}.$$

А.3.15. Тензори коефіцієнтів довжини. Тензор повороту. В тензорному численні існує так званий **полярний розклад** довільного неособливого тензора другого рангу. Він полягає у тому, що такий тензор можна представити добутком симетричного додатнього (з дадатніми головними компонентами) тензора другого рангу на тензор другого рангу з ортогональною матрицею. Якщо таке представлення застосувати до градієнта деформації $\hat{\mathbf{F}}$, то в результаті отримаємо

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = R_{ik}S_{kj} = T_{ik}R_{kj} \text{ або } \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{S} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{R}, \qquad \text{(А.19)}$$

де $\hat{\mathbf{R}}$ – ортогональний тензор повороту, а $\hat{\mathbf{S}}$ і $\hat{\mathbf{T}}$ – додатні симетричні тензори, які називаються **правим** і **лівим тензорами коефіцієнта довжини**, відповідно.

Інтерпретацію (А.19) неважко отримати, якщо скористатися $dx_i = (\partial x_i/\partial X_j)dX_j$. Підставляючи сюди скалярні добутки, взяті із формули (А.19), отримуємо

$$dx_i = R_{ik}S_{kj}dX_j = T_{ik}R_{kj}dX_j \text{ або } d\mathbf{x} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot d\mathbf{X} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{R}\cdot d\mathbf{X}. \qquad \text{(А.20)}$$

За допомогою цих виразів для перетворення dX_i в dx_i фізично інтерпретувати це перетворення можна двояко. Відповідно до першої форми запису правої частини (А.20), це перетворення складається із розтягу $(\hat{\mathbf{S}})$ і потім повороту з наступним переносом як твердого тіла у точку P. За другої форми запису спочатку відбувається паралельний перенос як твердого тіла у точку P, потім поворот і, на кінець, розтяг $(\hat{\mathbf{T}})$. Паралельний перенос не змінює, відповідно, компонент вектору відносно декартових осей X_i і x_i.

А.3.16. Властивості перетворення тензорів деформацій. Всі тензори деформацій $L_{ij}, E_{ij}, l_{ij}, \varepsilon_{ij}$ є декартовими тензорами другого рангу. Відповідно до цього для сукупності повернутих осей X_i', які мають матрицю перетворення $\lfloor b_{ij} \rfloor$ відносно сукупності локальний осей без штрихів X_i у точці P_0, компоненти L'_{ij} і l'_{ij} виражаються формулами

$$L'_{ij} = b_{ip} b_{jq} L_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{L}}'_G = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_G \cdot \hat{\mathbf{B}}_c,$$

$$l'_{ij} = b_{ip} b_{jq} l_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{L}}' = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_c.$$

Так само для повернутих осей x'_i, що мають матрицю перетворення $\lfloor a_{ij} \rfloor$ відносно осей без штрихів, компоненти E'_{ij} і ε'_{ij} мають вигляд

$$E'_{ij} = a_{ip} a_{jq} E_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{E}}'_A = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_A \cdot \hat{\mathbf{A}}_c,$$

$$\varepsilon'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{pq} \text{ або } \hat{\mathbf{E}}' = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_c.$$

За аналогією з поверхнею напруження (див. А.2.14), можна ввести **лагранжеву** і **ейлереву поверхні лінійних деформацій** (**квадрики деформацій**) відносно локальних декартових координат η_i і ζ_i в точках P_0 і P відповідно. Так, рівняння **лагранжевої** і **ейлеревої поверхонь деформації** мають вигляд

$$l_{ij} \eta_i \eta_j = \pm h^2 \text{ або } \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\eta} = \pm h^2,$$

$$\varepsilon_{ij} \zeta_i \zeta_j = \pm g^2 \text{ або } \boldsymbol{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\zeta} = \pm g^2.$$

Існують дві наступні властивості лагранжевої (ейлеревої) поверхні лінійних деформацій.

1. Коефіцієнт подовження вздовж деякого променю, віднесеного до початкової (поточної) довжини лінійного елемента, обернено пропорційний квадрату відстані від центра поверхні деформації $P_0\{P\}$ до точки на цій поверхні.
2. Відносне переміщення сусідньої частинки, що розташована у точці $Q_0\{Q\}$, є паралельним нормалі до поверхні деформацій у точці її перетину з лінією $P_0Q_0\{PQ\}$.

Еліпсоїди деформації Коші. Матеріальний еліпмоїд деформацій визначається рівнянням

$$(dX)^2 = C_{ij} dx_i dx_j = R^2 \text{ або } (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot d\mathbf{x} = R^2.$$

Рівняння просторового еліпсоїду деформацій має такий вигляд

$$(dx)^2 = G_{ij} dX_i dX_j = r^2 \text{ або } (dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{x} = r^2.$$

А.3.17. Головні деформації. Інваріанти деформації. Об'ємне розширення. З фізичної точки зору головний напрям тензору деформацій – це такий, для якого орієнтація елемента у даній точці не змінюється при чистій деформації. Головне знаяення деформації є просто віднесене до одиниці довжини відносне переміщення (коефіцієнт відносного подовження) вздовж головного напряму.

Для лагранжевого тензора деформацій l_{ij} вектор відносного переміщення на одиницю довжини даний формулою $\frac{d\mathbf{u}}{dX} = \mathbf{u}\vec{\nabla} \cdot \nu_i = \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\nu}$, яку можна записати так

$$\frac{du_i}{dX} = \left(l_{ij} + W_{ij}\right)\nu_j \text{ або } \frac{d\mathbf{u}}{dX} = \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{W}}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}.$$

Позначимо через $l_i^{(\mathbf{n})}$ величину $\frac{du_i}{dX}$ для лінійного елемента в напрямку одиничного вектору n_i. Для чистої деформації $\left(W_{ij} \equiv 0\right)$ маємо

$$l_i^{(\mathbf{n})} = l_{ij} n_j \text{ або } \mathbf{l}^{(\mathbf{n})} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{n}. \tag{A.21}$$

Якщо напрямок n_i головний, а l – відповідне головне значення тензора l_{ij}, то

$$l_i^{(\mathbf{n})} = l\, n_i = l\delta_{ij} n_j \text{ або } \mathbf{l}^{(\mathbf{n})} = l\mathbf{n} = l\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{n}. \tag{A.22}$$

Прирівнюючи праві частини (А.21) і (А.22), приходимо до співвідношення

$$\left(l_{ij} - \delta_{ij} l\right) n_j = 0 \text{ або } \left(\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{I}} l\right) \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{A.23}$$

яке разом з умовою $n_i n_i = 1$ на одиничні вектори n_i дає необхідні рівняння для визначення головного значення деформації l і направляючих косинусів n_i відповідного головного напряму. Нетривіальні розв'язки системи рівнянь (А.23) існують тільки тоді, коли визначник із коефіцієнтів дорівнює нулю, тобто

$$\left|l_{ij} - \delta_{ij} l\right| = 0 \text{ або } \left|\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{I}} l\right| = 0, \tag{A.24}$$

що після розкриття визначника призводить до характеристичного рівняння для тензора l_{ij}. Це кубічне рівняння вигляду

$$l^3 - \mathrm{I_L} l^2 + \mathrm{II_L} l - \mathrm{III_L} = 0, \tag{A.25}$$

де

$$\mathrm{I_L} = l_{ii} = \mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{L}}\right),\ \mathrm{II_L} = 1/2\left(l_{ii} l_{jj} - l_{ij} l_{ij}\right),\ \mathrm{III_L} = \left|l_{ij}\right| = \det \hat{\mathbf{L}} - \tag{A.26}$$

відповідно перший, другий і третій **лагранжеві інваріанти деформації**.

Корені рівняння (А.25) є головними значеннями деформації й позначаються $l_{(1)}, l_{(2)}, l_{(3)}$. Перший інваріант лагранжевого тензора деформацій є сумою головних деформацій

$$\mathrm{I_L} = l_{ii} = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)}$$

і має важливий фізичний зміст.

Коефіцієнт об'ємного розширення визначається за формулою

$$D_0 = \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{dX_1\left(1+l_{(1)}\right)dX_2\left(1+l_{(2)}\right)dX_3\left(1+l_{(3)}\right) - dX_1 dX_2 dX_3}{dX_1 dX_2 dX_3}.$$

В теорії малих деформацій це співвідношення у першому наближенні дає таку суму

$$D_0 = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} = \mathrm{I_L}.$$

Що стосується ейлеревого тензора деформацій ε_{ij} і відповідного вектору відносного переміщення $\varepsilon_i^{(\mathbf{n})}$, головні напрями і головні деформації $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(3)}$ визначаються точно так само, як їх лагранжеві аналоги. Ейлереві інваріанти деформації виражаються так:

$$\mathrm{I_E} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)},\ \mathrm{II_E} = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)},\ \mathrm{III_E} = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)}.$$

Для об’ємного розширення в ейлеревій системі відліку за малих деформацій отримуємо

$$D = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = \mathrm{I_E}.$$

А.3.18. Шаровий тензор і девіатор деформацій. Лагранжевий і ейлерів тензори лінійних деформацій можна розкласти на **шарові** тензори і **девіатори** тим самим способом, як це було виконано для тензора напруження. Якщо компоненти лагранжевого і ейлеревого девіаторів позначити через d_{ij} і e_{ij} відповідно, то шукані вирази будуть мати вигляд

$$l_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}\, l_{kk}/3 \text{ або } \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}_D + \hat{\mathbf{I}}\,\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{L}}\right)/3,$$

$$\text{і } \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij}\, \varepsilon_{kk}/3 \text{ або } \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_D + \hat{\mathbf{I}}\,\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{E}}\right)/3.$$

Перші інваріанти d_{ii} і e_{ii} девіаторів деформацій тотожно рівні нулю. Тому девіатори описують деформацію зсуву, для якої об’ємне розширення дорівнює нулю.

А.3.19. Плоска деформація. Круги Мора для деформації. Коли одна і тільки одна із головних деформацій у точці суцільного середовища рівна нулю, говорять, що у цій точці існує стан **плоскої деформації**. Якщо в ейлеревому описанні (лагранжевий опис проводиться точно так само) за вісь x_3 прийняти напрям нульової головної деформації, то плоска деформація відбувається у площинах, паралельних x_1x_2 і характеризуються тензором лінійних деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо x_1 і x_2 – теж головні напрями, то тензор деформацій приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Графічно стан плоскої деформації у точці описується *кругами Мора для деформації* точно так як і для кругів Мора поля напруження. При цьому тензор деформацій представляють у вигляді

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \tfrac{1}{2}\gamma_{12} & \tfrac{1}{2}\gamma_{13} \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \tfrac{1}{2}\gamma_{23} \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{13} & \tfrac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Тут γ_{ij} (для $i \neq j$) – компоненти так званих «технічних деформацій» зсуву, які рівні подвійним тензорним компонентам деформацій зсуву.

За аналогією з кругами Мора для плоских напружень типова діаграма для плоскої деформації приведена на рис. А.6.

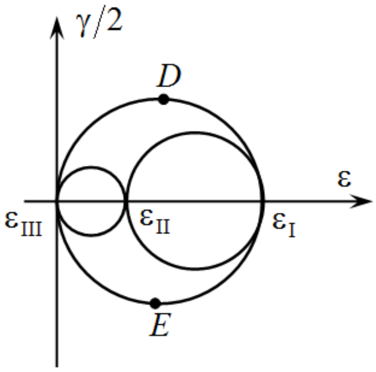


Рис. А.6. Круги Мора для плоскої деформації

Упорядковані головні деформації $\varepsilon_{\mathrm{I}}, \varepsilon_{\mathrm{II}}, \varepsilon_{\mathrm{III}}$ позначені тими ж буквами на діаграмі (див. рис. А.6), а величини максимальних деформацій зсуву відповідають точкам D і E.

А.3.20. Рівняння сумісності для лінійних деформацій. Якщо компоненти деформації ε_{ij} задані у явному вигляді як функції координат, то шість незалежних рівнянь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

можна розглядати як систему шести рівнянь у частинних похідних для визначення трьох компонент перемішення u_i. Система є перевизначеною і в загальному випадку не має розв'язку за умови довільного вибору компонент деформації ε_{ij}. Значить, щоб існували однозначні і неперервні компоненти переміщення u_i, на компоненти деформацій повинні бути накладені деякі умови. Необхідні і достатні умови для існування такого поля переміщень виражаються такими рівняннями

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \qquad (\text{A.27})$$

У системі рівнянь (А.27) міститься вісімдесят одне рівняння, але тільки шість із них різні. Ці шість рівнянь, записані у розгорнутій індексній формі виглядають так:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2},\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3},\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1},\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3},\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1},\\
&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{A.28})$$

або

$$\vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}} \times \vec{\nabla} = 0.$$

Рівняння сумісності можна записати і для компонент лагранжевого тензора лінійних деформацій внаслідок очевидної аналогії з елеревою інтерпретацією, що наведнна вище.

Для плоскої деформації, що відбувається у площинах, паралельних $x_1 x_2$, шість рівнянь (А.28) зводяться до одного

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ або } \vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}} \times \vec{\nabla} = 0.$$

А.4. Рух і течія

А.4.1. Рух. Течія. Терміни **рух** і **течія** використовуються під час описання миттєвої і неперервної зміни конфігурації суцільного середовища. Іноді словом **течія** називають рух, що призводить до залишкової деформації, як, наприклад, в теорії пластичності. Однак під час вивчення рідин цей термін означає неперервний рух. Рух деякого об’єму суцільного середовища можна виразити або в матеріальних координатах (лагранжеве представлення – система відліку)

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t) \text{ або } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tag{A.29}$$

або, розв'язуючи ці рівняння у просторових координатах (ейлереве представлення)

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t) \text{ або } \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \tag{A.30}$$

Для існування обернених функцій (А.30) необхідно і достатньо, щоб якобіан

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$$

був відмінний від нуля. З фізичної точки зору лагранжевий спосіб описання фіксує увагу на індивідуальних частинках континууму, в той час як за умови ейлеревого підходу цікавляться певною областю простору, яка зайнята суцільним середовищем.

А.4.2. Матеріальна похідна. Швидкість зміни у часі будь-якої властивості у індивідуальних частинках рухомого середовища називається **матеріальною** (або **індивідуальною**) **похідною** за часом від цієї величини.

Матеріальну похідну (**субстанціональну** або **повну** похідну) можна представити собі як швидкість зміни розглядуваної величини за часом, яка була б виміряна спостерігачем, що рухається разом з індивідуальною частинкою. Миттєве положення частинки x_i саме є властивістю частинки. Матеріальна похідна за часом від положення частинки є її **миттєва швидкість**. Тому, приймаючи символ $\frac{d}{dt}$, $\left(\frac{D}{Dt}\right)$ або точку над літерою для позначення операції матеріального диференціювання, отримуємо визначенн вектора швидкості

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \text{ або } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}. \tag{A.31}$$

Взагалі, якщо $P_{ij\ldots}$ – будь-яка скалярна, векторна або тензорна властивість континууму, яку можна описати локальною функцією координат, і якщо в лагранжевому представленні

$$P_{ij\ldots} = P_{ij\ldots}(\mathbf{X}, t),$$

то індивідуальна похідна за часом від цієї величини має вигляд

$$\frac{dP_{ij\ldots}}{dt} = \frac{\partial P_{ij\ldots}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \tag{A.32}$$

Праву частину (A.32) іноді записують у формі $\left[\dfrac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right]_{\mathbf{X}}$, щоб підкреслити, що координати $\mathbf{X}$ вважаються сталими, тобто під час обчислення похідної мають діло з одними й тими ж частинками. Якщо деяка властивість задана функцією $P_{ij\dots}$ у просторових координатах

$$P_{ij\dots} = P_{ij\dots}(\mathbf{x},t),$$

то обчислення матеріальної похідної призводить до виразу

$$\frac{dP_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}, \qquad (A.33)$$

де другий член у правій частині з'являється із-за того, що індивідуальні частинки змінюють своє місцезнаходження у просторі. Перший член у правій частині (A.33) характеризує швидкість зміни даної властивості у фіксованій точці простору і відповідно називається **локальною швидкістю зміни** (**локальною складовою похідної**). Цей член іноді записують у вигляді $\left[\dfrac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right]_{\mathbf{x}}$, щоб підкреслити, що $\mathbf{x}$ вважається сталим під час цього диференціювання. Другий член у правій частині рівності (A.33) називається **конвективною швидкістю зміни** (**конвективною складовою похідної**), оскільки він виражає вклад, обумовлений рухом частинок у змінному полі даної властивості.

Приймаючи до уваги (A.31), для індивідуальної похідної можна написати

$$\frac{dP_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + v_k\frac{\partial P_{ij\dots}(\mathbf{x},t)}{\partial x_k},$$

що дає змогу ввести **оператор матеріального диференціювання за часом**

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k\frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\vec{\nabla},$$

який використовується під час обчислення індивідуальних похідних від величин, записаних у просторових координатах.

A.4.3. Швидкість. Миттєве поле швидкості. Визначення поля швидкості дано формулою (A.31) у вигляді $v_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ (або $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$). Інше визначення того ж вектора можна отримати із вектора переміщення, відповідно до якого $x_i = u_i + X_i$ (або $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{X}$). Тоді швидкість можна визначити так

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{d(u_i + X_i)}{dt} = \frac{du_i}{dt} \quad \text{або} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u}+\mathbf{X})}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \qquad (A.34)$$

оскільки $\mathbf{X}$ не залежить від часу.

Якщо в (А.34) переміщення виражено у лагранжевих змінних $u_i = u_i(\mathbf{X},t)$, то

$$v_i \equiv \dot{u}_i = \frac{du_i(\mathbf{X},t)}{dt} = \frac{\partial u_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} \text{ або } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{X},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X},t)}{\partial t}. \quad \text{(А.35)}$$

Якщо, з іншого боку, переміщення задано у ейлеревій формі $u_i = u_i(\mathbf{x},t)$, то

$$v_i(\mathbf{x},t) \equiv \dot{u}_i(\mathbf{x},t) \equiv \frac{du_i(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_k},$$

$$\text{або } \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\vec{\nabla}\mathbf{u}(\mathbf{x},t). \quad \text{(А.36)}$$

Формулою (А.36) швидкість задається у неявному вигляді, оскільки вона входить і як множник у другий член правої частини. Кажуть, що функції

$$v_i = v_i(\mathbf{x},t) \text{ або } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$$

представляють **миттєве поле швидкості**.

А.4.4. Прискорення. Матеріальна похідна від швидкості за часом є **прискорення**. Якщо швидкість задана у лагранжевій формі (А.35), то

$$a_i \equiv \dot{v}_i \equiv \frac{dv_i(\mathbf{X},t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} \text{ або } \mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{X},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X},t)}{\partial t}.$$

Якщо ж швидкість виражена у ейлеревій формі (А.36), то

$$a_i(\mathbf{x},t) \equiv \frac{dv_i(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial t} + v_k(\mathbf{x},t)\frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_k},$$

$$\text{або } \mathbf{a}(\mathbf{x},t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\vec{\nabla}\mathbf{v}(\mathbf{x},t).$$

А.4.5. Траєкторії. Лінії току. Усталений рух. Траєкторія – це лінія, по якій прямує частинка у процесі її руху або течії. **Лінією току** для поля швидкості в деякий момент часу називається крива, дотична до якої у будь-якій точці співпадає за напрямком зі швидкістю у цій точці. Рух континууму називається **усталеним** (або **стаціонарним**), якщо поле швидкості не залежить від часу, так що $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$. Для усталеного руху лінії току і траєкторії співпадають.

А.4.6. Швидкість деформації. Завихреність. Прирощення деформації. Просторовий градієнт миттєвого поля швидкості дає *тензор градієнта швидкості* $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ (або Y_{ij}). Цей тензор можна розкласти на симетричну і антисиметричну частини таким чином

$$Y_{ij} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = D_{ij} + V_{ij},$$

або $\hat{\mathbf{Y}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{v}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{v}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{v}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{v}\right) = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{V}}$.

Симетричний тензор

$$D_{ij} = D_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{D}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{v}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{v}\right),$$

називається **тензором швидкості деформації**.

Антисиметричний тензор

$$V_{ij} = -V_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \text{ або } \hat{\mathbf{V}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{v}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{v}\right),$$

називається тензором **завихреності** або **вихору**.

Легко показати, що тензор швидкості деформації представляє собою матеріальну похідну за часом від ейлеревого тензора лінійних деформацій. Так, якщо у виразі

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ або } \frac{d\hat{\mathbf{E}}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{u}\right) \qquad \text{(A.37)}$$

поміняти місцями операції диференціювання по координатах і часу, тобто замінити $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ на $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{du_i}{dt}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, то рівність (А.37) прийме вигляд

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = D_{ij} \text{ або } \frac{d\hat{\mathbf{E}}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}\vec{\nabla} + \vec{\nabla}\mathbf{v}\right) = \hat{\mathbf{D}}. \qquad \text{(A.38)}$$

Таким самим чином можна показати, що тензор вихору дорівнює матеріальній похідній за часом від ейлеревого тензора лінійного повороту. Цей результат виражається формулою

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = V_{ij} \text{ або } \frac{d\hat{\mathbf{\Omega}}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\mathbf{v}\right) = \hat{\mathbf{V}}.$$

Рівність (А.38) можна переписати у вигляді

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ij}dt \text{ або } d\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{D}}dt. \qquad \text{(A.39)}$$

Ліва частина (А.39) представляє собою компоненти тензора, які широко використовуються в теорії пластичності і які дістали назву **прирощення деформації**.

А.4.7. Фізична інтерпретація тензорів швидкості деформації і завихреності. На рис. А.7 швидкості сусідніх частинок, що знаходяться у точках P і Q рухомого об'єму суцільного середовища, позначені відповідно v_i і $v_i + dv_i$. Таким чином, швидкість частинки Q відносно точки P рівна

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = \mathbf{v}\vec{\nabla} \cdot d\mathbf{x},$$

де частинні похідні обчислені в точці P. Цей вираз можна записати через D_{ij} і V_{ij}

$$dv_i = \left(D_{ij} + V_{ij}\right) dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = \left(\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{V}}\right) \cdot d\mathbf{x}. \quad (\text{A.40})$$

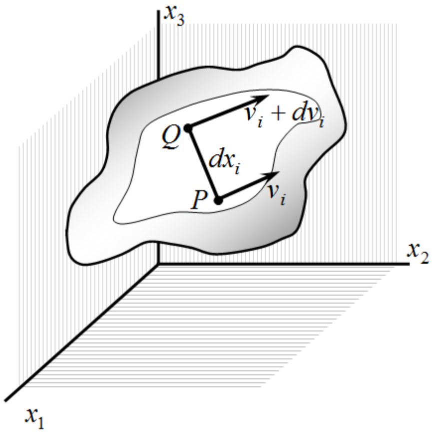


Рис. А.7. До пояснення фізичної інтерпретації тензорів швидкості деформації і завихреності

Якщо тензор швидкості деформації тотожно рівний нулю $\left(D_{ij} \equiv 0\right)$, то

$$dv_i = V_{ij} dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = \hat{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{x}, \quad (\text{A.41})$$

і рух в околі точки P буде **обертанням абсолютно твердого тіла**.

Поле швидкості називають безвихровим, якщо тензор завихреності обертається в нуль у всіх його точках. Асоційований з тензором завихреності вектор визначається співвідношенням

$$q_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \text{ або } \mathbf{q} = \vec{\nabla} \times \mathbf{v}, \quad (\text{A.42})$$

і називається **вектором завихреності**. Символічна форма запису (А.42) показує, що вектор завихреності отримується дією оператору ротор (rot або curl) на поле швидкості. Вектор, рівний половині вектора q,

$$\Omega_i = \frac{1}{2} q_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \text{ або } \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \mathbf{v},$$

називається вектором вихору швидкості. Під час обертання абсолютно твердого тіла, як отримано в (А.41), відносна швидкість частинки, сусідньої з P і, яка знаходиться від неї на відстані dx_i, дається формулою

$$dv_i = \varepsilon_{ijk} \Omega_j dx_k \text{ або } d\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times d\mathbf{x}.$$

Компоненти тензора швидкості деформації мають такий фізичний зміст. Діагональні елементи D_{ij} – це **швидкість відносного подовження** відрізків, що розташовані вздовж осей координат. Так, для чистої деформації із (А.40) витікає, що

$$dv_i = D_{ij} dx_j \text{ або } d\mathbf{v} = \hat{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{x},$$

а так швидкість зміни довжини лінійного елемента dx_i, що припадає на одиницю миттєвої довжини, є

$$d_i^{(\mathbf{v})} = \frac{dv_i}{dx} = D_{ij}\frac{dx_j}{dx} = D_{ij}v_j \text{ або } \mathbf{d}^{(\mathbf{v})} = \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v},$$

то швидкість подовження у напрямку одиничного вектору v_i рівна

$$d = d_i^{(\mathbf{v})} v_i = D_{ij} v_j v_i \text{ або } d = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{v}.$$

Недіагональні елементи D_{ij} характеризують **швидкість зсуву** і є мірою швидкості зміни прямих кутів між напрямами відрізків, що розташовані вздовж осей координат.

Внаслідок того, що D_{ij} є симетричним тензором другого рангу, для нього існують такі поняття, як **головні осі, головні значення, інваріанти, поверхня швидкості деформації** і **девіатор швидкості деформації**. Окрім того, для компонент тензора швидкості деформації можна написати рівняння **сумісності**, аналогічні рівнянням, що отримано для тензора лінійних деформацій.

А.4.8. Матеріальні похідні від елемента об'єму, елемента поверхні і лінійного елемента. Матеріальна похідна від **елемента об'єму** dV визначається співвідношенням

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV \text{ або } \frac{d}{dt}(dV) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} dV.$$

Матеріальна похідна **елемента поверхні** обчислюється за формулою

$$\frac{d}{dt}(dS_i) = \frac{d}{dt}\left(J\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) dX_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dS_i - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dS_j.$$

Матеріальна похідна від квадрату довжини нескінченно малого **лінійного елементу** dx_i обчислюється за формулою

$$\frac{d}{dt}\left(dx^2\right) = 2D_{ij} dx_i dx_j \text{ або } \frac{d}{dt}\left(dx^2\right) = 2d\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{x}.$$

А.4.9. Матеріальні похідні від інтегралу по об'єму, інтегралу по поверхні і лінійного інтегралу. Матеріальна похідна **за часом від інтегралу по об'єму** дорівнює

$$\frac{d}{dt}\int_V P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t) dV = \int_V \frac{dP^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)}{dt} dV + \int_S v_p \left[P^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)\right] dS_p.$$

Це співвідношення стверджує, що швидкість зміни деякої величини $P^*_{ij\ldots}(t)$ у частині суцільного середовища, який займає у даний момент об'єм V, дорівнює сумі змін цієї величини у всіх точках всередині V плюс потік величини $P^*_{ij\ldots}(t)$ через поверхню S, яка обмежує об'єм V.

Матеріальна похідна **від інтегралу по поверхні** обчислюється за формулою

$$\frac{dQ_{ij\ldots}(t)}{dt} = \int_S \left[\frac{dQ^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)}{dt} + \frac{\partial v_q}{\partial x_q} Q^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t) \right] dS_p - \int_S \left[Q^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t) \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right] dS_q .$$

Матеріальна похідна **від лінійного інтегралу** обчислюється за формулою

$$\frac{dR_{ij\ldots}(t)}{dt} = \int_C \frac{d\left[R^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)\right]}{dt} dx_p + \int_C \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \left[R^*_{ij\ldots}(\mathbf{x},t)\right] dx_q .$$

А.5. Основні закони механіки суцільного середовища

А.5.1. Рівняння нерозривності у ейлеревій системі відліку

$$\frac{d\rho}{dt} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \text{ або } \frac{d\rho}{dt} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0,$$

де ρ – густина, кг/м^3; t – час, с; ∇ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; $\mathbf{v}$ або v_k – вектор швидкості, м/с.

Для нестисливого середовища, коли $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$, рівняння нерозривності набуває вигляду

$$v_{k,k} = 0 \text{ або } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Лагранжева диференціальна форма рівняння нерозривності

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0,$$

де J – якобіан переходу між системами відліку.

А.5.2. Теорема про зміну кількості руху – інтегральна форма

$$\int_V \left(\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i\right) dV = 0 \text{ або } \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}\right) dV = 0,$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\sigma_{ji,j}$ – тензор напруження, Па; $\mathbf{b}$, b_i – вектор масової сили, Н/кг; $\dot{\mathbf{v}}$, $\dot{v}_i$ – похідна за часом від швидкості або прискорення, м/с^2; V – об'єм, м^3.

А.5.3. Рівняння руху

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \text{ або } \vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}.$$

Коли відсутнє прискорення $\dot{\mathbf{v}} = 0$, отримуємо рівняння рівноваги

$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$ або $\vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0$.

А.5.4. Теорема про зміну моменту кількості руху

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(\mathbf{n})} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV,$$

або $$\int_S \left(\mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\right) dS + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) dV = \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV,$$

де $\mathbf{x}$ – радіус-вектор елемента об’єму V, м; $t_k^{(\mathbf{n})} = \sigma_{pk} n_p$ – вектор напруження, Па; ε_{ijk} – тензор Леві-Чивіти.

А.5.5. Перший закон термодинаміки

$$du = \delta q + \delta W,$$

де u – масова внутрішня енергія, Дж/кг; q – масова теплота, Дж/кг; W – масова робота, яка здійснюється системою проти зовнішніх сил, Дж/кг.

А.5.6. Рівняння енергії

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) = \frac{1}{\rho}\left(\sigma_{ij} v_i\right)_{,j} + b_i v_i - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + q_m, \text{ або } \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} q_{i,i} + q_m,$$

або $$\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} + \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{D}} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + q_m + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}},$$

де u – масова внутрішня енергія, Дж/кг; $\hat{\mathbf{D}}$ – симетрична складова тензора градієнта швидкості, с$^{-1}$; $\mathbf{q} = -k \nabla T$ – густина теплового потоку, Вт/м^2; k – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); q_m – масова густина потужності джерела теплоти немеханічної природи, Вт/м^3.

Рівняння енергії виражене через консервативні і дисипативні напруження

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\delta q}{dt},$$

де $\sigma_{ij}^{(C)}$ – тензор *консервативних* напружень, Па; $\sigma_{ij}^{(D)}$ – тензор *дисипативних* напружень, Па.

А.5.7. Другий закон термодинаміки

$$ds^{(e)} \geq \frac{\delta q_{(R)}}{T},$$

де s – ентропія, Дж/(кг·К); q – масова теплота, Дж/кг; T – абсолютна температура, К; «=» і «>» – для зворотних і незворотних процесів, відповідно.

А.5.8. Нерівність Клаузіуса-Дюгема

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho s dV \geq \int_V \rho e dV - \int_S \frac{q_i n_i}{T} dS \text{ або } \frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho}\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} \geq 0,$$

де e – потужність локальних зовнішніх джерел ентропії, що віднесена до одиниці маси, Дж/(кг·К).

А.5.9. Тотожність Гіббса

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)}\dot{\varepsilon}_{ij} + T\frac{ds}{dt},$$

де $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – швидкість ейлеревої деформації, с$^{-1}$.

А.5.10. Рівняння швидкості притоку ентропії для незворотних процесів

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T}\frac{\delta q}{dt} + \frac{1}{\rho T}\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\varepsilon}_{ij},$$

де $\sigma_{ij}^{(D)}\dot{\varepsilon}_{ij}$ – дисипативна функція, Вт/м^3.

А.6. Лінійна теорія пружності

А.6.1. Тензор лінійних деформацій

$$\varepsilon_{ij} = l_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \text{ або } \mathbf{E} = \mathbf{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}\right),$$

де ε_{ij}, $\mathbf{E}$ – ейлерів тензор нескінченно малих деформацій; l_{ij}, $\mathbf{L}$ – лагранжевий тензор нескінченно малих деформацій; u_i, $\mathbf{u}$ – вектор переміщення, м.

А.6.2. Узагальнений законом Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{4}{\hat{C}} : \mathbf{E},$$

де σ_{ij} – тензор напруження, Па; $\overset{4}{\hat{C}} = C_{ijkm}$ – тензор пружних констант четвертого рангу, який має 81 компоненту, Па; ε_{km} – тензор лінійних деформацій.

Форма закону Гука з врахуванням симетрії тензорів ε_{ij} і σ_{ij} та зміною індексації

$$\sigma_K = C_{KM}\varepsilon_M, \ (K, M = 1,2,3,4,5,6),$$

де C_{KM} – тензор другого рангу, який має 36 пружних констант, Па; ε_M – вектор деформації, що має 6 незалежних величин; σ_K – вектор напруження, що має 6 незалежних величин, Па.

А.6.3. Квадратична форма

$$u^* = \frac{1}{2} C_{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km}, \text{ або } u^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \text{ або } u^* = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \text{ або } u^* = \frac{1}{2} C_{KM} \varepsilon_K \varepsilon_M,$$

де u^* – об'ємна густина енергії деформації, Дж/м^3.

А.6.4. Закон Гука для ізотропного тіла, записаний через коефіцієнти Ламе λ і μ

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \hat{\mathbf{I}} \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + 2\mu \hat{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

де $\varepsilon_{kk} = \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathrm{I}_\varepsilon$ – перший інваріант тензора деформацій; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу; δ_{ij} – символ Кронекера.

Обернений закон Гука для тензора деформації

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \text{ або } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \hat{\mathbf{I}} \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{2\mu} \hat{\boldsymbol{\sigma}},$$

де $\sigma_{kk} = \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathrm{I}_\sigma$ – перший інваріант тензора напружень.

Закон Гука для ізотропного тіла, записаний через модуль пружності E (Па) і коефіцієнт Пуасона ν

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right), \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\mathbf{I}} \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right),$$

і в оберненій формі відносно тензора деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \text{ або } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \hat{\mathbf{I}} \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}).$$

А.6.5. Модуль об'ємного стискання

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{ або } K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}.$$

А.6.6. Модуль зсуву G

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

А.6.7. Рівняння Нав'є-Коші

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0, \text{ або } \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0.$$

А.6.8. Рівняння сумісності Бельтрамі-Мічела

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \rho\left(b_{i,j} + b_{j,i}\right) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k,k} = 0,$$

$$\text{або } \nabla^2 \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \rho(\nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \nabla) + \frac{\nu}{1-\nu} \hat{\mathbf{I}} \rho \nabla \cdot \mathbf{b} = 0.$$

А.6.9. Тензори напруження і деформації у випадку плоского напруженого стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

і плоского деформованого стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

А.6.10. Рівняння рівноваги для плоского напруженого стану в переміщеннях

$$\frac{E}{2(1+\nu)} u_{\alpha,\beta\beta} + \frac{E}{2(1-\nu)} u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_\alpha = 0,$$

або $\dfrac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \mathbf{u} + \dfrac{E}{2(1-\nu)} \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = 0,$

і плоского деформованого стану

$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = 0$ або $\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0,$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{33} = \nu \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \sigma_{\alpha\alpha},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\right), \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}\right),$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

А.6.11. Бігармонічне рівняння

$$\nabla^2\left(\nabla^2 \varphi\right) = \nabla^4 \varphi = \varphi_{,1111} + 2\varphi_{,1122} + \varphi_{,2222} = 0,$$

де $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ – функції напружень Ері.

А.6.12. Рівняння рівноваги у полярних координатах

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r = 0,$$

$$\frac{2\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho b_\theta = 0,$$

де r – радіус, м; θ – кут, рад.

А.6.13. Визначальне (фізичне) рівняння гіперпружного середовища

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = \frac{d}{dt} K_{ijkm} D_{km},$$

де $\sigma_{ij}^{\nabla} = \frac{d}{dt}\sigma_{ij} - \sigma_{iq}V_{qj} - \sigma_{jq}V_{qi}$ – тензор швидкості напруження, Па/с; V_{ij} – тензор завихрености, с$^{-1}$.

А.6.14. Тензор температурних деформацій

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

де α – коефіцієнт лінійного теплового розширення, К$^{-1}$.

А.6.15. Рівняння Дюгамеля-Неймана

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

і в оберненій формі відносно тензора напруження

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta_{ij}(T - T_0).$$

А.6.16. Закон теплопровідності Фур'є

$$q_i = -kT_{,i},$$

де q_i – вектор густини теплового потоку, Вт/м^2; k – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); $T_{,i}$ – градієнт температури, К/м.

А.6.17. Рівняння теплопровідності

$$-q_{i,i} = \rho c_v \dot{T},$$

де c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); $\dot{T}$ – похідна за часом від температури, К/с.

А.6.18. Рівняння притоку теплоти зв'язаної термопружності

$$kT_{,ii} = \rho c_v \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T\dot{\varepsilon}_{ii},$$

де $T_{,ii}$ – друга похідна за координатою від температури, К/м^2.

А.7. Механіка рідин та газів

А.7.1. Напруження в рідині у стані спокою

$$\sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -p_0\hat{\mathbf{I}},$$

де p_0 – гідростатичне напруження, Па; δ_{ij} – символ Кронекера; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор другого рангу.

Напруження в рідині під час її руху

$$\sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \tau_{ij} \text{ або } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -p_0\hat{\mathbf{I}} + \hat{\boldsymbol{\tau}},$$

де τ_{ij} – компоненти тензора в'язкого напруження, Па; p_0 – тиск, Па.

А.7.2. Середнє напруження в рідині

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}\tau_{ij} \text{ або } \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = -p + \frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{\tau}}.$$

середнє нормальне напруження

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}\left(3\lambda^* + 2\mu^*\right)D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii}$$

або $\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = -p + \frac{1}{3}\left(3\lambda^* + 2\mu^*\right)\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{D}}\right) = -p + \chi^* \mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{D}}\right)$,

де $\chi^* = \frac{1}{3}\left(3\lambda^* + 2\mu^*\right)$ – коефіцієнт об'ємної в'язкості, Па·с.

А.7.3. Рівняння стану ідеального газу

$p = \rho RT$,

де R – універсальна газова стала, Дж/(кг·К).

А.7.4. Рівняння стану баротропної рідини

$p = p(\rho)$.

А.7.5. Стоксова рідина відповідає нелінійній залежності вигляду

$\tau_{ij} = f_{ij}\left(D_{pq}\right)$, або $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mathbf{f}}\left(\hat{\mathbf{D}}\right)$,

де $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$ – тензор швидкості деформації, $с^{-1}$.

А.7.5. Ньютонівська рідина – лінійна залежність між $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ і $\hat{\mathbf{D}}$

$\tau_{ij} = K_{ijpq} D_{pq}$ або $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \overset{4}{\hat{\mathbf{K}}} : \hat{\mathbf{D}}$,

де K_{ijpq}, $\overset{4}{\hat{\mathbf{K}}}$ – тензор 4-го рангу коефіцієнтів в'язкості, Па·с.

А.7.6. Фізичні рівняння для ізотропної однорідної ньютонівської рідини

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^*\delta_{ij}D_{kk} + 2\mu^* D_{ij}$$

або $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -p\hat{\mathbf{I}} + \lambda^*\hat{\mathbf{I}}\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{D}}\right) + 2\mu^*\hat{\mathbf{D}}$,

або через компоненти девіаторних напружень

$$S_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} = -p\delta_{ij} + \delta_{ij}\left(\lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*\right)D_{ii} + 2\mu^* D'_{ij}$$

або $\hat{\mathbf{S}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{I}}\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = -p\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{I}}\left(\lambda^* + \frac{2}{3}\mu^*\right)\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{D}}\right) + 2\mu^*\hat{\mathbf{D}}'$,

де λ^* і μ^* – коефіцієнти в'язкості рідини, Па·с; $D'_{ij} = D_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}D_{kk}$.

А.7.7. Умова Стокса

$$\chi^* = \lambda^* + \frac{2}{3}\mu^* = 0.$$

А.7.8. Рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема для стисливої рідини

$$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \left(\lambda^* + \mu^*\right)v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj}$$

або $\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{b} - \nabla p + (\lambda^* + \mu^*)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu^* \nabla^2 \mathbf{v}$,

для нестисливої рідини, коли $v_{j,j} = 0$ або $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$,

$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \mu^* v_{i,jj}$

або $\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{b} - \nabla p + \mu^* \nabla^2 \mathbf{v}$.

А.7.9. Рівняння Нав'є-Стокса за умови Стокса $\lambda^* = -\dfrac{2}{3}\mu^*$

$$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + \frac{1}{3}\mu^* v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj}$$

або $\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{b} - \nabla p + \dfrac{1}{3}\mu^* \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu^* \nabla^2 \mathbf{v}$.

А.7.10. Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu^*},$$

де L – лінійний розмір, м; V – швидкість, м/с; ρ – густина, кг/м^3; $\nu^* = \dfrac{\mu^*}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості, м^2/с.

А.7.11. Усталена течія $\dfrac{\partial v_i}{\partial t} = 0$

$\dot{v}_i = v_j v_{i,j}$ або $\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$.

А.7.12. Рівняння Нав'є-Стокса за умови $\mathbf{v} \equiv 0$

$\rho b_i = p_{,j}$ або $\rho\mathbf{b} = \nabla p$ – стан гідростатичної рівноваги.

Якщо до того ж масові сили є потенційними, тобто

$b_i = -\Omega_{,i}$ або $\mathbf{b} = -\nabla\Omega$,

то рівняння гідростатичної рівноваги набуває вигляду

$(\Omega + P)_{,i} = 0$ або $\nabla(\Omega + P) = 0$.

А.7.13. Функція тиску

$$P(\rho) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}.$$

А.7.14. Вектор завихреності

$q_i = \varepsilon_{ijk} V_{kj}$ або $\mathbf{q} = \mathbf{V}_v$,

де $V_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ або $\hat{\mathbf{V}} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v})$ – антисиметрична складова градієнта швидкості, с$^{-1}$; ε_{ijk} – тензор Леві-Чивіти.

Визначення q_i через швидкість

$q_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$ або $\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{v}$.

А.7.15. Умову існування потенціалу швидкості φ

$\nabla \times \mathbf{v} = 0$ або $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$.

Безвихрове поле є потенційним, тому

$v_i = -\varphi_{,i}$ або $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$.

А.7.16. Рівняннями руху Ейлера. За умови ідеальної рідини (без тертя) рівняння Нав'є-Стокса-Дюгема перетворюються до вигляду

$\rho\dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i}$ або $\rho\dot{\mathbf{v}} = \nabla\mathbf{b} - \nabla p$.

А.7.17. Рівняння Бернулі

$$\Omega + P + \frac{v_i v_i}{2} + \int\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) dx_i = C(t).$$

Для нестисливої рідини рівняння Бернулі приймає вигляд

$$h + h_p + h_v = h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{const},$$

де h – висота стовпа рідини, м; $h_p = \frac{P}{g} = \frac{p}{\rho g}$ – напір тиску, м; $h_v = \frac{v^2}{2g}$ – швидкісний напір, м.

А.7.18. Циркуляція швидкості рідини по замкнутій лінії

$\Gamma_c = \oint v_i dx_i$, $\Gamma_c = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$

або $\Gamma_c = \oint n_i \varepsilon_{ijk} v_{k,j} dS$, $\Gamma_c = \oint \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dS$,

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до поверхні S, що натягнута на дану лінію.

А.7.19. Матеріальна похідна від циркуляції за часом $\frac{d\Gamma_c}{dt} = \dot{\Gamma}_c$

$\dot{\Gamma}_c = \oint(\dot{v}_i dx_i + v_i dv_i)$ або $\dot{\Gamma}_c = \oint(\dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v})$.

А.7.20. Хвильове рівняння – отримано для безвихрової течії стисливої рідини об'єднанням і лінеаризацією рівнянь Ейлера і нерозривності

$\ddot{\varphi} = c^2 \varphi_{,ii}$ або $\ddot{\varphi} = c^2 \nabla^2 \varphi$,

де c – швидкість звуку в середовищі, м/с.

А.7.21. Рівняння газової динаміки для усталеної безвихрової течії стисливої баротропної рідини

$(c^2 \delta_{ij} - v_i v_j) v_{j,i} = 0$ або $c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}) = 0$.

А.7.22. Умови Коші-Рімана

$\varphi_{,1} = \psi_{,2}$, $\varphi_{,2} = -\psi_{,1}$,

де φ – потенціал; ψ – функція току.

А.7.23. Комплексний потенціал

$$\Phi(z)=\varphi(x_1,x_2)+i\psi(x_1,x_2),$$

де $z=x_1+ix_2$ – функція комплексної змінної.

А.7.24. Комплексна швидкість

$$\frac{d\Phi}{dz}=-v_1+iv_2.$$

А.8. Теорія пластичності

А.8.1. Умова пластичності у загальному випадку

$$f(\sigma_{ij})=C_Y,$$

де C_Y – стала текучості.

А.8.2. Функція текучості

$$f_1(\sigma_{ij})=0.$$

А.8.3. Умова пластичності для ізотропного матеріалу може бути виражена у вигляді симетричної функції головних напружень

$$f_2(\sigma_{\mathrm{I}},\sigma_{\mathrm{II}},\sigma_{\mathrm{III}})=C_Y.$$

А.8.4. Критерій текучості Треска (теорія максимального дотичного напруження)

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}})=C_Y=\mathrm{const}.$$

Критерій текучості Треска під час простого розтягу

$$\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}=\sigma_Y,$$

де σ_Y – межа текучості матеріалу, Па.

А.8.5. Критерій текучості Мізеса

$$(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2=2\sigma_Y^2.$$

А.8.6. Рівняння П-площини

$$\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}=0.$$

А.8.7. Гіпотези ізотропного зміцнення під час пластичного деформування матеріалу:

енергетична гіпотеза – критерій пластичності

$$f_1(\sigma_{ij})=F(W^P),$$

де $W^P=\int\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^P$ – повна робота на пластичних деформаціях;

деформаційна гіпотеза – закон зміцнення

$$f_1(\sigma_{ij})=H(\varepsilon_{ekv}^P),$$

де $\varepsilon_{ekv}^P=\int d\varepsilon_{ekv}^P$ – повна еквівалентна деформація.

А.8.8. Умова кінематичного зміцнення

$$f_1(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=0,$$

де α_{ij} – координати центра нової поверхні текучості.

За умови лінійного закону зміцнення

$$\dot{\alpha}_{ij} = c\dot{\varepsilon}_{ij}^{P},$$

де c – стала.

А.8.9. Рівняння Леві-Мізеса або закон течії для жорстко-ідеально-пластичного матеріалу

$$d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\lambda,$$

де s_{ij} – компоненти девіатора напруження, Па; $d\lambda$ – коефіцієнт пропорційності, Па$^{-1}$.

А.8.10. Рівняння Прандтля-Рейса

$$d\varepsilon_{ij}^{P} = s_{ij} d\lambda$$

отримано розкладанням прирощення деформації $d\varepsilon_{ij}$ на пружну $d\varepsilon_{ij}^{E}$ і пластичну $d\varepsilon_{ij}^{P}$ складові

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{E} + d\varepsilon_{ij}^{P}.$$

А.8.11. Пластичний потенціал $g(\sigma_{ij})$

$$d\varepsilon_{ij}^{P} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda.$$

А.8.12. Еквівалентне або ефективне напруження

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

Компактна форма

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{-3\mathrm{II}_{\hat{\sigma}_D}}.$$

А.8.13. Еквівалентне або ефективне прирощення пластичної деформації

$$d\varepsilon_{ekv}^{P} = \left\{ \frac{2}{9}\left[\left(d\varepsilon_{11}^{P} - d\varepsilon_{22}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{22}^{P} - d\varepsilon_{33}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{33}^{P} - d\varepsilon_{11}^{P}\right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\left[\left(d\varepsilon_{12}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{23}^{P}\right)^2 + \left(d\varepsilon_{31}^{P}\right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Компактна форма

$$d\varepsilon_{ekv}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{p} d\varepsilon_{ij}^{p}}.$$

А.8.14. Коефіцієнт пропорційності $d\lambda$ через еквівалентні напруження і пластичну деформацію

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}}.$$

А.8.15. Прирощення об'ємної роботи на деформаціях

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

А.8.16. Прирощення роботи на пластичних деформаціях

$$dW^{P} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{P} = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^{P}.$$

Якщо виконуються умови рівняння Прандтля-Рейса, то прирощення роботи на пластичних деформаціях має вигляд

$$dW^{P} = \sigma_{ekv} d\varepsilon_{ekv}^{P},$$

де $d\varepsilon_{ij}^{P} = \dfrac{3}{2}\dfrac{dW^{P}}{\sigma_{ekv}^{2}} s_{ij}$.

А.8.17. Деформаційна теорія пластичності Генки, в якій припускається залежність між напруженнями і повними деформаціями:

$$e_{ij} = \left(\varphi + \frac{1}{2G}\right) s_{ij}, \quad \varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu)\frac{\sigma_{ii}}{E},$$

де $\varphi = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}}$ – параметр Генки; $\varepsilon_{ekv}^{p} = \sqrt{\dfrac{2}{3}\varepsilon_{ij}^{p} d\varepsilon_{ij}^{p}}$ – еквівалентна деформація.

Таким чином

$$\varepsilon_{ij}^{P} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_{ekv}^{P}}{\sigma_{ekv}} s_{ij}.$$

А.8.18. Теорія ліній ковзання під час плоскої пластичної деформації жорстко-ідеально-пластичного середовища. Зв'язок компонент швидкості з положеннями α - і β-ліній ковзання (зсуву)

$$v_1 = v_\alpha \cos\varphi - v_\beta \sin\varphi,$$

$$v_2 = v_\alpha \sin\varphi + v_\beta \cos\varphi.$$

У випадку ізотропного середовища головні осі тензорів напруження і швидкості пластичної деформації співпадають. Якщо x_1 і x_2 – напрямки ліній ковзання, то $\dot{\varepsilon}_{11}$ і $\dot{\varepsilon}_{22}$ дорівнюють нулю вздовж цих ліній. Тоді для визначення поля швидкості маємо

$dv_1 - v_2 d\varphi = 0$ на α-лінії,

$dv_2 + v_1 d\varphi = 0$ на β-лінії.

А.9. Лінійна в’язкопружність

А.9.1. Модель Максвела в’язкопружного середовища є комбінацією пружного і в’язкого елементів, які з’єднано послідовно

$$\frac{\dot{\sigma}}{G}+\frac{\sigma}{\eta}=\dot{\varepsilon},$$

де $\dot{\varepsilon}=d\varepsilon/dt$ – швидкість деформації, с$^{-1}$; $\dot{\sigma}=d\sigma/dt$– швидкість зміни напруження, Па/с; G – модуль зсуву, Па; η – в’язкість, Па·с.

В операторній формі

$$\left\{\frac{\partial_t}{G}+\frac{1}{\eta}\right\}\sigma=\{\partial_t\}\varepsilon,$$

де $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ – лінійний оператор диференціювання за часом.

А.9.2. Модель Кельвіна або Фойхта представляє собою паралельне з’єднання пружного і в’язкого елементів

$$\sigma=G\varepsilon+\eta\dot{\varepsilon}.$$

В операторній формі

$$\sigma=\{G+\eta\partial_t\}\varepsilon.$$

А.9.3. Узагальнена модель Максвела

$$\sigma=\frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/G_1+1/\eta_1\}}+\frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/G_2+1/\eta_2\}}+\cdots+\frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/G_N+1/\eta_N\}}.$$

А.9.4. Узагальнена модель Кельвіна

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{\{G_1+\eta_1\partial_t\}}+\frac{\sigma}{\{G_2+\eta_2\partial_t\}}+\cdots+\frac{\sigma}{\{G_N+\eta_N\partial_t\}}.$$

А.9.5. Загальне рівняння для моделей в’язкопружного середовища

$$p_0\sigma+p_1\dot{\sigma}+p_2\ddot{\sigma}+\cdots=q_0\varepsilon+q_1\dot{\varepsilon}+q_2\ddot{\varepsilon}+\cdots,$$

де p_i і q_i представляють собою комбінації коефіцієнтів G і η та залежать від способу з’єднання елементів у моделі.

Або у вигляді лінійного диференціального операторного рівняння

$$\{P\}\sigma=\{Q\}\varepsilon,$$

де $\{P\}=\sum_{i=0}^{m}p_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}$, $\{Q\}=\sum_{i=0}^{m}q_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}$.

А.9.6. Одинична ступінчаста функція, що описує процес навантаження під час повзучості і релаксації

$$[U(t-t_1)]=\begin{cases}0 \text{ при } t<t_1,\\ 1 \text{ при } t>t_1.\end{cases}$$

А.9.7. Деформація повзучості для моделі Кельвіна

$$\dot{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\tau}=\frac{\sigma_0\left[U(t)\right]}{\eta},$$

де $\tau=\eta/G$ час запізнення, с.

Після інтегрування за часом, отримуємо

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{G}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\left[U(t)\right].$$

А.9.8. Релаксація напруження в матеріалі Максвела після прикладання деформації

$$\dot{\sigma}+\frac{\sigma}{\tau}=G\varepsilon_0\left[\delta(t)\right],$$

де $\left[\delta(t)\right]=d\left[U(t)\right]/dt$ – одинична імпульсна функція або дельта-функція Дірака.

Після інтегрування за часом, отримуємо

$$\sigma(t)=G\varepsilon_0 e^{-t/\tau}\left[U(t)\right].$$

А.9.8. Релаксація напруження в матеріалі Кельвіна

$$\sigma(t)=G\varepsilon_0\left[U(t)\right]+\eta\varepsilon_0\left[\delta(t)\right].$$

А.9.9. Деформація повзучості будь-якого матеріалу (моделі)

$$\varepsilon(t)=\psi(t)\sigma_0,$$

де $\psi(t)$ – функція повзучості, що залежить від моделі матеріалу.

А.9.10. Функція повзучості для узагальненої **моделі Кельвіна**

$$\psi(t)=\sum_{i=1}^{N}J_i\left(1-e^{-t/\tau_i}\right)\left[U(t)\right],$$

де $J_i=1/G_i$ – піддатливість матеріалу, Па$^{-1}$; N – кількість елементів в моделі.

Або в інтегральному вигляді

$$\psi(t)=\int_0^{\infty}J(\tau)\left(1-e^{-t/\tau}\right)d\tau,$$

де $J(\tau)$ – функція розподілу часу запізнення або спектр запізнення.

А.9.11. Релаксація напруження для будь-якої моделі

$$\sigma(t)=\varphi(t)\varepsilon_0,$$

де $\varphi(t)$ – функція релаксації, Па.

А.9.12. Функція релаксації для узагальненої **моделі Максвела**

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{N}G_i e^{-t/\tau_i}\left[U(t)\right].$$

Або в інтегральному вигляді

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty}G(\tau)e^{-t/\tau}d\tau,$$

де $G(\tau)$ – функція розподілу часу релаксації або спектр релаксації.

А.9.13. Інтеграли спадковості:

для деформації

$$\varepsilon(t)=\int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'}\psi(t-t')dt' \text{ або } \varepsilon(t)=\sigma_0\psi(t)+\int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'}\psi(t-t')dt';$$

для напруження

$$\sigma(t)=\int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\varphi(t-t')dt' \text{ або } \sigma(t)=\varepsilon_0\varphi(t)+\int_0^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\varphi(t-t')dt'.$$

А.9.14. Співвідношення між функцією **повзучості** $\psi(t)$ і функцією **релаксації** $\varphi(t)$

$$\overline{\psi}(s)\overline{\varphi}(s)=\frac{1}{s^2},$$

де s – параметр перетворення згідно з перетворенням Лапласа $\bar{f}(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$.

А.9.15. Співвідношення для комплексного модулю $G^*(i\omega)$

$$\frac{\sigma^*}{\varepsilon^*}=G^*(i\omega)=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}e^{i\delta}=G_1+iG_2,$$

де дійсна частина відповідає модулю накопичення, а уявна частина – модулю втрати.

А.9.16. Співвідношення для комплексної піддатливості $J^*(i\omega)$

$$\frac{\varepsilon^*}{\sigma^*}=J^*(i\omega)=\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}e^{-i\delta}=J_1-iJ_2,$$

де дійсна частина дорівнює піддатливості накопичення, а уявна частина – узятій зі зворотним знаком піддатливості втрати.

А.9.17. Тривимірне узагальнення визначальних рівнянь в'язкопружності

$$\{P\}s_{ij}=2\{Q\}e_{ij}, \quad \{M\}\sigma_{ii}=3\{N\}\varepsilon_{ii},$$

де $\{P\}$, $\{Q\}$, $\{M\}$ і $\{N\}$ – диференціальні оператори.

За сталих значень операторів $\{M\}$ і $\{N\}$, отримуємо

$$\{P\}s_{ij}=2\{Q\}e_{ij}, \quad \sigma_{ii}=3K\varepsilon_{ii},$$

де K – об'ємний модуль пружності, Па.

Тривимірні визначальні співвідношення в'язкопружності у формі інтегралів повзучості:

$$e_{ij}=\int_0^t \psi_s(t-t')\frac{\partial s_{ij}}{\partial t'}dt', \quad \varepsilon_{ii}=\int_0^t \psi_v(t-t')\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t'}dt'$$

і інтегралів релаксації:

$$s_{ij} = \int_0^t \varphi_s(t - t')\frac{\partial e_{ij}}{\partial t'}dt', \quad \sigma_{ii} = \int_0^t \varphi_v(t - t')\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t'}dt'.$$

Рівняння, які роздільно написані для чистого зсуву і для чистого розширення

$$s_{ij}^* = 2G^*(i\omega)e_{ij}^* = 2(G_1 + iG_2)e_{ij}^*,$$

$$\sigma_{ii}^* = 3K^*(i\omega)\varepsilon_{ii}^* = 3(K_1 + iK_2)\varepsilon_{ii}^*,$$

де K^* – комплексний об'ємний модуль.

А.9.18. Порівняння рівнянь для квазістатичних ізотермічних задач теорії пружності і в'язкопружності

Рівняння теорії пружності	Перетворення рівнянь теорії в'язкопружності
$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$	$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0$
$2\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})$	$2\bar{\varepsilon}_{ij} = (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$
$\sigma_{ij}n_j = t_i^{(\mathbf{n})}$ на S_1	$\bar{\sigma}_{ij}\bar{n}_j = \bar{t}_i^{(\mathbf{n})}$ на S_1
$u_i = g_i$ на S_2	$\bar{u}_i = \bar{g}_i$ на S_2
$s_{ij} = 2Ge_{ij}$	$\bar{P}(s)\bar{s}_{ij} = 2\bar{Q}(s)\bar{e}_{ij}$
$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$.	$\bar{\sigma}_{ii} = 3K\bar{\varepsilon}_{ii}$.

Додаток Б

Визначення компонент тензора перетворення координат задачі 2.12 з використанням інструментів Mathcad (файл task 2-12.xmcd)

Знаходження компонент тензора перетворення координат Cij з умов ортогональності

$$c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$$

або

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ C21 & C22 & C23 \\ C31 & C32 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ C21 & C22 & C23 \\ C31 & C32 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C21^2 + C31^2 + \frac{1}{3} & C21 \cdot C22 + C31 \cdot C32 + \frac{1}{3} & C21 \cdot C23 + \frac{\sqrt{2} \cdot C31}{2} + \frac{1}{3} \\ C21 \cdot C22 + C31 \cdot C32 + \frac{1}{3} & C22^2 + C32^2 + \frac{1}{3} & C22 \cdot C23 + \frac{\sqrt{2} \cdot C32}{2} + \frac{1}{3} \\ C21 \cdot C23 + \frac{\sqrt{2} \cdot C31}{2} + \frac{1}{3} & C22 \cdot C23 + \frac{\sqrt{2} \cdot C32}{2} + \frac{1}{3} & C23^2 + \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В результаті отримали 9 рівнянь

Із 9-го рівняння знаходимо C23

$$C23^2 + \frac{5}{6} - 1 \text{ solve}, C23 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \qquad C23 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Підставляємо значення C23 у 7 рівняння і знаходимо з нього вираз для C21

$$C21 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} \cdot C31}{2} + \frac{1}{3} \text{ solve}, C21 \rightarrow -\sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot C31}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

В 1 рівнянні $C21^2 + C31^2 + \frac{1}{3} - 1 \ = 0$

підставляємо вираз для C21 і знаходимо з нього C31

$$\left[-\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot C31}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]^2 + C31^2 + \frac{1}{3} - 1 \text{ solve}, C31 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad C31 = 0$$

Знаючи C31=0 знаходимо C21 із 1-го рівняння

$$C21^2 + 0^2 + \frac{1}{3} - 1 \text{ solve}, C21 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \qquad C21 = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Із 8-го рівняння $C22\cdot C23 + \frac{\sqrt{2}\cdot C32}{2} + \frac{1}{3} = 0$ знаходимо вираз для C22

$$C22\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}\cdot C32}{2} + \frac{1}{3} \text{ solve}, C22 \rightarrow -\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot C32}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

У 5 рівняння $C22^2 + C32^2 + \frac{1}{3} - 1 = 0$ підставляємо вираз для C22 і знаходимо з нього C32

$$\left[-\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot C32}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]^2 + C32^2 + \frac{1}{3} - 1 \text{ solve}, C32 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad C32 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

І на кінець знаходимо C22 із виразу для нього

$$C22 = -\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot C32}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$C22 = -\sqrt{6}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}+\frac{1}{3}\right] = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad C22 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

В результаті отримали тензор перетворення координат [Cij]

$$[Cij] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Додаток В

Визначення компонент тензора перетворення координат задачі 2.18 з використанням інструментів Mathcad (файл task 2-18.xmcd)

Знаходження компонент тензора перетворення координат Cij з умов ортогональності

$$c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$$

або

$$\left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C11 & C12 & 0 \\ C21 & C22 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} C11 & C12 & 0 \\ C21 & C22 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C11^2 + C21^2 + \dfrac{1}{3} & C11\cdot C12 + C21\cdot C22 + \dfrac{1}{3} & \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot C21}{3} + \dfrac{1}{3} \\ C11\cdot C12 + C21\cdot C22 + \dfrac{1}{3} & C12^2 + C22^2 + \dfrac{1}{3} & \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot C22}{3} + \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot C21}{3} + \dfrac{1}{3} & \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot C22}{3} + \dfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В результаті отримали 9 рівнянь

Із 6-го рівняння знаходимо C21

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot C21}{3} + \frac{1}{3} \text{ solve}, C21 \rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{6} \qquad C21 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Підставляємо значення C21 у 1 рівняння і знаходимо з нього C11

$$C11^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 \text{ solve}, C11 \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad C11 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Із 8-го рівняння знаходимо C22

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot C22}{3} + \frac{1}{3} \text{ solve}, C22 \rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{6} \qquad C22 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Підставляємо значення C22 у 4 рівняння і знаходимо з нього C12

$$C12^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 \text{ solve}, C12 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad C12 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

В результаті отримали тензор перетворення координат [Cij]

$$[Cij] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз ; пер. с англ. В. И. Свешниковой ; под ред. М. Е. Еглит. — М. : Мир. — 1974. — 319 с.
2. *Механика* сплошных сред в задачах. Т. 1,2 / Под. ред. М. Э. Эглит. — М. : «Московский Лицей», 1996. — с. 396, 394.
3. *Безухов Н. И.* Сборник задач по теории упругости и пластичности / Н. И. Безухов. — М. : Госизд-во теоретико-технической лит-ры, 1957. — с. 286.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды : монография / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1973. — Т.1,2. — 584, 492 с.
5. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды / Л. И. Седов. — М. : Изд-во физ-мат. лит., 1962. — 284 с.
6. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред — М. : Высшая школа. 1983 — 399 с.
7. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды — М. : МГУ, 1978. — 286 с.
8. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и механике сплошных сред. / И. С. Сокольников ; пер. с англ. В. И. Контовта ; под ред. В. В. Лохина. — М. : Наука, 1971. — 376 с.
9. *Техническая* термодинамика / Под общ. ред. Кругова В. И. — М. : Выс. школа. — 1971. — 472 с.
10. *Тимошенко С. П.*, Гере Дж. Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. — М. : Мир, 1976. — 669 с.
11. *Ландау Л. Д.*, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2,6,7. — М., 1985.
12. *Коваленко* А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. — К. : Наукова думка, 1970. — 307 с.
13. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.
14. *Блох В. И.* Теория упругости / В. И. Блох. — Харьков : изд-во Харьковского ун-та, 1964. — 484 с.
15. Механики сплошных сред. Лекции. (Университетский курс общей физики) / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. — М. : изд-во Физичског фак-та МГУ, 1998. — 98 с.
16. *ГеоргиевскийД. В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел / Д. В. Георгиевский. М. : «УРСС», 1998. — 176 с.
17. Тимошенко С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. — К. : «Наукова думка», 1972. — 508 с.
18. *Бреббия К.* Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел ; пер. с англ. Корнейчука Л. Г. ; под ред. Э. И. Григолюка. — М. : Мир, 1987. — 524 с.
19. *Механіка* суцільних середовищ – 1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках: Текст лекцій для студентів спеціальностей 7.05050315, 8.05050315 – «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / Уклад.: О. С. Сахаров, А. Я. Карвацький — К. : НТУУ «КПІ», 2013. — 231 с. (Свідоцтво про електронну публікацію ІХФ № Х 10/13-88). – Електронні текстові дані (1 файл: 1,55 Мбайт). — Київ : НТУУ «КПІ», 2013. — 231 с. — Назва з екрана. — Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/4161
20. *Карвацький А. Я.* Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів [Текст]: навч. посіб. – К. : НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2015. – 392 с. Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ» (Протокол № 4 від 12.05.2015 р.)

ЗМІСТ

Навчальне видання

Карвацький Антон Янович

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Навчальний посібник

В авторській редакції