УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.26661/2786-6254-2024-1-02

ЗАДАЧА ПРО ДІЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ НА ПРУЖНУ ОРТОТРОПНУ ПІВПЛОЩИНУ

Дзундза Н. С.
аспірантка кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0003-4075-474X
natalii.dzundza@gmail.com

Зіновєєв І. В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри загальної математики
Запорізький національний університет
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, Україна
orcid.org/0000-0002-7392-2327
zinoveyev@gmail.com

Ключові слова: *пружна ортотропна півплощина, плоска деформація, напружено-деформівний стан, зосереджена сила, функція напружень, інтегральне перетворення Фур'є.*

Розглядається перша основна гранична задача лінійної теорії пружності про дію зосередженої сили нормальної до поверхні пружної однорідної, суцільної ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації. На нескінченності напруження прямують до нуля. Необхідно визначити напруження та переміщення у довільній точці півплощини.

Розв'язок поставленої граничної задачі для ортотропної півплощини шукається у просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є. Всі основні рівняння задачі та граничні умови піддаються прямому перетворенню одновимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Розв'язання сформульованої плоскої задачі базується на побудові трансформанти Фур'є функції напружень, яка задовольняє відповідному аналогу бігармонічного диференціального рівняння у просторі трансформант для випадку ортотропного матеріалу.

Вигляд трансформанти функції напружень залежить від значень пружних сталих ортотропного матеріалу, а саме від значень коренів отриманого у просторі трансформант характеристичного рівняння. Розглянуто один із трьох можливих випадків.

Трансформанти напружень і переміщень точок півплощини виражаються через трансформанту функції напружень, яка виражається через чотири допоміжні функції, пов'язані з навантаженнями на поверхні півплощини. З умов на межі знаходяться дві з чотирьох допоміжних функцій, а з умов на нескінченності встановлюється зв'язок між двома іншими.

Проведено дослідження поведінки трансформант напружень на нескінченності, внаслідок якого отримано умови, що забезпечуються скінченність напружень і переміщень.

Після застосування оберненого інтегрального перетворення Фур'є до отриманих виразів для трансформант визначаються істині значення напружень і переміщень у точках ортотропної півплощини.

Наведено розв'язки для конкретних випадків і за побудованими графіками напружень і переміщень у півплощині проведено аналіз числових результатів, контроль виконання граничних умов. Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу для розв'язання поставленої задачі.

PROBLEM ON THE ACTION OF A CONCENTRATED FORCE ON AN ELASTIC ORTHOTROPIC HALF-PLANE

Dzundza N. S.
Postgraduate Student at the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0003-4075-474X
natalii.dzundza@gmail.com

Zinovieiev I. V.
Philosophy Doctor of Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of General Mathematics
Zaporizhzhia National University
Zhukovskoho str., 66, Zaporizhzhia, Ukraine
orcid.org/0000-0002-7392-2327
zinoveyev@gmail.com

Key words: *elastic orthotropic half-plane, plane deformation, stress-strain state, concentrated force, stress function, integral Fourier transform.*

We consider the first basic boundary value problem of the linear theory of elasticity on the action of a concentrated force normal to the surface of an elastic homogeneous, continuous orthotropic half-plane under plane deformation. At infinity, the stresses tend to zero. You need to determine the stresses and displacements at an arbitrary point in the half-plane.
The solution to the boundary value problem for an orthotropic half-plane is sought in the space of transformants of the one-dimensional Fourier integral transform. All the basic equations of the problem and boundary conditions are directly transformed by the one-dimensional integral Fourier transform.
The solution of the formulated plane problem is based on the construction of the Fourier transform of the stress function, which satisfies the corresponding analog of the biharmonic differential equation in the transform space for the case of an orthotropic material.
The appearance of the transformant of the stress function depends on the values of the elastic constants of the orthotropic material, namely, on the values of the roots of the characteristic equation obtained in the space of transformants. One of three possible cases is considered.
The transformants of stresses and displacements of points of the half-plane are expressed through the transformant of the stress function, which in turn is expressed through four auxiliary functions associated with the loads on the surface of the half-plane.
Two of the four auxiliary functions are found from the boundary conditions, and the connection between the other two is established from the conditions at infinity.
The behavior of the stress transforms at infinity is studied, as a result of which the conditions that ensure the finiteness of stresses and displacements are obtained.
After applying the inverse integral Fourier transform to the obtained expressions for the transformants, the true values of stresses and displacements at points of the orthotropic half-plane are determined.
The solutions for specific cases are presented, and the numerical results are analyzed and the fulfillment of boundary conditions is monitored based on the plots of stresses and displacements in the half-plane. The obtained calculations indicate the adequacy of the results and the logical application of the chosen method for solving the problem.

Вступ. Досить часто у будівельній механіці виникає задача про визначення напруженого стану пружної півплощини під дією зосередженої сили, наприклад для знаходження напружень у ґрунтах, тунелях, підземних спорудах, для розрахунку фундаментів тощо.

У статті [1] розв'язано задачу про дію об'ємного зосередженого навантаження на пружну ізотропну півплощину з використанням інтегрального перетворення Фур'є. У [2] наведено ітераційний алгоритм для розв'язку задачі про визначення напружено-деформівного стану ізотропної пластини із тріщиною, що знаходиться під дією зосередженої сили. Розглянутий метод дозволяє визначити напружено-деформівний стан в околиці вершини тріщини та на великій відстані від неї.

У [3] проаналізовано задачу контакту гумової виїмки із жорстким клином, для якої виведено та розв'язано основні рівняння деформації поблизу кута надрізу. Розглянуто випадок, коли напівгумова площина контактує з жорстким клином, для якого отримано повністю аналітичні розв'язки як для сектора, що розширюється, так і для сектора, що стискається. У роботі [4] наведено аналітичний розв'язок задачі Фламана за допомогою однопараметричного групового перетворення бігармонічного рівняння, що дозволяє враховувати сингулярне навантаження безпосередньо за допомогою дельта-функції Дірака.

Цікавим є застосування задачі Фламана до дослідження процесів руйнування цілісності поверхні плоду кісточкових культур при обробці [5]. Математична модель розглянутого процесу зводиться до розв'язання рівнянь теорії пружності визначення плоского напружено деформівного стану півплощини матеріалу плоду під дією нормальної зосередженої сили за допомогою інтегрального перетворення Фур'є.

У розглянутих роботах задача Фламана досліджується тільки для ізотропних матеріалів, але реальні матеріали краще можуть бути описані анізотропними моделями, зокрема ортотропними. Для ортотропних матеріалів клас розв'язаних задач набагато менший, ніж для ізотропних. Поставимо за мету побудувати розв'язок задачі про дію зосередженої сили на пружну ортотропну півплощину.

Постановка задачі. Розглядається перша основна гранична задача лінійної теорії пружності про дію зосередженої сили нормальної до денної поверхні пружної однорідної, суцільної ортотропної півплощини в умовах плоскої деформації. На нескінченності напруження прямують до нуля. Потрібно визначити напруження та переміщення у довільній точці півплощини. Для побудови математичної моделі поставленої задачі та її подальшого дослідження віднесемо тіло до прямокутної декартової системи координат, як показано на рис. 1.

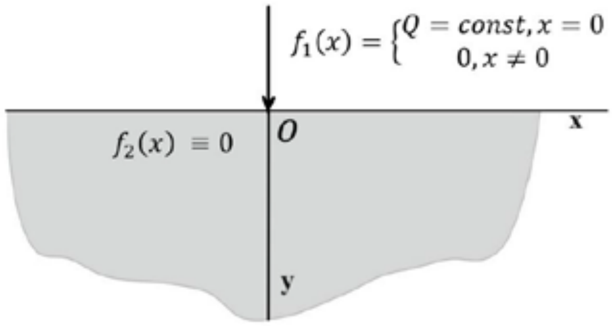


Рис. 1. Постановка задачі

Тоді півплощина буде займати область: $G(x,y): \begin{Bmatrix} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y \le 0 \end{Bmatrix}$. Матеріал півплощини характеризується модулями пружності E_x, E_y, ν_{xy}, ν_{xz}, ν_{yz}, ν_{zy}.

У точці з координатами $(0,0)$ діє зосереджене нормальне навантаження:

$$\sigma_y(x,0) = f_1(x) = \\ = \begin{cases} Q = const, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}, \tau_{xy}(x,0) = f_2(x) \equiv 0. \quad (1)$$

На нескінченності напруження прямують до нуля:

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \sigma_x(x,y) = 0, \lim_{x^2+y^2\to\infty} \sigma_y(x,y) = \\ = 0, \lim_{x^2+y^2\to\infty} \tau_{xy}(x,y) = 0. \quad (2)$$

Потрібно визначити напруження $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ та переміщення $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ у довільній точці півплощини.

Методи. Розв'язання поставленої задачі будемо проводити, спираючись на схему, наведену в [6].

Розв'язок шукається у просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є [7] з використанням трансформанти функції напружень.

Наведемо схему розв'язання задачі для ортотропної півплощини: 1) знаходиться трансформанта функції напружень; 2) знаходяться трансформанти напружень і переміщень із урахуванням граничних умов та умов на нескінченності; 3) до отриманих виразів трансформант Фур'є напружень і переміщень шару застосовується обернене інтегральне перетворення Фур'є; 4) перевірка адекватності отриманих результатів.

Розв'язок поставленої задачі будуємо з використанням функції напружень $\varphi(x,y)$, яка є розв'язком бігармонічного рівняння (3) плоскої теорії пружності для ортотропного матеріалу [8]:

$$\frac{1-\nu_{yz}\cdot\nu_{zy}}{E_y}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\left(\frac{1+\sqrt{\nu_{xy}\cdot\nu_{yx}}}{\sqrt{E_x\cdot E_y}}-\frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\cdot\nu_{zy}}{E_y}\right)\cdot \cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1-\nu_{xz}\cdot\nu_{zx}}{E_x}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0, \quad (3)$$

де ν_{xz}, ν_{xy}, ν_{yz}, ν_{zy}, E_x, E_y – пружні константи матеріалу шару.

Функції напружень і переміщень точок півплощини пов'язані із функцією напружень $\varphi=\varphi(x,y)$ співвідношеннями (4):

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=c_{11}\sigma_x-c_{12}\sigma_y,\ \frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}=c_{33}\tau_{xy}, \quad (4)$$

де $c_{11}=\frac{1-\nu_{xz}\cdot\nu_{zx}}{E_x}, c_{12}=\frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\cdot\nu_{zy}}{E_y}$, $c_{33}=\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{\nu_{xy}\cdot\nu_{yx}}\right)}{\sqrt{E_x\cdot E_y}}$ – константи пружності у законі Гука для ортотропного матеріалу [9].

Співвідношення (1) – (4) піддаємо одновимірному інтегральному перетворенню Фур'є. Внаслідок цього переходимо до задачі у просторі трансформант Фур'є.

Запишемо отримані аналоги у просторі трансформант співвідношень (1) – (4):

$$\overline{\sigma_y}(\xi,0)=\overline{f_1}(\xi),\overline{\tau_{xy}}(\xi,0)=0; \quad (1')$$

$$\lim_{y\to-\infty}\overline{\sigma_x}(\xi,y)=0,\ \lim_{y\to-\infty}\overline{\sigma_y}(\xi,y)=0,\ \lim_{y\to-\infty}\overline{\tau_{xy}}(\xi,y)=0; \quad (2')$$

$$\overline{\sigma_x}(\xi,y)=\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial y^2},\ \overline{\sigma_y}(\xi,y)=-\xi^2\overline{\varphi},\ \overline{\tau_{xy}}(\xi,y)=i\xi\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial y},$$

$$\overline{u_x}(\xi,y)=\frac{i}{\xi}\left(c_{11}\overline{\sigma_x}(\xi,y)-c_{12}\overline{\sigma_y}(\xi,y)\right),$$

$$\overline{u_y}(\xi,y)=\frac{i}{\xi}\left(c_{33}\overline{\tau_{xy}}(\xi,y)-\frac{d\overline{u_x}}{dy}\right); \quad (3')$$

$$A_1\cdot\frac{d^4\overline{\varphi}}{dy^4}-2A_3\xi^2\cdot\frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2}+A_2\xi^4\cdot\overline{\varphi}=0. \quad (4')$$

Тут $c_{11}=\frac{1-\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x}, c_{22}=\frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y}, c_{33}=\frac{1}{G_{xy}}$, $c_{12}=\frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy}}{E_y}, G_{xy}=\frac{\sqrt{E_x\cdot E_y}}{2\left(1+\sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}\right)}$ – константи пружності у законі Гука, $A_1=c_{11}$, $A_2=c_{22}$, $A_3=0,5c_{33}-c_{12}$, $\overline{\varphi}=\overline{\varphi}(\xi,y)$ – трансформанта Фур'є (5) по змінній x від $\varphi(x,y)$.

Перша формула визначає пряме одновимірне інтегральне перетворення Фур'є для функції $\varphi(x,y)$, друга – обернене.

$$\overline{\varphi}(\xi,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)\cdot e^{i\xi x}dx,$$
$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi}(\xi,y)\cdot e^{-i\xi x}d\xi. \quad (5)$$

Зауважимо, що рівняння $(4')$ є звичайним диференціальним рівнянням четвертого порядку для кожного значення параметра ξ.

Вигляд трансформанти функції напружень залежить від значень коренів відповідного до $(4')$ характеристичного рівняння.

Наведемо вирази, що відповідають цим випадкам, а саме:

1) $\frac{A_1A_2}{A_3^2}>1$, випадок двох пар комплексно спряжених коренів:

$$\overline{\varphi}(\xi,y)=\left(C\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)+A\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)\right)\cdot cos\left(ry\sqrt{a_2}\right)+ +\left(D\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)+B\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)\right)\cdot\sin\left(ry\sqrt{a_2}\right), \quad (6)$$

де $r=|\xi|$, $\sqrt{a_1}=\sqrt{\frac{A_3}{A_1}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A_1A_2}{A_3^2}}+1\right)}$, $\sqrt{a_2}=\sqrt{\frac{A_3}{A_1}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A_1A_2}{A_3^2}}-1\right)}, A=A(\xi),\ B=B(\xi)$, $C=C(\xi), D=D(\xi)$ – невідомі функції параметру інтегрування.

2) $\frac{A_1A_2}{A_3^2}=1$, випадок із двома дійсними кратними коренями:

$$\overline{\varphi}=A\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)+B\sqrt{a_1}\,y\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)+ +C\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)+D\sqrt{a_1}\,y\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right), \quad (7)$$

де $r=|\xi|,\sqrt{a_1}=\sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$, A,B,C,D – функції параметра ξ.

3) $\frac{A_1A_2}{A_3^2}<1$, випадок чотирьох дійсних однократних коренів

$$\overline{\varphi}(\xi,y)=A\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)+B\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)+ +C\,ch\left(ry\sqrt{a_2}\right)+D\,sh\left(ry\sqrt{a_2}\right), \quad (8)$$

де $r = |\xi|, \sqrt{a_1} = \sqrt{\dfrac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \dfrac{A_1 A_2}{A_3^2}}}$,

$\sqrt{a_2} = \sqrt{\dfrac{A_3}{A_1}} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dfrac{A_1 A_2}{A_3^2}}}$.

Продемонструємо схему розв'язання для випадку двох дійсних кратних коренів.

Виразимо $\overline{\varphi}(\xi, y)$ через допоміжні функції $\alpha(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$ (9). пов'язані з умовами на верхній межі $y=0$ півплощини [10]:

$$\alpha(\xi) = \overline{\sigma_y}\Big|_{y=0}, \delta(\xi) = -\frac{i\xi \cdot \overline{\tau_{xy}}\Big|_{y=0}}{r},$$
$$\beta(\xi) = \frac{r\,\overline{u_y}\Big|_{y=0}}{2a_1 c_{11}}, \gamma(\xi) = -\frac{i\xi \cdot \overline{u_x}\Big|_{y=0}}{2a_1 c_{11}}, \tag{9}$$

$$\overline{\varphi} = \begin{pmatrix} ry \cdot \left(a_1^2 c_{11}\alpha + a_1 c_{12}\,\alpha + 2a^2 c_{11}\gamma\right) + \\ +\left(3a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}\right)\delta - 2a_1 c_{11}\beta \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \frac{sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2a_1\sqrt{a_1}c_{11}r^2} - \frac{ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2a_1 c_{11} r^2} \cdot \tag{10}$$
$$\cdot\left(2a_1 c_{11}\alpha + ry\left(a_1 c_{11}\delta + c_{12}\delta - c_{33}\delta - 2a_1 c_{11}\beta\right)\right)$$

З умов (1') знаходимо $\alpha(\xi)$, $\delta(\xi)$. Так як $\tau_{xy}(x,0)=0$ то і $\delta(\xi)=0$. Щоб знайти $\alpha(\xi)$, замінимо зосереджену силу Q на еквівалентне рівномірно розподілене по області $[-a;a]$ навантаження з інтенсивністю $\dfrac{Q}{2a}$.

$$\sigma_y(x,0) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2a}, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

$$\alpha(\xi) = \lim_{a\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{Q}{2a}\cdot e^{i\xi x}dx = \lim_{a\to 0}\frac{Q}{2a}\cdot\frac{e^{i\xi x}}{i\xi}\Bigg|_{-a}^{a} =$$
$$= \lim_{a\to 0} Q\frac{\sin(\xi a)}{\xi a} = Q.$$

Таким чином $\alpha(\xi) = Q$.

З урахуванням вище отриманих значень маємо:

$$\overline{\sigma_x} = \left(\left(a_1 c_{11} ry + c_{12} ry\right)Q + 2c_{11}\beta + 2a_1 c_{11} ry\gamma\right)\frac{\sqrt{a_1}\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2c_{11}} +$$
$$+\frac{ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2c_{11}}\cdot\left(2c_{12}Q + 2a_1 c_{11} ry\beta + 4a_1 c_{11}\gamma\right),$$

$$\overline{\sigma_y} = \left(\left(a_1 c_{11} ry + c_{12} ry\right)Q - 2c_{11}\,\beta + 2a_1 c_{11} ry\gamma\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{-2\sqrt{a_1}c_{11}} + ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)\cdot\left(Q - ry\beta\right),$$

$$\overline{\tau_{xy}} = \left(\left(a_1 c_{11} - c_{12}\right)Q - 2a_1 c_{11} ry\beta - 2a_1 c_{11}\,\gamma\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{i\xi \cdot sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{-2\sqrt{a_1}c_{11}r} + \frac{i\xi \cdot ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2c_{11}r}\cdot \tag{11}$$
$$\cdot\left(\left(a_1 c_{11} ry + c_{12} ry\right)Q + 2a_1 c_{11} ry\gamma\right).$$

Аналогічно підставимо отримані вирази у трансформанти переміщень:

$$\overline{u_x}(\xi, y) = \begin{pmatrix} \left(a_1^2 c_{11}^2 ry + 2a_1 c_{11} c_{12} ry + c_{12}^2 ry\right)Q + \\ +2a_1 c_{11}^2\,\beta - 2c_{11}c_{12}\,\beta + 2a_1^2 c_{11}^2 ry\gamma + 2a_1 c_{11} c_{12} ry\gamma \end{pmatrix}\cdot$$
$$\cdot\frac{i\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2\sqrt{a_1}\xi c_{11}} + \frac{i\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{\xi}\cdot\left(a_1 c_{11} ry\beta + c_{12} ry\beta + 2a_1 c_{11}\,\gamma\right),$$

$$\overline{u_y}(\xi, y) = \begin{pmatrix} \left(a_1^2 c_{11}^2 + 2a_1 c_{11} c_{12} + a_1 c_{11} c_{33} + c_{12}^2 - c_{12} c_{33}\right)Q + \\ +2{a_1}^2 c_{11}^2 ry\beta + 2a_1 c_{11} c_{12} ry\beta - 2a_1 c_{11} c_{33} ry\beta + \\ +6{a_1}^2 c_{11}^2\gamma + 2a_1 c_{11} c_{12}\,\gamma - 2a_1 c_{11} c_{33}\,\gamma \end{pmatrix}\cdot$$
$$\cdot\frac{sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2\sqrt{a_1}c_{11}r} + \frac{ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)}{2c_{11}r}\cdot \tag{12}$$
$$\cdot\begin{pmatrix} \left({a_1}^2 c_{11}^2\,ry + 2a_1 c_{11} c_{12} ry - a_1 c_{11} c_{33} ry + c_{12}^2 ry - c_{12} c_{33} ry\right)Q + \\ +4a_1 c_{11}^2\beta + 2{a_1}^2 c_{11}^2 ry\gamma + 2a_1 c_{11} c_{12} ry\gamma - 2a_1 c_{11} c_{33} ry\gamma \end{pmatrix}.$$

Умови на нескінченності дозволяють встановити зв'язок між двома знайденими допоміжними функціями та $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$.

За умовою задачі при $y \to -\infty$ всі напруження прямують до нуля, тому і трансформанти шуканих величин також прямують до нуля при $y \to -\infty$.

Формули для трансформант напружень містять функції $sh\left(ry\sqrt{a_1}\right)$, $ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)$ і $ry\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right), ry\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)$, кожна з яких при $r \ne 0$ і $y \to -\infty$ необмежено зростає, однак їх лінійні комбінації $\lambda sh\left(ry\sqrt{a_1}\right) + \mu ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)$ і $\tilde{\lambda} ry\,sh\left(ry\sqrt{a_1}\right) + \tilde{\mu}\,ry\,ch\left(ry\sqrt{a_1}\right)$ повинні забезпечувати прямування до нуля при $y \to -\infty$.

Аналіз виразів для трансформант напружень дає можливість зробити висновок, що виконання цих умов можливе, якщо коефіцієнти при $e^{-ry\sqrt{a_1}}$ дорівнюють нулю. Звідки отримаємо $-\lambda + \mu = 0$ та $-\tilde{\lambda} + \tilde{\mu} = 0$

З яких ми отримаємо функції:

$$\beta(\xi) = \frac{2a_1\sqrt{a_1}c_{11}\cdot\alpha(\xi) + \left(3a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}\right)\cdot\delta(\xi)}{2a_1 c_{11}} = Q\sqrt{a_1},$$

$$\gamma(\xi) = \frac{\left(a_1 c_{11} - c_{12}\right)\cdot\alpha(\xi) + 2\sqrt{a_1}c_{11}\cdot\delta(\xi)}{2a_1 c_{11}} =$$
$$= \frac{\left(a_1 c_{11} - c_{12}\right)\cdot Q}{2a_1 c_{11}}. \tag{13}$$

 ISSN 2786-6254

Отримані вирази (13) підставляємо у трансформанти напружень (11) і переміщень (12), отримаємо:

$$\overline{\sigma_x}(\xi, y) = Qe^{ry\sqrt{a_1}} a_1\left(ry\sqrt{a_1}+1\right),$$

$$\overline{\sigma_y}(\xi, y) = -Qe^{ry\sqrt{a_1}} a_1\left(ry\sqrt{a_1}-1\right),$$

$$\overline{\tau_{xy}}(\xi, y) = iQa_1 y\xi e^{ry\sqrt{a_1}}. \qquad (11')$$

$$\overline{u_x}(\xi, y) = \frac{iQe^{ry\sqrt{a_1}}\left(a_1\sqrt{a_1}c_{11}ry + a_1c_{11} + \sqrt{a_1}c_{12}ry - c_{12}\right)}{\xi},$$

$$\overline{u_y}(\xi, y) = \frac{Qe^{ry\sqrt{a_1}} a_1\left(a_1c_{11}ry + c_{12}ry - ryc_{33} + 2\sqrt{a_1}c_{11}\right)}{r}, \quad (12')$$

де $r = |\xi|, \sqrt{a_1} = \sqrt{\dfrac{A_3}{A_1}}$.

Остаточні вирази для трансформант $(11'),(12')$ піддаємо оберненому інтегральному перетворенню й отримаємо істинні значення. В окремих випадках вдається отримати аналітичні вирази, у загальному випадку застосовується чисельне інтегрування.

Числові розрахунки. Розглянемо ортотропну півплощину, матеріал якої характеризується пружними константами $\nu_{xy} = 0{,}26$, $\nu_{xz} = 0{,}235$, $\nu_{yz} = 0{,}17$, $\nu_{zy} = 0{,}3$, $E_x = 1{,}73\cdot 10^9\,(\text{Па})$, $E_y = 3{,}31\cdot 10^9\,(\text{Па})$.

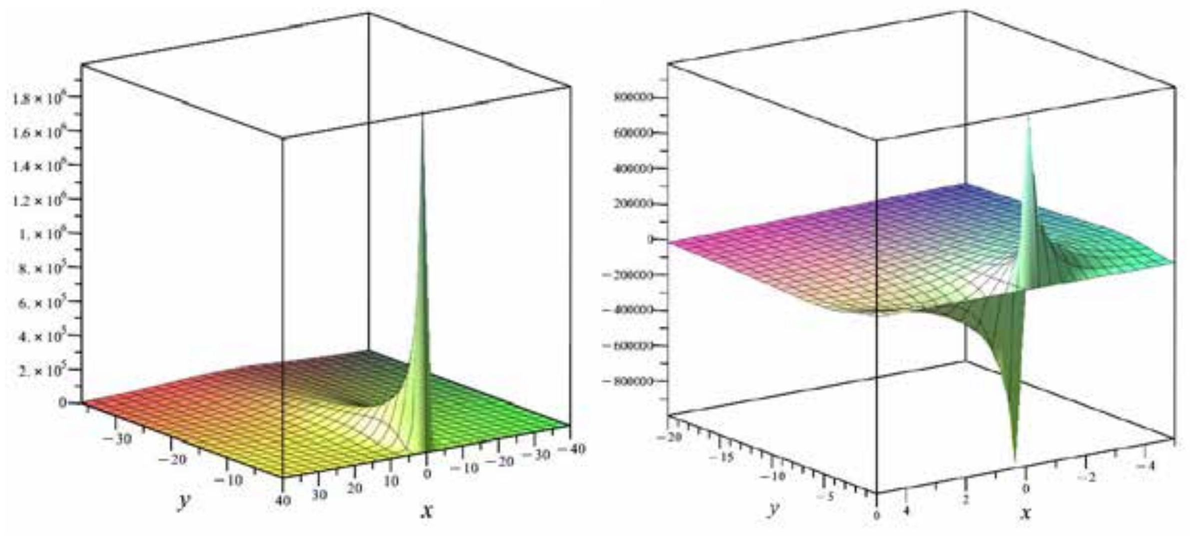
Розглянемо зосереджене навантаження $\sigma_y(x,0) = 2\cdot 10^6$ (Па), $\tau_{xy}(x,0) = 0$ (Па), які задано на межі $y = 0$. При $x^2 + y^2 \to \infty$ напруження дорівнюють нулю.

Як бачимо з наведених розрахунків, найбільші значення в околі $x = 0$. При віддалені від нуля значення зменшуються. Отримані результати свідчать про виконання межових умов та умов на нескінченності.

Отримані результати для переміщень $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ демонструють симетричний характер деформування. Максимальні значення нормальних переміщень $u_y(x,y)$ відповідають лінії дії максимального нормального навантаження.

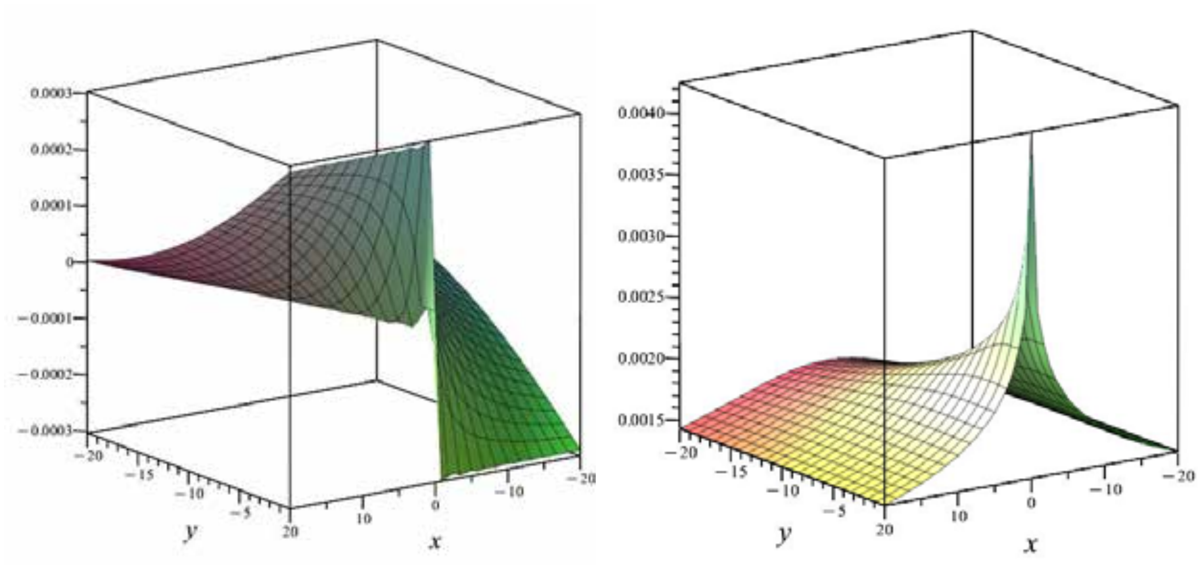
Висновки. Розглянуто підхід розв'язання першої основної граничної задачі теорії пружності про дію зосередженої сили на ортотропну півплощину, що базується на застосуванні методу одновимірного інтегрального перетворення Фур'є до функції напружень.

На базі отриманих аналітичних розв'язків для ортотропної півплощини були зроблені числові розрахунки, побудовані графіки та виконаний їх аналіз. Отримані розрахунки свідчать про адекватність результатів і логічність застосування обраного методу для розв'язання поставленої задачі.



(а) (б)

Рис. 2. Значення напружень $\sigma_y(x,y)$ (а), $\tau_{xy}(x,y)$ (б)



(а) (б)

Рис. 3. Значення переміщень $u_x(x,y)$ (а), $u_y(x,y)$ (б)

ЛІТЕРАТУРА

1. Зіновєєв І.В. Розв'язання задачі про дію об'ємного зосередженого навантаження на пружну півплощину. *Вісник ЗДУ*. 2000. № 2. С. 65–68.
2. Саликіна Н.В., Толок В.О. Аналіз напружено-деформованого стану пластини під дією зосередженої сили при наявності тріщини. *Вісник ЗДУ*. 1999. № 2. С. 131–137.
3. Gao Y.C., Gao T.J. Large deformation contact of a rubber notch with a rigid wedge. *International Journal of Solids and Structures*. 2000. Vol. 37. № 32. P. 4319–4334. DOI:10.1016/s0020-7683(99)00191-2.
4. Unger D.J. Similarity Solution of the Flamant Problem by Means of a One-Parameter Group Transformation. *Journal of Elasticity*. 2002. Vol. 66. № 1. P. 93–97. DOI:10.1023/a:1020505405774.
5. Шаповаленко О.І., Рибчинський Р.С., Кустов І.О. Технологічна характеристика зерна кукурудзи. *Одес. нац. акад. харч. технологій*. 2019. Т. 83. № 2. С. 39–43.
6. Дзундза Н.С., Зіновєєв І.В. Алгоритм знаходження напружено-деформованого стану пружного ортотропного шару. *Scientific discussion*. 2022. № 1 (64). С. 16–20.
7. Sneddon I.N. Fourier Transforms. McGraw-Hill Book Company, New York. 1951. 542 p.
8. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. Boca Raton, Florida. 2004. 858 p.
9. Reddy J.N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton, Florida. 2006. 568 p.
10. Приварников А.К. Двовимірні граничні завдання теорії пружності для багатошарових основ. Запоріжжя : ЗНУ, 1990. 84 с.

REFERENCES

1. Zinoviev, I.V. (2000). Rozviazannia zadachi pro diiu obiemnoho zoseredzhenoho navantazhennia na pruzhnu pivploshchynu. [Solving the problem of the action of a volumetric concentrated load on an elastic half-plane]. *Bulletin of ZDU*, (2), 65–68 [in Ukrainian].
2. Salykina, N.V., & Tolok, V.O. (1999). Analiz napruzheno-deformovanoho stanu plastyny pid diieiu zoseredzhenoi syly pry naiavnosti trishchyny. [Analysis of the stress-strain state of a plate under the action of a concentrated force in the presence of a crack]. *Bulletin of ZDU*, (2), 131–137 [in Ukrainian].
3. Gao, Y.C., & Gao, T.J. (2000). Large deformation contact of a rubber notch with a rigid wedge. *International Journal of Solids and Structures,* 37(32), 4319–4334. doi:10.1016/s0020-7683(99)00191-2.
4. Unger, D.J. (2002). Similarity Solution of the Flamant Problem by Means of a One-Parameter Group Transformation. *Journal of Elasticity, 66(1), 93–97.* doi:10.1023/a:1020505405774.

5. Shapovalenko, O., Rybchynskyi, R. & Kustov I. (2019). Tekhnolohichna kharakterystyka zerna kukurudzy [Technological characteristics of corn grain]. *Odesa National Academy of Food Technologies*. 83(2), 39–43. [in Ukrainian].
6. Dzundza, N., & Zinovieiev, I. (2022). Alhorytm znakhodzhennia napruzheno-deformovanoho stanu pruzhnoho ortotropnoho sharu. [Algorithm of finding the stress-strain state deforming of the elastic orthotropic layer]. *Scientific discussion*. 1(64), 16–20. [in Ukrainian].
7. Sneddon, I.N. (1951). *Fourier Transforms*. New York : McGraw-Hill Book Company.
8. Reddy, J.N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. Florida : Boca Raton.
9. Reddy, J.N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells.* Florida : Boca Raton.
10. Pryvarnykov, A.K. (1990). *Dvovymirni hranychni zavdannia teorii pruzhnosti dlia bahatosharovykh osnov*. [Two-Dimensional Boundary Problems of Elasticity Theory for Multilayered Foundations]. Zaporizhzhia : ZNU [in Ukrainian].