

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

*Кафедра технічної механіки
та сільськогосподарського
машинобудування*

О.В. Мильніков

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Тернопіль
2010

УДК 620.10(075.8)

Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

Конспект лекцій з курсу «Опір матеріалів» написано у відповідності з освітньо-професійною програмою вищої освіти, затвердженою Міністерством освіти і науки України 1.09.97р., навчальним планом для студентів механічних спеціальностей за напрямом 6.0902 «Інженерна механіка» та матеріалами літературних джерел, наведених у списку посилань.

Розглянуто і схвалено на засіданнях кафедри технічної механіки та сільськогосподарського машинобудування, та методичної комісії факультету переробних і харчових виробництв (ФПХВ).

Рецензент **Підгурський М.І.**, доктор технічних наук, професор
зав.кафедрою технології та обладнання
зварювального виробництва ТНТУ
ім. І. Пулюя

Рекомендувала до друку науково-методична рада Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

О.В. Мильніков, 2010

Видавництво ТНТУ імені Івана Пулюя

Передмова

Конспект написано на основі положень освітньо-професійної програми вищої освіти, затвердженої Міністерством освіти і науки України 1.09.97р., та лекцій з курсу „Опір матеріалів”, які автор читає понад 30 років для студентів механічних спеціальностей у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя.

Серед кращих підручників з опору матеріалів, написаних у різні роки видатними науковими діячами, слід відзначити розробки С.П.Тимошенка, М.М. Беляєва, В.І. Феодосьєва. Гарним підручником, написаним з урахуванням сучасних досягнень механіки деформівного твердого тіла й до того ж прекрасно оформленим є, на думку автора, „Сопротивление материалов”, за редакцією академіка НАН України Г.С. Писаренка.

На жаль, з відомих україномовних підручників, автор у позитивному плані відзначає тільки підручник С.Л. Посацького.

Не випадковим явищем є значна кількість підручників та посібників – складних і простих, математизованих і не дуже, з урахуванням вузької інженерної спеціалізації та загального спрямування саме з опору матеріалів. Так чи інакше, інженери різних профілів (і не тільки інженери) стикаються з практичною необхідністю оцінювати та забезпечувати міцність, жорсткість і стійкість конструкцій різних ступенів складності.

Викладач змушений доводити майбутнім інженерам загальні й давно відомі істини, перетворюючи їх кожного разу так, щоб конкретна студентська аудиторія певного інженерного спрямування, певного рівня загального розвитку й математичної підготовки змогла б їх сприйняти. Це і є основним мотивом створення даного конспекту, який зможуть використовувати як студенти механічних спеціальностей ТНТУ імені Івана Пулюя, так і всі, хто вивчає опір матеріалів.

Конспект лекцій містить, в основному, тільки лекційний матеріал, включаючи лише деякі приклади розв’язку конкретних задач, які допомагають засвоїти теоретичні питання. Це зумовлено, по-перше, тим, щоб не перевантажувати об’єм конспекту, по-друге, тому, що ці питання, їх важливість, складність і актуальність вимагають відображення в окремій навчально-методичній літературі.

Слід відзначити, що при написанні конспекту автор послуговувався, в основному, такими поважними джерелами, як підручник „Сопротивление материалов” М.М. Беляєва та „Сопротивление материалов”, написаний колективом авторів на чолі з Г.С. Писаренком.

Необхідність цього кроку вмотивована спробою стисло й зрозуміло викласти той матеріал, який можна донести до студентів у сучасних скорочених за часом курсах із опору матеріалів.

Автор висловлює подяку співробітникам кафедри технічної механіки та сільськогосподарського машинобудування ТНТУ імені Івана Пулюя за допомогу в підготовці цієї роботи. Особлива подяка докторові технічних наук, професору Підгурському М.І. за рецензування конспекту.

Лекція 1. Тема 1. Вступ. Основні поняття й задачі опору матеріалів

Вступ. Задачі опору матеріалів. Коротка історична довідка. Основні гіпотези опору матеріалів. Класифікація тіл. Поняття про деформації. Сили та моменти сил.

1.1. Вступ

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій, деталей машин і приладів.

Що ж таке міцність, жорсткість та стійкість?

Чому саме інженерні методи розрахунку? Що слід розуміти під терміном конструкція?

Міцність – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, **не руйнуючись**.

Жорсткість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, **якомога менше деформуючись**.

Стійкість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, зберігаючи **первісну форму пружної рівноваги**.

Як бачимо, опір матеріалів вивчає поведінку тіл у полі зовнішніх сил. Але ж цим займається і теоретична механіка. Чим тоді відрізняються курси опору матеріалів і теоретичної механіки?

Якщо в теоретичній механіці всі тіла вважають абсолютно твердими і розглядають закономірності руху цих тіл, то в задачах опору матеріалів усі тіла вважають твердими, але здатними до деформацій, і розглядають процеси, пов'язані з цими деформаціями, а рух цих тіл цікавить тільки з точки зору утворення додаткових сил (наприклад, сил інерції).

Під терміном „конструкція” будемо розуміти сукупність елементів (тіл), які функціонально пов'язані між собою та виконують певне технічне завдання. Тіло, в свою чергу, теж може виступати в ролі конструкції, якщо, наприклад, у постановці задачі потрібно враховувати неоднорідну побудову (композитні матеріали).

Опір матеріалів є наукою інженерних методів розрахунку саме тому, що постановка задач передбачає рівень абстрагування та спрощення таким, щоб інженер-практик міг розв'язати ці задачі, використовуючи доступний для нього математичний апарат.

Таким чином, опір матеріалів – це загальна наука про міцність і надійність конструкцій та їх елементів. Ці ж питання вивчають й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, яка в більшості розглядає закономірності, пов'язані зі створенням цілих систем стержнів, функціонально пов'язаних між собою: математична теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості, реологія та ін. Але ці науки використовують більш розвинений апарат математики.

При вирішенні основної задачі опору матеріалів – вибору матеріалу й поперечних розмірів для елементів споруд і машин, крім уміння обчислювати напруження, необхідне знання механічних властивостей реальних матеріалів. Це зумовлює необхідність лабораторних експериментальних досліджень. Глибокі знання про міцність матеріалів, що використовуються, і не менш глибоке і чітке уявлення про розподіл напружень в елементах конструкцій – ось що повинен дати курс опору матеріалів інженеру, аби достатньо озброїти його для вирішення практичних задач.

1.2. Задачі опору матеріалів

При проектуванні конструкцій і машин інженеру доводиться вибирати матеріал і поперечні розміри для кожного елемента конструкції так, щоб він надійно, без ризику руйнуватися або спотворити свою форму, *чинив опір* дії зовнішніх сил, які передаються на

нього від сусідніх частин конструкції, тобто, щоб була забезпечена нормальна робота цього елемента. Підстави для правильного вирішення цієї задачі дає інженеру наука про *опір матеріалів*.

Опір матеріалів, вивчаючи поведінку різних матеріалів під впливом сил, вказує, як підібрати для кожного елемента конструкції необхідний матеріал і поперечні розміри за умови повної надійності роботи і найбільшого здешевлення конструкції.

Іноді в опорі матеріалів доводиться вирішувати видозмінену задачу — перевіряти достатність розмірів уже запроєктованої або існуючої конструкції.

Вимоги надійності та найбільшої економії суперечать одна одній. Перше, зазвичай, призводить до збільшення матеріалоемності, друге ж вимагає її зниження. Ця суперечність є найважливішим елементом наукової методики, що зумовлює розвиток опору матеріалів як науки.

Часто настає момент, коли існуючі матеріали і методи перевірки міцності не в змозі задовольнити потреби практики, що ставить на чергу вирішення нових задач (наприклад, використання великих швидкостей в техніці взагалі, в авіації та турбобудуванні зокрема, перекриття великих прольотів, динамічні задачі та ін.). Тоді починаються пошуки нових матеріалів, дослідження їх властивостей, поліпшення і створення нових методів розрахунку та проектування. Опір матеріалів повинен встигати за загальним прогресом техніки.

У деяких випадках інженеру, крім основних вимог – надійності й найбільшої економії, – при виконанні конструкції доводиться задовольняти й інші умови, наприклад, вимоги до підвищення темпів спорудження (при відновленні зруйнованих споруд), мінімальної ваги (при конструюванні літаків) і т.п. Ці обставини також відображаються на виборі матеріалу, розмірів і форм самої конструкції та її елементів.

1.3. Коротка історична довідка

Початок розвитку опору матеріалів як науки відносять до 1638 р. і пов'язують з ім'ям Галілео Галілея, знаменитого італійського вченого. Він був професором математики в Падуї, жив у період розпаду феодального ладу, розвитку торгового капіталу, налагодження міжнародних морських зв'язків, зародження гірничої та металургійної промисловості.

Нова економіка того часу поставила за мету вирішення ряду нових технічних проблем. Пожвавлення зовнішніх торговельних відносин зумовило завдання збільшення вантажопідйомності суден, а це спричинило необхідність зміни їх конструкції. Водночас постало питання реконструкції та створення нових внутрішніх водних шляхів, включаючи розбудову каналів і шлюзів. Ці технічні завдання не могли бути вирішені простим копіюванням існуючих раніше конструкцій суден і споруд. Виявилось, що необхідно навчитися шляхом розрахунку оцінювати міцність елементів конструкції залежно від їх розмірів і величини діючих на них навантажень.

Значна частина робіт Галілея була присвячена вирішенню задач про залежність між розмірами балок та інших стержнів із тими навантаженнями, які можуть витримати ці елементи конструкції. Він вказав, що отримані ним результати можуть «принести велику користь при спорудженні великих суден, особливо при зміцненні палуб і покриттів, оскільки в таких спорудах легкість має величезне значення». Дослідження Галілея опубліковані в його книзі „Discorsi e Dimostrazioni matematiche” (1638, Лейден, Голландія).

Подальший розвиток опору матеріалів відбувався паралельно з розвитком техніки будівництва і машинобудування, що пов'язало його з цілим рядом робіт видатних учених-математиків, фізиків та інженерів, у тому числі й вітчизняних.

Слід навести і негативний приклад, який досить сильно вплинув на розвиток опору матеріалів. І. Ньютон, якому завдячують бурхливим розвитком математика й механіка в цілому, у зв'язку з особистою неприязню до Р. Гука, зробив багато для того, щоб опір матеріалів - галузь науки, якою плідно займався Гук, вважалася недостойною уваги видатних

умів того часу. Це було причиною того, що механіка твердого деформівного тіла, зокрема опір матеріалів, були загальмовані в своєму розвитку років на півтора ста.

Великий внесок в науку про опір матеріалів в XVIII столітті вніс дійсний член Петербурзької Академії наук Леонард Ейлер, що вирішив задачу про стійкість стиснутих стержнів.

У XIX столітті світової популярності набули роботи Д.І. Журавського і Х.С. Головіна. У зв'язку з проектуванням і спорудженням мостів на Миколаївській залізниці, що будувалася між Петербургом і Москвою, Д.І. Журавський вирішив ряд важливих і цікавих питань, пов'язаних з міцністю балок при їх згині. Х.С. Головін уперше правильно розв'язав задачу про міцність кривих стержнів. Збагатили світову науку роботи Ф.С. Ясинського з питань стійкості елементів конструкцій, викликані необхідністю вивчення причин руйнування мостів. Професор М.О. Белелюбський організував і довго керував найбільшою в світі лабораторією з випробовувань матеріалів у Петербурзькому інституті інженерів шляхів сполучення. Він же протягом багатьох років працював головою міжнародного суспільства з випробовувань матеріалів. Кінець IX століття був ознаменований появою перших наукових робіт одного з видатних учених у галузі механіки – С.П. Тимошенка.

З початку XX століття роль вітчизняних учених в опорі матеріалів стала провідною. Професор І.Г. Бубнов заснував сучасну науку про міцність корабля. Академік А.Н. Крилов, крім подальшого розвитку праць про розрахунок корабля, провів важливі дослідження в галузі динамічних розрахунків. Професор Н.П. Пузиревський створив нову методику розрахунку балок на пружній основі. З численних праць академіка Б.Г. Гальоркіна досить згадати роботи, присвячені розвитку варіаційних методів механіки, загальному вирішенню просторової задачі теорії пружності й розрахунку плит. Багатьох питань розрахунку на міцність торкалися і роботи С.П. Тимошенка. Академік А.Н. Диннік опублікував ряд капітальних робіт, присвячених стійкості елементів конструкцій. Проф. М.М. Герсеванов плідно працював у галузі механіки ґрунтів, розв'язував задачі міцності і стійкості основ і фундаментів споруд і машин. Професори П.Ф. Папкович і Ю.А. Шиманський очолили школу вчених, що займалася питаннями міцності кораблів. Професор М.М. Давиденков спільно зі своїми учнями створив нову теорію, що пояснює причини руйнування матеріалів. Велике значення мають і його праці з питань динамічної міцності та руйнування при ударі. Зусиллями наших інженерів розроблено нову теорію розрахунку залізобетонних конструкцій, яка відображає дійсний характер роботи цих конструкцій і при забезпеченій міцності дає значну економію матеріалів. Академік М.І. Мусхелішвілі розвинув сучасні методи теорії функцій комплексної змінної й теорії сингулярних інтегральних рівнянь і застосував їх до вирішення ряду проблем. Професор В.З. Власов створив нову оригінальну теорію розрахунку тонкостінних оболонок і тонких стержнів, що мають широке використання в різних конструкціях. Великий внесок у розвиток механіки твердого деформівного тіла зробили академіки А.Д. Коваленко (термопружність і термопластичність), Г.М. Савін (теорія пластин та оболонок, концентрація напружень), Г.С. Писаренко, Я.С. Підстригач та інші. Наукова школа, яку вони створили, є однією з найпотужніших шкіл механіків у світі.

1.4. Основні поняття опору матеріалів

1.4.1. Основні гіпотези опору матеріалів.

Опір матеріалів, як і будь-яка інша наука, базується на певних гіпотезах (аксіомах), основними з яких є:

- *гіпотеза про суцільність матеріалу* – матеріал заповнює все тіло;
- *гіпотеза про однорідність та ізотропність* – матеріал вважають однорідним та ізотропним;

- *гіпотеза про малі деформації* – розглядають деформації, які значно менші за розміри самих тіл (на 2 порядки і більше);
- *гіпотеза про ідеальну пружність (пружність – здатність тіл відновлювати свою форму та розміри при розвантаженні)*;
- *закон Гука* – приймається лінійна залежність між величинами сил і деформаціями, які викликані ними. Більшість задач опору матеріалів розв’язують саме в цій постановці.

Гук Роберт (1635 – 1703) – англійський вчений-енциклопедист. Вивчав питання тиску повітря, розробив теорію капілярності, відкрив закон пропорційності між силами та деформаціями тіл, займався теорією планетарних рухів, висловлював ідею всесвітнього тяжіння, вивчав питання, пов’язані з природою світла, побудував перший повітряний насос та інші прилади, працював над проектами літальних апаратів. Після Великої лондонської пожежі брав активну участь у відбудові міста – багато споруд було виконано за його проектами.

- *принцип суперпозиції* – вважають, що результат від суми дій дорівнює сумі результатів від кожної дії окремо;
- *принцип Сен-Венана* – якщо тіло навантажене силами і при цьому розміри зони прикладання цих сил незначні в порівнянні з розмірами тіла, то в перерізах, достатньо віддалених від місць прикладання сил, напруження практично не залежить від способу навантаження.

Барре де Сен-Венан (1797 – 1886) – французький вчений у галузі математики та механіки. Основні дослідження відносяться до механіки твердого тіла, теорії пружності, гідростатики, гідродинаміки та векторного числення.

Хоча наведені гіпотези дають дуже великі наближення при дослідженні процесів, які відбуваються в тілах при навантаженні, інженерна практика дає змогу оцінити розрахунки, які базуються на цих гіпотезах як такі, що досить добре описують загальний стан навантажених тіл.

1.4.2. Класифікація тіл, що приймається в Опорі матеріалів.

В опорі матеріалів, як і в будь-якій науці, розглядають не самі конкретні тіла, а якийсь спрощений їх символ, модель, абстрагуючись від другорядних ознак цього тіла.

Усі тіла при розгляді задач опору матеріалів можна віднести до однієї з відповідних моделей:

- *стержень (брус)* – це тіло, в якого один із розмірів значно більший, ніж два інших (рис.1.1). При цьому стержень може бути з прямою віссю (прямий стержень) або ламаною віссю (рама). Стержні можуть бути як призматичні (рис.1.1а,б). так і змінного поперечного перерізу (рис. 1.1в);

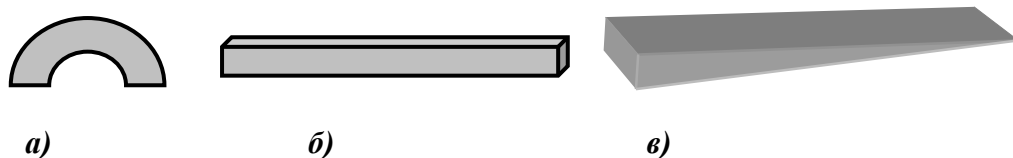


Рис.1.1. Типи стержнів (а – кривий, б – прямий, в –змінного поперечного перерізу)

– *оболонка* – це тіло, в якого один із розмірів значно менший, ніж два інших (рис.1.2а). За формою серединної поверхні оболонки поділяють на циліндричні, конічні, сферичні.

Якщо серединна поверхня є площиною, то таку оболонку називають *пластиною* (рис.1.2б).



Рис.1.2. Оболонка (а) та пластина (б)

– *масиви* – тіла, в яких усі розміри приблизно одного порядку (рис.1.3).



Рис.1.3. Масив

Прикладами деталей, які розглядають як прямі стержні, є вали, балки, осі. Криві стержні – крюки підйомних кранів, віконні ручки і т.п. Як оболонки можна розглядати стінки котлів, обшивку крила літака, корпус підводного човна й т.п. До пластин відносять плоскі кришки люків, панелі перекриття, диски турбомашин і т.п. Масивами можуть бути представлені куски каменю, блоки фундаментів та ін.

1.4.3. Поняття про деформації.

Під деформаціями розуміють будь-які зміни розмірів або форми тіла.

Деформації можуть бути *абсолютні та відносні* (коли їх вимірюють відношенням зміни величини до її початкового значення).

У більшості випадків деформація тіла складається з двох частин: *пружної та пластичної (залишкової)*.

Пружні – це деформації, які зникають при розвантаженні тіла. *Пластичні* – такі, що залишаються після розвантаження.

За нормальної експлуатації інженерних конструкцій не допускаються пластичні деформації, коли розміри і форми елементів конструкцій незворотно змінюються. Визначення умов виникнення та зростання пластичних деформацій має велике значення для знаходження тих навантажень, які безпечно можуть передаватися на конструкцію.

1.4.4. Сили та їх класифікація.

Сили, що діють на тіло, можна класифікувати за різними ознаками.

Вони можуть бути *зовнішніми та внутрішніми*. Зовнішні – це сили, які прикладаються до тіла за рахунок інших тіл. Зовнішні сили, розподілені по всьому об'єму тіла або його частині, називають *об'ємними або масовими*. Зовнішні сили, прикладені по поверхні, називають *поверхневими*.

Навантаження – це система зовнішніх сил, що діють на тіло.

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між частинами твердого тіла. Зовнішні сили викликають деформації тіл, що призводить до виникнення вже внутрішніх сил.

Навантаження тіла може бути *статичним або динамічним*. Статично прикладені – це сили, при дії яких практично немає прискорень тіла (чи його частин). Це має місце, коли навантаження тіла проводити, повільно змінюючи від нуля до повного прикладання сили. Динамічним називають навантаження, при якому виникають прискорення тіла (чи якоїсь його частини) і, як наслідок, сили інерції.

Навантаження може бути *зосередженим* (діяти в досить локальній зоні – практично в точці) (рис.1.4а) та *розподіленим* (тобто діяти або на певній площадці, або на певній довжині) (рис.1.4б,в). Якщо розподіл має рівномірний характер (рис.1.4в), навантаження називають *рівномірно-розподіленим*.

Для того, щоб порахувати повне навантаження Q в цьому випадку, рівномірно-розподілене навантаження q треба помножити відповідно на площу, по якій воно розподіляється (або на довжину – у випадку розповсюдження по довжині). Тобто у випадку, зображеному на рис. 1.4в. : $Q = qa$.

Зосереджені сили, як правило, позначають великими літерами F, R, Q, H ; вони мають розмірність одиниць сили (Н), (кН) та (МН).

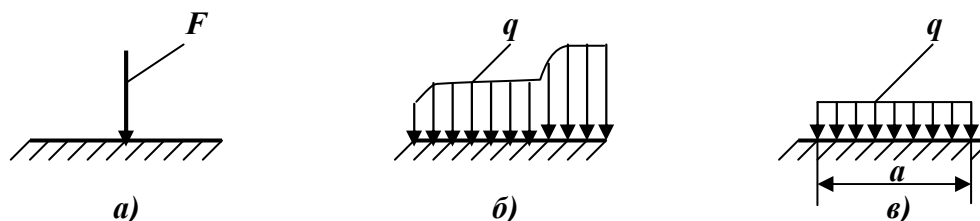


Рис. 1.4. Види навантажень: а) зосереджене, б) розподілене, в) рівномірно розподілене

Розподілене навантаження, як правило, позначають літерою q і воно має розмірність сили, віднесеної до площі (або сили, віднесеної до довжини) ($\text{Н}/\text{м}^2$), ($\text{кН}/\text{м}^2$) та ($\text{МН}/\text{м}^2$), або ($\text{Н}/\text{м}$), ($\text{кН}/\text{м}$) та ($\text{МН}/\text{м}$).

Момент сили відносно точки (осі) – це добуток сили на плече (рис 1.5).

Плече – це відстань від точки (осі), відносно якої визначають момент, до лінії дії сили (а не до точки прикладання сили, як дехто помилково думає).

Тобто момент сили F відносно точки (осі) A розраховують так:

$$M_A = F \cdot a,$$

де a – це і є плече – довжина перпендикуляра, встановленого від т. A до лінії дії сили F .

Моменти сил позначають літерами M або T ; вони мають розмірність добутку сили на довжину - (Нм), (кНм) та (МНм).

При цьому треба зауважити: якщо силу F переміщувати вздовж лінії її дії, момент її відносно точки (осі) A буде залишатися незмінним.

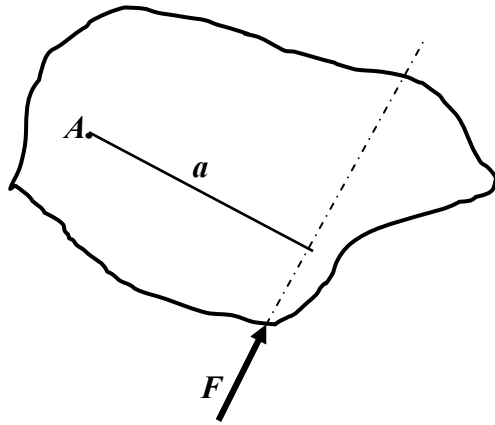


Рис.1.5. Обчислення моменту сили F відносно точки (осі) A

Цілком зрозуміло також, що у випадку, коли напрямок дії сили проходить через точку (вісь), момент сили відносно цієї точки (осі) дорівнює нулю.

Позначають моменти сил як показано на рис. 1.6а,в.



Рис. 1.6. Моменти сил: а) крутний, б) згинаючий

Лекція 2. Закінчення теми 1 (вступ). Тема 2. Розтяг–стиск. Тема 3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів

Умови рівноваги. Метод перерізів. Поняття про напруження. Прості види деформацій. Деформація розтягу–стиску. Внутрішні сили, напруження, розрахунок на міцність. Деформації, Закон Гука, модуль Юнга I роду, коефіцієнт Пуассона. Механічні характеристики конструкційних матеріалів. Діаграма розтягу пластичних матеріалів.

1.4.5. Умови рівноваги.

У зв'язку з тим, що опір матеріалів розглядає деформації тіл, у більшості випадків нехтуючи їх рухом, одними з основних математичних залежностей, що використовуються, є рівняння рівноваги.

В загальному випадку просторової задачі (рис.1.5), вибравши ортогональну декартову систему координат, їх можна сформулювати так:

- суми проекцій усіх сил, що діють на тіло, на відповідні осі дорівнюють нулю;
- суми моментів усіх сил, що діють на тіло, відносно будь-якої координатної осі дорівнюють нулю.

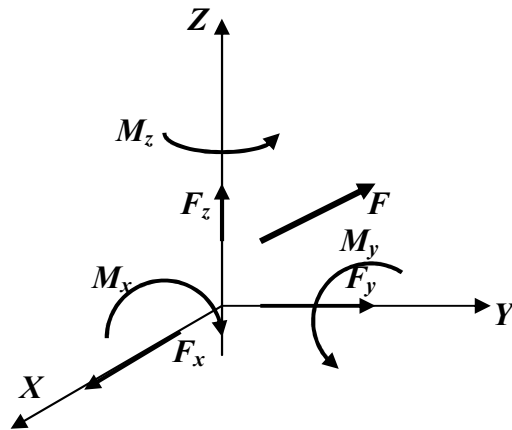


Рис.1.5. Силі фактори при загальному випадку просторового навантаження

Або символічно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum Z = 0 \end{array} \right. \quad (1.1')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{array} \right. \quad (1.1'')$$

Зрозуміло, що для плоскої задачі цих рівнянь вже буде тільки три (суми проекцій сил на кожну з осей дорівнюють 0 та сума моментів усіх сил відносно будь-якої довільної точки цієї площини теж дорівнюють 0).

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

У випадку лінійного навантаження (уздовж однієї осі) рівняння рівноваги буде тільки одне – алгебраїчна сума всіх сил повинна дорівнювати 0.

$$\sum X = 0 \quad (1.3)$$

При розгляді стержневих систем постає питання про знаходження внутрішніх сил, що діють у будь-якому довільному перерізі. Для цього може бути використано

метод перерізів, суть якого полягає у тому, що внутрішній силовий фактор (сила, момент) у перерізі знаходять як алгебраїчну суму всіх сил, взятих з одного боку від цього перерізу.

Суть методу зображено на рис. 1.6а,б,в.

Чому саме з одного боку? Тому, що за законами рівноваги сума сил з другого боку повинна дорівнювати тій же величині та бути спрямованою в протилежний бік (рис 1.6в), виходячи з (1.3).

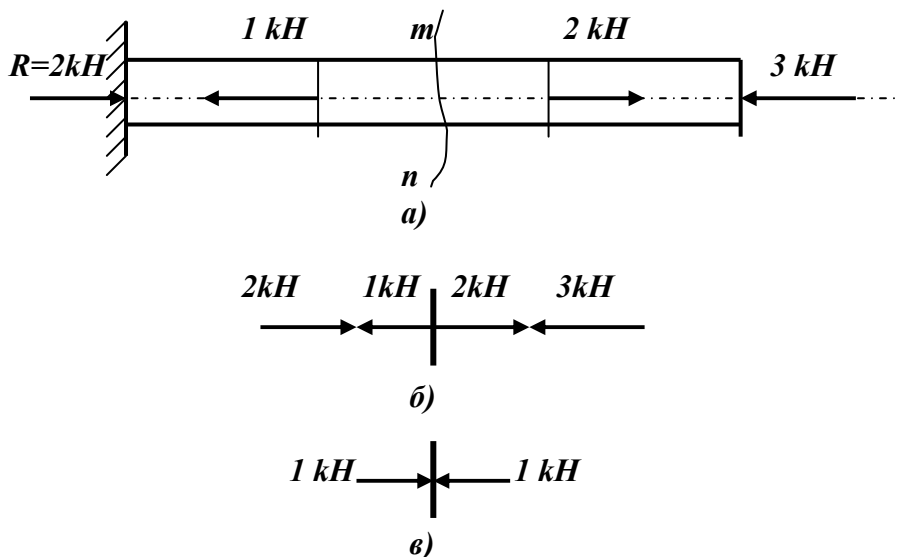


Рис. 1.6. Ілюстрація методу перерізів

Слід зауважити, що, по-перше, реакції опор – це також зовнішні сили і ними не можна нехтувати, по-друге, якщо зображений на рисунку вектор сили направлений в один бік, а величина сили за обчисленнями дорівнює від’ємному числу, то насправді сила спрямована в інший бік. Користуючись цим методом, неважко побудувати епюру навантажень у наведеному стержні (рис 1.7).

Таким чином, від системи зовнішніх сил можна перейти до внутрішніх силових факторів, тобто тих сил і моментів, що діють безпосередньо в перерізі, який нас цікавить.

1.4.6. Напруження.

При вирішенні питання про міцність конструкції недостатньо знати тільки систему сил, що діють на цю конструкцію. Необхідно знати ще її розміри та матеріал, з якого вона зроблена. На початку XIX століття Огюст Коші, відомий математик і механік, увів поняття

напруження, яке одночасно характеризувало й силові фактори, що діяли в перерізі, й геометричні розміри цього перерізу. Напруження в загальному вигляді – це відношення сили, що діє по площадці до величини (площі) цієї площадки.

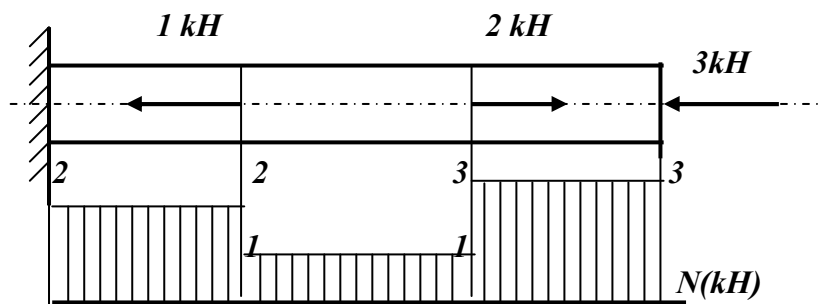


Рис.1.7. Розподіл навантажень у стержні

Коші Огюстен Луї (1789–1857) – французький математик. Написав понад 700 наукових робіт з теорії функцій, математичної фізики, математичного аналізу. В галузі механіки ввів поняття напруження, розробив диференціальні рівняння рівноваги, вивів загальні співвідношення між компонентами напружень і деформацій для ізотропного тіла. В оптиці розвинув теорію Френеля та теорію дисперсії. За наукові досягнення був удостоєний звання барона.

Розглянемо довільне тіло, на яке діє система зовнішніх сил $F_1, F_2 \dots F_i$ (рис. 1.8) і при цьому тіло знаходиться у рівновазі.

Розглянемо переріз тіла. Якщо відкинути ліву частину, то для збереження рівноваги до точок перерізу треба прикласти сили, які дорівнюють силам, що діють з боку відрізаної частини (рис. 1.9).

Вибираємо в околі якоїсь довільної точки A елементарну площадку dA . На неї буде діяти певна (внутрішня вже) сила dF . Тоді можна вважати, що **повне напруження**

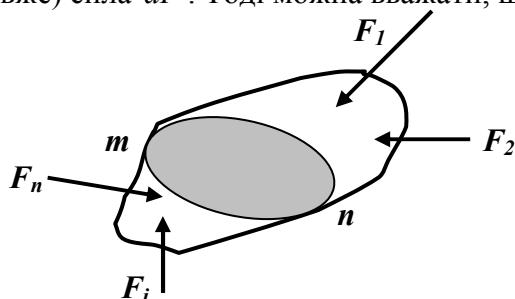


Рис.1.8. Навантажене тіло

в т. A на площадці dA визначається як

$$p = \frac{dF}{dA} \quad (1.4)$$

Це *повне* напруження в т. A можна розглянути у вигляді двох складових – *нормальної* – σ та *дотичної* – τ (рис 1.10). У свою чергу

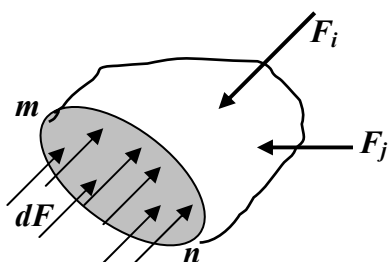


Рис.1.9. Розподіл сил по перерізу

$$\sigma = \frac{dN}{dA} ; \quad (1.5)$$

$$\tau = \frac{dQ}{dA} . \quad (1.6)$$

Очевидна залежність

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 . \quad (1.7)$$

Напруження на площадці є векторною величиною з модулем, який

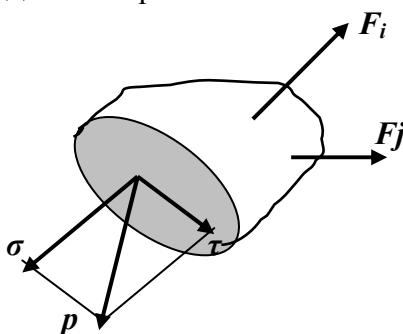


Рис.1.10. Типи напружень

обчислюємо за формулами (1.4 – 1.6). Слід зауважити: якщо через т. A провести якийсь інший переріз і знову спробувати знайти напруження, то величина напруження, як повного, так і його складових, буде вже іншою. *Тобто, напруження в точці твердого тіла залежить не тільки від зовнішніх сил, геометрії системи та положення точки, в якій визначаються напруження, а ще й від того, як в цій точці орієнтована площадка, на якій визначаються напруження.*

Уява напруження у вигляді двох складових – нормальної та дотичної – допомагають зрозуміти способи руйнування тіла. Нормальне напруження зумовлює відрив частинок однієї від іншої. Дотичне напруження відповідно зумовлює їх взаємний зсув.

Розмірність одиниць напружень – це відношення одиниць сили до одиниць площі. В міжнародній системі за одиницю напружень приймають 1 Паскаль ($Па$), що дорівнює 1 Ньютону ($Н$) поділеному на $1\text{метр}^2 (\text{м}^2)$.

$Па = \frac{Н}{\text{м}^2}$ – досить мала величина, тому в техніці поширеніші одиниці виміру 1 кПа

(кілоПаскаль) ($кПа = \frac{кН}{\text{м}^2}$) або 1 МПа (мегаПаскаль) ($МПа = \frac{МН}{\text{м}^2}$).

1.5. Прості види деформації

Деформації тіл, що нас оточують прийнято поділяти на чотири прості види:

- розтяг–стиск;
- зсув (або зріз);
- кручення;
- згин.

Навіщо це роблять? Щоб навчитися визначати напружений та деформований стан у кожному окремому випадку простої деформації, а далі, використовуючи принцип суперпозиції та певні теорії міцності, оцінювати міцність і жорсткість елементів конструкцій у реальній ситуації наявності сукупності простих видів деформації.

Розглянемо окремо кожен із простих видів деформації.

Тема 2. Розтяг–стиск

Розтяг (або стиск) – це вид деформації, який виникає, якщо до стержня прикладати систему сил, які діють уздовж його осі.

Чому ми об'єднуємо такі протилежні, здавалося б, види деформації?

Справа в тому, що процеси, які відбуваються при розтягу або стиску? в більшості випадків є ідентичними, як і механічні характеристики дуже великої кількості пластичних конструкційних матеріалів. Тому ці протилежні види – розтяг і стиск – описують одними й тими ж математичними залежностями й об'єднують як один вид: *розтяг–стиск*. При цьому домовилися: все, що стосується розтягу (сили, напруження, деформації і т.п.) рахувати зі знаком +, а те, що стосується стиску – зі знаком –.

При розгляді розтягу – стиску користуються основними гіпотезами, які розглянуто вище. Крім того, вводять ще гіпотези, характерні саме для певних видів простої деформації. Наприклад, приймають гіпотезу плоских перерізів – *поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступально вздовж осі стержня*.

2.1. Внутрішні сили та напруження при розтягу – стиску

Розглянемо стержень, навантажений поздовжніми силами (рис 2.1).

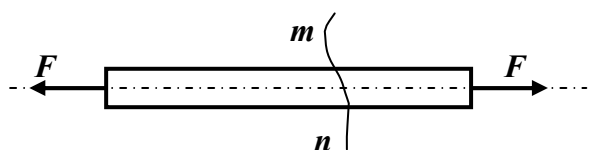


Рис. 2.1. Стержень, що розтягується

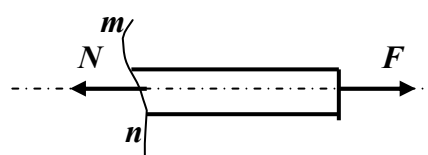


Рис. 2.2. Внутрішня сила в перерізі

У поперечному перерізі навантаженого таким чином стержня виникають тільки нормальні складові внутрішніх сил – N (рис. 2.2). Тому в довільному поперечному перерізі можуть виникати лише нормальні напруження. Причому ці напруження в кожній точці перерізу будуть однаковими, оскільки маленькі частки (диференціали) сили dN будуть однаковими на площадках dA , тобто формулу

$$\sigma = \frac{dN}{dA}$$

можна замінити на

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.1)$$

і тоді зрозуміло, що критерій міцності при розтягу–стиску можна записати так:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (2.2)$$

Слід зауважити, що може бути й інший варіант:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_{\min}} \leq [\sigma] \quad (2.3)$$

де $[\sigma]$ – допустимий рівень напружень, який є однією з основних механічних характеристик конструкційного матеріалу. Методику його визначення описано у параграфах 3.8., 3.9. З умов міцності (2.2) та (2.3) або за відомими силами N_{\max} (визначеними за методом перерізів) можна знайти площу поперечного перерізу стержня A або навпаки, якщо площа перерізу відома, знайти внутрішні, а далі й зовнішні сили, які можна прикласти до стержня.

2.2. Деформації при розтягу–стиску

Розглянемо стержень, зображений на рис. 2.3.

Нехай він має довжину l і площу поперечного перерізу A . Цей стержень розтягується силою F , прикладеною до вільного кінця стержня та власною вагою.

При розтягу–стиску розглядають абсолютну деформацію – видовження – Δl та відносну – ε , що дорівнює відношенню абсолютного видовження до початкової довжини стержня. Цю величину зазвичай називають деформацією:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.4)$$

Розглянемо спочатку видовження без урахування власної ваги стержня.

Експериментально встановлена залежність

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad (2.5)$$

яка є відображенням закону Гука, що пов'язує між собою сили і видовження лінійною залежністю.

При цьому величина E – це модуль Юнга I роду (або модуль пружності I роду).

Томас Юнг (1773–1829) – вчений- енциклопедист.

Був домашнім учителем, лікарем, професором, секретарем Бюро довгот, видавцем наукових журналів, займався різними галузями науки. Був, до речі, першим із сучасних учених, хто прочитав єгипетські написи на папірусах. Займався фізикою, хімією, фізіологією, медициною, астрономією, геофізикою, механікою, технікою, філологією. Відкрив інтерференцію світла та заснував хвильову теорію світла. Розвинув теорію звуку. Розробив теорію згину консольної та звичайної балки, досліджував пружну та пластичну деформації. Розвинув теорію руйнування

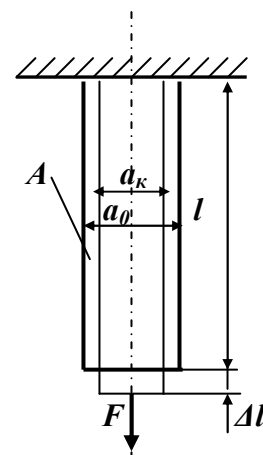


Рис. 2.3. Розтяг стержня

твердих тіл ударом. Увів поняття модуля пружності. Є одним із засновників науки про опір матеріалів.

Юнг увів цю величину, яка є однією з найважливіших механічних характеристик матеріалу.

Залежність (2.5) можна представити у дещо іншому вигляді:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA}$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.6)$$

або

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.7)$$

З виразів (2.6), (2.7) можна визначити, що E – це коефіцієнт пропорційності між напруженнями σ та деформаціями ε . Зрозуміло, що E має розмірність напружень (Па, кПа, МПа), оскільки ε – величина безрозмірна. Величину „ EA ” називають жорсткістю стержня при розтягу-стиску, а величину $\frac{EA}{l}$ – відносною жорсткістю.

2.3. Коефіцієнт Пуассона

Якщо до стержня прикладати навантаження вздовж осі, то в поперечному напрямку теж буде відбуватися деформація (рис.2.3). Якщо стержень уздовж осі буде видовжуватися, то в поперечному напрямі він буде звужуватися. Тоді поперечне видовження (точніше вкорочення) –

$$\Delta a = a_0 - a_k \quad (2.8)$$

і відповідно поперечна деформація

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a} \quad (2.9)$$

Однією з найважливіших механічних характеристик матеріалу є так званий коефіцієнт Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| \quad (2.10)$$

Цей коефіцієнт є безрозмірною величиною, яка для конструкційних матеріалів змінюється в межах 0 – 0,5. Враховуючи, що поздовжня та поперечна деформації мають протилежні знаки, можна записати:

$$\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon \quad (2.11)$$

Слід зазначити, що для деяких матеріалів (наприклад, біологічних тканин) коефіцієнт Пуассона може бути навіть більшим від 1.

Цими двома характеристиками далеко не вичерпується весь список механічних властивостей матеріалів, які повинні бути відомі інженерові-конструктору для правильного вибору матеріалу для конструкції, яку він проектує. Тому далі розглянемо деякі основні механічні властивості матеріалів та способи їх визначення.

Тема 3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів

Для того, щоб проектувати і створювати конструкції та деталі машин, треба насамперед знати механічні властивості матеріалів, з яких планується виготовлення окремих

елементів цих конструкцій та деталей. Для цього проводять лабораторні натуральні дослідження їх зразків.

Матеріали прийнято поділяти на *крихкі* та *пластичні*. Пластичні – це такі, що руйнуються при досить великих залишкових деформаціях $\varepsilon \sim (8 \div 28)\%$. Крихкими називають матеріали, що руйнуються при малих величинах залишкових деформацій $\varepsilon \leq 2\%$.

При цьому мається на увазі, що випробовування матеріалів проводять при кімнатних температурах та нормальних атмосферних тисках .

3.1. Діаграма розтягу пластичних матеріалів

Багато відомостей про матеріал інженери отримують із випробувань зразків на розтяг аж до руйнування. Для дослідів виготовляють зразок циліндричної форми круглого або прямокутного перерізу (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Зразок для випробовувань

Зразок закріплюють у захватах розривної машини і починають розтягувати. При цьому самописець, з'єднаний з машиною, рисує так звану діаграму Прандтля (рис. 3.2).

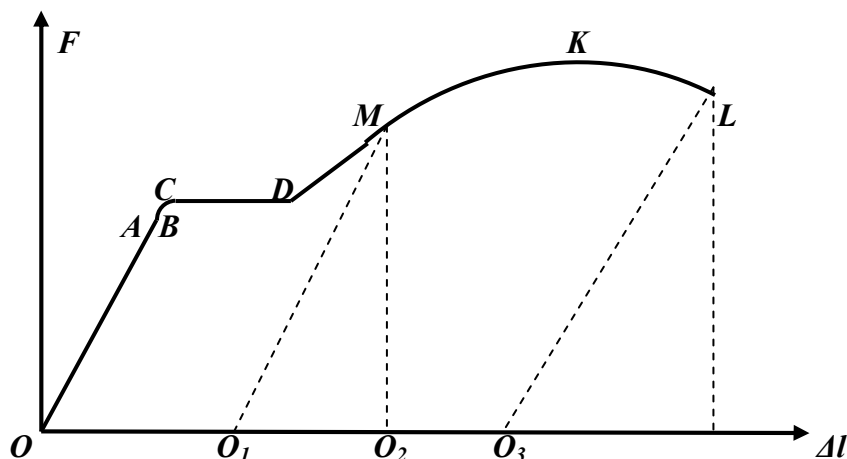


Рис. 3.2. Діаграма розтягу для пластичного матеріалу ($\Delta l, F$)

Якщо розглянути цю узагальнену діаграму розтягу пластичного матеріалу (рис. 3.2), то можна розбити її на кілька характерних ділянок:

– Ділянка OA – пряма лінія. Це – ділянка пропорційності. Точці A відповідає рівень навантаження, який називають *границею (або межею) пропорційності*. На цій ділянці спостерігається лінійна залежність між напруженнями та деформаціями, тобто виконується закон Гука.

– Точка B (практично співпадає з т. A) відповідає навантаженню, яке називають *границею (межею) пружності* (якщо матеріал навантажувати до т. B , практично не спостерігається залишкових деформацій).

– Ділянка CD – це, так звана, *площадка текучості*. Їй відповідає *границя текучості*. Якщо матеріал деформувати до рівня текучості, то подальше його деформування не викликати зростання напружень.

- Ділянка DK – ділянка тимчасового зміцнення, де матеріал знов починає чинити опір силам, що його деформують.
- У точці K починається руйнування матеріалу, на зразку утворюється „шийка” – місцеве звуження. Цій точці відповідає *границя (межа) міцності*.
- У точці L зразок повністю руйнується.

Відрізки $O_1 O_2$ та $O_3 O_4$ відображають ступінь пластичної деформації при розвантаженні зразка матеріалу в т. M та остаточному руйнуванні його в т. L .

Лекція 3. Продовження теми 3 (Механічні характеристики конструкційних матеріалів)

Потенціальна енергія деформації. Реальна діаграма напружень. Діаграми розтягу та стиску для крихких матеріалів. Твердість. Принцип вибору допустимих напружень. Порівнювальні характеристики пластичних та крихких матеріалів.

Розглянута діаграма розтягу дозволяє встановити ще одну механічну характеристику матеріалу, пов'язану з його поведінкою при ударних навантаженнях. У цьому випадку опір стає тим більшим, чим більшою є робота, яку треба виконати, щоб розірвати зразок. Виявляється, що величина цієї роботи (в певному масштабі) дорівнює площі діаграми розтягу, яку зображено на рис. 3.3.

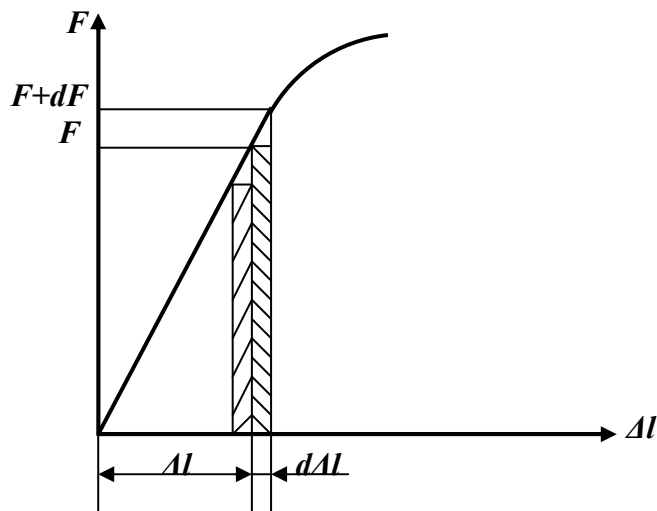


Рис. 3.3. Обчислення роботи, яка потрібна для деформації зразка

Розглянемо частину цієї діаграми в межах пропорційності. З рис.3.3 очевидно, що диференціал роботи системи $dA_c = \left(F + \frac{1}{2}dF \right) d\Delta l = Fd\Delta l + \frac{1}{2}dF \cdot d\Delta l$, причому другий доданок значно менший, ніж перший і ним можна знехтувати. Тоді:

$$dA_c = F \cdot d\Delta l .$$

Геометричні уявлення процесу інтегрування дозволяють зрозуміти, що при поступовому зростанні сили F та видовження Δl , робота (або потенціальна енергія деформації) чисельно будуть представлені таким чином:

$$U = A_c = \int_0^{\Delta l} F d\Delta l = \frac{F \cdot \Delta l}{2} . \quad (3.1)$$

Аналогічні міркування можна застосувати і до повної площі діаграми. Для того, щоб отримати величину, яка б характеризувала не зразок, а сам матеріал, прийнято ділити роботу (її можна прирівняти, нехтуючи дисипацією, до потенціальної енергії деформації U , що накопичує зразок у процесі навантаження) на об'єм зразка.

Співвідношення
$$a = \frac{U}{A_0 l} , \quad (3.2)$$

де A_0 – початкова площа перерізу, називають *питомою роботою пружної деформації*.

Аналогічно можна визначити *повну питому роботу*. Це та робота, яку треба затратити, щоб розірвати матеріал.

$$a_b = \frac{U_b}{A_0 l} . \quad (3.3)$$

Чим більшою є ця величина, тим більшу роботу слід затратити для руйнування зразка.

Зауважимо, що матеріал зразка після переходу за границю текучості продовжує зберігати пружні деформації, до яких вже додаються пластичні. Це стає очевидним після розвантаження зразка після переходу за границю текучості (рис. 3.2, точка M). Якщо знову навантажувати і розвантажувати зразок, то границя пропорційності підвищується до того напруження, на яке попередньо був навантажений зразок, а залишкова деформація після розриву зменшується на величину OO_1 , тобто на величину залишкової деформації, набутої в процесі попереднього навантаження. Це явище називають *наклепом*.

3.2. Діаграма напружень

Зображена на рис 3.2 діаграма ілюструє поведінку матеріалу при заданих розмірах зразка, тому для отримання графіка, який характеризував би матеріал, що досліджується, діаграму розтягу представляють вже трохи в іншому вигляді.

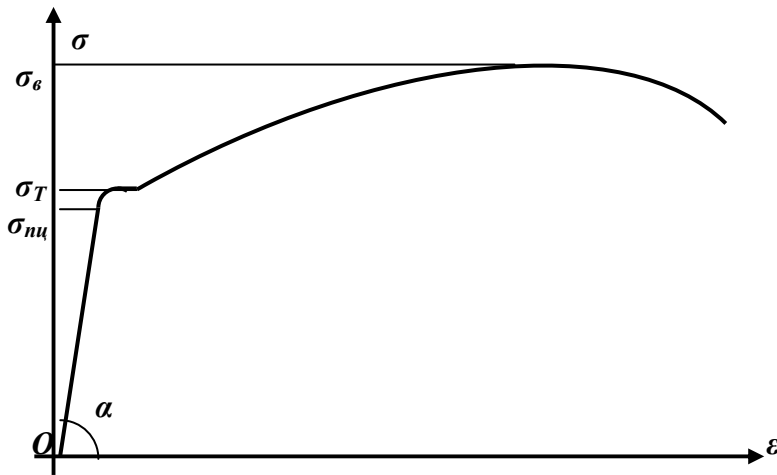


Рис. 3.4. Діаграма розтягу для пластичних матеріалів (ϵ, σ)

Ординати кривої (рис. 3.2) ділять на початкову площу A_0 й отримують напруження $\sigma = \frac{F}{A_0}$, а абсциси ділять на початкову довжину, отримуючи при цьому деформації $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

Таким чином, отримують графік у координатах ϵ, σ , який зображено на рис. 3.4. Її називають діаграмою напружень при розтягу і за обрисами вона схожа на діаграму, що на рис. 3.2, на якій зображені всі величини напружень, що характеризують механічні властивості матеріалів: границю пропорційності – $\sigma_{пц}$, текучості – σ_m , міцності – σ_c . З цієї діаграми очевидно, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E , \quad (3.4)$$

де E – модуль пружності I роду.

3.3. Реальна діаграма напружень

Діаграму на рис. 3.4. можна розглядати як таку, що характеризує властивості даного матеріалу при розтягу. Проте ця характеристика є досить умовною, бо не враховує зміни площі поперечного перерізу в процесі деформації.

На рис 3.5 зображено діаграму розтягу для рейкової сталі, у якої абсциси дорівнюють відносній зміні площі, тобто $\psi_t = \frac{A_0 - A_t}{A_0}$, ординати відповідно – напруженням $\sigma_p = \frac{F}{A_t}$; т. А відповідає початку утворення шийки, тобто т. К на рис. 3.2; 3.4. Ординати реальної діаграми характеризують властивість матеріалу чинити опір пластичній деформації.

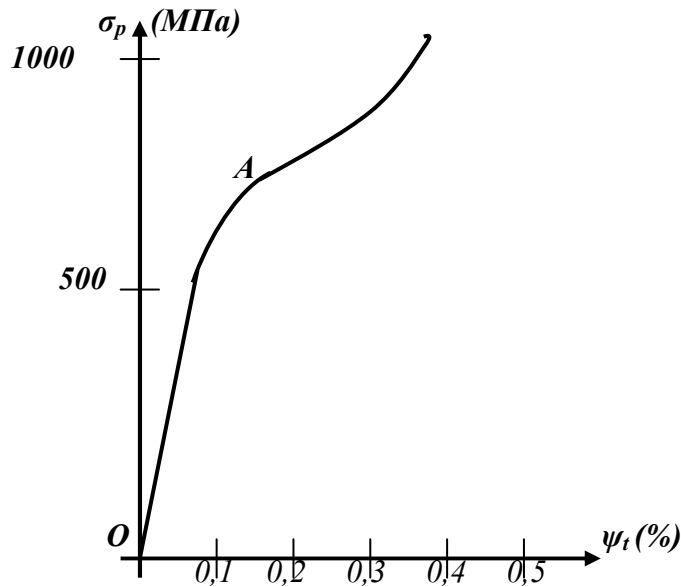


Рис.3.5. Реальна діаграма напружень

Ординату в точці т. А називають *реальною границею міцності (або реальним тимчасовим опором)*. Ординату в кінці при розриві зразка називають *напруженням при розриві*.

3.4. Діаграма розтягу для крихких матеріалів

Крихкі матеріали характеризуються тим, що руйнування зразків виникає вже при невеликих деформаціях. Діаграма розтягу чавуну представлена на рис. 3.6. Треба звернути увагу, що в порівнянні з рис. 3.2; 3.4 горизонтальний масштаб діаграми (рис. 3.6) збільшений ~ в 40 разів, вертикальний ~ у 6.

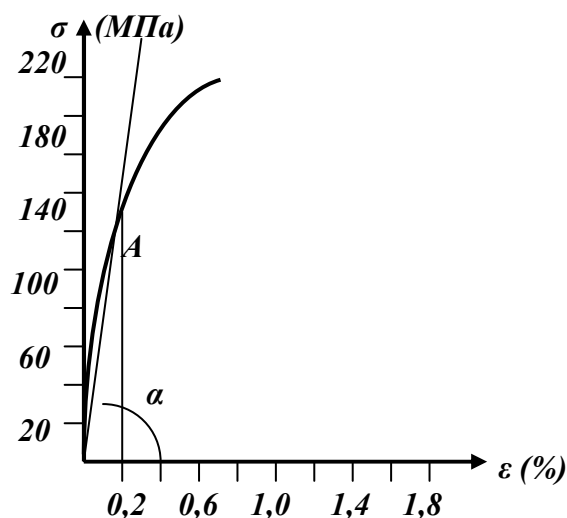


Рис. 3.6. Діаграма розтягу для крихких матеріалів

Як правило, крихкі матеріали погано чинять опір розтягу. Для них також практично не існує ділянки пропорційності. Тому для обчислень модуля пружності криву апроксимують хордою, яка сполучає початок координат і точку, що відповідає ~ границі пружності ($\varepsilon \sim 0,2\%$).

3.5. Діаграми стиску для пластичних і крихких матеріалів

Діаграма стиску для пластичного матеріалу незначно відрізняється від діаграми розтягу.

На рис. 3.7 зображено типову діаграму стиску для маловуглецевої сталі. На ній також спостерігаються ділянка пропорційності та площадка текучості, але т. K , яку розглядали на рис 3.2. та 3.4 – відсутня. Шийка тут не утворюється.

Що стосується стиску крихких матеріалів, то вони переносять стиск значно краще, ніж розтяг. Якщо порівняти дві діаграми – розтягу та стиску для чавуну, то отримаємо картину, схожу на зображену на рис. 3.8. (Знаком „+” відзначено зону розтягу, знаком „-“ – стиску).

3.6. Твердість

Величина границі міцності при розриві пластичних матеріалів певною мірою пов’язана з їх властивістю, яку називають *твердістю*. *Твердість* – це здатність матеріалу чинити опір проникненню в нього інших тіл.

Одним з найпоширеніших методів визначення твердості є спосіб Брінеля.

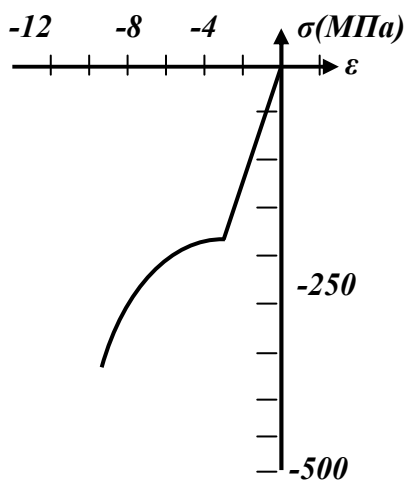


Рис.3.7. Діаграма стиску для пластичних матеріалів

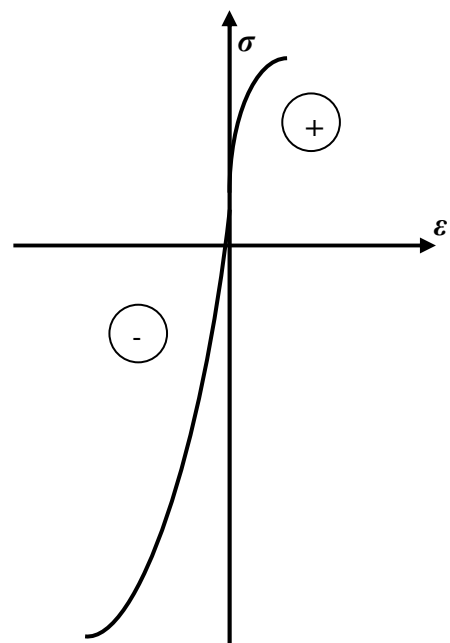


Рис.3.8. Діаграма стиску для крихких матеріалів

Характеристикою твердості при цьому є так зване „число твердості”, яке визначається за допомогою втискування в матеріал кульки, зробленої з гартованої сталі. „Числом твердості за Брінелем” називають величину, що чисельно дорівнює відношенню вдавлюючої сили на площу кульової поверхні лунки.

$$H_B = \frac{P}{\pi Dh} = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (3.5)$$

де D – діаметр кульки;
 d – діаметр відбитка;
 h – глибина відбитка.

Твердість у техніці прийнято вимірювати в $\frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$ ($1 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2} \approx 10 \text{МПа}$). Наприклад, для маловуглецевої сталі $H_B = 100 \div 120 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$, для рейкової $H_B = 200 \div 220 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$; для твердої гартованої $H_B = 400 \div 450 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$.

Між числом твердості за Брінелем та границею міцності для сталі встановлена досить чітка емпірична залежність

$$\sigma_s \approx 0,36 H_B. \quad (3.6)$$

З інших методів визначення твердості можна виділити ще метод Роквелла. Він полягає у втискуванні в матеріал алмазної пірамідки або гартованої кульки діаметром 1,59 мм. У цьому випадку характеристикою твердості є глибина втискування.

3.7. Порівняльні характеристики пластичних і крихких матеріалів

Основна різниця між крихкими та пластичними матеріалами полягає в тому, що крихкі матеріали руйнуються при досить малих деформаціях. У зв'язку з цим площі під діаграмами для пластичних матеріалів значно більші, ніж для крихких.

Тобто, для руйнування пластичних матеріалів треба затратити значно більшу роботу, ніж для руйнування крихких матеріалів. Крім того, крихкі матеріали значно гірше чинять опір розтягу й ударам і досить чутливі до місцевих напружень (концентраторів напружень (див. гл.17,18)). Вироби, зроблені з крихких матеріалів, не здатні до зміни форми.

Пластичні матеріали не мають цих недоліків. Таким чином, пластичність є однією з найважливіших і бажаних властивостей.

3.8. Основні положення для вибору коефіцієнта запасу міцності та допустимих напружень

3.8.1. Загальні положення

Розглянуті величини, що характеризують механічні властивості матеріалу (границі міцності, пропорційності, текучості, модуль пружності і т. п.) визначають за допомогою лабораторних досліджень при статичному навантаженні.

Дію динамічних навантажень розглянемо пізніше.

Ідеєю будь-якого розрахунку на міцність є *зробити так, щоб максимальні розрахункові напруження в конструкції не перевищували допустимих*. Тобто

$$p_{\max} \leq [p]; \quad \text{або} \quad \sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad \text{або} \quad \tau_{\max} \leq [\tau].$$

Візьмемо, наприклад,

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

і розглянемо, яким же ж чином вибрати рівень допустимих напружень $[\sigma]$.

При виборі напружень, що допускаються, доводиться враховувати цілий ряд обставин. Величини і характер дії сил, що входять у розрахунки, відомі нам не зовсім точно; механічні властивості матеріалів на практиці часто дають значні відхилення від середніх значень; методи наших розрахунків, уявлення про взаємодію окремих частин конструкцій зазвичай є спрощеними і наближеними.

Тому допустимі напруження вибирають як *зменшені небезпечні напруження*, тобто

$$[\sigma] = \frac{\sigma^H}{k}, \quad (3.7)$$

де k – коефіцієнт запасу міцності (або коефіцієнт незнання, як часто називають його інженери).

Коефіцієнт запасу повинен врахувати всі ці неточності, що є неминучими в наших розрахунках.

Чим неодноріднішим є матеріал, чим наближеніше ми оцінюємо дійсні навантаження, чим спрощеніше уявляємо собі з'єднання окремих елементів конструкції, тим більшим цей коефіцієнт доводиться вибирати. Частини машин у роботі зношуються, тому у багатьох випадках доводиться давати «запас на знос». У металевих і дерев'яних інженерних спорудах доводиться враховувати можливість корозії й загнивання.

З другого боку, є конструкції (літаки, наприклад), де необхідно максимально знижувати коефіцієнт запасу з метою зменшення ваги. Так само інженеру доводиться знижувати коефіцієнт запасу при виконанні робіт на тимчасових спорудах в обстановці військового часу.

Таким чином, правильний вибір напружень, що допускаються, є вельми складним завданням, пов'язаним з методами розрахунків і дослідження матеріалів, а також господарсько-економічними і деякими іншими факторами.

Для багатьох конструкцій норми напружень, що допускаються, встановлюють прийнятні в тій чи іншій галузі нормативи, й інженер лише повинен уміти їх правильно застосовувати.

Підсумовуючи сказане, можна сформулювати основні міркування таким чином.

Коефіцієнт запасу треба вибирати з тим розрахунком, щоб *був забезпечений* відомий запас міцності проти виникнення так званого *небезпечного стану* матеріалу, який буде *загрожуючим* для роботи конструкції.

При статичному або ударному навантаженні для пластичних матеріалів такий стан характеризується появою великих залишкових деформацій (явище текучості), для крихких – появою тріщин, руйнуванням матеріалу. При повторно-змінному навантаженні небезпечний стан характеризується появою і розвитком тріщини втомленості. Напруження σ^H , що викликає небезпечний стан, зазвичай приймають відповідним:

$\sigma^H = \sigma_T$ – границя текучості – для пластичного матеріалу;

$\sigma^H = \sigma_\sigma$ – границя міцності – для крихкого матеріалу (при статичному навантаженні);

$\sigma^H = \sigma_k$ – границя витривалості – за умов виникнення тріщин при динамічному навантаженні.

Таким чином, залежно від характеру небезпечного стану матеріалу можна записати

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k_T}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_\sigma}{k_\sigma}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_k}{k_k},$$

де, $k_T; k_\sigma; k_k$ — відповідні коефіцієнти запасу. Ці три формули можна узагальнити у вигляді (3.7), маючи на увазі під σ^H або σ_T , або σ_σ , або σ_k , а під k – або k_T , або k_σ , або k_k . Оскільки межі текучості й витривалості певною мірою пов'язані з межею міцності, то для всіх видів небезпечного стану можна встановити коефіцієнт запасу й відносно межі міцності σ_σ .

Неоднорідність матеріалу, неточність при визначенні величин сил, неточність розрахунку, тобто загальні параметри, *враховують* так званим основним *коефіцієнтом* запасу k_0 . Для пластичних матеріалів (сталь) його зазвичай приймають таким, що дорівнює $k_m = k_0 = 1,4 \div 1,6$ для крихких матеріалів і дерева $k_e = k_0 = 2,5 \div 3,0$. Решту параметрів, тобто динамічність навантажень, змінність їх дії і вплив місцевих перенапружень враховують додатковими коефіцієнтами, на які множать основний.

Якщо при визначенні напружень, що допускаються, враховують тільки загальні параметри, тобто коефіцієнт запасу приймають таким, що дорівнює одному лише основному, то динаміку й місцеві напруження враховують, коли це можливо, у величині дійсного напруження, перемножуючи основне статичне напруження на коефіцієнти динамічності й концентрації.

Прийняті в інженерній практиці значення загального коефіцієнта запасу відносно межі міцності для різного стану матеріалу і для різного характеру дії навантажень із додаванням до нього звичайної величини впливу динамічності навантаження і місцевих напружень представлені в таблиці 3.1.

Коефіцієнти запасу

Таблиця 3.1

Характер навантаження	Стан матеріалу	k_e
1. Статичне навантаження	Пластичний матеріал	2,4 ÷ 2,6
	Крихкий матеріал	3,0 ÷ 9,0
2. Ударне навантаження	Пластичний матеріал	2,8 ÷ 5,0
3. Змінне навантаження (розтяг – стиск однакової величини)	Пластичний матеріал (сталь)	5,0 ÷ 15,0

Ця таблиця має лише *орієнтовний* характер. Вона дає уявлення про зміну коефіцієнта залежно від різних обставин. Докладніше про коефіцієнти запасу для ударних і змінних навантажень буде сказано далі.

3.8.2. Допустимі напруження на розтяг і стиск для різних матеріалів

У таблиці 3.2 наведено орієнтовні величини основних напружень, що допускаються, на розтяг і стиск для деяких основних конструкційних матеріалів, найбільш розповсюджених в інженерній справі, зокрема в машинобудуванні.

Цю таблицю складено на підставі діючих у даний час норм. У кожному окремому випадку розрахункової практики слід встановлювати допустимі напруження відповідно до офіційних технічних умов і норм проектування конкретної конструкції.

Орієнтовні величини основних допустимих напружень

Таблиця 3.2

Найменування матеріалу	Допустимі напруження в МПа	
	на розтяг	на стиск
Чавун сірий у відлив	28 - 80	120 – 150
Сталь ОС і ст.2		140
Сталь т.3		160
Сталь ст. 3 в мостах		140
Сталь киснева конструкційна в машинобудуванні		60 – 250
Сталь легована конструкційна в машинобудуванні		100 – 400 і вище
Мідь		30 – 120
Латунь		70 – 140
Бронза		60 – 120
Алюміній		30 – 80
Алюмінієва бронза		80 – 120
Дюралюміній		80 – 150
Текстоліт		30 – 40
Гетінакс		50 – 70
Бакелізована фанера		40 – 50
Сосна вздовж волокон.	7 - 10	10 - 12
Сосна впоперек волокон	--	1,5 - 2,0
Дуб вздовж волокон	9 - 13	13 - 15
Дуб впоперек волокон	--	2 - 3,5
Кам'яна кладка	до 0,3	0,4 – 4,0
Цегляна кладка	до 2,0	0,6 – 2,5
Бетон	0,1 – 0,7	1,0 – 9,0

Лекція 4. Тема 4. Статично визначені й статично невизначені системи, що працюють на розтяг - стиск

Статично визначені системи. Статично невизначені системи. «Зайві невідомі», ступінь статичної невизначеності. Рівняння сумісності деформацій. Розрахунок статично невизначених систем за допустимими напруженнями. Температурні та монтажні напруження. Урахування власної ваги та сил інерції при розтягу-стиску. Розрахунок статично невизначених систем за граничним станом.

Для знаходження внутрішніх зусиль у стержневих системах використовують, насамперед, рівняння рівноваги.

4.1. Статично визначені системи

Розглянемо стержневу систему (рис. 4.1). Стержні 1 та 2 можуть бути як однаковими (йдеться про матеріал і поперечний переріз), так і різними.

Спробуємо визначити зусилля, що виникають у кожному з них.

Розглянемо рівновагу т.А (рис. 4.2).

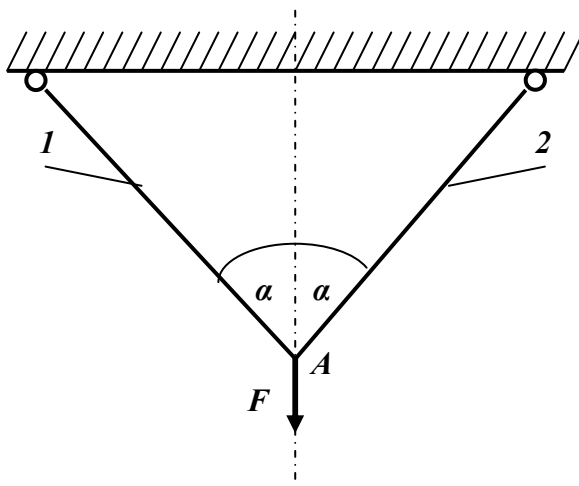


Рис. 4.1. Статично визначена система

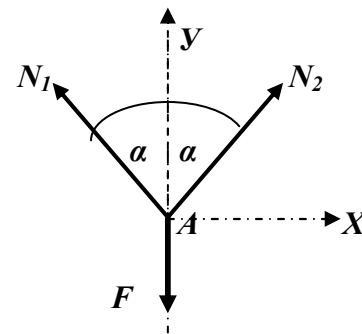


Рис. 4.2. Сили, прикладені до т.А

Позначивши зусилля, що виникають у стержнях, відповідно N_1 та N_2 , запишемо рівняння статки в системі координат XAY :

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - F = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Система практично має два рівняння і два невідомих. Такі системи розв'язують однозначно:

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \cos \alpha} \quad (4.2)$$

Якщо кількість невідомих сил не перевищує числа лінійно незалежних рівнянь статки, систему називають *статично визначеною*.

Неважко впевнитися, що в *статично визначених* системах:

- сили в елементах конструкції *залежать* тільки від системи зовнішніх сил і геометрії системи та *не залежать* від матеріалу стержнів і їх поперечного перерізу;

- деформації в елементах системи можуть проходити *незалежно* одна від другої;
- стержні, за певних умов похибок по довжині при їх виготовленні, можуть з'єднуватися *без натягів* (тобто без монтажних напружень).

4.2. Статично невизначені системи

Статично невизначеною системою називають таку систему, в якій кількість невідомих перевищує число лінійно незалежних рівнянь статки. Кількість „зайвих” невідомих зумовлює ступінь статичної невизначеності.

Розглянемо стержневу систему, подібну вже розглянутій, але додавши ще один стержень (3) для збільшення вантажопідйомності (рис. 4.3).

Нехай стержні 1 та 2 – однакові й мають жорсткість $E_1 A_1$, а третій –

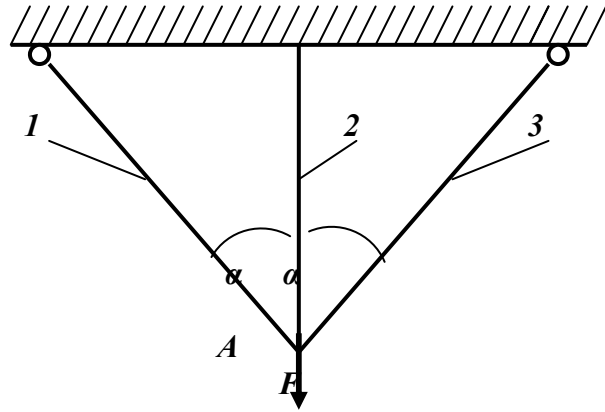


Рис.4.3. Статично невизначена система

виготовлений з іншого матеріалу і має жорсткість $E_3 A_3$. Також відомі допустимі напруження для матеріалів цих стержнів, відповідно $[\sigma_1]$ та $[\sigma_3]$. Треба знайти максимально допустиме навантаження F .

Знайдемо сили, які діють у стержнях. Для цього розглянемо рівновагу точки A (рис. 4.4).

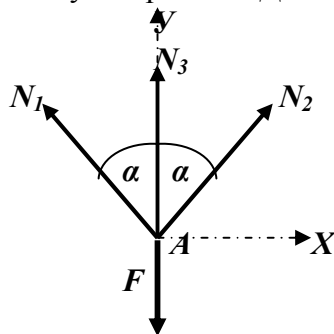


Рис. 4.4. Сили, прикладені до т.А

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - F = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Невідомих три, рівнянь статки – два. Одне невідоме – “зайве”. Кількість “зайвих” невідомих визначає ступінь статичної невизначеності. Наприклад, система, яку розглядаємо, є один раз статично невизначеною.

Для подальшого розв’язування задачі в доповнення до процесу рівноваги треба розглянути переміщення в системі (рис. 4.5). Т.А переміститься в т. А'. При цьому, враховуючи гіпотезу про малі деформації, можна вважати, що кут α при т. А не змінює свою величину.

Для визначення видовження першого або другого (вони ідентичні) стержня з т. А опустимо $\perp AK$ на BA' (взагалі, потрібно було б радіусом, що дорівнює BA , відтяти таку ж довжину на BA' , але внаслідок зникаючої малості кута γ це буде практично одне й те ж).

Тоді відрізок KA' і буде видовженням Δl_1 першого стержня. А відрізок AA' – видовження третього стержня Δl_3 .

Запишемо співвідношення між ними:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha . \quad (4.4)$$

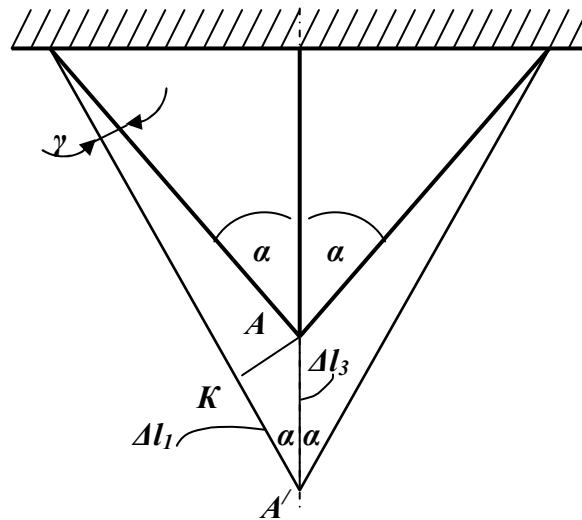


Рис. 4.5. Деформації в системі

Це рівняння називають *рівнянням сумісності деформацій*. Таких рівнянь потрібно записати стільки (розглядаючи відповідні переміщення), скільки є „зайвих” невідомих (тобто за ступенем статичної невизначеності).

Рівняння сумісності деформацій записане у вигляді (4.4) не може бути розв’язане сумісно з системою рівнянь (4.3). Тому спочатку потрібно, використавши закон Гука, переписати рівняння (4.4) так:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} \cos \alpha . \quad (4.5)$$

Враховуючи, що $\Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha$, можна записати

$$N_1 = N_3 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha . \quad (4.6)$$

А тепер, підставляючи (3.17) у (3.14), після невеличких перетворень отримаємо

$$N_3 = \frac{FE_3 A_3}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} \quad (4.7)$$

та, повертаючись до (4.6)

$$N_1 = \frac{FE_1 A_1}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} \cos^2 \alpha . \quad (4.8)$$

З виразів (4.7) та (4.8) витікає, що сили в елементах статично невизначеної системи залежать не тільки від системи зовнішніх сил та геометрії системи, як у випадку статично визначеної системи, але й від співвідношення жорсткостей цих елементів, причому чим більшу жорсткість має стержень, тим більшу частину навантаження він бере на себе.

Далі від внутрішніх зусиль переходимо до напружень

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{FE_1 \cos^2 \alpha}{2E_1 A_1 \cos^3 \alpha + E_3 A_3} ; \quad (4.9)$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{FE_3}{2E_1A_1 \cos^3 \alpha + E_3A_3} \quad (4.10)$$

та до умов міцності

$$\sigma_1 = \frac{FE_1 \cos^2 \alpha}{2E_1A_1 \cos^3 \alpha + E_3A_3} \leq [\sigma_1]; \quad (4.11)$$

$$\sigma_3 = \frac{FE_3}{2E_1A_1 \cos^3 \alpha + E_3A_3} \leq [\sigma_3]. \quad (4.12)$$

З цих двох виразів отримаємо два значення сили F . Для подальших розрахунків виберемо, безумовно, *найменше* з цих двох значень сили.

Цікавим буде випадок, коли жорсткість середнього стержня така ж сама, як і жорсткість крайніх стержнів. Тобто $E_1 = E_3 = E$, $A_1 = A_3 = A$

Тоді формули (4.7) – (4.12) набудуть вигляду

$$N_3 = \frac{F}{2 \cos^3 \alpha + 1}; \quad (4.13)$$

$$N_1 = \frac{F \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + 1}; \quad (4.14)$$

$$\sigma_3 = \frac{F}{A(2 \cos^3 \alpha + 1)}; \quad (4.15)$$

$$\sigma_1 = \frac{F \cos^2 \alpha}{A(2 \cos^3 \alpha + 1)}. \quad (4.16)$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $\sigma_3 \geq \sigma_1$, тому що $\cos^2 \alpha \leq 1$. Тоді умова міцності буде виглядати так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_3 = \frac{F}{A(2 \cos^3 \alpha + 1)} \leq [\sigma]. \quad (4.17)$$

Розглянутий метод розрахунку статично невизначених систем називають *розрахунком за допустимими напруженнями*.

4.3. Температурні та монтажні напруження

4.3.1. Температурні напруження

Розглянемо стержень, жорстко закріплений з обох кінців (рис. 4.6).

Нехай відомі його механічні параметри: довжина – l , площа поперечного перерізу – A , модуль Юнга Γ роду – E , коефіцієнт лінійного температурного розширення – α_t .

Цей стержень закріплено при температурі t_0 , після чого температура піднялася на Δt . Треба розрахувати напруження, які при цьому виникають у стержні.

Розглянемо сили, які виникають у стержні. Внаслідок температурного впливу стержень намагається розширитися, але це йому не вдається завдяки жорсткому закріпленню кінців (рис. 4.7).

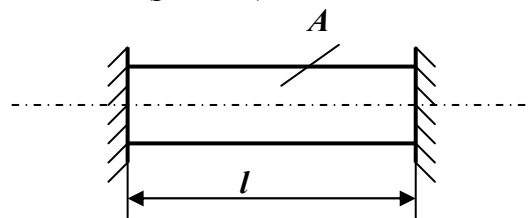


Рис.4.6. Нагрітий стержень

Виникають реакції опор R_l та R_{np} .
Розглядаючи рівновагу за допомогою рівнянь статки

$$\sum X = R_l - R_{np} = 0, \quad (4.18)$$

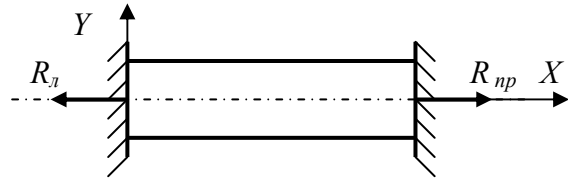


Рис.4.7. Сили, що виникають при нагріванні

можна з'ясувати лише, що $R_l = R_{np}$.

Рівняння статки одне, а невідомих – два.

Система один раз статично невизначена. Складаємо рівняння сумісності деформації, розглядаючи можливі температурні деформації Δl та деформації за рахунок сил R_l та R_{np} – $\Delta l(R)$.

$$\Delta l_t = \Delta l(R) \quad (4.19)$$

або

$$\Delta \alpha_t \Delta t = \frac{R_l l}{EF}, \quad (4.20)$$

тоді

$$\sigma = \frac{R_l}{F} = E \alpha_t \Delta t. \quad (4.21)$$

Цікавим є те, що напруження в даному випадку не залежить від довжини стержня.

4.3.2. Монтажні напруження

Розглянемо систему (рис. 4.8.), в якій один із елементів зроблено не за розміром (середній стержень коротший, ніж треба), але всі стержні треба з'єднати в одній точці C (рис. 4.9). Нехай стержні зроблено з одного й того ж матеріалу і мають однаковий поперечний переріз.

Позначимо крайні стержні 1 та 3, а середній – 2. Розглядаючи т.С, яка лежить між точками A і B і в якій з'єднуються всі три стержні при монтажі, можна скласти три рівняння статки:

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - N_2 = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

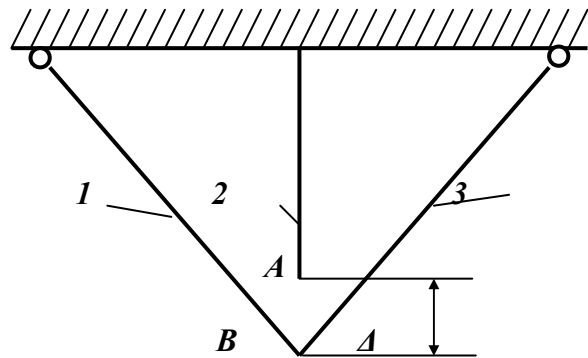


Рис. 4.8. Система, в якій виникають монтажні напруження

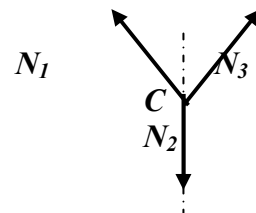


Рис. 4.9. Розподіл сил

Очевидно, що система є один раз статично невизначеною. Розглянемо сумісність деформацій стержнів. З рис.4.10 випливає, що

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} + \Delta l_2 = \Delta. \quad (4.23)$$

Використовуючи закон Гука, отримуємо ще одне рівняння

$$\frac{N_1 l_1}{EF \cos \alpha} + \frac{N_2 l_2}{EF} = \Delta, \quad (4.24)$$

яке розв'язуватиметься разом із системою (4.22).

Таким чином, можна зробити висновок, що розв'язок наведених задач зводиться до розгляду статично невизначених систем.

4.4. Урахування власної ваги та сил інерції при розтягу–стиску

У більшості випадків зовнішні навантаження в елементах конструкції значно перевищують власну вагу самих елементів або сил інерції, що виникають при прискореннях цих елементів. Але бувають випадки, коли цими факторами неможливо нехтувати. Дію власної ваги або сил інерції враховують як розподілене по довжині стержня навантаження.

При врахуванні власної ваги формула (2.1) дещо змінюється. Нехай питома вага стержня, зображеного на рис. 4.11 – γ .

Тоді нормальна сила в довільному перерізі на відстані x від вільного кінця стержня

$$N(x) = F + \gamma Ax. \quad (4.25)$$

Розглянемо видовження короткої ділянки цього стержня довжиною dx :

$$\Delta dx = \frac{(F + \gamma Ax) dx}{EA}. \quad (4.26)$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\Delta x = \int_0^x \frac{(F + \gamma Ax) dx}{EA} = \frac{Fx}{EA} + \frac{\gamma Ax^2}{2EA}. \quad (4.27)$$

З цієї формули очевидно, що характер розподілу видовжень при врахуванні власної ваги є квадратичним на відміну від лінійного розподілу при врахуванні тільки зовнішніх сил.

Неважко помітити, що видовження стержня довжиною l буде в цьому випадку

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma Al^2}{2EA} \quad (4.28)$$

або

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{Ql}{2EA}, \quad (4.29)$$

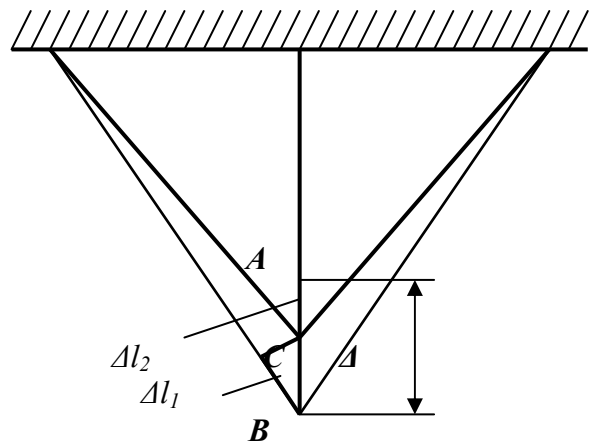


Рис.4.10. Деформації в системі

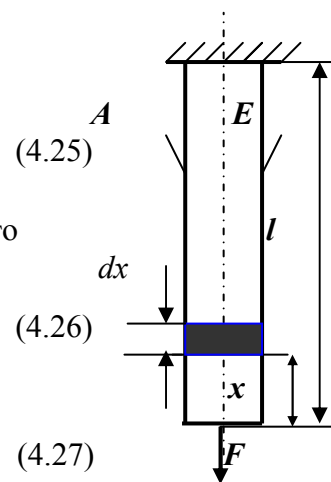


Рис.4.11. Навантажений стержень

де Q – власна вага стержня.

Наприклад: нехай є стержень, навантажений зовнішньою силою F та власною вагою (рис. 4.12 а). Нехай площа поперечних перерізів всюди однакова й дорівнює A , модуль Юнга I роду – E ; довжини ділянок відповідно – a і b , питома вага – γ .

Запишемо функції розподілу нормальних сил і напружень у довільному перерізі нижньої частини стержня ($0 \leq x < a$):

$$N_1(x) = \gamma Ax; \quad (4.30)$$

$$\sigma_1(x) = \frac{N(x)}{A} = \gamma x. \quad (4.31)$$

Розглянемо деформацію першої ділянки. Видовження дуже малої ділянки довжиною dx на відстані x від нижнього кінця буде дорівнювати

$$\Delta dx = \frac{N(x)dx}{EA}. \quad (4.32)$$

Щоб отримати закон розподілу, треба проінтегрувати цей вираз:

$$\Delta x = \frac{N(x)x}{2EA} = \frac{\gamma Ax^2}{2EA}. \quad (4.33)$$

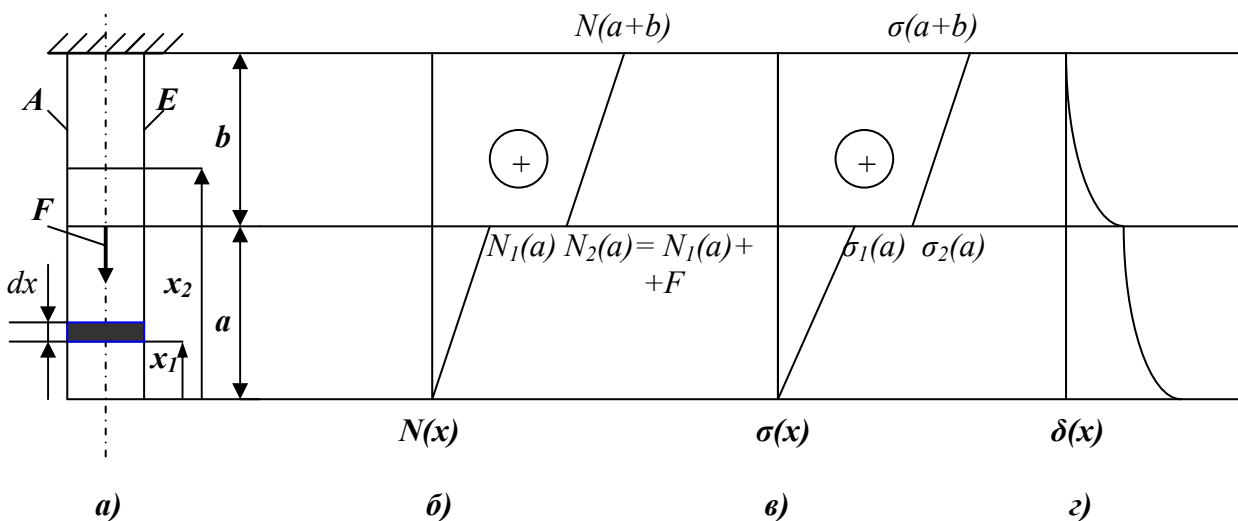


Рис. 4.12. Стержень, що розтягується з урахуванням власної ваги (а). Розподіл нормальних сил (б), нормальних напружень (в) та переміщень (г)

Повністю на довжині „ a ” стержень буде мати видовження:

$$\Delta a = \frac{N(a)a}{2EA} = \frac{\gamma Aa^2}{2EA}. \quad (4.34)$$

Перейдемо до другої ділянки ($a \leq x \leq a+b$) і запишемо аналогічні функції.

Очевидно

$$N_2(x) = N(a) + F + \gamma A(x - a); \quad (4.35)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2(x)}{A} = \frac{N(a) + F}{A} + \gamma(x - a); \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \Delta a + \frac{(N(a) + F)(x - a)}{EA} + \frac{N(x - a)(x - a)}{2EA} = \\ &= \Delta a + \frac{(N(a) + F)(x - a)}{EA} + \frac{\gamma(x - a)^2}{2E}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

У даному випадку можна узагальнити, що функції нормальних сил і напружень при врахуванні власної ваги є *лінійними*, а функції переміщень та видовжень – *квадратичними*. Епюри розподілу величини $N(x)$, $\sigma(x)$ та $\delta(x)$ зображені на рис. 4.12б, в, г. Аналогічні висновки можна зробити і для дії сил інерції.

4.5. Розрахунок статично невизначених систем за граничним станом

Тепер, знаючи механічні властивості пластичних матеріалів, можна запропонувати ще один метод розрахунку на міцність статично невизначених систем, які працюють на розтяг-стиск.

У деяких випадках при статичному навантаженні системи можна розраховувати за припущенням, що в окремих їх елементах напруження можуть перевищувати допустимі або навіть виходити на рівень границі текучості. Зрозуміло, що при цьому повинна виконуватися умова міцності для всієї конструкції в цілому.

Принцип цього розрахунку полягає в тому, що конструкційні матеріали у більшості випадків є пластичними і мають площадку текучості. Якщо в процесі навантаження в стержнях виникають різні деформації та напруження, що їм відповідають, то можливий варіант, коли при виході напружень у стержнях на рівень текучості вони стануть рівними між собою в той час, як деформації в них будуть різними.

У цьому випадку зусилля в будь-якому „ i ”-ому стержні буде знайдено як

$$N_i = \sigma_i F_i \quad (4.38)$$

Тоді ці вирази для N_i можна підставити у рівняння статички, отримавши при їх розв’язанні величину навантаження Q_m^k – так звану *критичну силу*, яке вводить усю систему в стан текучості. Так як дію на систему такої сили Q_m^k , яка б повністю вводила систему в стан текучості, допустити не можна, слід зменшити її значення у „ κ ” разів. Тобто

$$Q_{don} = \frac{Q_m^k}{\kappa}. \quad (4.39)$$

Цілком зрозуміло, що застосування методу розрахунку на міцність за допустимими навантаженнями (за граничною вантажопідйомністю) передбачає наявність у деяких елементах системи напружень, що виходять на рівень текучості, і дасть значення сили Q_{don} дещо більшим, ніж застосування методу розрахунку за допустимими напруженнями, ідеєю якого є вихід максимальних напружень на рівень допустимих, тобто значно менших від границі текучості

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \text{де} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{\kappa}.$$

Лекція 5. Тема 5. Складний напружений стан

Поняття про складний напружений стан. Головні площадки. Головні напруження. Лінійний напружений стан. Напруження на похилих площадках. Плоский напружений стан. Пряма й обернена задачі. Круги Мора. Напруження на октаедричних площадках. Об'ємний напружений стан.

Нехай є навантажене зовнішніми силами F_i тіло (рис. 5.1). Виріжемо в довільній точці цього тіла елементарний об'єм у вигляді кубика, зображеного на рис. 5.2.

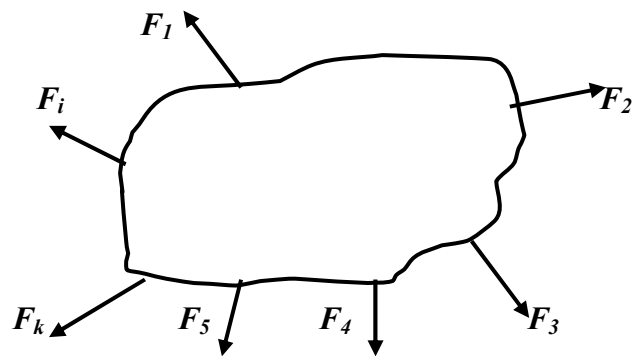


Рис. 5.1. Навантажене тіло

По гранях цього кубика в загальному випадку діятимуть 9 компонент напружень. Нормальні $\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z$, та дотичні $\tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yx}; \tau_{yz}; \tau_{zx}; \tau_{xy}$.

З курсу теорії пружності відомо, що можна вибрати таку орієнтацію граней кубика, що дотичні напруження зникнуть і залишаться тільки нормальні (рис. 5.3).

Площадки, на яких діють тільки нормальні напруження, а дотичні відсутні, називають *головними площадками*, а відповідні нормальні напруження, що діють по цих площадках називають *головними напруженнями*. Головні напруження позначають $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$. При цьому прийнято, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (з урахуванням знака).

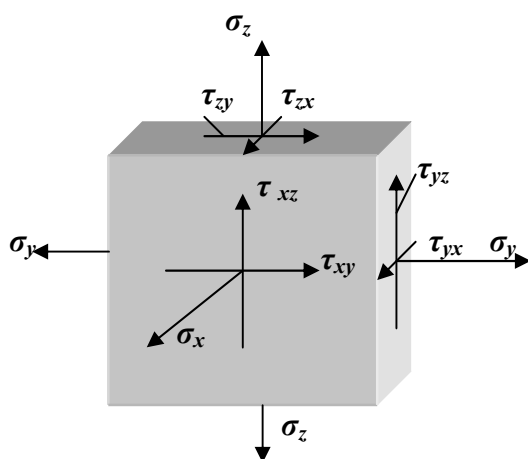


Рис. 5.2. Напруження на гранях кубика в загальному випадку

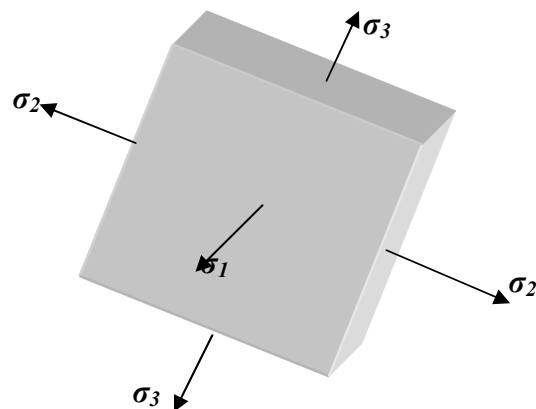


Рис. 5.3. Напруження на головних площадках

Розрізняють три види напруженого стану:

- *лінійний* – коли одне з головних напружень не дорівнює нулю, а два інших дорівнюють нулю. Тут можливі два варіанти – перший, коли $\sigma_1 \neq 0$, а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, – це одновісний розтяг, і другий, коли $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, а $\sigma_3 \neq 0$, – це одновісний стиск;
- *плоский* – коли одне з головних напружень дорівнює нулю, а два інших не дорівнюють нулю;
- *об’ємний* – коли жодне з головних напружень не дорівнює нулю.

5.1. Лінійний напружений стан. Напруження на площадках, розташованих під кутом до осі стержня

Розглянемо напруження, які виникають у розтягнутому стержні на різних площадках (рис. 5.4). Власною вагою стержня в цьому випадку будемо нехтувати.

На площадці, нормальній до осі – A_0 , виникають напруження:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_0} \text{ при } N = F. \quad (5.1)$$

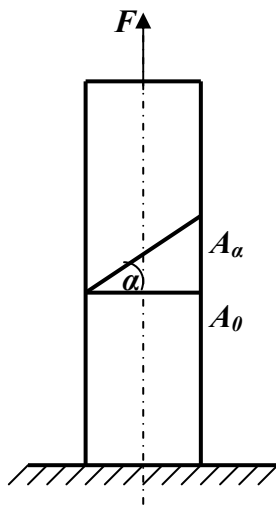


Рис. 5.4. Лінійний напружений стан

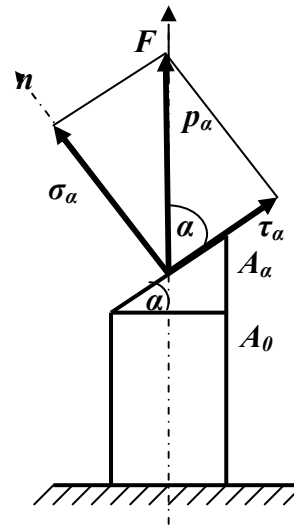


Рис. 5.5. Розподіл напружень на нахиленій площадці

Тепер розглянемо напруження на площадці A_α , нахиленій під кутом α до площини A_0 (α – кут між нормаллю до площадки A_α і віссю стержня) (рис 5.5).

Повне напруження на цій площадці

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{F}{A_0} \cos \alpha, \quad (5.2)$$

тому що

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha}.$$

Тоді
$$p_\alpha = \sigma_0 \cos \alpha. \quad (5.3)$$

Розглядаючи складові, будемо мати нормальне напруження

$$\boxed{\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha} \quad (5.4)$$

і дотичне напруження

$$\tau_{\alpha} = \sigma_0 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \quad (5.5)$$

При цьому не важко переконатися, що виконується залежність

$$p_{\alpha}^2 = \sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\alpha}^2 \quad (5.6)$$

Слід зауважити: якщо нормальне напруження вважається додатним при розтягу, а від'ємним – при стиску, то дотичне напруження на грані вважається додатним, якщо воно намагається повернути частину елемента, що розглядається, за годинниковою стрілкою. Від'ємним буде протилежний напрямок.

5.2. Плоский напружений стан

5.2.1. Пряма задача (аналітичне виведення).

Розглянемо елемент у вигляді кубика, „вирізаного” з тіла на головних площадках. Нехай він знаходиться у плоскому напруженому стані (рис. 5.6,а) і головні напруження задані таким чином: $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0$.

Треба знайти напруження на площадці, повернутої на кут α до тієї головної, де діє σ_1 (рис. 5.6б).

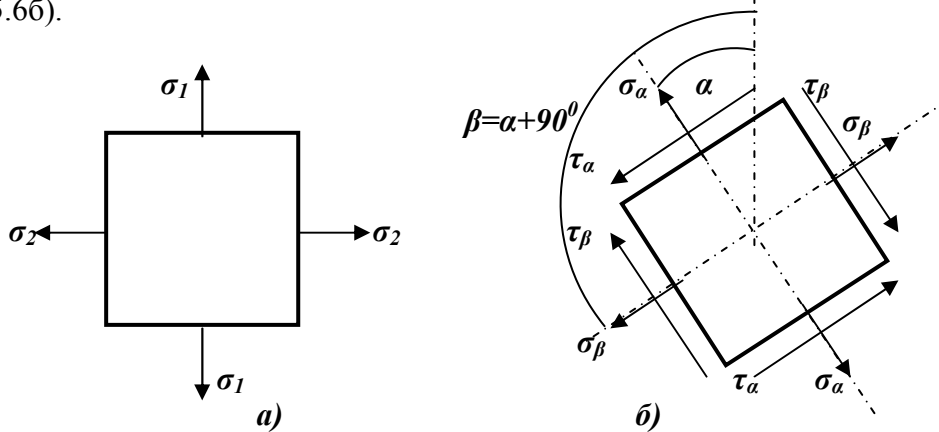


Рис. 5.6. Плоский напружений стан: а) головні площадки; б) площадки, розвернуті відносно головних

Розглянемо рис. 5.7.

Використовуючи принцип суперпозиції, на основі (5.4) та (5.5) можна записати

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\beta$$

або, враховуючи, що $\beta = \alpha + 90^\circ$;

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (5.7)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (5.8)$$

Тепер запишемо напруження, які виникають на площадці, перпендикулярній до нами розглянутої (тобто, розвернутої до тієї головної, де діє σ_1 , на кут β (рис. 5.6б та 5.7).

Тоді $\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \sin^2(\alpha + 90^\circ)$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \quad (5.9)$$

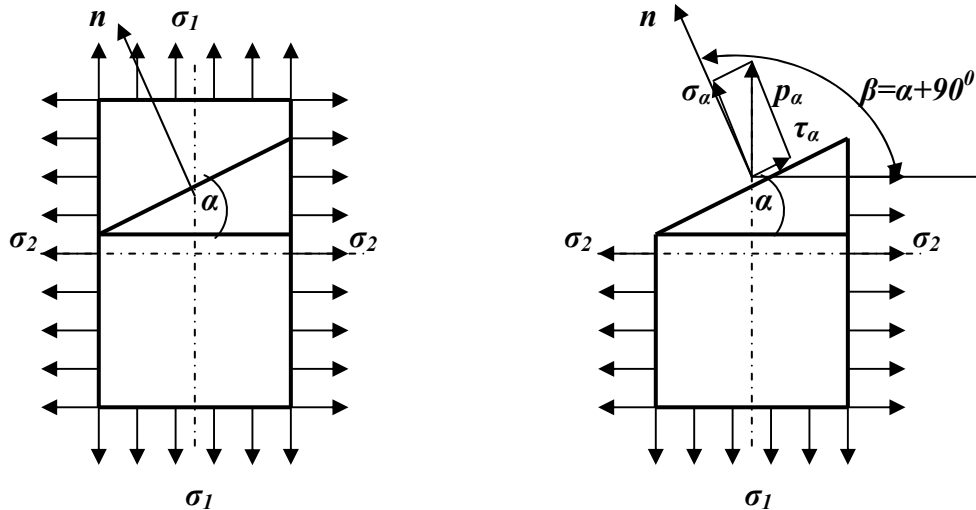


Рис. 5.7. Плоский напружений стан. Зміна напружень при повертанні площадок

Аналогічно
$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(\alpha + 90^\circ),$$

а
$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (5.10)$$

Дослідимо вираз (5.7) на extremum.

$$(\sigma_{\alpha})' = -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0. \quad (5.11)$$

Звідси випливає, що нормальні напруження досягають max та min значень там, де дотичні дорівнюють 0. Тобто головні напруження є екстремальними.

Відносно τ_{α} зрозуміло, що найбільше значення (за модулем) τ_{α} отримає, якщо $\sin 2\alpha = 0$, тобто $\alpha = \pm 45^\circ$ та кратні їм кути.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (5.12)$$

Складемо почленно (5.7) та (5.9), тоді

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (5.13)$$

Тобто сума нормальних напружень на взаємно перпендикулярних площадках є величиною сталою. Порівнюючи (5.8) та (5.10) неважко помітити, що

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta} \quad (5.14)$$

У теорії напруженого стану можна розмежувати дві основні задачі. Перша – *пряма задача* – коли задано головні напруження і кут повороту площадки, на якій треба визначити напруження σ_{α} і τ_{α} . Друга – *обернена задача* – коли задані напруження на неголовних площадках і треба визначити величини головних напружень та орієнтацію головних

площадок. Обидві задачі можна розв'язати як аналітично, так і графічно – за допомогою кругів Мора.

Мор Христіан Отто (1835-1918) – німецький учений. Один із засновників графічної кінематики, розробив так званий *метод трьох моментів*, створив одну з діючих теорій міцності. Розробив *метод сил* для розкриття статичної невизначеності та узагальнив формули Максвелла (теорема Максвелла – Мора).

5.2.2. Круги Мора (пряма задача)

Круг Мора – це геометричне місце точок (у випадку плоского напруженого стану – коло), координати яких відповідають чисельним значенням нормальних і дотичних напружень, що діють у точці на площадках, які мають різні кути нахилу.

Тобто круг Мора – це геометрична інтерпретація напруженого стану в певній точці навантаженого твердого тіла.

Нехай задано головні напруження σ_1 та σ_2 , а треба знайти напруження на площадках, розвернутих під кутом α до головних площадок (рис. 5.8).

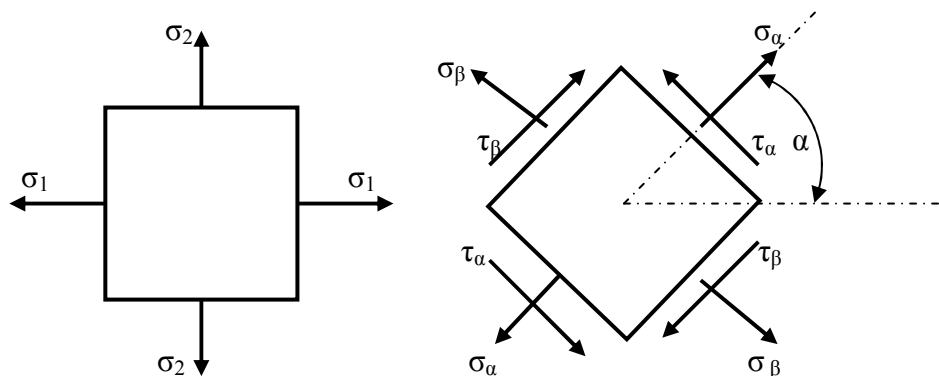


Рис. 5.8. Плоский напружений стан. Пряма задача

Вибираємо орієнтацію осей σ та τ таким чином, щоб вісь σ співпадала з напрямком більшого з головних напружень. Вісь τ буде спрямована перпендикулярно (рис. 5.9).

Відкладаємо на осі σ значення σ_1 та σ_2 (т.т. A та B). Після цього ділимо відстань між отриманими точками навпіл і вибираємо цю точку за центр кола, яке базується на відрізьку осі AB як на діаметрі.

Як вже було сказано, круг Мора – це геометричне місце точок, координати яких відображають напруження на площадках, нахилених під різними кутами в точці тіла, що досліджується. Тому для того, щоб знайти напруження на площадці, нахиленій до головної під кутом α , слід з центра кола C провести промінь під кутом 2α або з точки на осі σ , що відповідає σ_{\min} , провести промінь під кутом α . Перетин цих променів із колом дасть точку D (рис. 5.9), координати якої будуть відповідати σ_α та τ_α .

Дійсно, радіус кола

$$AC = BC = DC = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Тоді $\sigma_\alpha = OA + AC + CK = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$; (5.15)

$$\tau_\alpha = DK = DC \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.16)$$

Координати т.Е, діаметрально протилежній т.Д, відображають напруження по площадці, що розвернута на 90° до попередньої.

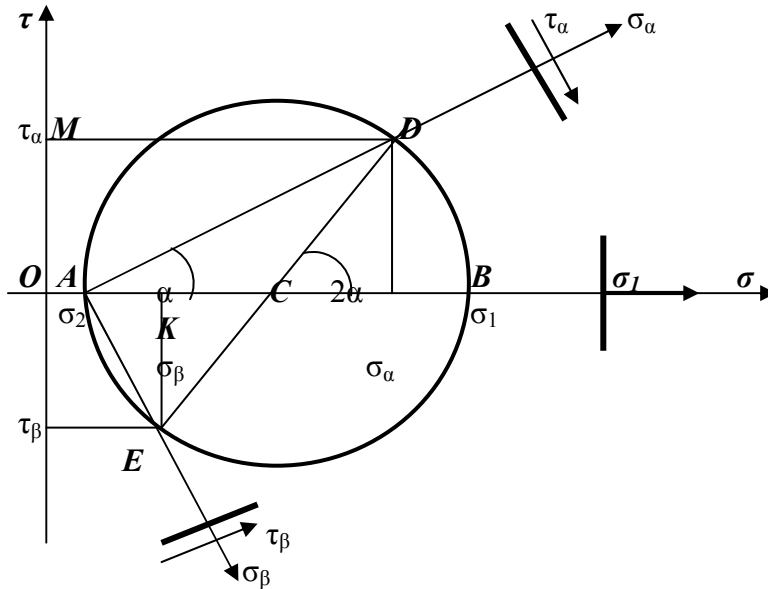


Рис. 5.9. Круг Мора. Пряма задача

Напрямок σ_α та σ_β визначають напрямом променів AD та AE відповідно. Орієнтацію τ_α та τ_β визначають знаком координати τ .

5.2.3. Круги Мора (обернена задача)

Нехай задані напруження на взаємно перпендикулярних неголовних площадках $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ та $\sigma_\beta \tau_\beta$ (рис. 5.10). Треба визначити величини і напрямки головних напружень (тобто $\sigma_{\max}; \sigma_{\min}; \alpha$). Спочатку ми не знаємо, яку пару головних напружень отримаємо – $\sigma_1 \sigma_2$ чи $\sigma_2 \sigma_3$ чи $\sigma_1 \sigma_3$. Це буде залежати від знака отриманих напружень. Якщо обидва напруження вийдуть зі знаком „+” – це σ_1 та σ_2 ($\sigma_3 = 0$); якщо обидва матимуть знак „-”, – це σ_2 та σ_3 ($\sigma_1 = 0$). Якщо знаки різні – це пара σ_1 та σ_3 ($\sigma_2 = 0$). Домовимося вибирати $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$.

У цьому випадку побудову круга Мора робимо так. Вісь σ орієнтуємо за напрямком σ_α , а ось τ – по нормалі до неї (рис. 5.11).

Далі позначаємо т. А та В, координати яких $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ та $\sigma_\beta \tau_\beta$ – відповідно. Сполучаємо між собою ці точки і на цьому відрізку АВ, як на діаметрі, будуємо коло з центром у т.С (перетині відрізка АВ з віссю σ).

Перетин кола з віссю σ дає в т. Д та Е відповідні головні напруження σ_1 та σ_2 (σ_3 в цьому випадку =0).

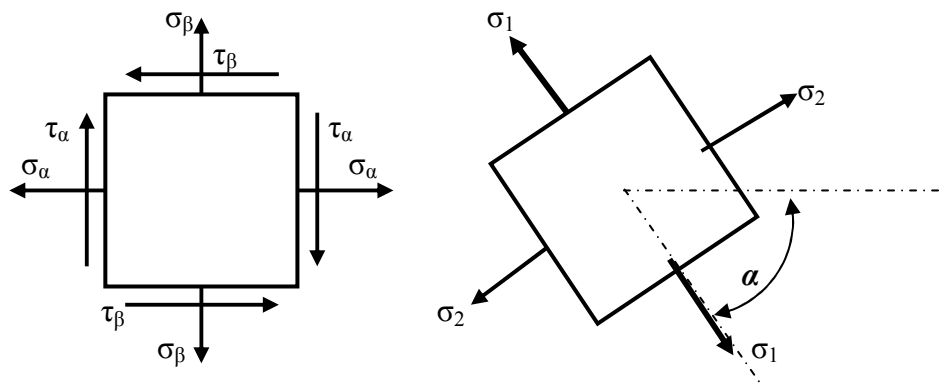


Рис. 5.10. Плоский напряжений стан. Обернена задача

Для визначення напрямку σ_1 треба з т. A опустити перпендикуляр на вісь σ до перетину його з колом в т. F . Промінь, проведений з т. E ($\sigma_2; 0$) через цю т. F , визначить напрямок σ_1 .

Аналогічно визначаємо напрям меншого з головних напружень (у даному випадку σ_2). З т. B перпендикулярно до осі σ проводимо промінь до перетину з колом у т. K , після чого промінь з т. E через т. K задає напрям σ_2 .

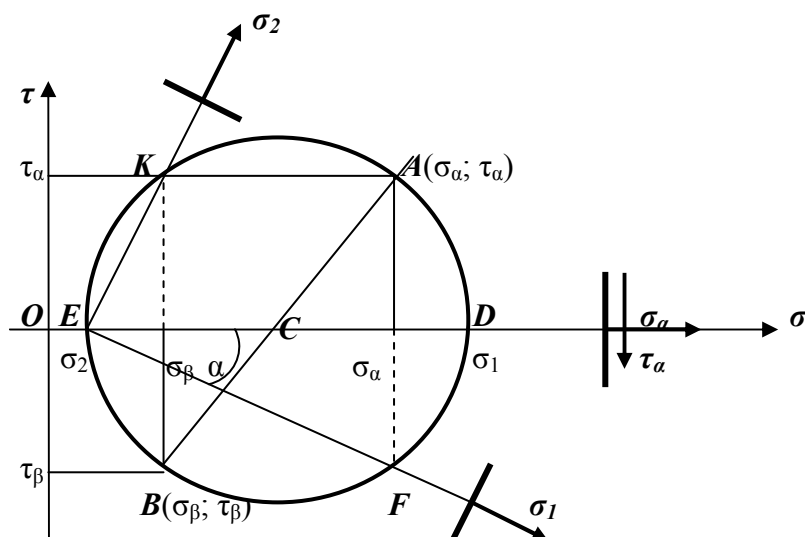


Рис. 5.11. Круг Мора. Обернена задача

5.2.4. Обернена задача (аналітичне виведення)

Тепер отримаємо аналітичні залежності для розв'язування оберненої задачі. Для цього можна або розглянути залежності (5.7; 5.10) або вивести їх за допомогою круга Мора. Розглянемо останній шлях.

$$\sigma_1 = OD = OC + CD = OC + AC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

або
$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right]$$
 . (5.17)

Аналогічно
$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau^2} \right]. \quad (5.18)$$

Кут α можна обчислити, використовуючи залежність

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{\tau_\alpha}{\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}} = - \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (5.19)$$

Знак „-“, з'являється з геометричних міркувань (рис. 5.11).

Можна також використати залежність

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\tau_\alpha}{\sigma_{\max} - \sigma_\beta}. \quad (5.20)$$

5.3. Октаедричні напруження

При вивченні пластичних деформацій цікавими є дотичні напруження, що діють на площадці, рівно нахиленій до всіх головних напрямів. Таку площадку називають *октаедричною* (рис. 5.12).

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Враховуючи, що завжди

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1,$$

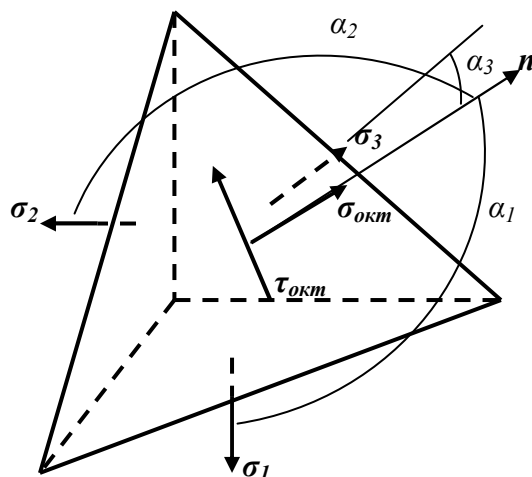


Рис. 5.12. Напруження на октаедричних площадках

отримаємо, що $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}.$

Тоді

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (5.21)$$

$$\tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (5.22)$$

В теорії пластичності зручно вводити так звану інтенсивність напружень σ_i .

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт} \quad (5.23)$$

або

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (5.24)$$

5.4. Об'ємний напружений стан

5.4.1. Узагальнений закон Гука.

Розглянемо елементарний об'єм напруженого тіла, вирізаний у вигляді кубика на головних площадках (рис. 5.11). Розглянемо деформації у напрямі дії σ_1 :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{E} \mu - \frac{\sigma_3}{E} \mu$$

або

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Залежності (5.25) називають *узагальненим законом Гука для ізотропного тіла*.

Ці вирази справедливі не тільки для головних, але й для будь-яких трьох взаємно перпендикулярних напрямків, оскільки при малих деформаціях вплив зсуву на лінійну деформацію є малою величиною другого порядку.

5.4.2. Об'ємна деформація.

Нехай елементарний об'єм у вигляді прямого паралелепіпеда має до деформації розміри $a; b; c$, а після деформації $-(a + \Delta a); (b + \Delta b)$ та $(c + \Delta c)$ відповідно.

Тоді його початковий об'єм дорівнює

$$V_0 = abc, \quad (5.26)$$

а кінцевий відповідно

$$\begin{aligned} V_k &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc + ab\Delta c + ac\Delta b + \\ &+ cb\Delta a + a\Delta b\Delta c + b\Delta a\Delta c + c\Delta a\Delta b + \Delta a\Delta b\Delta c. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що у цьому виразі останні чотири члени є нескінченно малими величинами порівняно з рештою членів.

Тоді відносна зміна об'єму

$$\theta = \frac{V_k - V_0}{V_0} \approx \frac{ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a}{abc}$$

або

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad . \quad (5.27)$$

Використавши (5.25), перетворимо (5.27) так:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad . \quad (5.28)$$

Лекція 6. Продовження теми 5 (Складний напружений стан). Теорії міцності

Питома потенціальна енергія зміни форми. Питома потенціальна енергія зміни форми. Теорії міцності. Поняття про нові сучасні теорії міцності.

5.4.3. Питома потенціальна енергія зміни форми.

Питома потенціальна енергія деформації u – це енергія, яка накопичується в елементарному об'ємі тіла при його пружній деформації. Повну питому потенціальну енергію при розгляді деяких процесів доцільно уявити у вигляді суми двох компонент u_v – питомої потенціальної енергії, яка йде на зміну об'єму; та u_ϕ – питомої потенціальної енергії, яка йде на зміну форми.

Уявивши собі деформацію, коли змінюється об'єм, але форма залишається незмінною, використовуючи закон Гука та вводячи поняття усереднених напружень і деформацій, неважко вивести формулу

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (5.29)$$

Якщо розглядати кубик із довжинами граней, які дорівнюють одиниці, можна записати

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \quad (5.30)$$

Або, застосувавши закон Гука (5.25),

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (5.31)$$

Тоді можна знайти u_ϕ як різницю $u - u_v$. Тобто після перетворень

$$u_\phi = u - u_v = \frac{1+\mu}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \quad (5.32)$$

Це й буде виразом для знаходження питомої потенціальної енергії формоутворення.

5.5. Теорії міцності

Міцність тіла, що знаходиться у складному напруженому стані, навряд чи може бути оцінена порівнянням із допустимим напруженням тільки одного, нехай і найбільшого напруження. Але все-таки перше найпростіше припущення полягає в тому, що *небезпечний стан матеріалу настає в той момент, коли найбільше за абсолютною величиною нормальне напруження досягає небезпечного значення*. Цю гіпотезу називають *теорією найбільших напружень або першою теорією міцності*.

Таким чином, і в загальному випадку, коли всі три головні напруження σ_1, σ_2 і σ_3 не дорівнюють нулю, при перевірці за цією теорією необхідно враховувати величину лише

найбільшого розтягуючого та найбільшого стискаючого напруження. Величини ж двох інших головних напружень відсутні і, начебто, ніякого впливу на міцність матеріалу, на досягнення ним небезпечного стану не впливають і про них при перевірці міцності можна забути. Тоді до певної міри втрачається відмінність між перевіркою міцності при лінійному напруженому стані та при об'ємному.

Умови міцності для обох випадків записують однаково:

$$\boxed{\sigma_{r1} = \sigma_1 \leq [\sigma] \text{ або } \sigma_I = |\sigma_3| \leq [\sigma]} \quad (5.33)$$

При перевірці вказаної гіпотези дослідями виявилася невідповідність її висновків із результатами дослідів на всебічний стиск не тільки пластичних матеріалів, але й крихких. Лише для випадку розтягу крихких матеріалів ця теорія узгоджується з дослідями. Оскільки ця теорія дає або зайві, або недостатні розміри перетинів елементів конструкцій при складному напруженому стані, її не застосовують і вона має лише історичне значення.

Висунута недоліками першої, і певною мірою на противагу їй, *друга гіпотеза пропонує виникнення небезпечного стану визначати не рівнем найбільшого напруження, а величиною найбільшого відносного видовження (або вкорочення).*

Якщо це так, то перевірку міцності слід проводити за найбільшими відносними деформаціями. Зберігаючи той же коефіцієнт запасу, для найбільшої відносної поздовжньої деформації в загальному випадку (всі головні напруження не дорівнюють нулю) за допустимим ми повинні вибирати ту ж величину, що і при простому розтягу.

Тобто
$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\varepsilon].$$

Для випадку ж лінійного напруженого стану ми знаємо величину допустимого напруження $[\sigma]$. За законом Гука

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Тоді
$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E} \quad (5.34)$$

і остаточно

$$\boxed{\sigma_{r2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma]} \quad (5.35)$$

Таким чином, приймаючи теорію найбільших відносних видовжень, необхідно порівнювати з допустимим напруженням, встановленим для простого розтягу або стиску, не те або інше головне напруження, а їх сукупність, так зване *приведене (розрахункове) напруження*, що визначається за формулою

$$\sigma_{r2} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Ця гіпотеза також суперечить результатам досліджень міцності пластичних матеріалів. Якби вона була для таких матеріалів вірна, то зразок, що розтягується в двох або трьох напрямках, був би міцнішим за зразок, який розтягується лінійно. Досвід цього не підтверджує. Не підтверджується ця гіпотеза і при всесторонньому рівномірному стиску.

Для крихкого стану матеріалу теорія найбільших відносних деформацій дає результати, що, як правило, узгоджуються з дослідом.

Третя гіпотеза міцності (або теорія найбільших дотичних напружень) стверджує, що *головну роль у виникненні небезпечного стану матеріалу відіграє найбільше напруження, але вже не нормальне, а дотичне, що дорівнює напіврізниці найбільшого і найменшого головних напружень:*

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} .$$

При цьому припущенні перевірці міцності треба здійснювати за дотичними напруженнями. Умова міцності має вигляд

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Що стосується величини допустимих напружень $[\tau]$, то, вважаючи, що виникнення небезпечного стану залежить лише від найбільших дотичних напружень, при об'ємному напруженому стані ми повинні для цих напружень допускати ту ж величину, що і при простому розтягу.

Якщо при простому розтягу для нормальних напружень допускаємо величину $[\sigma]$, то тим самим для найбільших дотичних ми допускаємо значення $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ (див. 5.5). Ці дотичні напруження, як відомо, діють на площадці, нахиленій під кутом в $\pm 45^\circ$ до напрямку розтягуючої сили.

Умова міцності для об'ємного напруженого стану набуває вигляду

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad \text{або} \quad \boxed{\sigma_{r3} = (\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\sigma]} \quad (5.36)$$

Таким чином, приймаючи вказану гіпотезу, при перевірці міцності доводиться порівнювати з напруженням, що допускається, при розтягуванні або стискуванні не найбільше нормальне напруження, а різницю між найбільшим і найменшим нормальними (головними) напруженнями. Величина розрахункового (приведеного) напруження в цьому випадку дорівнює:

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 .$$

Третя умова міцності достатньо близько узгоджується з результатами дослідів, особливо для пластичних матеріалів. Вона підтверджується дослідями на всебічний стиск. Ця теорія забезпечує міцність елементів конструкцій, що розраховуються.

У тому простому вигляді розрахункових напружень (5.36) умова міцності може бути написана лише для тих матеріалів, для яких допустимі напруження на розтяг і стиск можуть бути прийняті рівними, наприклад, для сталі. Для таких матеріалів, як чавун, камінь і т. д. в умову (5.36) необхідно внести зміни, які вперше запропонував Х.Мор.

Критерій Мора базується на положенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить, в основному, від величини та знака найбільшого – σ_1 і найменшого – σ_3 з головних напружень. Мор запропонував формулу для умови міцності, яка б враховувала різні рівні допустимих напружень при розтягу $[\sigma_+]$ та стиску $[\sigma_-]$ відповідно:

$$\boxed{\sigma_{rM} = \left(\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \right) \leq [\sigma_+]} \quad (5.37)$$

Недоліком теорії найбільших дотичних напружень, що відразу впадає в очі, є та обставина, що вона не враховує впливу на роботу матеріалу середнього за величиною головного напруження. Виходить, що при постійних найбільшому σ_1 і найменшому σ_3 ми можемо, не змінюючи умов роботи матеріалу, як завгодно змінювати величину середнього напруження σ_2 , лише б воно було менше σ_1 і більше σ_3 . Ця обставина є сумнівною. Досліди підтверджують, що величина напруження σ_2 все ж має вплив на міцність матеріалу.

У зв'язку з недоліками старих теорій виникли нові ідеї щодо того, який фактор викликає виникнення небезпечного стану.

Було зроблено припущення, що небезпечний стан матеріалу залежить не від величини деформацій або напружень окремо, а від сукупності тих та інших – від величини потенціальної енергії або від чисельно їй рівної питомої роботи деформації. Величина цієї роботи виражається через всі три головні напруження.

Якщо припустити, що причиною небезпечного стану є накопичення повної питомої потенціальної енергії деформації, то міцність матеріалу буде забезпечена за умови, коли

$$u \leq [u].$$

Тут u – потенціальна енергія деформації при об'ємному напруженому стані, що виражається формулою (5.31), а $[u]$ – кількість потенціальної енергії, яку (за умовою рівномірності матеріалу при складному та лінійному напружених станах) можна отримати з виразу (5.31) для повної енергії деформації, що допускається при простому розтягу:

$$u_p = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

При простому розтягу для нормальних напружень ми допускаємо величину $[\sigma]$, тим самим для питомої роботи деформації допускаємо

$$[u] = \frac{[\sigma]^2}{2E}.$$

Для дотримання того ж ступеня безпеки в загальному випадку для питомої роботи деформації ми повинні допускати рівень, не більший, ніж $[u]$. Умова міцності набуде вигляду

$$\frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

або

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)} \leq [\sigma]. \quad (5.38)$$

Розрахункове напруження дорівнює

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}.$$

Ця гіпотеза не підтвердилася дослідями і має тільки історичне значення. Зате вона стала базою для створення нової енергетичної теорії міцності, що узгоджується з дослідями.

Теорія, яку зазвичай називають *четвертою теорією (або гіпотезою) міцності*, припускає, що причиною виникнення небезпечної пластичної деформації є не вся потенціальна енергія деформації, а тільки та її частина, яка пов'язана зі зміною форми елементарних об'ємів матеріалу. Отже, міцність матеріалу буде забезпечена, якщо

$$u_\phi \leq [u_\phi].$$

Тут потенціальна енергія формозміни при складному напруженому стані дорівнює (5.32)

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3].$$

Величина ж потенціальної енергії форми, що допускається, при простому розтягу дорівнює

$$[u_\phi] = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2.$$

Тоді умова міцності за енергетичною теорією матиме вигляд

$$\sigma_{nIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma], \quad (5.39)$$

а розрахункове (приведене) напруження буде

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} .$$

Умову міцності (5.39) можна навести і в іншому вигляді, іноді зручнішому для обчислень

$$\sigma_{rIV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] . \quad (5.40)$$

Формули (5.39) і (5.40) представляють умову міцності за теорією найбільшої потенціальної енергії зміни форми.

Можна показати, що розрахункове напруження σ_{rIV} за цією теорією пропорційне дотичному напруженню на площадці, рівно нахилений до напрямів головних напружень – октаедричної. Ця теорія міцності може бути віднесена до категорії теорій, що засновують перевірку міцності для пластичних матеріалів за величиною дотичних напружень. Досліди досить добре підтверджують результати, одержані за цією теорією для пластичних матеріалів.

На підставі формул (5.12) умова міцності (5.40) може бути написана ще й так:

$$\sqrt{2(\tau_{1,2}^2 + \tau_{1,3}^2 + \tau_{2,3}^2)} \leq [\sigma] . \quad (5.41)$$

Підсумовуючи розгляд теорій міцності, умову міцності при об'ємному напруженому стані можна записати у такому вигляді:

$$\sigma_r \leq [\sigma] ,$$

де σ_r – розрахункове (приведене) напруження; $[\sigma]$ – напруження, що допускається, при простому розтягу або стиску.

Великий внесок у теорію складного напруженого стану зробив видатний механік ХХ століття С.П. Тимошенко.

Тимошенко Степан Прокопович (1878–1972) – видатний вчений в галузі механіки. У 1901р закінчив Петербурзький інститут інженерів шляхів сполучень. У 1919 р. брав участь в організації АН України. В 1920 р. емігрував спочатку до Югославії потім – до США. Основні роботи стосуються механіки твердого деформівного тіла, будівельної механіки, опору матеріалів і теорії споруджень. Досліджував згин, кручення, коливання та удар стержнів, розробляв теорію пластин та оболонок, розв'язав задачу про концентрацію напружень навколо отворів. Розвинув теорію стійкості пружних систем, розробив ефективні варіаційні методи теорії пружності. Написав ряд підручників і монографій, що перекладені різними мовами. У США заснував наукову школу в галузі механіки деформованого твердого тіла. Член Національної АН США, акад. АН УРСР (з 1919р.), закордонний член АН СРСР (з 1964, член-кореспондент з 1928р.) та багатьох інших академій наук.

5.6. *Поняття про нові сучасні теорії міцності*

Умови переходу матеріалу в граничний стан, а також умови міцності за різними теоріями були виражені через головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, які є інваріантами напруженого стану.

Для тривимірного простору, спрямувавши осі координат за головними напрямками, вказані умови можна уявити у вигляді деяких граничних поверхонь:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (5.42)$$

Гранична поверхня, що відповідає умові появи масових пластичних деформацій за теорією питомої потенціальної енергії формозміни, має вигляд:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_m^2 = 0. \quad (5.43)$$

Гранична поверхня (5.43) є круговим циліндром з віссю, рівно нахиленою до координатних осей (рис. 5.12а), і радіусом $r = \sqrt{(2/3)}\sigma_m$. Для плоского напруженого стану, коли одне з головних напружень дорівнює нулю, умова (5.43) дає еліптичну граничну криву (рис. 5.12б).

Критерію найбільших дотичних напружень відповідає гранична поверхня у вигляді правильної шестигранної призми, вписаної в циліндр. Критерію найбільших нормальних напружень відповідає куб із ребром, яке дорівнює σ^u .

Зауважимо, що всі точки, розташовані всередині області, обмеженої граничною поверхнею, відповідають напруженим станам із коефіцієнтом запасу, більшим від одиниці. Напружені стани, зображені точками, що лежать зовні цієї області, мають коефіцієнт запасу, менший від одиниці.

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів стали стимулом для розроблення нових теорій міцності. Більшість із них заснована на виборі такої форми граничної поверхні, за якою можна якнайповніше врахувати особливості опору даного класу матеріалів в умовах складного напруженого стану.

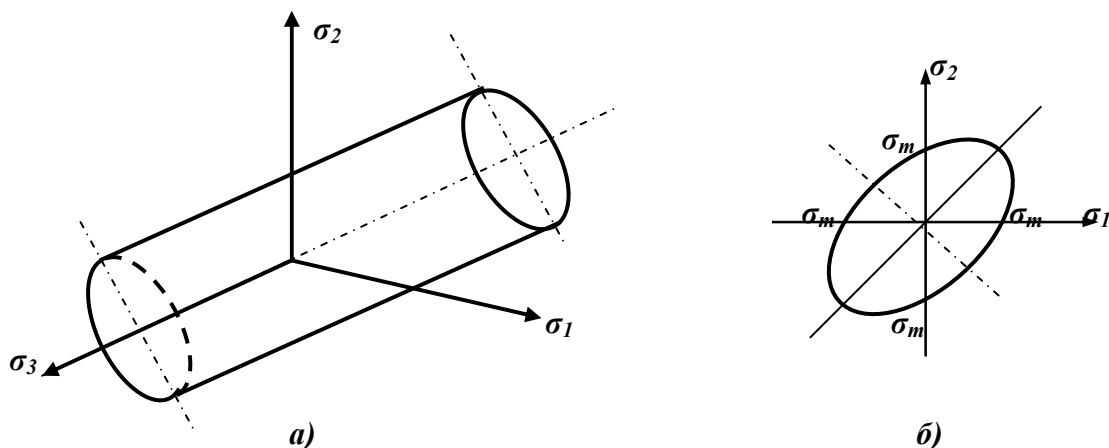


Рис. 5.12. Гранична поверхня (а) та гранична крива (б)

Розглянемо деякі нові теорії.

5.6.1. *Теорія Ягна.*

Ю. І. Ягн запропонував граничну поверхню (5.42) прийняти у вигляді полінома другого ступеня, симетричного за відношенням до всіх трьох головних напружень:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (5.44)$$

де постійні a , b і c для даного ізотропного матеріалу повинні визначатися з дослідів на одноосний розтяг і стиск та на чистий зсув.

Встановивши допустимі напруження $[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$ і $[\tau]$ відповідно при розтягу, стиску і зсуві, знаходимо вирази для постійних

$$a = \frac{6[\tau]^2 - 2[\sigma_+][\sigma_-]}{[\sigma_+][\sigma_-]}, \quad b = \frac{6[\tau]^2([\sigma_-] - [\sigma_+])}{[\sigma_+][\sigma_-]}, \quad c = 6[\tau]^2.$$

Таким чином, теорія Ю. І. Ягна дозволяє враховувати неоднаковий опір матеріалу розтягу і стиску, а також опір матеріалу зсуву. При певних співвідношеннях між введеними постійними a, b із виразу (5.44) можна одержати ряд енергетичних критеріїв, у тому числі і критерій питомої потенціальної енергії формозмінення.

5.6.2. Теорія Писаренка і Лебедева.

Г. С. Писаренко і А. О. Лебедев, вважаючи, що настання граничного стану зумовлено здатністю матеріалу чинити опір як дотичним, так і нормальним напруженням, запропонували шукати критерії міцності у вигляді інваріантних відносно напруженого стану функцій дотичних напружень і максимальних нормальних напружень.

Писаренко Георгій Степанович (1910 – 1998) – вітчизняний вчений у галузі механіки, академік НАНУ. З 1966р. – директор Інституту проблем міцності АН України. Основні роботи присвячені теорії механічних коливань і теорії міцності. Провів дослідження в галузі теорії нелінійних коливань, вивчав міцність матеріалів і несучу здатність елементів конструкцій за умов високих температур при різних силових і температурних навантаженнях.

Лебедев Анатолій Олексійович (1931) – вітчизняний вчений в галузі механіки, член-кореспондент НАНУ. Основні дослідження відносяться до механіки матеріалів і міцності конструкцій. Працював у галузі деформаційного зміцнення конструкційних матеріалів за умов низьких і високих температур. Створив комплекс автоматизованих систем для досліджень міцності конструкцій.

Запропоновано, наприклад, критерій у такій лінійній формі

$$\tau_{окт} + m_1 \sigma_1 \leq m_2. \quad (5.45)$$

Вираз для $\tau_{окт}$ дається формулою (5.22). Константи m_1 і m_2 матеріалу можна виразити через граничні напруження σ^0, σ_-^0 при одноосному розтягу і стиску. Тоді умова (5.45) набуде вигляду

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{окт} + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma^0, \quad (5.46)$$

де $\chi = \frac{\sigma^0}{\sigma_-^0}$.

Для матеріалів, що знаходяться в пластичному стані, $\sigma^0 = \sigma_-^0$, $\chi = 1$ і вираз (5.46) перетвориться в розрахункове рівняння теорії формозміни. Для ідеально крихкого матеріалу $\chi = 0$ вираз (5.46) перетвориться в рівняння для I теорії міцності. При $0 < \chi \leq 1$ (більшість конструкційних матеріалів) гранична поверхня (5.46) є рівно нахиленою до головних осей фігурою, в яку вписана шестигранна піраміда, відповідна спрощеній теорії міцності Мора.

Експериментальна перевірка розглянутої теорії показала, що критерій (5.46) добре узгоджується з результатами випробовувань широкого класу конструкційних матеріалів.

5.6.3. Діаграми механічного стану (критерій Я. В. Фрідмана).

Вплив типу напруженого стану на характер втрати міцності матеріалів приблизно можна врахувати за допомогою діаграм механічного стану. Останні будують на підставі таких положень:

- залежно від типу напруженого стану матеріали можуть руйнуватися від розтягуючих напружень (або подовжень) шляхом відриву або від дотичних напружень шляхом зрізання і відповідно до цього розрізняють дві характеристики міцності — опір відриву $S_{відр}$, який є величиною нормальних напружень на поверхні руйнування в першому випадку, та опір зрізанню τ_k , який є величиною дотичних напружень у другому випадку;
- обидві характеристики міцності ($S_{відр}$ і τ_k) не залежать від типу напруженого стану;
- крива деформації матеріалу в координатах $\tau_{макс} - \gamma_{макс}$ також не залежить від напруженого стану;
- втрата міцності шляхом відриву описується теорією найбільших відносних подовжень так:

$$\sigma_{екв11} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = S_{відр}, \quad (5.47)$$

а втрата міцності другого типу — теорією найбільших дотичних напружень таким чином:

$$\tau_{макс} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_k. \quad (5.48)$$

Діаграма механічного стану складається з двох діаграм (рис. 5.13) — власне діаграми механічного стану (а) і кривої деформації в координатах $\tau_{макс} - \gamma_{макс}$ (б). При побудові діаграми по осі ординат відкладають найбільше дотичне напруження $\tau_{макс}$, а по осі абсцис — найбільше еквівалентне розтягуюче напруження за другою теорією міцності ($\sigma_{екв11}$). На діаграму наносять граничні лінії, відповідні границі текучості τ_m при зсуві, опору зрізу τ_k і опору відриву $S_{відр}$. Відхилення лінії опору відриву вправо вище за межу текучості відповідає зростанню опору відриву з появою залишкових деформацій.

Для характеристики типу напруженого стану вводять коефіцієнт «м'якості», що є відношенням найбільшого дотичного напруження в точці до найбільшого еквівалентного розтягуючого напруження

$$\alpha = \frac{\tau_{макс}}{\sigma_{екв}}. \quad (5.49)$$

Різні напружені стани, таким чином, при зростанні навантаження відображають на діаграмі променями, тангенси кутів нахилу яких дорівнюють відповідному значенню α . Наприклад: при всебічному розтягу ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), $\tau_{\max} = 0$, $\alpha = 0$ і промінь співпадає з віссю абсцис; при простому розтягу ($\sigma_1 = \sigma; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

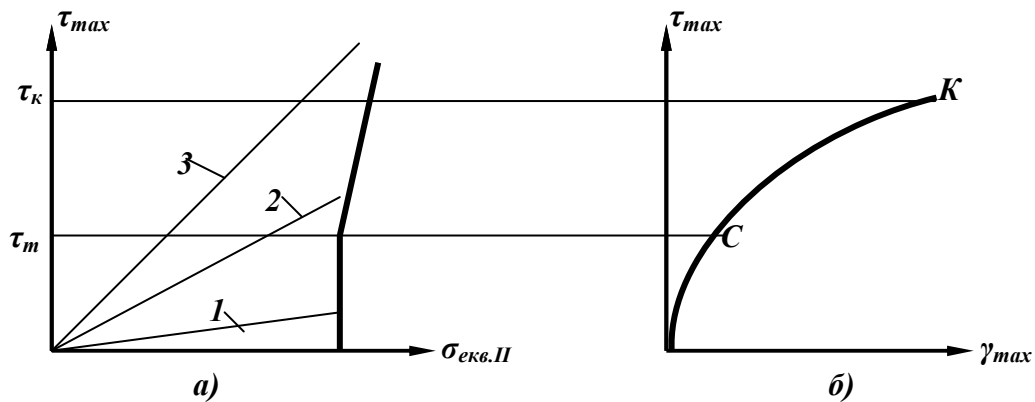


Рис.5.13. Діаграми: (а) – механічного стану, (б) – крива деформації

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{\text{екв}11} = \sigma \quad \text{і} \quad \alpha = \frac{1}{2};$$

при простому стиску ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\sigma$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{\text{екв}11} = \mu\sigma; \quad \alpha = \frac{1}{2\mu}.$$

Приймаючи $\mu = 0,25$, знаходимо, що $\alpha = 2$.

Розглядаючи промені, що відповідають різним типам напруженого стану матеріалу, можна приблизно встановити вид руйнування і таким чином вибрати відповідну теорію міцності. Наприклад, промінь 1 на діаграмі найперше перетинає лінію опору відриву. Отже, матеріал руйнуватиметься шляхом відриву без попередньої пластичної деформації. Промінь 2 перетинає спочатку лінію текучості, а потім – лінію опору відриву. Отже, при даному напруженому стані руйнування відбудеться шляхом відриву, але з попередньою пластичною деформацією. Для напруженого стану, відповідного променю 3, після пластичної деформації руйнування відбудеться шляхом зрізу. В тих випадках, коли промені, що відображають той або інший складний напружений стан, перетинають перш за все лінію опору відриву, розрахунок міцності слід проводити за теорією Мора, другою або першою теоріями міцності. Якщо ж спочатку промінь перетинає лінію межі текучості, то розрахунок міцності належить проводити за третьою або четвертою теоріями міцності.

Таким чином, діаграми механічного стану з певним наближенням відображають залежність форми руйнування від виду напруженого стану. Наближеність побудови полягає в тому, що межа текучості й опір руйнуванню не постійні. Промені, що зображують напружені стани, мають вигляд прямої лінії лише до досягнення межі текучості.

Лекція 7. Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів (ГХПП)

Класифікація геометричних характеристик перерізів. Площа. Статичний момент площі відносно осі. Моменти інерції: осьові, відцентровий та полярний. Осьовий та полярний моменти опору. Центральні та головні осі інерції. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей та при їх повороті.

Відзначалося, що для розгляду задач міцності, жорсткості та стійкості необхідно мати уявлення не тільки про зовнішню систему сил, що діють на тіло, але й про його розміри і форму. При цьому у багатьох випадках для розуміння процесів, пов'язаних з напружено-деформованим станом, не вистачає такої геометричної характеристики плоских перерізів, як площа. Наприклад, якщо звичайну лінійку (стержень прямокутного поперечного перерізу) розтягувати вздовж її осі, то з точки зору міцності й жорсткості немає різниці як буде орієнтований її поперечний переріз. Але, якщо ту ж саму лінійку спробувати зігнути в різних площинах – міцнісні та жорсткісні властивості будуть суттєво відрізнятися, хоча площа поперечного перерізу при цьому змінюватися не буде. Тому розглянемо ще деякі характеристики перерізів, які часто зустрічаються в опорі матеріалів.

6.1. Класифікація геометричних характеристик перерізів

6.1.1. Площа – A .

Усі мають чітке уявлення, що таке площа, тому відзначимо тільки, що ця величина завжди додатна і розмірність її – (од. довжини²), тобто (m^2) або похідні від цієї величини ($cm^2 = 10^{-4} m^2$, $mm^2 = 10^{-6} m^2$).

6.1.2. Статичний момент площі відносно осі.

Розглянемо переріз у довільній декартовій прямокутній системі координат XOY (рис 6.1). Виберемо елемент площі dA . Тоді величина

$$S_x = \int_A y dA \quad (6.1)$$

буде називатися *статичним моментом площі A відносно осі X* .

Аналогічно $S_y = \int_A x dA$ – статичний момент цієї площі відносно осі y . Розмірність статичного моменту площі – одиниці довжини в третьому степені (m^3, cm^3). Статичний момент може бути додатним, від'ємним і дорівнювати нулю.

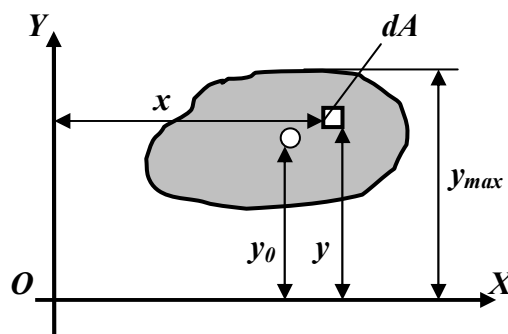


Рис.6.1. Переріз у декартовій системі координат

Як правило, нас цікавить його величина – модуль, а знаком можна нехтувати.

Проводячи математичну аналогію з моментами сил та спираючись на теорему про момент рівнодійної, можна записати

$$S_x = y_0 \cdot A \quad \text{та} \quad S_y = x_0 \cdot A, \quad (6.2)$$

де $x_0; y_0$ – координати центра ваги площі A .

Це дає змогу обчислити координати центра ваги

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{S_y}{A} \\ y_0 = \frac{S_x}{A} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

З цих формул випливає: *якщо відносно певної осі статичний момент дорівнює 0, ця вісь є центральною (тобто вона проходить через центр ваги).*

Для обчислення статичних моментів складної фігури її розбивають на простіші частини. При цьому загальний статичний момент буде дорівнювати алгебраїчній сумі статичних моментів окремих частин фігури відносно тієї самої осі:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i; \quad (6.4)$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_{i=1}^n A_i x_i.$$

6.1.3. Моменти інерції площ.

А). *Осьовий (екваторіальний) момент інерції I_0 .*

Розглянемо той же самий переріз (рис. 6.1).

Осьовим (або екваторіальним) моментом інерції площі відносно осі X називають величину

$$I_x = \int_A y^2 dA. \quad (6.5)$$

Ця величина має розмірність одиниць довжини в четвертому степені (m^4, cm^4) і приймає тільки додатні значення.

Б). *Відцентровий момент інерції.*

Відцентровим моментом інерції вважають величину

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (6.6)$$

Розмірність її така ж сама, як і в осьового моменту інерції – одиниці довжини в четвертому степені.

Ця величина вже може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Крім того відцентровий момент інерції може дорівнювати нулю.

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називають головними осями інерції перерізу. Відповідні осьові моменти інерції називають головними. Якщо головні осі проходять через центр ваги перерізу, їх називають центральними головними осями інерції.

Зауваження: якщо хоч одна з пари координатних осей буде віссю симетрії, ці осі будуть головними.

Дане твердження впливає з того, що в умовах симетричності відносно осі кожній точці перерізу можна вказати симетричну, яка одну координату буде мати таку ж саму, а другу – зі зміненим знаком. Тоді в інтегральну суму увійдуть попарно члени, рівні за модулем та різні за знаком, що й перетворить цю суму в 0.

В). Полярний момент інерції.

Полярним моментом інерції I_p називають інтегральну суму добутків елементарних площадок dA на квадрат відстані їх від полюса – ρ^2 (у полярній системі координат), взяту по всій площі перерізу (рис. 6.2). Тобто

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (6.7)$$

Ця величина має розмірність одиниць довжини в четвертому степені ($см^4, м^4$) й може бути лише додатною. Зрозуміло: якщо сумістити початок декартової прямокутної системи координат O з полюсом полярної системи (див. рис. 6.2), то

$$I_p = I_x + I_y \text{ тому що } (\rho^2 = x^2 + y^2). \quad (6.8)$$

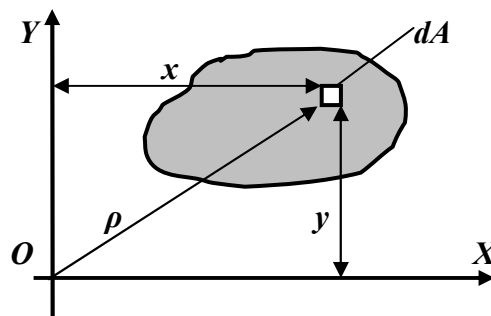


Рис. 6.2. Співвідношення осьових та полярного моментів інерції

6.1.4. Моменти опору.

А). Момент опору осьовий.

Відношення осьового моменту інерції перерізу до відстані між відповідною віссю та найвіддаленішою від неї точкою перерізу називають осьовим моментом опору $W_0(W_x; W_y)$.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (6.9)$$

В). Момент опору полярний.

Полярний момент опору W_p – це, відповідно, відношення полярного моменту інерції I_p до відстані між полюсами та самою віддаленою точкою ρ_{\max} . Тобто,

$$w_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (6.10)$$

Розмірність осьових і полярних моментів інерції – одиниці довжини в третьому степені (m^3, cm^3). Знаком осьових моментів опору, як правило, не цікавляться, рахуючи їх за модулем.

6.1.5. Радіус інерції.

Радіус інерції i визначається як величина, що дорівнює кореню квадратному з відношення осьового моменту інерції I_0 до площі перерізу A :

$$\begin{aligned} i_x &= \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \\ i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \end{aligned} \quad (6.11).$$

Розмірність цієї величини – одиниці довжини. Знак додатний.

6.2. Перетворення моментів інерції

6.2.1. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей.

Нехай є прямокутна система координат X_0OY_0 , пов'язана з центром ваги перерізу т.С (рис 6.3)

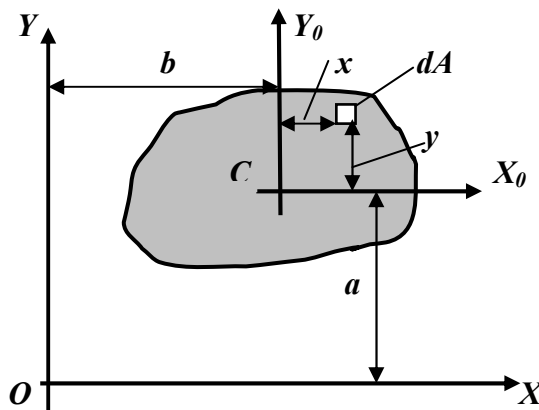


Рис.6.3. Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей

Будемо вважати відомими осьові та відцентровий моменти інерції відносно цих центральних осей та площу перерізу ($I_{x_0}; I_{y_0}; I_{x_0y_0}; A$). Нехай є також друга система координат XOY , осі якої паралельні осям першої системи та віддалені від неї на відстані відповідно „а” та „в”. Треба визначити осьові та відцентровий моменти інерції відносно осей O, X та O, Y іншої системи координат.

Для цього розглянемо елементарну площадку dA на перерізі. Її координати в старій системі координат – $x_0; y_0$, а у новій – $x; y$ відповідно. Причому,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + b; \\ y &= y_0 + a. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тоді скористаймося (6.5)

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A x^2 dA. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Підставимо в перше з цих співвідношень вираз для y з (6.12):

$$I_x = \int_A (y_0 + a)^2 dA.$$

Перетворюючи та розбиваючи на суму інтегралів

$$I_x = \int_A (y_0^2 + 2ay_0 + a^2) dA = \int_A y_0^2 dA + 2a \int_A y_0 dA + a^2 \int_A dA,$$

маємо

$$I_x = I_{x_0} + a^2 A. \quad (6.14)$$

Дійсно: перший інтеграл цієї суми – це момент інерції відносно центральної осі OX_0 . Другий інтеграл є статичним моментом відносно осі OX_0 , який дорівнює нулю, тому що вона центральна. Останній інтеграл – це повна площа перерізу A . Цілком аналогічно можна вивести залежність

$$I_y = I_{y_0} + b^2 A. \quad (6.15)$$

Для виведення формули у випадку перетворення відцентрового моменту, скористаймося (6.6), підставивши (6.11).

$$I_{xy} = \int_A (y_0 x_0 dA + a \int_A x_0 dA + b \int_A y_0 dA + ab \int_A dA).$$

Розглядаючи цей вираз, неважко помітити, що перший інтеграл в ньому – відцентровий момент відносно осей x_0, y_0 – $I_{x_0 y_0}$; другий та третій – це статичні моменти відносно осей OX_0 та OY_0 (і тому дорівнюють нулю), а останній інтеграл являє собою повну площу перерізу A . Тобто

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + a \cdot b \cdot A. \quad (6.16)$$

Зауваження: формулами (6.13 – 6.15) можна скористатися тільки в тому випадку, коли осі OX_0 та OY_0 – центральні. Тому слід уважно перераховувати моменти інерції при паралельному перенесенні осей. Якщо від нецентральної осей треба перейти до знову ж таки нецентральної, цей перехід слід робити у 2 етапи:

- спочатку треба перейти від нецентральної до центральної осей, встановивши попередньо всі потрібні відстані та положення центра ваги;
- потім від центральної осей перейти до тих нецентральної осей, які нас цікавлять.

6.2.2. Перетворення моментів інерції при повертанні осей.

Нехай є перша прямокутна система координат XOY та повернута на кут α відносно першої друга система X_1OY_1 . Причому, всі ці осі довільні (тобто, не обов'язково є центральними або головними) (рис.6.4).

Розглянемо елементарну площадку dA . Її координати у першій системі x ; y , а в другій x_1 ; y_1 .

Співставивши значення координат, можна записати

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Враховуючи, що

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA; \quad I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA;$$

підставимо у ці співвідношення вирази (6.17).
Відповідно, перетворюючи, будемо мати

$$I_{x_1} = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dx = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA$$

або

$$\cos^2 \alpha \cdot I_x - \sin 2\alpha \cdot I_{xy} + \sin^2 \alpha \cdot I_y .$$

Остаточно можна записати

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (6.18)$$

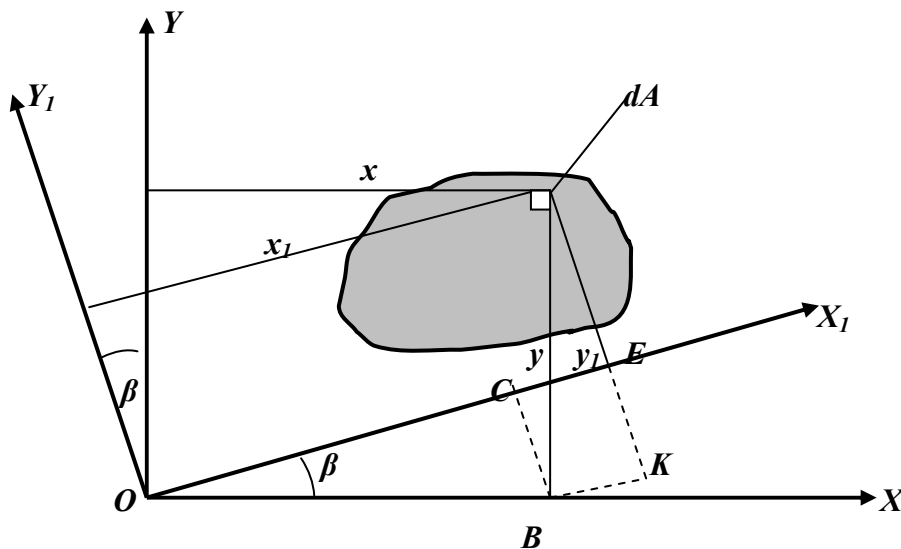


Рис. 6.4. Перетворення моментів інерції при повертанні осей

Роблячи аналогічні перетворення, отримаємо

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad (6.19)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (6.20)$$

Аналізуючи залежності (6.18) – (6.19), неважко отримати

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p \quad (6.21)$$

Тобто, при повертанні осей сума осьових моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту I_p (за тих умов, коли початок координат і полюс співпадають).

Лекція 8. Продовження теми 6 (ГХІІІ)

Головні осі інерції. Головні моменти інерції. Еліпс інерції. Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів. Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо).

6.2.3. Головні осі інерції. Головні моменти інерції.

Цікавим є питання про визначення осей, відносно яких моменти інерції будуть набувати найбільшого та найменшого значення. Позначимо ці осі „u” та „v”. Дослідимо на екстремум вираз (6.18). Взавши першу похідну та прирівнявши її до нуля, матимемо

$$-2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot I_x + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot I_y - 2 \cos 2\alpha \cdot I_{xy} = 0$$

або, перетворюючи

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = I_{x_1 y_1} = 0. \quad (6.22)$$

Тобто, I_{x_1} та I_{y_1} приймають екстремальні значення відносно тієї пари осей, для яких відцентровий момент $I_{x_1 y_1} = 0$. Тобто, за прийнятими нами позначеннями головних осей індексами „u” та „v” можна записати $I_{uv} = 0$. Нехай $I_u = I_{\max}$, а $I_v = I_{\min}$ (це відбувається за тієї умови, що $I_x > I_y$).

Головними осями інерції називають осі, відносно яких відцентровий момент дорівнює нулю.

Відносно головних осей виникають екстремальні значення моментів інерції, які теж називають головними моментами інерції.

Площини, проведені через вісь стержня та головні осі інерції називають *головними площинами інерції*.

Цікавим є визначення орієнтації головних осей та значень головних моментів інерції.

Нехай у перерізі є довільні взаємно перпендикулярні осі x та y. Відомі моменти інерції відносно цих осей I_x, I_y та I_{xy} . Потрібно встановити орієнтацію головних осей **u** та **v**, тобто визначити кут повороту на головні осі α_0 і визначити головні моменти інерції I_u та I_v .

Для визначення орієнтації головних осей розглянемо вираз (6.20). Для головних осей відцентровий момент дорівнює нулю, тому

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

або
$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}}, \quad (6.23)$$

звідки
$$\boxed{\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right)}. \quad (6.24)$$

Для визначення головних моментів розглянемо формули (6.18 – 6.19)

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0;$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0.$$

Розглянемо суму цих величин та їх різницю:

$$I_u + I_v = I_x + I_y; \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} I_u - I_v &= I_x \cos 2\alpha_0 - I_y \cos 2\alpha_0 - 2I_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= (I_x - I_y) \cos 2\alpha_0 + (I_x - I_y) \operatorname{tg} 2\alpha_0 \sin 2\alpha_0 = (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Тоді з (6.25) та (6.26)

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y + (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha} \right]; \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[I_x + I_y - (I_x - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Або, зробивши заміну

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{4I_{xy}^2}{(I_x - I_y)^2}}, \quad (6.28)$$

отримаємо:

$I_u = \frac{1}{2} \left[I_x + I_y + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]$	(6.29)
$I_v = \frac{1}{2} \left[I_x + I_y - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]$	

Таким чином, отримано можливість визначати як положення (орієнтації) головних осей, так і значень головних моментів інерції перерізу.

6.2.4. Еліпс інерції.

Вище вже згадувалося поняття радіусів інерції $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$; $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$.

Головним осям u та v відповідають головні радіуси інерції $i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}$; $i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$.

На головних центральних осях інерції перерізу можна побудувати еліпс із півосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому вздовж осі u відкладемо i_v , а вздовж осі v – i_u (рис. 6.5).

Цей еліпс називають *центральним еліпсом інерції*. Він має цікаву властивість – радіус інерції відносно будь-якої центральної осі Z визначається як перпендикуляр OA , проведений з центра еліпса до дотичної, яка паралельна даній осі (у нашому випадку осі Z). Точку дотику легко отримати побудовою хорди, яка проходить паралельно осі Z . Промінь, проведений з центра еліпса через середину цієї хорди, пройде через точку дотику на кривій еліпса. Після цього, вимірявши радіус інерції i_z – відрізок OB , можна отримати момент інерції: $I_z = i_z^2 A$.

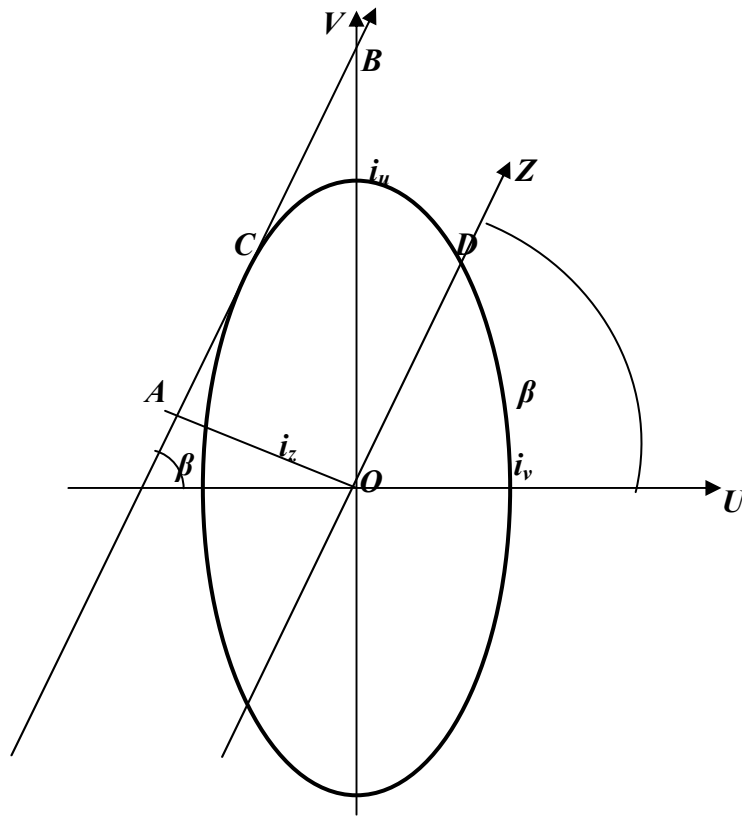


Рис. 6.5. Еліпс інерції

6.3. Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів

6.3.1. Прямокутник.

Нехай задано прямокутник (рис. 6.6). Обчислимо його осьові моменти інерції I_x, I_y

(X, Y – центральні, головні осі інерції): $I_x = \int_A y^2 dA$.

Елементарну площадку dA можна виразити як добуток $b dy$, тоді

$$I_x = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = 2 \frac{y^3}{3} b \Big|_0^{\frac{h}{2}}$$

або

$$I_x = \frac{bh^3}{12} ; \quad (6.30)$$

аналогічно

$$I_y = \frac{bh^3}{12} . \quad (6.31)$$

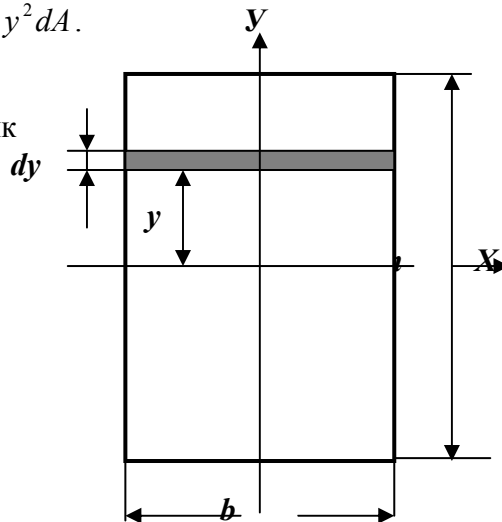


Рис. 6.6. Прямокутний переріз

Обчислюючи осьові моменти опору W_y та W_z , отримаємо:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}; \quad (6.32)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}. \quad (6.33)$$

6.3.2. Трикутник.

Нехай задано довільний трикутник (рис. 6.7), вісь X співпадає з основою, а X_0 – центральна.

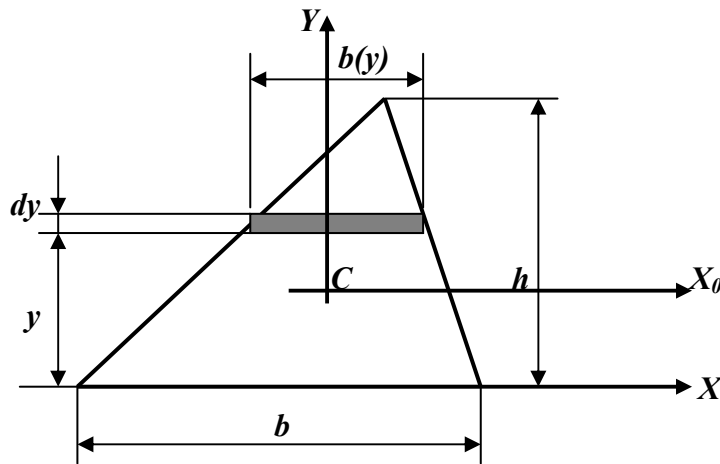


Рис. 6.7. Трикутний переріз

Знайдемо спочатку I_x :

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Елементарна площадка dA запишеться як

$$dA = b(y)dy,$$

де $b(y) = b \frac{h-y}{h} = b \left(1 - \frac{y}{h}\right),$

тобто, $I_x = \int_0^h by^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy$

або
$$I_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (6.34)$$

Для центральної осі x_0 момент інерції підрахуємо за допомогою формули паралельного переносу (6.13), знаючи, що центр ваги трикутника знаходиться на рівні $\frac{1}{3}$ висоти від основи.

$$I_{x_0} = I_x - a^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2}.$$

Знак „-“, у формулі вибрано тому, що здійснюється перехід від нецентральної осі до центральної. Тобто,

$$\boxed{I_{x_0} = \frac{bh^3}{36}} \quad (6.35)$$

6.3.3. Круг.

Нехай задано круг з радіусом R (рис. 6.8). Знайдемо момент інерції відносно будь-якої центральної осі, наприклад, X :

$$I_x = \int_A y^2 dA.$$

Площадку dA можна уявити як добуток $b(y)dy$. З рис.6.8 очевидно, що

$$b(y) = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ а } y = R \cos \frac{\alpha}{2}. \text{ Тоді } dy = -\frac{1}{2} R \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha.$$

Отже,

$$I_x = \int_{\pi}^0 R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} 2R \sin \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{2} R \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha \right). \quad (6.36)$$

Перетворюючи і змінюючи межі інтегрування, одержимо:

$$I_x = R^4 \int_0^{\pi} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha = R^4 \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha. \quad (6.37)$$

Тобто,

$$\boxed{I_x = \frac{\pi R^4}{4}} \quad (6.38)$$

Осьовий момент опору

$$\boxed{W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi R^3}{4}} \quad (6.39)$$

Скориставшись залежністю між осьовими та полярними моментами інерції та враховуючи, що для круга будь-яка центральна вісь є головною, можна підрахувати полярні моменти інерції та опору:

$$\boxed{I_p = 2I_x = \frac{\pi R^4}{2}} \quad (6.40)$$

$$\boxed{W_p = \frac{\pi R^3}{2}} \quad (6.41)$$

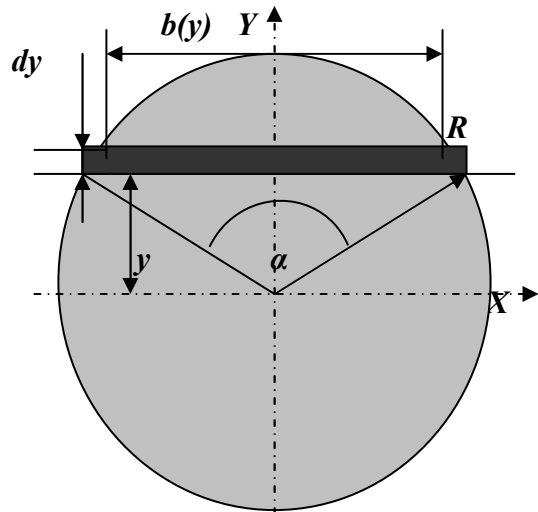


Рис. 6.8. Круглий переріз

6.3.4. Кільце.

Нехай задано кільце (рис. 6.9).

Тоді моменти інерції можна підрахувати за властивостями інтегральних сум.

Тобто,

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{4}$$

або у вигляді

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4) \quad , \quad (6.42)$$

де $\alpha = \frac{r}{R}$.

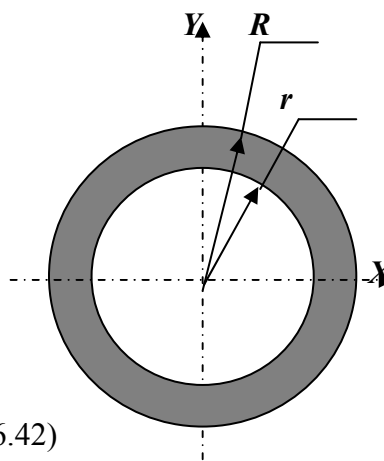


Рис.6.9. Кільцевий переріз

Аналогічно

$$W_x = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \alpha^4) \quad ; \quad (6.43)$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4) \quad ; \quad (6.44)$$

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4) \quad . \quad (6.45)$$

6.4. Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо)

Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо) проводять за допомогою таблиць сортаменту, представлених у різних довідниках, підручниках і задачниках з опору матеріалів і деталей машин.

Лекція 9. Тема 7. Чистий зсув. Кручення

Чистий зсув, напруження, умова міцності, приклад розрахунку на міцність заклепкового з'єднання, деформації, з-н Гука при зсуві, модуль пружності II роду. Кручення, внутрішні силові фактори при крученні, напруження, критерій міцності, деформації, закон Гука, умова жорсткості при крученні.

7.1. Чистий зсув, напруження, умова міцності

Чистий зсув (або зріз) – це випадок плоского напруженого стану, коли по гранях елемента діють тільки дотичні напруження.

У цьому випадку неважко визначити величини та напрямки головних напружень, розглядаючи, наприклад, круг Мора, зображений на рис. 7.1.

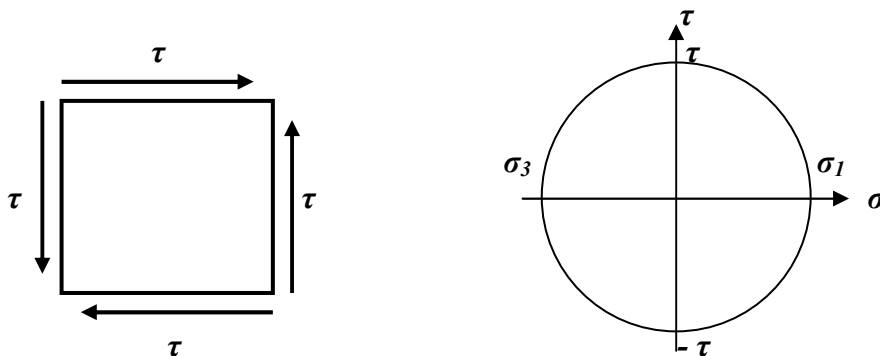


Рис.7.1. Напружений стан при чистому зсуві

Тоді цілком зрозуміло, що

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\sigma_3 = \tau; \\ \sigma_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Якщо згадати, що $\tau = \frac{dQ}{dA}$ та врахувати, що дотичні сили dQ , які викликають зсув, однакові по кожній площадці dA , то можна записати

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (7.2)$$

Очевидно, що умовою міцності при цьому буде

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]. \quad (7.3)$$

7.1.1. Приклад розрахунку на міцність заклепкового з'єднання.

Як правило, деформація зсуву зустрічається у сукупності з іншими видами деформації. Характерний приклад – робота найпростішого заклепкового з'єднання (рис. 7.2).

Нехай задача полягає в тому, щоб розрахувати кількість заклепок n у ряді, які з'єднують між собою дві пластини товщиною t , що розтягуються силами F . При цьому діаметр заклепки d , допустимі напруження на зріз $-\tau$ та на зминання (стиск) $-\sigma$.

Заклепка одночасно працює і в умовах зсуву (по діаметральному зрізу на границі дотикання пластин однієї до другої (рис. 7.3а) та зминання (по площадках контакту заклепки з кожною пластиною (рис. 7.3б,в).

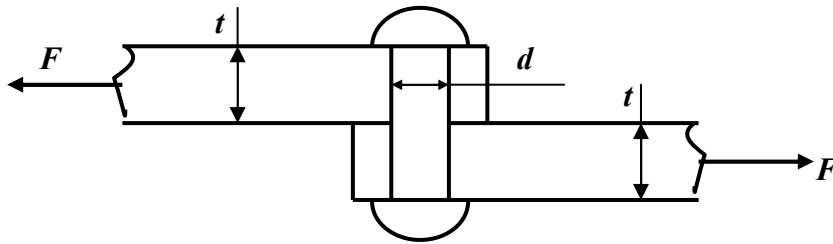


Рис.7.2. Заклепкове з'єднання

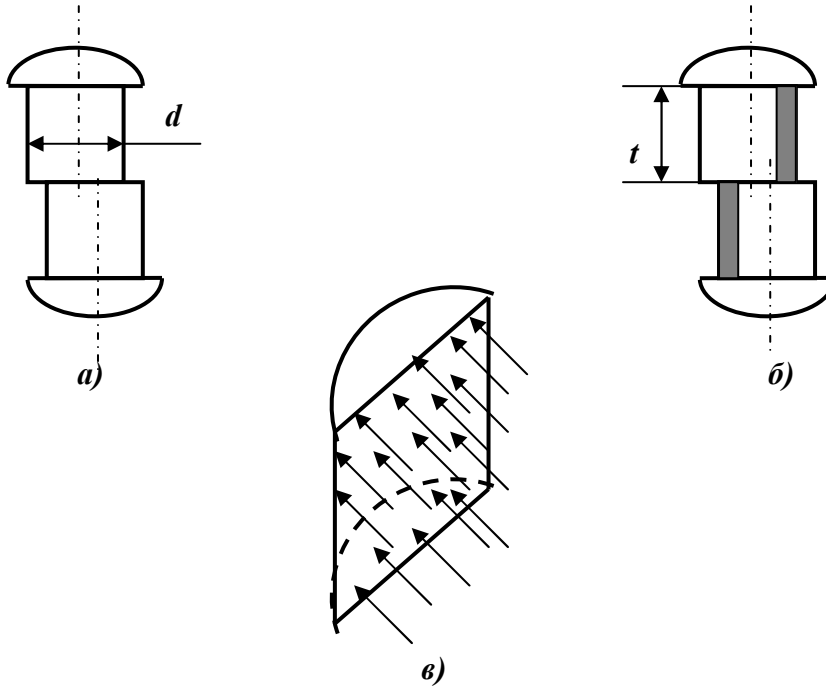


Рис.7.3. Навантаження на різні зони заклепки: а) зона зсуву, б) зона зминання; в) ефективне навантаження

Тоді розрахунком на міцність при зрізі буде

$$\tau_{\max} = \frac{F}{n' \frac{\pi d^2}{4}} \geq [\tau],$$

де n' – кількість заклепок із розрахунку на зріз.

Звідси отримаємо

$$n' \geq \frac{4F}{\pi d^2 [\tau]}. \quad (7.4)$$

Розрахунок на міцність при зминанні дасть

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{n'' t d} < [\sigma],$$

де n'' – кількість заклепок з розрахунку на зминання.

Тобто, за умов міцності на зминання

$$n'' \geq \frac{F}{t d [\sigma]} \quad (7.5)$$

Очевидно, ці розрахунки можуть дати різні значення n - n' та n'' . З цих двох значень треба буде вибрати найбільше для того, щоб задовольнялися обидві умови міцності – і на зріз, і на зминання.

7.2. Деформації, закон Гука при зсуві, модуль пружності II роду

Розглянемо деформацію елемента $ABCD$, що знаходиться в умовах чистого зсуву (рис. 7.4).

За абсолютну деформацію при зсуві приймають величину ΔS . За відносну деформацію $\gamma \sim \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}$. Розмірність величини ΔS – одиниці довжини. Відносна деформація γ – безрозмірна величина.

Розглянемо деформацію видовження діагоналі AC цього елемента.

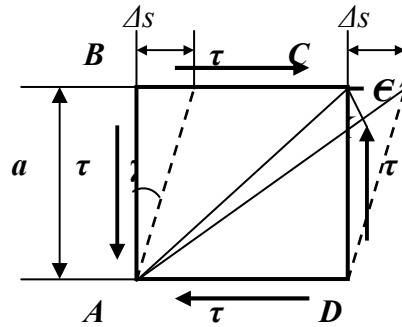


Рис. 7.4. Деформації при чистому зсуві

Враховуючи, що деформації малі, маємо

$$\varepsilon = \frac{KC'}{AK};$$

$$KC' = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}; \quad AK = AC = a\sqrt{2}.$$

Тоді
$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}a\sqrt{2}} = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{\gamma}{2}. \quad (7.6)$$

Враховуючи (7.6) та закон Гука (5.25), матимемо:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu\sigma_3] = \frac{\gamma}{2} \quad (7.7)$$

або
$$\frac{\tau}{E}[1 - \mu] = \frac{\gamma}{2}.$$

Звідки
$$\tau = \frac{E\gamma}{2(1 + \mu)}. \quad (7.8)$$

Позначимо

$$\boxed{\frac{E}{2(1 + \mu)} = G}. \quad (7.9)$$

Тоді (7.4) перетвориться на

або
$$\boxed{\begin{array}{l} \tau = G\gamma \\ \gamma = \frac{\tau}{G} \end{array}}. \quad (7.10)$$

Залежності (7.6) виражають закон Гука при зсуві. Величину G називають модулем Юнга другого роду або модулем пружності другого роду чи модулем зсуву. Розмірність та

фізичний зміст цієї величини аналогічні модулю Юнга першого роду E (при розтягу – стиску).

Залежності (7.8) можна переписати

$$\frac{\Delta S}{a} = \frac{Q}{GA}$$

або

$$\Delta S = \frac{Qa}{GA} \quad (7.11)$$

де Q – сила, що зсуває площадку площею A . Величина GA має такий же фізичний зміст, що й величина EA при розтягу – стиску і називається *жорсткістю при зсуві*.

7.3. Кручення

Кручення – це вид деформації, який виникає при прикладанні до стержня пар сил, що утворюють моменти в площинах, перпендикулярних до осі стержня.

Стержень, що працює на кручення, називають *валом*.

На доповнення до основних гіпотез опору матеріалів, що розглядалися раніше, введемо ще дві:

- гіпотеза плоских перерізів: *плоскі перерізи, перпендикулярні до осі вала, залишаються плоскими під час деформації;*
- *відстань між цими перерізами не змінюється.*

7.4. Внутрішній силовий фактор при крученні. Напруження.

Умова міцності

Оскільки кручення виникає при прикладанні пар сил у площинах, перпендикулярних до осі стержня, в довільному перерізі з шести можливих внутрішніх силових факторів виникає тільки один – *крутний момент T* (рис. 7.5).

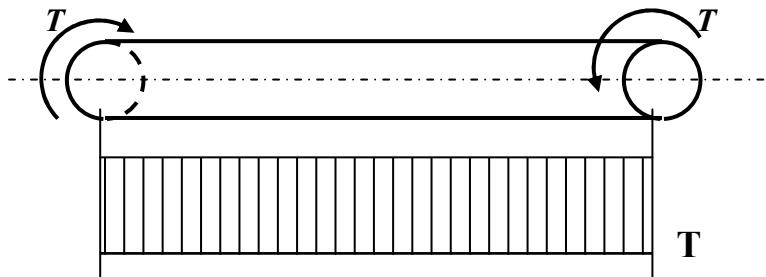


Рис. 7.5. Внутрішній силовий фактор при крученні

Розглянемо напруження, які виникають при крученні круглого вала радіуса r .

З характеру дії внутрішнього силового фактора зрозуміло, що в перерізі, перпендикулярному до осі вала, ці напруження мають дотичний характер.

Розглядаючи елемент вала довжиною dx (рис.7.6) і його переріз, перпендикулярний до осі, можна записати лише одне рівняння рівноваги, а саме:

$$T = T_{\text{вн}} = \int_A \tau_{\rho} \cdot \rho \cdot dA, \quad (7.12)$$

де ρ – відстань від центра перерізу до площадки dA , що розглядається (рис. 7.7);

τ_{ρ} – напруження на цій площадці.

Цього рівняння недостатньо, тому що є невідомим розподіл величин τ_ρ (а він явно не носить характер константи).

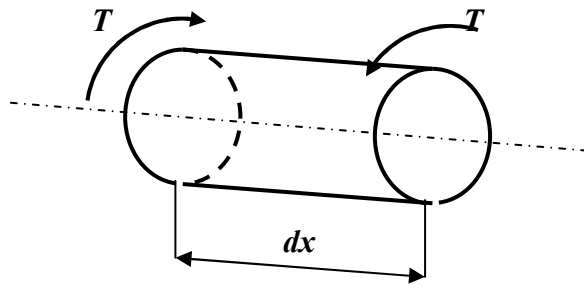


Рис. 7.6. Ділянка вала

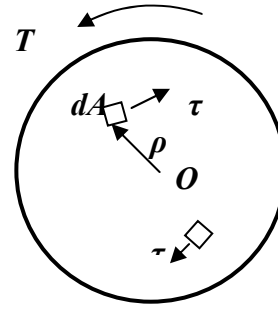


Рис. 7.7. Напруження в перерізі

Тобто система має статично невизначений характер. Розглянемо деформації в системі (рис. 7.8).

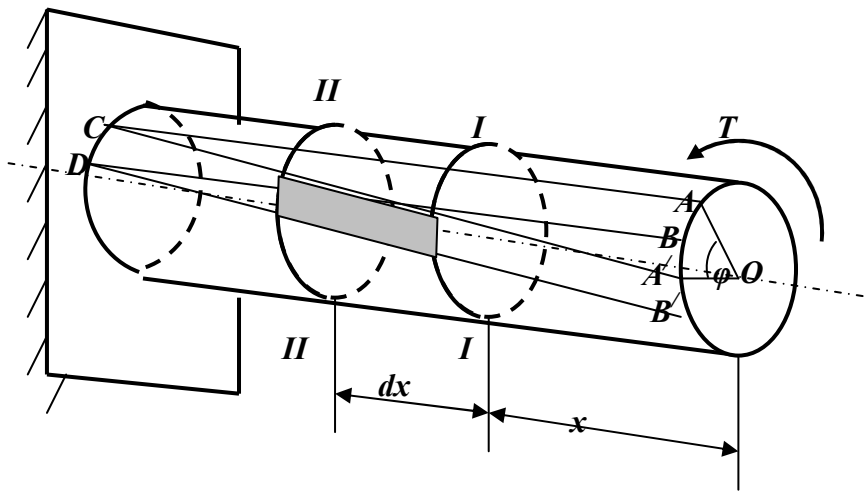


Рис. 7.8. Деформації вала

На поверхні стержня, що буде скручуватися (рис.7.8), двома суміжними утворюючими AC і BD та двома контурами суміжних перерізів $I-I$ та $II-II$ виділимо прямокутник. Після деформації вала цей елемент перекосяться (виділено сірим). “Виріжемо” цей елемент у вигляді, зображеному на рис. 7.9.

Розглядаючи його, можна зробити висновки, що деформація елемента носить зсувний характер, що викликає появу дотичних напружень на його гранях.

Абсолютний зсув в елементі $A_1B_1C_1D_1 - BB_1 = r \cdot d\varphi$, і тоді відносний зсув

$$\gamma = \frac{BB_1}{A_1B} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}.$$

Згадуючи закон Гука - $\tau = G \cdot \gamma$, матимемо

$$\tau_B = G \cdot \gamma = rG \frac{d\varphi}{dx}. \quad (7.13)$$

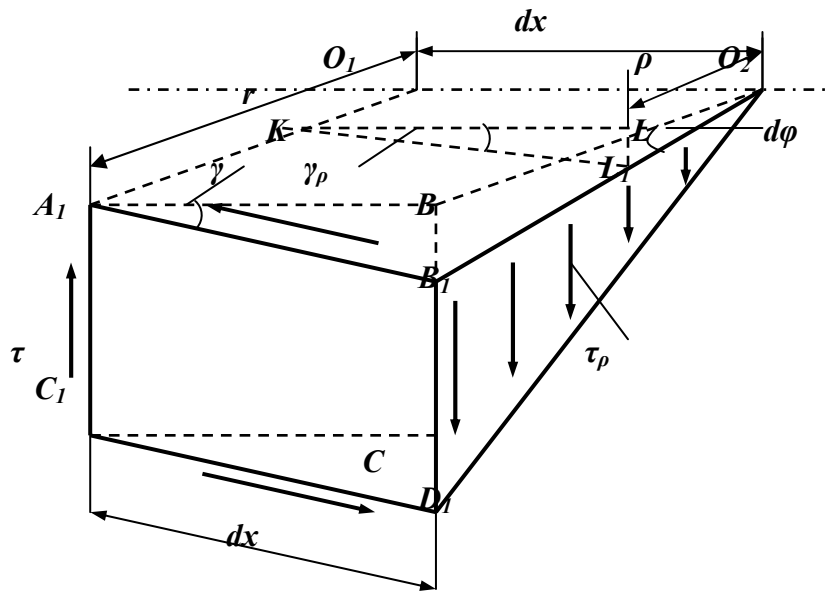


Рис. 7.9. Деформації на ділянці вала довжиною dx

Знаходячи напруження не в поверхневих шарах (т.В), а на якійсь відстані ρ від осі, відповідно отримаємо

$$\tau_{\rho} = \rho G \frac{d\varphi}{dx} \quad (7.14)$$

з чого випливає, що закон розподілу напружень по перерізу є *лінійним*. Підставляючи (7.14.) в (7.12) та інтегруючи, отримаємо:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

або

$$G \frac{d\varphi}{dx} I_p = T \quad (7.15)$$

де I_p – полярний момент інерції.

Співставляючи цей вираз з (7.14), після нескладних перетворень маємо

$$\tau_{\rho} = \frac{T \cdot \rho}{I_p} \quad (7.16)$$

Очевидно, що дотичні напруження досягають найбільшого значення при $\rho_{\max} = r$, тобто

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot \rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_p} \quad ,$$

де W_p – полярний момент опору.

Це дає змогу записати умову міцності при крученні в такому вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (7.17)$$

Використовуючи цю умову, можна або за відомими силовими факторами, що створюють крутний момент T , знайти полярний момент опору і далі, залежно від тієї чи іншої форми, розміри перерізу, або навпаки – знаючи розміри перерізу, обчислити найбільшу величину крутного моменту, яку можна допустити в перерізі, що, в свою чергу, дозволить знайти допустимі величини зовнішніх навантажень.

7.5. Деформації при крученні. Закон Гука. Умова жорсткості

У процесі виведення формул для напружень, при розгляді статичної невизначеності цієї задачі вже вводилося поняття деформації, за яку приймався кут закручування перерізу, перпендикулярного до осі вала відносно нерухомого опорного перерізу (рис.7.8; 7.9; 7.10 – кути φ та $d\varphi$).

Розглядаючи співвідношення (7.15), неважко отримати

$$d\varphi = \frac{T \cdot dx}{GI_p} \quad (7.18)$$

або, інтегруючи

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{T dx}{GI_p} = \frac{Tx}{GI_p} \quad (7.19)$$

при довжині вала (або ділянки вала) l , найбільший кут закручування буде між крайніми

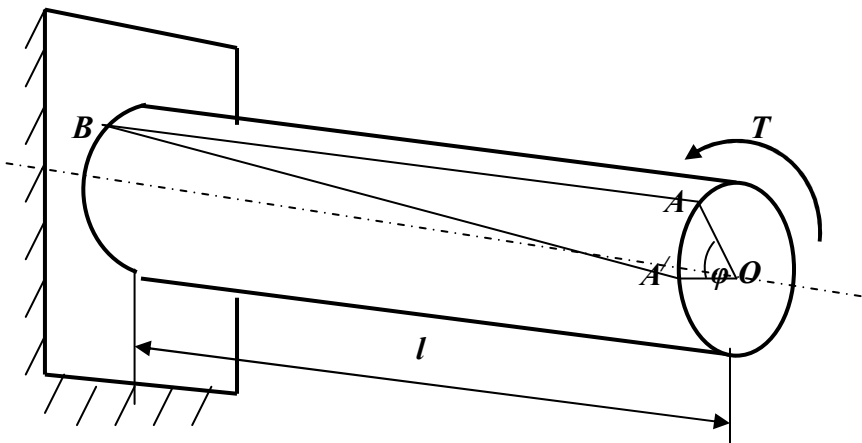


Рис. 7.10. Кут закручування вала на довжині l

перерізами і дорівнюватиме

$$\varphi(l) = \frac{Tl}{GI_p} \text{ (рад)} \quad (7.20)$$

У даному випадку розмірність кута φ – радіани. Для того, щоб отримати величину φ в градусах, потрібно додати множник $\frac{180^0}{\pi}$, тобто

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \cdot \frac{180^0}{\pi} \text{ (град)} \quad (7.21)$$

Вирази (7.20) та (7.21) являють собою закон Гука при крученні, а величину GI_p називають *жорсткістю при крученні*.

Крім абсолютної величини – кута закручування φ , в інженерній практиці часто використовують *відносний кут закручування* θ :

	$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{рад/м}) \quad (7.22)$	
або	$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (\text{град/м}) \quad (7.23)$	

Тепер, коли записані вирази для деформацій, можна записати й умову жорсткості. Її можна записати в різних варіаціях – (7.24) – (7.27) (залежно від того, яка допустима величина є заданою):

	$\varphi_{\max} = \frac{Tl}{GI_p} \leq [\varphi] \quad (\text{рад}) \quad (7.24)$	
	$\varphi_{\max} = \frac{Tl}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\varphi] \quad (\text{град}) ; \quad (7.25)$	
	$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_p} \leq [\theta] \quad (\text{рад/м}) ; \quad (7.26)$	
	$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \quad (\text{град/м}) \quad (7.27)$	

Використовуючи умови жорсткості, можна або за відомою картиною зовнішніх навантажень (від яких залежить величина T_{\max}) знайти розміри поперечного перерізу заданої форми, які “сховані” у величині I_p – полярному моменті інерції; або навпаки, знаючи форму та розміри поперечного перерізу, визначити допустимі величини силових навантажень на вал.

7.6. Приклад розрахунку вала на міцність і жорсткість

Поставимо перед собою задачу підібрати діаметр для суцільного сталюго вала круглого поперечного перерізу, навантаженого так, як зображено на рис. 7.11.

При цьому приймемо такі значення параметрів навантажень розмірів та допустимих величин:

- $T_1 = 1,5 \text{ кНм}$ $a = 0,4 \text{ м.}$
- $T_2 = 1,8 \text{ кНм}$ $b = 0,8 \text{ м.}$
- $T_3 = 1,6 \text{ кНм}$ $c = 0,6 \text{ м.}$
- $[\tau] = 80 \text{ МПа} = 80 \times 10^3 \text{ кПа}$
- $[\theta] = 1 \text{ град/м}$
- $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^7 \text{ кПа}$

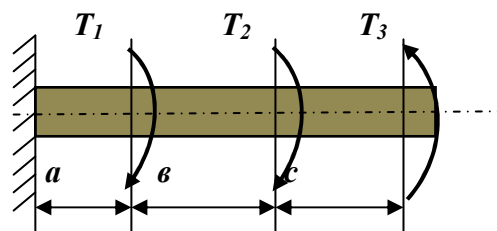


Рис. 7.11. Навантаження вала

1. Визначимо крутні моменти, що діють на окремих ділянках вала. При цьому почнемо з вільного кінця вала, тому що там прикладено відомий момент, у той час, як на лівому кінці в жорсткому закріпленні вала виникає невідомий нам спочатку реактивний момент.

Позначимо окремі ділянки вала *I*, *II*, *III*.

Використовуючи метод перерізів, знайдемо значення крутних моментів на кожній ділянці вала. Побудову епюра крутних моментів *T* зображено на рис. 7.12б.

Максимальний крутний момент спостерігається на III ділянці і дорівнює $T_{max} = 1,7$ кНм.

Навантаження вала та епюр розподілу крутних моментів по довжині вала зображено на рис. 7.12а,б.

2. Визначимо діаметр вала з умови

міцності
$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

При цьому згадаємо, що для круглого поперечного перерізу полярний момент опору W_p

визначається, як відомо виразом
$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Тоді, перетворюючи та узагальнюючи останні два вирази, можна записати

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{max}}{\pi [\tau]}}$$

та, підставляючи дані, отримаємо:
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,7}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^3}} \approx 0,48 \cdot 10^{-1} \text{ (м)} = 48 \text{ (мм)}.$$

3. Тепер визначимо діаметр вала з умови жорсткості

$$\theta_{max} = \frac{T_{max}}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

де I_p – полярний момент інерції запишеться як $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$. Перетворюючи ці залежності, отримаємо:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{max} \cdot 180^\circ}{\pi^2 [\theta] G}}$$

Підставляючи числові дані, отримаємо:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,7 \cdot 180^\circ}{\pi^2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 10^7}} \approx 5,9 \cdot 10^{-2} \text{ (м)} = 59 \text{ (мм)}.$$

Реальний розмір діаметра вибираємо з цих двох розрахунків як максимальне значення – тобто $d = 59$ мм. У цьому випадку він буде задовольняти як розрахунок на міцність, так і розрахунок на жорсткість.

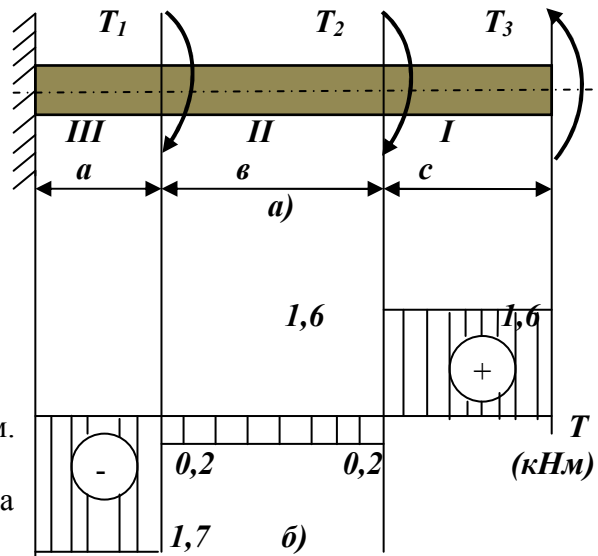


Рис. 7.12. Схема для розрахунку вала:

а) вигляд навантаження вала,
б) графік розподілу крутних моментів

Лекція 10. Продовження теми 7 (Зсув та кручення)

Напруження при крученні у перерізах, нахилених до осі вала. Потенціальна енергія при крученні. Визначення граничної вантажопідйомності стержня, який скручується. Напруження й деформації в циліндричних гвинтових пружинах з малим кроком. Розрахунок пружин за енергією, що повинна поглинатися. Кручення тонкостінних стержнів.

7.7. Напруження при крученні у перерізах, нахилених до осі вала

Вивчаючи напруження при скручуванні стержня круглого перерізу, ми бачили, що у перерізах, перпендикулярних до осі, в кожній точці діють дотичні напруження τ_r . За законом парності дотичних напружень такі ж напруження (рис. 7.7, 7.8) діятимуть і по поздовжніх гранях вирізаного нами із стержня елемента. Ці напруження будуть також найбільшими в точках біля поверхні стержня і зменшуватимуться до нуля в точках осі.

Таким чином, якщо ми проведемо переріз через вісь стержня, що скручується, діаметральною площиною (рис. 7.13), то в точках, розташованих по прямій AB , перпендикулярній до осі стержня, дотичні напруження змінюватимуться за лінійним законом. Нормальних напружень на цих площинах не буде. Вони діятимуть на похилих перерізах і досягатимуть найбільшого значення по перерізах, нахилених до осі стержня під кутом 45° .

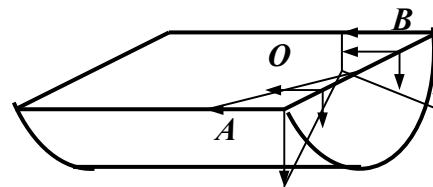


Рис. 7.13. Напруження в нахилених перерізах

Насправді, елемент $ABCD$, вирізаний на поверхні вала (рис. 7.14), по своїх бічних гранях піддається дії лише дотичних напружень. Тому на площадках, нахилених на кут 45° до осі стержня, дотичних напружень не буде; це — головні площадки, на яких діють розтягуючі й стискаючі головні напруження σ_1 і σ_3 , які чисельно дорівнюють в кожній точці напруженням τ .

Величина їх для всіх точок перетину змінюється пропорційно відстані до центра і дорівнюють відповідним τ . Крихкі матеріали, наприклад чавун, руйнуються (рис. 7.15) при крученні від розриву по похилих перетинах BC (рис. 7.14), тобто по тих, де діють найбільші розтягуючі напруження.

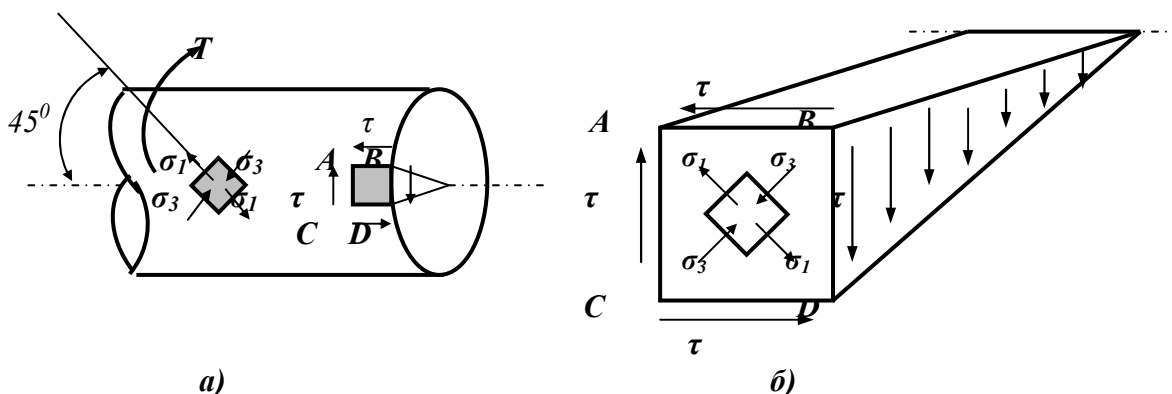


Рис. 7.14. Нормальні напруження при крученні: а) на поверхні вала, б) в елементі

Знаючи величину і напрям головних напружень у будь-якій точці, можемо знайти нормальні й дотичні напруження на якій завгодно похилій площадці з круга Мора або за формулами (5.7) і (5.8). Що стосується перевірки міцності, то, оскільки при крученні найбільші нормальні й дотичні напруження рівні за абсолютною величиною, а величини, що допускаються, для дотичних напружень менші, ніж для нормальних, то зрозуміло, що при крученні, як і взагалі при чистому зсуві, можна обмежитися перевіркою лише за дотичними напруженнями.

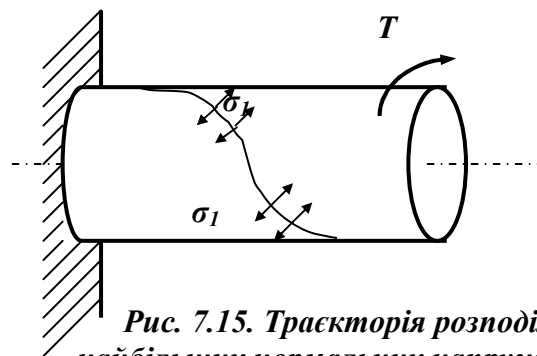


Рис. 7.15. Траєкторія розподілу найбільших нормальних напружень

7.8. Потенціальна енергія при крученні

При вивченні розтягу - стиску було показано, що при деформації пружної системи в ній накопичується потенціальна енергія деформації.

Це явище має місце і при крученні. Якщо пружний стержень у межах пружності закрутити на деякий кут, то після розвантаження він розкручуватиметься і може виконати роботу за рахунок потенціальної енергії кручення, що накопичилася в стержні. Нехтуючи певними втратами (нагрівання, внутрішнє тертя і т. п.), ми вважатимемо, що робота внутрішніх сил, яка визначається кількістю потенціальної енергії деформації U , що накопичується в матеріалі, дорівнює роботі зовнішніх сил.

Нехай є вал, закріплений одним кінцем, до вільного кінця якого прикладається пара сил із моментом, поступово зростаючим від нуля до кінцевого значення T . У міру зростання величини моменту пари сил збільшується і кут закручування φ , пов'язаний з T рівнянням (7.9):

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p} .$$

Якщо по осі абсцис відкладати кути закручення (деформацію), а по осі ординат – відповідні значення крутного моменту, то їх взаємна залежність у межах пропорційності зобразиться похилою прямою OA (рис. 7.16). Повторюючи міркування, проведені для обчислення роботи сили P при розтягу, відзначимо, що робота пари T виразиться площею трикутника AOB :

$$A = \frac{T\varphi}{2} . \quad (7.28)$$

Наявність множника $\frac{1}{2}$ у формулі (7.28) пояснюється тим, що момент T був прикладений не відразу всією своєю величиною, а прикладався в порядку поступового, „статичного” зростання від нуля до його кінцевого значення.

Підставляючи замість φ його значення з рівняння (7.9) і приймаючи, що $U=A$, одержимо вираз для потенціальної енергії при крученні

$$U = \frac{T^2 l}{2GJ_p} . \quad (7.29)$$

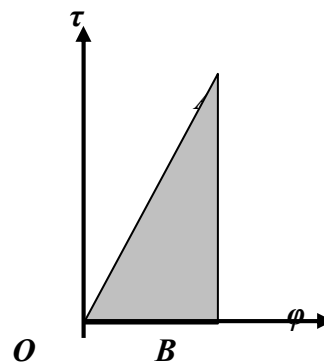


Рис. 7.16. Пружна деформація

Потенціальна енергія може бути виражена і через деформацію, якщо у формулі (7.28) замінити значення крутного моменту виразом з формули (7.9)

$$U = \frac{GJ_p}{l} \cdot \varphi^2. \quad (7.30)$$

З формул (7.29) і (7.30) бачимо, що потенціальна енергія при крученні, так само як і при розтягу - стиску, є функцією другого ступеня від силового фактора чи від деформації.

7.9. Визначення граничної вантажопідйомності стержня, який скручується

У параграфі 7.1. ми навчилися визначати необхідні розміри стержня, що скручується, виконуючи умову, щоб найбільші дотичні напруження в точках контуру поперечного перетину не перевищили напруження, що допускається $[\tau]$. Таким чином, незважаючи на нерівномірність у розподілі напружень по перетину, ми проводили розрахунок по напруженнях, що допускаються.

Використовуючи цей спосіб розрахунку, ми не повністю використовуємо граничну вантажопідйомність стержня. У попередніх розділах ми вважали небезпечним той стан стержня, при якому лише в контурних точках перетину напруження досягнуть межі текучості матеріалу при зсуві τ_m (рис. 7.17а). Величина τ_m за енергетичною теорією міцності повинна дорівнювати $0,6\sigma_m$. Крутний момент при цьому буде дорівнювати

$$T = \frac{\pi r^3 \tau_m}{2},$$

а кут закручування

$$\varphi_m = \frac{Tl}{GJ_p} = \frac{\pi r^3 \tau_m l}{2G \frac{\pi r^4}{2}} = \frac{\tau_m l}{Gr}.$$

Для подальшого збільшення кута закручування необхідне зростання крутного моменту, оскільки матеріал усередині стержня знаходиться ще в пружному стані.

При збільшенні деформації зростання напруження по краях перетину зупиниться (явище текучості) і при деякому $T > T_m$ розподіл напружень відповідатиме графіку, зображеному на рис. 7.17б. Всередині незатемненого кола радіуса OB матеріал буде як і раніше в пружному стані.

Граничним станом, відповідним повному вичерпанню вантажопідйомності стержня, буде той розподіл напружень, коли пружна зона зникне, — по всьому перетину напруження дорівнюватимуть межі текучості τ_m (рис. 7.17в).

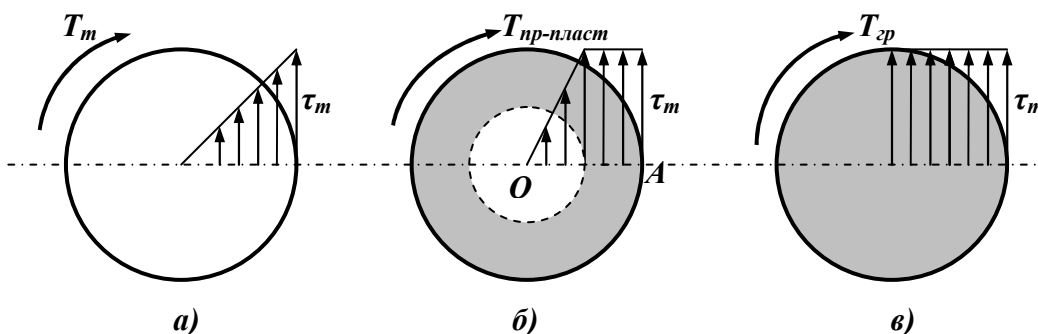


Рис. 7.17. Розподіл напружень у перерізі при:
а) $\tau_{max} = [\tau]$, б) $\tau_{max} = \tau_m$, в) $\tau = const = \tau_m$

Крутний момент T_{zp} у цьому випадку можна обчислити, складаючи суму моментів усіх внутрішніх сил щодо центра круга. Для цього розіб'ємо площу нашого перетину концентричними кругами на нескінченно малі (кільцеві) площадки (рис. 7.18).

Напруження, що діють на кожній такій площадці, в граничному стані мають постійне значення, яке дорівнює τ_m . Внутрішні зусилля, прикладені до елементарної площадки радіуса ρ , дорівнюватимуть $\tau_m \cdot dA$, а момент внутрішнього зусилля $-\tau_m \cdot dA \rho$. Підсумовуючи елементарні моменти внутрішніх сил за площею кільця, одержимо

$$dT_{\text{вн}} = \tau_m \rho \sum dA = \tau_m \rho 2\pi d\rho.$$

Складаючи умову рівноваги зовнішніх і внутрішніх моментів, знайдемо

$$\sum T_0 = 0; \quad T_{\text{зп}} - \int_0^r 2\pi \tau_m d\rho = 0.$$

Звідси

$$T_{\text{зп}} = \frac{2}{3} \pi r^3 \tau_m. \quad (7.31)$$

Крутний момент, що допускається, при коефіцієнті запасу k , буде дорівнювати

$$[T_k] = \frac{T_{\text{зп}}}{k} = \frac{2\pi}{3} r^3 \frac{\tau_m}{k} = \frac{2\pi}{3} r^3 [\tau].$$

Звідси

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{3T}{2\pi[\tau]}}. \quad (7.32)$$

Водночас, згідно з розрахунком за допустимими напруженнями, отримаємо:

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi[\tau]}}.$$

У результаті перехід до розрахунку за допустимими навантаженнями дозволяє зменшити діаметр вала у відношенні

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2 \cdot 2}} \approx 0,91.$$

Таким чином, унаслідок нерівномірного розподілу напружень по перерізу при пружному стані стержня перехід до методу розрахунку за навантаженнями, що допускаються, може дати економію матеріалу.

Однак слід пам'ятати, що наведений розрахунок доцільно проводити лише при статичному навантаженні, коли небезпечним є стан текучості матеріалу.

Вали ж переважно працюють в умовах знакозмінного напруження, коли перевірку міцності треба проводити з розрахунку на можливість появи тріщин утоми. Тому використання наведеного способу до валів у більшості випадків є некоректним.

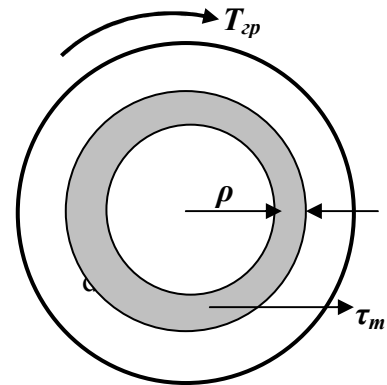


Рис. 7.18. Інтегрування напружень у випадку $\tau = \text{const} = \tau_m$

7.10. Напруження й деформації в циліндричних гвинтових пружинах з малим кроком

У ресорах вагонів, клапанах та інших деталях механізмів застосовують гвинтові пружини, що піддаються дії сил, які стискають або розтягують пружину. При проектуванні

таких пружин для перевірки міцності необхідно вміти обчислювати найбільше напруження і визначати деформацію пружини — її подовження або осідання.

Таким чином, необхідно, знаючи розміри пружини, вміти обчислити залежність між її деформацією і силою, що прикладається.

Розглянемо, на які види деформації працює матеріал пружини. Уявімо собі (рис.7.19а) циліндричну пружину, розтягнуту силами F , прикладеними по її осі. Назвемо R_0 – середній радіус гвинтової осі (витка) пружини, n –число витків, r –радіус поперечного перетину стержня пружини (відповідно діаметр $d = 2r$), G – модуль зсуву, t – крок витків пружини. Нахилом витків нехтуємо.

7.10.1. Внутрішні силові фактори та напруження в пружинах.

Для обчислення напружень „розріжемо” цю пружину на дві частини перетином, що проходить через вісь циліндра, утвореного пружиною. Верхню частину відкинемо і розглянемо рівновагу нижньої частини (рис. 7.19б).

На цю частину діє зовнішня сила F і напруження по перетину стержня пружини. Щоб з’ясувати, які це напруження, в центрі ваги поперечного перерізу пружини прикладемо дві сили F_1 і F_2 , рівні за величиною F і спрямовані по вертикалі в різні боки.

Оскільки і сила F_2 , і пара сил $F - F_1$ з моментом $T = F \cdot R_0$ лежать у площині проведеного перерізу, то вони повинні врівноважитися дотичними напруженнями.

Сила F_2 зсуває відсічену частину пружини вниз і викликає появу дотичних напружень, зображених на рис. 7.20а і рівних

$$\tau_1 = \frac{F_2}{A} = \frac{F}{\pi r^2}.$$

Момент пари $T = FR_0$ викликає скручування стержня пружини і є причиною виникнення другої групи дотичних напружень (7.5)

$$\tau_2 = \frac{T}{J_p} \rho.$$

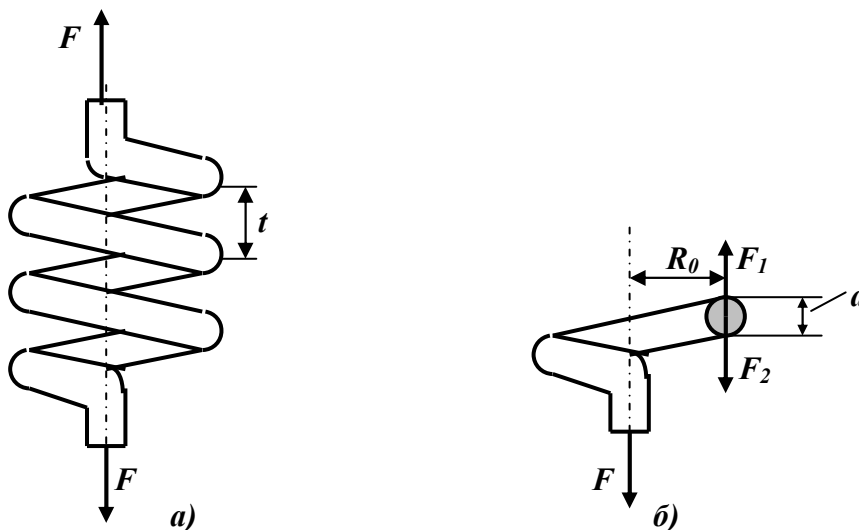


Рис. 7.19. Розподіл сил у перерізі пружини:

а) – загальний вигляд пружини, б) – зовнішні та внутрішні навантаження

Ці напруження від кручення. Їх величина змінюватиметься пропорційно відстані від центра (рис. 7.20б) і досягне найбільшого значення на площадках, розташованих біля контуру перетину

$$\max \tau_2 = \frac{T}{W_p} = \frac{FR_0}{\frac{\pi r^3}{2}} .$$

Накладаючи одну на одну обидві групи напружень, отримаємо повний розподіл напружень по перерізу (рис. 7.20в).

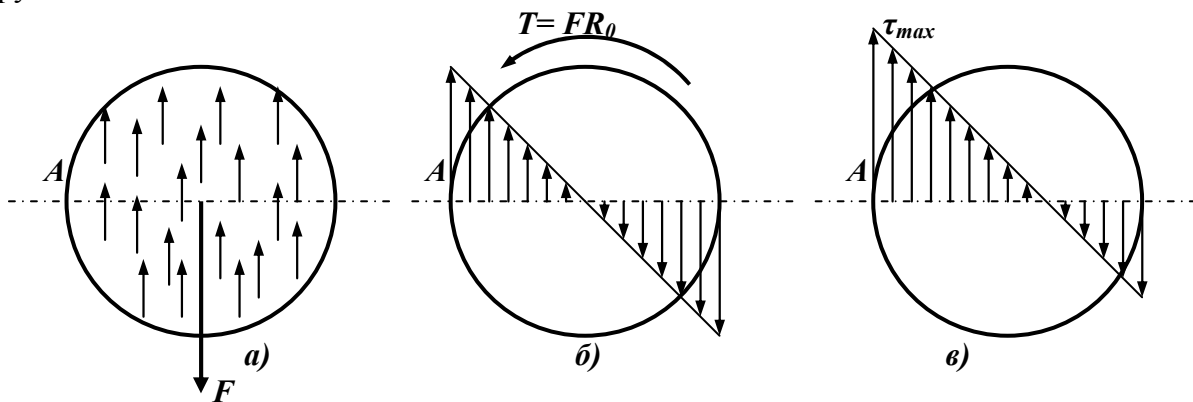
Небезпечною точкою буде та з точок контуру, в якій напрями τ_1 , і τ_2 співпадуть. Такою точкою буде A – біля внутрішнього краю перетину; в ній повне дотичне напруження дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{F}{\pi r^2} + \frac{2FR_0}{\pi r^3} = \frac{F}{\pi r^2} \left(1 + \frac{2R_0}{r} \right) . \quad (7.33)$$

Оскільки в більшості випадків другий доданок у дужках значно більше одиниці, то, як правило, нею нехтують, і вираз (7.33) наближено можна записати так:

$$\tau_{\max} = \frac{2FR_0}{\pi r^3} . \quad (7.34)$$

На практиці при розрахунку пружин у формулу (7.34) вводять поправочний коефіцієнт k , що враховує як вплив зрізу, так і ряд інших, не врахованих вище факторів (вигин стержня пружини, поздовжні деформації і т. п.). Величина цього коефіцієнта тим більша, чим більше відношення $\frac{r}{R}$, тобто, чим жорсткіша в геометричному відношенні пружина.



**Рис. 7.20. Розподіл напружень у пружині:
а) від зсуву, б) від кручення, в) сумарні**

7.10.2. Деформації в пружині.

При такому спрощенні дуже легко обчислити деформацію розтягування пружини (осадження), яку ми позначимо λ .

Виділимо з пружини відрізок завдовжки ds двома суміжними перерізами – CO_1 і CO_2 , що проходять через вісь пружини (рис. 7.21). Оскільки відстань ds між перерізами дуже мала, то можна вважати, що до деформації радіуси R_0 пружини, що йдуть від осі до центрів проведених перерізів, лежать в одній площині й утворюють трикутник O_1CO_2 .

Після деформації другий переріз, внаслідок скручування ділянки стержня ds , повернеться щодо першого на кут $d\theta = \frac{Tds}{GJ_p}$. Тоді радіус O_2C розвернеться щодо радіуса O_1C теж на кут $d\theta$ і точка C переміститься в положення C_1 , що зумовить опускання кінця

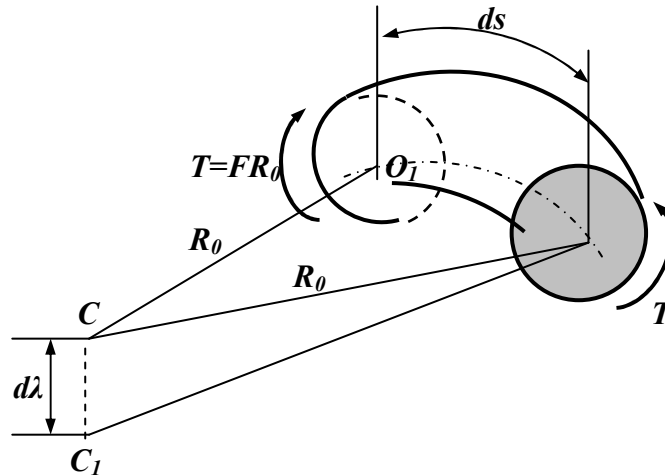


Рис. 7.21. Деформації елемента пружини

пружини на величину

$$d\lambda = R_0 d\theta = R_0 \frac{Tds}{GJ_p}.$$

Якщо врахуємо, що всі елементи ds стержня пружини деформуються таким же чином, то повне переміщення нижнього кінця пружини, тобто її вкорочення (або видовження), виразиться сумою величин $d\lambda$

$$\lambda = \sum d\lambda = \int_0^l R_0 \frac{Tds}{GJ_p} = R_0 \frac{Tl}{GJ_p}. \quad (7.35)$$

Тут $l = \int_0^l ds$ – повна довжина стержня пружини, а $\frac{Tl}{GJ_p}$ – взаємний кут закручування кінців стержня пружини, визначений у припущенні, що стержень розпрямлений.

Нехтуючи нахилом витків до горизонталі й приймаючи число їх – n , отримаємо, що повна довжина гвинтового стержня дорівнює

$$l = 2\pi R_0 n,$$

тоді

$$\lambda = \frac{TR_0}{GJ_p} 2\pi n R_0 = \frac{4FR_0^3 n}{Gr^4}. \quad (7.36)$$

Формули (7.33), (7.34) та (7.36) дають можливість перевірити міцність і визначити деформацію пружини.

Чим більше допустиме напруження на зріз $[\tau]$, тим гнучкішою буде пружина, тим більше осідання вона дасть при тому ж вантажі F , оскільки її можна зробити зі стержня меншого поперечного перерізу.

Оскільки ресори повинні бути достатньо гнучкими, то для них беруть загартовану сталь з дуже високою межею пружності; напруження на зріз, що допускається, досягає від 400 до 800 МПа. Для хромованадієвої сталі допускаються напруження в розтягнутих

пружинах до 700 МПа при r від 3 ÷ 6 мм. Для фосфористої бронзи при $G = 44000$ МПа та r до 8 мм допускають $[\tau] = 130$ МПа.

Ці напруження можуть бути допущені при статичному навантаженні. Для навантаження, що змінюється, вони знижуються приблизно на 1/3, а для неперервно працюючих пружинах (пружини клапанів) – приблизно на 2/3. У цих випадках велику роль відіграє можливість розвитку тріщин утоми (див. главу 18). Крім того, клапанні пружини часто працюють при високих температурах, що також вимагає зниження основних допустимих напружень.

7.10.3. Розрахунок пружин за енергією, що повинна поглинатися

При розрахунку пружин іноді заданою є не сила, що стискає або розтягує пружину, а енергія T , яка повинна поглинатися цією пружиною. Подібно тому, як це було при розтягу або стиску стержня, потенціальна енергія деформації пружини U вимірюється роботою зовнішніх сил.

Оскільки для пружини залежність між λ і F прямолінійна (7.36), потенціальна енергія деформації пружини дорівнює

$$U = \frac{1}{2} F \lambda = \frac{2F^2 R_0^3 n}{Gr^4}. \quad (7.37)$$

З (7.34) отримаємо
$$FR_0 = \frac{\tau \pi r^3}{2}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу (7.37), отримаємо:

$$U = \frac{2\pi R_0 n}{4G} \pi r^2 \tau^2.$$

Оскільки $2\pi R_0 n$ – довжина стержня пружини, а πr^2 – площа перетину, то

$$U = \frac{\tau^2}{4G} V, \quad (7.38)$$

де V – об'єм пружини; з (7.27), враховуючи, що $U=T$, знаходимо

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \quad (7.39)$$

Таким чином, задаючись граничною величиною напруження $\tau = [\tau]$, можемо обчислити об'єм пружини, необхідний для поглинання заданої величини енергії $T=U$ з тим, щоб не були перевищені напруження, що допускаються $[\tau]$. При цьому необхідно перевірити осадження пружини при напруженнях $[\tau]$; вона повинна бути такою, щоб не відбулося закриття зазорів між витками.

7.11. Кручення тонкостінних стержнів

Перед розглядом цієї теми треба зауважити, що методи розрахунку будуть залежати від того, відкритий чи замкнений профіль має їхній поперечний переріз.

Розглянемо замкнені профілі.

Товщину стінки стержня будемо вважати настільки малою, що дотичні напруження по ній можна прийняти однаковими, рівними напруженням посередині товщини стінки та спрямованими по дотичній до її середньої лінії (рис 7.22).

З тонкостінного замкненого стержня виріжемо елемент (рис. 7.23) двома поперечними перерізами, відстань між якими dx , та двома довільними меридіональними перерізами. Складаючи суму проєкцій на вісь x стержня всіх сил, що прикладаються до елемента, знайдемо:

$$\tau \delta ds = \tau \delta_1 = const. \quad (7.40)$$

Момент сили $\tau \delta ds$, що сприймається елементом ds відносно довільної т. O

$$dM_{kp} = \tau \delta r ds. \quad (7.41)$$

Враховуючи, що $r ds$ – це подвоєна площа елементарного трикутника, тобто

$$r ds = 2d\omega, \quad (7.42)$$

тому

$$dM_{kp} = 2\tau \delta d\omega.$$

Інтегруючи цей вираз по контуру з урахуванням (7.40), маємо

$$M_{kp} = 2\tau \delta \omega, \quad (7.43)$$

де ω – площа, що охоплюється середньою лінією тонкостінного перерізу.

З (7.43) отримаємо формулу Бредта

$$\tau = \frac{M_{kp}}{2\omega \delta}. \quad (7.44)$$

Якщо товщина профілю неоднакова, то максимальне напруження в тонкостінному профілі визначають за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{2\omega \delta_{\min}}. \quad (7.45)$$

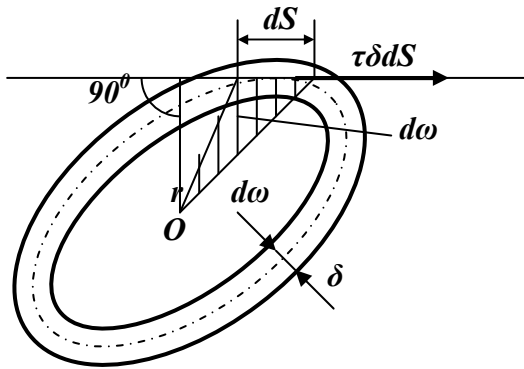


Рис. 7.22. Дотичні напруження в тонкостінному перерізі

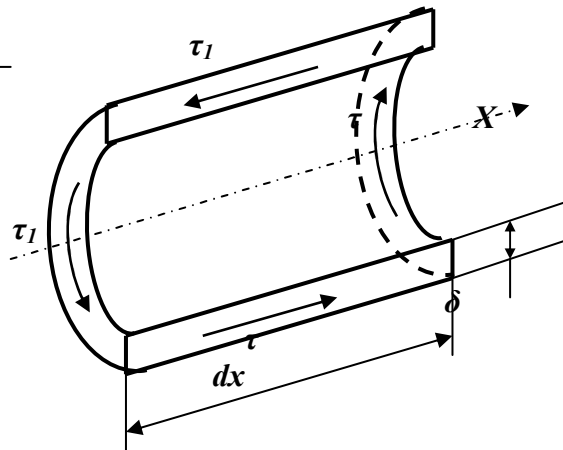


Рис. 7.23. Дотичні напруження в елементі довжиною dx

Розглянемо потенціальну енергію деформації, що накопичується в елементарному об'ємі тонкостінного стержня розмірами d, s, dx, δ .

Враховуючи, що при крученні має місце чистий зсув, запишемо:

$$du = \frac{\tau^2}{2G} \delta dx ds. \quad (7.46)$$

Тоді, інтегруючи по замкненому контуру та по довжині l , маємо

$$U = \frac{1}{2G} \int_0^l \oint \tau^2 \delta ds dx = \frac{l \tau^2 \delta^2}{2G} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (7.47)$$

Враховуючи (7.43), після елементарних перетворень отримаємо вираз для відносного кута закручення

$$\theta = \frac{M_{kp}}{4G \omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (7.48)$$

При постійній товщині перерізу по довжині контуру s

$$\theta = \frac{M_{kp} s}{4G \omega^2 \delta}. \quad (7.49)$$

Розглядаючи кручення тонкостінної труби (рис. 7.24) будемо мати

$$\omega = \pi R^2; \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta},$$

тоді

$$\tau = \frac{M_{kp}}{2\pi R^2 \delta}; \quad (7.50)$$

$$\theta = \frac{M_{kp}}{2\pi R^3 G}. \quad (7.51)$$

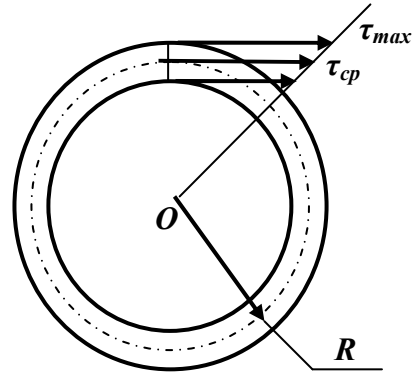


Рис. 7.24. Дотичні напруження в тонкостінному перерізі

Лекція 11. Згин

Визначення. Типи опор балок. Внутрішні силові фактори при згині. Диференціальні залежності між силовими факторами при згині. Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M .

Згин – це вид деформації, який виникає при прикладанні до стержня пар сил, які утворюють моменти в площинах, що проходять через вісь стержня.

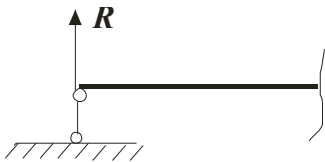
Стержень, який працює на згин, називають *балкою*.

Вільний, не опертий кінець балки, називають *консолью*.

8.1. Типи опор балок

Усі існуючі опори балок можна звести до трьох типів:

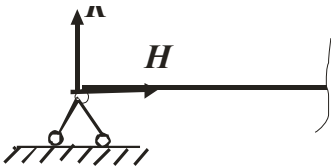
А). Шарнірно - рухома опора (рис.8.1).



Характерна тим, що на ній виникає реакція, нормальна до опори.

Рис.8.1. Шарнірно - рухома опора

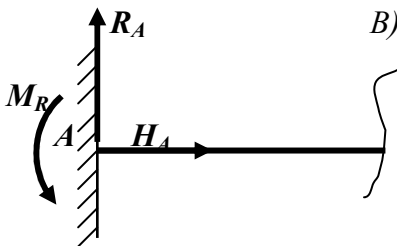
Б). Шарнірно - нерухома опора (рис.8.2).



Характерна тим, що на ній виникає реакція, яка може бути розкладена на дві складові: одна - нормальна до опори, а друга - вздовж балки.

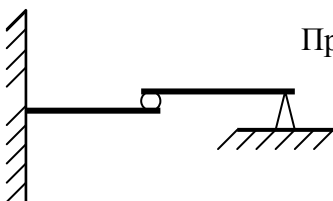
Рис.8.2. Шарнірно - нерухома опора

В). Жорстке защемлення (рис.8.3).



Характерне тим, що на ній, крім двох складових реакцій, може виникати ще й реактивний момент M_R .

Рис.8.3. Жорстке защемлення



Проміжні шарніри – це елементи, які гасять і не передають згинні моменти (рис.8.4). Слід зауважити, що сума моментів відносно центра шарніра від сил, взятих із одного боку від шарніра, дорівнює 0.

Рис.8.4. Проміжний шарнір

8.2. Внутрішні силові фактори при згині

Розглядаючи згин, введемо на додаток до основних гіпотез опору матеріалів ще деякі гіпотези, характерні для згину:

- будемо розглядати перерізи, що мають хоча б одну вісь симетрії, причому навантаження будемо проводити саме в площині симетрії;
- перерізи, нормальні до осі балки, залишаються плоскими в процесі деформації (гіпотеза плоских перерізів);
- сусідні волокна балки (уявимо її волокнистою структурою) не тиснуть одне на одне.

Розглянемо довільно навантажену в напрямі, нормальному до осі, балку (рис. 8.5).

Користуючись методом перерізів, розріжемо цю балку в довільному перерізі – „I-I” на відстані x від лівої опори та відкинемо праву, наприклад, частину (рис. 8.6).

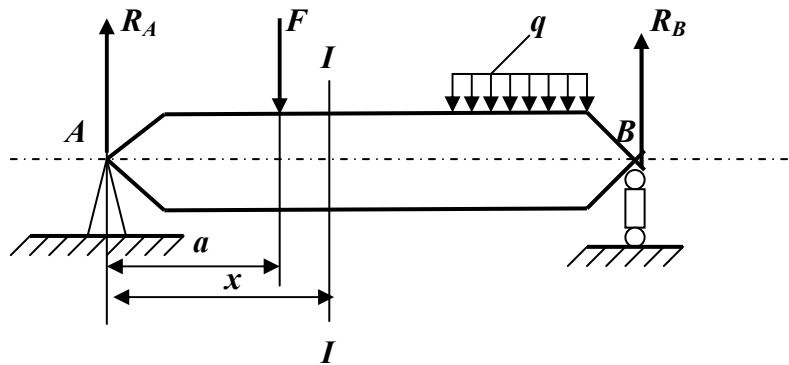


Рис.8.5. Довільно навантажена балка

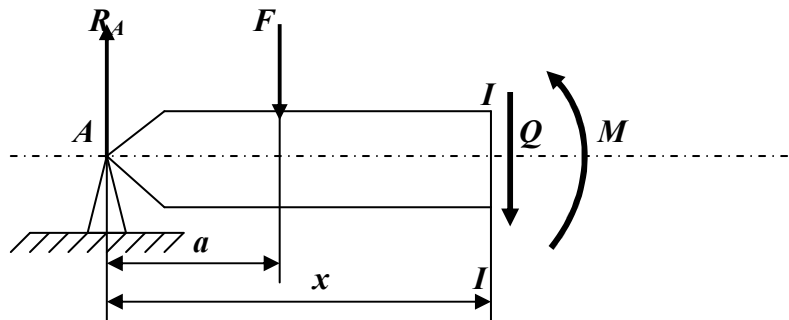


Рис.8.6. Внутрішні силові фактори при згині

Частина, що залишається, повинна знаходитися в рівновазі. Тоді сума сил і моментів, що діють відносно перерізу „I-I”, повинні дорівнювати 0. Це можливо тільки у випадку, коли замість дії відрізаної частини у перерізі прикласти зосереджену силу Q та момент M , які будуть дорівнювати алгебраїчній сумі всіх сил і моментів відповідно, взятих зліва від перерізу. Тобто, з точки зору рівноваги можна записати

$$\begin{cases} \sum Y = R_A - P_1 - Q = 0 \\ \sum M = R_A x - P_1(x - a) - M = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

звідки

$$\begin{cases} Q = R_A - P_1 \\ M = R_A x - P_1(x - a) \end{cases} \quad (8.2)$$

У даному випадку розглядаємо вже 2 внутрішніх силових фактори – *перерізуючу силу* Q (яку ще називають „поперечною силою”) та *згинаючий момент* M .

Згідно з методом перерізів, перерізуючу силу Q та згинаючий момент M підраховують як алгебраїчні суми відповідних величин, взятих із одного боку від перерізу.

Встановимо правила вибору знаків. Якщо підрахунок сил проводиться зліва, то сила направлена догори – додатна. Якщо справа – навпаки, достатньою буде сила, направлена вниз (рис. 8.7). Для моментів правило знаків вибирають так: якщо момент вигинає балку опуклістю вниз – він додатний, якщо навпаки – від’ємний (рис. 8.8).

За рахунок наявності в перерізі, нормальному до осі балки, зразу двох силових факторів Q та M , у ньому в загальному випадку виникають як нормальні, так і дотичні напруження.

Причому,

$$\sigma = \varphi(M);$$

$$\tau = f(Q).$$

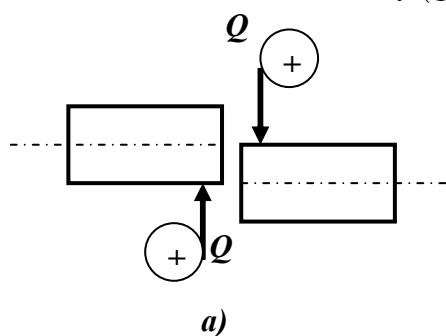


Рис.8.7. Вибір знаків для перерізуючої сили: а) додатний, б) від’ємний

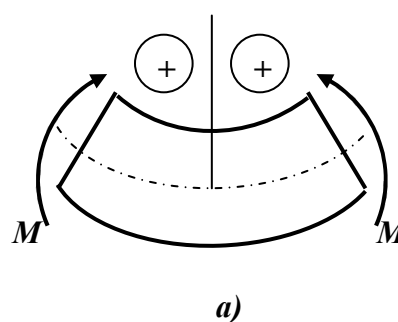


Рис.8.8. Вибір знаків для згинаючого моменту: а) додатний, б) від’ємний

Очевидно, чим більшими у перерізі будуть Q та M , тим більшими будуть і відповідні напруження (за умов, що балка має один і той же переріз по всій довжині). Тому визначення небезпечного перерізу (тобто перерізу, в якому виникають найбільші напруження) пов’язано з визначенням функцій розподілу перерізуючої сили Q та згинаючого моменту M . Це можна робити як аналітичним шляхом, так і шляхом побудови епюр розподілу цих величин. На практиці застосовують обидва шляхи. Користуючись аналітичними залежностями, проводять розрахунки, а епюри використовують для якісного оцінювання факторів згину (характер розподілу величин, орієнтація розтягнутих волокон тощо).

8.3. Диференціальні залежності між силовими факторами при згині

Розглянемо довільно навантажену балку (рис.8.9). На відстані x від лівої опори розглянемо ділянку довжиною dx , вибрану таким чином, щоб на ній не була прикладена зосереджена сила або момент (рис. 8.10).

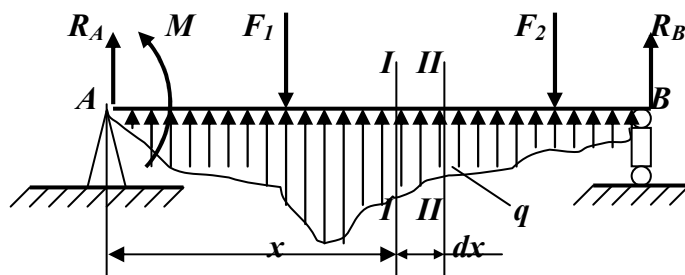


Рис. 8.9. Довільно навантажена балка

На границях цієї ділянки виникають перерізуючі сили Q_1 та Q_2 і моменти M_1 та M_2 відповідно. Причому,

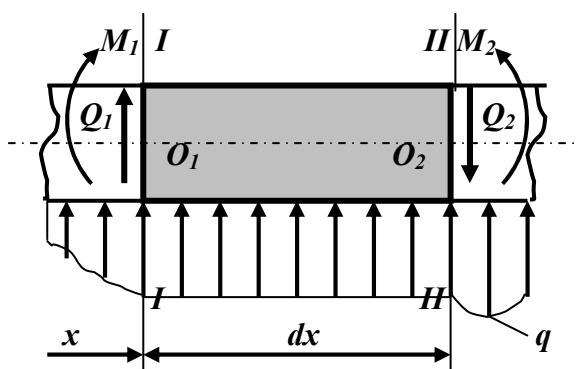


Рис. 8.10. Ділянка довжиною dx

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q; & M_1 &= M; \\ Q_2 &= Q + dQ; & M_2 &= M + dM. \end{aligned}$$

Розглянемо рівновагу виділеного елемента:

$$\sum Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0; \tag{8.3}$$

$$\sum M_{O_2} = Qdx + qdx \frac{dx}{2} + M - (M + dM) = 0.$$

Звідки з точністю до нескінченно малих величин

$$\boxed{\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)}; \tag{8.4}$$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)}. \tag{8.5}$$

Продиференціювавши (8.5), отримаємо

$$\boxed{\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)}. \tag{8.6}$$

Зауваження. Якщо на ділянці, яку розглядаємо, діє розподілений момент - m , залежність (8.5) буде мати вигляд:

$$\frac{dM}{dx} = Q + m.$$

Ці співвідношення мають велике значення при дослідженні напруженого стану балки та побудові епюр перерізуючих сил і згинаючих моментів.

8.4. Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M

Побудову епюр перерізуючих сил і згинаючих моментів, що проводиться з метою визначення небезпечних місць балки та обчислення в них напружень, можна проводити як якісно (наближено, коли інженеру невідомі всі параметри навантаження), так і кількісно (при повному чисельному розрахунку). Кількісно епюри будують за тими ж правилами, що й графіки будь-яких функцій. Тобто, на відповідній ділянці записують функції $Q(x)$ та $M(x)$, підраховують їх значення у характерних точках (екстремуми, значення на границях ділянок) і будують графічні зображення у відповідних системах координат.

Що стосується якісної побудови епюр, то існує кілька основних правил для їх побудови.

8.4.1. Правила контролю та рекомендації щодо побудови епюр Q і M .

1. З'ясувати систему зовнішніх сил, зокрема визначитися з реакціями опор.

Визначити, які сили треба взяти до уваги, а якими можна знехтувати. Наприклад, чи треба у випадку, що розглядається, враховувати власну вагу балки? Що стосується реакцій, то, якщо задані параметри балки та конкретні навантаження, слід також чисельно визначити і реакції опор. Якщо ж навантаження задані в загальному вигляді, то і реакції визначають тільки якісно.

2. З чого почати і чим закінчити (або що на кінцях балки)?

Епюра сил. Якщо на кінцях немає зосередженої сили (в т.ч. реакцій опор), перерізуюча сила дорівнює нулю.

Якщо йти по балці зліва, сила, що діє догори, дасть стрибок вгору, якщо йти справа, ця ж сила зумовлює стрибок вниз.

Епюра моментів. Якщо на кінцях немає моментів (або жорсткого защемлення, де виникає реактивний момент), згинаючий момент дорівнює нулю.

Якщо моменти (чи жорстке защемлення) є, то на цьому кінці на епюрі моментів спостерігається стрибок у тому напрямі, з якого боку розтягнуті волокна балки.

Зауваження. В різних підручниках з опору матеріалів автори будують епюру моментів, базуючись на різних критеріях. Одні пропонують будувати епюру моментів, відкладаючи додатні значення у верхній півплощині, а від'ємні – у нижній, інші рисують епюру з боку розтягнутих волокон, мотивуючи це тим, що розтягнуті волокна є небезпечними з точки зору розвитку тріщин (при цьому епюра моментів виявляється дзеркально відображеною відносно моментів, зображених за першим способом, тобто додатні значення відкладаються на нижній півплощині). Ніякої принципової різниці між цими способами немає. Для подальшого викладання матеріалу домовимося **додатні значення моментів відкладати у нижчій півплощині (при цьому епюра буде нарисована з боку стиснутих волокон балки).**

3. В якому напрямку починати будувати епюру.

Епюра сил. При побудові епюри зліва направо, якщо навантаження спрямоване донизу, лінія епюри теж іде вниз. Якщо навантаження спрямоване догори, то графік теж зростає догори. При побудові епюри справа наліво все навпаки.

Епюра моментів. Моменти додатного напрямку відкладають вниз, моменти від'ємного напрямку – догори (тобто, епюру будують з боку розтягнутих волокон балки).

4. Форма епюри.

Для розгляду даного питання слід добре зрозуміти та усвідомити диференціальні співвідношення між згинаючим моментом $M(x)$, перерізуючою силою $Q(x)$ та розподіленим навантаженням $q(x)$ (8.4- 8.6).

Епюра сил. Якщо на ділянці відсутнє розподілене навантаження, перерізуюча сила є постійною величиною:

- якщо на ділянці діє рівномірно розподілене навантаження, функція $Q(x)$ є лінійною;

- якщо q розподіляється по лінійній залежності, функція $Q(x)$ параболічна і

т.п.

Епюра моментів. Епюру (як правило) будують після побудови епюри сил:

- якщо на ділянці $Q(x) = const$, то $M(x)$ – лінійна функція;

- якщо $Q(x)$ лінійна, то $M(x)$ – параболічна і т.д.

Варто нагадати: якщо епюра $Q(x)$ перетинає вісь (тобто, $Q(x) = 0$), функція $M(x)$ у цьому перерізі має екстремальне значення.

5. Стрибки.

Епюра сил. На епюрі сил стрибки можуть бути лише в місці прикладання зосередженої сили (в т.ч. на опорах унаслідок виникнення реакцій).

Епюра моментів. На епюрі моментів стрибки можуть бути лише в місці прикладання моментів, у т.ч. у жорсткому заземленні, тому що там може виникнути реактивний момент.

8.4.2. Приклад побудови епор перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M .

Нехай задана балка (рис. 8.11). Побудуємо для неї епюри $Q_{(x)}$ та $M_{(x)}$ без урахування власної ваги.

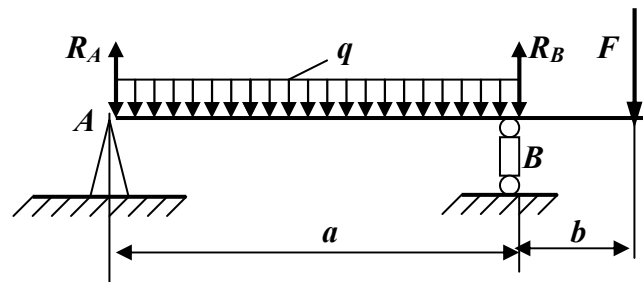


Рис. 8.11. Навантажена балка

Нехай $q = 2\text{кН/м}$; $F = 1\text{кН}$; $a = 4\text{м}$; $b = 1\text{м}$.

Спершу визначимо систему всіх зовнішніх сил, що діють на балку, підрахувавши реакції опор R_A та R_B . Для цього використаємо рівняння рівноваги – запишемо суму моментів спочатку відносно т. А, потім – відносно т. В. Ці два рівняння дадуть R_A та R_B . Для перевірки використаємо третє рівняння рівноваги $\sum Y = 0$.

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + F \cdot 5 = 0.$$

Звідки

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 5}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5}{4} = 5,25(\text{кН});$$

$$\sum M_B = R_B \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0.$$

Звідси
$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 + 11}{4} = 3,75(kH).$$

Перевірка:
$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 4 - F = 3,75 + 5,25 - 2 \cdot 4 - 1 = 0.$$

Обидві реакції вийшли додатними, що показує відповідність нарисованих стрілок R_A та R_B реальному напрямку.

Тепер можна приступати до записування функцій та побудови епюр. Розіб'ємо балку на дві ділянки. На першій ділянці будемо йти зліва, а на другій – справа.

I ділянка. $0 \leq x < 4$ (розглядаємо її, йдучи зліва).

Запишемо функцію розподілу перерізуючих сил:

$$Q(x_1) = R_A - qx_1.$$

Функція лінійна. Знайдемо її значення на кінці та початку.

$$Q(0) = R_A = 3,75(kH);$$

$$Q(4) = R_A - 2 \cdot 4 = 3,75 - 8 = -4,25(kH).$$

Тепер запишемо функцію моментів:

$$M(x_1) = R_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2} = R_A x - q \frac{x_1^2}{2}.$$

Функція параболічна. Знайдемо її значення на кінцях проміжку:

$$M(0) = 0;$$

$$M(4) = 3,75 \cdot 4 - 2 \frac{4^2}{2} = -1(kHm).$$

Тепер II ділянка $0 \leq x_2 < 1$ (ідемо вже справа).

Відповідно записуємо функції сил і моментів:

$$Q(x_2) = F = 1(kH) \quad \text{— функція є константою;}$$

$$M(x_2) = -Fx_2 \quad \text{— лінійна функція.}$$

Знаходимо її значення на границі проміжку:

$$M(0) = 0;$$

$$M(1) = -1(kHm).$$

Очевидно, що найбільше значення функцій моментів може бути або на правій опорі (т. В), або на першій ділянці. На опорі момент відомий. Знайдемо тепер максимальний момент M_{\max} . З епюри M_{\max} спостерігається на I ділянці. Виходячи з диференціальних залежностей (8.5), можна записати для I ділянки

$$\frac{dM(x_0)}{dx} = Q(x_0) = R_A - qx_0 = 0;$$

$$x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{3,75}{2} \approx 1,87(m).$$

Звідки й знайдемо координату перерізу x_0 , в якому виникає M_{\max} . Тобто,

$$M_{\max} = M(x_0) = R_A x_0 - q \frac{x_0^2}{2} = 3,75 \cdot 1,87 - 2 \frac{1,87^2}{2} \approx 3,516(kHm).$$

Робимо графічні побудови (рис. 8.11).

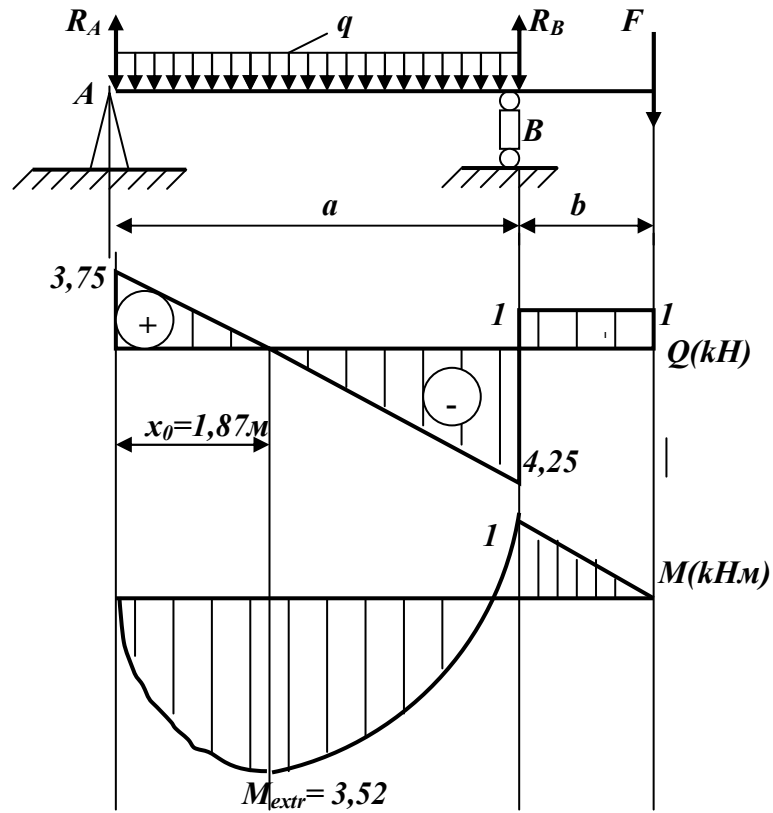


Рис. 8.11. Епюри розподілу перерізуючих сил і згинаючих моментів по довжині балки

Таким чином, можна зробити висновки, що для цієї балки перерізуюча сила досягає свого максимального значення на правій опорі ($Q_{\max} = 4,25\text{kH}$), а найбільший момент виникає на відстані $x_0 = 1,87\text{m}$ від лівої опори ($M_{\max} = 3,52\text{kHm}$).

Лекція 12. Продовження теми 8 (Згин)

Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за нормальними напруженнями. Розподіл нормальних напружень по висоті перерізу.

8.5. Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за нормальними напруженнями

Вже відзначалося, що нормальні та дотичні напруження, які одночасно можуть виникати в нормальному до осі перерізу балки, пов'язані з моментами та перерізуючою силою відповідно.

Розглянемо випадок так званого *чистого згину*, який виникає на ділянці за умов $Q = 0$ та $M = const$. Такий випадок можна відтворити, наприклад, при навантаженнях балок, зображених на рис. 8.12а та 8.12б. На ділянках CD цих балок виникає чистий згин (епюри моментів $M(x)$ на цих ділянках затемнені).

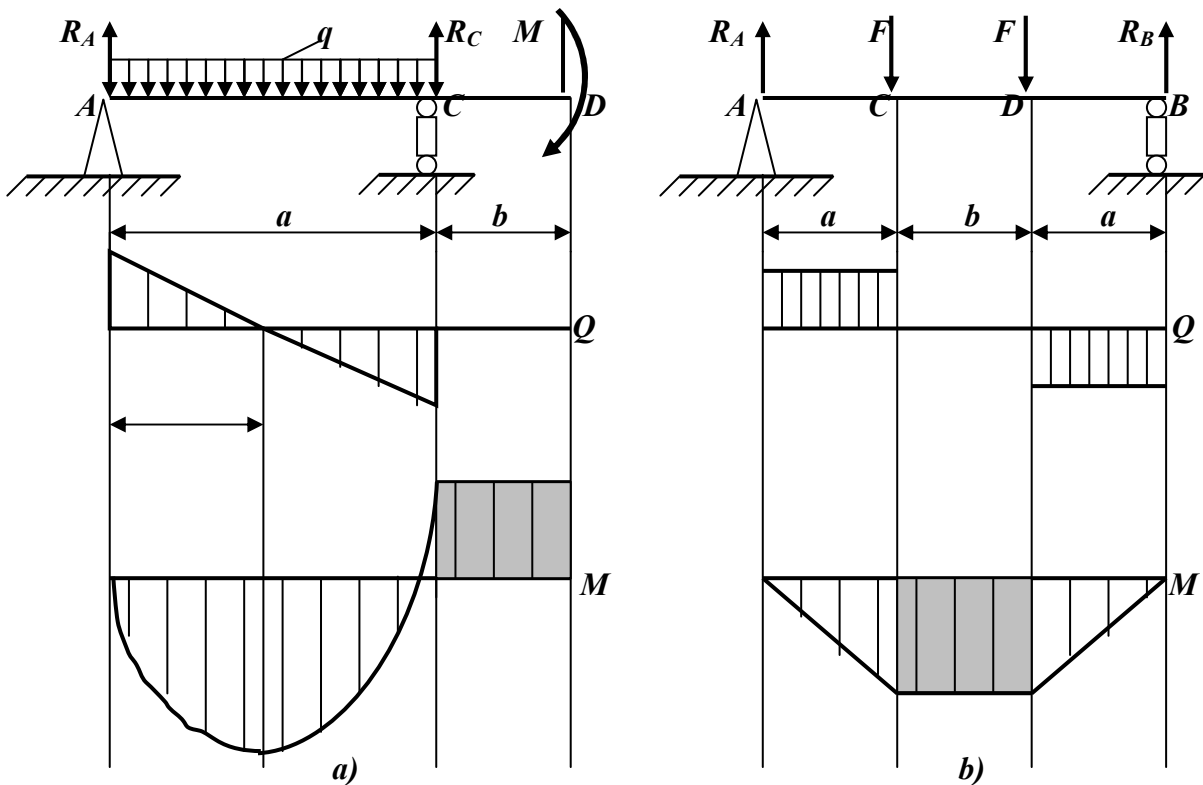


Рис.8.12. Випадки чистого згину: а) на консолі, б) для ділянки між опорами

Для виведення формул нормальних напружень при згині σ домовимося розглядати випадок чистого згину.

Розглянемо ділянку балки довжиною dx , яка знаходиться під дією чистого згину (рис. 8.13). При цьому направимо вісь x уздовж балки, вісь y пов'яжемо з шаром, який не деформується (не стискається і не розтягується). Його називають *нейтральним шаром*. Вісь z поєднаємо з висотою перерізу.

Описуючи статику цієї ділянки, матимемо:

$$\sum X = \int_F \sigma dF \quad (8.8)$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum Z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = M - \int_F \sigma z dF = 0 \quad (8.9)$$

$$\sum M_z = \int_F \sigma y dF = 0. \quad (8.10)$$

Оскільки розподіл σ по висоті перерізу невідомий, задача носить статично невизначений характер. Тому слід розглянути деформацію цієї ділянки (рис. 8.14).

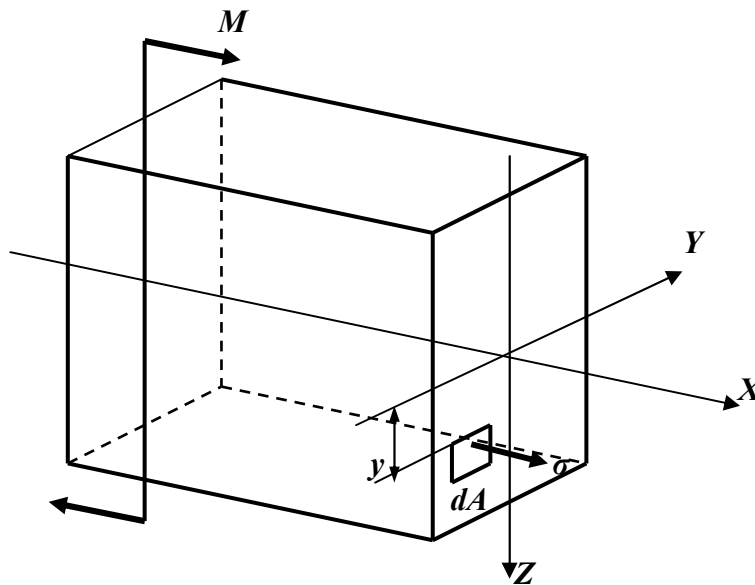


Рис.8.13. Напружений елемент балки

Визначимо деформацію волокна AB . Його початкова довжина $l_0 = dx$. Наприкінці деформації можна записати $l_k = (\rho + z)d\alpha$. При цьому довжина нормального шару не змінюється: $dx = \rho d\alpha$.

$$\text{Тоді } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{(\rho + z)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z}{\rho}; \text{ відповідно } \sigma = E\varepsilon = E \frac{z}{\rho}. \quad (8.11)$$

Звідси випливає, що нормальні напруження σ мають лінійний розподіл по висоті перерізу.

Тепер підставимо (8.11) у (8.8):

$$\int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F z dF = 0. \quad (8.12)$$

Відношення $\frac{E}{\rho}$ не дорівнює нулю, тому дорівнює нулю інтеграл $\int_F z dF$, а цей інтеграл є статичним моментом площі перерізу відносно осі $y - S_y$. Якщо S_y дорівнює нулю, то *вісь*

y – центральна. Тобто, при згині прямого бруса нейтральна вісь (нейтральний шар) проходить через центр ваги перерізу.

Підставимо (8.11) у (8.10):

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E}{\rho_F} \int_F z y dF = 0 \quad (8.13)$$

Останній інтеграл у цьому виразі є відцентровим моментом перерізу відносно осей $y, z - I_{yz}$. У зв'язку з вказаними вище причинами він також дорівнює нулю, що означає: *осі y та z є головними осями*. Відносно однієї з них (у даному випадку – y) момент інерції буде *max*, а відносно другої (вісь z) – *min*.

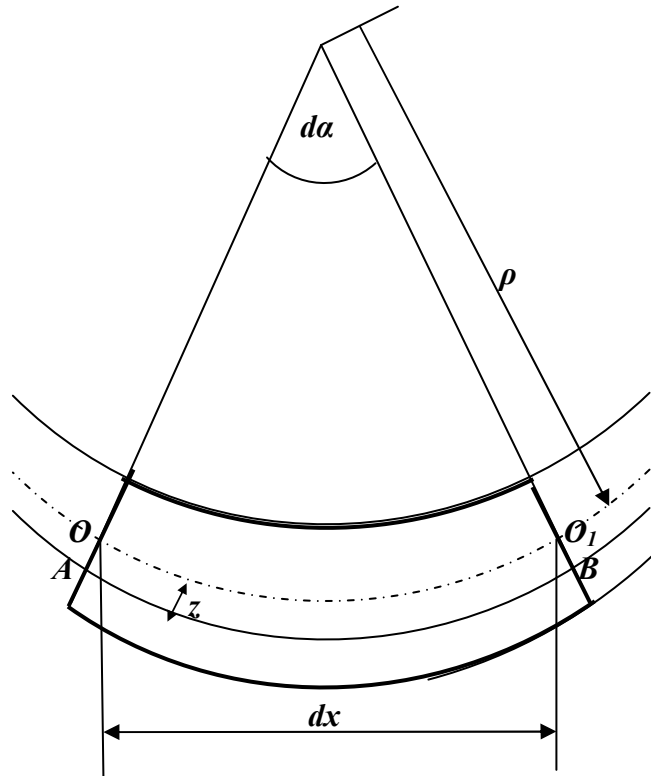


Рис.8.14. Деформація елемента довжиною dx

Тепер підставимо (8.11) у (8.9):

$$M - \frac{E}{\rho_F} \int z \cdot z dF = 0$$

або

$$M = \frac{E}{\rho_F} \int z^2 dF. \quad (8.14)$$

Останній інтеграл у цьому виразі є осьовим моментом інерції відносно осі $y - I_y$.

$$M = \frac{EI_y}{\rho} \quad (8.15)$$

або, беручи до уваги (8.11), та помножуючи обидві частини рівняння (8.15) на z , отримаємо

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{I_y} \quad (8.16)$$

Якщо розглянути найбільші напруження в перерізі (див. рис. 8.15), то слід відзначити, що вони виникають у найвіддаленіших від нейтральної осі шарах ($|z| = z_{\max}$).

$$\text{Тобто, } \sigma_{\max} = \frac{M \cdot z_{\max}}{I_y} = \frac{M}{\frac{I_y}{z_{\max}}} = \frac{M}{W_y}, \quad (8.17)$$

де W_y – момент опору перерізу відносно осі y .

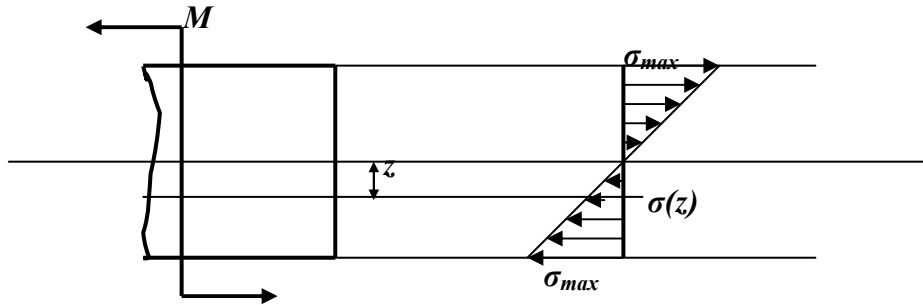


Рис.8.15. Розподіл нормальних напружень по висоті перерізу

Повертаючись до питання знаходження \max нормальних напружень σ_{\max} у балці, слід ще знати небезпечний переріз, тобто той, де $M = M_{\max}$, тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y}. \quad (8.18)$$

Використовуючи (8.18), неважко записати умову міцності за нормальними напруженнями при згині:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (8.19)$$

З цієї формули за відомими моментами M та знаючи допустимий рівень напружень $[\sigma]$, можна визначити осьовий момент опору W_y (а далі і розміри відповідного перерізу) або за відомими формою та розмірами перерізу підібрати допустимі силові фактори, якими можна навантажити балку. При цьому значення M_{\max} підбирають при побудові епюр $Q(x)$ та $M(x)$.

Практика показала, що в більшості випадків найнебезпечнішими для балок є нормальні напруження. Тому залежності (8.17 ÷ 8.19) є дуже важливими розрахунковими формулами.

Дослідження показали, що формули (8.17 ÷ 8.19) практично справедливі не тільки для випадку чистого згину, але й у випадку, коли на ділянці, що розглядається, перерізуєча сила Q не дорівнює нулю.

Похибка незначна і можна вважати формули (8.17 ÷ 8.19) універсальними при розгляді плоского згину прямого бруса.

Слід зауважити, що для звичайних довгих балок у більшості випадків саме нормальні напруження є доміантними з точки зору виникнення небезпеки.

Лекція 13. Продовження теми 8 (Згин)

Дотичні напруження при згині. Формула Журавського. Умова міцності при згині за дотичними напруженнями. Розподіл дотичних напружень по висоті перерізу.

8.6. Дотичні напруження при згині. Формула Журавського. Умова міцності при згині за дотичними напруженнями

Зважаючи на те, що, як правило, небезпечними для балок є нормальні напруження, трапляються випадки, коли вирішальну роль при руйнуванні об'єктів відіграють дотичні напруження.

Наприклад, при будівництві знаменитої залізниці Петербург–Москва траса проходила через заболочену місцевість і через мілкі та вузькі річки треба було будувати дуже багато мостів. Ці мости являли собою короткі балки і при розрахунку їх за нормальними напруженнями, мали начебто колосальний запас міцності, а насправді не витримували навантажень. Цим питанням зайнявся технічний директор будівництва професор Петербурзького інституту інженерів залізничного транспорту Д. Журавський. Він встановив, що при згині коротких балок згинаючі моменти не можуть набути великих значень за рахунок малого плеча, в той час як перерізуючі сили, що зумовлюють саме дотичні напруження, можуть досягати значних величин.

Журавський Дмитро Іванович (1821–1891).

Роботи присвячені будівельній механіці та застосуванню математичних методів у будівельній справі. Спроектував і побудував металевий шпиль Петропавлівської вежі у Петербурзі. Розробив теорію дерев'яних ферм із залізними тяжами і застосував її у будівництві мостів через ріки Верев'ю, Волгу, Волхов та ін. Вивів формулу для обчислень дотичних напружень при згині. Розробив наближений спосіб розрахунку балок. У 1887–1889 рр. був директором департаменту залізничних доріг Росії.

Професор Журавський вивів формулу для визначення дотичних напружень у прямокутних перерізах. Інженерна практика довела, що цю формулу з достатнім ступенем точності можна використовувати і для інших типів перерізів.

Наведемо виведення формули для обчислення дотичних напружень при згині. Для цього приймемо ще дві гіпотези:

- Дотичні напруження τ скрізь паралельні перерізуючій силі Q .
- Дотичні напруження постійні по ширині балки і залежать від відстані відповідного шару до нейтральної осі.

Розглянемо навантажену балку прямокутного перерізу (рис. 8.16а,б). Виділимо коротку ділянку довжиною dx (рис. 8.17), причому домовимось, що $b \ll h$.

На цій ділянці і справа, і зліва виникають нормальні напруження σ' та σ'' відповідно (рис. 8.18).

Причому

$$\sigma' = \frac{M \cdot z}{I_y}; \quad \sigma'' = \frac{M + dM}{I_y}.$$

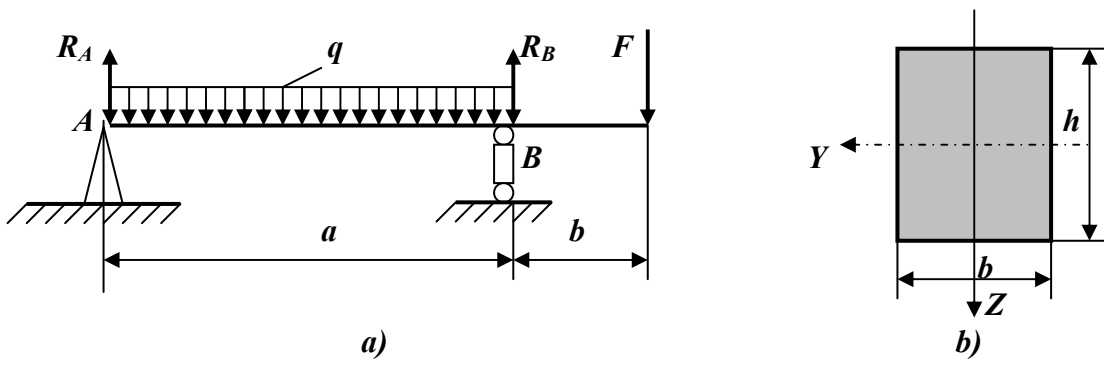


Рис. 8.16. а) Навантажена балка;

б) прямокутний переріз

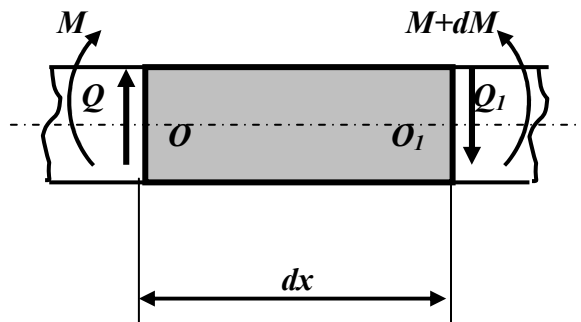


Рис. 8.17. Навантажена ділянка довжиною dx

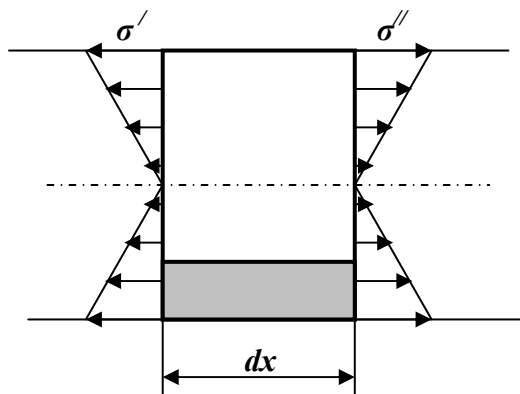


Рис.8.18. Розподіл нормальних напружень по висоті елемента

Відсічемо частину елемента балки, провівши горизонтальну площину mn на відстані z від нейтральної осі. В перерізі на відстані ξ від нейтральної осі відокремимо елементарну площадку dA шириною $d\xi$ (рис. 8.19).

Розглянемо сили, що діють на відокремлений елемент (рис. 8.20).

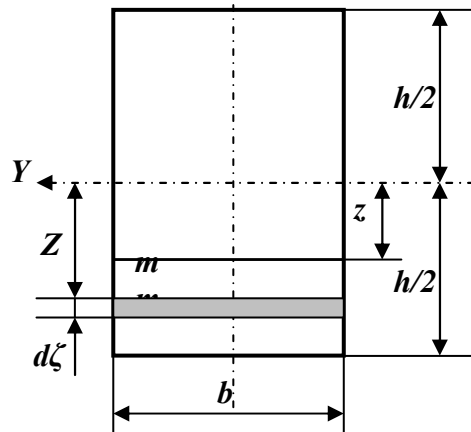


Рис.8.19. Елементарна площадка шириною $d\xi$ в перерізі

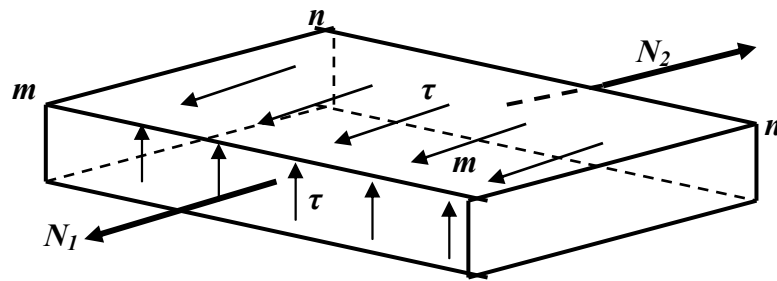


Рис.8.20. Навантаження відокремленого елемента

По елементу dA діє сила

$$dN = \sigma' dA = \frac{M_{(x)} \xi}{I_y} dA.$$

Тоді

$$N_1 = \int_{F_1} \sigma' dA = \frac{M_{(x)}}{I_y} A. \quad (8.20)$$

Останній інтеграл є статичним моментом „відрізаної” площадки (затемнена на рис. 8.18) – $S_{\text{відр}}$,

тобто,

$$N_1 = \frac{M_{(x)}}{I_y} S_{\text{відр}}. \quad (8.21)$$

Цілком аналогічно

$$N_2 = \frac{M_{(x)} dM}{I_y} S_{\text{відр}}. \quad (8.22)$$

Дотичні напруження, що діють на грані $nmmt$ (рис. 8.20), виникають за рахунок різниці сил N_1 та N_2 . Тобто,

$$T = \tau \cdot b dx; \quad (8.23)$$

$$T = N_2 - N_1. \quad (8.24)$$

Звідки, враховуючи (8.21) та (8.22), отримаємо

$$\tau \cdot b dx = \frac{dM}{I_y} S_{\text{відр}} \quad (8.25)$$

або

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_{\text{відр}}}{I_y b} \quad (8.26)$$

Використовуючи (8.5), остаточно

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{\text{відр}}}{b \cdot I_y} \quad (8.27)$$

Цей вираз називають формулою Журавського.

Цікаво подивитися на розподіл τ по висоті перерізу.

Для прямокутного перерізу (рис. 8.21) знайдемо τ на відстані z від нейтральної осі y .

Для цього випадку $I_y = \frac{bh^3}{12}$;

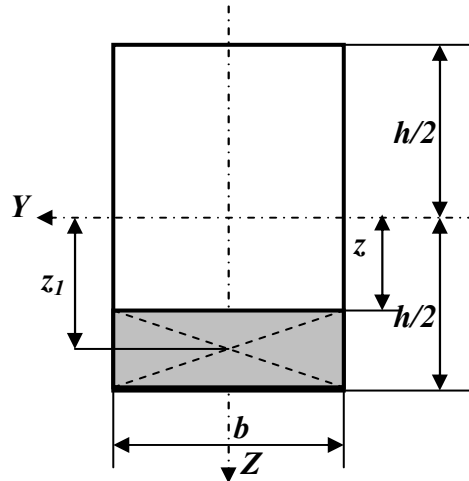


Рис.8.21. „Відрізна” частина перерізу

$$S_{\text{відр}} = F_1 \cdot z_1 = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

або

$$S_{\text{відр}} = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{2z^2}{h^2} \right)$$

Тоді

$$\tau = \frac{Q \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (8.28)$$

Цей вираз вказує на параболічний характер зміни дотичних напружень по висоті перерізу. Неважко помітити, що $\tau = 0$ при $z = \pm \frac{h}{2}$ на верхньому та нижньому шарах балки, тобто в тій зоні, де нормальні напруження σ досягають max значень. І навпаки,

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} \quad (8.29)$$

при $z = 0$. Тобто, на нейтральній осі, де нормальні напруження σ дорівнюють нулю. Розподіл по висоті перерізу величин σ і τ зображено на рис. 8.22.

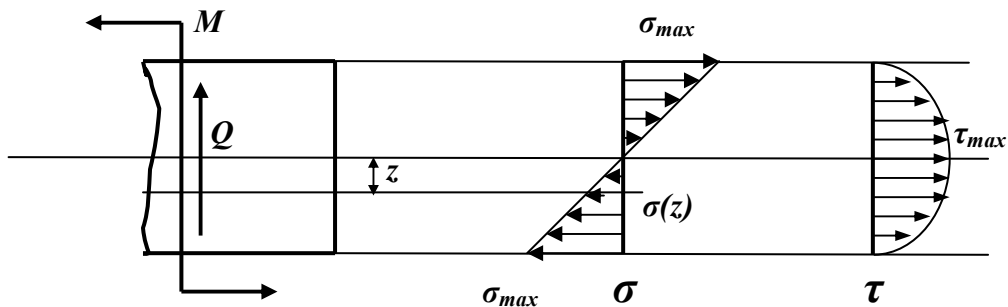


Рис.8.22. Розподіл нормальних та дотичних напружень по висоті перерізу

З (8.29) очевидно, що максимальне значення τ більше від того, що було б отримане за розрахунками на звичайний зсув в 1,5 раза.

Тепер можна записати умову міцності для дотичних напружень:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\text{відр max}}}{b_{\min} I_y} \leq [\tau] \quad (8.30)$$

Для підбирання розмірів перерізу одразу за дотичними напруженнями треба було б одночасно визначити три величини, пов'язані між собою – b ; I_y та $S_{\text{відр max}}$, що є неможливим. Тому на практиці спочатку підбирають розміри перерізу з умови міцності за нормальними напруженнями, а далі перевіряють їх за формулою (8.30). Якщо результати розрахунків задовольняють (8.30), розрахунок закінчують. Якщо ні, то збільшують переріз (вибирають більший розмір сортаменту) і так до тих пір, доки умова не буде виконана. Зрозуміло, що умова міцності за нормальними напруженнями при цьому буде виконуватися автоматично.

Лекція 14. Продовження теми 8 (Згин)

Повна перевірка балки на міцність. Згин тонкостінних стержнів.

8.7. Повна перевірка балки на міцність

Як правило, при звичайних інженерних розрахунках можна обмежитися використанням умови міцності за нормальними напруженнями (8.19) та перевіркою міцності за дотичними напруженнями (8.30). Але при розрахунках відповідальних елементів конструкції слід ретельніше дослідити напружений стан, що виникає в балці.

Розглянемо елементи, які знаходяться на різних рівнях перерізу навантаженої балки (рис. 8.23).

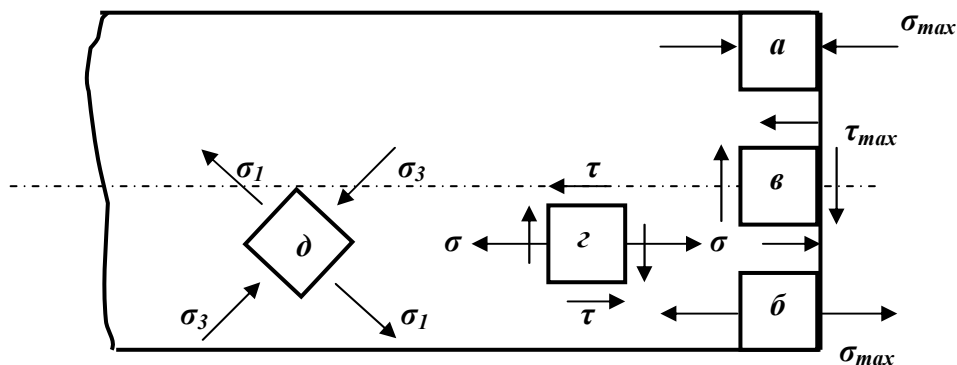


Рис.8.23. Складний напружений стан при згині

Елементи „а” та „б”, вирізані у крайніх шарах балки, знаходяться під впливом максимальних нормальних напружень, а дотичні напруження по їх гранях дорівнюють нулю. Елемент „в” розташований на нейтральній осі навпаки знаходиться під дією τ , а нормальні напруження відсутні. Розглядаючи елемент „з”, можна стверджувати, що на його гранях будуть діяти і нормальні, і дотичні напруження, причому, якщо на цьому шарі вирізати елемент за головними площадками, то він буде орієнтований як елемент „д”.

Виходячи з вищевказаного, можна зробити висновок, що матеріал балки знаходиться у неоднорідному складному напруженому стані. Можна стверджувати, що, перевіряючи на міцність зони, найвіддаленіші від нейтральної осі, треба використовувати критерій міцності за нормальними напруженнями. Розглядаючи нейтральний шар, перевірку треба здійснювати за дотичними напруженнями, а при вивченні напруженого стану проміжних шарів треба використовувати певні теорії міцності.

Взагалі задачу розрахунку на міцність при цьому розбивають на кілька стадій:

1. Знаходять небезпечний переріз (може статися, що треба буде перевірити кілька перерізів, в яких виникають M_{\max} або Q_{\max} , або і M і Q приймають одночасно досить великі значення).
2. У перерізі знаходять небезпечні точки (шари), в яких приймають великі значення σ , τ або обидва ці напруження (таких точок теж може бути кілька). Головні напруження в кожній точці перерізу в даному випадку визначають за формулами:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \\ \sigma_2 = 0; \\ \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \end{cases} \quad (8.31)$$

Підставляючи ці вирази у критерій міцності відповідних теорій міцності, отримаємо розрахункові напруження для *I, II, III, IV* теорій:

$$\sigma_{q_I} = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \leq [\sigma] \quad (8.32)$$

$$\sigma_{q_{II}} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.33)$$

$$\sigma_{q_{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.34)$$

$$\sigma_{q_{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.35)$$

Аналогічно запишемо вираз для критерію Мора:

$$\sigma_{q_M} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.36)$$

де $m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}$.

Практика показала, що для розрахунку балок із пластичних матеріалів доцільно використовувати *III* та *IV* теорію міцності.

Цікавим є не тільки визначення величин головних напружень, але й їх орієнтації в різних шарах балки. Це потрібно, наприклад, при розгляді питання про конструювання залізобетонних балок.

Розглянемо напрямки головних напружень у різних точках якогось перерізу (рис. 8.24). Тонкими лініями показано напрямок σ_1 , товстими – σ_3 .

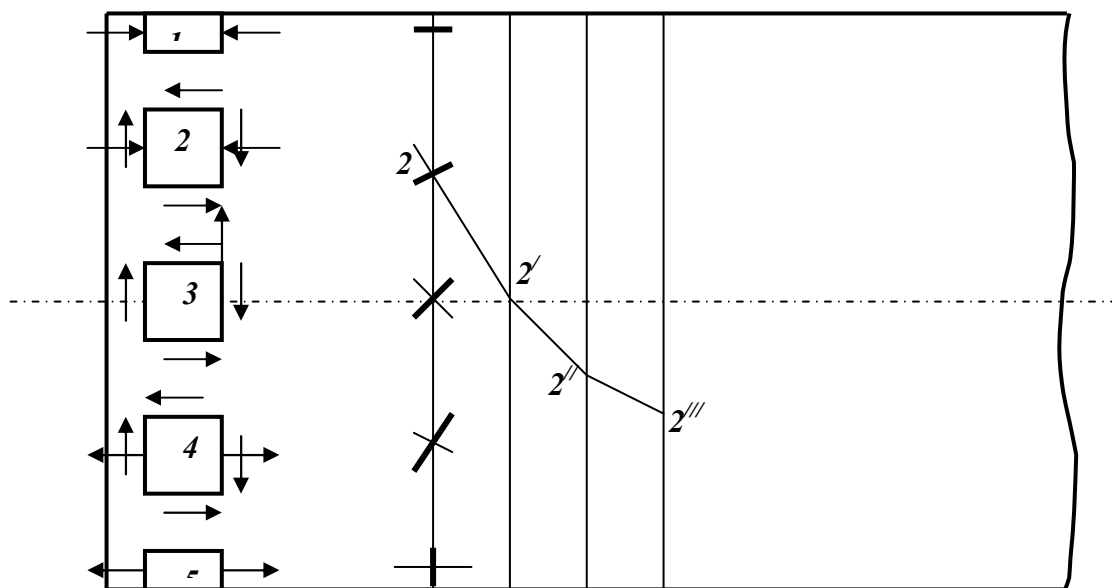


Рис.8.24. Траєкторії головних напружень

Траєкторії головних напружень (ізостати) можна побудувати, проводячи з точки, де відомі напрямки σ_1 та σ_3 , відрізок до перетину з наступним перерізом за напрямом того напруження, траєкторію якого будемо. З отриманої точки знов треба провести відрізок до перетину із наступним перерізом, орієнтуючи цей відрізок за напрямком напруження вже в даній точці, й т.д. При досить малій відстані між перерізами ця ламана лінія перетвориться у криву, яку називають ізостатою або траєкторією головного напруження. В залізобетонних балках арматуру потрібно розташовувати за напрямом траєкторії головних розтягуючих напружень (рис. 8.25).

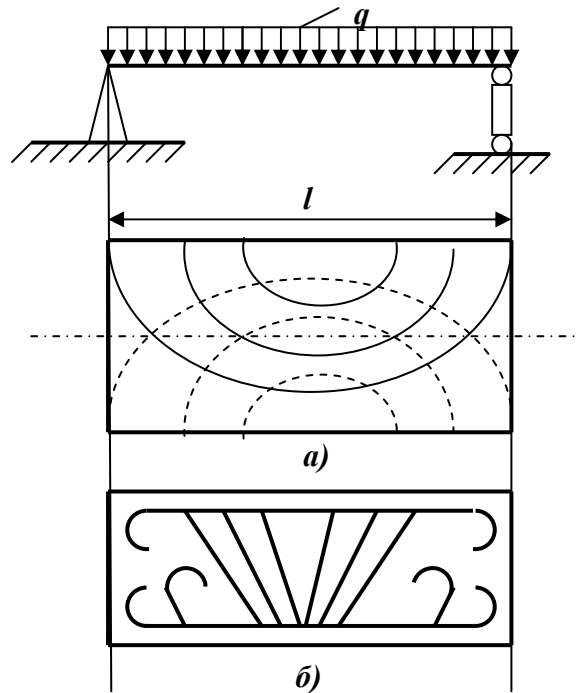


Рис.8.25. Принцип армування залізобетонних балок:
а) картина ізостат; б) розташування арматури

8.8. Згин тонкостінних стержнів

Ми вже розглядали питання про дотичні напруження, що виникають при згині. Слід відзначити, що за умови врахування дотичних напружень при згині, треба відкинути гіпотезу плоских перерізів.

Якщо тонкостінний переріз завантажується у площині симетрії, для нього діють формули, виведені у гл.8.

Розглянемо питання про розподіл дотичних напружень у випадку навантаження перерізу не у площині симетрії. Покажемо існування осі, паралельної до осі стержня, коли сили, які діють у будь-якій площині, що проходить через цю вісь, не викликають кручення. Точку перетину цієї осі з площиною перерізу (т. C на рис. 8.26) назвемо *центром згину*.

Якщо це так, то сума моментів усіх дотичних сил у перерізі відносно т. C дорівнює 0.

На елемент ds з координатами x, y діє сила $\tau \delta ds$ (δ – товщина стержня). Тоді її момент відносно т. C буде

$$\tau \cdot \delta \cdot ds \cdot p ,$$

де p – довжина перпендикуляра, опущеного з т. C на дотичну.

Якщо C є центром згину, то

$$\int_0^h \tau \delta p ds = 0 .$$

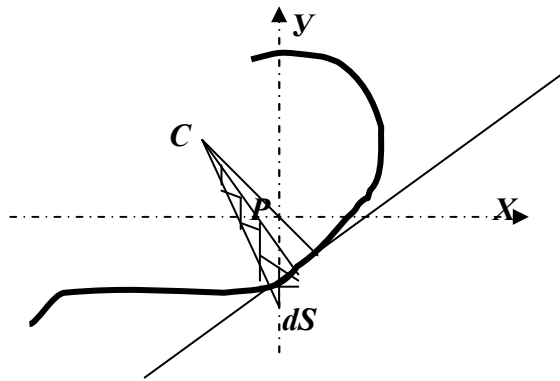


Рис. 8.26. Центр згину

$p \cdot ds$ – це подвоєна площа трикутника з основою ds та вершиною в т. C . Нехай $pds = d\omega$,

то

$$\int_0^h \tau \delta \frac{d\omega}{ds} ds = 0.$$

Проінтегрувавши за частинами, отримаємо:

$$\tau \delta \omega \Big|_0^h - \int_0^h \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} \omega ds = 0.$$

$\delta = 0$ якщо $s = 0$ або $s = h$.

Перетворюючи, отримаємо

$$\frac{Q_y}{I_x} \int_0^h y \omega \delta ds + \frac{Q_x}{I_y} \int_0^h x \omega \delta ds = 0,$$

а, так як Q_x та Q_y – довільні, положення центра ваги визначимо такими умовами:

$$I_{\omega x} = \int_0^h y \omega \delta ds = 0;$$

(8.37)

$$I_{\omega y} = \int_0^h x \omega \delta ds = 0.$$

Дуже просто знайти центр згину для кутникового профілю (рис. 8.27). Якщо

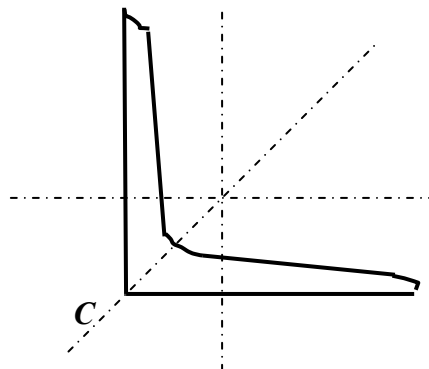


Рис. 8.27. Кутниковий профіль

вершину C прийняти за полюс, то секторіальна площа $\omega = 0$. Тому умови (8.37) виконуються і вершина кута C є центром згину.

Лекція 15. Тема 9. Деформації та переміщення при згині

Деформації та переміщення, що розглядаються при згині. Аналітичні методи визначення деформацій та переміщень при згині. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки. Приклади інтегрування наближеного рівняння зігнутої осі балки.

9.1. Деформації та переміщення, які розглядають при згині

Під деформаціями (а точніше переміщеннями) при згині розуміють прогин та кут повороту перерізу (рис. 9.1).

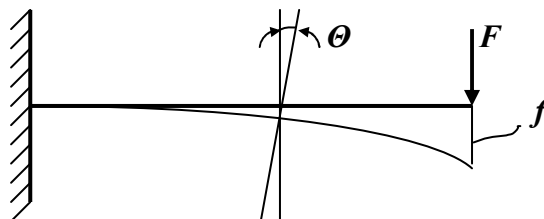


Рис.9.1. Прогин - f та кут повороту - θ при згині

Позначимо прогин – f , а кут повороту – θ . Через те, що кут θ дуже малий, можна записати

$$\operatorname{tg}\theta = \theta = \frac{dy}{dx}, \quad (9.1)$$

тобто функція кутів повороту θ є першою похідною від функції прогинів по довжині балки.

Існують різні теоретичні методи визначення переміщень при згині:

- аналітичні, що базуються на інтегруванні наближеного диференціального рівняння зігнутої осі балки;
- графічні й графоаналітичні, які засновані на зв'язку аналітичних виразів та графічних зображень – епюр внутрішніх силових факторів;
- енергетичні, що створені при розгляді зв'язку деформацій та рівнем потенціальної енергії, яка при цьому накопичується в об'єкті, й т.п.

9.2. Аналітичні методи визначення деформацій та переміщень при згині. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Нехтуючи впливом на кривизну балки перерізуючої сили Q , можна записати:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI(x)}, \quad (9.2)$$

де $\rho(x)$ – радіус кривизни шару.

З курсу математики відомо

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.3)$$

Порівняємо праві частини формул (9.2) та (9.3). Вважаючи, що при додатному моменті M додатною є й кривизна, а при від'ємному – кривизна теж буде від'ємною, у формулі можна залишити тільки знак „+”:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (9.4)$$

(якби вісь y була направлена вниз, частини рівняння були б протилежні за знаком). Це *рівняння зігнутої осі балки*. Враховуючи, що маємо справу з малими деформаціями і величина $\frac{dy}{dx}$ значно менша від 1, можна записати *наближене диференціальне рівняння зігнутої осі*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (9.5)$$

або
$$EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (9.6)$$

Використовуючи ці співвідношення, а також (9.1), можна визначити прогини та кути повороту перерізів балки.

Інтегруючи (9.4) один раз, матимемо

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + C \quad (9.7)$$

Інтегруючи цей вираз ще раз, отримаємо

$$y(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EI(x)} dx + Cx + D \quad (9.8)$$

Вирази (9.7) та (9.8) мають дві константи інтегрування C та D , які знаходимо з граничних умов.

При цьому зрозуміло, що:

- D – не що інше, як збільшений в EI разів прогин на початку координат, тобто, $D = EI \cdot y(0)$;
- C – не що інше, як збільшений в EI разів кут повороту на початку координат, тобто, $C = EI \cdot \theta(0)$.

9.3. Приклади інтегрування наближеного рівняння зігнутої осі балки

1. Розглянемо балку, навантажену зосередженою силою, як зображено на рис.9.2., та знайдемо прогин і кут повороту перерізу на кінці консолі в т.В. Виберемо початок правосторонньої декартової системи координат у жорсткому защемленні (т.А) і будемо вважати жорсткість балки EI величиною постійною.

Тоді, записуючи вираз $M(x)$ справа від перерізу, матимемо

$$M(x) = -F(l-x)$$

і наближене рівняння зігнутої осі балки буде мати вигляд

$$EIy''(x) = -F \cdot (l - x).$$

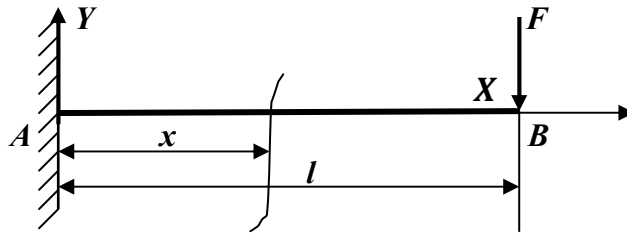


Рис.9.2. Консольна балка, навантажена на вільному кінці зосередженою силою

Відповідно після інтегрування матимемо

$$EIy'(x) = \theta(x) = -Flx + \frac{Fx^2}{2} + C ;$$

$$EIy(x) = -Fl \frac{x^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} + Cx + D .$$

Визначимо константи інтегрування C та D з граничних умов. У даному випадку вони будуть виглядати так

$$y(0)=0 \quad \text{та} \quad \theta(0)=0 ,$$

звідки стає зрозумілим, що
Тоді

$$C=D=0 .$$

$$EIy'(x) = \theta(x) = -Flx + \frac{Fx^2}{2}$$

і відповідно

$$EIy(x) = -Fl \frac{x^2}{2} + \frac{Fx^3}{6} .$$

Тоді кут повороту і прогин в т.В будуть відповідно дорівнювати:

$$\theta_B = \theta(l) = \frac{1}{EI} \left(-Fl^2 + \frac{1}{2} Fl^2 \right) = -\frac{Fl^2}{2EI} ;$$

$$y_B = y(l) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} Fl^3 + \frac{1}{6} Fl^3 \right) = -\frac{Fl^3}{3EI} ;$$

(9.9)

Знаки “ - “ у відповідях вказують на орієнтацію переміщень у вибраній правосторонній системі координат – прогин спрямований донизу, а кут повороту – за годинниковою стрілкою.

2. Розглянемо балку, навантажену рівномірно розподіленим навантаженням, як зображено на рис.9.3, та знайдемо прогин і кут повороту перерізу на кінці консолі в т.В. Але цього разу виберемо вже лівосторонню систему координат із початком на кінці консолі в т.В.

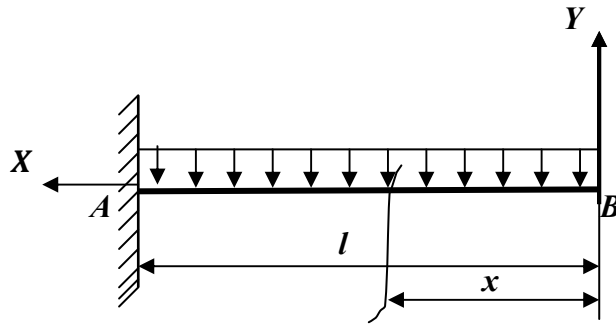


Рис.9.2. Консольна балка, навантажена розподіленим навантаженням

Тоді, записуючи вираз $M(x)$ справа від перерізу, матимемо:

$$M(x) = -qx^2/2$$

і наближене рівняння зігнутої осі балки буде мати вигляд:

$$EIy''(x) = -\frac{qx^2}{2}.$$

Відповідно після інтегрування, матимемо:

$$EIy'(x) = \theta(x) = -\frac{qx^3}{6} + C;$$

$$EIy(x) = -\frac{qx^4}{24} + Cx + D.$$

Визначимо константи інтегрування C та D з граничних умов. В даному випадку вони будуть виглядати так:

$$y(l) = 0 \quad \text{та} \quad \theta(l) = 0,$$

звідки стає зрозумілим, що $C = \frac{ql^3}{6}$ та $D = -\frac{ql^4}{8}$.

Тоді

$$EIy'(x) = \theta(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{6}$$

і відповідно

$$EIy(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3}{6}x - \frac{ql^4}{8}.$$

Тоді кут повороту і прогин в т.В будуть відповідно дорівнювати:

$$\theta_B = \theta(0) = \frac{ql^3}{6EI} \quad \text{та} \quad y_B = y(0) = -\frac{ql^4}{8EI} \quad (9.10)$$

Знак “ - ” у відповіді для прогину вказує на орієнтацію переміщень у вибраній лівосторонній системі координат – прогин спрямований донизу, а кут повороту – додатний і орієнтований за годинниковою стрілкою.

при згині)

Метод прирівнювання постійних інтегрування. Метод початкових параметрів.

9.4. Метод прирівнювання постійних інтегрування

Введемо певні обмеження щодо інтегрування наближеного рівняння зігнутої осі балки:

- 1) початок координат домовимося завжди вибирати на кінці балки (немає різниці, опертому чи консольному);
- 2) початок координат будемо вибирати одним і тим же для всіх ділянок;
- 3) інтегрування будемо проводити, не розкриваючи дужок ($d(x-a) = dx$);
- 4) якщо до балки прикладене розподілене навантаження і воно не розповсюджується до кінця (відповідно вибраної системи координат), то його слід дотягнути до кінця балки, а для того, щоб система залишилась статично-еквівалентною, на цій же ділянці слід прикласти таке ж саме розподілене навантаження, тільки протилежного знака (рис 9.3а,б);
- 5) вирази моментів від відповідних навантажень у наближене рівняння зігнутої осі балки домовимося записувати в такому вигляді:

$$M(x-a)^0; F(x-b)^1; \frac{q(x-c)^2}{2}.$$

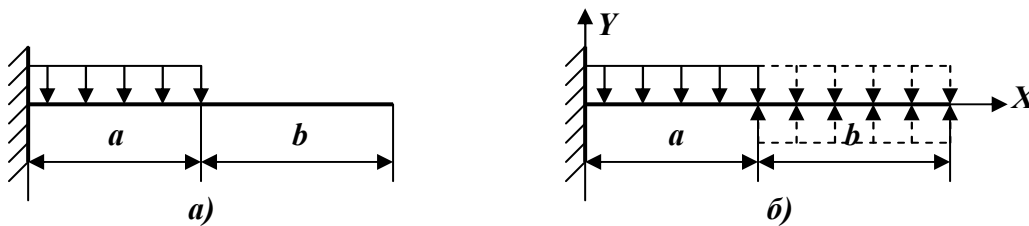


Рис.9.3. Випадок, коли розподілене навантаження не розповсюджується до кінця балки: а) початкове навантаження, б) перетворене навантаження

Якщо виконати ці умови, то при інтегруванні відповідні члени у виразі для кутів повороту будуть мати вигляд

$$M \frac{(x-a)^1}{1!}; F \frac{(x-b)^2}{2!}; \frac{q(x-c)^3}{3!},$$

а у виразах для прогинів –

$$M \frac{(x-a)^2}{2!}; F \frac{(x-b)^3}{3!}; \frac{q(x-c)^4}{4!}.$$

Крім того те, що система координат для всіх ділянок є однією й тією ж, і те, що зроблено з розподіленим навантаженням, яке не розповсюджується до кінця балки (див.п.4. та рис. 9.3а,б), на кожній наступній ділянці буде повторюватися попередній вираз із додаванням членів за рахунок навантаження цієї ділянки. Порівняння значень функцій на границях ділянок дає можливість встановити, що за вищезазначених умов *постійні інтегрування на попередній ділянці будуть дорівнювати аналогічним постійним для наступної ділянки. Тобто,*

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_i ; \\ D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D_i .$$

Таким чином, цей метод замість багатьох констант інтегрування дозволяє знаходити тільки дві, використовуючи відповідні граничні умови.

9.5. Метод початкових параметрів

Усе викладене вище дає змогу перейти до більш універсального методу, так званого *методу початкових параметрів*.

Виконуючи умови, передбачені методом прирівнювання постійних інтегрування, та враховуючи, як вже було раніше встановлено, що $C_i = EI \cdot \theta_0$ й, аналогічно $D_i = EI \cdot y_0$, вираз для кутів повороту можна записати в такому вигляді:

$$EI \cdot \theta(x) = EI \cdot \theta_0 + \sum_{i=1} M_i \frac{(x-a_i)^1}{1!} + \sum_{j=1} F_j \frac{(x-b_j)^2}{2!} + \sum_{k=1} \frac{q_k (x-c_k)^3}{3!} \quad (9.11)$$

і вираз для прогинів відповідно

$$EI \cdot y(x) = EI \cdot y_0 + EI \cdot \theta_0 \cdot x + \sum_{i=1} M_i \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{j=1} F_j \frac{(x-b_j)^3}{3!} + \sum_{k=1} \frac{q_k (x-c_k)^4}{4!}, \quad (9.12)$$

де y_0 та θ_0 – так звані початкові параметри – прогин та кут повороту відповідно на початку координат, що визначаються з граничних умов;
 M_i ; F_j та q_k – зовнішні навантаження, прикладені на ділянках балки;
 a_i ; b_j та c_k – координати прикладання відповідних навантажень;
 x – координата перерізу, в якому знаходиться переміщення;
 EI – жорсткість балки.

При обчисленні початкових параметрів треба розглянути три варіанти:

1. Початок координат вибраний у жорсткому защемленні (рис.9.4).

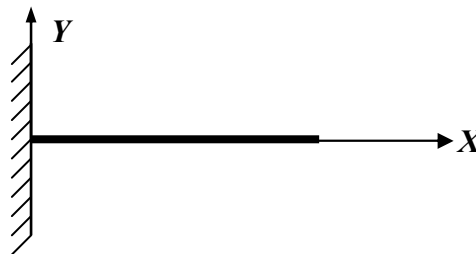


Рис.9.4. Випадок вибору початку координат у жорсткому защемленні

Зрозуміло, що в цьому випадку $y_0 = 0$; $\theta_0 = 0$.

2. Випадок, коли початок координат вибирають на кінцевій шарнірній опорі (рис. 9.5) у т.А.

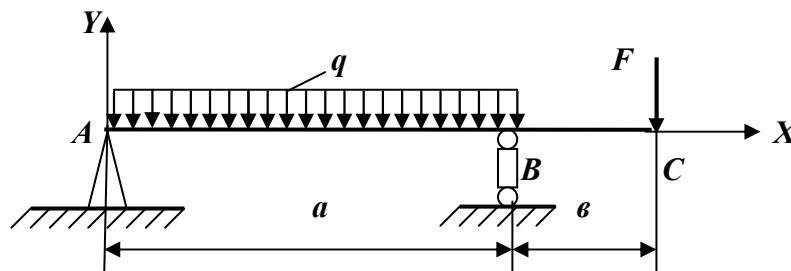


Рис. 9.5. Випадок вибору початку координат на шарнірній кінцевій опорі

У цьому випадку

$$y_0 = y_A = 0, \text{ але } \theta_0 = \theta_A \neq 0.$$

Для того, щоб обчислити величину θ_0 , треба записати вираз для прогину в т.В (на другій опорі) й прирівняти його до нуля. В цьому рівнянні буде тільки одне невідоме – θ_0 , звідки його й можна обчислити.

3. Випадок, коли початок координат вибирають на неопертому кінці балки (рис. 9.6) у т.С.

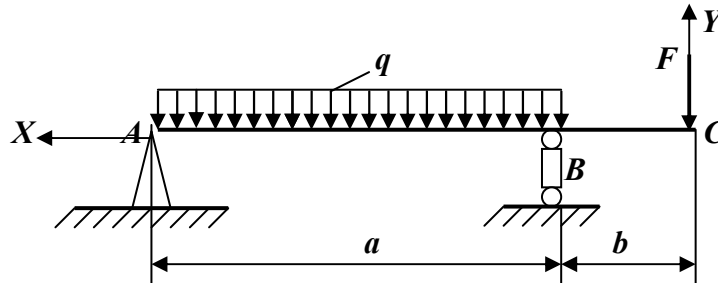


Рис. 9.6. Випадок вибору початку координат на неопертому кінці балки

У цьому випадку

$$y_0 = y_C \neq 0, \text{ і } \theta_0 = \theta_C \neq 0.$$

Для того, щоб обчислити величини початкових параметрів y_0 і θ_0 в цьому випадку, треба записати вирази для прогину в опорних т. А та т.В і прирівняти їх до нуля. В цих рівняннях буде по два невідомих – y_0 та θ_0 . Розв'язуючи їх, отримаємо величини початкових параметрів.

9.6. Приклад визначення переміщень

Розглянемо жорстко закріплену одним кінцем балку з консолю довжиною l , навантажену на вільному кінці силою F (рис. 9.7.) Визначимо прогин та кут повороту перерізу на неопертому кінці в т. А методом початкових параметрів. Початок координат виберемо в жорсткому закріпленні (т.В).

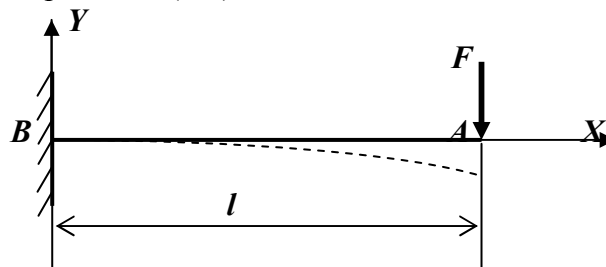


Рис. 9.10. Визначення переміщень за допомогою методу початкових параметрів

При цьому слід зауважити, що початкові прогин y_0 та кут повороту θ_0 дорівнюють нулю, зате в жорсткому закріпленні присутні силові реакції R_B , H_B та реактивний момент M_R . Ці реактивні силові фактори неважко обчислити, використовуючи рівняння статички

$$\begin{cases} \sum X = H_B = 0; \\ \sum Y = R_B - F = 0; \\ \sum M_B = M_R - F \cdot l = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $H_B = 0$; $R_B = F$; $M_R = Fl$.

Запишемо рівняння початкових параметрів для визначення прогинів та підставимо відповідні величини, приймаючи координату точки A ($x = l$) та координати прикладання M_R і R_B ($a = b = 0$):

$$y_A = \frac{1}{EI} \left[EI \cdot y_0 + EI \cdot \theta_0 \cdot x + \sum -M_R \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum R_B \cdot \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \cdot \frac{(x-c)^4}{4!} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[0 + 0 - Fl \frac{(l-0)^2}{2} + F \frac{(l-0)^3}{3 \cdot 2} + 0 \right] = - \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Аналогічно визначимо кут повороту:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[EI \cdot \theta_0 + \sum M \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + \sum F \cdot \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \cdot \frac{(x-c)^3}{3!} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[0 - Fl \frac{(l-0)^1}{1} + F \frac{(l-0)^2}{2} + 0 \right] = - \frac{Fl^2}{2EI}.$$

Знаки " - " у відповідях означають, що прогин і кут повороту відповідно орієнтовані у вибраній системі координат (прогин – вниз, кут повороту – за годинниковою стрілкою).

Лекція 17. Тема 10. Складний опір

Складний згин. Косий згин. Визначення напружень при косому згині. Умова міцності. Визначення переміщень при косому згині.

У попередніх розділах ми ознайомилися з розрахунками на міцність і визначенням деформацій при розгляді 4-х видів простої деформації: розтягу – стиску, зсуву, кручення та згину. Але в інженерній практиці найчастіше зустрічаються випадки дії навантажень, при яких в об'єкті одночасно виникають кілька видів простої деформації. Наприклад, вали, як правило, працюють не тільки на кручення, але й на згин, стовпи ліхтарів на вулицях працюють на стиск за рахунок власної ваги і на згин за рахунок зміщення навантаження від осі. Таких прикладів можна навести безліч.

Розглянемо принципи розрахунків на міцність і визначення деформацій при виникненні таких ситуацій.

10.1. Складний згин. Косий згин

Складним згином називають випадок, коли балку навантажують у різних площинах, які, проходячи через центральну вісь, не співпадають з головними площинами інерції. Частковий випадок складного згину – це косий згин – випадок складного, коли навантаження прикладають в одній площині, яка, проходячи через центральну вісь, не співпадає з жодною із головних площин інерції.

10.1.1. Визначення напружень при косому згині. Умова міцності.

Розглянемо, наприклад, консольну балку (рис.10.1а), навантажену на вільному кінці силою, лінія дії якої, проходячи через центр ваги перерізу (для визначеності виберемо його прямокутним), відхиляється від вертикальної головної осі на кут φ (рис.10.1б).

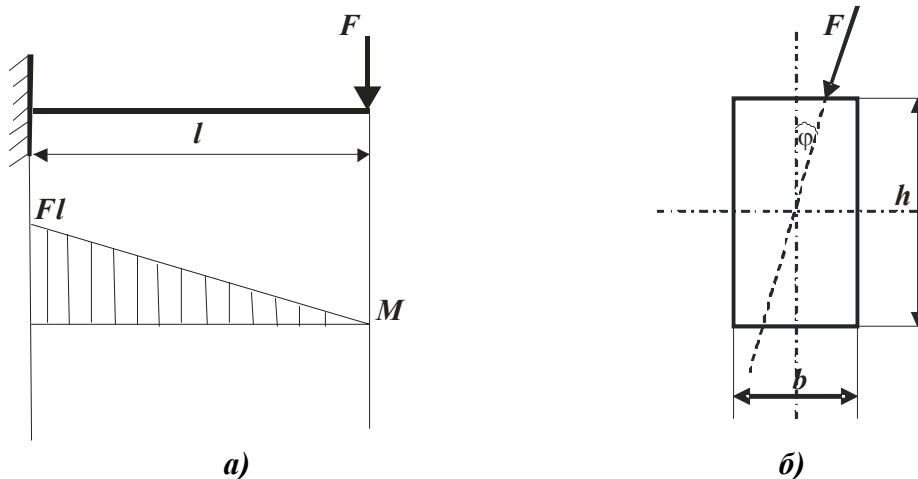


Рис.10.1. Косий згин: а) – загальний вид навантаження; б) – орієнтація навантаження в перерізі

Для з'ясування, з якими простими деформаціями маємо справу, розглянемо рис. 10.2.

Розклавши силу F на горизонтальну $F_{гор}$ та вертикальну $F_{верт}$ складові, запишемо

$$F_{гор} = F \cdot \sin \varphi \quad \text{та} \quad F_{верт} = F \cdot \cos \varphi.$$

Тепер неважко помітити, що сила $F_{гор}$ викликає згин у горизонтальній площині, а сила $F_{верт}$ – відповідно згин у вертикальній площині. Згинаючі моменти відповідно

$$M_{гор} = -F \cdot \sin \varphi \cdot x \quad \text{та} \quad M_{верт} = -F \cdot \cos \varphi \cdot x.$$

Від цих обох згинів у площині перерізу виникають нормальні напруження і тому їх можна просто алгебраїчно скласти. В силу того, що в більшості випадків дотичні напруження не відіграють суттєвої ролі, при розгляді косою згину ми їх розглядати не будемо. І тоді

$$\sigma(x, y, z) = \sigma_{зоп} + \sigma_{верт} = -\frac{M_{зоп} \cdot y}{I_z} - \frac{M_{верт} \cdot z}{I_y} = -\frac{F \cdot \sin \varphi \cdot x \cdot y}{I_z} - \frac{F \cdot \cos \varphi \cdot x \cdot z}{I_y}$$

або, перетворюючи

$$\sigma(x, y, z) = -F \cdot x \cdot \left(\frac{\sin \varphi \cdot y}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z}{I_y} \right). \quad (10.1)$$

Зауважимо, що ця формула записана для балки, що розглядається у вибраній нами системі координат і не носить узагальненого змісту.

На рис. 10.3 зображено епюри напружень у перерізі балки „а” – при прямому згині і „б” – при косому.

Для того, щоб знайти точки, в яких виникатимуть найбільші напруження, треба визначити положення нейтральної осі. Для цього прирівняємо вираз нормальних напружень до нуля.

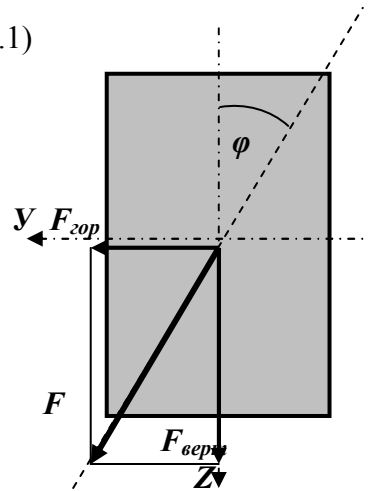


Рис.10.2. Складові сили в перерізі

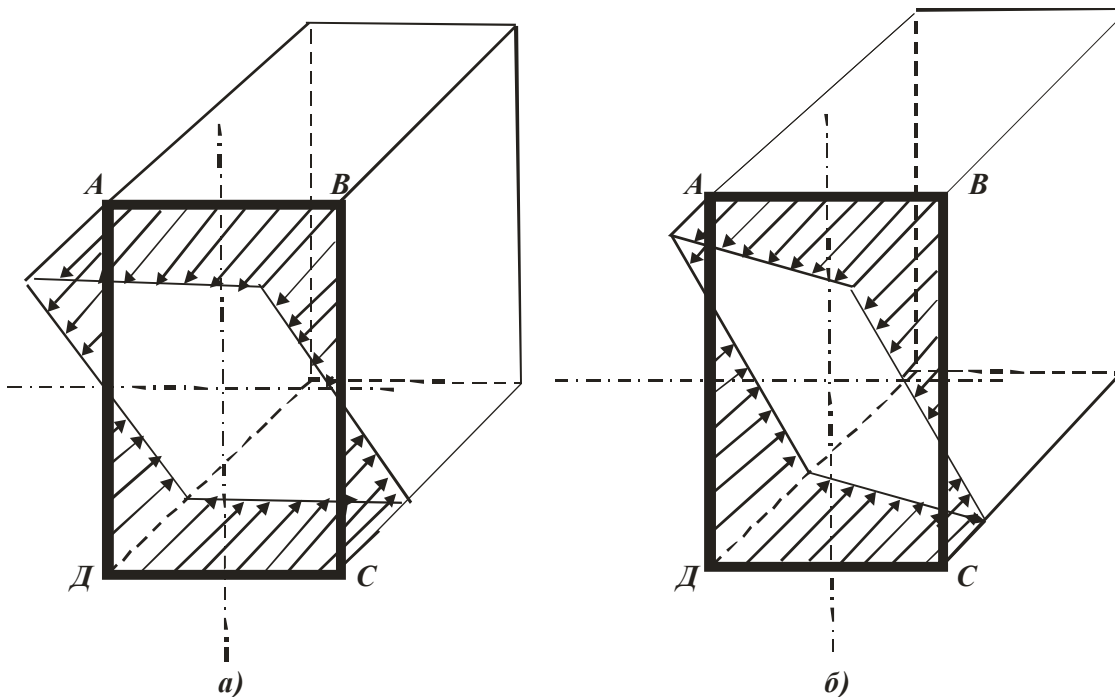


Рис. 10.3. Епюри розподілу напружень у перерізі:
а) – при прямому згині, б) – при косому згині

У зв'язку з тим, що добуток Fx не дорівнює нулю, прирівняємо до нуля тільки вираз у дужках

$$\left(\frac{\sin \varphi \cdot y_0}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z_0}{I_y} \right) = 0, \quad (10.2)$$

де $y_0; z_0$ – координати точок нейтральної осі.

Розглядаючи вираз, бачимо, що:

- нейтральна вісь дійсно є прямою лінією, між координатами $y_0; z_0$ спостерігається лінійна залежність;
- нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу, якщо $y_0=0$, то і $z_0=0$;
- нейтральна вісь розвертається на певний кут α відносно горизонтальної головної осі інерції (рис.10.4):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{I_y}{I_z}, \text{ або } \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{I_y}{I_z}. \quad (10.3)$$

З формули (10.3) випливає, що чим більшою є різниця між головними осьовими моментами інерції, тим більшою вона буде між кутом відхилення нейтральної осі та кутом відхилення площини, в якій діють навантаження, від головної площини інерції – тобто, можливі випадки, за яких $\alpha \gg \varphi$. З точки зору інженерної практики – це означає, що невеликі кутові зміщення площини дії сил можуть призвести до значних відхилень площини деформацій.

З даного співвідношення бачимо: якщо головні моменти інерції однакові (у випадку кола та правильних многокутників), косою згини не відбувається.

Тепер, коли з'ясовано положення нейтральної осі, стає очевидним положення точок B і D , в яких виникатимуть найбільші розтягуючі та стискаючі нормальні напруження (рис.10.4).

Якщо конструкція виготовлена з пластичного матеріалу, для якого

будуть однаковими рівні допустимих напружень на розтяг $[\sigma_p]$ та стиск $[\sigma_{ст}]$, то умову міцності можна записати

$$\sigma_{\max}(x, y, z) = -F \cdot l \cdot \left(\frac{\sin \varphi \cdot y_{\max}}{I_z} + \frac{\cos \varphi \cdot z_{\max}}{I_y} \right) \leq [\sigma]$$

або

$$\sigma_{\max}(x, y, z) = -F \cdot l \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{W_z} + \frac{\cos \varphi}{W_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (10.4)$$

З цієї умови, як і у випадку прямого згини, знаючи розміри поперечного перерізу, можна визначити допустимі сили, або, знаючи їх, визначити розміри поперечного перерізу. Слід зауважити, що для визначення цих розмірів слід наперед задати їх співвідношення $\frac{b}{h} = k$, тому що з однієї нерівності не можна однозначно визначити два невідомих.

10.1.2. Визначення переміщень при косому згині.

Переміщення при косому згині розраховують як геометричну суму переміщень, орієнтованих уздовж головних осей інерції:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}, \quad (10.5)$$

а для випадку, який розглядаємо, відповідно

$$f_y = \frac{F \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_z} \quad \text{та} \quad f_z = \frac{F \cdot \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_y},$$

обчислюючи результуючу, отримаємо

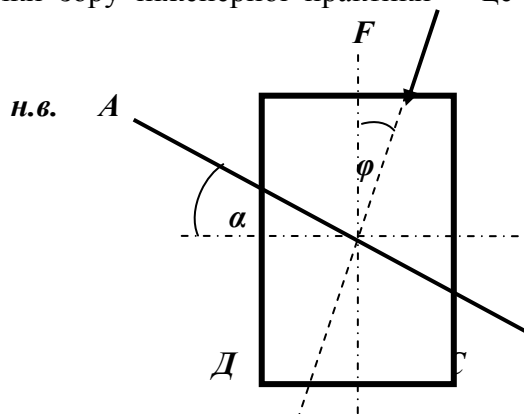


Рис.10.4. Положення нейтральної осі при косому згині

$$f = \sqrt{\left(\frac{F \cdot \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_z}\right)^2 + \left(\frac{F \cdot \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_y}\right)^2} = \frac{Fl^3}{3E} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{I_z} + \frac{\cos^2 \varphi}{I_y}}$$

10.2. Сумісна дія згину та розтягу (або стиску). Згин за умов дії поздовжніх та поперечних сил

В інженерній практиці досить часто зустрічаються випадки сумісної роботи стержня на згин та на розтяг (або стиск). Такі деформації можуть виникати не тільки під дією поперечних, але й поздовжніх сил. Подібний випадок зображений на рис. 10.5. На балку діє поперечне розподілене навантаження q та сила F , яка орієнтована вздовж осі балки.

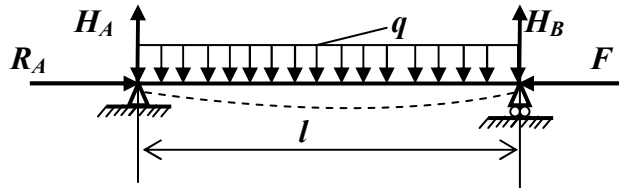


Рисунок 10.5. Одночасна дія поздовжніх та поперечних навантажень

Нехай прогини балки значно менші, ніж розміри поперечного перерізу, тоді можна вважати, що й після деформації сила F разом з реакцією R_A будуть утворювати осьовий стиск цієї балки. Використовуючи принцип суперпозиції, можна знайти напруження в будь-якій точці кожного поперечного перерізу балки як алгебраїчну силу напружень, що викликані силою та розподіленим навантаженням q .

Стискаючі напруження від сили F однакові в усіх точках кожного перерізу:

$$\sigma_F = -\frac{F}{A};$$

Нормальні напруження від згину у вертикальній площині в перерізі на координаті x можна записати як

$$\sigma_q = \frac{M(x) \cdot z}{I_y}.$$

Таким чином, повне напруження в точці з координатою z по висоті перерізу, рахуючи від нейтральної осі, для цього перерізу дорівнює

$$\sigma = \sigma_F + \sigma_q = -\frac{F}{A} + \frac{M(x) \cdot z}{I_y}.$$

На рис. 10.6. зображені епюри розподілу нормальних напружень у перерізі, що розглядається: а) – від сили F ; б) – від розподіленого навантаження q ; в) – сумарна епюра.

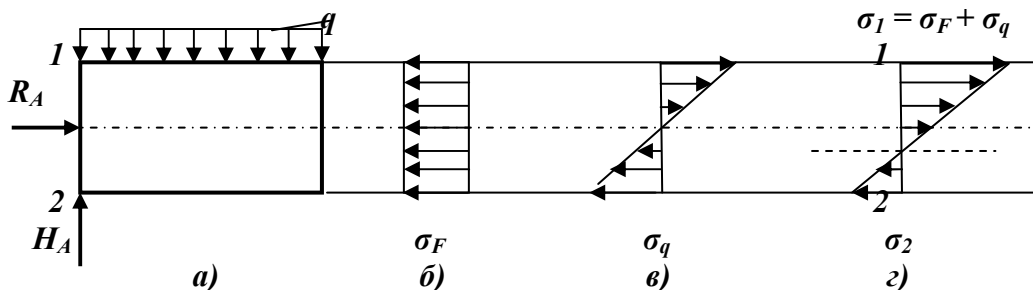


Рисунок 10.6. Розподіл нормальних напружень у перерізі при сумісній дії стиску та згину

Найбільше напруження в цьому випадку в цьому перерізі буде у верхніх волокнах, де обидва види деформації викликають стискаючі напруження. В нижніх волокнах можуть бути

як стискаючі, так і розтягуючі напруження – це залежить від величин напружень σ_F та σ_q . Для складання умови міцності знайдемо найбільше значення нормального напруження.

Напруження від сили F в усіх перерізах однакові та рівномірно розподілені, тому найбільш небезпечними будуть напруження від згину. Вони виникають у крайніх волокнах в перерізі з найбільшим напруженням від згину, тобто у крайніх волокнах в перерізі з найбільшим згинаючим моментом. Для них

$$\sigma_{q \max} = \mp \frac{M_{\max}(x)}{W_y}.$$

Таким чином, напруження в крайніх волокнах 1 та 2 (рис.10.6в) середнього перерізу балки виражаються формулою

$$\sigma_{1,2} = -\frac{F}{A} \pm \frac{M(x) \cdot z}{I_y}.$$

Тоді розрахункове напруження запишемо так:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_1| = \left| \frac{F}{A} \pm \frac{M(x) \cdot z}{I_y} \right|.$$

Якби сила F була розтягуючою, то знак першого доданка помінявся б, та небезпечними були б уже нижні волокна.

Позначаючи для загального випадку дії кількох сил, нормальну силу в перерізі N , можемо записати загальну формулу для перевірки міцності.

$$\sigma_{\max} = \mp \left| \frac{N}{A} \pm \frac{M_{\max}(x)}{W_y} \right| \leq [\sigma].$$

При складанні цієї формули, приймалося, що переріз симетричний відносно нейтральної осі i , крім того, матеріал балки однаково чинить опір розтягу і стиску.

Наведений метод розрахунку застосовують і при дії на балку сил, орієнтованих під кутом до осі балки. В цьому випадку таку силу можна розкласти на нормальну до осі, яка буде вигинати балку, та поздовжню – стискаючу чи розтягуючу.

Лекція 18. Продовження теми 10 (Складний опір)

Позацентри́вий стиск (розтяг). Напруження при позацентровому стиску (розтягу). Розрахунок на міцність. Ядро перерізу.

10.3. Позацентри́вий стиск (розтяг)

Спробуємо дати відповідь на запитання: як це так може бути, щоб до стержня приклали стискаюче навантаження, а він руйнувався від розтягуючих напружень? Або чому не такі вже й рідкісні випадки, коли стіни споруд та колони руйнуються внаслідок утворення тріщин в основі (причому, ці тріщини стають все ширшими, „розкриваються”, що вказує на наявність розтягуючих напружень)? Відповіді на ці запитання можна дати, розглянувши такий вид деформації, як позацентри́вий стиск (розтяг).

Позацентри́вий стиск (розтяг) – це випадок навантаження стержня, коли поздовжні сили діють по лінії, яка паралельна осі стержня та віддалена від неї на відстань e , яку називають ексцентриситетом (рис. 10.7 та 10.8).

З точки зору сукупності простих деформацій – це сумісна дія стиску (розтягу) та двох згинів відносно головних площин інерції (рис 10.8).

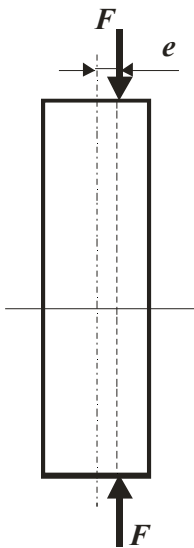


Рис.10.7. Позацентри́вий стиск

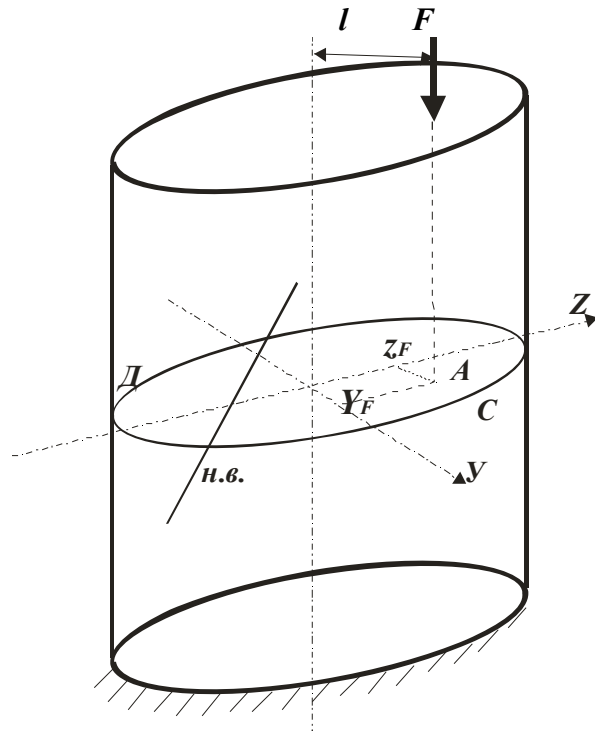


Рис.10.8. Позацентри́вий стиск.
Розгляд перерізу стержня

Зауваження: домовимось обирати напрямки головних осей Y та Z таким чином, щоб проекція точки прикладання сили опинилася в I квадранті.

10.3.1. Напруження при позацентровому стиску(розтягу). Розрахунок на міцність.

Розглянемо, вказаний на рис. 10.7 та 10.8 переріз. Сила F не тільки стискає стержень, але й викликає згин через створення силою моментів відносно осей Y та Z – відповідно $M_y = F \cdot z_F$ та $M_z = F \cdot y_F$.

Тоді напруження нормального характеру в довільній точці з координатами $Y;Z$ запишемо так:

$$\sigma(y, z) = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z}{I_y} - \frac{F \cdot y}{I_z}$$

або, перетворюючи, винести за дужки член $-\frac{F}{A}$ і отримаємо остаточний вираз для напруження

$$\sigma(y, z) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} \right) \quad (10.6)$$

Перед тим, як записати умову міцності, слід розглянути питання: в яких же точках перерізу виникають найбільші напруження. Для цього знайдемо положення нейтральної осі, в точках якої нормальні напруження дорівнюють нулю.

$$\sigma(y_0, z_0) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} \right) = 0,$$

де y_0 та z_0 – координати точок нейтральної осі;
 i_x та i_y – радіуси інерції відносно осей X та Y .

За умови, що множник $\frac{F}{A}$ не дорівнює нулю, можна записати рівняння нейтральної осі так:

$$\left(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2} \right) = 0 \quad (10.7)$$

Розглядаючи це рівняння, можна зробити висновки:

- нейтральна вісь є прямою лінією – адже y_0 та z_0 пов'язані між собою лінійною залежністю;
- ця пряма не проходить через центр ваги перерізу – адже виконуються умови:
- якщо $y_0 = 0$, то $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_F}$;
- якщо $z_0 = 0$, то $y_0 = -\frac{i_z^2}{y_F}$.

Це можна розглядати як координати двох точок, розташованих на осях Y та Z відповідно. Знак „-“ показує, що нейтральна вісь не проходить через квадрант, у якому знаходиться проекція точки прикладання сили F .

Тепер знайдемо небезпечні точки. Нейтральна вісь розділяє переріз на дві частини – на одній діятимуть стискаючі напруження, на другій – розтягуючі. В точках, які найвіддаленіші від нейтральної осі (рис. 10.8 – точки C та D) будуть діяти відповідно найбільші стискаючі та розтягуючі напруження. У випадку, коли важко на око визначити найвіддаленіші точки, проводять лінії, паралельні до нейтральної осі, й таким чином визначають ці точки.

Якщо матеріал по різному чинить опір розтягу та стиску (тобто $[\sigma_{розт.}] \neq [\sigma_{ст.}]$), слід записати дві умови міцності:

$$\sigma_{\max ст.} = \sigma_C = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_C}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_C}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{ст.}] \quad ; \quad (10.7)$$

$$\sigma_{\max розт.} = \sigma_D = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F \cdot z_D}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_D}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{розт.}] \quad . \quad (10.8)$$

Якщо визначаємо, наприклад силу F , то потрібно взяти за кінцевий результат, мінімальне значення F , отримане з двох даних розрахунків.

10.3.2. Ядро перерізу

Важливим є питання про визначення зони навколо центра ваги перерізу, прикладання в якій сили викличе по всьому перерізу напруження тільки одного знака – так званого *ядра перерізу*. Розглянемо деякі випадки.

1. Наприклад, круглий переріз радіуса r (рис. 10.9).

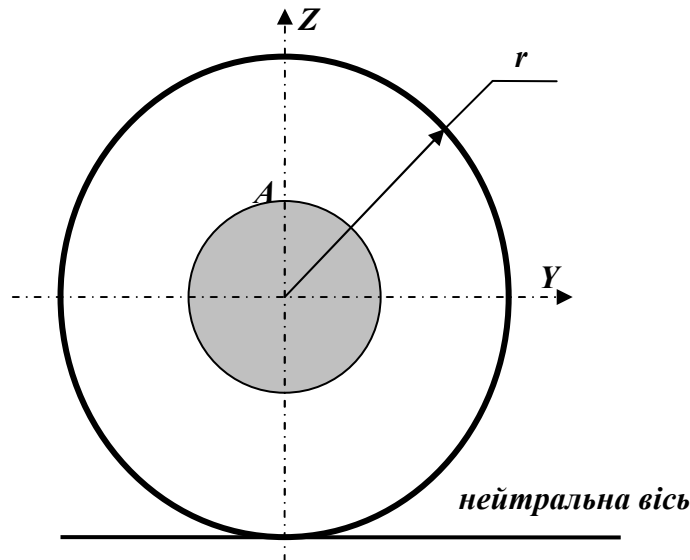


Рис.10.9. Ядро для круглого перерізу

Граничне положення точки прикладання сили F (т. А) зумовить положення нейтральної осі, як прямої, дотичної до кола з протилежного боку. Тобто;

$$y_0 = 0; \quad z_0 = -r;$$

$$y_F = 0; \quad z_F \text{ — потрібно визначити.}$$

Якщо $y_0 = 0$, і $z_0 = -\frac{i_y^2}{z_F}$, то $z_F = -\frac{i_y^2}{z_0}$.

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4}, \quad \text{тоді} \quad z_F = -\frac{\frac{r^2}{4}}{-r} = \frac{r}{4}.$$

Аналогічно можна провести розрахунки для інших напрямків і з'ясувати, що для круглого поперечного перерізу ядром буде також круг із радіусом $\frac{r}{4}$ та центром, що співпадає з центром перерізу.

2. Розглянемо прямокутний переріз (рис.10.10) за принципом, аналогічним попередньому.

а). Нейтральна вісь проходить по нижній межі перерізу

$$z_0 = -\frac{h}{2}, \quad z_F = -\frac{i_y^2}{z_0}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{b \cdot h} = \frac{h^2}{12}, \quad \text{тоді} \quad z_F = -\frac{h^2}{12(-\frac{h}{2})} = \frac{h}{6}.$$

Тобто, координати точки, яку ми шукаємо $A(0; \frac{h}{6})$.

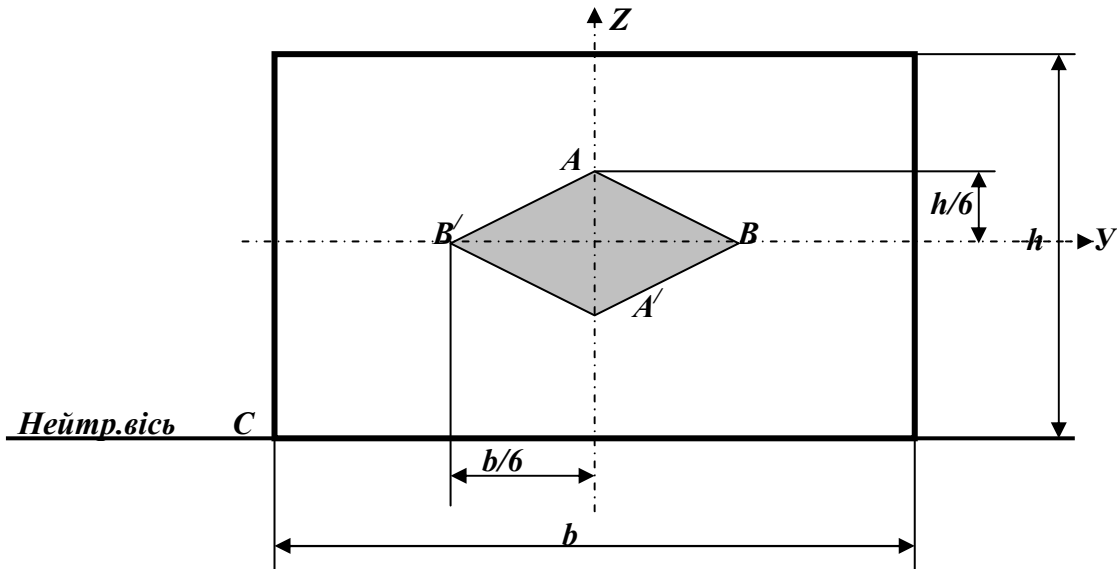


Рис. 10.10. Ядро для прямокутного перерізу

Аналогічно знайдемо координати т. A' , симетричної до т. A відносно осі Y , та точок B і B' .

б). Тепер розглянемо, як їх з'єднати. Наприклад, т. A і B . Для цього розглянемо, як нейтральна вісь буде повертатись навколо т. $C(-\frac{b}{2}; -\frac{h}{2})$. Використаємо рівняння

нейтральної осі

$$(1 + \frac{z_F \cdot z_0}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_0}{i_z^2}) = 0.$$

y_0 та z_0 – в даному випадку y_C ; z_C – є константами, тоді z_F та y_F пов'язані лінійною залежністю, тобто т. A та т. B , і, як наслідок – т. B та A' ; т. A' та т. B' і т. B' та A з'єднуються прямими лініями. Тобто, ядром перерізу в даному випадку є ромб з діагоналями $\frac{b}{3}$ та $\frac{h}{3}$.

Лекція 19. Продовження теми 10 (Складний опір)

Сумісна дія згину та кручення. Застосування теорій міцності для оцінювання напруженого стану при сумісній дії згину та кручення.

10.4. Сумісна дія згину та кручення

Інженерна практика показує, що вали, як правило, працюють не тільки на кручення, але й в умовах згину за рахунок власної ваги та радіальних зусиль, що виникають при передаванні валом потужностей. Питання оцінювання напружено-деформованого стану в цьому випадку ускладнюється такими факторами:

- радіальні зусилля можуть виникати в різних напрямках, що викликає появу згинальних моментів у різних площинах;
- виникнення в одному й тому ж перерізі, перпендикулярному до осі вала, не тільки дотичних напружень від кручення, але й нормальних напружень від згинів у різних площинах (одночасно зауважимо, що дотичними напруженнями, які виникають від згину, можна нехтувати, тому що вони є значно меншими ніж дотичні напруження від кручення).

Перше питання вирішують порівняно просто – всі моменти розбивають на складові відносно, наприклад, горизонтальної та вертикальної площин. Далі будують епюри згинальних моментів у цих площинах і за допомогою геометричного складання по перерізах (10.9) з'ясовують положення перерізу, в якому виникає максимальний згинаючий момент і значення цього момента.

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_{гор.}^2 + M_{верт.}^2}; \quad (10.9)$$

При цьому слід зауважити, що епюри сумарних моментів взагалі можуть мати нелінійний характер, але опуклість графіків буде спрямована у бік осі абсцис. Тобто, максимальних значень цей момент може досягати тільки на межах ділянок, що легко обчислити. Щодо орієнтації площин, в яких діятимуть сумарні згинальні моменти в різних перерізах, то це в більшості випадків не суттєво. Як правило, поперечним перерізом валів вибирають перерізи, де будь-яка центральна вісь є головною (круг, кільце, правильний многокутник).

10.5. Застосування теорій міцності для оцінювання напруженого стану при сумісній дії згину та кручення

Що стосується другого зауваження, то, по-перше, є зрозумілим факт, що небезпечною зоною в перерізі буде зона перетину поверхневого шару вала з площиною, в якій виникає згинаючий момент в цьому перерізі, тому що в ній виникають як найбільші нормальні напруження від згину, так і найбільші дотичні від кручення. По-друге, питання про знаходження найнебезпечнішого перерізу та обчислення моменту в ньому, вирішується за допомогою теорій міцності (зазвичай III-ої теорії, теорії Мора або IV-ої – енергетичної теорії міцності).

У зв'язку з тим, що розглядається питання сумісної дії нормальних і дотичних напружень, можна зробити висновок, що цей процес відобразиться тими ж залежностями, що й при аналізі складного напруженого стану за повної перевірки на міцність при згині.

Наприклад, розглянемо формулу (8.36) для критерію Мора

$$\sigma_{\sigma_M} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

$$\text{де } m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

$$\text{Тоді } \sigma_{\text{чМ}} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{\sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2}}{W_o} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\frac{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2}{W_o^2} + \frac{T^2}{W_p^2}} \leq [\sigma],$$

враховуючи, що $W_p = 2W_o$,

$$\sigma_{\text{чМ}} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{\sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2}}{W_o} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\frac{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2 + T^2}{W_o^2}} \leq [\sigma].$$

Розглядаючи чисельник, можна записати вираз для розрахункового моменту при використанні теорії Мора:

$$M_{\text{чМ}} = \frac{1-m}{2} \cdot \sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2 + T^2}. \quad (10.10)$$

Тоді для III-ої теорії міцності розрахунковий момент запишемо так:

$$M_{\text{чIII}} = \sqrt{M_{\text{верт.}}^2 + M_{\text{гор.}}^2 + T^2}, \quad (10.11)$$

або

$$M_{\text{чIII}} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + T^2}. \quad (10.12)$$

Розглядаючи вираз для розрахункових напружень при застосуванні IV-ої (енергетичної) теорії міцності (8.35)

$$\sigma_{\text{чIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

та застосовуючи аналогічні перетворення, отримаємо вираз для розрахункового моменту

$$M_{\text{чIII}} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75 \cdot T^2}. \quad (10.13)$$

Дослідження показують, що тепер умови міцності для різних теорій міцності, які ми розглядали раніше (8.32) ÷ (8.36), можна записати так:

$$\sigma_{\text{max.r}} = \frac{M_{\text{max.r}}}{W_o} \leq [\sigma]. \quad (10.14)$$

10.6. Приклад сумісної дії згину та кручення

Як приклад, розглянемо задачу про визначення напруженого стану, що виникає у плоскій рамці, навантаженій силами, спрямованими перпендикулярно до площини самої

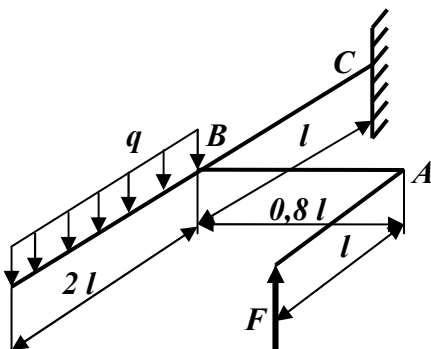


Рисунок 10.11. Вигляд навантаженої рамки

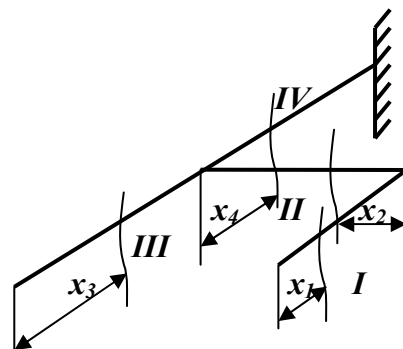


Рисунок 10.12. Розподіл ділянок на рамці

рамки (рис. 10.11). В точках *A* та *B* рамка зігнута під прямим кутом. Сила $F = 1,5ql$. Потрібно записати функції згинаючих та крутних моментів, побудувати окремо їх епюри в аксонометрії у загальному вигляді в долях ql^2 , знайти небезпечний переріз та визначити еквівалентний момент у ньому, використовуючи IV теорію міцності.

Розглянемо чотири ділянки рамки (рис.10.12) та запишемо функції згинаючих $M(x)$ та крутних $T(x)$ моментів. Для більш зрозумілого виконання розрахунків та запису згинаючих та крутних моментів розглянемо навантаження кожної ділянки окремо, уявляючи їх як окремі балки-вали (тобто, розглядаючи можливу присутність і згину, і кручення) (рис.10.13а,б,в).

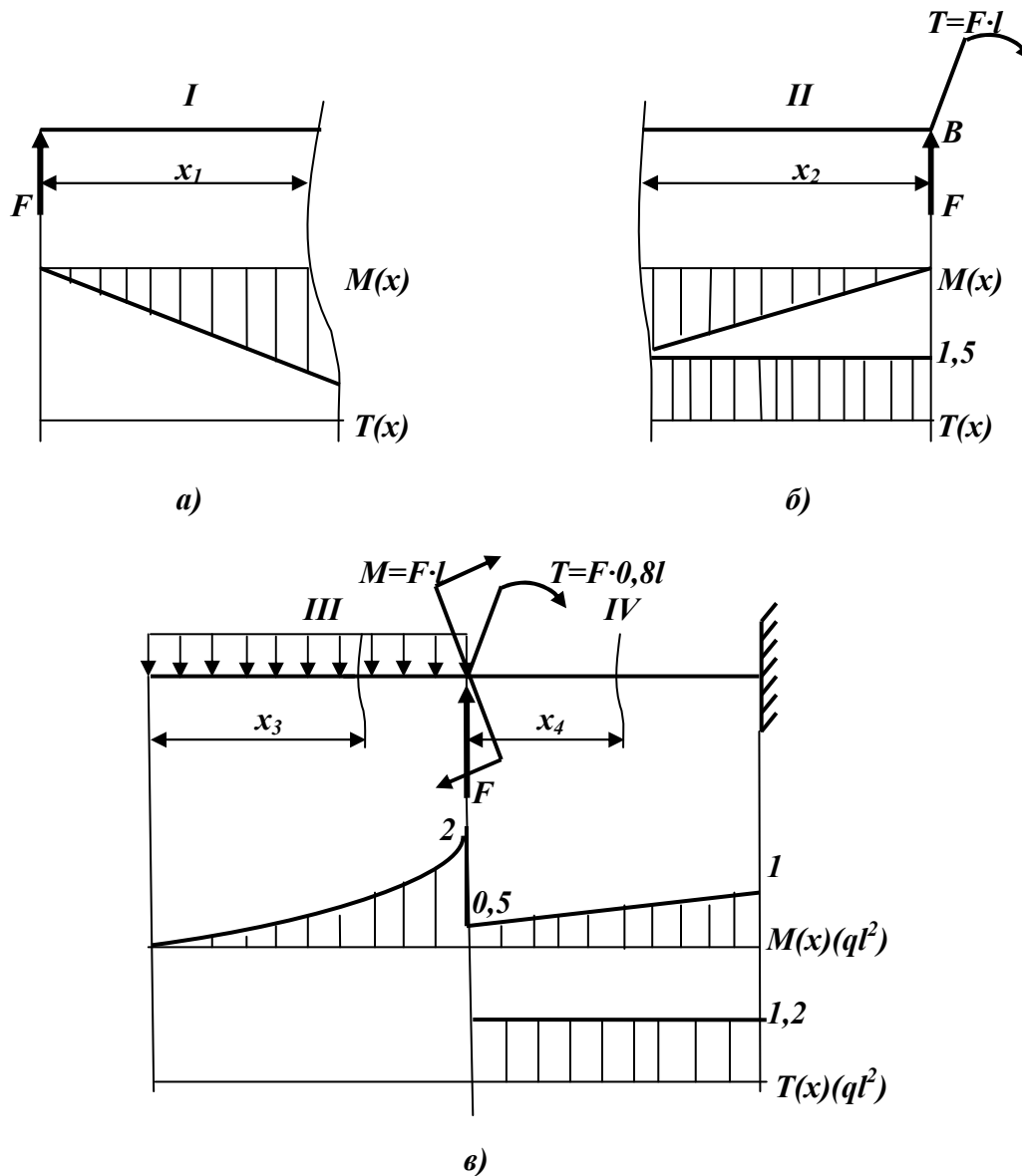


Рисунок 10.13. Епюри згинаючих та крутних моментів на окремих ділянках балки: а) – I ділянка; б) – II ділянка; в) – III та IV ділянки

$$\begin{aligned}
 M_I(x_1) &= F \cdot x_1; & T_I(x_1) &= 0; \\
 M_{II}(x_2) &= F \cdot x_2; & T_{II}(x_2) &= 1,5ql^2; \\
 M_{III}(x_3) &= q \cdot \frac{x_3^2}{2}; & T_{III}(x_3) &= 0; \\
 M_{IV}(x_4) &= q \cdot 2l \cdot (x_4 + l) - 1,5ql^2 - F \cdot x_4; & T_{IV}(x_4) &= F \cdot 0,8l.
 \end{aligned}$$

Тепер побудуємо епюри згинаючих $M(x)$ та крутних $T(x)$ моментів в аксонометрії в долях ql^2 (рис.10.14 та 10.15).

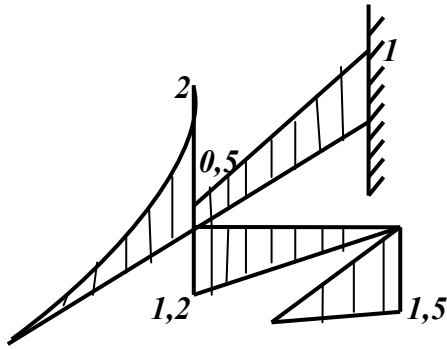


Рисунок 10.14. Епюр згинаючих моментів $M(x)$ в долях ql^2

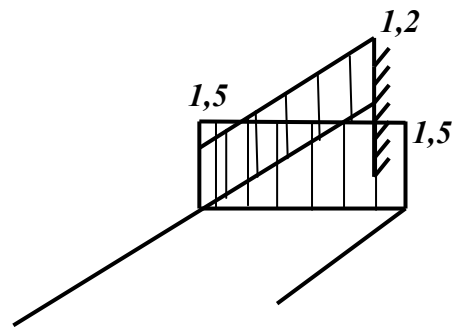


Рисунок 10.15. Епюр крутних моментів $T(x)$ в долях ql^2

Якщо використовувати для оцінювання напруженого стану IV теорію міцності (10.13), то можна зробити висновок, що треба перевірити чотири перерізи: 1- т.**В** на кінці II ділянки; т.**В** на кінці III ділянки та т.**С** в жорсткому закріпленні. Відповідно

$$M_{rIV BII} = \sqrt{(1,2ql^2)^2 + 0,75(1,5ql^2)^2} \approx 1,77 ql^2;$$

$$M_{rIV BIII} = \sqrt{(2ql^2)^2 + 0,75(0)^2} \approx 2,0 ql^2;$$

$$M_{rIV CIV} = \sqrt{(1,0ql^2)^2 + 0,75(1,2ql^2)^2} \approx 1,44 ql^2.$$

Тоді

$$M_{rIVmax} = M_{rIV BIII} = \sqrt{(2ql^2)^2 + 0,75(0)^2} \approx 2,0 ql^2.$$

Розрахунки показують, що в даному випадку небезпечним буде переріз на кінці III ділянки в т.**В**, хоча на цій ділянці крутний момент відсутній.

Лекція 20. Тема 11. Загальні теореми опору матеріалів

Узагальнена сила та узагальнене переміщення. Лінійна пружна система. Теорема Клапейрона. Принцип можливих переміщень. Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті). Теореми Лагранжа та Кастільяно. Інтеграл переміщень (інтеграл Мора). Правило Верещагіна.

Введемо поняття узагальненої сили та узагальненого переміщення.

Узагальнена сила (далі просто – сила) – це сукупність будь-яких силових факторів. Це – і сила, і момент сили, і розподілене навантаження.

Узагальнене переміщення (далі просто – переміщення) – це будь-яке переміщення (формально – це множник при узагальненій силі у виразі роботи). Для моменту переміщенням є кут повороту, бо робота моменту є $M\varphi$. Рівномірно розподілене навантаження, прикладене до балки, прогин якої є $v(z)$, виконує роботу

$$A = \int qv(z)dz = q \int v dz = q\omega.$$

Тут узагальнене переміщення – це ω , тобто площа, заключена між первісною віссю балки та зігнутим її положенням.

11.1. Лінійна пружна система

Лінійні пружні системи – це системи, елементи яких працюють у межах закону Гука, з'єднання реалізовані без тертя, а деформації настільки малі, що це дозволяє скласти рівняння статички для недеформованого стану.

За цих умов переміщення і сили зв'язані лінійною залежністю.

Для лінійних систем можна записати

$$P_i = \sum c_{ij}u_j \quad (11.1)$$

або

$$u_i = \sum \delta_{ij}P_j, \quad (11.2)$$

де величини δ_{ij} – коефіцієнти впливу та c_{ij} – коефіцієнти жорсткості пов'язані співвідношенням

$$c_{ij} = \frac{|\delta_{ij}|}{|\delta|},$$

де δ – визначник, загальний елемент якого є δ_{ij} , а $|\delta_{ij}|$ – алгебраїчне доповнення цього елемента.

Визначники $|\delta|$ та $|c|$ повинні бути відмінними від нуля.

При цьому неважко показати, що $c_{ij} = c_{ji}$, а тому й $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Тобто, матриці коефіцієнтів δ_{ij} та c_{ij} є симетричними.

У лінійній системі напруження можна виразити лінійно через зовнішні сили. Тому потенціальна енергія W_p в загальному плані являє собою квадратичну форму від сил P_1, P_2, \dots, P_u . В міру цього W_u є квадратичною формулою від переміщень.

Узагальненим цих понять є вираз

$$W = \frac{1}{2} \sum P_i u_i, \quad (11.3)$$

який носить назву *теорема Клапейрона*.

Клапейрон Бенуа Поль Еміль (1799 – 1864) – французький інженер, фізик та механік. У 1820-1830рр. – проф. Петербурзького ін-ту корпусу інженерів шляхів сполучення. Роботи в галузі механіки присвячені теорії пружності та будівельній механіці. Ввів у термодинаміку графічний метод. Вказав на існування для газів універсальної функції температури. Спільно з Г. Ламе дослідив стійкість арок і аналітичним шляхом знайшов положення січення зламу для кругової арки. Дав формулювання рівнянь 3-х моментів. Розробив новий метод обчислень напружень у нерозрізних балках.

Враховуючи (11.1) та (11.2), можна записати

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij} u_i u_j ; \quad (11.4)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \delta_{ij} P_i P_j . \quad (11.5)$$

Неважно пригадати, що розгляд виразу потенціальної енергії для складного напруженого деформованого стану (5.29) підтверджує ці висновки.

11.2. Принцип можливих переміщень

Якщо тіло під дією системи зовнішніх сил A і прикладених у точках з радіусами – векторами r_i знаходяться у рівновазі, то до цього тіла можна застосувати принцип можливих переміщень. Треба мати на увазі, що на можливих переміщеннях будуть створювати роботу не тільки зовнішні, але й внутрішні сили.

Запишемо умови рівності нулю роботи сил на можливих, тобто на таких, що не заперечують зв'язкам, переміщеннях деформованого тіла:

$$\sum P_i \delta r_i = \delta W . \quad (11.6)$$

У правій частині стоїть зміна пружної енергії, що відповідає даній системі можливих переміщень.

Величину δW , роботу внутрішніх сил в об'ємі V на можливих переміщеннях можна уявити як

$$\delta W = \int_V \delta a dV , \quad (11.7)$$

де δa – питома елементарна робота внутрішніх сил.

11.3. Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті)

Робота сил першої системи на переміщеннях від дії сил другої системи дорівнює роботі сил другої системи на переміщеннях від першої системи сил.

Нехай перша система сил $P'_1; P'_2 \dots P'_{12}$, а друга система $P''_{k+1}; P''_{k+2} \dots P''_n$.

Переміщення точки прикладання сили номер S першої системи від дії сил другої системи

$$u'_s = \sum_{i=k+1}^n P'_i \delta_{si} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Аналогічно

$$u''_i = \sum_{s=1}^k P''_s \delta_{is} \quad (i = k+1, \dots, n).$$

Робота сил першої системи на переміщеннях точок їх прикладання від дії сил другої системи є

$$A' = \sum_{s=1}^k P'_s u''_s = \sum_{s=1}^k \sum_{i=k+1}^n P'_s P''_i \delta_{si}.$$

Аналогічно

$$A'' = \sum_{i=k+1}^n P''_i u'_i = \sum_{i=k+1}^n \sum_{s=1}^k P''_i P'_s \delta_{si}.$$

Змінюючи порядок сумування та використовуючи симетрію коефіцієнтів δ_{is} , отримаємо, що $A' = A''$, що й доводить теорему.

11.4. Теорема Лагранжа та Кастільяно

Нехай на тіло діють узагальнені сили $P_1; P_2; \dots; P_n$ і при цьому узагальнені переміщення – $u_1; u_2; \dots; u_n$.

Тоді можна вважати

$$W = W_u(u_1; u_2; \dots; u_n) = W_p(P_1; P_2; \dots; P_n).$$

Додамо переміщенням довільних змін $\delta u_1; \delta u_2; \dots; \delta u_n$. При цьому елементарна робота зовнішніх сил дорівнює

$$\sum P_i \delta u_i.$$

Якщо уявити W через узагальнені переміщення, для варіації W можна записати

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i.$$

Використовуючи (11.6)

$$\sum \left(P_i - \frac{\partial W}{\partial u_i} \right) \delta u_i = 0 \quad . \quad (11.8)$$

Звідки

$$\boxed{P_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}}, \quad (11.9)$$

тобто похідна енергії деформації по переміщенню дорівнює силі. Це й є теорема Лагранжа. Якщо ж записати W як функцію сил,

$$\begin{aligned} W &= W(P_1, \dots, P_m), \\ \text{то} \quad \Phi &= \sum P_i u_i - W \quad . \quad (11.10) \end{aligned}$$

Функція Φ носить назву доповнюючої роботи. Записуючи варіації Φ , отримаємо

$$\delta \Phi = \sum P_i \delta u_i + \sum \delta P_i u_i - \sum \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i.$$

Але за теоремою Лагранжа

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = P_i.$$

Тому

$$\delta\Phi = \sum u_i \delta P_i. \quad (11.11)$$

Нехай функція Φ виражена тільки через зовнішні сили

$$\Phi = \Phi(P_1; P_2; \dots; P_n),$$

тоді

$$\delta\Phi = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \delta P_i.$$

Використовуючи (11.11) та помітивши, що варіації довільні, отримаємо

$$\boxed{u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}}. \quad (11.12)$$

Ця формула відображає *теорему Кастільяно – похідна енергії деформації по силі дорівнює переміщенню.*

11.5. Інтеграл переміщень (інтеграл Мора)

Виходячи з формули Кастільяно, можна вивести формулу для визначення переміщень у стержневих системах, що працюють на розтяг – стиск, кручення та згин.

Запишемо формулу Кастільяно у варіаційній формі

$$\sum u_i \delta P_i = \delta W_p. \quad (11.13)$$

Визначатимемо переміщення у точці з номером S .

Нехай всі сили залишаються незмінними, а варіюється тільки сила P_s . При цьому вона отримує приріст δP_s . Тоді зміну поздовжньої сили позначимо через $N_{zs} \delta P_s$, зміну крутного моменту через $T_{zs} \delta P_s$, а згинаючого моменту $M_{xs} \delta P_s$. При цьому нехай ці N_{zs} ; T_{zs} та M_{xs} – це відповідно поздовжня сила, крутний та згинальний моменти в т. S .

У лівій частині рівняння (11.13) отримаємо:

$$u_s \delta P_s.$$

Первісне значення $W_p \in$

$$W_p = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l}{2EA} + \int_{l_i} \frac{T_z^2 dz}{2GI_p} + \int_{l_i} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}.$$

При цьому її приріст

$$W_p + \delta W_p = \sum \frac{(N_z N_{zs} \delta P_s)^2}{2EA} + \dots$$

Нехтуючи квадратом малої величини δP_s та скорочуючи її в (11.13), отримаємо

$$\boxed{u_s = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_{zs} l}{EA} + \int_l \frac{T_z T_{zs} dz}{GI_p} + \int_l \frac{M_x M_{xs} dz}{EI_x}}. \quad (11.14)$$

Це так званий інтеграл Мора, або інтеграл переміщень.

Слід зауважити, що в більшості випадків домінуючим у цій формі є третій член, а першими двома можна нехтувати. І у практичних розрахунках найчастіше використовують наближену формулу

$$\delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_{(x)} M_{(z)s}}{EI} dz \quad (11.15)$$

11.6. Графоаналітичний спосіб розрахунку інтеграла переміщень (спосіб Верещагіна)

Обчислення інтеграла Мора можна суттєво спростити у випадку, коли хоча б одна з епюр (для дійсного навантаження або одиничного) складається з прямих ліній і балка має постійну жорсткість ($EI = const$) по довжині.

Розглянемо фрагмент епюр для якоїсь довільної балки (рис. 11.1)

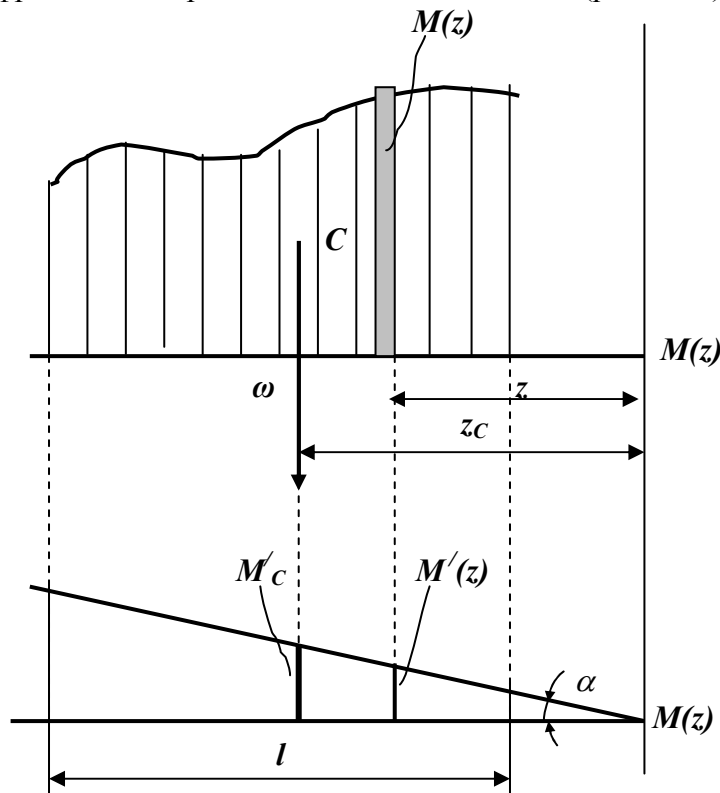


Рис. 11.1. Правило Верещагіна

Тоді інтеграл $\int_{l_i} \frac{M_{(z)} M_{(z)s}}{EI} dz$ можна розглядати таким чином. Вираз $M_{(z)} dz$ – являє собою диференціал площі епюри $M_{(z)}$ – $d\omega$. Тобто,

$$M_{(z)} dz = d\omega.$$

В той же час, в силу прямолінійності епюри від одиничних силових факторів $M'_{(z)}$

$$M_{(z)s} = z \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Тоді

$$\int_{l_i} \frac{M_{(z)} M_{(z)s}}{EI} dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_{l_i} z d\omega.$$

Останній інтеграл виражає статичний момент площі ω відповідно осі, перпендикулярної до осі z , тому можна записати, що

$$\int_{l_i} z d\omega = \omega z_c$$

або

$$\int \frac{M_{(z)} M_{(z)_s}}{EI} dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot z_c \cdot \omega}{EI},$$

де z_c – координата центра ваги площі епюри ω . Після нескладних перетворень отримаємо $\frac{\omega M'_c}{EI}$, де M'_c – значення моменту на епюрі моментів від одиничних навантажень на тій координаті, де знаходиться центр ваги площі епюри ω . Тоді інтеграл Мора можна записати у такому вигляді:

$$\delta = \sum_i \frac{\omega_i M'_{c_i}}{EI}. \quad (11.16)$$

Цей спосіб обчислення інтеграла Мора носить назву *способу (або правила) Верещагіна*, хоча заради справедливості треба сказати, що цей спрощений метод обчислення інтеграла Мора пропонували також Мюллер-Бреслау і Пірсон.

Лекція 21. Продовження теми 11 (Загальні теореми Опору матеріалів)

Аналіз застосування спрощеного інтеграла Мора та способу Верещагіна.
Приклади розрахунків переміщень та деформацій.

11.7. Аналіз застосування спрощеного інтеграла Мора

Розглянемо порядок використання формули (11.15). Для правильного запису та розв'язку суми інтегралів

$$\delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_i(x)M'_i(x)}{EI} dx$$

за умови, що жорсткість балки EI – const, потрібно:

1. Визначити число «і»:
 - якщо переміщення визначають на границі ділянок балки, то «і» дорівнює кількості ділянок балки;
 - якщо переміщення визначають на ділянці балки, то цю ділянку поділяють на дві, а число «і» відповідно збільшують на 1.
2. Записати функції згинаючих моментів $M_i(x)$ на кожній ділянці балки.
3. Побудувати допоміжну балку (така ж сама, як і основна, тільки не навантажена) та завантажити її в перерізі, де знаходиться прогин $y(x)$, одиничною силою $F' = 1$ (якщо знаходиться кут повороту перерізу, навантаження проводять одиничним моментом $M' = 1$).
4. На тих же ж ділянках та **в тих же ж системах координат, що й для основної балки**, записати згинаючі моменти $M'_i(x)$ від одиничного навантаження на допоміжній балці.
5. Підставити вищевказані вирази у формулу (11.15) та провести інтегрування і необхідні обчислення.

Зауваження 1: Якщо відповідь буде отримана із від'ємним знаком, це означатиме, що насправді переміщення спрямоване у бік, протилежний тому, в якому діє прикладене до допоміжної балки одиничне навантаження.

11.8. Приклад використання спрощеного інтеграла Мора для обчислення переміщень при згині

Визначимо прогин та кут повороту на вільному кінці (т.А) консольної балки довжиною l , жорстко закріпленої одним кінцем, та навантаженої зосередженою силою F , як зображено на рис.11.2а. При цьому прийемо жорсткість балки EI постійною в усіх перерізах.

Спочатку визначимо прогин на вільному кінці консолі в т.А.

В даному випадку виконання задачі згідно з вищенаведеними пунктами дасть таке:

1. В міру того, що прогин визначаємо на границі ділянки, а ділянок на балці тільки одна, маємо $i = 1$.
2. Функцію моментів від реальних навантажень на реальній балці запишемо так:
$$M(x) = -F \cdot x.$$
3. Будуємо допоміжну балку та навантажуємо її в т.А одиничною силою $F' = 1$ (рис.11.2б).
4. В тій же системі координат, що й для реальної балки, запишемо функції моментів від одиничного навантаження

$$M'(x) = -1 \cdot x.$$

5. Підставляємо отримані вирази в формулу спрощеного інтеграла Мора (11.15), враховуючи, що жорсткість балки є незмінною.

$$y_A = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Fx)(-1x) dx = \frac{Fl^3}{3EI}$$

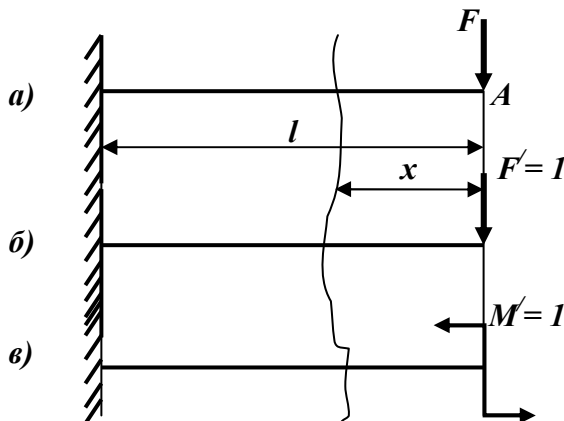


Рисунок 11.2. *Визначення кута повороту та прогину на вільному кінці консольної балки: а) – основна балка; б) – допоміжна балка, навантажена одиничною силою $F' = 1$ в перерізі, де визначаємо прогин; в) – допоміжна балка, навантажена одиничним моментом $M' = 1$, в перерізі, де визначаємо кут повороту*

Аналогічно проведемо прийоми та обчислення для визначення кута повороту в т.А. Тільки в цьому випадку на допоміжній балці в т.А. замість одиничної сили буде прикладений одиничний момент $M' = 1$ (рис. 11.2в). Відповідно

$$M(x) = -F \cdot x;$$

$$M'(x) = +1.$$

Тоді

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l (-Fx) \cdot 1 dx = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

Знак "-" показує, що насправді кут повороту перерізу орієнтований у бік протилежний напрямку одиничного моменту.

11.9. Порядок використання формули Верещагіна для обчислення переміщень при згині

Розглянемо порядок використання формули (11.16). Для правильного запису та розв'язку формули Верещагіна

$$\delta = \sum_i \frac{\omega_i M'_i c_i}{EI},$$

за умови, що жорсткість балки $EI = \text{const}$, потрібно:

1. Побудувати епюри згинаючих моментів $M_i(x)$ для реальної балки.
2. Побудувати допоміжну балку (така ж сама, як і основна, тільки не навантажена) та завантажити її в перерізі, де знаходиться прогин $y(x)$, одиничною силою $F' = 1$ (якщо знаходиться кут повороту перерізу, навантаження проводять одиничним моментом $M' = 1$).
3. Побудувати епюри згинаючих моментів $M'_i(x)$ від одиничного навантаження для допоміжної балки.
4. На епюрі моментів $M_i(x)$ для реальної балки обчислити площі епюр ω_i на кожній ділянці (розбивку на ділянки проводять за тією ж методикою, що й при використанні інтеграла Мора – тобто, якщо переміщення знаходиться в перерізі, який знаходиться на

проміжку між границями ділянок, то цей переріз робить з одної ділянки - дві) та визначити місцезнаходження їх центрів ваги.

Зауваження 2: Якщо епюри на ділянці будуть представлені складною фігурою, то її можна розбити на простіші фігури, площі яких і центри ваги, знаходяться нескладними методами. При цьому буде збільшуватися кількість членів у сумі, тобто зростатиме число "i". Відповідно, можна відзначити, що число "i" у формулі Верещагіна не може бути меншим від аналогічного числа при використанні формули Мора.

5. Спроекувати центри ваги площ ω_i на епюри моментів від одиничних навантажень $M'_i(x)$ і знайти на цих проєкціях значення моментів M'_{Ci} .
6. Підставити вищевказані вирази у формулу (11.16) та провести необхідні обчислення.

Зауваження 3: Ці дії називають «перемноженням епюр». Зрозуміло, якщо перемножаються епюри, що лежать по один бік від осі – буде отримано знак "+". Якщо ж епюри лежать по різні боки, при перемноженні буде отримано знак "-" – тобто, відповідний член увійде в суму з від'ємним знаком.

Зауваження 4: В міру того, що спосіб Верещагіна є тільки одним із способів розв'язку спрощеного інтеграла Мора, на тих ділянках балки, де епюри $M(x)$ являють собою прості фігури, можна використовувати спосіб Верещагіна, а на інших ділянках записувати інтеграл Мора. Далі всі вирази підставляти у загальну алгебраїчну суму.

11.10. Приклад використання формули Верещагіна для обчислення переміщень при згині

11.10.1. Тестова задача.

Для перевірки способу спочатку розглянемо знаходження переміщень для тієї ж навантаженої балки, що й при розгляді застосування спрощеного інтеграла Мора (рис.11.2а). Повторимо цей малюнок (рис.11.3а), побудуємо епюри $M_i(x)$ (рис.11.3б). Виберемо допоміжні балки (рис.11.3в,д), відповідно їх навантажимо та побудуємо епюри $M'_i(x)$ та $M''_i(x)$ (рис.11.3г,е).

Доцільність застосування способу Верещагіна виникає тоді, коли епюри моментів від зовнішніх сил, що діють на реальну балку, являють собою прості фігури, площу яких та координати центру ваги легко обчислити. Загальновідомо, що площу трикутника (форма епюр в даному випадку) обчислюють як напівдобуток основи на висоту. А що до місцезнаходження центра ваги, то він у трикутнику знаходиться на 1/3 висоти, рахуючи від основи (або на 2/3 висоти, рахуючи від вершини).

В даному випадку, виконуючи правила використання формули Верещагіна, для визначення прогину y_A отримуємо

$$\omega = \frac{1}{2} Fl \cdot l = \frac{Fl^2}{2};$$

$$M'_C = 1 \cdot \frac{2}{3} l.$$

Підставляючи у формулу 11.16 та враховуючи, що перемножуємо епюри однакових знаків, матимемо

$$y_A = \frac{1}{EI} \frac{Fl^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Тепер визначимо кут повороту θ_A . Площа ω залишається тією ж самою, при цьому навіть відпадає необхідність шукати положення центра ваги з тих міркувань, що епюри одиничних моментів $M''_i(x)$ є константою.

Враховуючи, що епюри $M_i(x)$ та $M''_i(x)$ знаходяться по різні боки від осі та мають різні знаки, отримаємо:

$$\theta_A = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

Знак "–" при цьому показує, що реальний кут повороту перерізу в т. A орієнтований за напрямом, протилежним від дії одиничного моменту.

Результати повністю співпали з тими, які ми мали при визначенні переміщень за Мором. Тестова задача довела дієздатність способу.

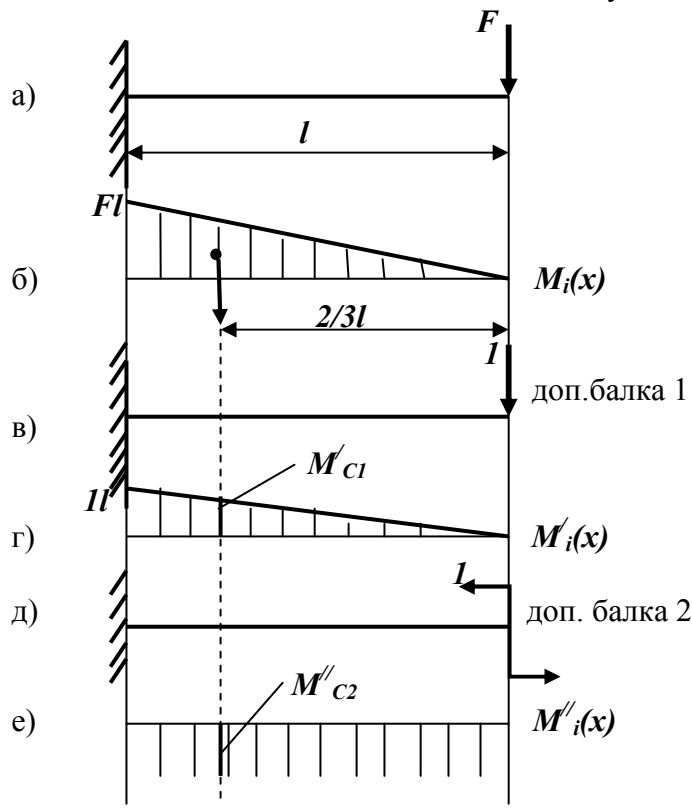


Рисунок 11.3. Визначення переміщень за допомогою способу Верещазіна

а) – вигляд реальної навантаженої балки; б) – епюри моментів від зовнішніх сил $M_i(x)$; в) – допоміжна балка для визначення прогинів; г) – епюри моментів від одиничної сили; д) – допоміжна балка для визначення кута повороту; е) – епюри моментів від одиничного моменту

11.10.2. Знаходження переміщень у складнішому випадку.

Розглянемо складніший варіант навантаження балки, зображеної на рис.11.4а.

Прийmemo для визначеності $F = 1,5 qa$. Знайдемо в загальному вигляді прогин у т. C – y_C в долях $\frac{qa^4}{EI}$ та кут повороту в т. B – θ_B в долях $\frac{qa^3}{EI}$. Приймемо, що жорсткість балки є незмінною.

Спочатку, як завжди, треба знайти всі зовнішні сили, що діють на балку, тобто потрібно знайти реакції R_A та R_B (вагою балки в цій задачі нехтуємо).

Для знаходження опорних реакцій запишемо рівняння рівноваги

$$\sum M_A = q \cdot 2a \cdot a + F \cdot 3a - R_B \cdot 2a = 0;$$

$$\sum M_B = q \cdot 2a \cdot a - R_A \cdot 2a - F \cdot a = 0.$$

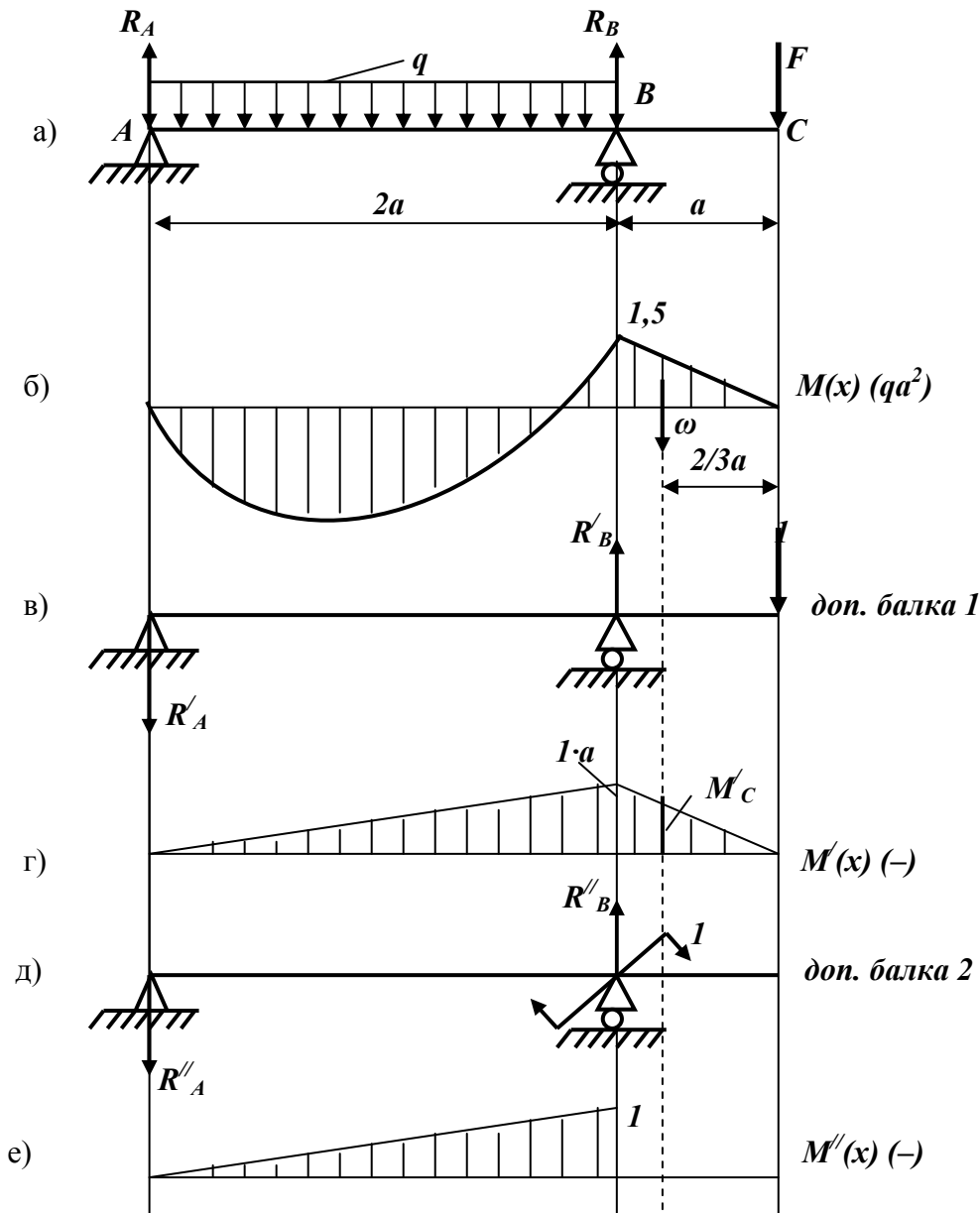


Рисунок 11.4. Визначення переміщень за допомогою спрощеного інтеграла Мора та способу Верещагіна:

- а) – вигляд реальної навантаженої балки; б) – епюри моментів від зовнішніх сил $M_i(x)$; в) – допоміжна балка для визначення прогинів; г) – епюри моментів від одиничної сили; д) – допоміжна балка для визначення кута повороту; е) – епюри моментів від одиничного моменту

Розв'язуючи їх, знаходимо:

$$R_A = \frac{2qa^2 - 1,5qa^2}{2a} = 0,25qa; \quad R_B = \frac{2qa^2 + 1,5qa^2}{2a} = 1,75qa.$$

Проведемо перевірку:

$$\sum y = R_A - q \cdot 2a + R_B - F = 0,25qa - 2qa + 1,75qa - 1,5qa \equiv 0.$$

Обчислення проведено правильно.

Побудуємо епюри згинаючих моментів для заданої балки (рис.11.4б).

Розв'яжемо першу частину задачі – знайдемо прогин у т.С.

Прогин знаходиться на границі ділянки, тобто кількість ділянок (а на балці їх дві) не змінюється. Очевидно, що на правій ділянці епюри $M_i(x)$ мають дуже простий вигляд. Тому на цій ділянці скористаємося формулою Верещагіна. А на лівій ділянці епюри мають складний вигляд та, крім того, змінюють знак. Тому на лівій ділянці краще скористатись спрощеним інтегралом Мора.

Побудуємо першу допоміжну (для обчислення прогину в т.С) балку (рис.11.4в), навантажимо її одиничною силою в т.С. Знайдемо значення реакцій R'_A та R'_B для першої допоміжної балки. Нескладні обчислення покажуть, що

$$R'_A = \frac{1}{2}; \quad R'_B = \frac{3}{2}.$$

Побудуємо епюри моментів $M'(x)$ (рис.11.4г).

Тоді вираз для обчислення прогину набуде вигляду

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\omega \cdot M'_C + \int_0^{2a} \left(R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) (-R'_A \cdot x) dx \right].$$

Підставляючи дані, проводимо перетворення:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 1,5qa \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} a + \int_0^{2a} \left(0,25qa \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} x \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[1,5qa^4 + \int_0^{2a} \left(-0,125qa \cdot x^2 + \frac{qx^3}{4} \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[1,5qa^4 + \left(-0,125qa \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{qx^4}{16} \right) \Big|_0^{2a} \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[1,5qa^4 + \frac{2}{3} qa^4 \right] = \frac{13qa^4}{6EI}. \end{aligned}$$

Аналіз отриманої відповіді показує, що:

- розмірність відповідає одиницям довжини;
- додатне значення виразу означає, що напрям переміщення співпадає з напрямом одиничної сили.

Тепер виконаємо другу частину задачі – знайдемо кут повороту θ_B в перерізі на правій опорі (в т.В).

Побудуємо другу допоміжну балку та навантажимо її в т.В одиничним моментом (рис.11.4д). Побудуємо епюри $M''(x)$ (рис.11.4е). Очевидно, що на правій ділянці момент відсутній, тобто член у сумі, який пов'язаний із правою ділянкою, дорівнює нулю. А член суми, пов'язаний з лівою ділянкою, знову запишемо, використовуючи спрощений інтеграл Мора.

Нескладні обчислення опорних реакцій R''_A та R''_B для другої допоміжної балки дають можливість отримати

$$R''_A = R''_B = \frac{1}{2a}.$$

Тоді вираз для обчислення кута повороту набуде вигляду:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[\omega \cdot M'_C + \int_0^{2a} \left(R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) (-R'_A \cdot x) dx \right].$$

Підставляючи дані, проводимо перетворення:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI} \left[0 + \int_0^{2a} \left(0,25qa \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{2a} x \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[0 + \int_0^{2a} \left(-0,125q \cdot x^2 + \frac{qx^3}{4a} \right) dx \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[0 + \left(-0,125q \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{qx^4}{16a} \right) \Big|_0^{2a} \right] = \frac{2qa^3}{3EI}. \end{aligned}$$

Аналіз отриманої відповіді показує, що:

- розмірність відповідає одиницям кута (радіани);
- додатне значення виразу означає, що напрям переміщення співпадає з напрямом одиничного моменту.

Лекція 22. Тема 12. Розрахунок статично невизначених систем, що працюють на згин

Основи методу сил. Канонічні рівняння методу сил. Приклад розкриття статичної невизначеності.

12.1. Основи методу сил

Для визначення ступеня статичної невизначеності плоских систем можна використати формулу $S = 3k - u$,

де S – ступінь статичної невизначеності;
 k – кількість замкнених контурів (за умов повної відсутності шарнірів);
 u – кількість шарнірів у перерахунку на одиничні.

Можна виділити такі етапи розв'язку статично невизначеної системи:

1. Встановлюємо ступінь статичної невизначеності (тобто, з'ясуємо кількість «зайвих» невідомих).

2. Відкидаємо «зайві» зв'язки та замінюємо задану систему на **основну систему** (ту, що отримуємо при відкиданні «зайвих» зв'язків).

3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням та «зайвими» невідомими силами, що замінюють дію відкинутих зв'язків. Така система носить назву *еквівалентної*.

4. При цьому невідомі сили повинні бути підібрані таким чином, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації заданої статично невизначеної системи. Для цього можна прирівняти до нуля переміщення точок, в яких прикладаються «зайві» невідомі за напрямком їх дії. Розв'язуючи ці рівняння, отримуємо значення «зайвих» невідомих.

Наведена система розв'язку носить назву *методу сил*.

12.2. Канонічні рівняння методу сил

Допоміжні рівняння переміщень, які виражають рівність нулю переміщень за напрямком зайвих невідомих краще складати у так званій канонічній формі. Для прикладу розглянемо систему, зображену на рис 12.1а. За «зайвий» зв'язок виберемо шарнірно-рухому опору в т. B .

Тоді, навантаживши основну систему заданим навантаженням та «зайвою» невідомою x_1 в т. B (рис.12.1б), прирівнюємо до нуля повне переміщення точки B основної системи (рис.12.1в) за напрямком дії x_1

$$\Delta_1 = \Delta_1(F, x_1) = 0. \quad (12.1)$$

Застосувавши принцип незалежності дії сил, отримуємо

$$\Delta_1 = \Delta_1(F) + \Delta(x_1).$$

Якщо позначити δ_1 переміщення за напрямком x_1 , від сили $x_1 = 1$ (рис 12.1д), то

$$\Delta(x_1) = \delta_1 \cdot x_1.$$

Тоді рівняння (11.1) набуває виразу:

$$\delta_1 \cdot x_1 + \Delta_1(F) = 0. \quad (12.2)$$

Звідки:

$$x_1 = -\frac{\Delta_1(F)}{\delta_1}. \quad (12.3)$$

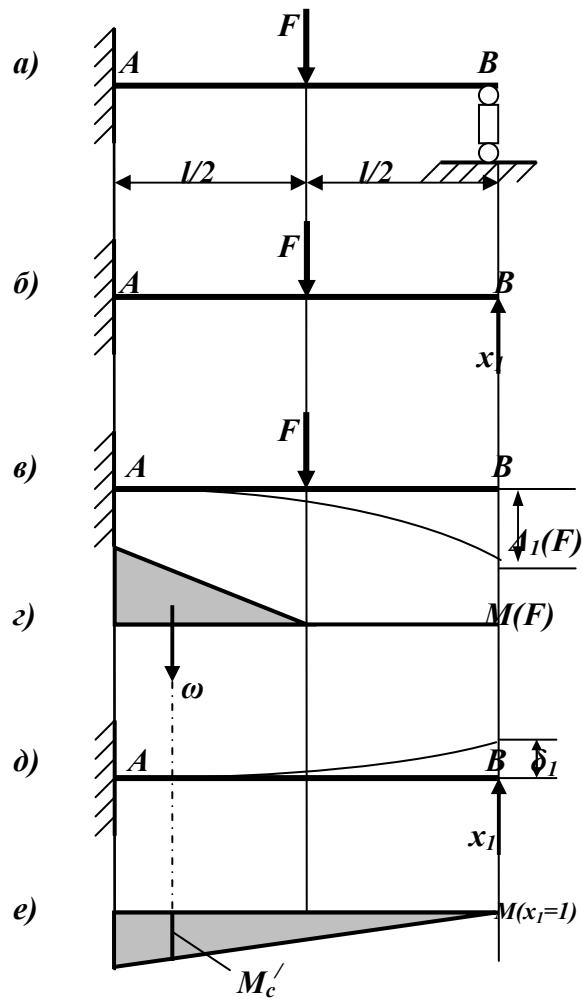


Рис.12.1. Використання методу сил: а) – статично невизначена система; б) – вибір «зайвого» невідомого; в) – переміщення від сили F ; г) – епюри моментів від зовнішніх сил; д) – система «зайвого» невідомого; е) – епюри моментів від $x_1=1$

Для системи з двома «зайвими» зв'язками (рис 12.2а) допоміжні рівняння переміщень перерізу A основної системи (рис 12.2б) мають вигляд:

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0,$$

де $\Delta_1 = \Delta_1(F; x_1; x_2)$ – повне переміщення точки A за напрямком x_1 ;

$\Delta_2 = \Delta_2(F; x_1; x_2)$ – повне переміщення точки A за напрямком x_2 .

Аналогічно з попереднім:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_1(x_1) + \Delta_1(x_2) + \Delta_1(F) = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_2(x_1) + \Delta_2(x_2) + \Delta_2(F) = 0 \end{aligned} \quad (12.4)$$

Повне переміщення Δ_{ik} можна записати як добуток питомого переміщення δ_{ik} від одиничної сили на величину відповідної узагальненої сили. Тобто

$$\Delta_1(x_1) = \delta_{11}x_1; \quad \Delta_1(x_2) = \delta_{12}x_2 \dots \Delta_i = \delta_{ik}x_k.$$

Таким чином, (12.4) можна записати як

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_1(F) &= 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_2(F) &= 0. \end{aligned} \quad (12.5)$$

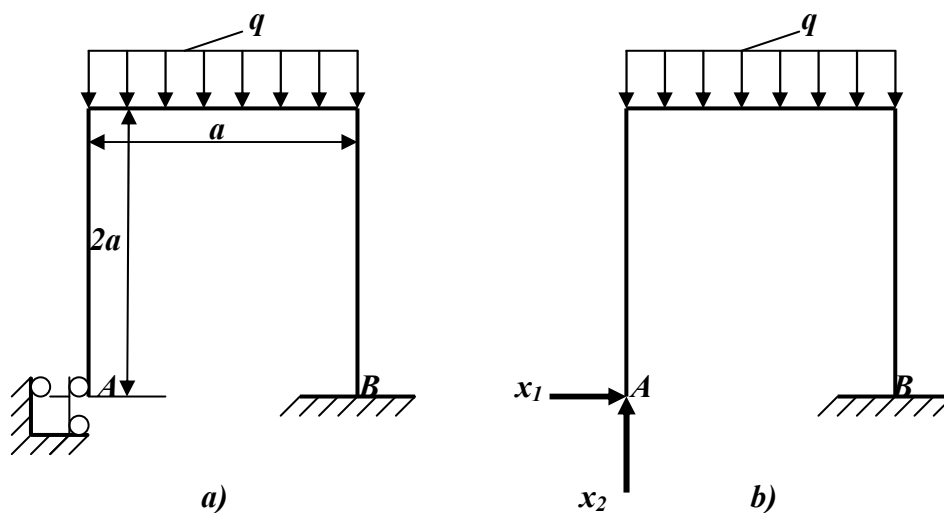


Рисунок 12.2. Вибір «зайвих» невідомих: а) – двічі статично невизначена рама; б) вибір «зайвих» невідомих x_1 та x_2

Це й є система канонічних рівнянь для двічі статично невизначеної системи. Аналогічні рівняння можна записати і для n - разів статично невизначеної системи.

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_1(F) &= 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_2(F) &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_n(F) &= 0. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Переміщення $\Delta_i(F)$ та δ_{ik} , що входять у канонічні рівняння, найчастіше визначають за методом Мора або способом Верещагіна.

При цьому слід зауважити, що згідно з теоремою Бетті

$$\delta_{ik} \cdot x_k = \delta_{ki} \cdot x_i.$$

Тому, якщо розглядати випадок, коли δ_{ik} та δ_{ki} є переміщеннями від одиничних сил, то виходить, що

$$\delta_{ik} \cdot 1 = \delta_{ki} \cdot 1, \quad \text{тобто} \quad \delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (12.7)$$

12.3. Приклад розкриття статичної невизначеності

Розглянемо раму, зображену на рис.12.2а. Визначимо опорні реакції x_1 та x_2 та побудуємо епюри нормальних сил N , перерізуючих сил Q та згинаючих моментів M .

Рама, як вже з'ясувалося, двічі статично невизначена, тому запишемо для неї рівняння сумісності переміщень у вигляді канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 &= -\Delta_1(F); \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 &= -\Delta_2(F). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Знайдемо коефіцієнти та вільні члени рівнянь. Для цього виберемо основну систему (рис.12.3а) та побудуємо для неї епюри згинаючих моментів $M(F)$ (рис.12.3б). Також розглянемо окремо системи, навантажені «зайвими» невідомими x_1 (рис.12.4а) та x_2 (рис.12.5а). Побудуємо для них епюри моментів за умов, що $x_1 = x_2 = 1$ (тобто, епюри моментів від одиничних навантажень): $M(x_1=1)$ (рис.12.4б) та $M(x_2=1)$ (рис.12.5б) відповідно.

Обчислимо коефіцієнт δ_{11} , який, як ми вже казали, являє собою переміщення за напрямом x_1 в перерізі, де прикладається x_1 від сили $x_1=1$. Для цього, використовуючи, наприклад, спосіб Верещагіна ми повинні епюру $M(x_1=1)$ (рис.12.4б) перемножити саму на себе (тобто, на ній знайти значення ω' та на координаті центра ваги епюри визначити M'_C (ці

величини стосуються тільки епюр моментів від одиничних сил – $M'(x_1=1)$ та $M'(x_2=1)$, вони на епюрах не нанесені через простоту визначення, щоб не завантажувати рисунок).

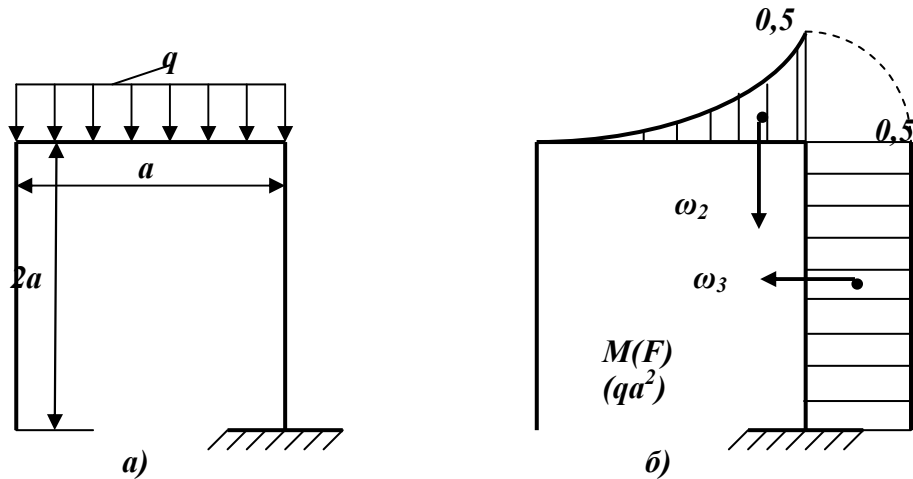


Рисунок 12.3. Вибір основної системи: а) – основна система, навантажена зовнішніми силами; б) – епюра згинаючих моментів від зовнішніх сил на основній системі $M(F)$

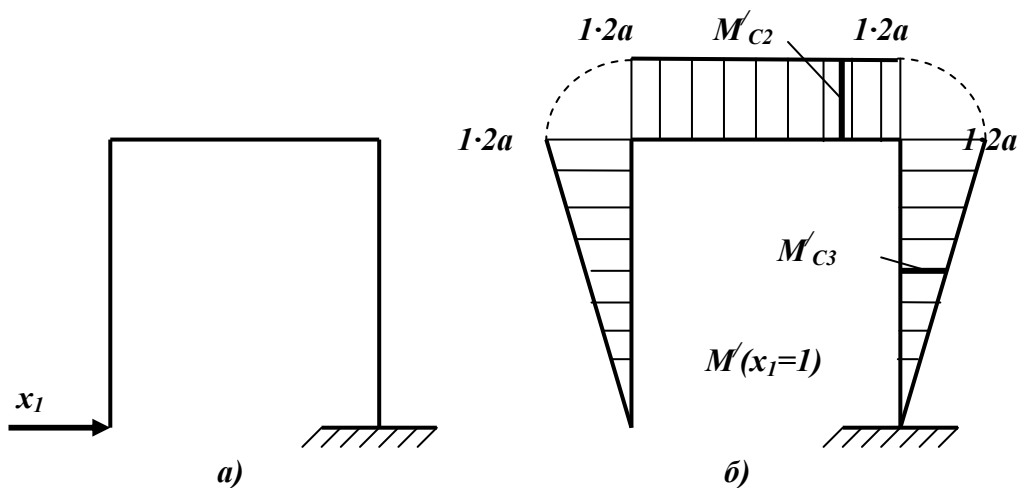


Рисунок 12.4. Вибір «зайвого» невідомого x_1 : а) – система «зайвого» невідомого x_1 ; б) – епюра згинаючих моментів від «зайвого» невідомого x_1 за умов, що $x_1=1$

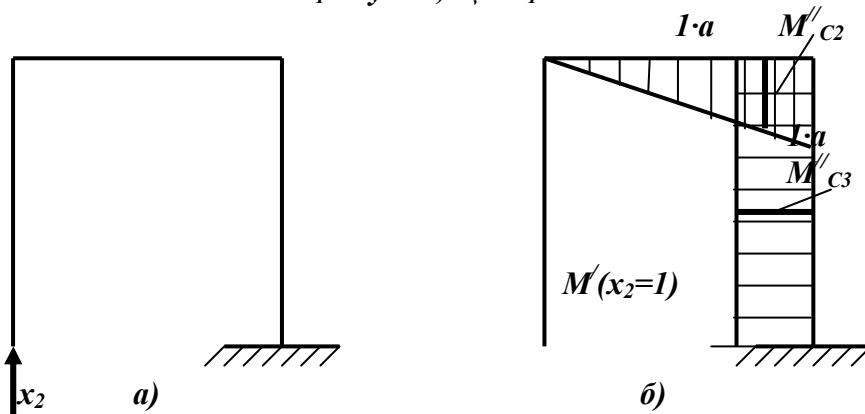


Рисунок 12.5. Вибір «зайвого» невідомого x_2 : а) – система «зайвого» невідомого x_2 ; б) – епюра згинаючих моментів від «зайвого» невідомого x_2 за умов, що $x_2=1$

Проведемо обчислення:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} [\omega_1 \cdot M'_{C1} + \omega_2 \cdot M'_{C2} + \omega_3 \cdot M'_{C3}] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} 2a + 1 \cdot 2a \cdot a \cdot 1 \cdot 2a + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} 2a \right] = \frac{28a^3}{3EI}.$$

Як зауваження, слід відзначити, що:

- Вирази для площ ω' та моментів M'_C у формулі спеціально записані так детально, враховуючи навіть I за множник, щоб студенту було простіше розібратися з розрахунком;
- δ_{II} (і взагалі δ_{ii}) завжди додатне тому, що епюри множаться самі на себе і не можуть мати різні знаки.

Тепер обчислимо коефіцієнт δ_{12} , який являє собою переміщення за напрямом x_1 в перерізі, де прикладається x_1 , але від сили $x_2=I$. Для цього, використовуючи спосіб Верещагіна ми повинні епюру $M'(x_1=I)$ (рис.12.4б) перемножити на епюру $M'(x_2=I)$ (рис.12.5б) (причому, не має значення, на яких епюрах знаходити площі ω' , а на яких M'_C тому, що з (12.7) $\delta_{12} = \delta_{21}$). Проведемо обчислення:

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} [\omega_{1'} \cdot M'_{C//1} + \omega_{2'} \cdot M'_{C//2} + \omega_{3'} \cdot M'_{C//3}] = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 0 - 1 \cdot 2a \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 1 \cdot a \right] = -\frac{3a^3}{EI}.$$

Коефіцієнт δ_{22} обчислимо аналогічно δ_{11} шляхом перемноження самої на себе епюри $M'(x_2=I)$:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} [\omega_{1''} \cdot M'_{C//1} + \omega_{2''} \cdot M'_{C//2} + \omega_{3''} \cdot M'_{C//3}] = \frac{1}{EI} \left[0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} a + 1 \cdot a \cdot 2a \cdot 1 \cdot a \right] = \frac{7a^3}{3EI}.$$

Вільний член першого рівняння $\Delta_1(F)$ – це переміщення в перерізі, де прикладається x_1 , за напрямком дії x_1 від зовнішніх сил на основній системі. Для його знаходження потрібно епюру $M(F)$ (рис.12.3б) помножити на епюру $M'(x_1=I)$ (рис.12.4б). На епюрі $M(F)$ знаходяться площі ω , а на епюрі $M'(x_1=I)$ – значення M'_C на відповідних координатах центрів ваги площ ω . Проводимо обчислення:

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI} [\omega_1 \cdot M'_{C1} + \omega_2 \cdot M'_{C2} + \omega_3 \cdot M'_{C3}] = \frac{1}{EI} \left[0 + \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot 1 \cdot 2a + \frac{qa^2}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \right] = \frac{4qa^4}{3EI}.$$

Аналогічно знаходимо вільний член другого рівняння $\Delta_2(F)$, перемножуючи епюру $M(F)$ на $M'(x_2=I)$:

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI} [\omega_1 \cdot M''_{C1} + \omega_2 \cdot M''_{C2} + \omega_3 \cdot M''_{C3}] = \frac{1}{EI} \left[0 - \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot a - \frac{qa^2}{2} \cdot 2a \cdot 1 \cdot a \right] = -\frac{9qa^4}{8EI}.$$

Знайдені коефіцієнти при невідомих та вільні члени підставляємо у канонічні рівняння (12.8) та розв'язуємо їх як систему

$$\frac{28a^3}{3EI}x_1 - \frac{3a^3}{EI}x_2 = -\frac{4qa^4}{3EI};$$

$$-\frac{3a^3}{EI}x_1 + \frac{7a^3}{3EI}x_2 = +\frac{9qa^4}{8EI}.$$

Перетворюючи, отримаємо

$$28x_1 - 9x_2 = -4qa;$$

$$-72x_1 + 56x_2 = 27qa.$$

Після нескладних обчислень $x_1 \approx +0,02qa$; $x_2 \approx +0,51qa$. Статична невизначеність розкрита. Знаки «+» показують, що дійсний напрямок опорних реакцій збігається з напрямком стрілок на рис.12.2б; 12.4а та 12.5а.

Тепер можна будувати епюри нормальних сил N , перерізуючих сил Q та згинаючих моментів M для рами (рис.12.6а). Позначимо координату вздовж осі кожної ділянки рами – z_i ($i = 1,2,3$) (рис 12.6б).

Тоді

$$0 \leq z_1 \leq 2a;$$

$$0 \leq z_2 \leq a;$$

$$0 \leq z_3 \leq 2a.$$

Запишемо функції нормальних сил $N(z)$ на кожній ділянці:

$$N_I(z_1) = -H_A = -x_2 \quad - \text{const};$$

$$N_{II}(z_2) = -R_A = -x_1 \quad - \text{const};$$

$$N_{III}(z_3) = H_A - qa \quad - \text{const}.$$

Запишемо функції перерізуючих сил $Q(z)$ на кожній ділянці:

$$Q_I(z_1) = -R_A = -x_1 \quad - \text{const};$$

$$Q_{II}(z_2) = H_A - qz_2 = x_2 - qz_2 \quad - \text{лінійна функція};$$

$$Q_{III}(z_3) = R_A = x_1 \quad - \text{const}.$$

Запишемо функції згинаючих моментів $M(z)$ на кожній ділянці:

$$M_I(z_1) = -R_A \cdot z_1 = -x_1 \cdot z_1 \quad - \text{лінійна функція};$$

$$M_{II}(z_2) = -R_A \cdot 2a + H_A \cdot z_2 - q(z_2)^2/2 = -x_1 \cdot 2a + x_2 \cdot z_2 - q(z_2)^2/2 \quad -$$

квадратична функція;

$$M_{III}(z_3) = -R_A \cdot 2a + H_A \cdot a - qa^2/2 + R_A \cdot z_3 = -x_1 \cdot 2a + x_2 \cdot a -$$

$$- q(z_2)^2/2 + x_1 \cdot z_3 \quad - \text{лінійна функція}.$$

Тепер, після нескладних обчислень значень сил та моментів на границях ділянок, можна будувати епюри (рис.12.6в,г,д). На другій ділянці на епюрі моментів спостерігається extremum. Знайдемо його значення за відомою методикою:

$$Q_{II}(z_{20}) = H_A - qz_{20} = x_2 - qz_{20} = 0;$$

звідки

$$z_{20} = \frac{H_A}{q} = \frac{0,51qa}{q} = 0,51a.$$

Розрахунок та побудову епюр завершено. Але поки що немає впевненості у правильності наших обчислень. Треба зробити перевірку. Вона полягає в перемноженні епюри реальних згинаючих моментів $M(z)$ на будь-яку з епюр згинаючих моментів від одиничних значень невідомих – $M'(x_1 = 1)$ або $M'(x_2 = 1)$. При цих перемноженнях у результаті повинен бути ориманий **нуль**. Чому? А тому, що при перемноженні цих епюр ми фактично розраховуємо переміщення в перерізах (з точністю до множника $1/EI$), де прикладені «зайві» невідомі, та за їх напрямками. А вони прикладені на опори в т.А, де переміщення відсутні.

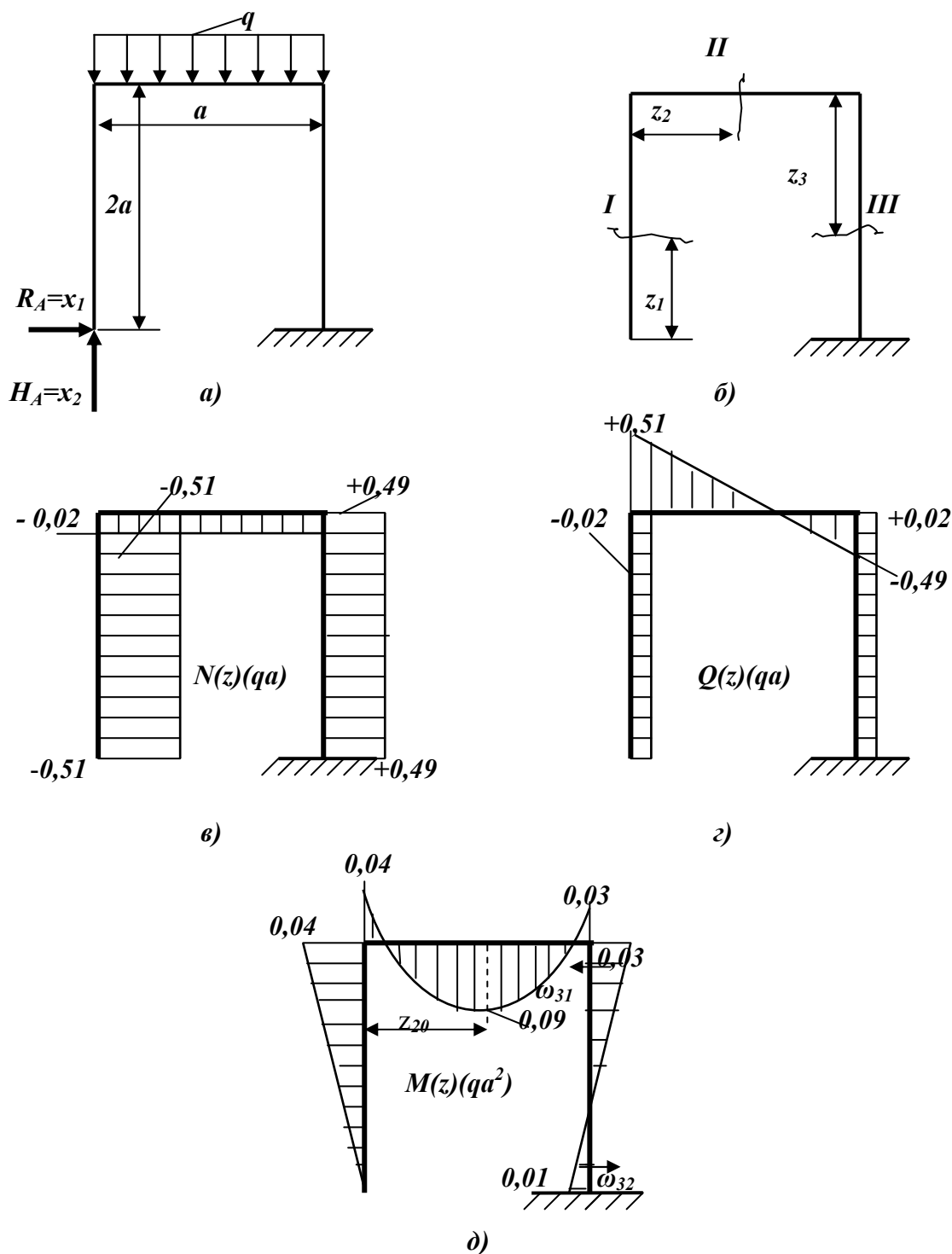


Рисунок 12.6. Побудова епюр для статично невизначеної рами:
 а) – навантаження на рамі; б) – ділянки рами; в) – епюри нормальних сил $N(z)$; г) – епюри перерізуючих сил $Q(z)$; д) – епюри згинаючих моментів $M(z)$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } M_{extr} &= -R_A \cdot 2a + H_A \cdot z_{20} - q(z_{20})^2 / 2 = -x_1 \cdot 2a + x_2 \cdot z_{20} - q(z_{20})^2 / 2 = \\ &= -0,02qa \cdot 2a + 0,51qa \cdot 0,51a - q(0,51qa)^2 / 2 \approx 0,09qa^2. \end{aligned}$$

Перемножимо між собою епюри $M(z)$ (рис.12.6в) та $M'(x_2 = 1)$ (рис.12.5б). На першій ділянці отримаємо очевидний нуль, на другій ділянці скористаємося спрощеним інтегралом Мора, на третій ділянці, користуючись тим, що площі різних знаків легко розрахувати з

подібності трикутників (рис.12.6д), а M''_{C3} є константою, проведемо розрахунок за Верещагіним:

$$\begin{aligned}
 & 0 + \int_0^a M_2(z) \cdot M_2'(x_2 = 1) dz + \omega_{31} \cdot M''_{C3} + \omega_{32} \cdot M''_{C3} = \\
 & = \int_0^a (-R_A \cdot 2a + H_A \cdot z_2 - \frac{qz^2}{2})(1 \cdot z) dz + \omega_{31} \cdot M''_{C3} + \omega_{32} \cdot M''_{C3} = \\
 & = \int_0^a (0,51qa \cdot z - 0,02qa \cdot 2a - \frac{qz^2}{2})(1 \cdot z) dz + (-\frac{1}{2} 0,03qa^2 \cdot \frac{3}{2} a) \cdot a + (\frac{1}{2} 0,01qa^2 \cdot \frac{1}{2} a) \cdot a = \\
 & = \int_0^a (0,51qa \cdot z^2 - 0,04qa^2 \cdot z - \frac{qz^3}{2}) dz - 0,0225qa^4 + 0,0025qa^4 = \\
 & = (0,51qa \cdot \frac{z^3}{3} - 0,04qa^2 \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{qz^4}{8}) \Big|_0^a - 0,0225qa^4 + 0,0025qa^4 = \\
 & = qa^4(0,170 - 0,020 - 0,125 - 0,0225 + 0,0025) \approx 0.
 \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

Лекція 23. Тема 13. Криві стержні

Загальні поняття. Обчислення згинаючих моментів, нормальних і поперечних сил. Обчислення напружень від внутрішніх силових факторів. Аналіз формули нормальних напружень у кривому стержні.

13.1. Загальні поняття

Окрім стержнів з прямою віссю в конструкціях часто зустрічаються елементи, для яких вісь, тобто лінія, що проходить через центри ваги поперечних перерізів, є кривою. До них відносяться ланки ланцюгів, вушка, гаки, арки, станини підйомних кранів і т.п. Крім того, на практиці строго прямих стержнів не зустрічається; всі стержні, які ми розраховуємо як прямі, мають так чи інакше невелику кривизну. Тому вивчення впливу кривизни осі стержня на розподіл напружень дозволить нам, з одного боку, перевіряти міцність явно кривих стержнів, а з іншого — оцінити вплив невеликих відступів від прямолінійної форми на міцність прямих стержнів.

При перевірці міцності таких стержнів введемо такі обмеження:

- а) *перерізи стержня мають вісь симетрії;*
- б) *вісь стержня є плоскою кривою, що лежить у площині симетрії;*
- в) *зовнішні сили лежать у тій же площині.*

Тоді, внаслідок симетрії, і деформація осі стержня відбуватиметься в тій же площині; вісь стержня залишиться плоскою кривою, що лежить у площині зовнішніх сил; і ми матимемо випадок, аналогічний плоскому згину балки.

Приймаючи при розрахунку вказані вище обмеження, ми охоплюємо майже всі випадки роботи кривих стержнів, що зустрічаються на практиці. Нашою задачею буде відшукування найбільших напружень, перевірка міцності й обчислення деформацій кривих стержнів. Рішення цієї задачі ми проведемо аналогічно тому, як поступили в подібному випадку для прямої балки.

13.2. Обчислення згинаючих моментів, нормальних і поперечних сил

Уявимо собі кривий стержень (рис.13.1), навантажений зовнішніми силами F_1, F_2, F_3, F_4 і т.д., розташованими, в площині симетрії поперечних перерізів. У тій же площині лежатимуть і опорні реакції стержня.

Для з'ясування напружень по перерізах, перпендикулярних до осі стержня, проведемо один з таких перерізів mn , поділяючи стержень на дві частини I і II. Відкинемо одну з них, наприклад II, і розглянемо рівновагу залишеної. На неї діятимуть зовнішні сили F_1, F_2, F_3 , а по перерізу mn передаватимуться напруження σ і τ .

Систему зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини, можна замінити в загальному випадку однією силою, а в окремому — парою сил. Розглянемо загальний випадок (рис.13.2). Замінімо сили F_1, F_2, F_3 їх рівнодіючою R ; потім прикладемо в центрі ваги перерізу mn дві протилежні сили R' і R'' , рівні R . Сили R і R'' утворюють пару з моментом M ; силу R' розкладемо на нормальну до перерізу N , і ту, що лежить у площині перерізу Q . Таким чином, система зовнішніх сил F_1, F_2, F_3 , що діє на залишену частину стержня, замінена

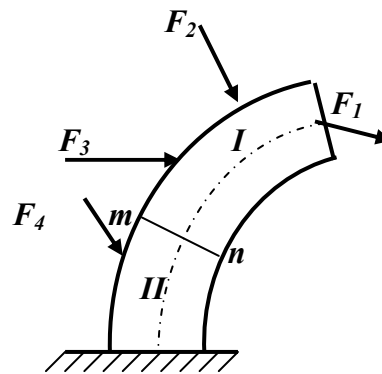


Рис.13.1. Кривий стержень

статично еквівалентною системою з пари сил M (згинаючого моменту), нормальної сили N і поперечної сили Q .

Ці три величини разом замінюють дію зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини стержня. В окремому випадку, коли ці зовнішні сили приводяться до пари, сили N і Q перетворюються в нуль. Величини сил M , N і Q визначаються з умови статичної еквівалентності цієї системи сил F_1, F_2, F_3 ; моменти відносно будь-якої точки і проекції на будь-яку вісь обох систем сил рівні між собою.

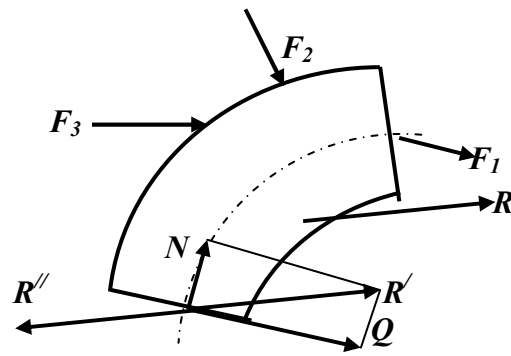


Рис.13.2. Аналіз силових факторів

Складаючи суми моментів сил обох систем відносно центра ваги проведеного перерізу, отримуємо, що згинаючий момент M дорівнює сумі моментів усіх сил, прикладених до залишеної частини стержня:

$$M = \sum m(F_1, F_2, F_3)_0 . \quad (13.1)$$

Проектуючи сили обох систем на напрями N і Q , отримуємо, що нормальна і поперечна сили рівні сумам проекцій всіх сил, прикладених до залишеної частини стержня відповідно на напрям нормалі до перерізу і на площину самого перерізу:

$$N = \sum_{np} (F_1, F_2, F_3)_N ; \quad (13.2)$$

$$Q = \sum_{np} (F_1, F_2, F_3)_Q . \quad (13.3)$$

Згинаючий момент вважатимемо додатним, якщо він збільшує кривизну осі стержня.

Нормальну силу вважатимемо додатною, якщо вона прагнуче відірвати залишену частину стержня від відкинutoї.

Поперечну силу рахуємо додатною, коли вона виходить з позитивного напрямку нормальної сили поворотом за годинниковою стрілкою на 90° (рис.13.3).

Так само, як і для балки, при обчисленні величин M , N і Q можна розглядати як ліву, так і праву частину стержня, розділені проведеним січенням; вибір тієї або іншої частини визначається умовою найбільшої простоти обчислень.

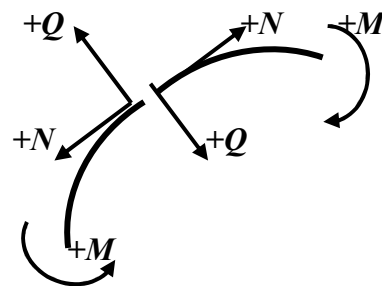


Рис. 13.3. Правила знаків

Приведені вище правила знаків для згинаючого моменту, нормальної і поперечної сил не залежать від того, праву або ліву частину стержня ми залишаємо для їх обчислення. Розглянемо приклад обчислення M , N і Q .

Візьмемо стержень, який є четвертою частиною кола радіуса R_0 , зашкелений одним кінцем і навантажений на іншому силою F (рис.13.4); проведемо який-небудь переріз з центром ваги O . Положення перерізу визначимо кутом φ , складеним ним з вертикаллю. Для обчислення M , N і Q розглянемо праву частину стержня. Цим ми позбавимося від обчислення реакцій в перерізі C . Згинаючий момент буде дорівнювати моменту сили F відносно точки O :

$$M = +F \cdot \overline{OD} = +FR_0 \sin \varphi .$$

Проектуючи силу F на нормаль до перерізу і на сам переріз, отримаємо:

$$N = -F \sin \varphi; \quad Q = +F \cos \varphi .$$

Таким чином, найбільший згинаючий момент і нормальна сила будуть при $\lambda = 90^\circ$, тобто в опорному перерізі.

На рис.13.5 (а, б, в). зображені епюри M , N і Q .

За нульову лінію прийнята вісь стержня. Ординати відкладені по радіусах кривизни стержня.

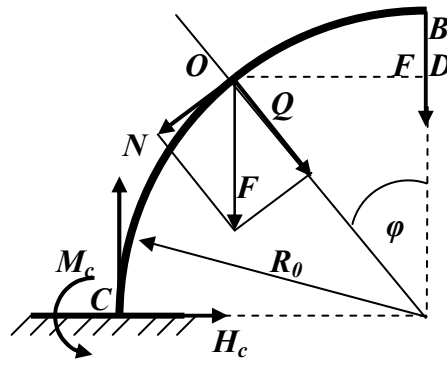


Рис.13.4. Вигляд навантаженого стержня

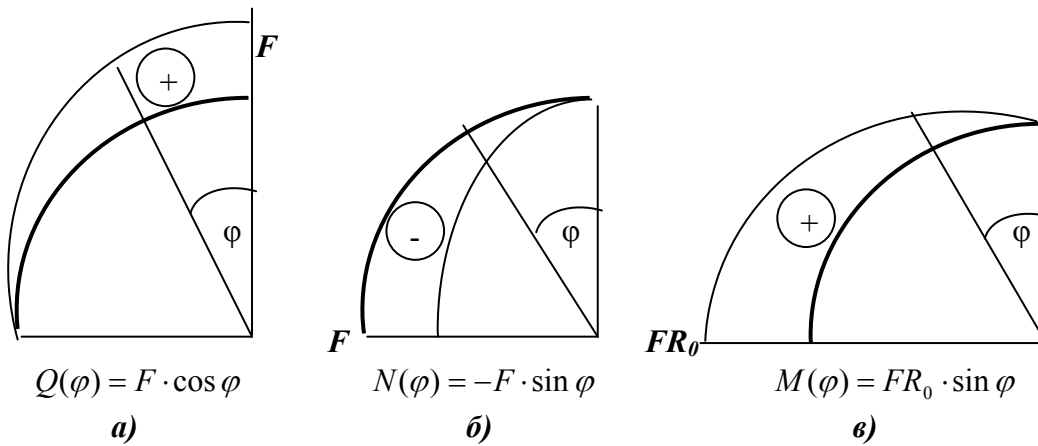


Рис.13.5. Епюри внутрішніх силових факторів: а) – перерізуючої сили; б) – нормальної сили; в) – згинаючого моменту

13.3. Обчислення напружень від сил Q і N

Напруження σ і τ по проведеному перерізу mn врівноважують систему зовнішніх сил (F_1, F_2, F_3), прикладених до залишеної частини, або, що те саме, систему сил M N і Q (рис.13.1 і 13.2).

Сила Q , що лежить у площині перерізу, може бути зрівноважена лише дотичними напруженнями τ , сума яких повинна бути рівна і протилежна силі Q . Нормальна сила N і згинаючий момент M , прикладені до залишеної частини, можуть бути врівноважені лише нормальними напруженнями.

Умови рівноваги залишеної частини дозволяють знайти лише сумарні внутрішні зусилля, що передаються від відкинutoї частини на залишену; сам же розподіл напружень по перерізу залишається невідомим, — ми маємо справу зі статично невизначеною задачею, для розв'язання якої необхідно розглянути деформацію стержня.

Проте напруження, зумовлені силами Q і N , можна отримати простіше. Теоретичні дослідження показують, що розподіл дотичних напружень у кривих стержнях близький до того, який ми маємо для прямих балок, тому можливо і для кривих стержнів використовувати формули, виведені для прямих балок, тобто (8.27):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{\text{відп}}}{b \cdot I_y} .$$

Це не зовсім точно; застосовуючи ті ж методи, що і при обчисленні дотичних напружень у балках, можна вивести і для кривих стержнів точніші формули для обчислення τ . Проте практично цілком допустиме використання формули (8.27).

Умова міцності відносно дотичних напружень у такому разі для кривих стержнів має вигляд (8.30):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\text{відр max}}}{b_{\min} I_y} \leq [\tau].$$

Визначимо напруження, що викликаються нормальною силою N . Розглядаючи елемент кривого стержня завдовжки ds під дією зусиль N (рис.13.6), бачимо, що сили, прикладені в центрах ваги поперечних перерізів, відповідають простому оsovому розтягу або стиску виділеного

елемента. Тому і відповідні напруження будуть нормальними до перерізу і рівномірно розподіленими за його площею A :

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

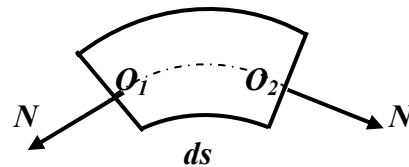


Рис.13.6. Елемент кривого бруса

Знак напруження визначиться знаком сили N .

13.4. Обчислення напружень від згинаючого моменту M

Згинаючий момент M може бути врівноважений, як і в прямій балці, тільки нормальними напруженнями, що приводяться до пари, розташованої в площині дії зовнішніх сил, зворотної за напрямом і рівної за величиною моменту M . Задача знаходження закону розподілу напружень по перерізу та формул для їх обчислень є статично невизначною і вимагає, як це було і при вивченні згину прямої балки, крім складання і розв'язку рівнянь статички, ще й розгляду сумісності відповідних деформацій і складання додаткових рівнянь. При визначенні напружень від сил Q і N обійшлося без подібних обчислень, оскільки скористалися вже готовими рішеннями; для нормальних же напружень, що врівноважують згинаючий момент M , виконаємо весь хід обчислень, який свого часу був зроблений для визначення нормальних напружень у прямих балках.

Розглянемо умови рівноваги залишеної частини стержня AB (рис.13.7) під дією

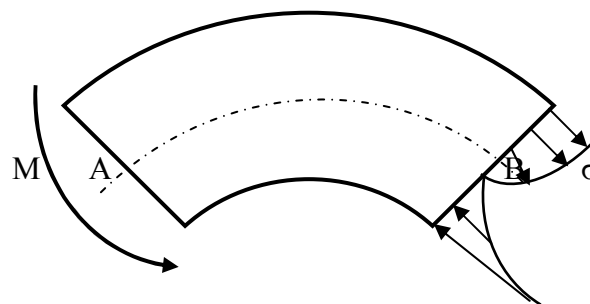


Рис. 13.7. Характер нормальних напружень від згинаючих моментів

згинаючого моменту і системи напружень, що передаються через проведений переріз. Зобразимо (рис.13.8) залишену частину з діючими на неї силами. Положення нейтрального шару по висоті перерізу поки що є невідомим і його треба визначити. Початок координат візьмемо в точці C , розташованій на нейтральній осі Y та поза центрами ваги перерізу O . При цьому відстань OC невідома. Вісь Z є віссю симетрії. Вісь X спрямована перпендикулярно до площини перерізу.

Запишемо 6 рівнянь статки для цієї просторової системи. На вісь X зовнішні сили дають проекцію що дорівнює нулю; сума ж проекцій сил $\sigma \cdot dA$ виразиться інтегралом, що охоплює всю площу поперечного перерізу:

$$\sum X = 0; \quad \int_A \sigma \cdot dA = 0. \quad (13.4)$$

Рівняння проекцій всіх сил на осі Y і Z

$$\sum Y = 0; \quad \sum Z = 0;$$

перетворюються в тотожність, оскільки напруження σ перпендикулярні до осей Y і Z . у тотожність перетворюються і рівняння моментів відносно осі X

$$\sum M_x = 0,$$

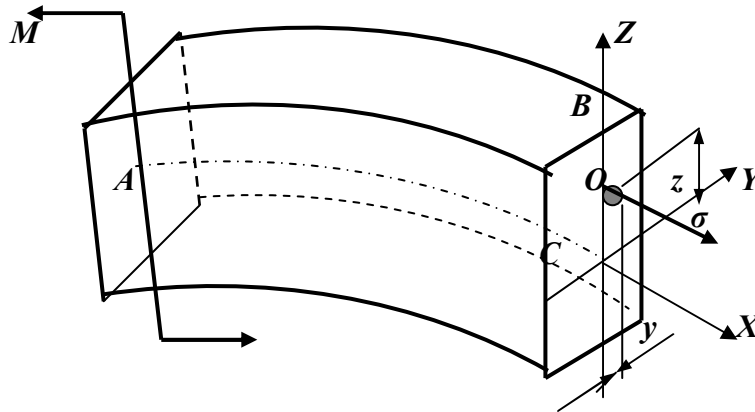


Рис. 13.8. Обчислення напружень від згинаючих моментів

оскільки не дають моменту ні сили $\sigma \cdot dA$, паралельні осі X , ні пара M , що лежить у площині XCZ .

З цієї ж причини момент пари M відносно осі Z теж дорівнює нулю; що ж до сил $\sigma \cdot dA$, то їх момент відносно цієї осі дорівнює інтегралу $\int_A \sigma \cdot dAy$.

Отже, п'яте рівняння рівноваги буде

$$\sum M_z = 0; \quad \int_A \sigma dAy = 0, \quad (13.5)$$

але цей інтеграл дорівнює нулю внаслідок симетрії перерізу відносно осі Z .

Залишається прирівняти нулю суму моментів усіх сил відносно осі Y . Це рівняння запишемо так:

$$\sum M_y = 0; \quad M - \int_A \sigma dAz = 0. \quad (13.6)$$

Отже, умови статки вимагають розгляду двох рівнянь:

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad (13.7)$$

$$M - \int_A \sigma \cdot dAz = 0. \quad (13.8)$$

Закон зміни нормальних напружень по висоті перерізу залишився поки невідомим. Тому переходимо до розгляду деформацій.

Як і для випадку згину прямого стержня, користуватимемося гіпотезою плоских перерізів, що підтверджується дослідями і для кривих стержнів. Припустимо, що при дії згинаючого моменту перерізи, перпендикулярні до осі, залишаються *плоскими* і лише повертаються один відносно другого (рис.3.9). Оскільки при зроблених вище припущеннях вісь бруса залишається при деформації в тій же площині, в якій вона

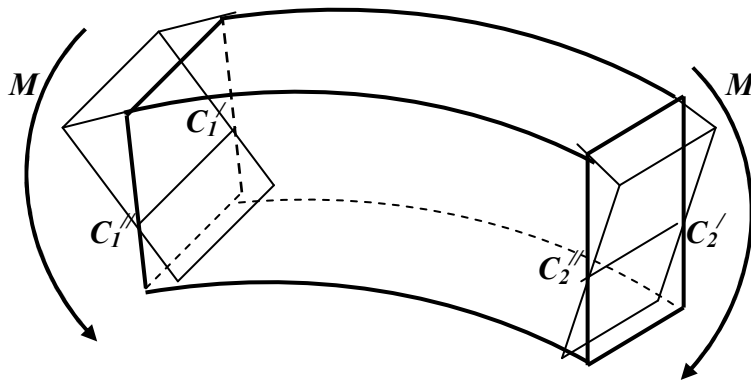


Рис. 13.9. Гіпотеза плоских перерізів

знаходилась до деформації, то ці повороти відбуватимуться навколо *нейтральних осей* C_1C_1' і C_2C_2' , перпендикулярних до площини зовнішніх сил, що містить у собі й вісь стержня. Тоді подовження і вкорочення, отже, і напруження для волокон, віддалених на одну і ту ж відстань від нейтральної осі, будуть по ширині перерізу однаковими. Встановимо залежність між кутом відносного повороту двох суміжних перерізів і деформаціями волокон. Виділимо з кривого стержня, що піддається дії тільки згинаючих моментів (рис. 13.10), елемент, обмежений двома дуже близькими перерізами, що становлять кут $d\varphi$.

Цей елемент зображено на рис.13.11.

$O_1 - O_2$ — вісь стержня; $C_1 - C_2$ — нейтральний шар.

Нормальні напруження, що діють по проведених перерізах, утворюють пари; під їх дією кут між суміжними перерізами $1-1$ і $2-2$ зміниться на величину $\delta d\varphi$ унаслідок відносного повороту цих перерізів навкруг нейтральних осей C_1 і C_2 .

Знайдемо нормальні напруження σ , що діють по перерізах в точках A_1 і A_2 на відстані z від нейтральних осей. Позитивний напрям осі z виберемо у бік зовнішніх волокон. Волокно A_1A_2 одержить подовження A_2D_2 ; відповідне напруження σ дорівнюватиме:

$$\sigma = \varepsilon E,$$

де ε — відносне видовження волокна A_1A_2 . Воно дорівнює відношенню абсолютного видовження A_2D_2 до первинної довжини волокна A_1A_2

$$\varepsilon = \frac{A_2D_2}{A_1A_2}.$$

Називаючи буквою ρ радіус кривизни волокна A_1A_2 , отримаємо:

$$A_2D_2 = z d\varphi; \quad A_1A_2 = \rho d\varphi.$$

Тоді

$$\varepsilon = \frac{z}{\rho} \frac{\partial d\varphi}{\partial \varphi}, \quad \sigma = \frac{z}{\rho} \frac{\partial d\varphi}{\partial \varphi} E. \quad (13.9)$$

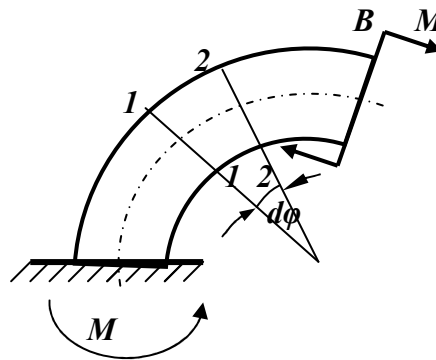


Рис. 13.10. Вигляд елемента бруса

Формула (13.9) дає закон розподілу по висоті перерізу нормальних напружень, викликаних згинаючим моментом M .

Оскільки для кожного перерізу величини $\frac{\partial d\varphi}{d\varphi}$ і E — постійні, то зміна σ залежить лише від зміни координати z і радіуса кривизни ρ волокна A_1A_2 , причому $\rho = r + z$, де r — радіус кривизни нейтрального шару.

Тоді як для прямої балки ми мали лінійний закон розподілу напруження, для кривого стержня напруження σ змінюються за гіперболічним законом (рис. 13.12). З формули (13.9) бачимо, що в зовнішніх від нейтрального шару волокнах напруження зростають *повільніше ніж* z ; на внутрішніх же, завдяки зміні знаку z з позитивної на негативний, вони зростають *швидше, ніж* z .

Таким чином, у кривому стержні нормальне напруження у внутрішньому крайньому волокні *більше*, а в зовнішньому *менше* ніж у тих же волокнах прямого стержня того ж перерізу. Це зрозуміло: початкова довжина внутрішнього волокна у кривому стержні значно менше, ніж зовнішнього; в прямому ж стержні ці довжини рівні. Тому й виходить вказана вище різниця у відносних деформаціях, отже, і в напруженнях для цих волокон.

Перейдемо до розв'язання рівнянь статки (13.4) і (13.6) з урахуванням залежності, одержаної з розгляду деформацій (13.9). У рівняння (13.4) підставимо (13.9):

$$\int_A \sigma dA = \int_A E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} dA = 0.$$

Виносячи постійні для даного перерізу величини за знак інтеграла і скорочуючи їх, отримаємо:

$$\int_A \frac{z}{\rho} dA = 0. \quad (13.10)$$

Це рівняння дозволяє знайти положення нейтральної осі.

З рівності (13.10) зрозуміло, що дорівнює нулю не інтеграл $\int_A z dA$, що є статичним моментом перерізу відносно нейтральної осі, як це було для прямого стержня, а інший

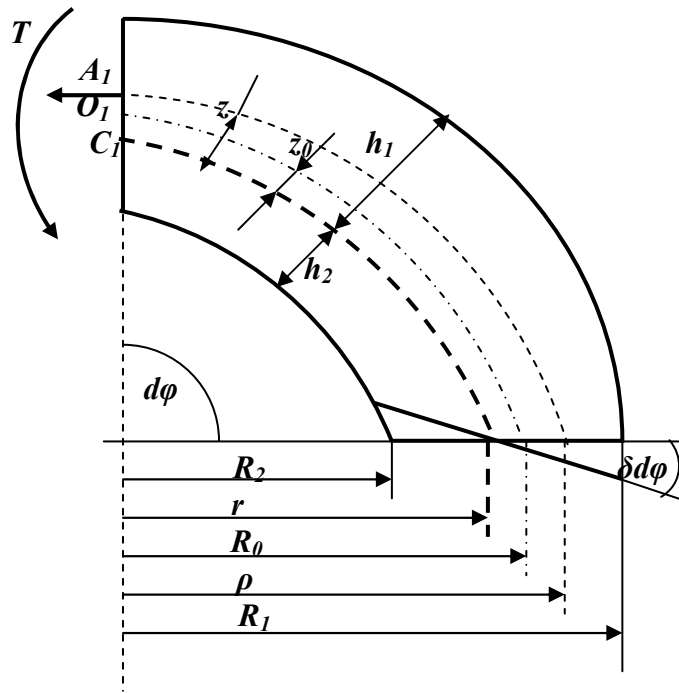


Рис. 13.11. Елемент, навантажений тільки згинаючим моментом

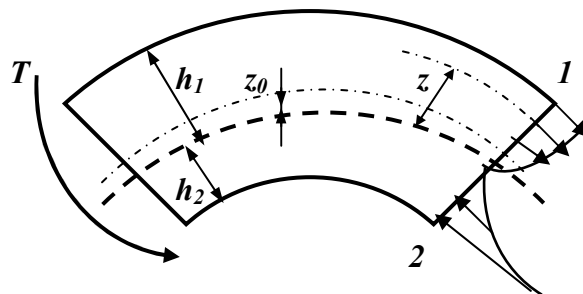


Рис. 13.12. Гіперболічний закон розподілу нормальних напружень

інтеграл. Це показує, що *при вигині кривого стержня нейтральна вісь дійсно не проходить через центр ваги перерізу*. Замінюючи в (13.10) $z = \rho - r$ (рис.13.11), знаходимо

$$\int_A \frac{\rho - r}{\rho} dA = \int_A dA - r \int_A \frac{dA}{\rho} = 0,$$

звідки випливає, що

$$\boxed{r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}}}. \quad (13.11)$$

Хід обчислень величини r для кожного окремого виду поперечного перерізу буде різний. Підставивши тепер залежність (13.9) у рівняння (13.6), отримаємо:

$$M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \frac{z^2}{\rho} dA = 0, \quad (13.12)$$

де M — згинаючий момент, а інтегрування охоплює всю площу поперечного перерізу. Перетворимо інтеграл, що входить у це рівняння, таким чином:

$$\int_A \frac{z^2}{\rho} dA = \int_A \frac{\rho - r}{\rho} z dA = \int_A z dA - r \int_A \frac{z}{\rho} dA.$$

Тоді останній з одержаних двох інтегралів рівний на підставі (13.10) нулю, а перший є статичним моментом S площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі. Ця величина може бути обчислена як добуток площі перерізу A на відстань її центра ваги до нейтральної осі, тобто на z_0 (рис.13.12)

$$S = Az_0 \quad (13.13)$$

Таким чином, рівняння (13.12) матиме вигляд

$$M - E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} S = 0; \quad (13.14)$$

звідки

$$\frac{\delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{ES}; \quad (13.15)$$

і формулу для нормальних напружень, що зумовлені згинаючим моментом, запишемо так:

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{S} \cdot \frac{z}{\rho}}. \quad (13.16)$$

У рівнянні (13.14) знаходимо підтвердження того, що тут *статичний момент S площі перерізу відносно нейтральної осі не дорівнює нулю, тобто нейтральна вісь при вигині кривого стержня не проходить через центр ваги перерізу, а дещо (на величину z_0) зміщена*. На рис 13.12. ми зобразили цей зсув убік до центра кривизни стержня. Результати визначення величини r з рівняння (13.11) для різних перерізів показують, що нейтральна вісь дійсно зміщується у вказаному напрямі.

Цей зсув пов'язаний з умовою рівності між собою сум стискаючих і розтягуючих напружень, що діють по перерізу. Оскільки напруження від згинаючого моменту біля зовнішнього краю перерізу менше, а біля внутрішнього — більше, ніж у відповідних волокнах прямого стержня того ж перерізу (рис.13.12), то для рівності вказаних сум нейтральна вісь повинна зміститися від центра ваги перерізу у бік внутрішніх волокон.

Додаючи до одержаних напружень знайдені в попередньому параграфі напруження від нормальної сили, отримаємо формулу для обчислення *повних* нормальних напружень у кривому стержні

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{S} \cdot \frac{z}{\rho} \quad (13.17)$$

Найбільші за абсолютною величиною розтягуючі та стискаючі напруження матимуть місце в крайніх волокнах 1 і 2 (рис.13.12).

13.5. Аналіз формули нормальних напружень у кривому стержні

Підставляючи у формулу нормальних напружень (13.17) координати самих видалених точок перерізу (рис.13.12):

точки 1... z_1 і R_1 (зовнішні волокна),

точки 2... z_2 і R_2 (внутрішні волокна), можемо написати умову міцності кривого стержня

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{S} \cdot \frac{z_1}{R_1} \leq [\sigma] \\ \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{S} \cdot \frac{z_2}{R_2} \leq [\sigma] \end{cases} \quad (13.18)$$

Якщо матеріал неоднаково чинить опір розтягу і стиску, величини допустимих напружень матимуть різні значення. Що ж до відшукування небезпечного перерізу, то завдяки наявності двох силових факторів, що викликають нормальні напруження – M і N , це питання складніше, ніж для прямого стержня. В деяких випадках M до N досягають *найбільшої величини в одному і тому ж перерізі, тоді він і буде небезпечним. Якщо ж це не має місця, то доводиться перевіряти міцність матеріалу у ряді перерізів, відшукуючи обчисленням найбільш напружених.*

Якщо значення радіуса кривизни стержня R_0 велике в порівнянні з висотою перерізу h (а саме $R_0 > 5h$), то відношення z/ρ , або z_1/R_1 , або z_2/R_2 стають незначними, і нормальні напруження, що залежать від згинаючого моменту, будуть мало чим відрізнятися від напружень, що визначатимуться за формулами для прямого бруса. Це легко встановити за допомогою даних. Візьмемо, наприклад, рівняння (13.12) і (13.9). Виключаючи з них $E \frac{\delta d\varphi}{d\varphi}$ і замінюючи ρ через $r + z$, отримаємо

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{(r+z) \int_A \frac{z^2}{r+z} dA} = \frac{M \cdot z}{\left(1 + \frac{z}{r}\right) \int_A \frac{z^2 dA}{1 + \frac{z}{r}}} \quad (13.19)$$

Якщо нехтувати тут величиною $\frac{z}{r}$, то формула (13.19) перетвориться у формулу напружень для прямого стержня

$$\sigma = \frac{Mz}{J}$$

Визначимо, якою буде похибка при обчисленні найбільших нормальних напружень від згинаючого моменту за формулою для прямого стержня при значенні $R_0 = 5h$

на прикладі стержня прямокутного перерізу. Радіус кривизни нейтрального шару в цьому випадку дорівнює:

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_0 + 0,5h}{R_0 - 0,5h}} = \frac{h}{\ln \frac{5,5}{4,5}} = \frac{h}{0,20067} = 4,9833h.$$

Тоді

$$z_0 = R_0 - r = 0,0167h \quad \text{і} \quad z_0 = 0,00334R_0,$$

тобто, нейтральна вісь відстоїть усього на 1/60 висоти від центра ваги перерізу.

Напруження *згину* за формулами для кривого стержня складають:

$$\sigma_1 = \frac{M}{S} \cdot \frac{z_1}{R_1} = \frac{M \cdot 0,5167h}{bh \cdot 0,0167h \cdot 5,5h} = \frac{0,5167 \cdot M \cdot 6}{0,5511bh^2} = 0,935 \frac{M}{W};$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{S} \cdot \frac{z_2}{R_2} = \frac{M \cdot 0,4833h}{bh \cdot 0,0167h \cdot 4,5h} = \frac{0,4833 \cdot M \cdot 6}{0,4509bh^2} = 1,071 \frac{M}{W}.$$

Тобто величина напруження в цьому випадку відрізняється від величини, яку визначають за формулою для прямого стержня на $\pm 7\%$.

Ця обставина є причиною того, що для перевірки міцності криві стержні часто поділяють на дві категорії.

До першої відносять стержні *великої кривизни* з $\frac{R_0}{h} \leq 5$; для них розрахунок нормальних напружень слід проводити за формулою

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{S} \cdot \frac{z_{1,2}}{R_{1,2}} \leq [\sigma] \quad . \quad (13.20)$$

На практиці це матиме місце, головним чином, для частин машин, крюків, ланок ланцюгів, кілець і т.д. До другої категорії відносять стержні *малої кривизни*, для яких радіус осі великий в порівнянні з розмірами перерізу, тобто, $\frac{R_0}{h} > 5$ – для таких стержнів при обчисленні напружень від згину можна користуватися формулою для прямого стержня

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_{1,2}} \leq [\sigma] \quad . \quad (13.21)$$

Ця категорія включає криві стержні, що зустрічаються в різних інженерних спорудах, — арки, кільця і т.п.

Лекція 24. Продовження теми 13 (Криві стержні)

Визначення радіуса кривизни нейтрального шару для різних перерізів.
Деформації кривих стержнів. Приклад розрахунку кривих стержнів.

13.6. Визначення радіуса кривизни нейтрального шару для різних перерізів

Для визначення величини r використовують вираз

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}}$$

Розглянемо цей вираз для різних, найпоширеніших перерізів.

13.6.1. Прямокутний переріз.

$$r = \frac{bh}{\int_A \frac{bd\rho}{\rho}} = \frac{h}{\int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{\rho} d\rho};$$

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (13.22)$$

Тоді
$$z_0 = R_0 - \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (13.23)$$

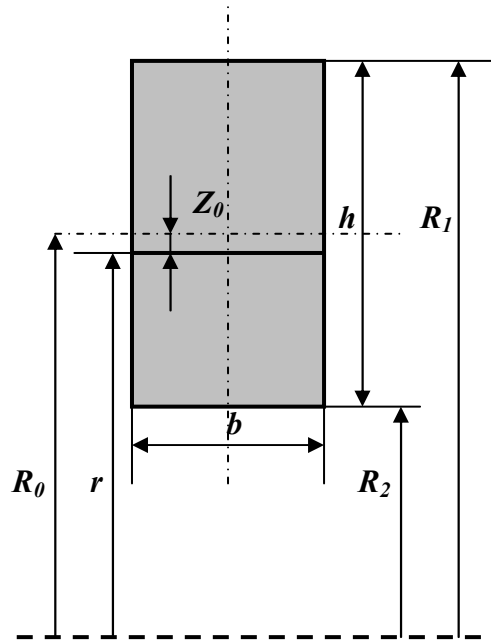


Рис. 13.13. Прямокутний переріз

13.6.2 Круговий переріз.

Виразимо dA та ρ через функцію φ . Попередньо обчислюємо:

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2} \sin \varphi; dA = b_z d\rho;$$

$$b_z = d \cdot \cos \varphi; d\rho = \frac{d}{2} \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Тоді
$$\int_A \frac{dA}{\rho} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{2R_0 + d \cdot \sin \varphi}.$$

Інтегруючи, отримаємо

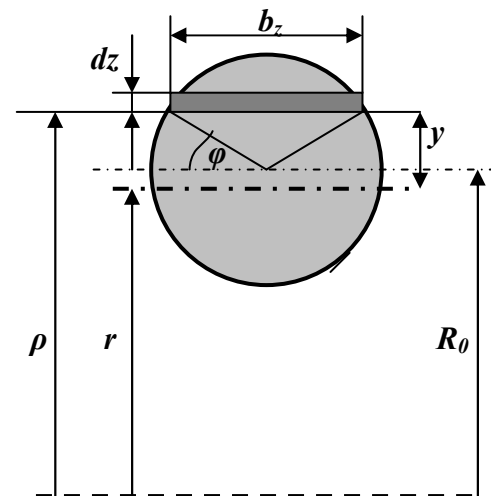


Рис.13.14. Круговий переріз

$$d^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \cdot d\varphi}{2R_0 + d \cdot \sin \varphi} = \pi(2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}), \quad \text{звідки, враховуючи, що}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \text{знаходимо}$$

$$r = \frac{d^2}{4[2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}]} \quad (13.24)$$

12.6.3. Трапецевидний і трикутний перерізи.

Площа трапеції $A = \frac{b_1 + b_2}{2} h$, ширина перерізу трапеції на відстані ρ від центра кривизни

$$b(\rho) = b_1 + (b_2 - b_1) \frac{R_1 - \rho}{R_1 - R_2};$$

$$dA = b(\rho) d\rho.$$

Інтеграл (13.9), опускаючи проміжні вкладки, можна записати в такому вигляді:

$$\int_A \frac{dA}{\rho} = [b_1 + R_1 \frac{(b_2 - b_1)}{h}] \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1).$$

Тоді

$$r = \frac{h \frac{b_1 + b_2}{2}}{[b_1 + R_1 \frac{(b_2 - b_1)}{h}] \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)}.$$

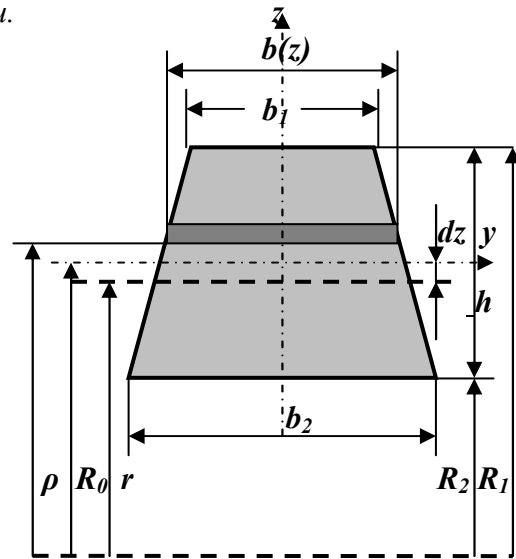


Рис. 13.15. Трапецевидний переріз

$$(13.25)$$

Якщо покласти $b_1 = 0$, отримаємо формулу для радіуса нейтрального шару трикутного поперечного перерізу:

$$r = \frac{hb}{2(R_1 \frac{b}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - b)} \quad (13.26).$$

13.7. Деформації кривих стержнів

При розв'язанні статично невизначених задач з розрахунку конструкцій, куди входять криві стержні (арки, зведення, ланки ланцюгів, кільця), необхідно вміти обчислювати деформації кривих стержнів. Досвід і розрахунки показують, що якщо при визначенні напружень для стержнів великої кривизни необхідно враховувати вплив цієї кривизни, то при обчисленні деформацій у переважній більшості випадків можна нехтувати цим впливом.

Розглянемо, як визначити потенціальну енергію деформації при вигині кривого стержня.

Виріжемо зі стержня двома поперечними перетинами елемент завдовжки ds (рис.13.16). На нього діятимуть по обох перетинах дотичні напруження, що складаються в зусилля Q , і нормальні, що складаються в зусилля N і M .

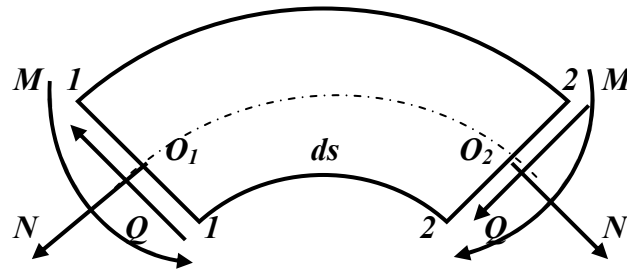


Рис. 13.16. Елемент кривого бруса

Для визначення потенціальної енергії, що нагромаджується в цьому елементі, треба підрахувати роботу всіх цих зусиль, прикладених до елемента. Вже в балках при подібних обчисленнях ми нехтували роботою дотичних зусиль; в кривому стержні це тим більше можливо, оскільки вплив поперечних сил буде ще меншим.

Залишається підрахувати роботу зусиль N і M . Якщо нехтуватимемо впливом кривизни стержня, то це буде еквівалентно припущенню, що деформація виділеного елемента під дією пар M відбувається так само, як і в прямій балці; тоді кількість потенціальної енергії, пов'язаної з цією деформацією, буде дорівнювати $\frac{M^2 ds}{2EJ}$; різниця відносно балки лише в другому позначенні довжини елемента — замість dx написано ds .

Оскільки ми нехтуємо кривизною стержня, то нейтральна вісь проходить через центр ваги перерізу; тому при повороті перерізу під дією пар M центри ваги перерізів O_1 і O_2 не переміщуються і зусилля N роботи не проводять. Тому ми можемо обчислити його роботу незалежно, від дії пар M і результат додати до одержаного вище.

Зусилля N , що діють на елемент, проводять простий розтяг або стиск і кількість потенціальної енергії, накопиченої при цьому, буде дорівнювати $\frac{N^2 ds}{2EA}$; замість довжини l розтягнутого або стисненого стержня підставлена довжина елемента ds .

Кількість потенціальної енергії, що нагромадилася у виділеному елементі

$$dU = \frac{M^2 ds}{2EJ} + \frac{N^2 ds}{2EA},$$

а потенціальна енергія, що нагромадилася в усьому стержні, виразиться інтегралом від цієї величини, що охоплює всю довжину стержня

$$U = \int_s \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2 ds}{2EA}. \quad (13.27)$$

Користуючись теоремою Кастільяно, отримаємо, що похідна цієї величини по зосередженій силі P дасть нам лінійне переміщення центра ваги того перерізу, де ця сила прикладена; так само похідна від U по моменту M_0 буде дорівнювати куту повороту відповідного перерізу:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\partial U}{\partial F} = \int_s \frac{M ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} + \int_s \frac{N ds}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial F} \\ \theta &= \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_s \frac{M ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_0} + \int_s \frac{N ds}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial M_0} \end{aligned} \right\} \cdot (13.28)$$

Для обчислення деформацій кривого стержня зручно скористатися способом Мора.

Візьмемо кривий стержень, що є четвертою частиною кола (рис.13.17), жорстко закріплений кінцем у точці А. Радіус осі позначимо R_0 . Навантажимо цей стержень вертикальною силою F на вільному кінці і знайдемо вертикальне переміщення точки В.

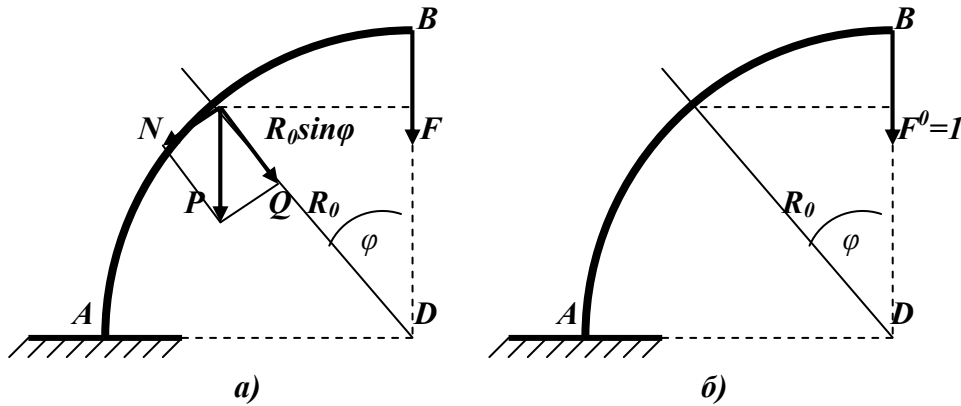


Рис. 13.17. Обчислення переміщень у кривому брусі: а)– навантаження зовнішніми силами, б)– навантаження одиничною силою

Потрібно зобразити стержень у двох станах:

- а) при завантаженні заданим навантаженням;
- б) при завантаженні одиничною силою, прикладеною в тому перерізі, де визначається переміщення.

Для визначення вертикальної складової переміщення кінця стержня В (рис.13.17 а) потрібно прикласти в цьому перерізі одиничну вертикальну силу $F^0 = 1$ (рис.13.17 б).

Для визначення вертикального переміщення використаємо

$$f = \int_s \frac{M(x)M^0 ds}{EJ} + \int_s \frac{N(x)N^0 ds}{EA}.$$

Обчислимо $M(x), M^0, N(x), N^0$:

$$\begin{aligned} M &= +FR_0 \sin \varphi; & M^0 &= R_0 \sin \varphi; \\ N &= -F \sin \varphi; & N^0 &= -\sin \varphi; \\ ds &= R_0 d\varphi. \end{aligned}$$

Підставляючи одержані величини у формулу (12.33), отримаємо:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \sin^2 \varphi R_0^3 d\varphi + \frac{1}{EA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \sin^2 \varphi R_0 d\varphi = \left[\frac{FR_0^3}{EJ} + \frac{FR_0}{EA} \right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi = \\ &= \left[\frac{FR_0^3}{EJ} + \frac{FR_0}{EA} \right] \frac{\pi}{4} = \frac{\pi FR_0^3}{4EJ} \left[1 + \frac{J}{AR_0^2} \right] = \frac{\pi FR_0^3}{4EJ} \left[1 + \frac{i^2}{R_0^2} \right], \end{aligned}$$

де i — радіус інерції перерізу.

Перший доданок у дужках відображає вплив на прогин згинаючого моменту, другий — нормальної сили. Оскільки в більшості випадків відношення $\frac{i^2}{R_0^2}$ — мала величина, то роль нормальної сили при деформації кривих стержнів у ряді випадків є порівняно невеликою.

Якби ми знаходили горизонтальне переміщення точки В, то слід було б прикласти в цій точці горизонтальну силу $F^0 = 1$. При розрахунку кута повороту цього перерізу замість одиничної сили слід було б ввести $M^0 = 1$.

Якщо при обчисленні M та N доводиться розбивати стержень на ділянки, то відповідно цьому кожен з інтегралів у формулах (12.33) розпадається на суму інтегралів з відповідно вибраними межами.

13.8. Приклад розрахунку кривих стержнів

Розрахуємо кругове кільце (тороїд), що знаходиться під дією двох сил F (рис. 13.18). Радіус осі кільця назовемо R_0 . Знайдемо напруження в якому-небудь перерізі кільця mn , нахиленому під кутом φ до горизонту. Для цього розріжемо стержень у цьому перерізі. Цей розріз не розділяє кільце на дві незалежні одну від другої частини, як це ми мали, наприклад, у випадку розтягнутого стержня. Про величину напруження тільки з умов статички нічого взнати не можемо — задача, як то кажуть, *внутрішньо статично невизначена*, хоча зовнішні сили, що діють на кільце, відомі.

З другого боку, якщо ми знайдемо напруження, що діють по якому-небудь перерізу, наприклад A , які складаються в загальному випадку в пару M_a , нормальну і дотичну сили N_a і Q_a , то для кожного іншого перерізу mn зможемо обчислити згинаючий момент M , нормальну і поперечну сили N і Q і знайти потім

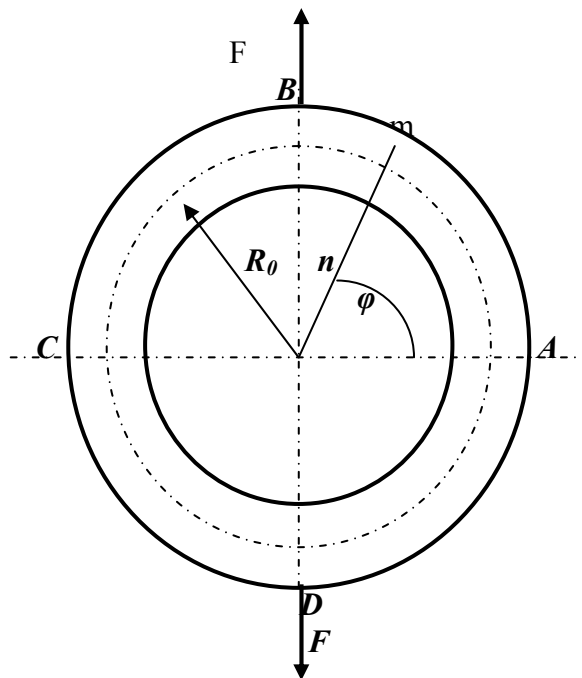


Рис. 13.18. Навантажене кільце (тороїд)

напруження. Для цього треба буде виділити з кільця заштриховану частину між перетинами A і mn (рис.13.19) і зрівноважити діючі на неї по перерізу A сили та моменти M_a, N_a і Q_a і системою M, N і Q для перерізу mn .

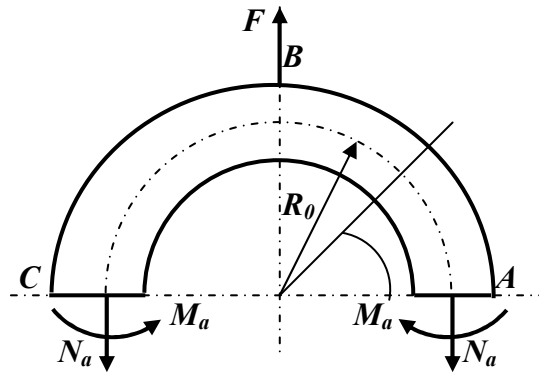


Рис. 13.19. Перерізи торойда

Вважаючи M_a, N_a і Q_a позитивними і позначаючи кут між перетинами A і mn через φ , отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} M &= +M_a + N_a R_0 (1 - \cos \varphi) + Q_a R_0 \sin \varphi, \\ N &= N_a \cos \varphi - Q_a \sin \varphi, \\ Q &= Q_a \cos \varphi - N_a \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження трьох статично невизначних величин внутрішніх зусиль в якому-небудь перерізі A кільця: згинаючого моменту M_a , нормальної сили N_a і поперечної сили Q_a .

Розрізуючи кільце перетинами в точках A і C на дві половини (рис.13.19), бачимо, що в силу симетрії нормальні зусилля в перетинах A і C дорівнюють $F/2$, а дотичні – нулю. Таким чином, з трьох зайвих невідомих залишається тільки зусилля M_a . Далі, теж в міру симетрії, перетини B і A при деформації півкільця не повертаються. Тому четверть кільця AB можемо розглядати як кривий стержень, жорстко закріплений в перерізі B і навантажений на вільному кінці силою $\frac{F}{2}$ і моментом M_a . Умова ж для знаходження M_a вийде, якщо записати, що поворот перерізу A дорівнює нулю, тобто,

$$\int_0^{s/4} \frac{MM^0 ds}{EJ} = 0. \quad (13.30)$$

Тут $M^0 = 1$ — момент, прикладений в перерізі A за напрямом діючого невідомого моменту M_a . Згинаючий момент з (13.29) дорівнює

$$M = +M_a + \frac{F}{2} (1 - \cos \varphi) R_0;$$

далі

$$M^0 = +1; \quad ds = R_0 d\varphi.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (13.28), отримуємо:

$$\frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/4} \left[+M_a + \frac{F}{2} (1 - \cos \varphi) R_0 \right] R_0 d\varphi = 0.$$

Звідси

$$+ \int_0^{\pi/2} M_a R_0 d\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{F}{2} (1 - \cos \varphi) R_0^2 d\varphi = 0$$

або

$$+ M_a R_0 \frac{\pi}{2} + \frac{F}{2} R_0^2 \frac{\pi}{2} - \frac{F}{2} R_0^2 = 0.$$

Звідси

$$M_a = -\frac{1}{2} F R_0 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = -0.1282 F R_0.$$

Таким чином, згинаючий момент M_a вийшов від'ємним.

Тепер для перерізу B при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ знаходимо

$$M_b = M_a - \frac{F}{2} R_0 (1 - \cos \varphi) = -0.1282 F R_0 + 0,5 F R_0,$$

$$N_b = \frac{F}{2} \cos \varphi = 0.$$

Таким чином, для кільця небезпечним є переріз B , хоча нормальна сила в цьому перерізі й дорівнює нулю.

Лекція 25. Тема 14. Стійкість. Поздовжній згин стержнів

Поняття про стійкість стиснутих стержнів. Формула Ейлера для критичної сили. Вплив способу закріплення кінців стержня. Межі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень.

14.1. Поняття про стійкість стиснутих стержнів

У попередньому викладі ми визначали поперечні розміри стержнів з умов міцності. Проте руйнування стержня може відбутися не тільки тому, що буде порушена міцність, але і тому, що стержень не збереже тієї форми, яка йому задана конструктором; при цьому зміниться і характер напруженого стану в стержні.

Стійкість – це здатність елементів конструкцій чинити опір зовнішнім навантаженням, зберігаючи первісну форму рівноваги.

Найтипівшим прикладом є робота стержня, стиснутого силами F . До цих пір для перевірки міцності ми мали умову $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$,

де $[\sigma] = \frac{\sigma_m}{k_m}$ (для пластичного матеріалу) або $[\sigma] = \frac{\sigma_e}{k_e}$ (для крихкого матеріалу).

Ця умова припускає, що стержень весь час, аж до руйнування його напруженнями σ_m або σ_e , працює на осьовий стиск. Вже найпростіший дослід показує, що далеко не завжди можливо зруйнувати стержень шляхом доведення напружень стиску до межі текучості або до межі міцності матеріалу.

Якщо ми піддамо поздовжньому стиску тонку дерев'яну лінійку, то вона може зламатися, зігнувшись; причому, перед зламом стискаючі сили, за яких відбудеться руйнування лінійки, будуть значно менші за ті, що викликали б при простому стиску напруження, рівні межі міцності матеріалу. Руйнування лінійки відбудеться тому, що вона не зможе зберегти надану їй форму прямолінійного, стиснутого стержня, а викривиться, що викличе появу згинаючих моментів від стискаючих сил F і, отже, додаткові напруження від згину – лінійка втратить стійкість.

Тому для надійної роботи конструкції мало, щоб вона була міцна; треба, щоб всі її елементи були стійкі: вони повинні при дії навантажень деформуватися в таких межах, щоб характер їх роботи залишався незмінним. Тому у багатьох випадках, зокрема, для стиснутих стержнів, крім перевірки на міцність, необхідна і перевірка на стійкість. Для здійснення цієї перевірки треба ближче ознайомитися з умовами, за яких стійкість прямолінійної форми стиснутого стержня порушується.

Візьмемо достатньо довгий в порівнянні з його поперечними розмірами стержень, шарнірно прикріплений до опор (рис.14.1), і навантажимо його згори центральною силою F , що поступово зростає. Очевидно, що поки сила F порівняно мала, стержень зберігатиме прямолінійну форму. При спробах відхилити його убік, наприклад, шляхом прикладання короткочасно діючої горизонтальної сили, він після ряду коливань повертатиметься до первинної прямолінійної форми, як тільки буде знято додаткове навантаження, що викликало відхилення. При поступовому збільшенні сили F стержень все повільніше повертатиметься до первинного положення при перевірках його стійкості. Нарешті, можна довести силу F до такої величини, при якій стержень, після невеликого відхилення його убік, вже не випрямиться, а залишиться викривленим. Якщо, не забираючи сили F , випрямити стержень, він вже, як правило, не зможе зберегти прямолінійну форму. Іншими словами, при цьому значенні сили F , званому

критичним, F_k , прямолінійна форма перестає бути стійкою формою рівноваги стиснутого стержня.

Перехід до критичного значення сили F відбувається раптово; варто трохи зменшити стискаючу силу в порівнянні з її критичною величиною, як прямолінійна форма рівноваги знов робиться стійкою.

З другого боку, при дуже невеликому перевищенні стискаючою силою F її критичного значення, прямолінійна форма стержня робиться вкрай нестійкою; достатньо при цьому невеликого ексцентриситету прикладеної сили, неоднорідності матеріалу по перетину, щоб стержень викривився, і не тільки не повернувся до колишньої форми, а продовжував викривлятися під дією постійно зростаючих при викривленні згинаючих моментів; процес викривлення закінчується або досягненням абсолютно нової (стійкої) форми рівноваги, або руйнуванням.

Виходячи з цього, ми повинні практично вважати критичну величину стискаючої сили F_k еквівалентною навантаженню, що «руйнує» стиснутий стержень, що виводить його (і пов'язану з ним конструкцію) з умов нормальної роботи. Зазвичай, при цьому треба пам'ятати, що «руйнування» стержня навантаженням, що перевищує критичне, може відбуватися за неодмінної умови безперешкодного зростання викривлення стержня. Тому якщо при бічному переміщенні стержень зустріне бічну опору, що обмежує його подальше викривлення, то руйнування може і не відбутися.

Звичайно, подібна можливість є виключенням, тому практично слід вважати критичну стискаючу силу нижньою межею „руйнуючої” стержень сили.

Описану вище фізичну картину втрати стійкості стиснутим стержнем легко здійснити насправді в будь-якій механічній лабораторії на дуже елементарній установці. Цей опис не є якоюсь теоретичною, ідеалізованою схемою, а відображає поведінку реального стержня під дією стискаючих сил.

Втрату стійкості прямолінійної форми стиснутого стержня іноді називають *поздовжнім згином*, оскільки вона спричиняє за собою значне викривлення стержня під дією поздовжніх сил. Для перевірки на стійкість зберігся і дотепер термін *перевірка на поздовжній згин*, що є умовним, оскільки тут мова повинна йти не про перевірку на згин, а про перевірку на стійкість прямолінійної форми стержня.

Встановивши поняття про критичну силу як про «руйнуюче» навантаження, що виводить стержень з умов його нормальної роботи, можна скласти умову для перевірки на стійкість, аналогічну умові міцності.

Критична сила F_k викликає в стиснутому стержні напруження, яке називають *критичним напруженням* і позначають літерою σ_k ($\sigma_k = \frac{F_k}{A_{\sigma p}}$) (практика показала, що при

розгляді задач стійкості можна не враховувати послаблень площі поперечного перерізу та рахувати площу «брутто» - $A_{\sigma p}$). Критичне напруження є небезпечним напруженням для стиснутого стержня. Тому, щоб забезпечити стійкість прямолінійної форми стержня,

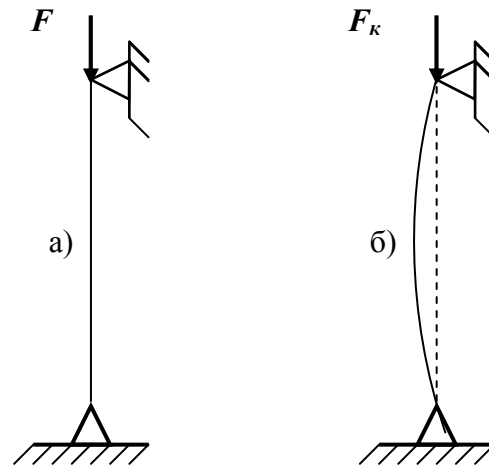


Рис. 14.1. Поздовжньо стиснутий стержень: а) дія докритичної сили; б) дія критичної сили

стиснутого силами F , необхідно до умови міцності $\left(\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]\right)$ додати ще умову стійкості:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{оп}}} \leq [\sigma_y], \quad (14.1)$$

де $[\sigma_y]$ — допустиме напруження на стійкість, що дорівнює критичному, поділеному на коефіцієнт запасу стійкості $[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y}$.

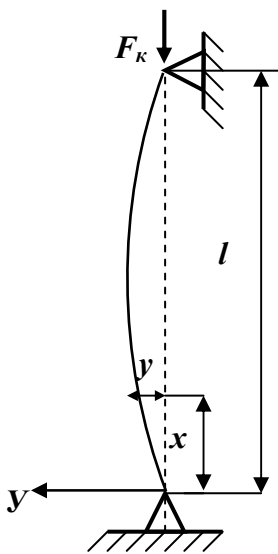
Для можливості здійснити перевірку на стійкість треба показати, як визначати σ_k і як вибрати коефіцієнт запасу k_y .

14.2. Формула Ейлера для критичної сили

Для знаходження критичних напружень σ_k треба обчислити критичну силу F_k , тобто найменшу осьову стискаючу силу, здатну утримати в рівновазі злегка викривлений стиснутий стержень. Цю задачу вперше розв'язав академік Петербурзької Академії наук Л. Эйлер в 1744 році.

Відмітимо, що сама постановка задачі інша, ніж у всіх раніше розглянутих розділах курсу. Якщо раніше ми визначали деформацію стержня при заданих зовнішніх навантаженнях, то тут ставиться зворотня задача: задавши викривлення осі стиснутого стержня, слід визначити, при якому значенні осьової стискаючої сили F таке викривлення можливе.

Розглянемо прямий стержень постійної жорсткості, шарнірно опертий по кінцях; одна з опор допускає можливість поздовжнього переміщення відповідного кінця стержня (Рис.14.2.). Власною вагою стержня нехтуємо.



Навантажимо стержень центрально прикладеними поздовжньо стискаючими силами $F = F_k$ і дамо йому вельми невелике викривлення в площині якнайменшої жорсткості. Стержень буде утримуватися у викривленому стані, що є можливим, оскільки $F = F_k$.

Деформація згину стержня припустима вельми малою, тому для вирішення поставленої задачі можна скористатися наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі стержня.

Вибравши початок координат в точці A і напрям координатних осей, як зображено на рис.14.2, матимемо

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x).$$

Візьмемо перетин на відстані x від початку координат; ордината зігнутої осі в цьому перетині буде y , а згинаючий момент дорівнюватиме

$$M(x) = -Fy.$$

Рис.14.2. Розгляд викривлення стержня

На схемі, зображеній на рис.14.2, згинаючий момент є від'ємним, ординати ж при вибраному напрямі осі y виявляються додатними. (Якби стержень викривився, опуклістю в інший бік, то момент був би додатним, а y — від'ємним, і знов таки $M(x) = -Fy$)

Ейлер Леонард (15.04.1707.-18.09.1783) – математик, механік, фізик та астроном, акад. Петербурзької АН. Наукові інтереси – до всіх галузей природознавства, до яких можна було прикласти математичні методи досліджень. Наукові праці в галузі варіаційного числення, теорії розв'язку диференціальних рівнянь, степеневих рядів, спеціальних функцій, гідродинаміки, небесної механіки, теорії теплоти, оптики, механіки. Заклав основи математичної фізики, механіки твердого тіла. Список наукових праць містить понад 850 найменувань.

Тоді наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки набуде вигляду:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -F_k y. \quad (14.2)$$

Поділяючи обидві частини рівняння на EJ і позначаючи дріб $\frac{F_k}{EJ}$ через k^2 , приводимо його до вигляду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0. \quad (14.3)$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$y = a \sin kx + b \cos kx. \quad (14.4)$$

Цей розв'язок містить три невідомих: постійні інтегрування a і b і значення $k = \sqrt{\frac{F_k}{EJ}}$, оскільки величина критичної сили нам невідома.

Граничні умови на кінцях стержня дають два рівняння:

у точці A при $x = 0$ прогин $y = 0$;

- » - » -В - » $x = l$ » - » $y = 0$.

З першої умови виходить (оскільки $\sin kx = 0$ і $\cos kx = 1$)

$$0 = b.$$

Таким чином, зігнута вісь стержня є синусоїдою з рівнянням

$$y = a \sin kx. \quad (14.5)$$

Застосовуючи другу умову, підставляємо в це рівняння

$$y = 0 \quad \text{та} \quad x = l$$

і отримуємо

$$0 = a \sin kl. \quad (14.6)$$

Звідси випливає, що або a або kl дорівнюють нулю.

Якщо a дорівнює нулю, то з рівняння (14.5) виходить, що прогин в будь-якому перетині стержня дорівнює нулю, тобто стержень залишився прямим. Це суперечить початковим умовам нашого висновку. Отже, $\sin kl = 0$ і величина kl може мати наступний нескінчений ряд значень:

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \quad (14.7)$$

де n — будь яке ціле число.

Звідси $k = \frac{n\pi}{l}$, а оскільки $k = \sqrt{\frac{F_k}{EJ}}$, то

$$\frac{F_k}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot n^2 \quad \text{та} \quad F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot n^2. \quad (14.8)$$

Інакше кажучи, навантаження, здатне утримати дещо викривлений стержень у рівновазі, теоретично може мати цілий ряд значень. Оскільки відшукуємо (цікаве з практичної точки зору) найменше значення осьової стискаючої сили, при якій стає можливим подовжній згин, то слід прийняти $n = n_{\min}$.

Перший корінь $n = 0$ вимагає, щоб F_k дорівнювала нулю, що не відповідає початковим даним задачі. Тому цей корінь повинен бути відкинтий і якнайменшим коренем треба взяти значення $n = 1$. Але саме можливістю цієї величини перевищувати значення “1” можна пояснити, наприклад, той випадок, коли за допомогою потужного преса неможливо втиснути цвях у дерев'яну дошку, в той час, як досвідчений майстер може забити такий цвях одним сильним і точним ударом (запропонувати аудиторії розібратися з цим прикладом).

Тоді отримаємо:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (14.9)$$

Це — так звана формула Ейлера для стиснутого стержня з шарнірно-опертими кінцями. Значенню критичної сили (14.9) відповідає вигин стержня по синусоїді з однією напівхвилею (14.5)

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad (14.10)$$

Значенням критичної сили вищих порядків відповідають викривлення по синусоїдах з двома, трьома і т.д. напівхвилями (рис.14.3):

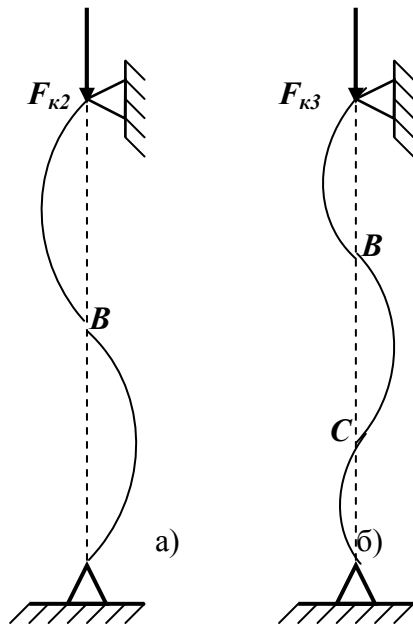


Рис.14.3. Викривлення осі

а) при $n=2$; б) при $n=3$

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{2\pi}{l}; y = a \sin \frac{2\pi x}{l}, \\ F_k &= \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{3\pi}{l}; y = a \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Таким чином, чим більше точок перегину матиме синусоїдально-викривлена вісь стержня, тим більшою повинна бути критична сила. Більш повні дослідження показують, що форми рівноваги, які визначаються формулами (14.11), нестійкі; вони переходять в стійкі форми лише за наявності проміжних опор в точках B і C (рис.14.3.).

Таким чином, поставлена задача розв'язана; для нашого стержня якнайменшу критичну силу визначають за формулою :

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

а зігнута вісь являє собою синусоїду

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Величина постійної інтегрування “а” залишилася невизначеною; фізичне значення її з'ясується, якщо в рівнянні синусоїди покласти $x = l/2$; тоді $y_{x=l/2}$ (тобто, посередині довжини стержня) набуде значення

$$y_{\max} = f = a.$$

Тобто, a — це прогин стержня в перетині посередині його довжини. Оскільки при критичному значенні сили F рівновага зігнутого стержня можлива за різних відхилень його

від прямолінійної форми (лише б ці відхилення були малими), то природно, що прогин f залишається невизначеним.

Він повинен бути при цьому настільки малим, щоб ми мали право застосовувати наближене диференціальне рівняння зігнутої осі, тобто щоб $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ було малим у порівнянні з одиницею.

14.3. Вплив способу закріплення кінців стержня

Формула Ейлера була одержана шляхом інтегрування наближеного диференціального рівняння зігнутої осі стержня при певному закріпленні його кінців (шарнірно-опертих). Отже, знайдений вираз критичної сили справедливий лише для стержня з шарнірно-опертими кінцями і зміниться при зміні умови закріплення кінців стержня.

Закріплення стиснутого стержня з шарнірно-опертими кінцями називають основним випадком закріплення. Інші види закріплення приводитимемо до основного випадку.

Якщо повторити весь хід висновку для стержня, жорстко защемленого одним кінцем і навантаженого осьовою стискаючою силою на іншому кінці (рис.14.4б), то отримаємо інший вираз для критичної сили, а отже, і для критичних напружень.

Підійдемо до з'ясування критичної сили для цього випадку шляхом таких простих міркувань.

Нехай при досягненні силою F критичного значення колона зберігатиме рівновагу при малому вигині по кривій AB . Порівнюючи рис.14.4а та 14.4б, бачимо, що зігнута вісь стержня, жорстко закріпленого одним кінцем, знаходиться абсолютно в тих же умовах, що і верхня частина стержня подвійної довжини з шарнірнозакріпленими кінцями. Отже, критична сила для стійки завдовжки l з одним жорстко закріпленим, а іншим вільним кінцями буде та ж, що для стійки з шарнірно-опертими кінцями при довжині $2l$:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (14.12)$$

Якщо звернутися до випадку стійки, у якої обидва кінці жорстко закріплені і не можуть повертатися (рис.14.4в), то помітимо, що при вигині, за симетрією, середня частина стержня завдовжки $\frac{l}{2}$ працюватиме в тих же умовах, що і стержень при шарнірно-опертих кінцях (оскільки в точках перегину C і D згинаючі моменти дорівнюють нулю, то ці точки можна розглядати як шарніри).

Тому критична сила для стержня із жорстко закріпленими кінцями довжиною l дорівнює критичній силі для стержня основного випадку завдовжки $\frac{l}{2}$:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (14.13)$$

Формули (14.12) і (14.13) можна об'єднати з формулою для критичної сили основного випадку $P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ і записати

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (14.14)$$

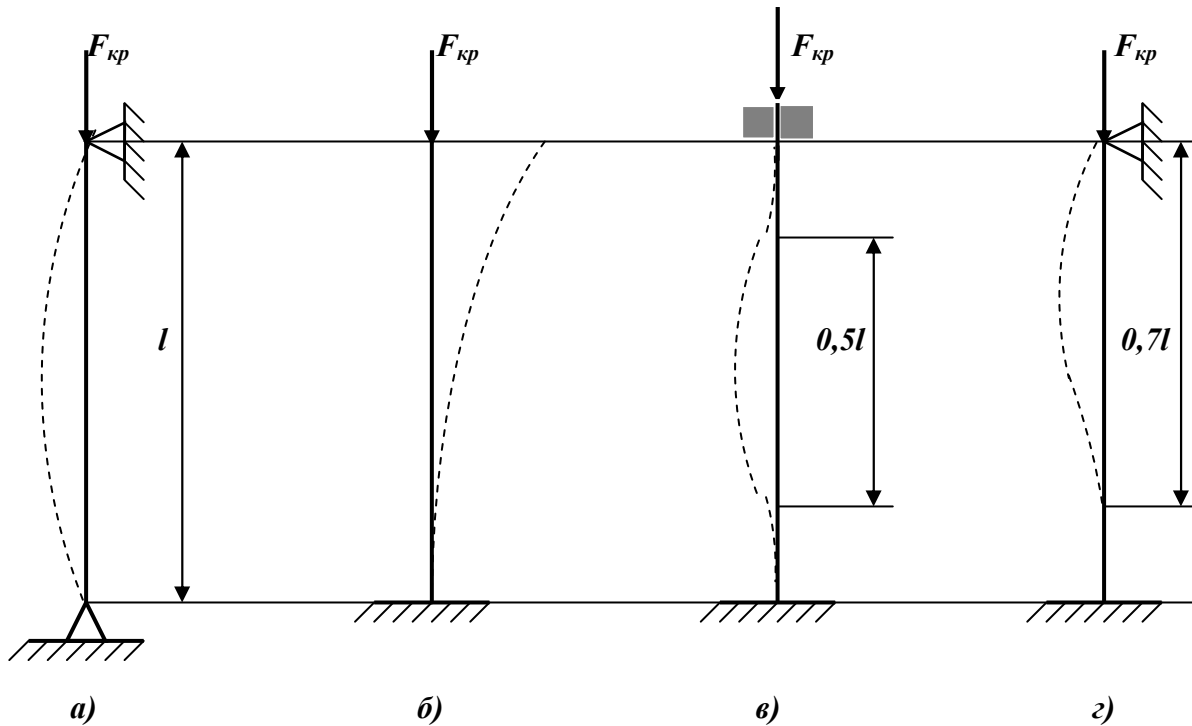


Рис. 14.4. Вигин осі при різних способах закріплення:
 а) – $\mu = 1$; б) – $\mu = 2$; в) – $\mu = 0,5$; г) – $\mu = 0,7$

де μ — коефіцієнт приведення довжини, що відповідно дорівнює:

- при шарнірних кінцях (основний випадок) $\mu = 1$;
- одному вільному, іншому жорстко защемленому кінцях $\mu = 2$;
- обох жорстко закріплених кінцях $\mu = 1/2$.

Для стержня, зображеного на рис.14.4г, з одним жорстко закріпленням, а іншим шарнірно-опертим кінцями, коефіцієнт μ приблизно дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$, а критична сила:

$$F_k \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2} \approx 2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (14.15)$$

Величину μl називають *приведеною (вільною) довжиною*. За допомогою коефіцієнта приведення довжини будь-який випадок конкретного виконання опор стержня можна звести до основного. Треба лише при обчисленні гнучкості замість дійсної довжини стержня ввести в розрахунок приведену довжину μl . Поняття про приведену довжину вперше ввів професор Петербурзького інституту інженерів шляхів сполучення Ф. Ясинський.

Ясинський Фелікс Станіславович – (15.09.1856-18.11.1899). Інженер та вчений в галузі будівельної механіки та теорії пружності. Був начальником технічного відділу Петерб.-Моск.з.д., проф. Петерб. ін-ту інженерів шляхів сполучень, а також викладав в інших інститутах. Один із засновників розрахунків на стійкість. Вказав на необхідність введення коеф. зменшення основного допустимого напруження. Його теорія суттєво вплинула на подальші розрахунки в галузі теорії стійкості.

Проте на практиці майже ніколи не зустрічаються в чистому вигляді ті закріплення кінців стержня, які ми маємо на наших розрахункових схемах (рис. 14.4а,б,в,г). Замість кульових опор зазвичай застосовують циліндричні шарніри. Подібні стержні слід вважати шарнірно-опертими при вигині їх у площині, перпендикулярній до осі шарнірів; при викривленні ж в площині цих осей кінці стержнів слід вважати жорстко закріпленими (з урахуванням зауважень, наведених нижче для жорстко закріплених кінців).

У конструкціях дуже часто зустрічаються стиснуті стержні, кінці яких приклепані або приварені до інших елементів, часто ще з додаванням у місці прикріплення листів фасонів, але таке закріплення, проте, важко вважати жорстким закріпленням, оскільки частини конструкції, до яких прикріплені ці стержні, самі можуть не бути абсолютно жорсткими.

Тим часом, достатньо можливості вже невеликого повороту опорного перерізу в жорсткому закріпленні, щоб воно опинилося в умовах, дуже близьких до шарнірного. Тому на практиці неприпустимо розраховувати такі стержні, як стійки з абсолютно жорстко закріпленими кінцями. Лише у випадках, коли має місце дуже надійне закріплення кінців, допускається невелике (відсотків на 10—20) зменшення вільної довжини стержня.

На практиці зустрічаються стержні, що опираються на сусідні елементи по всій площині опорних поперечних перетинів. Сюди відносять дерев'яні стійки, окремо поставлені металеві колони, притягнуті болтами до фундаменту, і т.п. При ретельному конструюванні опорного черевика і з'єднання його з фундаментом можна вважати ці стержні такими, що мають жорстко закріпленій кінець. Сюди ж відносять могутні колони з циліндричним шарніром при розрахунку їх на вигин у площині осі шарніра. Зазвичай важко розраховувати на надійне і рівномірне прилягання плоского кінцевого перетину стиснутого стержня до опори. Тому вантажопідйомність таких стійок звичайно мало перевищує вантажопідйомність стержнів з шарнірно-опертими кінцями.

14.4. Критичне напруження

Визначивши значення критичної сили, можна знайти і величину критичного напруження σ_k , розділивши силу F_k на площу перетину стержня A . Оскільки величина критичної сили визначалася з розгляду деформацій стержня, на яких місцеві ослаблення площі перетину позначаються вкрай слабо, то у формулу для F_k входить момент інерції $J_{op} = i^2 A_{op}$. Тому прийнято при обчисленні критичних напружень, а також при складанні умови стійкості вводити в розрахунок повну, а не ослаблену площу поперечного перетину стержня A_{op} . Тоді

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A_{op}} = \frac{\pi^2 EJ_{op}}{(\mu l)^2 A_{op}} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (14.16)$$

Таким чином, критичне напруження для стержнів даного матеріалу є обернено пропорційним до квадрата відношення довжини стержня до якнайменшого радіуса інерції його поперечного перетину. Це відношення $\lambda = \mu l / i$ називають *гнучкістю стержня*. Воно відіграє вельми важливу роль у всіх перевірках стиснутих стержнів на стійкість.

З формули (14.16) видно, що критичне напруження при тонких і довгих стержнях може бути вельми малим, нижчим за основне допустиме напруження $[\sigma]$. Так, для сталі з межею міцності $\sigma_s \approx 400 \text{ МПа}$ та межею текучості $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ напруження, що допускається, може бути прийнято $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; критичне ж напруження для стержня з гнучкістю $\lambda = 150$ при модулі пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^6 \text{ з/см}^2$ буде дорівнювати

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{(150)^2} = 87,7 (\text{МПа}) < 160 \text{ МПа}.$$

Таким чином, якби площа стиснутого стержня з такою гнучкістю була підібрана лише за умовою міцності, то стержень руйнувався б від втрати стійкості прямолінійної форми.

14.5. Межі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень

Здавалося б, що одержані в попередніх параграфах результати вирішують задачу перевірки стиснутого стержня на стійкість і залишається вибрати лише коефіцієнт запасу k_y . Проте це далеко не так. Найближче ж вивчення числових величин, отриманих за формулою Ейлера, показує, що вона дає правильні результати лише у певних межах.

У таблиці 14.1. наведено величини критичних напружень, обчислених при різних значеннях гнучкості для сталі Ст3, яку, як правило, використовують в металевих конструкціях.

Графічно залежність σ_k від λ , розрахована за формулою (14.12) представлена на рис.14.5. Ця залежність представляється гіперболічною кривою, так званою «гіперболою Ейлера». При використанні цієї кривої треба враховувати, що формулу (14.12) одержано за допомогою інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки, тобто, в припущенні, що напруження в стержні у момент втрати стійкості не перевищують межі пропорційності.

Отже, ми не маємо права користуватися величинами критичних напружень, обчислених за формулою Ейлера, якщо вони виходять більшими за цю межу для даного матеріалу. Інакше кажучи, формулу Ейлера можна застосовувати лише за умови:

$$\sigma_k \leq \sigma_{nc} \quad \text{або} \quad \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2} \leq \sigma_{nc} \quad (14.17)$$

Критичні напруження σ_k

Таблиця 14.1.

Значення гнучкості $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Критичні напруження σ_k при $E=2 \cdot 10^5$ МПа
150	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(150)^2} = 87,7(\text{МПа})$
100	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(100)^2} = 200(\text{МПа})$
80	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(80)^2} = 330(\text{МПа})$
50	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(50)^2} = 800(\text{МПа})$

Якщо з нерівності (14.17) виразити гнучкість λ , то умова можливості використання формули Ейлера одержить інший вигляд:

$$\lambda_n \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{nc}}} \quad (14.18)$$

Підставляючи відповідні значення модуля пружності й межі пропорційності для даного матеріалу, знаходимо найменше значення гнучкості, при якій ще можна користуватися формулою Ейлера. Для сталі 3 межу пропорційності можна прийняти такою,

що дорівнює $\sigma_{нц} = 200 \text{ МПа}$, тому, як видно з таблиці 14.1. і з формули (14.18), для стержнів з цього матеріалу можна користуватися формулою Ейлера лише при гнучкості

$$\lambda_n \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100,$$

тобто більшої, ніж 100.

Для сталі 5 при $\sigma_{нц} = 300 \text{ МПа}$ формулу Ейлера можна застосовувати при гнучкості $\lambda \geq 85$; для чавуну — при $\lambda \geq 80$, для сосни — при $\lambda \geq 110$ і т.д. Якщо на рис.14.5. провести горизонтальну лінію з ординатою, що дорівнює $\sigma_{нц} = 200 \text{ МПа}$, то вона розітне гіперболу Ейлера на дві частини. Користуватися можна лише нижньою частиною графіка, що характеризує поведінку порівняно тонких і довгих стержнів, втрата стійкості яких відбувається при напруженнях, не вищих за межу пропорційності.

Теоретичне рішення, одержане Ейлером, виявилось здатним до застосування на практиці лише для дуже обмеженої категорії стержнів, а саме, тонких і довгих, з великою гнучкістю. Тим часом, у конструкціях дуже часто зустрічаються стержні з малою гнучкістю. Спроби використовувати формулу Ейлера для обчислення критичних напружень і перевірки стійкості при малих гнучкостях приводили іноді до вельми серйозних катастроф, та й досліди над стиском стержнів показують, що при критичних напруженнях, більших від межі пропорційності, дійсні критичні сили є значно меншими від визначених за формулою Ейлера.

Таким чином, треба знайти спосіб обчислення критичних напружень і для випадків, коли вони перевищують межу пропорційності матеріалів, наприклад, для стержнів з м'якої сталі при гнучкостях від 0 до 100.

Необхідно зразу ж відзначити, що в даний час найважливішим джерелом для встановлення критичних напружень за межею пропорційності, тобто, за умов малих і середніх гнучкостей є результати експериментів. Є спроби і теоретичного рішення цієї задачі, але вони швидше вказують шлях до подальших досліджень, ніж дають підстави для практичних розрахунків.

Перш за все треба виділити стержні з малою гнучкістю (від 0 приблизно до 30—40). У них довжина порівняно невелика відносно розмірів поперечного перетину. Наприклад, для стержня круглого перетину гнучкості 20 відповідає відношення довжини до діаметру, що дорівнює 5. Для таких стержнів важко казати про явище втрати стійкості прямолінійної форми всього стержня в цілому в тому значенні, як це має місце для тонких і довгих стержнів.

Ці короткі стержні виходитимуть з ладу в основному за рахунок того, що напруження стиску в них досягатимуть межі текучості σ_m (для пластичного матеріалу) або межі міцності σ_s (для крихкого матеріалу). Тому для коротких стержнів, до гнучкості приблизно $30 \div 40$, критичні напруження будуть дорівнювати, або трохи нижчі (за рахунок певного викривлення осі стержня, що все ж таки має місце), відповідно або σ_m (сталь), або σ_s (чавун, дерево).

Таким чином, маємо два граничні випадки роботи стиснутих стержнів: короткі стержні, які втрачають вантажопід'ємність в основному за рахунок руйнування матеріалу від стиску, і довгі, для яких втрата вантажопід'ємності викликається порушенням стійкості прямолінійної форми стержня. Кількісна зміна співвідношення довжини і поперечних розмірів стержня змінює і весь характер явища руйнування. Загальним залишається лише раптовість появи критичного стану в розумінні раптового різкого зростання деформацій.

У стиснутих стержнях великої гнучкості, для яких можна застосувати формулу Ейлера, після досягнення силою P критичного значення зазвичай спостерігається різке зростання деформацій. До цього моменту прогини, як правило, збільшуються зі зростанням навантаження, але залишаються незначними. Теоретично можна б було чекати, що до

критичної сили стержень залишатиметься прямим, проте ряд неминучих на практиці обставин — початкова кривизна стержня, деякий ексцентриситет навантаження, місцеві перенапруження, неоднорідність матеріалу — викликають невеликі прогини і при стискаючих силах, менших за критичні.

Подібний же характер має і залежність укорочень від напружень при стиску коротких стержнів; має місце та ж раптовість зростання деформацій при певній величині напружень (коли $\sigma = \sigma_m$).

Залишається тепер розглянути поведінку стиснутих стержнів при середніх величинах гнучкості, наприклад, для сталевих стержнів при гнучкостях від 40 до 100. З подібними значеннями гнучкостей інженер найчастіше зустрічається на практиці.

За характером руйнування ці стержні наближаються до категорії тонких і довгих стержнів; вони втрачають свою прямолінійну форму і руйнуються при явищах значного бічного вигинання. При дослідях для них можна наголосити на наявності явно вираженої критичної сили в «ейлеровому» значенні; критичні напруження виходять вище за межу пропорційності і нижче за межу текучості для пластичних і межу міцності для крихких матеріалів.

Проте втрата прямолінійної форми і зменшення критичних напружень у порівнянні з короткими стержнями, для стержнів середньої гнучкості пов'язані з такими ж явищами втрати міцності матеріалу, які викликають втрату вантажопід'ємності в коротких стержнях. Тут комбінуються і вплив довжини, що знижує величину критичних напружень, і вплив значного зростання деформацій матеріалу при напруженнях за межею пропорційності.

Експериментальне визначення критичних сил для стиснутих стержнів проводилося неодноразово як у нас, так і за кордоном. Особливо значний дослідний матеріал зібрав проф. Ф. Ясинський, що склав таблицю критичних (руйнуючих) напружень залежно від гнучкості для цілого ряду матеріалів, що поклато початок сучасним методам розрахунку стиснутих стержнів на стійкість.

На підставі одержаного дослідного матеріалу можна вважати, що при критичних напруженнях, менших межі пропорційності, всі експерименти підтверджують формулу Ейлера для будь-якого матеріалу.

Для стержнів середньої і малої гнучкості були запропоновані різні емпіричні формули, які показують, що критичні напруження при таких гнучкостях змінюються за лінійним законом розподілу:

:

$$\sigma_k = a - b\lambda \quad , \quad (14.19)$$

де a і b — коефіцієнти, залежні від матеріалу, а $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ — гнучкість стержня. Для литого заліза Ясинській одержав $a = 338,7 \text{ МПа}$ та $b = 1,487 \text{ МПа}$. Для сталі 3 при гнучкостях від $\lambda = 40$ до $\lambda = 100$ коефіцієнти a і b можуть бути прийняті: $a = 336,0 \text{ МПа}$; $b = 1,47 \text{ МПа}$. Для дерева (сосна) — $a = 29,3 \text{ МПа}$, $b = 0,194 \text{ МПа}$.

Дані про коефіцієнти a і b для інших матеріалів приводяться в довідниках. Іноді зручні емпіричні формули, що дають для непружної області зміну критичних напружень за законом квадратної параболи. До них відноситься формула

$$\sigma_k = \sigma_0 - a\lambda^2 \quad . \quad (14.20)$$

Тут при $\lambda = 0$ вважають $\sigma_k = \sigma_0 = \sigma_m$ для пластичного і $\sigma_k = \sigma_0 = \sigma_e$ — для крихкого матеріалу; коефіцієнт a , підібраний з умови плавного сполучення з гіперболою Ейлера, має значення:

для сталі з межею текучості	$\sigma_m = 280,0 \text{ МПа}$	$a = 0,009 \text{ МПа}$
сосни » міцності	$\sigma_e = 300$	$a = 0,008$
чавуну » »	$\sigma_e = 4200$	$a = 0,44$

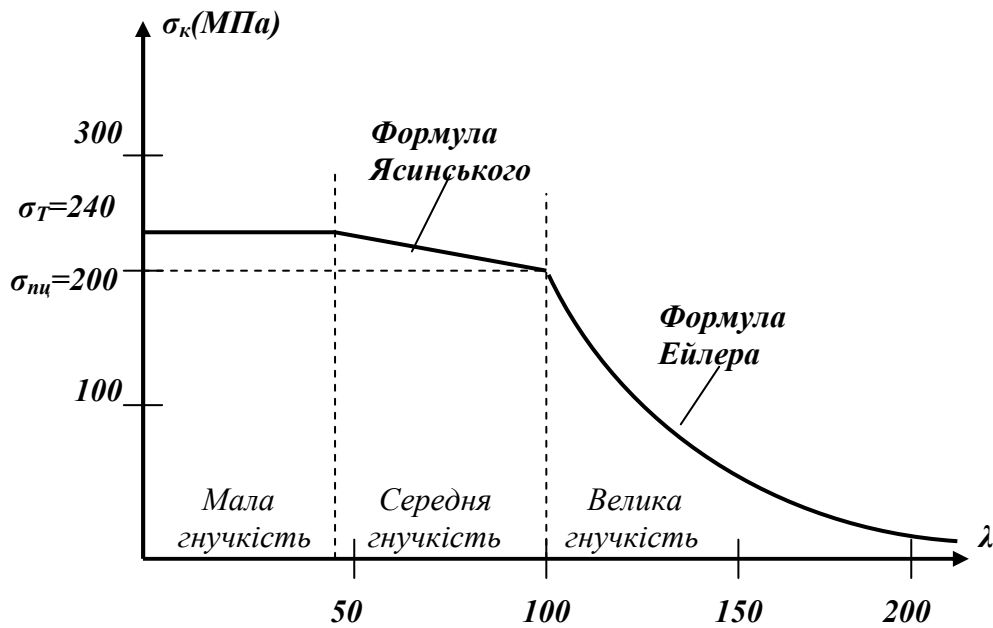


Рис.14.5. Ілюстрація меж застосування формули Ейлера та формули Ясинського

За наявності наведених тут даних можна побудувати повний графік критичних напруг (залежно від гнучкості) для будь-якого матеріалу. На рис.14.5 зображено такий графік для будівельної сталі з межею текучості $\sigma_m = 240,0 \text{ МПа}$ і межею пропорційності $\sigma_{\pi} = 200 \text{ МПа}$.

Графік складається з трьох частин: гіперболи Ейлера при $\lambda > 100$, похилої прямої при $40 \leq \lambda \leq 100$ і горизонтальної, або слабко похилої, прямої при $\lambda \leq 40$. Подібні ж графіки можна побудувати, комбінуючи формулу Ейлера з результатами експериментів, і для інших матеріалів.

Таким чином, можна вважати, що задачу визначення критичних напружень для стержнів будь-якої гнучкості вирішена з достатньою для практичних цілей точністю.

Лекція 26. Продовження теми 14 (Стійкість. Поздовжній згин стержнів)

Перевірка стиснутих стержнів на стійкість. Приклад розрахунку стиснутого стержня на стійкість. Вибір типу перерізу і матеріалу.

14.5. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість

Раніше відзначалось, що для стиснутих стержнів повинно бути проведено дві

перевірки: – на міцність $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$, де $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{k_0}$;

– на стійкість $\sigma = \frac{F}{A_{\sigma p}} \leq [\sigma_y]$, де $[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{k_y}$.

Величина критичного напруження σ_k знайдена вище; для встановлення напруження, що допускається на стійкість, нам залишається тепер вибрати тільки коефіцієнт запасу k . В інженерній практиці цей коефіцієнт коливається для сталі в межах від 1,8 до 3,0. Коефіцієнт запасу на стійкість вибирають вище за основний коефіцієнт запасу міцності k_0 , який вибирають для сталі, як правило, в межах $1,5 \div 2$.

Це пояснюється наявністю ряду обставин, неминучих на практиці (початкова кривизна, ексцентриситет дії навантаження, неоднорідність матеріалу і т. д.) і майже не відображаються на роботі конструкції при інших видах деформації (кручення, згин, розтяг).

Для стиснутих же стержнів, зважаючи на можливість втрати стійкості, ці обставини можуть сильно знизити вантажопідйомність стержня. Для чавуну коефіцієнт запасу коливається від 5,0 до 5,5, для дерева — від 2,8 до 3,2.

Щоб встановити зв'язок між напруженням на стійкість $[\sigma_y]$ і напруженням, що допускається на міцність $[\sigma]$, візьмемо їх відношення:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_k k_0}{k_y \sigma_0} \quad \text{або} \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y} [\sigma].$$

Позначаючи

$$\varphi = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \cdot \frac{k_0}{k_y}, \quad (14.21)$$

отримаємо

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma], \quad (14.22)$$

де φ — коефіцієнт зменшення основного напруження, що допускається, для стиснутих стержнів.

Маючи графік залежності σ_k від λ для даного матеріалу, знаючи $\sigma_n = \sigma_m$ або $\sigma_n = \sigma_a$, і вибравши коефіцієнти запасу на міцність k_0 і на стійкість k_y , можна скласти таблиці значень коефіцієнта φ функції від гнучкості. Такі дані наведено в технічних умовах на проектування споруд. Вони зведені в таблицю 14.2.

Користуючись цією таблицею, можна підібрати переріз стиснутого стержня. Оскільки величина площі перерізу залежить від $[\sigma_y]$, а це напруження, у свою чергу, через коефіцієнт φ пов'язане з гнучкістю стержня λ , тобто з формою і розмірами його перерізу, то підбір доводиться здійснювати шляхом послідовних наближень у такому, наприклад, порядку.

Вибираємо форму перерізу і задаємося його розмірами; обчислюємо якнайменший радіус інерції і гнучкість; знаходимо в таблиці коефіцієнт φ і обчислюємо напруження, що

допускається, на стійкість $[\sigma_y] = \phi[\sigma]$ порівнюємо дійсне напруження $\sigma = \frac{F}{A_{\text{бр}}}$ з величиною $[\sigma_y]$. Якщо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{бр}}} \leq \phi[\sigma] \quad (14.23)$$

не задовільнено, або задоволено з великим запасом, змінюємо розміри перерізу і повторюємо розрахунок.

Залежність коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження ϕ від матеріалу та гнучкості λ .

Таблиця 14.2.

Гнучкість $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження ϕ для				
	сталі марок 4, 3, 2, ОС	сталі марки 5	сталі СПК	чавуну	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
80	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,18
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
140	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,23	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
300	0,19	0,16	0,14	—	0,08

Звичайно, остаточно вибраний перетин повинен задовольняти й умові міцності

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma].$$

У практичних розрахунках умова стійкості іноді записується так:

$$\sigma_p = \frac{F}{\phi A_{\text{бр}}} \leq [\sigma].$$

У лівій частині σ_p є розрахунковим (умовним) напруженням.

Хід обчислень покажемо на прикладі.

14.6. Приклад розрахунку стиснутого стержня на стійкість

Потрібно підібрати двотавровий перетин стійки з одним жорстко зашцімленим кінцем, а другим вільним, що стискається силами $F = 0,4 \text{ МН}$; довжина стійки $l = 1,5 \text{ м}$. Основне напруження, що допускається $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ (рис.14.6.).

$$\text{Оскільки в умові стійкості } \sigma_p = \frac{F}{\varphi A_{\sigma p}} \leq [\sigma]$$

нам не відоме ні $A_{\sigma p}$, ні φ , однією з цих величин необхідно задатися. Прийmemo для першого наближення $\varphi = 0,5$. В цьому випадку необхідна площа поперечного перерізу стержня дорівнюватиме

$$A_{\sigma p} \geq \frac{F}{\varphi [\sigma]} \quad \text{або} \quad A_{\sigma p} = \frac{0,4}{0,5 \cdot 160} = 50 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2)$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 24, з площею $A = 52,6 \text{ см}^2$.

Найменший радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = 2,38 (\text{см}). \text{ Відповідна гнучкість}$$

$$\text{стійки } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 150}{2,38} = 126.$$

Коефіцієнт φ за інтерполяцією між

значеннями його з таблиці 14.2 для $\lambda = 120$ і $\lambda = 130$ дорівнює $\varphi = 0,43$. Розрахунковим напруженням буде

$$\sigma_p = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{0,4}{0,43 \cdot 52,6 \cdot 10^{-4}} = 177 (\text{МПа}) > 160$$

$$\text{Перенапруження складає } \frac{177 - 160}{160} \cdot 100 = 10,7\%$$

Спробуємо двотавр № 27, а. $A = 54,6 \text{ см}^2$; $i_{\min} = 2,51 \text{ см}$; найбільша його гнучкість

$$\lambda = \frac{2 \cdot 150}{2,51} = 120. \text{ Оскільки коефіцієнт } \varphi = 0,45, \text{ то розрахункове напруження}$$

$$\sigma_p = \frac{F}{\varphi A} = \frac{0,4}{0,45 \cdot 54,6 \cdot 10^{-4}} = 162,5 (\text{МПа}).$$

$$\text{Перенапруження складає тепер } \frac{162,5 - 160}{160} \cdot 100 = 1,5\%, \text{ що є допустимим.}$$

14.7. Вибір типу перерізу і матеріалу

14.7.1. Вибір типу перерізу.

Так як в опорі стержнів поздовжньому згину (порушенню стійкості) основну роль відіграє гнучкість стержня, а, отже, величина найменшого радіуса інерції перерізу, то дуже істотним є питання не тільки про величину площі поперечного перерізу стержня, як при розрахунку на міцність, але і про форму поперечного перерізу. Для найекономічнішого вирішення питання необхідно конструювати перетин, біля якого при певній площі величина найменшого радіуса інерції була б якомога більшою. Для цього перш за все слід прагнути

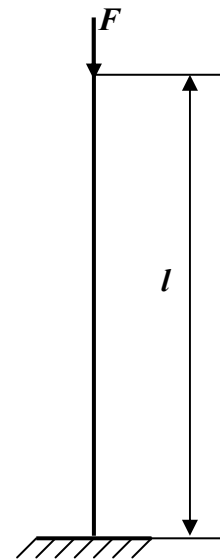


Рис.14.6. Схема навантаження

того, щоб найменший радіус інерції дорівнював найбільшому, тобто, щоб всі центральні моменти інерції перерізу були рівні, еліпс інерції звернувся б у круг. Такий стержень чинитиме однаковий опір втраті стійкості в будь-якому напрямі.

Якщо приведена довжина стержня при можливому викривленні в обох головних площинах буде різна, то і головні моменти інерції теж доцільно вибрати різними з таким розрахунком, щоб коефіцієнти φ були в обох випадках однаковими.

Далі необхідно прагнути отримання при даній площі найбільших центральних моментів інерції. Для цього необхідно розмістити матеріал перерізу по можливості далі від центра ваги. Обом поставленим умовам цілком задовольняє, наприклад, трубчастий перетин (рис.14.7а), який дуже часто застосовується для стиснутих колон і стійок.

Нижня межа товщини стінок такого перерізу визначається або можливістю конструктивного виконання відливання (чавун), або тим, щоб при роботі стержня не відбулося місцевих деформацій тонкої стінки — її викривлення.

Для запобігання таких місцевих пошкоджень, щоб забезпечити при роботі стержня збереження прийнятої форми перерізу (кільце), усередині трубчастого стержня розташовують систему посилень, наприклад, на деякій відстані одну від другої ставлять так звані діафрагми, що додають жорсткість тонкостінному профілю (рис.14.7б). Взагалі при правильному конструюванні стиснутих стержнів пристрій додаткових кріплень грає вельми велику роль.

Деякі види перетинів, що чудово чинять опір вигину в одній площині, як це буває при роботі балок, виявляються дуже невідгідними при застосуванні їх для стиснутих стержнів; такими, наприклад, є двотавровий перетин, перетин з двох швелерів, стінки яких розташовані впритул одна до іншої (рис.14.7в).

Невідгідність подібних перетинів при роботі на поздовжній вигин зумовлена великою різницею у величинах їх головних моментів інерції. Щоб уникнути цього недоліку, можна розсунути обидві половинки перерізу з двох швелерів для того, щоб змусити всі перетини працювати як одне ціле — їх з'єднують за допомогою так званих сполучних ґрат (рис.14.8).

Необхідною умовою безпечної роботи таких складових стержнів є пристрій достатньо жорсткого кріплення (ґрати, планки), щоб справді змусити обидві половини працювати сумісно, як один цілий стержень; тільки в цьому випадку ми матимемо право вводити в розрахунок момент інерції відносно однієї осі.

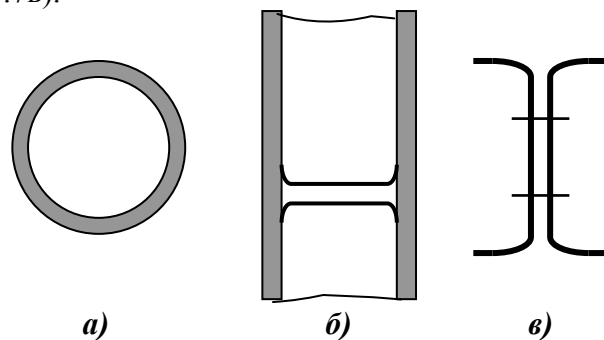


Рис.14.7. Аналіз доцільності використання деяких перерізів: а)– кільце; б)– місцеве підсилення; в)– комбінація швелерів

Якщо ж два могутні швелери скріпляти дуже слабкими ґратами, то вони не зможуть примусити їх працювати спільно. Кожна половина стержня працюватиме самостійно, стійкість її виявиться у багато разів меншою стійкості стержня, в якому обидві половини є одним цілим. Недостатня увага до пристрою надійних кріплень у складових стержнях була причиною серйозних катастроф (руйнування Квебекського моста в Америці).

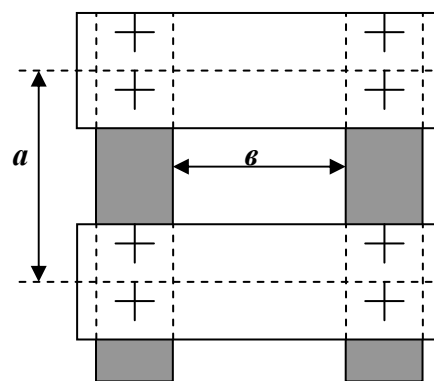


Рис.14.8. Сполучені ґрати

При конструюванні складового стержня відстань b , на яку треба розсунути обидві половини стержня, визначається, тим, щоб моменти інерції щодо обох головних осей y і z були приблизно рівні. Зазвичай навіть прагнуть момент інерції щодо осі, перпендикулярної до площини-грати, зробити дещо більшим, оскільки грати не можуть забезпечити спільну роботу обох половин стержня так само добре, начебто перетин був одне ціле.

14.6.2. Вибір матеріалу.

Що стосується вибору матеріалу для стиснутих стержнів, це зумовлюється наступними міркуваннями. Поки критичні напруження не перевершують межі пропорційності матеріалу, єдиною механічною характеристикою, що визначає здатність стержня зберігати стійкість, є модуль пружності E .

Тим часом для стержнів середньої і особливо малої гнучкості величина критичних напружень значною мірою залежить від межі текучості або межі міцності матеріалу. Цими обставинами і слід керуватися при виборі матеріалу для стиснутих стержнів великої і малої гнучкості.

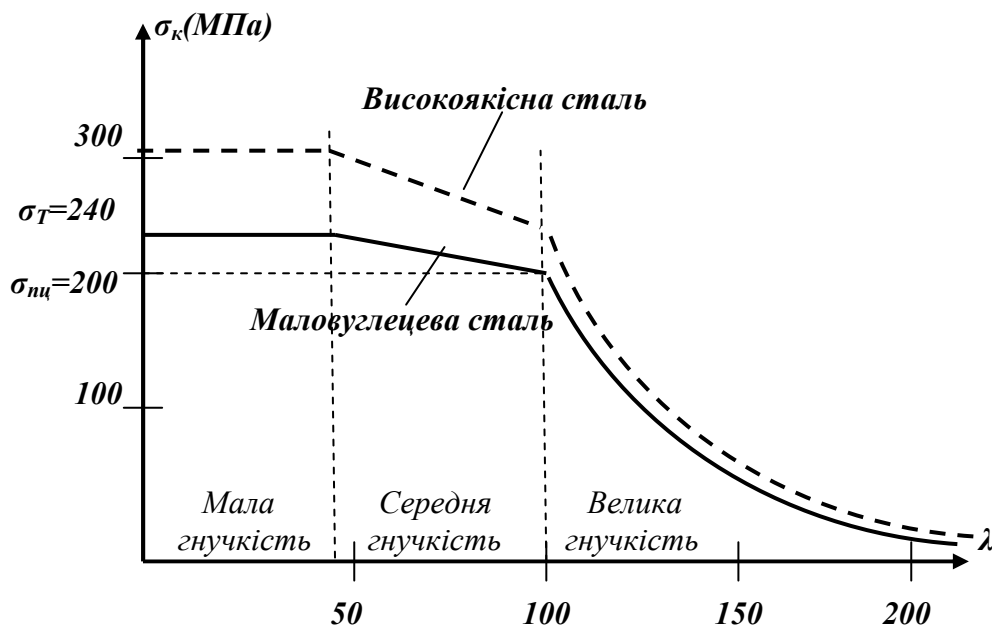


Рис.14.9. Класифікація стиснутих стержнів за гнучкістю

Наприклад, застосування спеціальних сортів сталі підвищеної міцності для тонких і довгих стиснутих стержнів не має значення, оскільки модуль E для всіх сортів сталі приблизно один і той же.

Навпаки, застосування високоякісних сталей виявиться дуже вдалим для стержнів з критичними напруженнями, що перевищують межу пропорційності, бо для таких стержнів підвищення межі текучості викличе зростання критичних напружень, а отже, підвищить опір втраті стійкості. На рис.14.9. зображено наближене розташування графіків залежності σ_k від гнучкості для маловуглецевої сталі і сталі підвищеної якості з межею текучості $\sigma_m = 300 \text{ МПа}$.

З графіків бачимо, що критичні, а отже, і допустимі напруження для обох сортів сталі будуть однаковими для стержнів з гнучкістю $\lambda > 100$. І навпаки, вони істотно відрізняться для стержнів з меншими гнучкостями.

Лекція 27. Тема 15. Динамічні навантаження

Введення. Врахування сил інерції. Обчислення напружень при рівноприскореному русі. Розрахунок кільця, що обертається (обід маховика).

15.1. Врахування сил інерції та коливань. Введення

Дотепер ми вирішували основну задачу опору матеріалів, визначали розміри поперечних перерізів частин конструкції і вибирали для них матеріал лише при *статичній* дії навантажень.

Статична дія навантажень має місце, коли при передачі тиску від однієї частини конструкції на іншу (або при дії об'ємних сил) механічний рух цих частин не змінюється з часом. У цьому випадку кожен елемент конструкції знаходиться в рівновазі під дією зовнішніх навантажень і напружень.

Постійність руху характеризується тим, що швидкість даних деталей і кожної їх частини не змінюється — відсутнє прискорення частинок цих елементів. Наявність же прискорення частинок даного тіла або сумісних з ним деталей характеризує вже дію *динамічного навантаження*. Тиск землі на підпірну стінку буде статичним навантаженням, оскільки ні стінка, ні земляна маса не рухаються, — швидкість їх постійна і дорівнює нулю.

Так само статичною буде дія вантажу, що піднімається, на канат при постійній швидкості підйому вантажу. Але ця дія буде вже динамічною, якщо вантаж піднімається з прискоренням. Під дією динамічного навантаження знаходяться шатуни парових машин і двигунів внутрішнього згорання, оскільки окремі елементи їх рухаються зі змінною швидкістю. Як інший приклад конструкції, що працює в умовах динамічного навантаження, можна навести фундамент машини, яка має частини, що обертаються, розташовані позацентрово щодо осі обертання, — вони відчуватимуть відцентрове прискорення; можна вказати, також, на фундамент і шток парового молота, оскільки бойок молота при куванні втрачає свою швидкість за дуже короткий період часу, що пов'язано з наданням йому вельми великих прискорень від'ємного знака.

Вже з цих прикладів бачимо, що на практиці можна зустрітися з різними видами прискорення даної деталі або дотичних з нею тіл; воно може бути постійним за величиною і напрямком або тільки за напрямком, може бути знаковим.

При *змінних і знаковимних напруженнях* ми зустрічаємося з руйнуванням від *тріщини, що поступово розвивається*, — з явищем *втоми*. При різкій зміні швидкості руху елемента конструкції, коли, наприклад, має місце явище удару, може виявитися *крихкість* у таких матеріалах, які при статичній дії навантажень вважалися пластичними. Тому при перевірці міцності деталей конструкцій, що піддаються дії динамічних навантажень, доводиться цікавитися впливом цих навантажень не тільки на величину напружень в деталі, але й на здатність матеріалу чинити опір.

Вплив прискорень точок деталей конструкції на напружений стан матеріалу можна врахувати таким чином. Якщо якесь тіло рухається з прискоренням, то це означає, що на нього передаються (до нього прикладені) сили від інших тіл. За законом рівності дії і протидії воно передає на ці тіла реакції, що дорівнюють прикладеним силам і протилежно спрямовані — так звані сили інерції. Це міркування може бути застосовано також і до кожного елемента тіла, що рухається з прискоренням — цей елемент передаватиме на прилеглі частини матеріалу зусилля, що дорівнюють силі інерції цього елемента.

Таким чином, при прискореному русі частин конструкції в них виникають додаткові цілком реальні напруження, які еквівалентні статичним напруженням, викликаним силами інерції; від кожного елемента стержня на сусідні частини матеріалу передаватимуться такі напруження, нібито до нього була прикладена відповідна сила інерції.

Звідси отримуємо практичне правило для визначення напружень у частині конструкції, точки якої мають прискорення: треба обчислити ці прискорення і на додаток до

зовнішніх сил, що діють на даний елемент конструкції, навантажити його відповідними силами інерції. Далі слід вести розрахунок так, як ніби на об'єкт, що досліджується, діє статичне навантаження.

Тут треба розрізняти три випадки:

1. Якщо величина і розташування зовнішніх сил, прикладених до даного елемента, не залежать від його деформацій, якщо ці деформації не змінюють характеру руху стержня, то прискорення його точок обчислюють за правилами кінематики твердого тіла, і облік динамічних дій зводиться до додаткового статичного навантаження відповідними силами інерції. Це має місце в більшості практично важливих випадків (за винятком удару).
2. Якщо при цьому прискорення змінюватиметься, то, як правило, виникнуть коливання даної частини конструкції, які можуть в деяких випадках призвести до резонансу, що пов'язано з різким збільшенням деформацій і напружень. Ці напруження можуть досягати вельми великої величини і додаватимуться до тих, які враховуються шляхом введення в розрахунок статичного навантаження силами інерції.
3. Можуть бути випадки (удар), коли величина прискорень, а значить, і відповідних сил інерції залежатиме від деформації даних елементів; у цьому випадку при обчисленні сил інерції доводиться використовувати і дані опору матеріалів.

Спосіб перевірки міцності для кожного з випадків покажемо на прикладах.

15.2. Обчислення напружень при рівноприскореному русі

Рішення задачі про перевірку міцності при динамічних навантаженнях почнемо з найпростішого випадку, коли точки даної частини конструкції мають постійне прискорення, що не викликає коливань. За приклад візьмемо рівноприскорений підйом вантажу Q , підвішеного на сталевому тросі площею A ; об'ємна вага матеріалу троса дорівнює γ ; вантаж підіймається з прискоренням a (рис.15.1). Знайдемо напруження в довільному перетині на відстані x від нижнього кінця троса. "Розріжемо" трос в цьому перерізі та розглянемо нижню відсічену частину.

Вона рухатиметься вгору з прискоренням a ; значить, на неї від верхньої частини троса передаватиметься крім сили, що врівноважує її вагу, ще направлена вгору сила, що дорівнює добутку її маси на прискорення a , тобто, $\frac{Q + \gamma Ax}{g} a$, де g – прискорення сили тяжіння.

За законом рівності дії та протидії на верхню частину від нижньої передаватиметься така ж сила, але направлена вниз. $\frac{Q + \gamma Ax}{g} a$

Таким чином, динамічні напруження σ_d ,

що діють по виділеному перерізу на нижню частину, врівноважуватимуть не тільки статичне навантаження $Q + \gamma Ax$, але й додаткову силу $\frac{Q + \gamma Ax}{g} a$. Щоб обчислити ці напруження σ_d , треба розглянути рівновагу виділеної нижньої частини під дією статичного

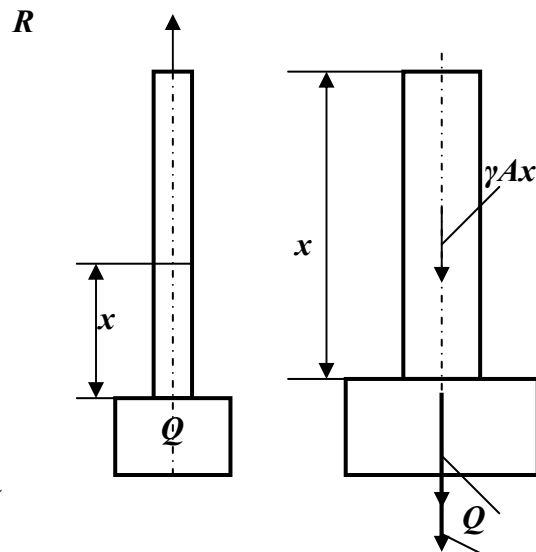


Рис.15.1. Навантаження троса

навантаження $Q + \gamma Ax$ і сили інерції $\frac{Q + \gamma Ax}{g}a$, спрямованої вниз (рис.15.1). Тоді

$$\sigma_{\delta} = \frac{Q + \gamma Ax}{A} + \frac{Q + \gamma Ax}{gA}a = \frac{Q + \gamma Ax}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right),$$

де дріб $\frac{Q + \gamma Ax}{A}$ — є статичним напруженням σ_c у проведеному перетині, тому

$$\sigma_{\delta} = \sigma_c \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (15.1)$$

Тобто динамічне напруження дорівнює статичному, помноженому на коефіцієнт $(1 + \frac{a}{g})$. Цю

величину $(1 + \frac{a}{g})$ називають *динамічним коефіцієнтом* K_{δ} :

$$\sigma_{\delta} = K_{\delta} \sigma_c. \quad (15.2)$$

Такий вид формули для динамічних напружень пояснює, чому ми, головним чином, надавали увагу обчисленню напружень при статичній дії навантаження - в дуже багатьох випадках динамічні напруження можуть бути виражені через статичні шляхом множення на відповідний динамічний коефіцієнт.

Умова міцності набуде вигляду

$$\sigma_{\delta \max} = \sigma_{c \max} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = K_{\delta} \sigma_c \leq [\sigma].$$

Звідси

$$\sigma_{c \max} \leq \frac{[\sigma]}{1 + \frac{a}{g}} = \frac{[\sigma]}{K_{\delta}}. \quad (15.3)$$

Таким чином, можна у ряді випадків *динамічний розрахунок замінити статичним*, знизивши тільки величину допустимого напруження, на динамічний коефіцієнт K_{δ} .

Так поступають у випадках, коли при розрахунку виявляється важким теоретичне визначення динамічного коефіцієнта і доводиться користуватися його значеннями, одержаними з експериментів. Так само враховується динамічність тимчасового навантаження, що діє на мости.

15.3. Розрахунок кільця, що обертається (обід маховика)

Як другий приклад розглянемо обчислення напружень у кільці постійного перерізу, що швидко обертається (рис.15.2а). З відомим наближенням в подібних умовах, якщо нехтувати впливом спиць, знаходиться обід маховика.

Позначимо через A — площу поперечного перерізу кільця; γ — об'ємну вагу матеріалу; n — число обертів в одиницю часу; ω — кутову швидкість обертання; D — діаметр осі кільця.

Виділимо елемент кільця завдовжки ds . При обертанні кільця цей елемент рухається по колу з постійною кутовою швидкістю ω .

Кутове прискорення ε дорівнює нулю, тому тангенціальне прискорення елемента дорівнює $\omega_t = \varepsilon \frac{D}{2} = 0$; радіальне ж (доцентрове) прискорення елемента дорівнює $\omega_n = \frac{\omega^2 D}{2}$ та спрямовано до центру кільця.

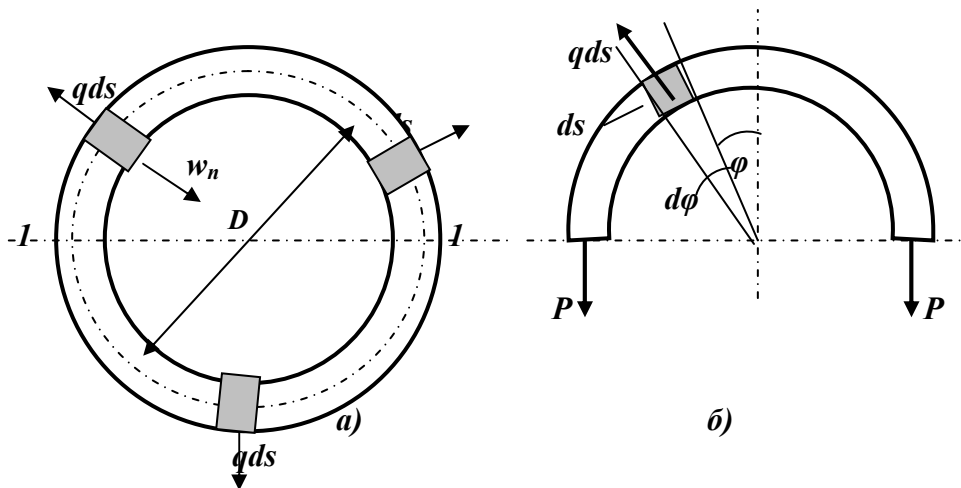


Рис. 15.2. Розподіл сил у кільці, що обертається: а)– ціле кільце; б)– навантаження в перерізі

Щоб обчислити напруження σ_δ , треба до кожного виділеного елемента кільця прикласти його силу інерції. Вона спрямована назовні і дорівнює

$$\omega_n \frac{F\gamma}{g} ds = \frac{F\gamma}{g} \frac{\omega^2 D}{2} ds = qds,$$

де q — інтенсивність сил інерції на одиницю довжини обода. Таким чином, у кільці розвинулися такі напруження, неначе воно було завантажено радіальним навантаженням інтенсивності q на одиницю довжини (рис.15.2б). Зусилля P , що розтягують обод, дорівнюють

$$P = \frac{Dq}{2}.$$

Напруження σ_δ дорівнює

$$\sigma_\delta = \frac{P}{F} = \frac{Dq}{2F} = \frac{DF\gamma}{2gF} \cdot \frac{\omega^2 D}{2} = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{\gamma v^2}{g},$$

де $v = \omega \frac{D}{2}$ — колова швидкість точок кільця. Таким чином, напруження в ободі маховика залежить лише від об'ємної ваги матеріалу і лінійної швидкості частин ободу. Щоб оцінити можливу величину цих напружень, зробимо підрахунок при певних реальних числових даних:

$$n = 360 \text{ об/хв}; \quad D = 4 \text{ м}; \quad \gamma = 75 \text{ кН/м}^3$$

Кутова швидкість $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 360}{60} = 12\pi$; напруження дорівнює

$$\sigma_\delta = \frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g} = \frac{75 \cdot 144\pi^2 \cdot 16}{4 \cdot 9,81} = 43,5 \cdot 10^3 \text{ (кН/м}^2\text{)} = 43,5 \text{ (МПа)}$$

Це досить вагома величина.

Лекція 28. Продовження теми 15 (Динамічні навантаження)

Обчислення напружень при коливаннях. Власні коливання.
Коливання за наявності збурюючої сили.

15.4. Обчислення напружень при коливаннях

15.4.1. Власні коливання.

Пружна система, виведена яким-небудь шляхом з рівноваги, приходить у коливальний рух. Коливання відбуваються біля положення пружної рівноваги, при якій в навантаженій системі мали місце статичні деформації δ_c і відповідні їм статичні напруження p_c (σ_c або τ_c — залежно від виду деформації). При коливаннях до статичних деформацій додаються динамічні, що залежать від виду коливального руху і від величини розмаху (амплітуди) коливання. У зв'язку з цим змінюються і напруження p_c . Таким чином, при розрахунку системи, що коливається, на міцність необхідно вміти обчислювати динамічні добавки до статичних деформацій і відповідних їм напружень.

У багатьох випадках характер коливань системи може бути визначений якою-небудь однією величиною (однією координатою). Такі системи називають системами з одним ступенем свободи. Це можуть бути, наприклад, розтягнута або стиснута незначної ваги пружина з вантажем на кінці, що скоює поздовжні коливання; невеликої (порівняно з вантажем Q) власної ваги балка, зображена на рис 15.4, що коливається в напрямі, перпендикулярному до її осі, і т.п.

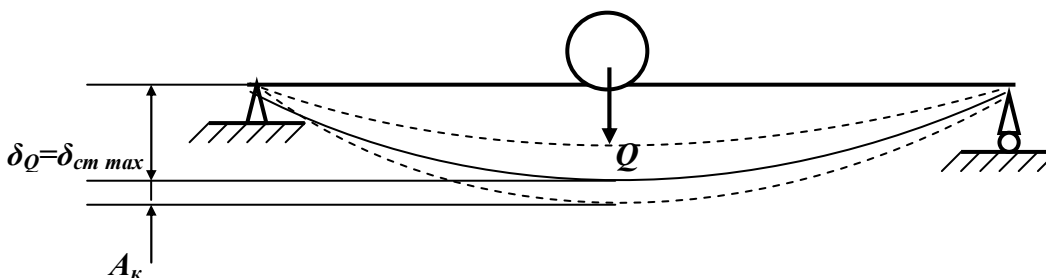


Рис. 15.4. Коливання пружної системи з одним ступенем свободи

При коливаннях систем з одним ступенем свободи повні деформації системи в якому-небудь перетині можна знайти шляхом складання статичної деформації з додатковою деформацією при коливаннях. Для перевірки міцності системи, очевидно, необхідно знайти найнебезпечніший переріз з найбільшою в процесі коливань сумарною величиною деформації. У найпростіших випадках для цього буде потрібно скласти найбільшу статичну деформацію $\delta_{c \max}$ з найбільшою амплітудою коливань A_k , тобто

$$\delta_d = \delta_{c \max} + A_k = \delta_{c \max} \left(1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} \right) = K_d \delta_{c \max}. \quad (15.4)$$

Поки система деформується в межах пружності, напруження пропорційні деформаціям. Тому

$$p_d = p_c \left(1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} \right) = K_d p_c,$$

$$\text{де} \quad K_{\delta} = 1 + \frac{A_{\kappa}}{\delta_{c \max}} \quad (15.5)$$

— коефіцієнт динамічності при коливаннях.

Умова міцності в цьому випадку повинна мати такий вигляд:

$$p_{\delta} = K_{\delta} p_c \leq [p]. \quad (15.6)$$

Таким чином, як при врахуванні сил інерції, що не змінюють свого напрямку, задача знаходження динамічних напружень і перевірки міцності при коливаннях може бути зведена до визначення статичних напружень і коефіцієнта динамічності K_{δ} . Оскільки останній залежить від величини A_{κ} , то потрібно вміти визначати найбільше значення амплітуди коливань у різних випадках.

Як відомо, диференціальне рівняння руху вантажу Q , що коливається, у разі вільних коливань можна представити у вигляді рівняння рівноваги, в якому окрім зовнішньої сили (вага вантажу Q) і сили пружного опору системи враховується також і сила інерції:

$$\frac{Q}{g} x'' + P - Q = \frac{Q}{g} x'' + P_1 = \frac{Q}{g} x'' + cx = 0. \quad (15.7)$$

Тут x — координата, що повністю визначає положення вантажу Q під час коливань; P — повний пружний опір системи при коливаннях; $P - Q = P_1$ — так звана поновлююча сила (додаткове пружне зусилля, що виникає в системі в результаті переміщення точки додатку вантажу Q на відстань x при коливаннях), яку в межах пружності можна вважати пропорційною координаті x ($P_1 = cx$); c — коефіцієнт пропорційності, що є зусиллям, необхідним для того, щоб викликати статичну деформацію системи, яка дорівнює одиниці, у напрямі дії вантажу Q . Якщо статична деформація від вантажу Q дорівнює δ_Q , то

$$c = \frac{Q}{\delta_Q}.$$

Розв'язок рівняння (15.7) призводить до таких формул для обчислення частоти власних коливань ω_0 і періоду t_0 вільних коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gc}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_Q}} \quad \text{та} \quad t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_Q}{g}}.$$

Вільні коливання невагомго тіла є простими гармонійними коливаннями з частотою (періодом), що дорівнює частоті (періоду) коливань математичного маятника, довжина якого дорівнює статичній деформації системи від вантажу Q . Наприклад, якщо вантаж Q розтягує призматичний стержень

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}}.$$

При вигині балки на двох шарнірних опорах вантажем Q посередині прольоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f_{\max}}} = \sqrt{\frac{48EJg}{Ql^3}}.$$

І так далі.

15.4.2. Коливання за наявності збурюючої сили.

Якщо на пружну систему, окрім вантажу Q і сили пружного опору системи P , в тому ж напрямі діє періодично змінна збурююча сила S і сила опору середовища R , то диференціальне рівняння руху вантажу Q при коливаннях також може бути представлено у вигляді рівняння рівноваги, подібного рівнянню (15.7)

$$\frac{Q}{g}x'' + P - Q - S + R = \frac{Q}{g}x'' + P_1 - S + R = \frac{Q}{g}x'' + cx - S + R = 0 \quad (15.8)$$

Силу опору середовища R на практиці у багатьох випадках можна вважати пропорційною першому ступеню швидкості коливального руху, $R = rx'$. Якщо збурююча сила S змінюється за синусоїдальним законом

$$S = H \sin \omega t,$$

де $H = S_{\max}$, а ω — частота збурюючої сили, то рівняння (15.8) може бути переписано так:

$$\frac{Q}{g}x'' + rx' + cx = H \sin \omega t \quad (15.9)$$

Тут $n = \frac{rg}{2Q}$ — так званий коефіцієнт загасання коливань, а ω_0 — знайдена вище частота вільних коливань системи, що виникають як за відсутності збурюючої сили S , так і сили опору R .

Розв'язок рівняння (15.9) призводить до такого виразу для амплітуди A_k вимушених коливань за наявності сил опору

$$A_k = \frac{H}{\frac{Q}{g}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4n^2\omega^2}} = \frac{gH}{Q\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^2 + \left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (15.10)$$

$$\text{Тут} \quad \frac{gH}{Q\omega_0^2} = \frac{gH}{Q} \cdot \frac{\delta_Q}{g} = \frac{H}{Q} \delta_Q = \delta_H$$

— статична деформація системи від найбільшої величини збурюючої сили $S(S_{\max} = H)$.

Відношення амплітуди вимушених коливань A_k до величини деформації δ_H називають коефіцієнтом наростання коливань β :

$$\beta = \frac{A_k}{\delta_H} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (15.11)$$

Таким чином, формула (15.5) для динамічного коефіцієнта K_d набуде такого вигляду:

$$K_d = 1 + \frac{A_k}{\delta_{c \max}} = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_Q} \beta \quad (15.12)$$

У цьому виразі не врахована амплітуда власних коливань системи, яка може мати певне істотне значення лише на самому початку процесу коливань. За наявності сил опору вона досить швидко зменшується з часом. На рис.15.5 зображено графіки зміни коефіцієнта

наростання коливань β залежно від величини відношення $\frac{\omega}{\omega_0}$ при різних значеннях коефіцієнта загасання коливань n (відношення $\frac{n}{\omega_0}$).

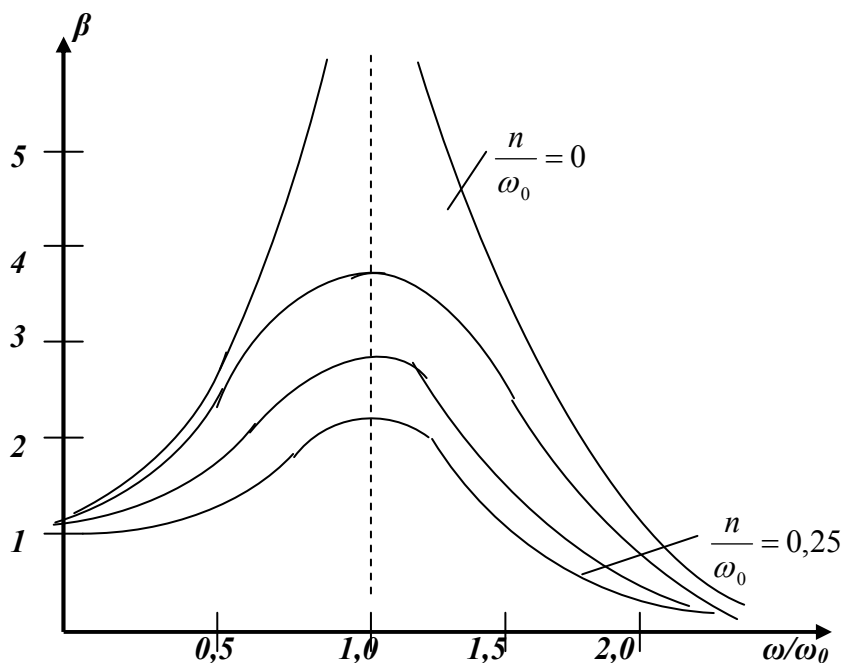


Рис.15.5. Залежність коефіцієнта наростань коливання β від співвідношення частот власних і вимушених коливань

Якщо частота зміни збурюючої сили близька до частоти вільних коливань системи, тобто $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$, і якщо величина коефіцієнта згасання коливань порівняно невелика, то знаменники формул (15.7) і (15.11) для A_k і β будуть дуже малими, амплітуда коливань і коефіцієнт наростання коливань будуть дуже великими (рис.15.5). У цьому випадку навіть невелика збурююча сила може викликати високі напруження (явище резонансу).

Зі збільшенням сил опору явище резонансу стає все менш помітним. Зауважимо, що сили опору значно зменшують величину амплітуди вимушених коливань тільки поблизу від резонансу $\left(0,75 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1,25\right)$. При інших величинах відношення $\frac{\omega}{\omega_0}$ вплив сил опору незначний.

З формул (15.10), (15.11) і (15.18) і рис.15.5. бачимо: якщо частота ω зміни збурюючої сили S дуже мала, то амплітуда коливань наближається до величини δ_H ; коефіцієнт наростання коливань прямує до одиниці і найбільші напруження в системі можна обчислити як статичні напруження від вантажу Q і найбільшого значення збурюючої сили $S(S_{\max} = H)$. При дуже великій частоті зміни збурюючої сили S амплітуда коливань і коефіцієнт наростання коливань прямують до нуля, вантаж Q можна розглядати як нерухомий, тому найбільше напруження в системі дорівнює статичному напруженню від вантажу Q .

Ця обставина має дуже велике практичне значення. Вона використовується при конструюванні різних видів погашувачів коливань, сейсмографів, вібрографів та інших приладів. У машинобудуванні амортизатори, що оберігають основи машин від зусиль, що

виникають при коливаннях, підбирають так, щоб частота власних коливань машини на амортизаторах була *значно меншою* від частоти зміни збурюючої сили.

Лекція 29. Продовження теми 15 (Динамічні навантаження)

Елементарна теорія удару. Основні положення. Загальний метод обчислення напружень при ударі. Окремі випадки обчислення напружень і перевірки міцності при ударі. Випадок поздовжнього удару. Згинаючий удар. Удар, що скручує. Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі. Практичні висновки з одержаних результатів. Механічні властивості матеріалів при ударі.

15.5. Елементарна теорія удару. Основні положення

Явище удару спостерігається у випадку, коли швидкість даної частини конструкції або частин, що до неї дотикаються, змінюється в дуже короткий період часу.

При забиванні паль вантаж падає з деякої висоти на верхній торець палі і занурює її в ґрунт; баба зупиняється майже миттєво, виконуючи удар. Аналогічні явища відбуваються при куванні; удар сприймають і виріб, що кується, і шток молота з бойком, оскільки останній дуже швидко зупиняється при зіткненні з виробом. Під час удару між обома деталями, що співударяються, виникає вельми великий взаємний тиск. Швидкість ударяючого тіла за дуже короткий проміжок часу змінюється і в окремому випадку падає до нуля; тіло зупиняється. Значить, на нього від деталі, що ударяється, передаються дуже великі прискорення, спрямовані у бік, зворотний його руху, тобто передається реакція P_0 , яка дорівнює добутку маси вдаряючого тіла на це прискорення.

Позначаючи це прискорення через a , можна написати, що реакція $P_0 = \frac{Q}{g}a$, де Q – вага ударяючого тіла. По закону рівності дії та протидії на частину конструкції, що ударяється, передається така ж сила, але спрямована в протилежний бік (рис.15.6). Ці сили і викликають напруження в обох тілах.

Таким чином, у частині конструкції, що ударяється, виникають такі напруження, неначе до неї була прикладена сила інерції ударяючого тіла. Ми можемо обчислити ці напруження, розглядаючи силу інерції P_0 як статичне навантаження нашої конструкції. Ускладнення полягає в обчисленні цієї сили інерції. Тривалості удару, тобто величини того проміжку часу, в перебігу якого відбувається падіння швидкості до нуля, ми не знаємо. Тому залишається невідомою величина прискорення a , а, отже, і сили P_0 . Таким чином, хоча обчислення напружень при ударі є частковим випадком задачі обліку сил інерції, проте для обчислення сили P_0 , пов'язаних з нею напружень і деформацій тут доводиться застосовувати інший метод і користуватися законом збереження енергії.

При ударі відбувається дуже швидко перетворення одного виду енергії в інший: кінетична енергія ударяючого тіла перетворюється в потенціальну енергію деформації. Виражаючи цю енергію у функції сили P_0 або напружень, або деформацій, отримуємо можливість обчислити ці величини.

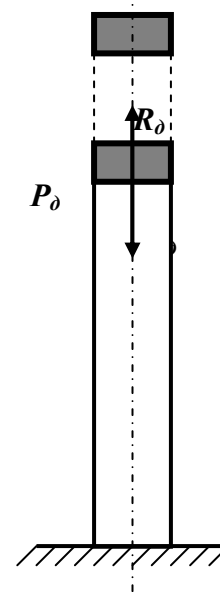


Рис.15.6. Сили в перерізі, що виникають при ударі

15.6. Загальний метод обчислення напружень при ударі

А. Припустимо, що дуже жорстке тіло A вагою Q , деформацією якого можна нехтувати, падаючи з деякої висоти H , ударяє по іншому тілі B , що спирається на пружну систему C (рис.15.7). В окремому випадку це може бути падіння вантажу на кінець призматичного стержня, інший кінець якого закріплений (поздовжній удар), падіння вантажу на балку, що лежить на опорах (згинаючий удар), і т.п.

Протягом дуже короткого проміжку часу пружна система C дещо деформується. Позначимо через δ_δ переміщення тіла B (місцевою деформацією якого нехтуватимемо) в напрямі удару. В згаданих окремих випадках при поздовжньому ударі за переміщення δ_δ відповідно потрібно оцінювати A

поздовжню деформацію стержня Δl_δ , при згинаючому ударі — прогин балки f_δ в перетині, що ударяється, і т.п. У результаті удару в системі C виникнуть напруження p_δ (σ_δ або τ_δ — залежно від виду деформації).

Вважаючи, що кінетична енергія T ударяючого тіла повністю переходить у потенціальну енергію U_δ , деформації пружної системи можемо написати

$$T = U_\delta . \quad (15.12)$$

Оскільки до моменту закінчення деформації ударяюче тіло пройде шлях $H + \delta_\delta$, то його запас енергії вимірюватиметься проведеною їм роботою A_δ і дорівнюватиме

$$T = A_\delta = Q(H + \delta_\delta) . \quad (15.13)$$

Обчислимо тепер U_δ . При статичній деформації потенціальна енергія U_c чисельно дорівнює половині добутку діючої сили на відповідну деформацію

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c . \quad (15.14)$$

Статичну деформацію δ_c в перетині, що ударяється, можна обчислити за законом Гука, який в загальному вигляді можна записати так:

$$\delta_c = Q : c \quad \text{або} \quad Q = c \delta_c .$$

Тут c — деякий коефіцієнт пропорційності (званий іноді жорсткістю системи). Він залежить від властивостей матеріалу, форми і розмірів тіла, виду деформації і положення перетину, що ударяється. При простому розтягу або стиску $\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EA}$ і $c = \frac{EA}{l}$, при згині балки, шарнірно закріпленої по кінцях, зосередженою силою Q посередині прольоту

$$\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{48EJ} \quad \text{і} \quad c = \frac{48EJ}{l^3} .$$

Таким чином, формулу (15. 14) можна переписати так:

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c = \frac{c}{2} \delta_c^2 .$$

В основі цієї формули лежать дві передумови:

а) – справедливість закону Гука та б) – поступове (від нуля до остаточного значення) зростання сили Q , напружень p_c та пропорційних їм деформацій δ_c .

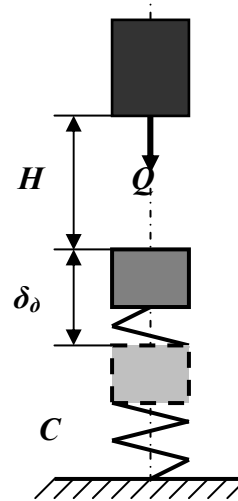


Рис.15.7. Переміщення при ударі

Досліди з визначенням модуля пружності за спостереженнями над пружними коливаннями стержнів показують, що й за динамічної дії навантажень закон Гука залишається в силі, і модуль пружності зберігає свою величину. Що стосується характеру наростання напружень і деформацій, то і при ударі деформація відбувається, хоча і швидко, але не миттєво; δ_δ поступово зростає протягом дуже короткого проміжку часу від нуля до кінцевого значення; паралельно зростанню деформацій зростають і напруження p_δ .

Реакція системи C на дію вантажу Q (назвемо її P_δ) є наслідком розвитку деформації δ_δ . Вона зростає пропорційно δ_δ від нуля до кінцевої, максимальної величини і, якщо напруження p_δ не перевершують межі пропорційності матеріалу, пов'язана з нею законом Гука:

$$\delta_\delta = P_\delta : c.$$

де c — згаданий вище коефіцієнт пропорційності, що зберігає своє значення і при ударі.

Таким чином, обидві передумови для правильності формули (15.14) приймаються і при ударі. Тому можна вважати, що вигляд формули для U_δ при ударі буде тим же ж самим, що і при статичному навантаженні системи силою інерції P_δ , тобто

$$U_\delta \frac{1}{2} P_\delta \delta_\delta = \frac{c}{2} \delta_\delta^2 = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_\delta^2. \quad (15.15)$$

(Тут враховано, що по попередньому $c = Q : \delta_c$.) Підставляючи значення T і U_δ в рівняння (15.12), отримаємо:

$$Q(H + \delta_\delta) = \frac{Q}{2c} \delta_\delta^2 \quad (15.16)$$

або

$$\delta_\delta^2 - 2\delta_c \delta_\delta - 2H\delta_c = 0. \quad (15.17)$$

Звідси

$$\delta_\delta = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}$$

або, утримуючи перед радикалом для визначення найбільшої величини деформації системи у напрямі удару знак плюс, отримаємо:

$$\delta_\delta = \delta_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_\delta \delta_c. \quad (15.18)$$

Оскільки напруження і зусилля за законом Гука пропорційні деформації, то

$$p_\delta = p_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_\delta p_c; \quad (15.19)$$

і

$$P_\delta = Q \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \right] = K_\delta Q. \quad (15.20)$$

З цих формул бачимо, що величина динамічних деформацій, напружень і зусиль залежать від величини статичної деформації, тобто від жорсткості і поздовжніх розмірів тіла, що ударяється. Нижче це додатково буде показано на окремих прикладах. Величина

$$K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \quad (15.21)$$

у даному випадку є динамічним коефіцієнтом.

Замінюючи у формулі (15.21) H на $\frac{v^2}{2g}$, де v — швидкість ударяючого тіла в початковий момент удару, отримаємо:

$$K_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_c}}. \quad (15.22)$$

Крім того, оскільки

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_0}{U_c},$$

де $T_0 = QH$ — енергія ударяючого тіла до моменту початку удару, то й вираз для динамічного коефіцієнта може бути представлений ще і у такому вигляді:

$$K_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}}. \quad (15.23)$$

В. Якщо у формулах (15.18) і (15.19) покласти $H = 0$, тобто, просто раптово прикладений вантаж Q , то $\delta_{\delta} = 2\delta_c$ і $p_{\delta} = 2p_c$ — при раптовому додатку сили Q деформації і напруження удвічі більше, ніж при статичній дії тієї ж сили.

Навпаки, якщо висота падіння вантажу H (або швидкість v) велика в порівнянні з деформацією δ_c , то в підкорінному виразі формул (15.18) — (15.22) можна нехтувати одиницею в порівнянні з величиною відношення $\frac{2H}{\delta_c}$. Тоді для δ_{δ} і p_{δ} виходять вирази

$$\delta_{\delta} = \delta_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \right) \quad \text{і} \quad p_{\delta} = p_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \right). \quad (15.24)$$

При дуже великій величині відношення $\frac{2H}{\delta_c}$ можна нехтувати й одиницею, що стоїть перед коренем, тобто написати

$$\delta_{\delta} = \delta_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \quad \text{і} \quad p_{\delta} = p_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}. \quad (15.25)$$

Динамічний коефіцієнт в цьому випадку визначається за формулою:

$$K_{\delta} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}}. \quad (15.26)$$

Необхідно відзначити, що тоді, як нехтувати одиницею в підкорінному виразі допустимо вже при $\frac{2H}{\delta_c} \geq 10$ (похибка наближених формул буде не більшою за 5%), нехтування ж одиницею, що стоїть перед коренем, допустиме лише при дуже великій

величині відношення $\frac{2H}{\delta_c}$. Наприклад, для того, щоб наближені формули (15.25) і (15.26) давали похибку менше 10%, відношення $\frac{2H}{\delta_c}$ повинно бути більшим від 110.

Формули $\delta_o = K_o \delta_c$ і $p_o = K_o p_c$ з яких K_o виражається через $\frac{T_o}{U_c}$ (15.23), можна

використати також для вирішення проблеми про зустрічний удар тіл, що рухаються з деякою швидкістю, при визначенні напружень у циліндрі двигуна внутрішнього згоряння, викликаних різким підвищенням тиску газу при згорянні паливної суміші та ін. На цій підставі їх можна вважати загальними формулами для розрахунку на удар.

Узагальнюючи сказане вище, можна намітити такий загальний метод розв'язку задач по визначенню напружень при ударі. Застосовуючи закон збереження енергії, треба:

- 1) обчислити кінетичну енергію ударяючого тіла T ;
- 2) обчислити потенціальну енергію U_o тіл, що сприймають удар, під навантаженням їх силами інерції при ударі; потенціальна енергія повинна бути виражена через напруження (σ_o, τ_o) в якому-небудь перетині, через деформацію (видовження, прогин) або через силу інерції P_o ударяючого тіла;
- 3) прирівняти величини U_o і T і з одержаного рівняння знайти або безпосередньо динамічні напруження, або деформацію, а по ній, виристовуючи закон Гука, напруження або силу P_o і відповідні їй динамічні напруження і деформації.

Описаний загальний прийом розрахунку на удар припускає, що вся кінетична енергія ударяючого тіла цілком переходить у потенціальну енергію деформації пружної системи. Це припущення не є точним. Кінетична енергія падаючого вантажу частково перетворюється на теплову енергію й енергію neprужної деформації основи, на яку спирається система.

Разом з тим при високих швидкостях удару деформація за час удару не встигає розповсюдитися на весь об'єм тіла, що ударяється, і в місці удару виникають значні місцеві напруження, що іноді перебільшують межу текучості матеріалу. Наприклад, при ударі свинцевим молотком по сталій балці велика частина кінетичної енергії перетворюється на енергію місцевих деформацій. Подібне ж явище може мати місце навіть і у випадку, коли швидкість удару мала, але жорсткість або маса конструкції, що вдаряється, велика.

Вказані випадки відповідають великим величинам дроби $\frac{2H}{\delta_c}$. Тому можна сказати,

що описаний вище метод розрахунку можна застосовувати, поки дріб $\frac{2H}{\delta_c}$ не перевищує певної величини. Більш точні дослідження показують, що помилка не перевищує 10%, якщо $\frac{2H}{\delta_c} \leq 100$. Оскільки цей дріб можна представити у вигляді відношення $\frac{T_o}{U_c}$ (див.

вище), то можна сказати, що висловлений метод можна застосовувати, поки енергія удару перевищує не більше, ніж у 100 разів потенціальну енергію деформації, відповідну статичному навантаженню конструкції вагою ударяючого вантажу. Врахування маси тіла, що ударяється, при ударі дозволяє дещо розширити межі застосування цього методу в тих випадках, коли маса тіла, що ударяється, велика.

Більш точна теорія удару викладається у курсах теорії пружності.

15.7. Окремі випадки обчислення напружень та перевірки міцності при ударі

15.7.1. Випадок поздовжнього удару.

Вигляд виведених вище формул показує, які великі якісні відмінності тягне за собою кількісна зміна часу дії сили на тіло.

Розглянемо деякі випадки удару при найпростіших деформаціях. При цьому для знаходження коефіцієнта динамічності застосуємо основні формули (15.21) і (15.23).

Для визначення δ_δ , p_δ і P_δ , використовуємо залежності

$$\delta_\delta = K_\delta \delta_c ; \quad p_\delta = K_\delta p_c ; \quad P_\delta = K_\delta Q .$$

У разі поздовжнього розтягуючого або стискаючого удару (рис. 15.8)

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EA} ; \quad p_c = \sigma_c = \frac{Q}{A} ;$$

$$U_c = \frac{Q^2 l}{2EA} = \frac{\sigma_c^2 Al}{2E} = \frac{\Delta l_c^2 EA}{2l} .$$

Для обчислення динамічного коефіцієнта K_δ можна вибрати один із таких виразів:

$$K_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EA}{Q^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_c^2 Al}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_c^2 EA}} . \quad (15.27)$$

Після цього без ускладнень обчислюємо Δl_δ , σ_δ і P_δ .

Наближена формула для обчислення коефіцієнтів динамічності та напружень в даному випадку набуває вигляду:

$$K_\delta = \frac{1}{\sigma_c} \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{Al}} \quad \text{і} \quad \sigma_\delta = \sigma_c K_\delta \sqrt{\frac{2T_0 E}{Al}} . \quad (15.28)$$

Відзначимо, що, як при статичному, так і при динамічному навантаженні напруження в стиснутому стержні залежить від величини стискаючої сили і від площі поперечного перетину стержня.

Але при статичній дії вантажу Q сила, що передається на стержень, дорівнює Q і не залежить від розмірів і матеріалу стержня, при ударі ж величина сили P_δ , що викликає напруження в стержні, залежить від прискорення, що передається від тіла, що ударяється, на ударяюче, тобто, від величини проміжку часу, протягом якого змінюється швидкість ударяючого тіла. У свою чергу цей проміжок часу залежить від величини динамічної поздовжньої деформації Δl_δ , від податливості стержня. Чим ця величина більша, тобто чим менше модуль E і чим більша довжина стержня l , тим більша тривалість удару, менше прискорення і менше тиск P_δ .

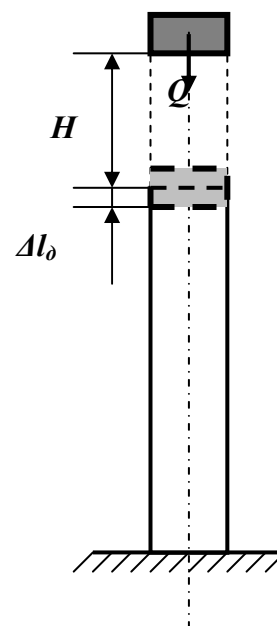


Рис. 15.8. Поздовжній удар

Таким чином, при рівномірному розподілі напружень, однаковому в усіх перетинах стержня, динамічне напруження зменшуватиметься зі збільшенням площі поперечного перетину стержня і зі збільшенням його податливості (тобто зі збільшенням довжини і зменшенням модуля пружності E), саме тому пом'якшують удар ресори і пружини, розташовані між деталями, що вдаряються. Все це і відображають наведені вище формули. Зокрема, виходячи з формул (15.28), з відомим наближенням можна вважати, що *при поздовжньому ударі величина напружень залежить вже не від площі, а від об'єму стержня*.

Знайшовши за формулами (15.19) і (15.27) або (15.28) величину динамічного напруження, можемо написати умову міцності у вигляді

$$\sigma_{\delta} \leq [\sigma_{\delta}], \quad (15.29)$$

де $[\sigma_{\delta}]$ —допустима величина нормальних напружень при ударі, яка дорівнює для пластичного матеріалу $[\sigma_{\delta}] = \frac{\sigma_m}{k_{\delta}}$. Величину коефіцієнта запасу k_{δ} можна б було вибрати такою, яка б дорівнювала величині основного коефіцієнта запасу k_0 при статичній дії навантажень, оскільки динамічність навантаження вже відображена у формулах (15.27) і (15.28). Проте, зважаючи на деяке спрощення висловленого методу розрахунку, цей коефіцієнт приймають дещо підвищеним — до 2. Крім того, зазвичай, у цих випадках застосовують матеріал вищої якості (стосовно однорідності й пластичних властивостей).

15.7.2. Згинаючий удар.

При згині величина статичної деформації δ_c , балки f_c , що є статичним прогином, в місці удару залежить від схеми навантаження і умов закріплення балки.

Наприклад, для балки з прольотом l , шарнірно закріпленої по кінцях, що отримує посередині прольоту удар від падаючого з висоти H вантажу Q (рис.15.9а), отримаємо:

$$\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{48EJ};$$

$$p_c = \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W};$$

$$U_c = \frac{Qf_{c \max}}{2} = \frac{Q^2 l^3}{96EJ}.$$

Для консолі, що отримує удар від вантажу Q , який падає на вільний кінець консолі (рис.15.9б)

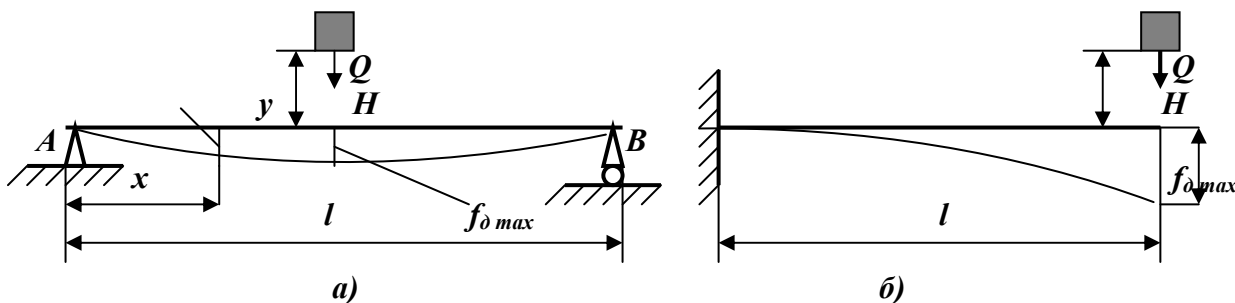


Рис.15.9. Удар при згині: а)– на двоопорній балці; б)– на консолі

$$\delta_c = f_{c \max} = \frac{Ql^3}{3EJ};$$

$$p_c = \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{W};$$

$$U_c = \frac{Qf_{c \max}}{2} = \frac{Q^2 l^3}{6EJ}.$$

Підставляючи у формулу для коефіцієнта динамічності K_δ значення $\delta_c = f_{c \max}$ або U_c ,

знаходимо K_δ , а потім і величину динамічних напружень і деформацій. Наприклад, у разі балки на двох опорах при обчисленні динамічного напруження $\sigma_{\delta \max}$ маємо таку формулу:

$$\sigma_{\delta \max} = K_\delta \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right]. \quad (15.30)$$

Умову міцності (15.29) в цьому випадку запишемо таким чином:

$$\sigma_{\delta \max} = \frac{Ql}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} \right] \leq [\sigma_\delta] = \frac{\sigma_m}{k_\delta}. \quad (15.31)$$

Наближені формули для обчислення f_δ і σ_δ у разі удару по балці на двох опорах (рис.15.9а) набудуть вигляду

$$f_{\delta \max} = K_\delta f_{c \max} = f_{c \max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \frac{Ql^3}{48EJ} \sqrt{\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{T_0 l^3}{24EJ}}; \quad (15.32)$$

$$\sigma_{\delta \max} = K_\delta \sigma_{c \max} = \frac{Ql}{4W} \sqrt{\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3}} = \sqrt{\frac{6T_0 EJ}{W^2 l}}. \quad (15.33)$$

Аналогічні вирази для $f_{\delta \max}$ і $\sigma_{\delta \max}$ виходять і у випадку удару по консолі (рис.15.9б). Маючи на увазі, що

$$J = i^2 F, W = \frac{J}{z_{\max}}$$

$$i = \frac{J}{W^2} = \left(\frac{z_{\max}}{i} \right)^2 \frac{1}{A},$$

можемо представити формулу (15.33) також і в такому вигляді:

$$\sigma_{\delta \max} = \frac{z_{\max}}{i} \sqrt{\frac{6T_0 E}{Al}}. \quad (15.34)$$

З наближеної формули (15.34) бачимо, що динамічні напруження при згині балки залежать від модуля пружності матеріалу, об'єму балки, форми її поперечного перетину (відношення $\frac{z_{\max}}{i}$), а також від схеми навантаження і умов закріплення балки (в даному випадку в підкорінному виразі стоїть $6T_0$; для балок, інакше завантажених і закріплених, числовий коефіцієнт біля T_0 буде іншим). Таким чином, у балці прямокутного перетину висотою h і шириною b , поставленій на ребро або покладеній плоско, найбільші напруження при ударі будуть однакові і рівні (за наближеною формулою):

$$\sigma_{\delta \max} = \sqrt{\frac{18T_0 E}{Al}},$$

оскільки в обох випадках

$$\frac{z_{\max}}{i} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{hb^3}{12bh}}} = \sqrt{3}.$$

Як відомо, при однаковому статичному навантаженні найбільші напруження в балці, встановленій плоско, будуть у відношенні $\frac{h}{b}$ більше, ніж напруження в балці, поставленій на ребро. Сказане вище, зрозуміло, є справедливим лише до тих пір, поки явище удару відбувається в межах пружності.

Опір балок ударним навантаженням залежить і від моменту опору, і від жорсткості балки. Чим більше податливість (здатність балки деформуватися), тим більшу *живу силу удару* вона може прийняти при одних і тих же напруженнях, що допускаються. Найбільші прогини балка дає у випадку, коли у всіх її перетинах найбільші напруження будуть однаковими, тобто, якщо це буде балка рівного опору. Такі балки при одному й тому ж напруженні, що допускається, дають більші прогини, ніж балки постійного перетину, і тому можуть поглинати велику енергію удару. Тому ресори, як правило, і роблять у формі балок рівного опору.

15.7.3. Удар, що скручує.

Розглянемо тепер задачу визначення напружень при ударі, що скручує. Якщо вал, що обертається, раптово зупиняється гальмуванням одного з його кінців, а на іншому його кінці на нього передається жива сила маховика T_0 , що скручує вал, то напруження також можуть бути визначені вказаним вище методом. Вал скручуватиметься двома парами сил (сили інерції маховика і сили гальмування) з моментом M . У даному випадку

$$\delta_c = \varphi_c = \frac{Ml}{GJ_p}, \quad p_c = \tau_{c\max} = \frac{M}{W_p}$$

і

$$U_c = \frac{M^2 l}{2GJ_p} = \frac{\tau_{c\max}^2 l W_p^2}{2GJ_p} = \frac{\varphi_{c\max}^2 GJ_p}{2l},$$

тому

$$\delta_o = \varphi_o = K_o \varphi_c = \varphi_c \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 l}{GJ_p}}$$

і

$$p_o = \tau_{o\max} = K_o \tau_{c\max} = \tau_{c\max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 GJ_p}{l W_p^2}} = 2\sqrt{\frac{T_0 l G}{Al}},$$

оскільки

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}, \quad W_p = \frac{\pi r^3}{2} \quad \text{та} \quad \frac{J_p}{W_p^2} = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{2}{A}.$$

Маючи на увазі, що жива сила маховика T_0 дорівнює

$$T_0 = \frac{J_0}{2} \omega^2,$$

де J_0 — момент інерції маси маховика, а ω — кутова швидкість, можна записати

$$\tau_{o\max} = \omega \sqrt{\frac{2J_0 G}{Al}}. \quad (15.35)$$

Відзначимо, що і при ударі, що скручує, найбільші напруження залежать від модуля пружності і від об'єму вала.

15.8. Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі

Вище показано, що для зниження напружень при поздовжньому ударі слід збільшувати об'єм стержня. Проте треба пам'ятати, що це правильно лише для випадку, коли площа перерізу стержня по його довжині не змінюється, — напруження у всіх перетинах однакові.

Інші результати отримаємо, якщо різні ділянки довжини стержня матимуть неоднакову площу поперечного перетину (рис.15.10). З (15.27) або (15.28) випливає, що динамічне напруження при поздовжньому ударі залежить і від площі поперечного перетину стержня, і від його податливості – здатності деформуватися. Найбільші напруження в стержні з виточкою (рис.15.10а), таким чином, визначатимуться величиною найменшої площі (в місці виточки) і податливістю стержня, яка залежить від деформацій вже всього стержня, а не тільки його ослабленої частини.

Зниження напружень у цьому випадку можна досягнути двома шляхами. Можна збільшити площу в самому ослабленому місці (якщо конструкція це дозволяє) — повернутися до стержня одного діаметра d_1 (рис.15.10б); в цьому випадку ми збільшуємо площу і меншою мірою зменшуємо податливість. Сила інерції трохи зростає, але в більшій степені зростає площа в ослабленому перетині й напруження знизяться.

Проте, як правило, цей (перший) шлях не можна застосувати, бо конструкція може вимагати збереження виточки. Тоді для підвищення міцності стержня необхідно збільшити його податливість, зменшуючи площу його перетину в потовщеній частині. Якщо ми виконаємо весь стержень діаметром d_2 (рис.15.10в), то цим значно збільшимо податливість стержня, зменшимо силу P_0 і динамічне напруження. Таким чином, зниження напружень можна досягнути двома шляхами, що ведуть до вирівнювання динамічних напружень, — збільшенням об'єму шляхом усунення виточки і зменшенням об'єму за рахунок зменшення площі потовщеної частини.

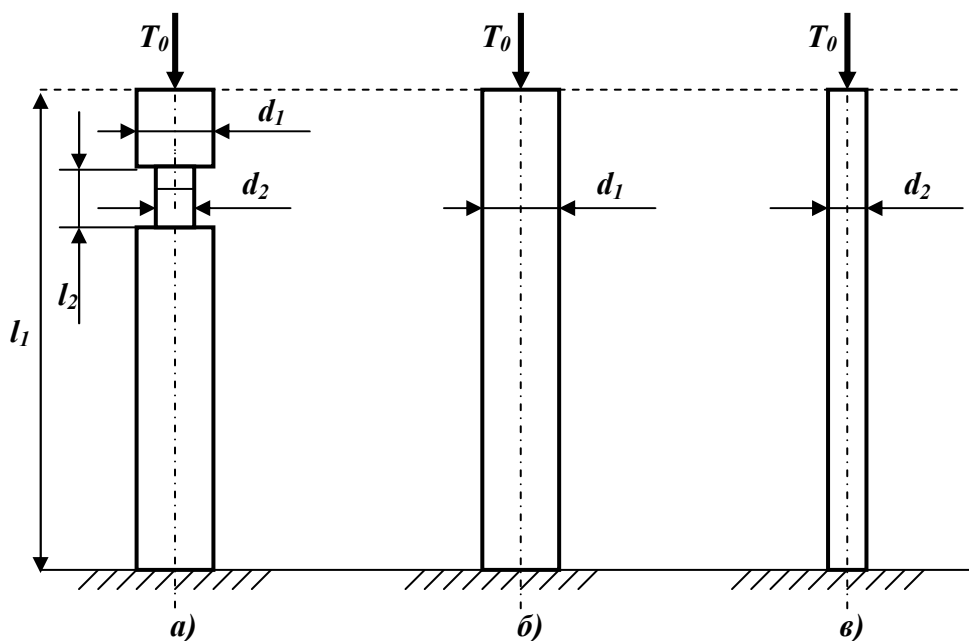


Рис.15.10. Стержні: а) – змінного; та б) і в) – постійного поперечних перерізів

Ці висновки легко перевірити розрахунком. Визначимо найбільші динамічні напруження, викликані одним і тим же позовжнім ударом із запасом енергії $T_0 = QH$ для трьох стержнів, зображених на рис.15.10а,б,в. Площу потовщеної частини стержня "а" назвемо A_1 а більш тонкої – A_2 . Позначимо $\frac{A_2}{A_1} = q$ і $\frac{l_2}{l_1} = p$. Напруження в стержнях знайдемо за наближеними формулами (15.25) і (15.28). Найбільше динамічне напруження в стержні "а" за формулою (15.25)

$$P_0 = \sigma_a = \sigma_c = \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sigma_2 \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \frac{Q}{A_2} \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_2^2 \Delta l_c}}.$$

Оскільки:

$$\Delta l_c = \frac{Q}{EA_2} + \frac{Q(l_1 - l_2)}{EA_1} = \frac{Ql_1}{EA_2} [p + q(1 - p)],$$

то

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_2^2 \frac{Ql_1}{EA_2} [p + q(1 - p)]}} = \sqrt{\frac{2T_0 Q}{A_1 l_1 q [p + q(1 - p)]}}.$$

Напруження в стержнях постійного перерізу б) і в) знайдемо за формулою (15. 28)

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_1 l_1 q}} \quad \text{та} \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_2 l_1}} = \sqrt{\frac{2T_0 E}{A_1 q l_1}}.$$

Оскільки

$$[p + q(1 - p)] < q < 1, \quad \text{то} \quad \sigma_a > \sigma_v > \sigma_b.$$

Якщо $\frac{d_2}{d_1} = 0,8$, а $\frac{l_2}{l_1} = 0,1$ то $q = 0,64$, $p = 0,1$, то в цьому випадку обчислення дають:

$\sigma_a = 1,52\sigma_b$; $\sigma_v = 0,82\sigma_a = 1,25\sigma_b$. Таким чином, наявність виточки, що зменшує діаметр на 20% на одній десятій довжини стержня, викликає підвищення напружень на 50%, але, якщо тепер надати цьому стержню мінімальну площу по всій довжині, то напруження знизяться приблизно на 20%.

Хоча ці підрахунки і зроблені за наближеними формулами, знайдені таким шляхом співвідношення між σ_a , σ_b і σ_v виявляються достатньо близькими до тих, які можна отримати за більш точною формулою (15.8), якщо енергія удару T_0 не дуже мала.

15.9. Практичні висновки з отриманих результатів

Результати наведених вище підрахунків мають величезне практичне значення. Перш за все вони показують, що **характер опору стержнів удару якісно значно відрізняється від опору їх статичної деформації**. Потовщення однієї половини стержня при статичному стиску не викликає змін напружень у перерізах іншої половини; при ударі ж воно *підвищує* їх. Місцеве *зменшення* площі поперечного перетину на *невеликій* довжині стержня викликає *різке* підвищення напружень.

Для зниження напружень треба прагнути, в основному, до збільшення податливості стержня шляхом збільшення його довжини, додавання буферної пружини, заміни матеріалу

іншим, з більш низьким модулем пружності, вирівнювання площ поперечних перерізів. Ефективним може виявитися вирівнювання площ поперечних перетинів за *найменшою*.

Тому при конструюванні стержнів, що працюють на удар, треба домогтися постійної площі перерізу по всій довжині стержня; місцеві *потовщення* допустимі лише на невеликих ділянках довжини; *місцеві ж виточки невеликої довжини вкрай небажані*. Якщо за таких умов не вдається сконструювати достатньо міцний стержень, необхідне подовження стержня або рівномірне збільшення площі його поперечного перетину.

Як приклад можна навести болт, що передає від однієї частини конструкції на іншу розтягуючий удар. Конструкція, зображена на рис.15.11а, гірше чинитиме опір удару, бо ділянка болта з нарізкою, що має менший діаметр, працюватиме як виточка. Більша частина енергії удару поглинатиметься частиною болта, що має нарізку. Руйнування болта вельми ймовірне.

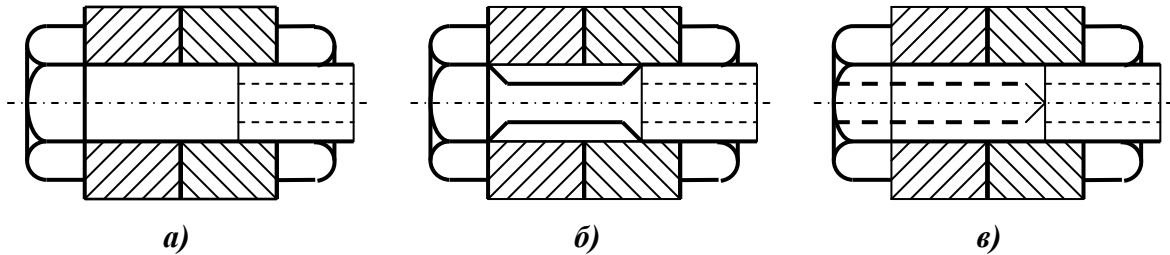


Рис.15.11. Різні конфігурації болтів:

- а) – болт, де різьбова частина має меншу площу поперечного перерізу;
б),в) – болти, в яких зменшено площу поперечного перерізу не різьбової частини**

Для поліпшення конструкції треба змусити весь об'єм болта більш-менш рівномірно поглинати енергію удару. Для цього треба зробити його площу усюди (або майже усюди) аби вона дорівнювала площі за внутрішнім діаметром нарізки. Цього можна досягти або обточуванням тіла болта (рис.15.11б), або висвердлюванням у ньому каналу (рис.15.11в).

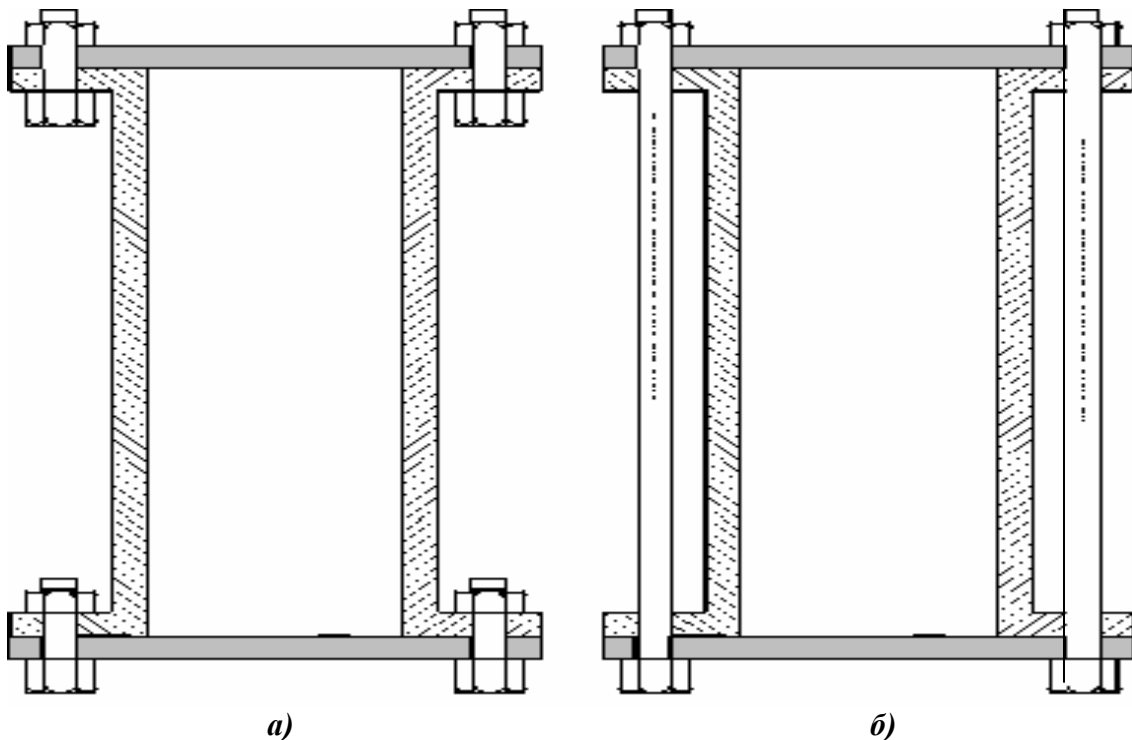


Рис.15.12. Конструкції скріплені:

- а) – короткими болтами; б) – довгими шпильками**

Як приклад збільшення опору болтів шляхом їх подовження, можна навести конструкцію, зображену на рис.15.12а, б.

Кришки циліндра бурового інструменту іноді витримують сильні удари поршня. Короткі болти, що прикріплюють кришку до циліндра за варіантом рис.15.12а, давали обрив. Вихід знайшли шляхом подовження болтів за варіантом рис.15.12б.

15.10. Механічні властивості матеріалів при ударі

Для перевірки властивості матеріалу чинити опір ударним навантаженням застосовують дослідження, що передбачає ударне навантаження при згині – визначення ударної в'язкості надрізаних зразків. Ці дослідження проводять на маятникових копрах. На рис. 15.13. зображений зразок, що використовується при дослідженнях, та напрям удару маятника (розміри задані в мм).

Різниця висот положення маятника до і після удару дозволяє обчислити роботу U , проведenu для руйнування зразка.

Ударною в'язкістю матеріалу KC називають величину роботи, затраченої на руйнування зразка, віднесenu до площі поперечного перерізу зразка в місці надрізу.

$$KC = \frac{U}{A} = \frac{G(h_1 - h_2)}{A}, \quad (15.36)$$

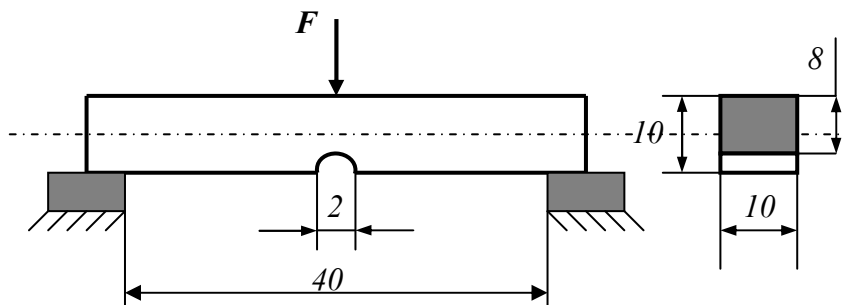


Рис. 15.13. Зразок для випробовування на ударну в'язкість

де G – вага маятника, h_1 та h_2 – початкова та кінцева висоти положення маятника.

Хоча дані про ударну в'язкість не можуть бути використані при розрахунку на міцність, вони дозволяють оцінити таку особливість матеріалу, як його схильність до крихкості при динамічних навантаженнях за умов складного напруженого стану в зоні надрізу, і вирішити питання про можливість застосування того чи іншого матеріалу для певних режимів роботи. Саме в таких умовах працює велика кількість деталей машин, що мають отвори, шпоночні канавки і т.п.

Низька ударна в'язкість є основою для відбракування матеріалу. Сталі, які використовують для виготовлення деталей, що працюють при динамічних навантаженнях, повинні мати ударну в'язкість не менше $8 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^6$ (Дж/м²).

Ударна в'язкість однієї й тієї ж сталі залежить від її структури, причому цю залежність неможливо визначити при статичних дослідженнях. У табл. 15.1. наведені результати визначення ударної в'язкості для дрібнозернистої та крупнозернистої сталі марки Ст2 (0,15% вуглецю). Ці сталі мають майже однакові пластичні властивості при статичних дослідженнях, але при ударних навантаженнях їхні властивості різко відрізняються.

За низьких температур більшість чорних металів стають крихкими. Знижується також і їх ударна в'язкість. Для таких металів проводили випробування на удар з одночасним зниженням температури. При цьому була визначена критична температура крихкості – температура, за якою виникає різке зменшення ударної в'язкості матеріалу.

Порівняльні характеристики сталей

Таблиця 15.1

Матеріал	σ_s (МПа)	δ	Ψ	Ударна в'язкість (Дж/м ²)
		(%)		
Ст2 дрібнозерниста	375	35,3	72,2	$13,1 \cdot 10^5$
Ст2 крупнозерниста	345	36,9	66,7	$2,6 \cdot 10^5$

Критична температура крихкості для різних матеріалів є різною. Нижче цієї температури метал стає непридатним для роботи при динамічних навантаженнях.

Слід відзначити, що ударна крихкість може виникати і при підвищених температурах. Наприклад, ударна в'язкість вуглецевих сталей значною мірою зменшується в межах температур 200 – 550 °С.

Лекція 30. Тема 16. Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень

Явище втоменості матеріалів. Методи визначення межі витривалості. Симетричні та несиметричні цикли. Діаграми втоменості. Діаграма граничних напружень.

16.1. Явище «втоменості» матеріалів

Опір матеріалів дії навантажень, змінних у часі за величиною або за величиною і знаком, істотно відрізняється від опору дії статичного навантаження. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються за значно меншими рівнями напружень, ніж під дією статичних навантажень. Типовим прикладом деталі, що знаходиться під дією змінних навантажень, є шток поршневої машини, знак напружень в якому змінюється відповідно до зміни напрямку руху поршня.

Практикою встановлено: якщо елемент конструкції багато разів піддавати змінному навантаженню певного рівня, то після деякого числа змін напружень у ньому з'явиться тріщина, яка поступово розвиватиметься. Врешті-решт деталь руйнуватиметься, не маючи при цьому помітних залишкових деформацій навіть у випадку, коли її матеріал високопластичний.

Число циклів до появи першої тріщини і до повного руйнування стержня буде тим більше, чим менше напруження. Характерно, що руйнування матеріалу під дією повторно змінних навантажень може відбутися при напруженнях, нижчих від межі текучості. Руйнування матеріалу під дією повторно змінних напружень називають *руйнуванням від втоменості (втоми)*.

Взагалі ж втоменістю (або втомою) матеріалів (зокрема, металів) називають явище руйнування в результаті поступового накопичування в них пошкоджень, що призводять до виникнення втомною тріщини при багатократному повторенні навантажень.

Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно змінних напружень називають *витривалістю* матеріалу.

Вивчення питань утомленості в опорі матеріалів має надзвичайно велике значення. Такі відповідальні деталі, як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни двигунів, веслувальні гвинти, клапанні пружини, повітряні гвинти, поршневі пальці й багато інших деталей виходять з ладу в основному внаслідок руйнувань втомого характеру.

Втомне руйнування спостерігається за наявності однієї з таких двох особливостей додатку навантаження:

- 1) багатократного додатку навантаження одного знака, наприклад, періодичного, що змінюється від нуля до максимуму (рис.16.1а);
- 2) багатократного повторення навантаження, що періодично змінюється не тільки за величиною, але й за знаком (знакозмінного навантаження), коли на витривалість матеріалу одночасно впливають і повторність, і змінність навантаження. При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (рис.16.1б) й зміну навантаження за несиметричним циклом (рис.16.1в,г).

Для руйнування від втоменості недостатньо змінності напружень. Необхідно також, щоб напруження мали певну величину.

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-який довільно великій кількості повторень змінних напружень, називають межею витривалості або межею втоменості.

Злам деталі від втоменості має характерний вигляд. На ньому майже завжди можна спостерігати дві зони. Одна з них гладка, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини; інша — грубозерниста, утворилася при остаточному зламі послабленого

розвинутою тріщиною перерізу деталі. Ця зона у крихких деталей має крупнокристалічну, а у в'язких — волокнисту будову.

Розглянемо хоча б дещо спрощено механізм явища втомленості.

Усі метали, що використовуються в техніці, є полікристалічними речовинами, що складаються з окремих зерен і не являють собою того однорідного моноліту, яким вважають матеріал згідно з основними гіпотезами опору матеріалів. Зерна технічних металів є сукупністю кристалів, які мають неправильну огранку, їх зазвичай називають кристалітами.

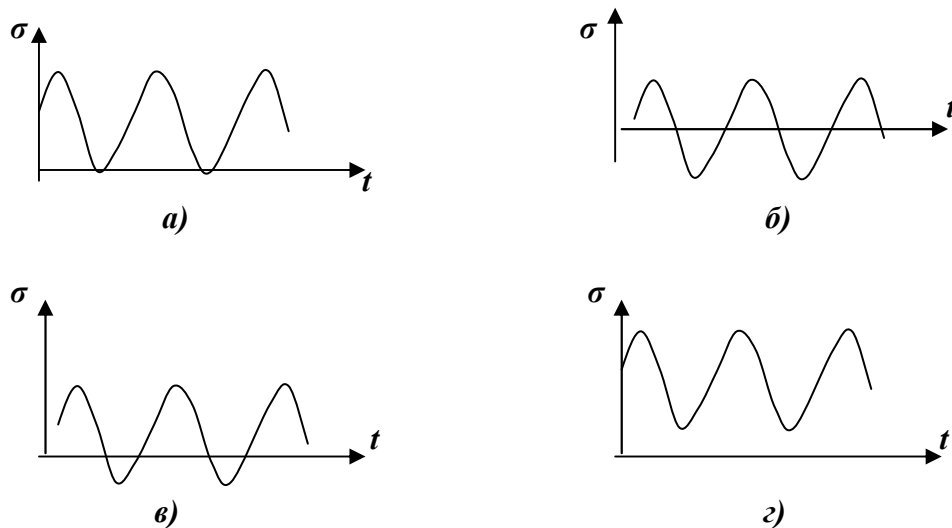


Рис.16.1. Види циклів: а) – пульсуючий; б) – симетричний; в, з) – несиметричні з різним коефіцієнтом асиметрії

Полікристалічність матеріалу й немінуча його неоднорідність призводять до того, що під дією тих або інших навантажень в окремих зернах виникають перенапруження і створюються можливості появи мікротріщин. При цьому у разі напружень, викликаних статичними навантаженнями, подібні мікротріщини не є небезпечними. Якщо ж напруження змінні в часі, то має місце тенденція до розвитку мікротріщин, що призводить зрештою до втомного зламу деталі.

Окрім вказаної гіпотези, існує і дещо інший підхід до пояснення фізичної природи явища втомленості. Зокрема, виникнення втомних тріщин можна пояснити вичерпанням здатності кристалічних зерен чинити опір зсуву.

Зерна більшості металів складаються з ряду елементарних кубиків з розмірами сторін $3 \cdot 10^{-8} - 6 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Кубики, в свою чергу, складаються з системи взаємодіючих між собою атомів, розташованих у строго певному для даного матеріалу порядку, утворюючи так звані просторові атомні ґратки. Форма і розміри елементів останньої залежать від сил взаємодії атомів і визначають характерні властивості даної речовини.

Деформація матеріалу зазвичай пов'язана зі спотворенням кристалічних ґраток і зміною міжатомних відстаней. При цьому у разі невеликих напружень взаємодія між атомами не порушується і при подальших розвантаженнях вказані викривлення ґраток зникають. Якщо ж напруження великі, то в кристалічних зернах пластичних матеріалів по деяких площинах, які називають площинами ковзання кристаліта, відбуваються незворотні зсуви. Зсунуті один щодо другого групи атомів вже не утворюють єдиних атомних ґраток. Нове утворення, що вийшло при цьому, виявляється міцнішим у результаті посилення площин ковзання всередині окремих зерен. Тепер для його руйнування потрібне більше зусилля.

Проте зміцнення при зсувах супроводить знеміцнення (розрихлення). Тому процес зсуву обов'язково супроводжується появою зон, де атомні зв'язки порушуються, а нові не

створюються. Проявляється це в тому, що створюються найдрібніші мікротріщини, кожна з яких за певних умов (наприклад, при сусідстві кількох зерен, ослаблених тріщиною) може з'явитися причиною та місцем зародження і розвитку втомної тріщини, що призводить зрештою до руйнування від втомленості.

Таким чином, можна сказати, що механізм утворення тріщин при повторно-змінних навантаженнях вельми складний і не повністю вивчений.

З безперечних положень теорії втомленості можна відзначити наступні:

1) процеси, що проходять при повторно-змінних навантаженнях в металі, носять різко виражений місцевий характер;

2) з двох видів напруження — нормальних і дотичних, домінуючий вплив на процеси втомленості до створення першої мікротріщини включно, мають дотичні напруження, що викликають пластичні зсуви і руйнування.

Розвиток втомної тріщини, поза сумнівом, може прискорюватись за наявності розтягуючих напружень як у пластичних, так і, особливо, у малопластичних та крихких матеріалах типу чавуну, в яких поява тріщини відриву значно підвищує чутливість до розтягуючих напружень.

Утворення тріщин найчастіше спостерігається в зернах, що лежать ближче до поверхні деталі. Пояснюється це тим, що поверхневі шари матеріалу до певної міри мають сліди пошкоджень різними технологічними операціями при обробці деталі (внутрішні напруження, сліди механічної обробки), не кажучи вже про ті випадки, коли зовнішні шари при повторно-тимчасових навантаженнях знаходяться під впливом найбільших напружень (при згині й крученні).

Межу витривалості визначають експериментально. Вона залежить від цілого ряду факторів, зокрема, від форми і розмірів деталі, способу її обробки, стану поверхні деталі, виду напруженого стану (розтяг-стиск, кручення, згин і т. п.), закону зміни навантаження в часі при випробуваннях і т.п.

При розгляді в опорі матеріалів дії змінних напружень у більшості випадків інженерної практики передбачається, що ці напруження є періодичними функціями часу $p = f(t)$ з періодом, що дорівнює T .

Сукупність усіх значень напружень за час одного періоду називають циклом (рис.16.2а).

На втомну міцність в основному впливають максимальні p_{\max} і мінімальні p_{\min} напруження циклу. Окрім них в опорі матеріалів вводять поняття постійного або середнього напруження циклу p_c (рис.16.2б)

$$p_c = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad (16.1)$$

і поняття про амплітуду p_a циклу, що характеризує змінність напруження:

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \quad (16.2)$$

Середнє напруження може бути як додатним, так і від'ємним, амплітуда ж циклу визначається абсолютною величиною (без урахування знака). Відповідно до виразів (16.1) і (16.2) $p_{\max} = p_c + p_a$; $p_{\min} = p_c - p_a$.

Подвоєну величину амплітуди коливань напружень називають *розмахом циклу*. Відношення мінімального напруження циклу до максимального з урахуванням знаків цих напружень називають *характеристикою циклу* або *коефіцієнтом асиметрії циклу* і позначають буквою r , тобто

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \quad (16.3)$$

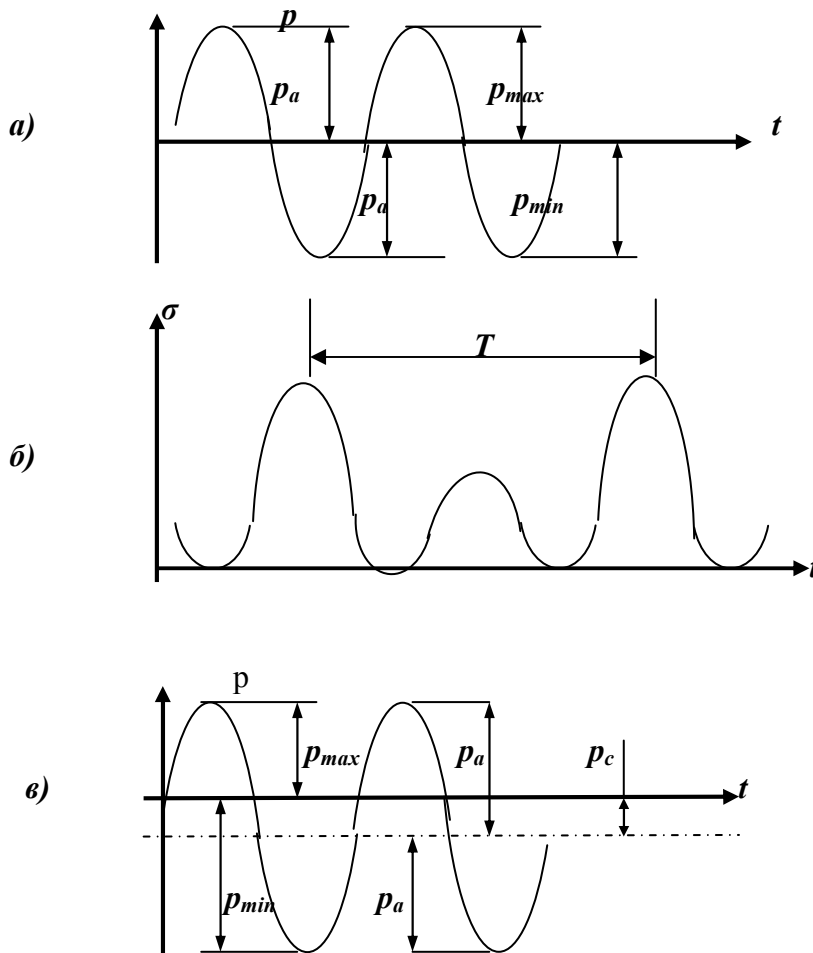


Рис.16.2. Характеристики циклів: а) – симетричного; б,в) – несиметричних

Найнебезпечнішим є так званий *симетричний цикл*, коли $p_{\max} = -p_{\min}$ і $p_c = 0$, при якому

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = -1.$$

Межа втомленості при симетричному циклі є мінімальною для даного виду деформації. Її позначають p_{-1} . У разі напруження, що змінюється від нуля до максимуму, тобто при *нульовому, або пульсуючому, циклі*, коли $p_{\min} = 0$,

$$r = \frac{0}{p_{\max}} = 0;$$

а межу втомленості, відповідну даному циклу, позначають p_0 .

При $p = const$, тобто коли діє постійне статичне навантаження,

$$p_{\max} = -p_{\min} = p$$

і характеристика циклу

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \frac{p}{p} = 1.$$

В найзагальнішому випадку межу витривалості, одержану при характеристиці циклу r , позначають p_r , межу витривалості, одержану при якомусь певному значенні r , припустимо при $z = -0,5$, позначають відповідно $p_{-0,5}$.

Цикли, що мають однакові характеристики r , називають *подібними*. Характеристика циклу, або коефіцієнт асиметрії, може змінюватися від $-\infty$ до $+\infty$.

Очевидно, для повної уяви про характер дії циклічного навантаження, окрім характеристики циклу r , повинно бути відомо хоча б *максимальне* або *мінімальне напруження циклу*.

На закінчення відзначимо, що в окремих випадках, коли мова буде йти про нормальні або дотичні напруження (в першому випадку при циклічному розтягуванні -стисканні або згині, в другому при циклічному крученні) буква p в прийнятих вище позначеннях повинна бути замінена відповідно на σ або на τ при збереженні відповідних індексів. Наприклад, при циклічному розтягу-стиску або згині замість p_{\max} , p_{\min} , p_c і p_a повинні відповідно фігурувати σ_{\max} , σ_{\min} , σ_c і σ_a , тоді межа втомленості при характеристиці циклу r позначатиметься σ_r , а, наприклад, при симетричному циклі, тобто при $r = -1$, буде σ_{-1} . У разі кручення з циклічною зміною напруження характерні напруження циклу відповідно позначають τ_{\max} , τ_{\min} , τ_c і τ_a , а межу витривалості $-\tau_r, \tau_{-1}$ т.д.

16.2. Методи визначення межі витривалості

16.2.1. Діаграми втомленості.

Щоб визначити межу витривалості того або іншого матеріалу, потрібно на відповідній випробувальній машині випробувати партію зразків з даного матеріалу в кількості не менше 6-12 шт. Для цього найчастіше беруть гладкі циліндричні зразки діаметром 7 — 10 мм.

Межі витривалості матеріалу при вибраній характеристиці циклу r , зрозуміло, будуть різними залежно від виду деформації, при якій випробовують зразки, тобто, в залежності від того, при змінних напруженнях розтягу-стиску, змінному крученні, згині або в умовах складного напруженого стану їх випробовують. Тому, ставлячи перед собою мету отримання межі витривалості, слід наперед вказати, при якому виді деформації і характері зміни напруження за цикл вимагається визначити межу витривалості.

Відповідно до поставлених вимог вибирають необхідну випробувальну машину. В принципі при випробуванні за умов згину ця машина являє собою пристрій, схожий на токарний верстат з двома шпинделями, осі яких розташовані під певним кутом (що регулюється) одна до другої. Крім того, ця машина обов'язково повинна бути обладнана лічильником циклів.

В лабораторних умовах симетричний цикл здійснити найпростіше. При обертанні зразка його зовнішні волокна сприйматимуть поперемінно то розтяг (коли вони розташовані знизу), то стиск (при повороті зразка на 180°).

Кількість обертів за хвилину найпоширеніших втомних машин зазвичай ~ 3000 об/хв. (частота 50 Гц). Тому випробування на втомленість з метою отримання межі витривалості вимагає тривалого часу, обчислюваного тижнями безперервної роботи машини. За останній час у багатьох випадках при дослідженні витривалості матеріалів і конструктивних деталей застосовують більш швидкохідні машини— 100 ...500 Гц, а в деяких випадках і 20000 Гц (ультразвукові частоти). В останньому випадку для випробування потрібні тільки десятки хвилин.

При випробуванні партії зразків з метою отримання межі витривалості необхідно давати такі навантаження на окремі зразки, щоб вони руйнувалися, витримавши різну кількість циклів навантаження.

Опрацювання отриманих експериментальних даних зазвичай супроводжується побудовою кривої утомленості, яку в літературі часто називають кривою Веллера (рис.16.3.).

А. Веллер (1819-1914) – фундатор наукового дослідження втомленості матеріалів. Він створив перші машини для випробування опору різних матеріалів повторно змінним навантаженням.

Криву втомленості будують по точках в координатах числа циклів N і напруження p_{\max} . Кожному зразку, що руйнувався, на діаграмі відповідає одна точка з координатами N (кількість циклів до руйнування) і p_{\max} (напруження), тобто, крива втомленості є функцією $p_{\max} = f(N)$.

Порядок встановлення навантажень на зразки, що випробовуються, в більшості випадків приймають спадаючим, тобто на перший зразок дають навантаження, що значно перевищує межу витривалості, а навантаження на подальші зразки поступово знижують. Зрозуміло, кожен із менш навантажених зразків витримуватиме все більше і більше число циклів. Може бути прийнятий інший порядок встановлення навантажень.

Будуючи криву втомленості за точками, які дали зразки, що руйнувалися, легко переконатися, що, наприклад, при випробуванні сталі (рис.16.3, крива 1) при високому рівні напруження крива круто падає, а в міру зниження їх крутизна зменшується і крива асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого і визначається межа витривалості. Ордината точки на кривій, де остання практично починає співпадати з вказаною асимптотою, відповідає напруженню, при якому зразок не буде руйнуватися, пройшовши число циклів, відповідне наперед заданій величині, так званій базі випробування N_0 .

Неважко зрозуміти, що за базу випробування N_0 якраз і приймають те число циклів, при якому правий кінець кривої втомленості проходить практично паралельно осі абсцис. Виходячи з цього, *базою випробування на витривалість* називають найбільше число повторно-змінних навантажень, істотне перевищення якого не повинно приводити до втомних руйнувань зразка, що випробовується при даному напруженні.

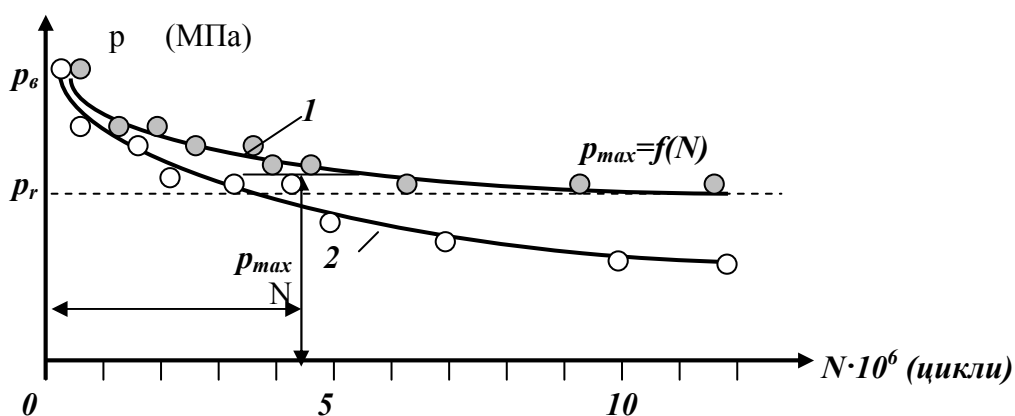


Рис.16.3. Графіки випробувань для визначення межі витривалості при симетричному циклі

Для чорних металів (сталі, чавуну і т. п.) за базу випробувань зазвичай приймають 10 млн. циклів, а для кольорових (мідь, алюмінію і т. і.) — число, в 5 — 10 разів більше. З розгляду характеру втомної кривої для кольорових металів (рис.16.3, крива 2) очевидно, що

на великій ділянці вона спадає вельми поступово, тому і доводиться в даному випадку за базу випробування приймати більше число циклів. Взагалі для таких металів йдеться тільки про деяку умовну межу втомленості.

Умовною межею втомленості називають максимальне напруження, при якому не відбувається руйнування за умов здійснення певного, наперед заданого, числа циклів, відповідного тій або іншій прийнятій базі випробування.

У зв'язку з тим, що за кривою втомленості, побудованою в координатах $N - \rho$, або, що те ж саме, $N - \sigma$ (рис.16.4а), часто важко визначити межу витривалості, застосовують два інші способи побудови діаграм втомленості.

Перший спосіб полягає в тому, що по осі абсцис відкладають величину, зворотну числу циклів (рис.16.4б). Межу втомленості тоді визначають як ординату в місці перетину кривої втомленості з віссю напруження.

Другий спосіб заснований на представленні результатів випробувань у напівлогарифмічних (рис.16.4в) або логарифмічних (рис.16.4г) координатах. Як бачимо з креслення, критерієм визначення межі втомленості тут є перелом кривої.

На закінчення відзначимо, що, згідно з чисельними експериментальними даними, для деяких матеріалів можна помітити певні співвідношення між межами витривалості при різних видах деформації і, зокрема, між межами витривалості при згині σ_{-1}^i , крученні τ_{-1} і розтягу σ_{-1}^0 при симетричних циклах.

Для гладких зразків ці співвідношення приблизно дорівнюють: для сталі – $\sigma_{-1}^0 = 0,7\sigma_{-1}^i$; для чавуну – $\sigma_{-1}^0 = 0,65\sigma_{-1}^i$; для сталей і легких сплавів – $\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}^i$; для чавуну – $\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}^i$.

Маючи величину тимчасового опору σ_g , межі витривалості сталі при симетричному циклі можна приблизно знайти за такими емпіричними співвідношеннями відповідно для розтягу-стиску, згину і кручення:

$$\sigma_{-1}^0 = 0,28\sigma_g; \quad \sigma_{-1}^i = 0,40\sigma_g; \quad \tau_{-1} = 0,22\sigma_g. \quad (16.4)$$

Для кольорових металів спостерігається менш стійке співвідношення між межею втомленості і тимчасовим опором; згідно з дослідними даними, в цьому випадку $\sigma_{-1}^0 = (0,24 \div 0,50)\sigma_g$.

16.2.2. Діаграми граничних напружень.

Щоб охарактеризувати здатність опору матеріалу дії змінних напружень з різною асиметрією циклу, будують так звану діаграму граничних напружень (рис.16.5). В ній по осі абсцис відкладають середнє напруження циклу σ_c , а по осі ординат — найбільше σ_{\max} і найменше σ_{\min} напруження циклу (діаграма Сміта). Їх граничні значення $\sigma_{r_{\max}}$, $\sigma_{r_{\min}}$, σ_c визначають за даною характеристикою циклу дослідним шляхом у результаті побудови кривих втомленості.

Зазвичай починають із симетричного циклу ($r = -1$). Граничним напруженням у цьому випадку буде межа витривалості σ_{-1} . Отже,

$$\sigma_{-1_{\max}} = \sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_{\min}} = -\sigma_{-1}; \quad \sigma_{-1_c} = 0.$$

Цьому циклу на діаграмі відповідають точки A і A' на осі ординат.

Випробувавши партію зразків з даного матеріалу при певному значенні характеристики циклу $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, визначимо найбільше і найменше значення напружень, при яких матеріал працює на межі витривалості σ_r , тобто

$$\sigma_{r_{\max}} = \sigma_r; \quad \sigma_{r_{\min}} = r\sigma_r; \quad \sigma_{r_c} = \frac{\sigma_{r_{\max}} + \sigma_{r_{\min}}}{2}.$$

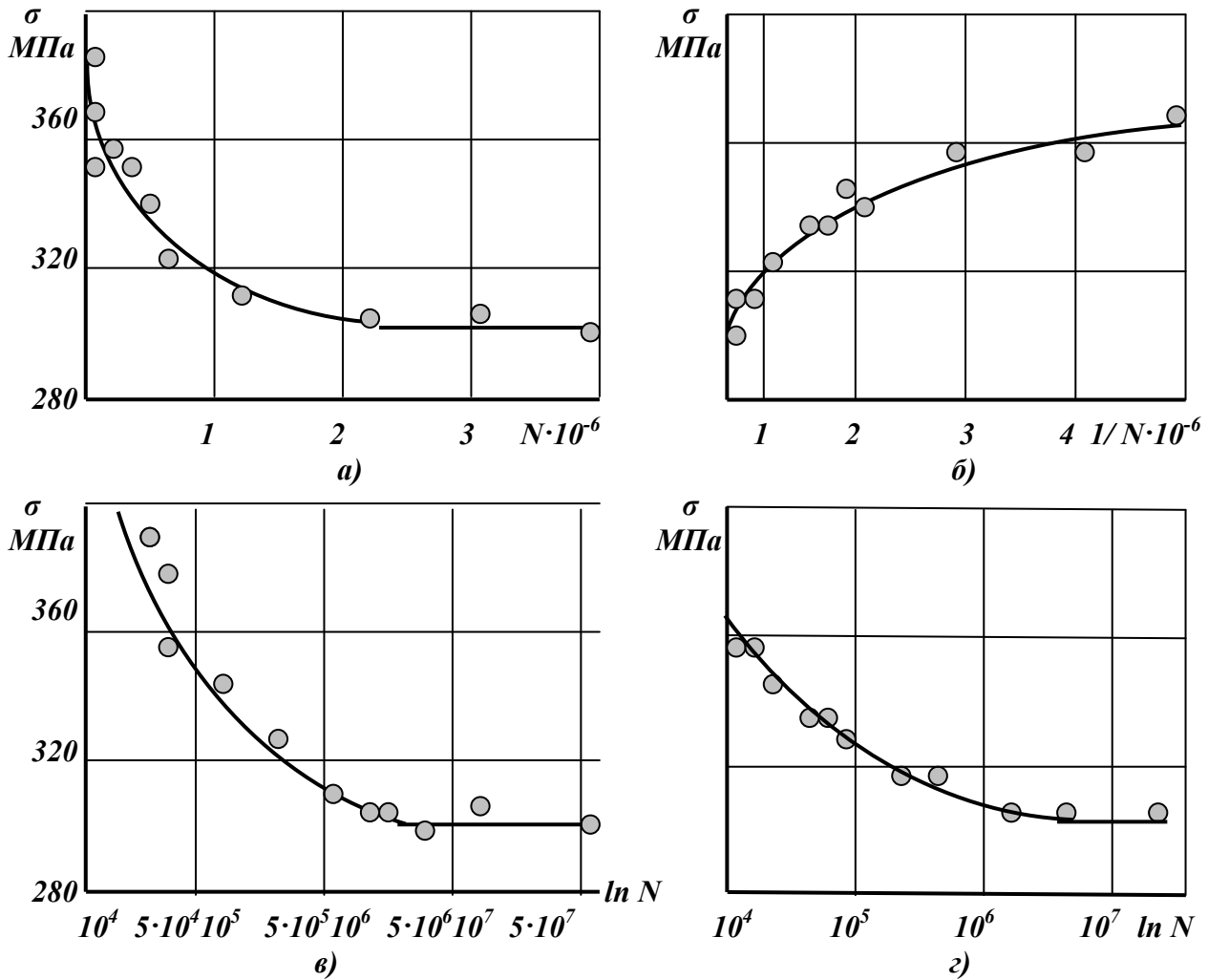


Рис.16.4. Криві втоменості: а) – в координатах $N - \sigma$; б) – в координатах $1/N \cdot 10^6 - \sigma$; в) – в координатах $\ln N - \sigma$; г) – в координатах $\ln N - \ln \sigma$

Нанесемо на діаграму точки M і N , абсциса яких дорівнює σ_c а ординати — відповідно $\sigma_{r_{\max}}$ і $\sigma_{r_{\min}}$. Аналогічно для ряду інших значень r отримаємо точки M_1, N_1, M_2, N_2 .

Сполучаємо лініями всі точки, що зображують максимальні й мінімальні граничні напруження циклів. Очевидно права крайня точка діаграми (точка D) відповідає циклу, при якому $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_c$, $r = 1$ – тобто статичному навантаженню. Граничним напруженням у цьому випадку є межа міцності матеріалу. Отже, абсциса й ордината точки D дорівнюють межі міцності матеріалу. Таким чином, ординати точок лінії AD відповідають межим витривалості матеріалу при різних значеннях коефіцієнта асиметрії циклів.

Легко переконатися, що промінь, який проходить через початок координат діаграми граничних напружень, є геометричним місцем точок, що характеризують цикли з однаковим коефіцієнтом асиметрії $r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$. Справді,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_c} = \frac{2\sigma_{\max}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{2}{1+r}.$$

Для визначення межі витривалості матеріалу при даному значенні коефіцієнта асиметрії r потрібно обчислити за наведеною формулою кут β і провести промінь під цим кутом до перетину з лінією AD ; ордината точки перетину дорівнює величині σ_r .

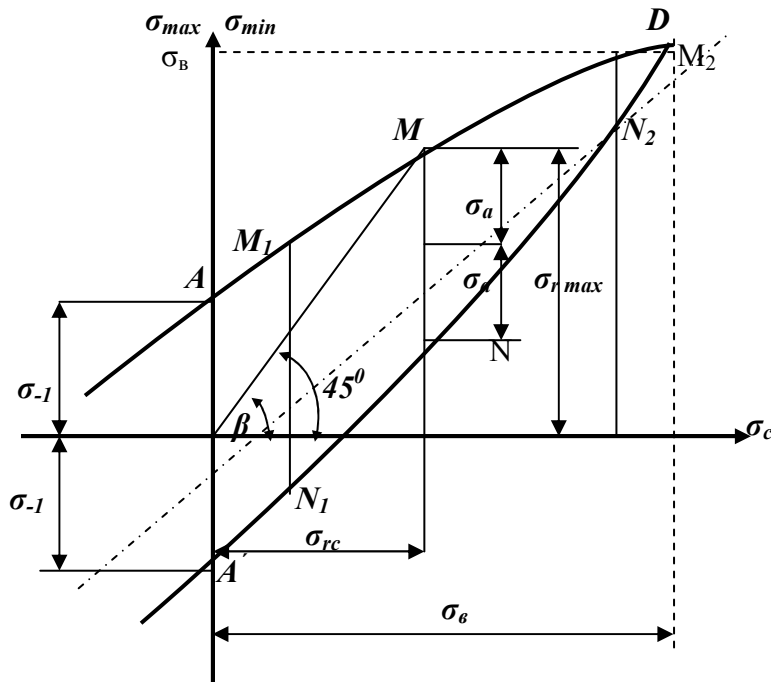


Рис.16.5. Діаграма граничних напружень

У разі циклічного кручення діаграму будують по одну сторону від осі ординат, вона має такий вигляд, як зображено, наприклад для конструкційної сталі на рис.16.6.

Діаграму граничних напружень можна будувати також в координатах $\sigma_a - \sigma_c$ (діаграма Хейя), тобто, по осі ординат відкладають граничну амплітуду σ_a циклу, а по осі абсцис — середнє напруження σ_c циклу (рис.16.7). На цій діаграмі пряма, проведена з початку координат під деяким кутом, також характеризує цикли з однаковою асиметрією, оскільки:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \frac{\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}}{\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}} = \frac{1 - r}{1 + r}.$$

Таким чином, при постійному β виявляється постійним і коефіцієнт асиметрії r .

У разі плоского або об'ємного напруженого стану опір втомленості можна охарактеризувати, виходячи з відповідних гіпотез міцності, що узгоджуються з експериментальними даними.

Для дослідження справжньої поведінки матеріалу за умов складного напруженого стану, наприклад, при поєднанні згину з крученням, використовують спеціальні випробувальні машини, що дозволяють одночасно навантажувати зразок змінними згинаючими і крутними моментами.

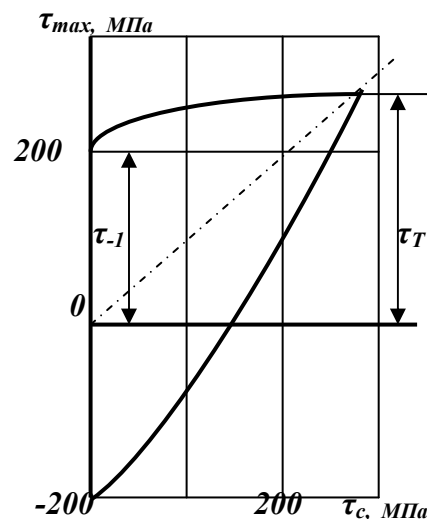


Рис.16.6. Визначення межі витривалості для несиметричних циклів при крученні

За наслідками випробувань, отриманими при різних поєднаннях змінних σ і τ , будують діаграми в координатах $\sigma_a - \tau_a$ або у відносних величинах σ_a/σ_{-1} і τ_a/τ_{-1} . Точки таких діаграм визначають напружені стани, що характеризуються величинами σ_a і τ_a при складному напруженому стані. Типова діаграма для конструкційних сталей, побудована за експериментальними даними, зображена на рис.16.8 (крива 1). Вона відповідає дузі кола. Для високоміцних сталей і чавунів експериментальні криві ближче до еліптичних дуг (рис.16.8, крива 2).

У разі симетричного циклу з дотриманням синхронності і синфазності напруження, умову міцності в амплітудах головних напружень відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень запишемо так:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1}.$$

Виходячи з теорії міцності енергії формоутворення, умову міцності можна записати

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \quad (16.5)$$

Для складного напруженого стану, що характеризується сумісною дією розтягу і кручення або згину і кручення, поправкою на співвідношення величин меж витривалості умова міцності виражається так:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} \leq \sigma_{-1}. \quad (16.6)$$

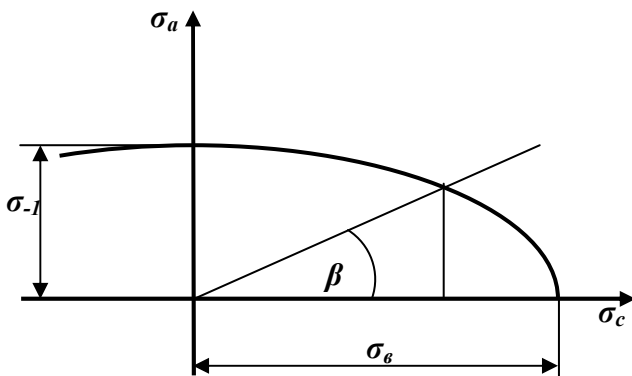


Рис.16.7. Діаграма граничних напружень у координатах $\sigma_c - \sigma_a$ (діаграма Хейя)

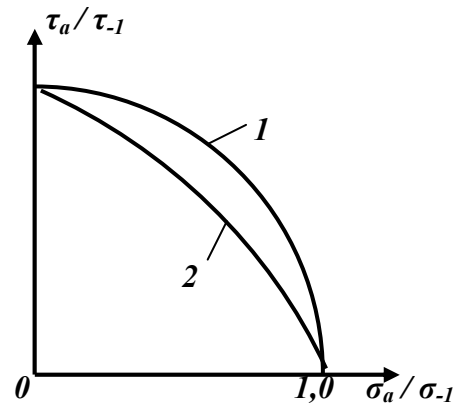


Рис.16.8. Діаграма граничних у випадку складного напруженого стану

Остання умова співпадає з раніше наведеною експериментально отриманою залежністю, що характеризується в координатах σ_a/σ_{-1} ; τ_a/τ_{-1} дугою кола.

Лекція 31. Продовження теми 16 (Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень)

Вплив конструктивно-технологічних факторів на межу витривалості. Вплив концентрації напруження. Вплив розмірів (масштабний фактор). Вплив стану поверхні. Вплив пауз. Вплив перевантажень. Вплив тренування. Вплив температури. Розрахунок на міцність при повторно-змінних напруженнях.

16.3. Вплив конструктивно-технологічних факторів на межу витривалості

На величину межі витривалості зразків або деталей, які виготовляють з того або іншого матеріалу, окрім характеристики циклу впливає цілий ряд різних факторів. До них відносяться форма зразка, розміри, стан поверхні, середовище, в якому відбувається випробування, температура випробувань, режим циклічної силової дії (тренування, паузи, перевантаження, частота навантаження і т. п.), попередня внутрішня напруженість матеріалу та ін.

Для з'ясування впливу того або іншого фактора як еталон прийнято межу втомленості p_{-1} , отриману випробуванням на повітрі при симетричному циклі партії гладких полірованих зразків діаметром 7—10 мм. Тоді вплив різних факторів на витривалість може бути оцінений відхиленням межі витривалості p'_{-1} партії даних зразків від межі витривалості p_{-1} еталонних.

16.3.1. Вплив концентрації напруження.

Найважливішим фактором, що знижує межу витривалості, є концентрація напружень, викликана різкою зміною перетину деталі. Концентраторами напруження на практиці є шпоночні канавки, отвори в деталі, нарізки на поверхні, малі радіуси заокруглення, місця різкої зміни розмірів перерізів і т.п. Концентрація напружень, як правило, сприяє зародженню втомної тріщини, яка, розвиваючись, призводить в кінці кінців до руйнування деталі.

Як показують досліди, у разі дії змінних напружень межа витривалості з концентрацією напружень більша, ніж частка від ділення межі витривалості гладкого зразка на теоретичний коефіцієнт концентрації напруження α_k

$$p_{-1k} \geq \frac{p_{-1}}{\alpha_k}.$$

Така розбіжність пояснюється тим, що теоретичний коефіцієнт концентрації α_k відображає характер розподілу напруження лише для ідеально пружного матеріалу. В реальних же матеріалах за рахунок пластичних деформацій у мікрзоні місця концентрації напруження дещо перерозподіляються і згладжуються. Враховуючи це, разом з теоретичним коефіцієнтом концентрації при розгляді питань втомленості, використовують поняття ефективного або дійсного, коефіцієнта концентрації, що є відношенням межі витривалості гладкого зразка без концентрації напруження до межі витривалості зразка з концентрацією напруження, що має такі ж абсолютні розміри перерізів. Ці коефіцієнти надалі позначені так:

- для нормальних напружень $k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}};$
- для дотичних напружень $k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}},$

де σ_{-1} і τ_{-1} — межі витривалості гладких зразків;

σ_{-1k} і τ_{-1k} — межі витривалості зразків з концентрацією напруження.

Надалі всі міркування робитимемо стосовно нормальних напружень, маючи на увазі, що для дотичних напружень все сказане залишиться в силі, тільки потрібно індекс « σ » при коефіцієнтах замінити на « τ ».

Ефективні або дійсні коефіцієнти концентрації напруження мають менші значення, ніж коефіцієнти концентрації a_σ , які визначають теоретичним шляхом в припущенні «пружного» розподілу напруження.

Кількісну оцінку вказаної різниці коефіцієнтів k_σ і a_σ можна отримати введенням так званого *коефіцієнту чутливості матеріалу* до концентрації напруження

$$q_\sigma = \frac{k_\sigma - 1}{a_k - 1}. \quad (16.7)$$

Знаючи коефіцієнти чутливості q_σ , для яких в довідковій літературі є відповідні графіки, можна за a_k визначити значення ефективних коефіцієнтів концентрації

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_k - 1). \quad (16.8)$$

Очевидно, для матеріалу, нечутливого до концентрації напружень, тобто при $q_\sigma = 0$, $k_\sigma = 1$. Коли $q_\sigma = 1$, $k_\sigma = \alpha_k$, матеріал має повну чутливість до концентрації напруження.

Інженерна практика показує, що чутливість металу до концентрації напружень залежить перш за все від його властивостей. Причому, чим вища міцність сталі, тим вище її чутливість до концентрації напруження. Тому використання високоміцних сталей за умов змінних напружень не завжди виявляється доцільним.

Чутливість металу до концентрації напруження у грубозернистих сталях менша ніж у дрібнозернистих. Метали і сплави з неоднорідною структурою, такі як, наприклад, сірий чавун, мають знижену чутливість до концентрації напружень внаслідок того, що структурна неоднорідність є внутрішнім джерелом концентрації напруження і знижує межу витривалості гладких зразків, тому зовнішні концентратори вже мало впливають на межу витривалості.

Коефіцієнти чутливості до концентрації напруження, як свідчать експерименти, залежать не тільки від механічних властивостей, але й від конструктивної форми самої деталі, а також розподілу в ній напруження.

Вплив концентрації напружень у розрахунках деталей машин, що піддаються дії змінних напружень із асиметричним циклом, слід враховувати на основі експериментальних даних, оскільки теоретично це питання поки не вирішено.

16.3.2. Вплив розмірів (масштабний фактор).

Ефективність концентрації напружень пов'язана з абсолютними розмірами перетину деталі, а саме: зі збільшенням розмірів деталі при збереженні її геометричної подібності значення ефективних коефіцієнтів концентрації напруження збільшуються.

Як свідчать результати експериментів, при збільшенні діаметра зразка понад 30—40 мм, подальше зростання ефективних коефіцієнтів концентрації практично припиняється. Можна вважати, що після досягнення деякого розміру перетину ефективний коефіцієнт не відрізняється від теоретичного, тобто, $k_\sigma = \alpha_k$. Для легованих сталей з межею міцності $\sigma_s \geq 1200 \text{ МПа}$ рівність вказаних коефіцієнтів при середніх рівнях концентрації напружень $\alpha_k = 2 \div 3$ досягається вже при $d = 40 \div 50 \text{ мм}$. Що стосується вуглецевих сталей, то там граничний розмір, після якого $k_\sigma = \alpha_k$, виявляється значно більшим.

Абсолютні розміри перетинів деталі разом із впливом на ефективність концентрації напружень істотно впливають і на межі витривалості зразків без концентрації напружень.

При цьому зі зростанням абсолютних розмірів перерізів межі витривалості знижуються. Відношення межі витривалості деталі розміром d до межі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ($d_0 = 7 \div 10 \text{ мм}$), називають *коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перетину* і позначають стосовно нормальних напружень

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}. \quad (16.9)$$

Коефіцієнти впливу абсолютних розмірів перетину можна визначати і на зразках з концентрацією напружень. В цьому випадку

$$\varepsilon_{\sigma_k} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}}. \quad (16.10)$$

Причому, деталь розміром d і зразок малого розміру d_0 повинні бути геометрично подібні.

Для розрахунку елементів машин з урахуванням впливу розмірів деталі як за наявності концентраторів напруження, так і без них існують спеціальні графіки. Як свідчать експерименти, при збільшенні діаметра до 1150—1200 мм зниження меж витривалості зразків при ротаційному згині може сягати 30—45 %. Дослідні дані свідчать про малий вплив абсолютних розмірів на витривалість при однорідному напруженому стані – розтягу-стиску. При крученні, як і при згині, зниження меж витривалості із зростанням розмірів деталі виявляється в більший ступінь. Це слід віднести за рахунок впливу градієнта напруження.

Зниження меж витривалості зі зростанням абсолютних розмірів перерізів деталі можна пояснити також впливом таких факторів:

- 1) зменшенням механічної міцності матеріалу в міру збільшення діаметра заготовок навіть за умови дотримання їх належної термічної обробки;
- 2) зміною властивостей поверхневого шару після механічної обробки, оскільки ці зміни виявляються різними при різних розмірах деталі;
- 3) неоднорідністю механічних властивостей і напружень у різних зернах у зв'язку з полікристалічною структурою металу та підвищення ймовірності більш раннього втомного руйнування зі зростанням розмірів деталі (цей фактор, мабуть, є головним).

Опір втомленості матеріалу оцінюють за межею витривалості $(\sigma_{-1})_{d_0}$, що визначають на гладких лабораторних зразках малого діаметра, а для уявлення про міцність деталі при змінних напруженнях необхідно знати її межу витривалості $(\sigma_{-1k})_{d_0}$. Тому вводять додаткове поняття *ефективного коефіцієнта концентрації напружень деталі* $(k_\sigma)_d$, який визначають за формулою

$$(k_\sigma)_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1k})_d}. \quad (16.11)$$

Можна помітити, що ступінь впливу концентрації напружень на межі витривалості залежить від виду напруженого стану. При циклічному крученні, наприклад, ефективні коефіцієнти концентрації виявляються як правило нижчими, ніж при згині для одних і тих же конструктивних форм. Співвідношення між коефіцієнтами при згині і крученні можна виразити наближеною формулою

$$k_\tau = 1 + 0,6(k_\sigma - 1). \quad (16.12)$$

16.3.3. Вплив стану поверхні.

У більшості випадків поверхневі шари елемента конструкції, що перебувають під дією циклічних навантажень, виявляються більш напруженими, ніж внутрішні (зокрема, це має місце при згині й крученні). Крім того, поверхня деталі майже завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної обробки, а також з корозією внаслідок дії навколишнього середовища.

Тому втомні тріщини, як правило, починаються з поверхні, а погана якість останньої призводить до зниження опору втомленості.

Вплив стану обробленої поверхні на витривалість оцінюють коефіцієнтом β , який дорівнює відношенню межі витривалості випробовуваного зразка з певною обробкою поверхні до межі витривалості ретельно полірованого зразка.

Межа витривалості сталених зразків при грубому обточуванні знижується на 40 %, а за наявності на поверхні окалини — на 70 %.

Шкідливий вплив мікронерівностей поверхні у багатьох випадках пом'якшується пластичною деформацією, що викликається в поверхневому шарі механічною обробкою і розповсюджується на деяку глибину, залежну від режимів різання, зокрема, від величини подачі. При грубому обточуванні вона може сягати 1 мм і більше, а при шліфуванні й поліруванні вимірюється сотими частками . міліметра і мікрометрами. Пластична деформація поверхневого шару може підвищити межу витривалості на 10—20 %.

На межу витривалості істотно впливає корозія. Цей вплив буде різним у випадку, коли метал, що піддавався корозії до випробування на втомленість, не піддається їй при випробуваннях, і у разі, коли метал піддається корозії під час випробувань. В обох вказаних випадках, особливо в другому, корозія викликає різке зниження меж витривалості (до 70—80 %). При цьому зниження межі витривалості за наявності корозії проявляється тим сильніше, чим вища межа міцності металу і чим більше останній схильний до корозії.

Вплив корозії при розрахунку можна врахувати коефіцієнтом β_k , що являє відношення межі витривалості σ_{-1}^k зразка, схильного до корозії, до межі витривалості σ_{-1} полірованого зразка, тобто $\beta_k = \sigma_{-1}^k / \sigma_{-1}$.

Причиною такого різкого зниження витривалості внаслідок корозії є корозійні пошкодження поверхні, що викликають значну концентрацію напружень, а також ослаблення опору утворенню тріщин.

Зменшити вплив стану поверхні на втомленість можна відповідними технологічними методами обробки, що призводять до зміцнення поверхневих шарів. До таких методів відносяться: наклеп поверхневого шару шляхом накатки роликком, обдування дробом і т. п.; хіміко-термічні методи — азотизація, цементація, ціанування; термічні—поверхневий гарт струмами високої частоти або газовим полум'ям. Вказані методи обробки призводять до збільшення міцності поверхневого шару і створення в ньому значних стискаючих залишкових напружень, що ускладнюють утворення втомної тріщини. Тому ці методи обробки суттєво впливають на підвищення межі витривалості.

За наявності концентрації напружень, крім глибини шару та його абсолютних розмірів, істотний вплив на ефект зміцнення справляють рівень концентрації напружень та градієнт напруження у поверхні. Ефект зміцнення зростає зі збільшенням цієї концентрації.

16.3.4. Вплив пауз.

На межу витривалості мають вплив паузи (перерви в навантаженні). При цьому в одних випадках вплив пауз незначний, в інших число циклів до руйнування збільшується за рахунок пауз на 15—20 %. Збільшення числа циклів тим більше, чим частіші паузи і чим вони довші (останній чинник впливає слабше).

16.3.5. Вплив перевантажень.

Вплив перевантажень, тобто навантажень, вищих за межу витривалості, залежить від характеру перевантаження. При малих перевантаженнях до певної кількості циклів межа витривалості підвищується, при великих перевантаженнях після певного числа циклів — знижується.

16.3.6. Вплив тренування.

Якщо прикласти до зразка напруження трохи нижчі за межу витривалості і потім поступово підвищувати величину змінного навантаження, то й опір втомленості можна значно підвищити. Це явище, зване тренуванням матеріалу, широко використовується в техніці.

Зміцнення можна отримати при порівняно короткочасних тренуваннях (~ 50000 циклів), але при значних перевантаженнях. Досліди показують: якщо спочатку діє менше, а потім велике перевантаження, то витривалість матеріалу виявляється більш високою, ніж у випадку, коли спочатку діє велике, а потім менше перевантаження.

16.3.7. Вплив температури.

З підвищенням температури межа витривалості зазвичай падає, а зі зниженням її — зростає як у гладких зразках, так і у зразках з концентраторами.

Для сталі при температурі вище 300 °C спостерігається зниження межі втомленості приблизно на 15—20 % на кожні 100 °C підвищення температури. Правда, у деяких сталей при підвищенні температури від 20 до 300 °C межа втомленості підвищується. Проте підвищення, мабуть, пов'язано з фізико-хімічними процесами, що відбуваються при одночасному впливі нагрівання та змінних напружень.

При підвищених температурах навіть при дуже великому числі циклів крива втомленості не має горизонтальної ділянки. Для гладких зразків, навіть при 100 млн. циклів, горизонтальна ділянка не спостерігається. Вплив концентрації напружень з підвищенням температури загалом зменшується, проте для деяких сталей, мабуть, знову-таки за рахунок фізико-хімічних процесів, чутливість до надрізу сплаву збільшується. При температурах ~ 500—600 °C в сталі починаються процеси повзучості, що має місце також і при змінних навантаженнях навіть при симетричному циклі. При зниженні температури з 20 до -190 °C межа витривалості у деяких сталях збільшується більш, ніж удвічі, хоча ударна в'язкість їх при цьому знижується.

Це ще раз указує на принципову відмінність між втомним і крихким руйнуваннями шляхом відриву при статичних і ударних навантаженнях.

16.4. Розрахунок на міцність при повторно-змінних напруженнях

У разі простих видів деформації при зміні напруження в деталі за симетричним циклом запас міцності при дії, наприклад, нормальних напружень можна обчислити за формулою

$$n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a},$$

де $(\sigma_{-1k})_d$ — межа витривалості деталі при розтягу-стиску, або при згині;

- σ_a — номінальні фактично діючі знакозмінні напруження.

Для розрахунку на міцність при змінних навантаженнях у разі складного напруженого стану можна використовувати відповідні теорії міцності. При цьому для матеріалів у пластичному стані, як відомо, застосовують третю і четверту теорії міцності. В даному випадку ці теорії повинні бути відображені відповідно у вигляді

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2}; \quad (16.13)$$

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}. \quad (16.14)$$

Відповідно до експериментальних даних умова міцності у формі еліптичної залежності (див. рис.16.8) при згині й крученні виражається формулою (16.6), а для деталі достатньо великих розмірів з концентрацією напруження – формулою

$$(\sigma_{-1k})_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[\frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\tau_{-1k})_d} \right]^2 \tau_a^2} \quad (16.15)$$

або

$$\frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1k})_d^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1k})_d^2} = 1. \quad (16.16)$$

Тоді, маючи на увазі, що $n_\sigma = (\sigma_{-1k})_d / \sigma_a$ — коефіцієнт, що характеризує запас міцності тільки за нормальними напруженнями, а $n_\tau = (\tau_{-1k})_d / \tau_a$ — коефіцієнт, що характеризує міцність тільки за дотичними напруженнями, на підставі співвідношення (16.16) матимемо

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2};$$

звідки запас міцності n при складному напруженому стані, наприклад при сумісній дії згину і кручення, визначимо формулою

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (16.17)$$

Визначаючи запаси міцності при асиметричних циклах для будь-якого виду циклічного навантаження {згину, розтягу-стиску, кручення) виходять зі схематичної діаграми граничних напружень для зразків без концентрації напруження (рис.16.9).

Аналітичний вираз кривої граничних напружень у координатах $\sigma_{\max} - \sigma_c$ можна виразити рівнянням прямої, що проходить через дві точки A та B з координатами $(0, \sigma_{-1})$ і $(\sigma_0 / 2, \sigma_0)$ і записати у вигляді $\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \sigma_c \operatorname{tg} \alpha$ згідно рис.16.9

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0 / 2};$$

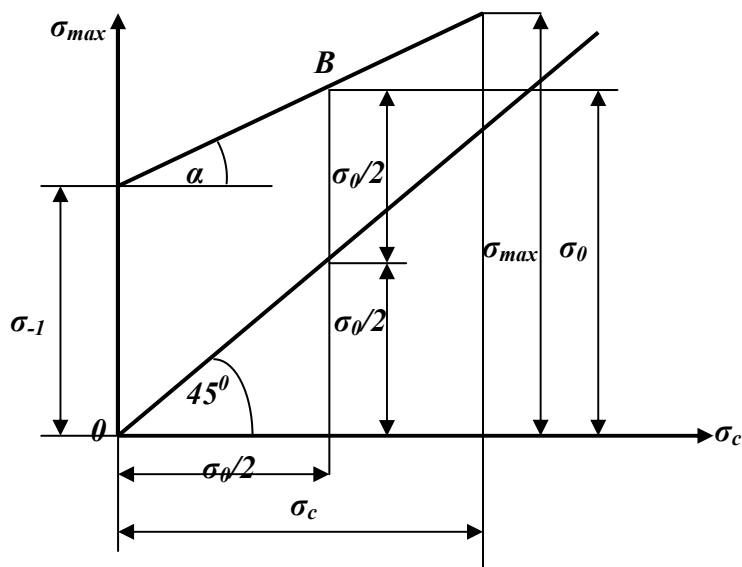


Рис.16.9. Схематизована діаграма граничних напружень для зразків без концентраторів

тоді

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_c = \sigma_{-1} + \left(1 - \frac{2\sigma_0 - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \sigma_c.$$

I, позначаючи

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (16.18)$$

запишемо рівняння кривої граничних напружень зразка без концентрації напружень так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \sigma_c. \quad (16.19)$$

При дії дотичних напружень відповідне рівняння має аналогічний вигляд:

$$\tau_{\max} = \tau_{-1} + (1 - \psi_\tau) \tau_c. \quad (16.20)$$

Значення ψ_σ і ψ_τ для ряду сталей при різних видах деформації залежно від межі міцності наведено в табл. 16.1.

Враховуючи вплив на межу витривалості при асиметричному циклі різних факторів, у тому числі концентрації напружень, абсолютних розмірів перерізу, стану поверхні і т. д., виходять з експериментально встановлених закономірностей, що полягають у тому, що відношення граничних амплітуд напружень гладкого зразка і даної деталі залишається постійним незалежно від величини середнього напруження циклу. На підставі цього можна побудувати схематизовану діаграму граничних напружень для деталі (рис.16.10).

Цю побудову можна отримати також, виходячи з таких аналітичних уявлень.

Відповідно до виразу (16.19) гранична амплітуда напруження зразка виражається формулою

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_c = [\sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \sigma_c] - \sigma_c = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_c,$$

а гранична амплітуда напруження для деталі $(\sigma_{ak})_d$ на підставі вищенаведеної закономірності про вплив різних факторів тільки на змінну складову напружень буде в $(k_\sigma)_d$ разів меншою, тобто

$$(\sigma_{ak})_d = \frac{\sigma_a}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_c}{(k_\sigma)_d}. \quad (16.21)$$

Тоді рівняння кривої граничних напружень для деталі можна записати у вигляді

$$(\sigma_{\max})_d + \sigma_c = \sigma_c + \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_c}{(k_\sigma)_d} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d} + \left[1 - \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_d}\right] \sigma_c. \quad (16.22)$$

Припустимо, що деталь у небезпечній точці піддається дії змінних напруження з коефіцієнтом асиметрії r , причому відомі відповідно σ_{\max} і σ_c циклу. Як наголошувалося вище, всі цикли, відповідні $r = const$, лежать на одній прямій. За вказаними даними на діаграмі рис.16.11 заданий напружений стан характеризується точкою M . Отже, всі точки,

Значення величин ψ_σ та ψ_τ

Таблиця 16.1.

$\sigma_b, \text{МПа}$	ψ_σ	ψ_τ
350-550	0	0
520-750	0,05	0
700-1000	0,10	0,05
1000-1200	0,20	0,10
1200-1400	0,25	0,15

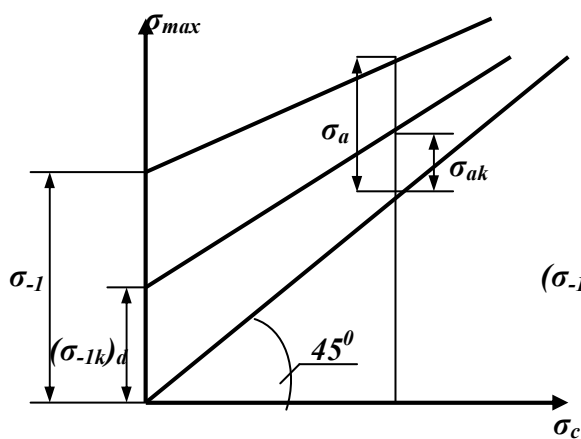


Рис.16.10. Схематизована діаграма граничних напружень для деталі

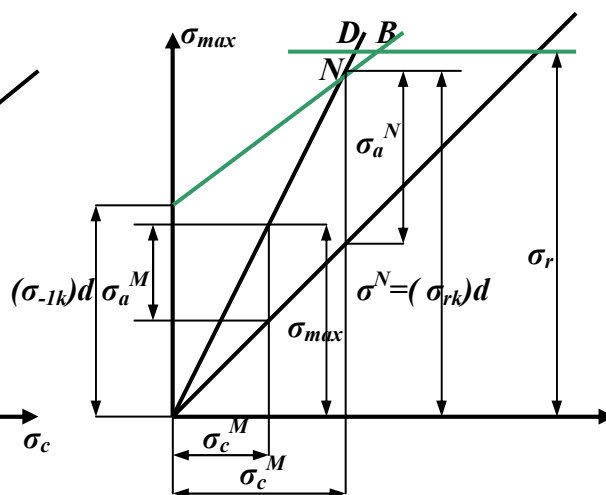


Рис.16.11. Діаграма напруженого стану, заданого точкою M

що лежать на промені, проведеному з початку координат через дану точку M , мають коефіцієнт асиметрії, дорівнює r . Точка перетину цього променя з кривою втомленості має ординату, яка дорівнює межі витривалості $(\sigma_{rk})_d$. Отже, коефіцієнт запасу

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma^N}{\sigma^M} = \frac{(\sigma_{rk})_d}{\sigma_{\max}^M} = \frac{\sigma_c^N}{\sigma_c^M} = \frac{\sigma_a^N}{\sigma_a^M}, \quad (16.23)$$

де $(\sigma_{rk})_d$ — межа витривалості деталі при асиметричному циклі; $\sigma_{\max}^M = \sigma^M$ — максимальне напруження деталі.

При перетині променя OD з прямою AB граничних напружень у точці N максимальне напруження σ_{\max}^N співпадає з максимальним граничним напруженням $\sigma^N = (\sigma_{rk})_d$, тобто

$$\sigma'_{\max} = \sigma^N.$$

З другого боку, на підставі рівняння (16.23)

$$\sigma'_{\max} = \frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} \sigma_c^N; \quad (16.24)$$

$$\frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} \sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_d} + \left[1 - \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_d} \right] \sigma_c^N.$$

Звідси знаходимо абсцису точки N

$$\sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_d \left[\frac{\sigma^M}{\sigma_c^M} - 1 + \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_d} \right]} = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c^M}{(k_{\sigma})_d (\sigma^M - \sigma_c^M) + \psi_{\sigma} \sigma_c^M}.$$

Оскільки $\sigma^M - \sigma_c^M = \sigma_a^M$, остання формула перетворюється так:

$$\sigma_c^N = \frac{\sigma_{-1} \sigma_c^M}{(k_{\sigma})_d \sigma_a^M + \psi_{\sigma} \sigma_c^M}.$$

Підставляючи отриманий вираз σ_c^N у формулу (16.24), знайдемо вираз для максимального граничного напруження в деталі (ординату точки N)

$$\sigma'_{\max} = \sigma^N = (\sigma_{rk})_d = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_c^M}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c^M}.$$

Тоді остаточний вираз для запасу міцності буде таким

$$n_\sigma = \frac{\sigma^N}{\sigma^M} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_d \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_c^M}. \quad (16.25)$$

Аналогічно при крученні

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_d \tau_a + \psi_\tau \sigma_c^M}. \quad (16.26)$$

Якщо асиметрія циклу дуже велика, то роль змінних напружень при оцінюванні міцності може виявитися неістотною і розрахунок слід проводити за граничним станом, як при статичному навантаженні. У зв'язку з цим разом із запасом міцності за втомленістю (16.25), (16.26) слід визначати запас міцності і за несучою здатністю при статичному навантаженні.

Аналогічно проводять розрахунок і при складному напруженому стані. При асиметричному циклі коефіцієнт запасу при змінних навантаженнях визначають за формулою (16.17), в якій n_σ і n_τ обчислюють відповідно за формулами (16.25) і (16.26). При цьому міцність оцінюють за найменшим із запасів за втомленістю і за статичною несучою здатністю.

Величина запасів міцності при розрахунку на витривалість залежить від точності визначень зусиль і напружень, від однорідності матеріалів, якості технології виготовлення деталі, інших факторів. При підвищеній точності розрахунку (з широким використанням експериментальних даних для визначення зусиль, напружень і характеристик міцності), при достатній однорідності матеріалу і високій якості технологічних процесів приймається запас міцності $n = 1,3 \div 1,4$. Для звичайної точності розрахунку (без належної експериментальної перевірки зусиль і напружень) при помірній однорідності матеріалу $n = 1,4 \div 1,7$. При зниженій точності розрахунку (відсутності експериментальної перевірки зусиль і напружень) і зниженій однорідності матеріалу, особливо для литва і деталей значних розмірів, $n = 1,7 \text{ — } 3,0$.

Найбільш достовірні дані про необхідні запаси міцності деталі можна встановити на основі результатів натурних випробувань деталей або досвіду експлуатації машин із деталями цього типу.

Лекція 32. Тема 17. Основи механіки руйнування

Загальні поняття. Крихке руйнування. Задача Гріффітса. Силові критерії руйнування. Оцінювання величини пластичної зони на продовженні тріщини. Методика експериментального визначення тріщиностійкості конструкційних матеріалів.

17.1. Загальні поняття

Механіка руйнування, або теорія тріщин, як складова науки про міцність твердого тіла утворилася порівняно недавно (в останні 30-40 років). Займається вона вивченням законів розділення твердих тіл на частини під дією зовнішніх, силових факторів і інших причин.

Руйнування може бути частковим і повним. Часткове руйнування тіла характеризується пошкодженням матеріалу за рахунок виникнення в ньому окремих тріщин або розподілених за об'ємом дефектів, що знижують його міцнісні властивості. При повному руйнуванні відбувається розподіл тіла на частини. Отже, руйнування є найхарактернішим показником порушення міцності твердого тіла.

Розрізняють два види руйнування — пластичне і крихке. Пластичне руйнування відбувається після істотної пластичної деформації, що протікає по всьому об'єму тіла або його значної частини, і є результатом вичерпання здатності матеріалу чинити опір пластичній деформації. Крихким називають руйнування, що відбувається без пластичної деформації. Розрізняють також квазікрихке руйнування, при якому має місце деяка пластична зона перед краєм тріщини. Квазікрихке руйнування відбувається в самому ослабленому перетині при напруженні, вищому за межу текучості, але нижчому за межу міцності. При крихкому руйнуванні швидкість розповсюдження тріщини складає 0,2—0,5 швидкості звуку, тобто, достатньо велика, а злам має кристалічний вигляд. При пластичному руйнуванні швидкість тріщини мала і складає не більше 0,05 швидкості звуку, а злам має волокнистий вигляд.

Важливе місце в теорії руйнування займає втомне руйнування, яке відбувається внаслідок поступового розвитку тріщини при повторно-змінному циклічному навантаженні. Втомне руйнування виникає в результаті накопичення в матеріалі незворотного пошкодження під дією багатократного прикладання повторно-змінних навантажень. При цьому тріщини в матеріалі починають розвиватися задовго до повного руйнування незалежно від того, пластичне це буде руйнування чи крихке.

Особливо велике практичне значення в інженерній справі має вивчення крихкого руйнування конструкцій, яке походить від швидкого розповсюдження тріщин при середніх напруженнях, нижчих за межу текучості, таких, що не вважаються в зв'язку з цим небезпечними. Останнє свідчить про те, що розглянутих до цього класичних методів розрахунку на міцність за пружним і пластичним станами недостатньо. Ось чому практично необхідно доповнити класичні методи новими методами розрахунку на міцність, які враховують закони зародження і розвитку тріщин, а також ввести нові характеристики матеріалу, за якими б можна було оцінювати його тріщиностійкість.

Відмітимо, що для побудови теорії руйнування тільки елементарних методів опору матеріалів недостатньо. Основи цієї теорії базуються на методах теорії пружності й теорії пластичності.

17.2. Крихке руйнування. Задача Гріффітса

Практика експлуатації реальних деталей показує, що через концентрацію напружень, неточності складання, впливу середовища і т.п. стадія руйнування, яка складається з виникнення і розвитку тріщини, починається задовго до вичерпання несучої здатності деталі. При цьому міцність матеріалу деталі не реалізується. В результаті поступового розвитку

тріщини тривалість процесу руйнування від початку до повного руйнування може займати 90 % часу «життя» деталі і більше. Ось чому практично цікава не стільки наявність тріщини, скільки швидкість її росту в тих або інших умовах. У зв'язку з цим основна задача механіки руйнування — вивчення міцності тіл з тріщинами, геометрія тріщин, а також розроблення критеріїв несучої здатності елементів конструкцій з тріщинами.

У розвитку тріщини розрізняють три найпростіші типи зсуву її берегів один щодо другого відповідно до дії різних зовнішніх навантажень (рис.17.1). При деформації

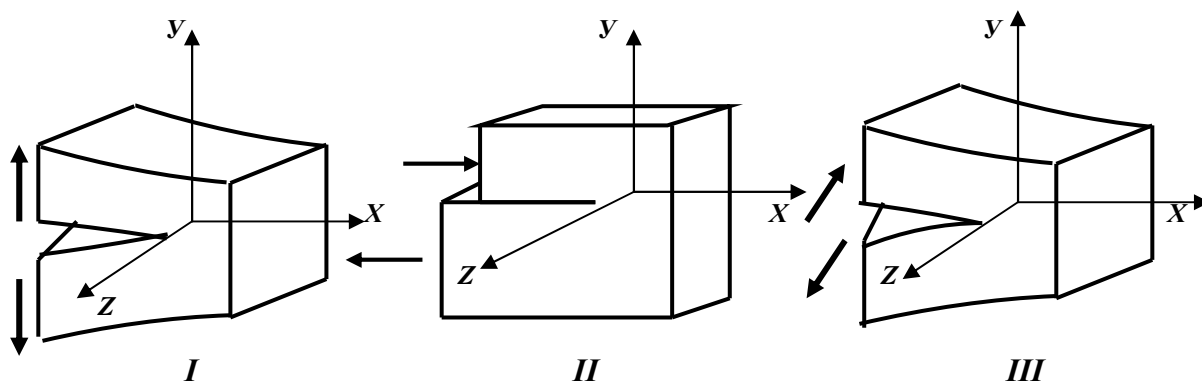


Рис.17.1. Три типи розвитку тріщини: схема I – тріщина відриву; схема II – тріщина при зсуві уперек її передньої кромки; схема III – тріщина при поздовжньому зсуві

розтягу (схема I) виникає тріщина відриву, коли її поверхні зміщуються (розходяться) в напрямках, перпендикулярних до поверхні тріщини; при деформації поперечного зсуву (схема II) поверхні берегів тріщини зміщуються уперек її передньої кромки; при навантаженні за схемою III утворюються тріщини поздовжнього зсуву, при якому точки поверхні тріщини зміщуються вздовж її передньої кромки. Очевидно, якщо на тіло з тріщиною діє довільне навантаження в області дії закону Гука, на підставі принципу суперпозиції будь-який зсув берегів тріщини, що розвивається, можна представити у вигляді суми наведених трьох типів зсувів.

Отже, крихке руйнування пов'язано з виникненням у матеріалі тріщин, ініційованих дефектами в структурі матеріалу, станом поверхні в результаті обробки або корозії, дією повторно-змінних навантажень (втомні тріщини) і т.п. Виниклі тріщини спочатку розвиваються в часі поволі, а потім — швидко. Зростання тріщин з часом може відбуватися і при постійному навантаженні.

Перші основоположні дослідження про розвиток крихких тріщин пов'язують з ім'ям А. Гріффітса, який розглянув умови розвитку одиначної тріщини в пластині нескінченних розмірів і одиначної товщини, що знаходиться в умовах одновісного розтягу (рис.17.2).

При цьому вимагалось встановити, при якому значенні зовнішніх напружень $\sigma = \sigma_{кр}$, прикладених до пластини на нескінченності, тріщина з початковою довжиною $2l$ стане нестійкою, тобто, почне швидко розповсюджуватися при постійному напруженні σ .

Для розширення тріщини потрібно затратити деяку роботу на подолання сил взаємодії сусідніх шарів. Позначимо γ роботу, необхідну для утворення одиниці нової поверхні. Тоді поверхнева енергія даної пластини, зумовлена утворенням тріщини

$$G = 4\gamma l. \quad (17.1)$$

Значення γ (густина поверхневої енергії) можна вважати константою матеріалу. Її визначають експериментально. Потенціальна енергія деформації пластини у зв'язку з утворенням у ній тріщини зменшується на величину

$$W = \frac{\pi\sigma^2 l^2}{E}, \quad (17.2)$$

тобто являє собою різницю потенціальних енергій деформації пластини без тріщини і з тріщиною в вигляді витягнутого еліпса.

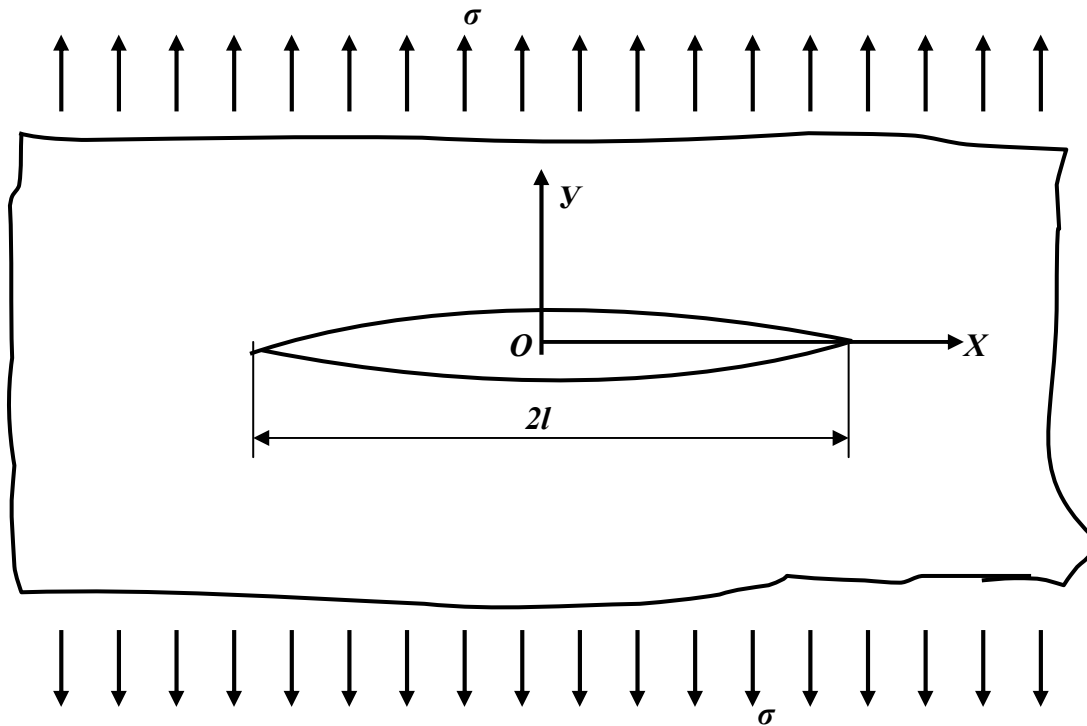


Рис.17.2. Тріщина в умовах одновісного розтягу

Виходячи із закону збереження енергії, А. Гріффітс запропонував таке формулювання критерію руйнування: *тріщина починає розповсюджуватися у тому випадку, коли при варіації її довжини $\delta l > 0$ приріст поверхневої енергії компенсується відповідною кількістю потенціальної енергії деформації* (вважають, що інші види енергії відсутні):

$$\delta(\Gamma + W) = 0, \quad (17.3)$$

де з урахуванням (17.1) і (17.2)

$$\begin{aligned} \delta\Gamma &= \frac{\partial}{\partial l}(4\gamma l)\delta l = 4\gamma\delta l; \\ \delta W &= \frac{\partial}{\partial l}\left(-\frac{\pi\sigma^2 l^2}{E}\right)\delta l = -\frac{2\pi\sigma^2 l}{E}\delta l. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Приріст поверхневої енергії $\delta\Gamma$ — величина додатна. Вона характеризує збільшення внутрішньої енергії тіла, тоді як приріст потенціальної енергії деформації — величина від'ємна, оскільки цю частину енергії виділяє тіло (завдяки релаксації напружень у зв'язку з появою нових, вільних від навантаження поверхонь тіла). Підставляючи (17.4) у (17.3), отримаємо

$$2\gamma - \frac{\pi\sigma^2 l}{E} = 0. \quad (17.5)$$

Звідси знайдемо

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l}}. \quad (17.6)$$

У разі плоскої деформації (коли $\varepsilon_z = 0$) в останній формулі слід модуль пружності E замінити на $E/(1-\mu^2)$. Тоді

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\mu^2)l}} \quad (17.7)$$

Для наочності зміна співвідношень енергій, що входять в доданки (17.3), зі збільшенням довжини тріщини відображена у вигляді графіків (рис.17.3). Максимальному значенню повної енергії відповідає критична довжина тріщини l_k .

Формули (17.6), (17.7) визначають критичне напруження, при якому відбувається мимовільне, без додаткової роботи зовнішніх сил, зростання в тілі тріщини завдовжки $2l$. Залежність прикладеного напруження від довжини тріщини зображена на рис.17.4.

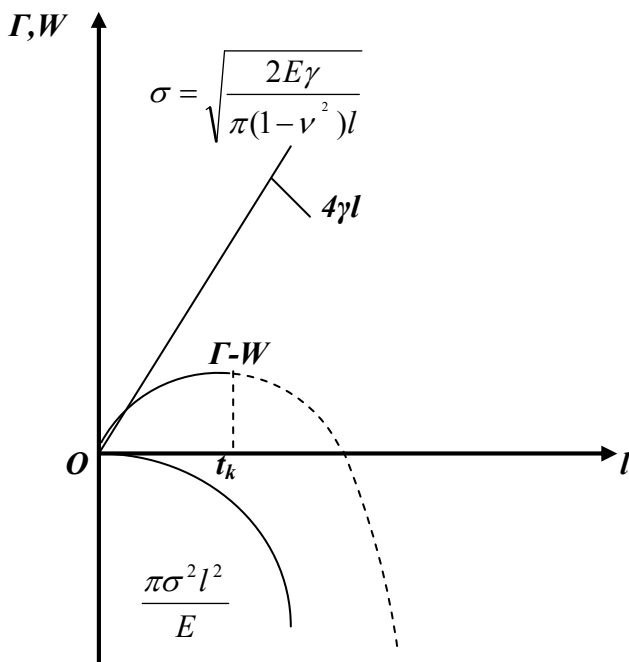


Рис.17.3. Залежність співвідношень енергій зі збільшенням довжини тріщини

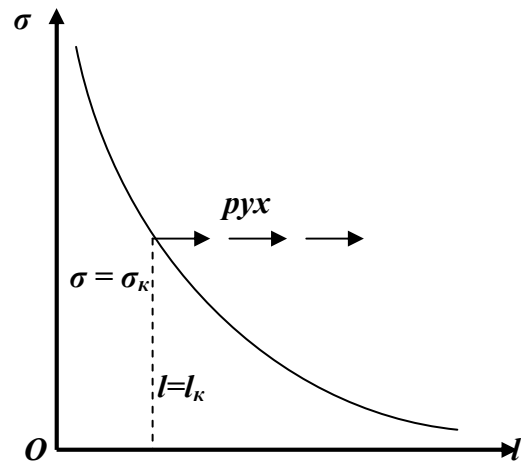


Рис.17.4. Залежність прикладеного напруження від довжини тріщини

Розглянута теорія Гріффітса не враховує докритичного росту тріщини, що спостерігається експериментально. Проте ця теорія заслуговує великої уваги, оскільки дозволяє виразити крихку міцність через фізичні і механічні властивості матеріалу, показує, що максимальне руйнуюче навантаження має місце не при виникненні тріщини, а після досягнення нею деяких критичних розмірів. Останнє свідчить, що існують безпечні тріщини, які не розвиваються, але можуть перейти в небезпечні за рахунок збільшення крихкості матеріалу в результаті зниження температури, динамічної дії навантаження, старіння матеріалу і т.п.

Таким чином, з теорії Гріффітса випливає, що наявність в тій або іншій деталі тріщини ще не є причиною негайного виходу деталі з ладу. У принципі, можливо за критичним значенням довжини тріщини і характеру зовнішнього навантаження, вводячи відповідний запас на наявність тріщини, встановлювати допуск на розмір тріщини, з якою деталь може працювати заданий час. Оскільки не кожна тріщина небезпечна, механіка руйнування може розвиватися як наука, що створює надійні методи захисту конструкцій від крихкого руйнування.

Теорію Гріффітса можна застосовувати також для металів і сплавів, що мають певну пластичність. У цих випадках слід враховувати енергію, яка витрачається на пластичну деформацію. Як показують досліди, пластична деформація розвивається поблизу вершини тріщини в порівняно тонкому шарі, що її оточує. Товщина шару пластично деформованого

металу залежить від умов навантаження, властивостей матеріалу і може складати від декількох десятків мікрометрів до десятих часток міліметра.

Е. Орован і Д. Ірвін на основі концепції енергетичного балансу Гріффітса запропонували додатково врахувати енергію пластичної деформації, ввівши у формулу (17.6) замість дійсної питомої поверхневої енергії γ ефективну поверхневу енергію $\gamma_{ef} = \gamma + \gamma_p$ — роботу пластичної деформації при утворенні одиниці поверхні.

Таким чином, умова квазікрихкого руйнування металів набула вигляду:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_{ef}}{\pi d}}. \quad (17.8)$$

Досліди показують, що для сталей $\gamma_p \approx 10^3 \gamma$. Отже, в (17.8) можна знехтувати величиною γ і прийняти $\gamma_{ef} \approx \gamma_p$. Зауважимо, що $\gamma_p \sim 200 \text{ Дж/м}^2$, а $\gamma \sim 0,1 \text{ Дж/м}^2$.

17.3. Силові критерії руйнування

Процес руйнування матеріалу зосереджений в малому околі вершини тріщини, де спостерігається висока концентрація напружень, зумовлена малим радіусом заокруглення. Напружений стан в цій області при різних схемах навантаження на основі методів теорії епружності можна в загальному вигляді представити формулою

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (17.9)$$

де $i, j = x, y$.

Величину K , залежну від виду навантаження, величини навантаження і форми тріщини, називають *коефіцієнтом інтенсивності напружень* (розмірність K — сила/довжина). Залежно від виду навантаження (див. схеми рис.17.1.) коефіцієнти інтенсивності напружень позначають відповідно індексами I, II або III, тобто, K_I, K_{II}, K_{III} , r і θ — полярні координати з полюсом у вершині тріщини (рис.17.4); f_{ij} — деяка функція кута θ .

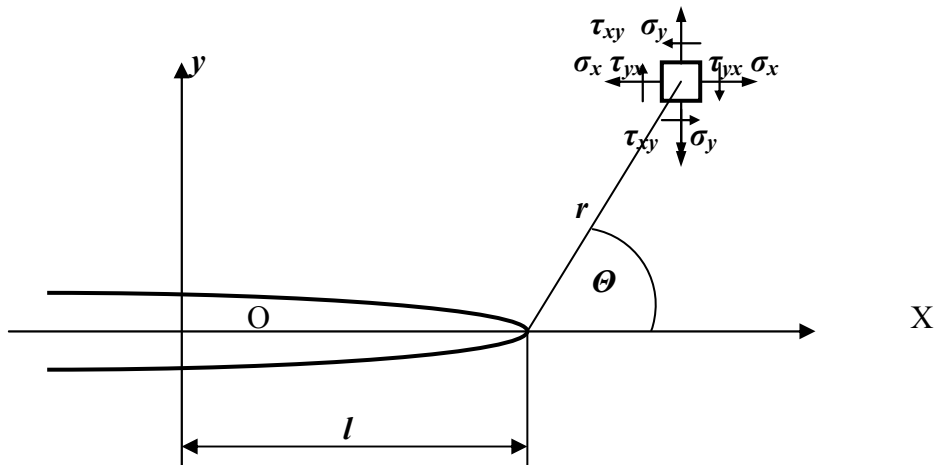


Рис.17.4. Система полярних координат у вістрі тріщини

Зокрема, при плоскому напруженому стані для навантаження за схемою I формули (17.9) мають такий вигляд:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right);$$

$$\sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \quad (17.10)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}.$$

Переміщення u і v точок у напрямі осей x і y відповідно визначають формулами

$$u = \frac{2K_1(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(+ \sin^2 \frac{\theta}{2} \right);$$

$$v = \frac{2K_1(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\mu} + -\cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (17.11)$$

У випадку плоскої деформації, коли $\varepsilon_z = 0$, у формулах (17.11) слід замінити $(1-\mu)/(1+\mu)$ і $1/(1+\mu)$ на величини $1-2\mu$ і $1-\mu$ відповідно.

Епюри напружень біля вершини тріщини відриву ($0 \leq \theta \leq \pi$) в декартових і полярних координатах зображені на рис.17.5а,б.

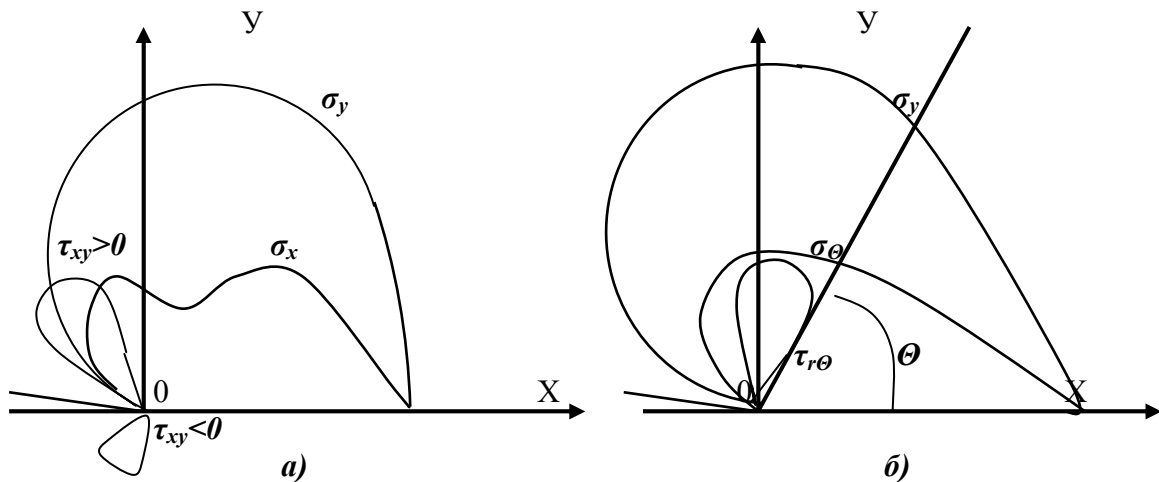


Рис.17.5. Епюри напружень біля вершини тріщини: а) – у декартових координатах; б) – у полярних координатах

За визначенням коефіцієнт інтенсивності напруження біля вершини тріщини при плоскій деформації

$$K_1 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, \theta), \quad (17.12)$$

що впливає з аналізу напруженого стану біля вершини тріщини. При розтягуванні пластини з тріщиною довжиною $2l$, розташованою посередині ширини пластини (див. рис.17.4), цей аналіз дозволяє встановити вираз для нормальних напружень у перетині пластини в околі тріщини:

$$\sigma_y = \sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} = \sigma \frac{l+r}{\sqrt{2lr - r^2}},$$

де x — координата, яку відраховують від середини тріщини, $r = x - l$. Біля вершини тріщини, при $x \rightarrow l$, $r \rightarrow 0$, напруження необмежено зростають за величиною. Підставляючи ці значення в (17.12) і обчислюючи межу, знаходимо

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi l}.$$

Аналогічно можна отримати вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I і K_{III} , відповідно до схем навантаження II і III на рис.17.1. Таким чином, отримаємо:

$$\begin{aligned}
K_I &= \sigma \sqrt{\pi l}; \\
K_{II} &= \tau \sqrt{\pi l}; \\
K_{III} &= \tau \sqrt{\pi l}.
\end{aligned}
\tag{17.14}$$

У лінійній механіці руйнування виходять з припущення Д. Ірвіна, що тріщина розповсюджуватиметься тоді, коли величина коефіцієнта інтенсивності напружень досягне критичного значення, характерного для даного матеріалу. Критерій розвитку тріщин нормального відриву має вигляд

$$K_I = K_{Ic} . \tag{17.15}$$

Аналогічно записують два інші критерії K_{IIc}, K_{IIIc} для тріщин поперечного і поздовжнього зсуву

$$K_{II} = K_{IIc}; \quad K_{III} = K_{IIIc} .$$

Критичні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень визначають експериментально. Методика їх визначення регламентується відповідними стандартами.

Критерій Ірвіна (17.15) в літературі називають силовим, оскільки він заснований на аналізі напруженого стану у вершині тріщини.

Для пластин обмежених розмірів при різних видах навантаження і розташування тріщин критичні значення $K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$ визначають такими формулами:

$$\begin{aligned}
K_{Ic} &= \sigma_k f_{Ik} \sqrt{\pi l_k}; \\
K_{IIc} &= \tau_k f_{IIk} \sqrt{\pi l_k}; \\
K_{IIIc} &= \tau_k f_{IIIk} \sqrt{\pi l_k},
\end{aligned}$$

де $f_{Ik}, f_{IIk}, f_{IIIk}$ — деякі поправочні коефіцієнти. Вирази для f_{Ik} наведено в таблиці 17.1.

Можна показати, що силовий критерій руйнування еквівалентний енергетичному критерію Гріффітса. У тілі з симетричною тріщиною завдовжки $2l$ при її розвитку в кожен бік на величину δl звільняється пружна енергія — $2(\partial W / \partial l) \delta l$.

Позначивши енергію $\partial W / \partial l$, що звільнилася, віднесено до одиниці площі через G , отримаємо

$$\delta \Gamma = 2G \delta l . \tag{17.17}$$

З другого боку, на утворення нових поверхонь потрібна енергія

$$\delta \Gamma = 2\gamma \delta l , \tag{17.18}$$

де, як і раніше, через γ позначена поверхнева енергія, віднесена до одиниці площі. Таким чином, з (17.17) і (17.18) маємо

$$G = 2\gamma . \tag{17.19}$$

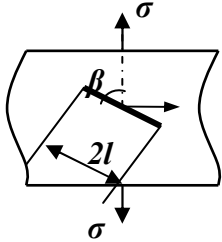
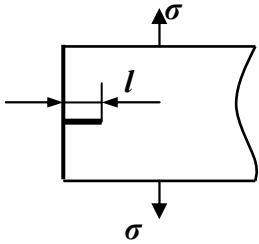
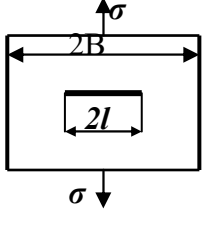
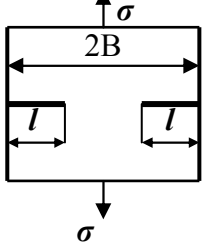
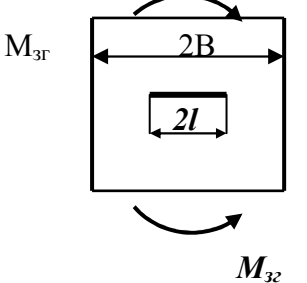
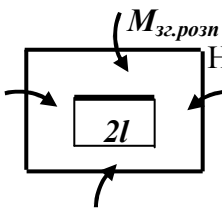
Потік енергії у вершину тріщини при її просуванні можна обчислити як роботу, необхідну для «закриття» тріщини, виходячи з таких міркувань.

Уявимо собі, що у продовженні тріщини є розріз, на поверхні якого діють напруження, що виникають в зоні концентрації від дії зовнішнього навантаження.

Тоді потік енергії при просуванні тріщини на одиницю довжини уявного розрізу визначимо виразом

$$G_I = \int_0^1 \sigma_y 2v dx , \tag{17.20}$$

де нормальне напруження σ_y і переміщення v у разі плоскої деформації беремо з формул (17.10) і (17.11) відповідно при $\theta = 0$ і $\theta = \pi$. При цьому

Вид навантаження та розташування тріщин	Схема розташування тріщин та навантажень	Поправочна функція
Розтяг необмеженої пластини з похилою тріщиною посередині		$f_{1k} = \sin^2 \beta$
Те ж саме для напівнескінченної пластини з односторонньою тріщиною		$f_{1k} = 1,12$
Розтяг пластини шириною 2B з поперечною тріщиною посередині		$f_{1k} = \sqrt{\frac{2B}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2B}}$
Те ж саме з двома боковими тріщинами		$f_{1k} = \frac{0,2B}{\pi l} \sin \frac{\pi l}{B} \sqrt{\frac{2B}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2B}}$
Згин в площині пластини шириною B та товщиною H з тріщиною посередині		$f_{1k} = \frac{8}{3\sqrt{6}} \frac{Hl}{B^2} (1 - \mu^2)$
Та ж сама пластинка при чистому згині розподілим моментом		$f_{1k} = 1; (\sigma = \frac{6M}{H^2})$

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}}; \quad (17.21)$$

$$v = \frac{4(1-\mu^2)}{E} K_1 \sqrt{\frac{l-x}{2\pi}}. \quad (17.22)$$

Підставляючи (17.21) н (17.22) в (17.20) і проводячи інтеграцію, отримаємо

$$G_I = \frac{1-\mu^2}{E} K_1^2 - \quad (17.23)$$

для плоскої деформації і

$$G_I = \frac{K_1^2}{E} - \quad (17.24)$$

для плоского напруженого стану.

Отже, маємо два еквівалентні формулювання критерію руйнування:

1) **енергетичне**, згідно з яким передбачається, що тріщина може розповсюджуватися тоді, коли інтенсивність енергії, що звільняється, G досягає критичного значення

$$G_{lc} = \frac{\partial \Gamma}{\partial l} = 2\gamma = const; \quad (17.25)$$

2) **силове**, згідно з яким тріщина може розвиватися при досягненні коефіцієнтом інтенсивності K своєї критичної величини

$$K_c = const. \quad (17.26)$$

Ця еквівалентність впливає з формул (17.23) і (17.24) для плоскої деформації і плоского напруженого стану відповідно:

$$G_{lc} = \frac{K_1^2(1-\mu^2)}{E}; \quad G_{lc} = \frac{K_1^2}{E} \quad (17.27)$$

Формули (17.27) справедливі для ідеально крихкого руйнування. Насправді, як відзначалося, для більшості металів у малій області біля вершини тріщини через пластичні деформації виявляються нелінійні властивості матеріалу. Проте внаслідок обмеженості зони пластичної деформації (де виявляються нелінійні ефекти) в порівнянні з довжиною тріщини, вважають, що розміри цієї зони і ступінь пластичної деформації, що відбувається в ній, контролюються коефіцієнтом інтенсивності K і межею текучості σ_T . Тому для квазікрихкого руйнування залишають у силі обидва критерії руйнування K_c і G_c , вважаючи, що вони залежать від характеру опору матеріалу пластичній деформації.

Отже, співвідношення (17.25) і (17.26) у лінійній механіці руйнування є основними. З їх допомогою можна розраховувати граничні стани елементів конструкцій з тріщиною, а також оцінювати механічні властивості матеріалу і його здатності гальмувати розвиток тріщин.

У загальному випадку навантаження, коли можливі зсуви берегів тріщин один відносно другого одночасно за трьома схемами, що розглядаються (рис. 17.1), отримаємо

$$G = \frac{1-\mu^2}{E} K_I^2 + \frac{1-\mu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1-\mu^2}{E} K_{III}^2 = G_I + G_{II} + G_{III} - \quad (17.28)$$

для плоскої деформації і

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2) = G_I + G_{II} + G_{III} - \quad (17.29)$$

для плоского напруженого стану.

17.4. Оцінювання величини пластичної зони на продовженні тріщини

Енергетичний критерій для нестабільного розвитку тріщини, виражений умовою (17.25), з урахуванням (17.14) можна записати у вигляді

$$G_{Ic} = \frac{K_1^2}{E} = 2\gamma_c = \frac{\sigma_k^2 \pi l}{E}, \quad (17.30)$$

де γ_c — критична енергія деформації, необхідна для утворення вільної поверхні тріщини за наявності пластичних деформацій.

Наведений раніше вираз (17.12) для коефіцієнта інтенсивності напружень з урахуванням виразу (17.13) дозволяє наближено визначити протяжність пластичної зони r_m на продовженні тріщини. При $\sigma_y = \sigma_m$ для напруженого стану, що характеризується коефіцієнтом інтенсивності K_1 у пластині необмежених розмірів

$$r_m = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_m^2}; \quad (17.31)$$

або з урахуванням виразу $K_1 = \sigma\sqrt{\pi l}$

$$r_m = \frac{1}{2}l\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2. \quad (17.32)$$

Для пластини кінцевої ширини

$$r_m = \frac{1}{2}l\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 Y_{Ik}^2. \quad (17.33)$$

Тоді половина довжини тріщини з урахуванням пластичної зони

$$l_m = l + r_m = l\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2\right]. \quad (17.34)$$

Користуючись величиною l_m , за наведеними раніше формулами, можна визначити K_{Ic} , а потім і переміщення v біля вершини тріщини. Для плоского напруженого стану при $r = r_m$, $\Theta = \pi$ отримаємо

$$v = \frac{K_1(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\frac{3-\mu}{1+\mu} - 1\right). \quad (17.35)$$

Подвоєна величина v дорівнює розкриттю тріщини δ

$$\delta = 2v_{r=r_m} = 2(1-\mu) \frac{\sigma^2}{\sigma_m E} l \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2}. \quad (17.36)$$

У разі крихкого руйнування при $\sigma < \sigma_m$ розкриття тріщини приблизно можна визначити за формулою

$$\delta = \frac{\sigma^2}{\sigma_m E} \pi l. \quad (17.37)$$

Розрахункові значення δ , отримані за формулою (17.37) при $\sigma \leq 0,8\sigma_m$, підтверджені експериментально.

У разі плоского деформованого стану внаслідок того, що v і δ зменшуються, протяжність пластичної зони знижується у кілька разів у порівнянні з такою ж при плоскому напруженому стані.

Слід мати на увазі, що розміри пластичної зони біля вершини тріщини для одного і того ж матеріалу залежать від ступеня деформації вздовж переднього краю тріщини. Водночас ступінь деформації залежить від товщини зразка, зі збільшенням якої напружений стан змінюється від плоского, при якому $\sigma_z = 0$, до об'ємного при плоскій деформації, коли $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$. При цьому на бічній поверхні плоского

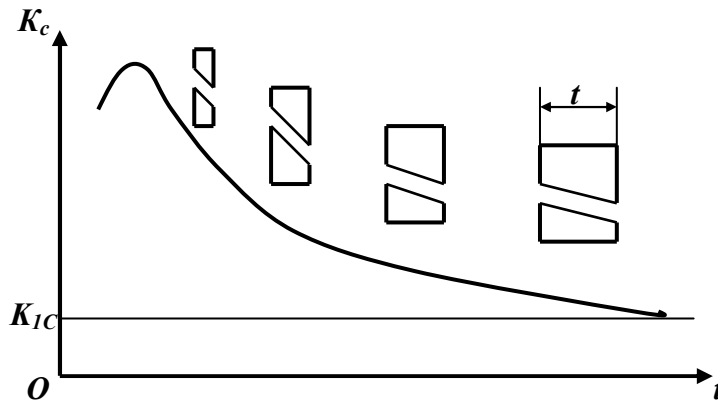


Рис. 17.6. Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень K_c від товщини зразку

зразка у відсутності зовнішнього тиску завжди має місце плоский напружений стан, а тому розміри пластичної області біля вільної поверхні зразка завжди більші, ніж у середній частині.

Оскільки у середній частині зразка напружений стан об'ємний, а, отже, більш жорсткий, ніж в зоні тріщин, що примикають до бічних поверхонь, то й опір руйнуванню в цій зоні буде меншим, а тому і фронт просування тріщин видаватиметься вперед. Для зразків різної товщини співвідношення пластичних зон попереду тріщини є різним. У зв'язку з цим змінюється величина енергії, що витрачається на руйнування, і, отже, існує залежність від товщини зразка t характеристик тріщиностійкості — коефіцієнта інтенсивності напружень K_c (рис.17.6) й інтенсивності енергії, що звільняється G_c .

Як бачимо, зі збільшенням товщини зразка значення K_c (а, отже, G_c) зменшується і прагне свого граничного, асимптотичного значення K_{Ic} при об'ємному напруженому стані в умовах плоскої деформації.

17.5. Методика експериментального визначення тріщиностійкості конструкційних матеріалів

Гранична рівновага тріщиноподібних дефектів у конструкції за заданих умов експлуатації визначається опором руйнуванню (тріщиностійкістю) матеріалу, з якого вона виготовлена. Як міру тріщиностійкості, стосовно найнебезпечніших і найпоширеніших тріщин нормального відриву, найчастіше використовують критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{Ic} , що відповідає моменту старту тріщини при дотриманні в її вершині умов плоскої деформації.

Для визначення характеристики K_{Ic} даного матеріалу використовують спеціальні компактні зразки СТ з тріщиною.

Тріщину в зразку вирощують з вершини вузької щілини при циклічному навантаженні зразка. Режим вирощування і довжина тріщини повинні відповідати певним вимогам, що забезпечують отримання достовірних значень характеристик.

Навантажуючи зразок зростаючим зусиллям, реєструють діаграму «навантаження P — зсув берегів тріщини v ». Критичний коефіцієнт інтенсивності напружень K_{Ic} матеріалу, що досліджується, розраховують за навантаженням P , що відповідає на діаграмі $P—v$ старту тріщини, з використанням деякої, залежної від конфігурації зразка функції його розмірів і довжини тріщини:

$$K_{Ic} = \frac{P}{B\sqrt{w}} Y\left(\frac{l}{w}\right), \quad (17.38)$$

де

$$Y\left(\frac{l}{w}\right) = 29,6\left(\frac{l}{w}\right)^{0,5} - 185,5\left(\frac{l}{w}\right)^{1,5} + 665,7\left(\frac{l}{w}\right)^{2,5} - 1017\left(\frac{l}{w}\right)^{3,5} + 638,9\left(\frac{l}{w}\right)^{4,5}.$$

Якщо отримана таким чином величина K_{1c} задовольняє розмірній вимозі (17.37), то вона вважається реальною характеристикою матеріалу. В іншому випадку необхідно повторити випробування на зразках збільшених розмірів.

Оскільки значення навантаження на діаграмі $P—v$ не залежить від місця вимірювання зсувів, то останні доцільно вимірювати поблизу точок додатка навантаження або поблизу середньої точки лінії фронту тріщини. За синхронно реєстрованими діаграмами $P—v_p$ можна додатково до силової характеристики K_{1c} визначати і деформаційну δ_{1c} характеристику тріщиностійкості матеріалу. Такий підхід дозволяє комплексно, з єдиних методичних позицій, оцінювати тріщиностійкість матеріалу як в крихкому, так і пластичному станах. Треба відзначити, що описана методика визначення характеристики K_{1c} строго обґрунтована тільки при випробуванні крихких матеріалів, що руйнуються в лінійно-пружній області.

Лекція 33. Тема 18. Контактні напруження

Основні поняття. Визначення контактних напружень. Стиск куль. Стиск циліндрів. Загальний випадок контакту двох тіл. Перевірка міцності при контактних напруженнях.

18.1. Основні поняття

Деформації та напруження, які виникають при взаємному натисканні двох тіл, що дотикаються, носять назву *контактних*. Внаслідок деформації в зоні контакту елементів конструкції передача тиску проходить через малі площадки. Матеріал поблизу такої площадки, не маючи можливості вільно деформуватися, знаходиться у складному напруженому стані (рис. 18.1).

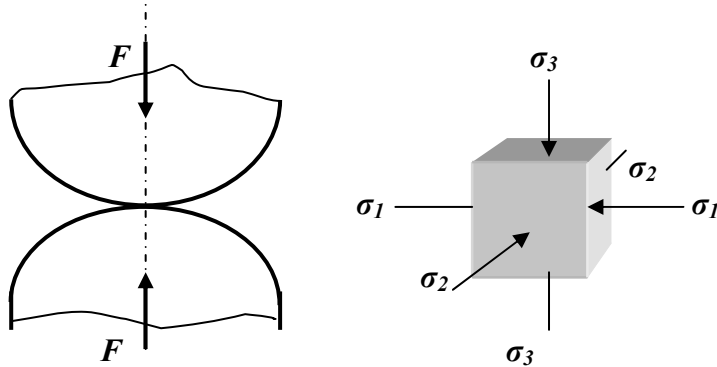


Рис.18.1. Складний напружений стан у зоні контакту тіл

Контактні напруження мають явно місцевий характер і швидко зменшуються при віддаленні від місця контакту. Питання про контактні напруження є дуже актуальним при вивченні напруженого стану у таких деталях і вузлах, як кулькові та роликові підшипники, зубчасті колеса, колеса та рейки у залізничному транспорті та ін.

Вперше цими проблемами зацікавився німецький вчений Г. Герц, а подальший розвиток їх практично повністю є заслугою наших вітчизняних вчених, зокрема М.М. Беляєва.

Герц Генріх Рудольф (22.II.1857–1.I.1894) – видатний фізик і механік. Основні роботи присвячені електродинаміці. Написав монографію “Принципи механіки”. Він показав, що незалежними основними поняттями, через які можна виразити всі решта (включаючи силу та енергію), є поняття часу, простору і маси. В галузі механіки деформованого тіла був засновником досліджень про контактні напруження.

Беляєв Микола Михайлович (5.II.1890 – 25.IV.1944) – видатний механік, чл.-кор.АН СРСР. Дослідження відносяться до теорії міцності. Вивчав теорію контактних напружень. Вперше сформулював та розв'язав задачу про стійкість призматичних стержнів під дією поздовжніх змінних сил. Досліджував явища повзучості та релаксації при високих температурах. Розв'язав ряд важливих задач,

пов'язаних з питаннями міцності залізничних рейок, деталей рухомого складу залізниць, бетону. Розробив основи методики динамічного випробовування мостів. Автор фундаментального підручника з опору матеріалів.

Найважливіші результати, отримані за допомогою математичної теорії пружності, та наведені нижче, зроблені на основі наступних гіпотез:

- навантаження створюють у зоні контакту тільки пружні деформації, що відповідають закону Гука;
- площадки контакту малі в порівнянні з поверхнею тіл, що взаємодіють;
- сили тиску, розподілені по поверхні контакту, нормальні до цієї поверхні.

18.2. Визначення контактних напружень

18.2.1. Стиск куль.

У випадку взаємного стиску силами F двох куль з радіусами R_1 та R_2 (рис. 18.2) утворюється кругла площадка контакту, радіус якої визначають за формулою

$$a = 0,883 \sqrt{F \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \quad (18.1)$$

де E_1 та E_2 – модулі пружності матеріалів куль.

Нормальні (стискаючі) напруження по площадці контакту розподілені у вигляді напівсфери, причому найбільшого значення вони досягають в центрі площадки контакту:

$$\sigma_3 = -|\sigma_{\max}| = -1,5 \frac{F}{\pi a^2} = -0,3883 \sqrt{4F \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (18.2)$$

Два інші головні напруження в центрі площадки

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8 |\sigma_{\max}|.$$

Таким чином, у найбільш напруженій точці площадки контакту матеріал знаходиться у стані, близькому до всебічного стиску. Внаслідок цього в зоні контакту матеріал може витримати досить великі тиски без проявів помітних залишкових деформацій. Наприклад, якщо, скориставшись IV теорією міцності, обчислити максимальне напруження в центрі площадки контакту, при якому вперше з'являються залишкові деформації, то, враховуючи

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_m$$

та, підставивши значення головних напружень, отримаємо

$$0,2 \sigma_{\max} = \sigma_m \quad \text{або} \quad \sigma_{\max} = 5 \sigma_m.$$

Для закаленої хромистої сталі, що використовується при виготовленні кулькових підшипників, замість границі текучості приймемо границю пропорційності $\sigma_{mi} \approx 1000 \text{ МПа}$, тоді $\sigma_{\max} \approx 5000 \text{ МПа}$.

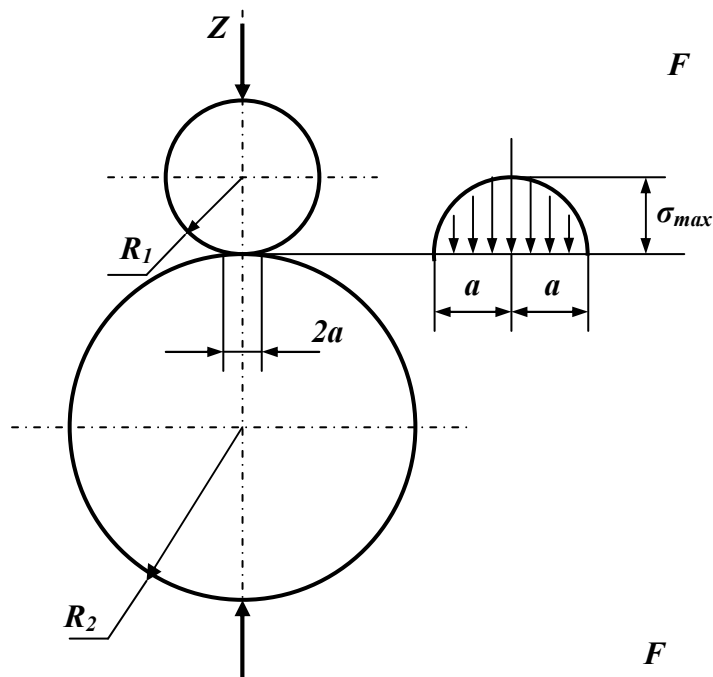


Рис. 18.2. Стиск куль

Найбільш небезпечна точка знаходиться на осі Z на глибині, що приблизно дорівнює половині радіуса площадки контакту. Головні напруження в цій точці

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= -0,18\sigma_{\max}; \\ \sigma_3 &= -0,8\sigma_{\max}, \end{aligned} \quad (18.3)$$

де σ_{\max} – найбільше напруження в центрі площадки контакту, яке визначають за формулою (18.2).

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці становить

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31 \cdot \sigma_{\max}. \quad (18.4)$$

Змінюючи у формулі (18.2) знак при R_2 на протилежний, отримаємо значення σ_{\max} у випадку тиску кулі на увігнуту сферичну поверхню (рис.18.3)

$$\sigma_{\max} = 0,3883 \sqrt{4F \frac{E_1^2 E_2^2 \cdot (R_1 - R_2)^2}{(E_1 + E_2)^2 \cdot R_1^2 R_2^2}}. \quad (18.5)$$

При взаємному стиску сфери та площини (рис.18.4), прийнявши $R_2 = \infty$, знайдемо

$$\sigma_{\max} = 0,3883 \sqrt{4F \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2 \cdot R^2}}. \quad (18.6)$$

18.2.2. Стиск циліндрів.

При взаємному стиску двох циліндрів з паралельними утворюючими рівномірно розподіленим навантаженням q (рис.18.5) площадка контакту має вигляд вузького прямокутника, ширину якого визначимо за формулою

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \quad (18.7)$$

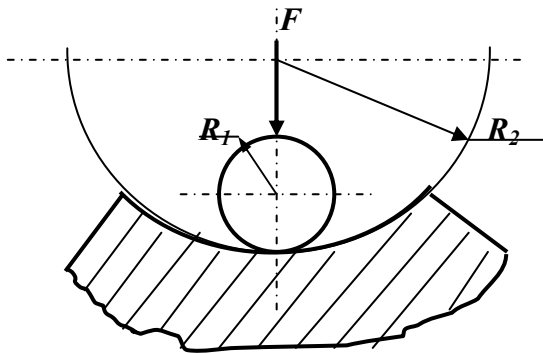


Рис.18.3. Тиск кулі на увігнуту сферичну поверхню

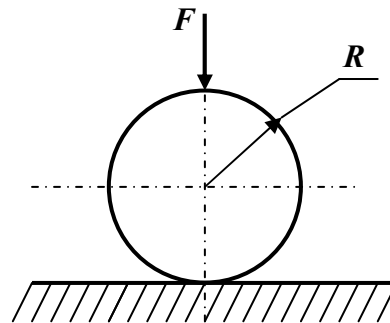


Рис.18.4. Контакт сфери та площини

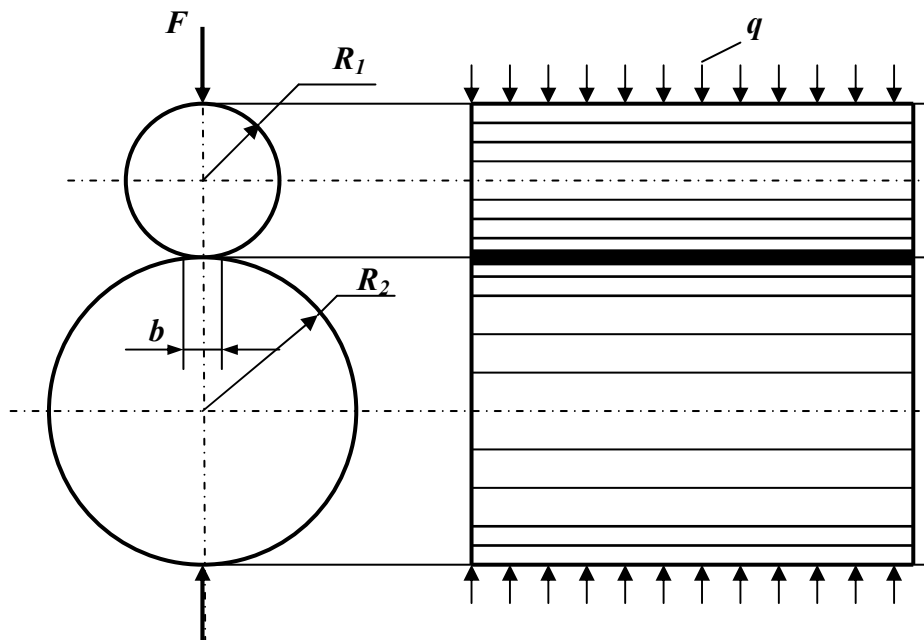


Рис. 18.5. Стиск двох циліндрів з паралельними утворюючими

Найбільше напруження стиску, що діє в точках осі площадки контакту, виразиться як

$$\sigma_{\max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \quad (18.8)$$

Аналіз напруженого стану доводить, що небезпечна точка розташовується на осі Z на глибині, що дорівнює 0,4 ширини площадки контакту. Головні напруження в цій точці мають значення

$$\sigma_1 = -0,180 \cdot \sigma_{\max}; \sigma_2 = -0,288 \cdot \sigma_{\max}; \sigma_3 = -0,780 \cdot \sigma_{\max}; \quad (18.9)$$

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{\max} = 0,3 \cdot \sigma_{\max} \quad (18.10)$$

Змінюючи у формулі (18.8) знак R_2 на протилежний, отримаємо напруження у випадку тиску циліндра на увігнуту циліндричну поверхню. Напружений стан такого типу виникає, наприклад, між циліндричним шарніром та балансирами (рис.18.6).

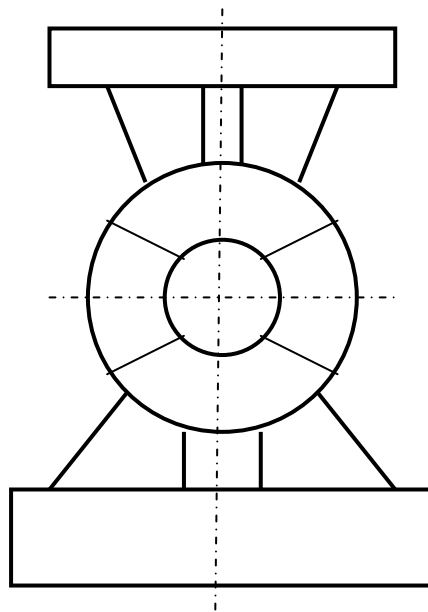


Рис.18.6. Контакт між циліндричним шарніром та балансирами

При взаємному стиску циліндра та площини, прийнявши у формулі (18.8) $R_2 = \infty$, знайдемо, що

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R_1} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}} \quad (18.11)$$

Наведені формули отримані при $\mu=0,3$. Однак для практичних розрахунків вони придатні і за інших значень коефіцієнта Пуассона.

18.2.3. Загальний випадок контакту двох тіл.

Наведемо формули для загального випадку контакту двох тіл, зроблених з однакового матеріалу. Нехай в точці дотику обидва тіла мають спільну дотичну площину АВ та загальну нормаль z , уздовж якої спрямовані сили F (рис.18.7).

Позначимо радіуси кривизни в точці дотику першого тіла ρ_1 та ρ_1^1 , другого тіла ρ_2 та ρ_2^1 , причому $\rho_1 \leq \rho_1^1$; $\rho_2 \leq \rho_2^1$. Головними кривизнами називають найбільшу і найменшу кривизни, розташовані у двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через центр кривизни. Радіуси кривизни вважаються додатними, якщо центри кривизни знаходяться у тілі. Позначимо через φ кут між головними площинами кривизни тіл, в яких лежать менші радіуси ρ_1 та ρ_2 .

У загальному випадку площадка контакту є еліпсом з напівосями:

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3F(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1^1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2^1}\right)}}; \quad (18.12)$$

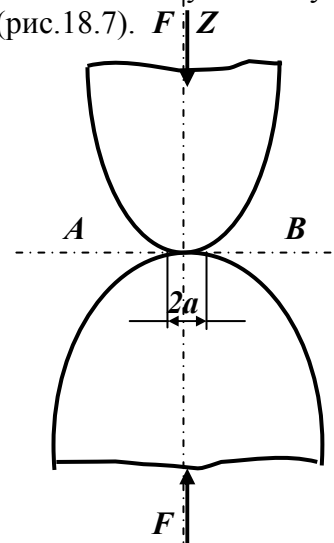


Рис.18.7. Загальний випадок

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3F(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}\right)}} \quad (18.13)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Значення коефіцієнтів α та β наведено в таблиці 18.1, як функції допоміжного кута ψ , який обчислюють за формулою

$$\cos \Psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right) \cos 2\psi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}} \quad (18.14)$$

При цьому знак у чисельнику формули (18.14) вибирають таким чином, щоб знак $\cos \psi$ був додатним.

Значення коефіцієнтів α та β

Таблиця 18.1

Ψ°	α	β	Ψ°	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

Найбільше напруження стиску в центрі площадки контакту

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{F}{\pi ab} \quad (18.15)$$

Найнебезпечніша точка розташована на осі Z на деякій глибині, що залежить від відношення (b/a) напівосей еліптичної площадки контакту. Однак найбільше дотичне напруження у небезпечній точці майже не залежить від вказаного співвідношення розмірів площадки, тому можна прийняти, що

$$\tau_{\max} \approx 0,32 \sigma_{\max} \quad (18.16)$$

З наведених формул бачимо, що контактні напруження залежать від пружних властивостей матеріалів. Вони не є лінійною функцією навантажень і наростають зі зростанням зовнішніх сил все повільніше. Це пояснюється тим, що зі збільшенням навантаження збільшуються і розміри площадки контакту.

18.3. Перевірка міцності при контактних напруженнях

Враховуючи вигляд напруженого стану у небезпечних точках (всі три головні напруження є стискаючими), перевірку міцності при контактних напруженнях слід проводити за третьою або четвертою теоріями міцності. Взагалі умову міцності можна записати у вигляді

$$\sigma_{екв} = m\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad (18.17)$$

звідки

$$\sigma_{max} \leq \frac{1}{m}[\sigma] = \sigma_{конт}. \quad (18.18)$$

Тут $[\sigma]_{конт} = [\sigma] \frac{1}{m}$ – допустиме значення для найбільшого напруження в зоні контакту. Значення коефіцієнта m залежно від відношень напівосей еліптичної площадки контакту та вибраної теорії міцності наведено в таблиці 18.2.

Можна рекомендувати такий порядок розрахунку на міцність елементів конструкцій у зоні контакту:

1. Визначити головні радіуси кривизни тіл, що контактують ($\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2$) та кут ϕ між головними площинами кривизни одного та другого тіла.
2. Обчислити за формулами (18.12) та (18.13) з урахуванням (18.14) розміри на півосей еліптичної площадки контакту.

Значення коефіцієнту m

Таблиця 18.2

$\frac{b}{a}$	$m = \frac{\sigma_{еквIII}}{\sigma_{max}}$	$m = \frac{\sigma_{еквIV}}{\sigma_{max}}$
1 (круг)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,626	0,587
0 (смуга)	0,600	0,557

3. Визначити за формулою (18.15) найбільше напруження стиску в центрі площадки контакту. У випадку круглої або прямокутної форми площадки σ_{max} знаходять безпосередньо з формул (18.2) та (18.8), не визначаючи розмірів площадки.

Найбільші допустимі тиски на площадці контакту

Таблиця 18.3

Марка металу	σ_s (МПа)	Твердість по Бринелю, $HВ$	$[\sigma]_{конт}$ (МПа)
Сталь:			
30	480 – 600	180	850 – 1050
40	570 – 700	200	1000 – 1350
50	630 – 800	230	1050 – 1400
50Г	650 – 850	240	1100 – 1450
15Х	620 – 750	240	1050 – 1600
20Х	700 – 850	240	1200 – 1450
15ХФ	1600 – 1800	240	1350 – 1600
ШХ15	-	-	3800
Чавун:			
СЧ 21	960	180 – 207	800 – 900
СЧ 24	1000	187 – 217	900 – 1000
СЧ 28	1100	170 – 241	1000 – 1100
СЧ 32	1200	170 – 241	1100 – 1200
СЧ 35	1300	197 – 255	1200 – 1300
СЧ 38	1400	197 - 255	1300 - 1400

4. Розрахунок на міцність проводять за формулою (18.18). Значення коефіцієнта m вибирають з таблиці 18.2. При цьому рекомендується виходити з четвертої теорії міцності.

Допустимі напруження в зоні контакту $[\sigma]_{\text{конт}}$ для роликів і кулькових підшипників з хромистої сталі приймають до 3500 – 5000 МПа, для рейкової сталі – до 800 – 1000 МПа.

В таблиці 18.3. наведено значення допустимих найбільших тисків на площадці контакту при початковому контакті по лінії ($m = 0,557$) та статичній дії навантаження. У випадку початкового контакту в точці значення $(\sigma)_{\text{конт}}$ слід збільшити в 1,3 – 1,4 раза.

Лекція 34. Заключна. Сучасні проблеми Опору матеріалів

У попередніх розділах висловлені основні положення курсу опору матеріалів, складові комплексу правил і методів для вирішення найпростіших задач міцності в інженерній справі.

Водночас на практиці доводиться вирішувати більш складні задачі, що часто вимагає проведення спеціальних досліджень. Майбутні інженери-механіки, практична діяльність яких тією або іншою мірою пов'язана з питаннями міцності конструкцій, повинні уявляти собі ті наукові проблеми, які стоять перед ученими та інженерами, що займаються проблемами міцності, на сучасному етапі технічного прогресу. Ці проблеми зводяться до того, щоб при проектуванні та розрахунку на міцність і жорсткість тієї або іншої реальної деталі, на яку діють відомі силові й теплові навантаження, вибрати відповідний матеріал з погляду оптимальної роботи майбутньої деталі з урахуванням умов її експлуатації, щоб при цьому деталь була мінімальної ваги й мала оптимальні конструктивні форми і технологію обробки.

Нижче зупинимося на основних наукових проблемах в області міцності, продиктованих рівнем сучасного технічного прогресу людства і перспективами його динамічного розвитку в найближчі роки.

Перш за все необхідно відзначити, що за сучасних умов розвитку науки і техніки, коли з'являються нові класи раніше невідомих матеріалів, що часто мають досить специфічні властивості, погляди на такі матеріали і оцінку їх опору змінилися. Створення багатьох видів матеріалів, і в першу чергу композиційних, – справа не тільки матеріалознавців, але й інженерів, що займаються питаннями міцності, тому що у багатьох випадках доводиться конструювати міцний матеріал, раціональним чином розраховуючи та розташовуючи складові композиції. При цьому багато матеріалів створюються з наперед заданими властивостями, що забезпечує їх оптимальну роботу в тій або іншій деталі з урахуванням умов її експлуатації й характеру силових і теплових навантажень.

Істотно змінилося уявлення і про сучасні проблеми міцності. На сьогодні такі проблеми виникають, як правило, у зв'язку з реалізацією загальнодержавних програм використання новітніх відкриттів в області фізики, механіки, біології і інших природних і технічних наук. Це, наприклад, програми, пов'язані з використанням енергії розщеплювання атомного ядра, а також з освоєнням космосу. Саме в цих областях ми стикаємося з надзвичайно важкими експлуатаційними умовами роботи елементів конструкцій як відносно інтенсивності дії зовнішнього середовища і рівня силового й теплового навантаження, так і відносно характеру змін цих дій у часі.

Узагальнюючи умови, що породжують проблематику в області міцності, можна стверджувати, що в переважній більшості проблеми виникають при створенні машин, апаратів і конструкцій, деякі елементи яких працюють в екстремальних умовах, а їх міцність зрештою й визначає надійність і довговічність всього агрегату.

До числа екстремальних умов, істотним чином ініціюючих втрату міцності матеріалів в експлуатації, відносяться достатньо високі температури (до 3000—4000 °С), низькі і вельми низькі температури (до температури рідкого гелію — близько 4 К⁰), інтенсивне радіаційне опромінення, високотемпературні гази (продукти згоряння), що містять хімічно активні домішки, металеві розплави і морську воду, а також поєднання одночасно діючих різних перерахованих факторів.

Екстремальними слід вважати також умови, за яких в експлуатації протікають нестационарні режими силових і теплових дій, у тому числі періодичні або випадкові імпульсні навантаження й різкі тепломіни, тобто фактично умови, які мають місце в реальній експлуатації більшості стаціонарних енергетичних установок, літальних апаратів, різного типу турбомашин, корпусів надводних і підводних кораблів, хімічних установок, трубопроводів, двигунів внутрішнього згоряння, рухомого складу залізничного транспорту, землерийних машин і т.п. У багатьох з цих об'єктів при експлуатації складно поєднуються

фактори, що несприятливо впливають на міцність і довговічність найвідповідальніших елементів конструкцій.

Відзначимо, що класичні методи опору матеріалів без спеціальних досліджень, головним чином експериментальних, не дозволяють врахувати вплив численних факторів, що відповідають реальним умовам експлуатації, при вирішенні питань міцності тих або інших елементів конструкцій і прогнозувати їх довговічність. У зв'язку з цим можна вказати ті питання і проблеми, що стоять перед інженерами, які займаються питаннями міцності, вирішення яких викликані вимогами, запитами сучасного технічного прогресу.

Перш за все увагу слід звернути на накопичення експериментальних даних із фізико-механічних властивостей різних матеріалів в умовах, максимально наближених до експлуатаційних— екстремальних для даного класу матеріалів, щоб отримати рівняння стану матеріалу за заданих умов силових і теплових дій.

Відзначимо, що найпростішим виразом рівняння стану, що характеризує поведінку матеріалу під дією статичного навантаження, є графічне представлення залежності деформації зразка матеріалу, що випробовується, від навантаження у вигляді діаграми розтягувань $P - \Delta l$ або у відносних координатах —діаграми напружень $\sigma - \epsilon$. В інших випадках це будуть графічні або аналітичні залежності досліджуваних характеристик міцності або жорсткості від тих чи інших факторів (часу, температури, асиметрії циклу, інтенсивності опромінення та ін.).

Необхідність проводити в першу чергу експериментальні дослідження різних питань опору матеріалів зумовлена тим, що вплив перерахованих вище факторів, які зменшують міцність, часто не можна врахувати розрахунковим шляхом. Щоб правильно врахувати вплив цих факторів на показники конструктивної міцності матеріалів, потрібно поставити відповідні й добре продумані експериментальні дослідження за методиками, розробка яких часто представляє самостійний науковий інтерес. До того ж встановити відповідні аналітичні критерії та залежності можна тільки на основі великої кількості експериментальних даних про властивості матеріалу. Одержують їх при випробуваннях виготовлених з цього матеріалу спеціальних зразків у тих або інших умовах силового і теплового навантаження заданої тривалості й режиму зміни цих навантажень у часі.

Слід мати на увазі, що досліджувати міцнісні та деформаційні властивості будь-якого матеріалу — це означає вивчати його потенційні можливості, щоб виявити специфічні властивості й умови, за яких використання даного матеріалу в конструкції було б оптимальним. В інших випадках потрібно виявити ті додаткові модифікації технологічного і конструкційного характеру, які істотним чином позначаться на поліпшенні найважливіших фізико-механічних властивостей матеріалу, а, отже, і на підвищенні їх міцності й довговічності при експлуатації в тих або інших умовах.

Конкретизуючи сказане, наведемо перелік питань з проблем міцності, що підлягають вирішенню в найближчі роки. До числа цих питань можна віднести :

1. Дослідження міцності при високих температурах жароміцних і тугоплавких матеріалів при простому і складному напруженому стані, як при статичних короткочасних і тривалих навантаженнях, так і при повторно-змінних навантаженнях і теплозмінах. Особливу увагу при цьому слід звернути на вивчення тривалої міцності й витривалості матеріалу при нестационарних режимах силової і теплової дії (окремо і сумісно).

2. Вивчення основних механічних характеристик міцності й пластичності конструкційних матеріалів за умов понижених і низьких температур при статичних, повторно-змінних та імпульсних навантаженнях з урахуванням конструкційно-технологічних факторів для встановлення рівнянь стану матеріалів і обґрунтування критеріїв граничного стану та міцності тих або інших типових елементів конструкцій, що працюють в умовах низьких температур.

3. Вивчення впливу реакторного опромінення на короткочасну і тривалу міцність і пластичність, а також на інші механічні властивості конструкційних матеріалів при різних

видах силового і теплового навантаження, встановлення рівнянь стану різних матеріалів й отримання критеріїв їх міцності, що враховують ефект впливу радіаційного опромінювання.

4. Вивчення впливу агресивних середовищ (металевих розплавів, продуктів згоряння, морської води та ін.) на механічні властивості конструкційних матеріалів при тривалих статичних і повторно-змінних навантаженнях за умов нормальних і високих температур з метою виявити ефект втрати міцності матеріалів, зумовлений впливом середовища, а також вибрати оптимальні захисні покриття досліджуваного матеріалу.

5. Вивчення впливу різних покриттів тугоплавких матеріалів і їх сплавів на показники міцності й пластичності цих матеріалів при високих температурах, щоб оптимізувати тип покриття і технологію його нанесення для різних умов експлуатації елементів конструкцій з тугоплавких і жароміцних матеріалів з покриттям.

6. Дослідження характеристик конструкційної міцності композиційних матеріалів для оптимізації їх складу і міцності об'єктів з композиційних матеріалів, встановлення критеріїв граничного стану типових виробів з композиційних матеріалів і розроблення методів їх розрахунків.

7. Дослідження конструкційної міцності крихких матеріалів типу скла і ситалу з метою створити раціональні інженерні конструкції, в яких би якнайповніше були реалізовані характерні позитивні властивості (низька питома вага і висока міцність при стиску) цих матеріалів.

8. Подальший розвиток механіки руйнування і перш за все теорії тріщин, а також живучість різного типу інженерних конструкцій, що мають тріщини, встановлення критеріїв граничного стану таких конструкцій, а також прогнозування їх довговічності.

9. Питання втомленості, і в першу чергу малоциклової, вдосконалення методів випробування на втомленість, обґрунтування деформаційних критеріїв малоциклової втомленості, встановлення фізичної моделі накопичення пошкоджень при повторно-змінних навантаженнях, кінетики розвитку втомних тріщин у тих або інших умовах навантажень, статичний аспект втомленості, а також розроблення інженерних методів розрахунку елементів конструкцій на міцність при повторно-змінних напруженнях з урахуванням різних факторів (виду напруженого стану, конструктивно-технологічних особливостей, температури початкового навантаження і т. п.).

10. Питання розрахунку напружено-деформованого стану як у пружній, так і, особливо, в пружнопластичній зоні елементів конструкцій складних форм під дією зовнішніх навантажень (у тому числі таких, що змінюються в часі) і нерівномірного нагрівання, що викликає великі термічні напруження, при широкому використанні сучасної обчислювальної техніки.

11. Дослідження граничних станів елементів конструкцій при складних напружених станах і складних траєкторіях навантаження.

12. Дослідження фізичних аспектів міцності матеріалів і елементів конструкцій при широкому використанні електронної мікроскопії, рентгеноструктурного аналізу, голографії, ультразвукової дефектоскопії і т.п.

13. Знаходження методів оцінювання накопичення пошкодження матеріалу і встановлення динаміки змін пошкоджень у міру напруження годин у процесі експлуатації високонапружених відповідальних елементів конструкцій.

Можна вказати питання, що представляють значний науковий інтерес і велику практичну цінність для технічного прогресу. Наприклад:

- дослідження конструктивної міцності рулоноподібних тонкостінних і товстостінних оболонок типу газопровідних труб і корпусів атомних реакторів. Тут йдеться про розроблення теорії розрахунку таких систем, експериментальні дослідження їх напружено-деформованого стану (у тому числі в пружнопластичній зоні) та руйнування під дією силових навантажень і тепломін при нерівномірному нагріванні, а також малоциклової втомленості. Мета — встановити їх граничний стан і розробити метод розрахунку таких об'єктів на міцність стосовно тих або інших умов їх експлуатації;

- дослідження конструктивної міцності лопаток газових турбін з урахуванням впливу факторів, супутніх реальним умовам їх експлуатації та ін;
- вивчення міцності дисків різних типів турбомашин у полі відцентрових сил за нормальних, низьких і високих температур, у тому числі за умов нерівномірного нагрівання по радіусу, а також малоциклового повторно-змінного навантаження за межами пружності;
- розрахунок на міцність соплових апаратів ракетних двигунів;
- дослідження міцності високонапружених елементів двигунів внутрішнього згоряння, підданих дії силових і теплових напружень;
- вивчення напруженого стану, міцності й руйнування обшивки літальних апаратів;
- дослідження напруженого стану, граничної несучої здатності й міцності (включаючи малоциклово) корпусів глибоководних апаратів із урахуванням середовища;
- дослідження конструктивної міцності деталей землерийних машин із урахуванням нестационарних динамічних навантажень, знижених температур і т.п.;
- дослідження конструктивної міцності деталей сільськогосподарських машин із урахуванням нестационарних динамічних навантажень, знижених температур і т.п.;

Вирішенням перерахованих проблем займаються наукові колективи академічних і галузевих інститутів як у нашій країні, так і за кордоном, а також численні колективи відповідних кафедр вищих навчальних закладів країни.

У зв'язку з цим велике поле діяльності відкривається для студентів-механіків, що залучаються до участі в науково-дослідній роботі кафедр.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М.Беляев. 15-е изд.– М.: Наука, 1976. – 607с.
2. Дарков А.В. Сопротивление материалов / Дарков А.В., Шпиро Г.С. – М.: Высшая школа, 1975.– 654с.
3. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Писаренко Г.С. 5-е изд., перераб. и доп.– К.:Вища школа, Головне видавництво, 1986. – 775с.
4. Посацький С.Л. Опір матеріалів / Посацький С.Л. – Львів: Видавництво Львівського університету, 1973. – 403с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / Феодосьев В.И. – М.: Наука, 1979. – 559с.
6. Боголюбов А.Н. Математики механики. Биографический справочник / Боголюбов А.Н. – К.:Наукова думка, 1983. – 639с.
7. Мильніков О.В. Опір матеріалів / Мильніков О.В. –Тернопіль: Видавництво ТДТУ імені Івана Пулюя, 2005.– 212с.

Зміст

Передмова.....	3
Лекція 1. Тема 1. Основні поняття опору матеріалів	4
1.1. Вступ.....	4
1.2. Задачі опору матеріалів.....	4
1.3. Коротка історична довідка.....	5
1.4. Основні поняття опору матеріалів.....	6
1.4.1. Основні гіпотези опору матеріалів.....	6
1.4.2. Класифікація тіл, що приймається в опорі матеріалів.....	7
1.4.3. Поняття про деформації.....	8
1.4.4. Сили та їх класифікація.....	9
Лекція 2. Закінчення теми 1 (Вступ)	11
1.4.5. Умови рівноваги.....	11
1.4.6. Напруження.....	12
1.5. Прості види деформацій.....	15
Тема 2. Розтяг - стиск	15
2.1. Внутрішні сили та напруження при розтягу-стиску.....	15
2.2. Деформації при розтягу-стиску.....	16
2.3. Коефіцієнт Пуассона.....	17
Тема 3. Механічні характеристики конструкційних матеріалів	18
3.1. Діаграма розтягу для пластичних матеріалів.....	18
Лекція 3. Продовження теми 3 (Механічні характеристики конструкційних матеріалів).....	20
3.2. Діаграма напружень.....	21
3.3. Реальна діаграма напружень.....	21
3.4. Діаграма розтягу для крихких матеріалів.....	22
3.5. Діаграми стиску для пластичних і крихких матеріалів.....	23
3.6. Твердість.....	23
3.7. Порівнювальні характеристики пластичних та крихких матеріалів.....	24
3.8. Основні положення для вибору коефіцієнта запасу міцності та допустимих напружень.....	24
3.8.1. Загальні положення.....	24
3.8.2. Допустимі напруження на розтяг і стиск для різних матеріалів.....	26
Лекція 4. Тема 4. Статично визначені та статично невизначені системи, що працюють на розтяг-стиск	28
4.1. Статично визначені системи.....	28
4.2. Статично невизначені системи.....	29
4.3. Температурні та монтажні напруження.....	31
4.3.1. Температурні напруження.....	31
4.3.2. Монтажні напруження.....	32
4.4. Урахування власної ваги та сил інерції при розтягу-стиску.....	33
4.5. Розрахунок статично невизначених систем за граничним станом.....	35
Лекція 5. Тема 5. Складний напружений стан	36
5.1. Лінійний напружений стан. Напруження на площадках, розташованих під кутом до осі стержня.....	37
5.2. Плоский напружений стан.....	38
5.2.1. Пряма задача (аналітичні виведення).....	38
5.2.2. Круги Мора (пряма задача).....	40
5.2.3. Круги Мора (обернена задача).....	41
5.2.4. Обернена задача (аналітичні виведення).....	42
5.3. Октаедричні напруження.....	43

5.4.	Об'ємний напружений стан.....	44
5.4.1.	Узагальнений закон Гука.....	44
5.4.2.	Об'ємна деформація.....	44
Лекція 6.	Продовження теми 5 (Складний напружений стан)	46
5.4.3.	Питома потенціальна енергія зміни форми.....	46
5.5.	Теорії міцності.....	46
5.6.	Поняття про нові сучасні теорії міцності.....	51
5.6.1.	Теорія Ягна.....	51
5.6.2.	Теорія Писаренка і Лебедева.....	52
5.6.3.	Діаграми механічного стану (критерії Я.В.Фрідмана).....	53
Лекція 7.	Тема 6. Геометричні характеристики плоских перерізів	55
6.1.	Класифікація геометричних характеристик перерізів.....	55
6.1.1.	Площа.....	55
6.1.2.	Статичний момент площі відносно осі.....	55
6.1.3.	Моменти інерції площ.....	56
6.1.4.	Моменти опору.....	57
6.1.5.	Радіус інерції.....	58
6.2.	Перетворення моментів інерції.....	58
6.2.1.	Перетворення моментів інерції при паралельному перенесенні осей.....	58
6.2.2.	Перетворення моментів інерції при повороті осей.....	59
Лекція 8.	Продовження теми 6 (ГПП)	61
6.2.3.	Головні осі інерції. Головні моменти інерції.....	61
6.2.4.	Еліпс інерції.....	62
6.3.	Обчислення моментів інерції та опору для деяких характерних перерізів.....	63
6.3.1.	Прямокутник.....	63
6.3.2.	Трикутник.....	64
6.3.3.	Круг.....	65
6.3.4.	Кільце.....	66
6.4.	Визначення моментів інерції, опору та інших геометричних характеристик для прокатних профілів (двотаври, швелери, кутники тощо).....	66
Лекція 9.	Тема 7. Чистий зсув. Кручення	67
7.1.	Чистий зсув, напруження, умова міцності.....	67
7.1.1.	Приклад розрахунку на міцність заклепкового з'єднання.....	67
7.2.	Деформації, закон Гука при зсуві, модуль пружності II роду.....	69
7.3.	Кручення.....	70
7.4.	Внутрішні силові фактори при крученні. Напруження. Критерій міцності.....	70
7.5.	Деформації при крученні. Закон Гука. Умова жорсткості.....	73
7.6.	Приклад розрахунку вала на міцність і жорсткість.....	74
Лекція 10.	Продовження теми 7 (Зсув та кручення)	76
7.7.	Напруження при крученні у перерізах, нахилених до осі вала.....	76
7.8.	Потенціальна енергія при крученні.....	77
7.9.	Визначення граничної вантажопідйомності стержня, який скручується.....	78
7.10.	Напруження і деформації в циліндричних гвинтових пружинах з малим кроком.....	79
7.10.1.	Внутрішні силові фактори та напруження в пружинах.....	80
7.10.2.	Деформації в пружині.....	81
7.10.3.	Розрахунок пружин по енергії, що повинна поглинатися.....	83
7.11.	Кручення тонкостінних стержнів.....	83
Лекція 11.	Тема 8. Згин	86
8.1.	Типи опор балок.....	86
8.2.	Внутрішні силові фактори при згині.....	87
8.3.	Диференціальні залежності між силовими факторами при згині.....	88

8.4. Побудова епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M	90
8.4.1. Правила контролю та рекомендації при побудові епюр Q і M	90
8.4.2. Приклад побудови епюр перерізуючих сил Q і згинаючих моментів M	91
Лекція 12. Продовження теми 8 (Згин)	94
8.5. Нормальні напруження при згині. Умова міцності при згині за нормальними напруженнями.....	94
Лекція 13. Продовження теми 8 (Згин)	98
8.6. Дотичні напруження при згині. Формула Журавського. Умова міцності при згині за дотичними напруженнями.....	98
Лекція 14. Продовження теми 8 (Згин)	103
8.7. Повна перевірка балки на міцність.....	103
8.8. Згин тонкостінних стержнів.....	105
Лекція 15. Тема 9. Деформації та переміщення при згині	107
9.1. Деформації та переміщення, що розглядаються при згині.....	107
9.2. Аналітичні методи визначення деформацій та переміщень при згині Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.....	107
9.3. Приклади інтегрування наближеного рівняння зігнутої осі балки.....	108
Лекція 16. Продовження теми 9 (Деформації та переміщення при згині)	111
9.4. Метод прирівнювання постійних інтегрування.....	111
9.5. Метод початкових параметрів.....	112
9.6. Приклад визначення переміщень.....	113
Лекція 17. Тема 10. Складний опір	115
10.1. Складний згин. Косий згин.....	115
9.1.1. Визначення напружень при косому згині. Умова міцності.....	115
9.1.2. Визначення переміщень при косому згині.....	117
10.2. Сумісна дія згину та розтягу (або стиску). Згин за умов дії поздовжніх та поперечних сил.....	118
Лекція 18. Продовження теми 10 (Складний опір)	120
10.3. Позацентровий стиск (розтяг).....	120
10.3.1. Напруження при позацентровому стиску (розтягу). Розрахунок на міцність.....	120
10.3.2. Ядро перерізу.....	122
Лекція 19. Продовження теми 10 (Складний опір)	124
10.4. Сумісна дія згину та кручення.....	124
10.5. Застосування теорій міцності для оцінювання напруженого стану при сумісній дії згину та кручення.....	124
10.6. Приклад сумісної дії згину та кручення.....	125
Лекція 20. Тема 11. Загальні теореми опору матеріалів	128
11.1. Лінійна пружна система.....	128
11.2. Принцип можливих переміщень.....	129
11.3. Теорема про взаємність робіт (Теорема Бетті).....	129
11.4. Теореми Лагранжа і Кастільяно.....	130
11.5. Інтеграл переміщень (інтеграл Мора).....	131
11.6. Графоаналітичний спосіб розрахунку інтеграла переміщень (спосіб Верещагіна).....	132
Лекція 21. Продовження теми 11 (Загальні теореми опору матеріалів)	134
11.7. Аналіз застосування спрощеного інтеграла Мора.....	134
11.8. Приклад використання спрощеного інтеграла Мора для обчислення переміщень при згині.....	134
11.9. Порядок використання формули Верещагіна для обчислення переміщень при згині.....	135

11.10. Приклад використання формули Верещагіна для обчислень переміщень при згині.....	136
11.10.1. Тестова задача.....	136
11.10.2. Знаходження переміщень у більш складному випадку.....	137
Лекція 22. Тема 12. Розрахунок статично невизначених систем, що працюють на згин.....	141
12.1. Основи методу сил.....	141
12.2. Канонічні рівняння методу сил.....	141
12.3. Приклад розкриття статичної невизначеності.....	143
Лекція 23. Тема 13. Криві стержні.....	149
13.1. Загальні поняття.....	149
13.2. Обчислення згинаючих моментів, нормальних і поперечних сил.....	149
13.3. Обчислення напружень від сил Q і N	151
13.4. Обчислення напружень від згинаючого моменту M	152
13.5. Аналіз формули нормальних напружень у кривому стержні.....	157
Лекція 24. Продовження теми 13 (Криві стержні).....	159
13.6. Визначення радіуса кривизни нейтрального шару для різних перерізів.....	159
13.6.1. Прямокутний переріз.....	159
13.6.2. Круговий переріз.....	159
13.6.3. Трапецевидний і трикутний перерізи.....	160
13.7. Деформації кривих стержнів.....	160
13.8. Приклад розрахунку кривих стержнів.....	163
Лекція 25. Тема 14. Стійкість. Поздовжній стиск стержнів.....	166
14.1. Поняття про стійкість стиснутих стержнів.....	166
14.2. Формула Ейлера для критичної сили.....	168
14.3. Вплив способу закріплення кінців стержня.....	171
14.4. Критичні напруження.....	173
14.5. Межі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень.....	174
Лекція 26. Продовження теми 14 (Стійкість. Поздовжній згин стержнів).....	178
14.5. Перевірка стиснутих стержнів на стійкість.....	178
14.6. Приклад розрахунку стиснутого стержня на стійкість.....	178
14.7. Вибір типу перетину і матеріалу.....	180
14.7.1. Вибір типу перетину.....	180
14.7.2. Вибір матеріалу.....	182
Лекція 27. Тема 15. Динамічні навантаження.....	183
15.1. Врахування сил інерції та коливань. Введення.....	183
15.2. Обчислення напружень при рівноприскореному русі.....	184
15.3. Розрахунок кільця, що обертається.....	185
Лекція 28. Продовження теми 15 (Динамічні навантаження).....	187
15.4. Обчислення напружень при коливаннях.....	187
15.4.1. Власні коливання.....	187
15.4.2. Коливання за наявності збурюючої сили.....	188
Лекція 29. Продовження теми 15 (Динамічні навантаження).....	191
15.5. Елементарна теорія удару. Основні положення.....	191
15.6. Загальний метод обчислення напружень при ударі.....	192
15.7. Окремі випадки обчислення напружень та перевірки міцності при ударі.....	196
15.7.1. Випадок поздовжнього удару.....	196
15.7.2. Згинаючий удар.....	197
15.7.3. Удар, що скручує.....	199
15.8. Напруження в стержнях змінного перерізу при ударі.....	200
15.9. Практичні висновки з отриманих результатів.....	202

15.10. Механічні властивості матеріалів при ударі.....	204
Лекція 30. Тема 16. Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень.....	206
16.1. Явище «втомленості» матеріалів.....	206
16.2. Методи визначення межі витривалості.....	210
16.2.1. Діаграми втомленості.....	210
16.2.2. Діаграми граничних напружень.....	212
Лекція 31. Продовження теми 16 (Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень).....	216
16.3. Вплив конструктивно-технологічних факторів на межу витривалості.....	216
16.3.1. Вплив концентрації напружень.....	216
16.3.2. Вплив розмірів (масштабний фактор).....	217
16.3.3. Вплив стану поверхні.....	218
16.3.4. Вплив пауз.....	219
16.3.5. Вплив перевантажень.....	219
16.3.6. Вплив тренувань.....	220
16.3.7. Вплив температури.....	220
16.4. Розрахунок на міцність при повторно-змінних напруженнях.....	220
Лекція 32. Тема 17. Основи механіки руйнування.....	225
17.1. Загальні поняття.....	225
17.2. Крихке руйнування. Задача Гріффітса.....	225
17.3. Силкові критерії руйнування.....	229
17.4. Оцінювання величини пластичної зони на продовженні тріщини.....	233
17.5. Методика експериментального визначення тріщиностійкості конструкційних матеріалів.....	235
Лекція 33. Тема 18. Контактні напруження.....	237
18.1. Основні поняття.....	237
18.2. Визначення контактних напружень.....	238
18.2.1. Стиск куль.....	238
18.2.2. Стиск циліндрів.....	239
18.2.3. Загальний випадок контакту двох тіл.....	241
18.3. Перевірка міцності при контактних напруженнях.....	242
Лекція 34. Заключна. Сучасні проблеми опору матеріалів.....	245
Використана література.....	249