ТЕМА 8 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

Лекція 8.1(9) **Формула Остроградського-Гауса. Теорема про дивергенцію. Основні рівняння механіки суцільних середовищ. Закон збереження маси. Вивід рівняння нерозривності. Інваріантна форма рівняння збереження маси. Форма запису рівняння нерозривності в Ейлеревій і Лагранжевій системах координат**

Формула Остроградського-Гауса в декартовій системі координат для скаляра φ записується таким чином

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dV = \iint\limits_S n_i \varphi dS, \tag{9.1}$$

де V – об'єм тіла, S – поверхня тіла, n_i – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні.

Формула (9.1) використовується для пониження кратності інтеграла з 3-х до 2-х кратного (тобто від об'ємного до поверхневого).

Якщо підінтегральна функція у (9.1) є тензором, то формула Остроградського-Гауса для будь-якої системи координат може бути отримана шляхом заміни частинної похідної на коваріантну похідну

$$\iiint\limits_V \nabla_i \varphi dV = \iint\limits_S n_i \varphi dS. \tag{9.2}$$

Теорема про дивергенцію – об'ємний інтеграл від дивергенції тензора дорівнює поверхневому інтегралу скалярного добутку нормалі вектора на тензор

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\hat{T} dV = \iint\limits_S \mathbf{n} \cdot \hat{T} dS, \tag{9.3}$$

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \hat{T} dV = \iint\limits_S d\mathbf{S} \cdot \hat{T}, \tag{9.4}$$

де $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$.

Основні рівняння механіки суцільних середовищ. Рівняння МСС витікають з фундаментальних законів природи:

1 закон збереження маси;

2 закон збереження імпульсу (кількості руху) – витікає із 2-го закону Ньютона;

3 закон збереження енергії – витікає із 1-го закону термодинаміки;

4 закон зростання ентропії – витікає із 2-го закону термодинаміки.

Закон збереження маси. Розглянемо елементарний об’єм суцільного середовища з точки зору Ейлера у декартовій системі координат (рисунок 9.1).

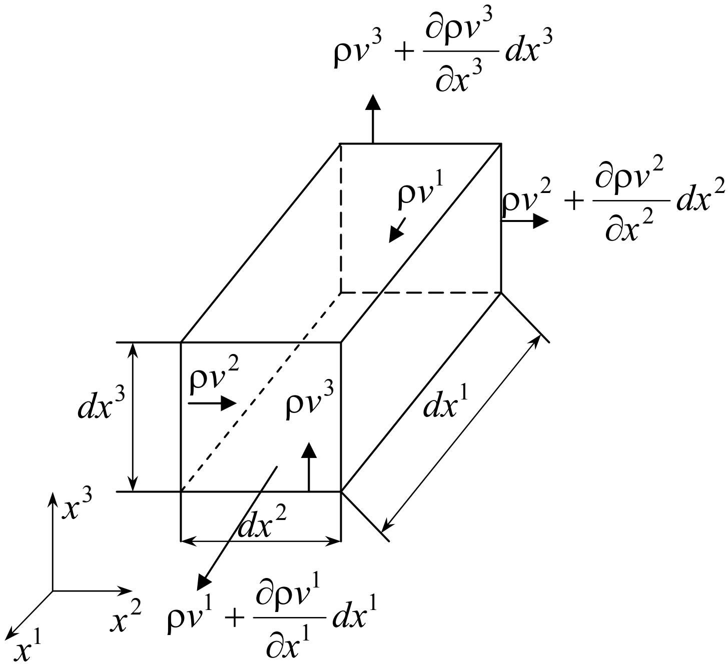


Рисунок 9.1 – До виводу рівняння збереження маси або нерозривності

В основі рівняння нерозривності лежить закон збереження маси. Для нерухомого елементарного об’єму $\left(dx^1 dx^2 dx^3\right)$, який виділено у потоці рідини (див. рисунок 9.1), закон збереження маси можна представити у такій формі

$$\begin{Bmatrix} \text{швидкість} \\ \text{накопичення} \\ \text{маси} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{швидкість} \\ \text{притоку} \\ \text{маси} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \text{швидкість} \\ \text{витоку} \\ \text{маси} \end{Bmatrix}. \tag{9.5}$$

Запишемо рівняння (9.5) для двох граней елементарного об’єму, перпендикулярних осі x^1 за елементарний час dt

$$\left[\rho v^1 dt-\left(\rho v^1+\frac{\partial\rho v^1}{\partial x^1}dx^1\right)dt\right]dx^2dx^3=-\frac{\partial\rho v^1}{\partial x^1}dx^1dx^2dx^3dt\,. \qquad (9.6)$$

Аналогічні вирази також запишемо для двох інших пар граней:
– перпендикулярних осі x^2 за елементарний час dt

$$\left[\rho v^2 dt-\left(\rho v^2+\frac{\partial\rho v^2}{\partial x^2}dx^2\right)dt\right]dx^1dx^3=-\frac{\partial\rho v^2}{\partial x^2}dx^1dx^2dx^3dt\,; \qquad (9.7)$$

– перпендикулярних осі x^3 за елементарний час dt

$$\left[\rho v^3 dt-\left(\rho v^3+\frac{\partial\rho v^3}{\partial x^3}dx^3\right)dt\right]dx^1dx^2=-\frac{\partial\rho v^3}{\partial x^3}dx^1dx^2dx^3dt\,. \qquad (9.8)$$

Швидкість накопичення маси всього елементарного об'єму за елементарний час dt дорівнює

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dx^1dx^2dx^3dt. \qquad (9.9)$$

Підставимо у (9.5) вирази (9.6)–(9.9)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dx^1dx^2dx^3dt=-\left(\frac{\partial\rho v^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\rho v^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\rho v^3}{\partial x^3}\right)dx^1dx^2dx^3dt$$

після скорочення на $dx^1dx^2dx^3dt$, отримаємо рівняння нерозривності у змінних Ейлера

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial\rho v^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\rho v^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\rho v^3}{\partial x^3}\right),$$

або

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v^i}{\partial x^i}=0\ \left(i=1,2,3\right). \qquad (9.10)$$

Рівняння (9.10) є рівнянням збереження маси або нерозривності в декартовій системі координат. Оскільки всі величини в (9.10) є тензорними величинами, то це рівняння можна записати в будь-якій системі через коваріантну похідну

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i\right) = 0 . \tag{9.11}$$

Рівняння (9.11) є інваріантною формою рівняння збереження маси або нерозривності, яке є справедливим для будь-якої системи координат в тому числі і для Ейлерової.

Виконаємо диференціювання (9.11)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \nabla_i \rho + \rho \nabla_i v^i = 0 . \tag{9.12}$$

Використовуючи перехід від частинних похідних до матеріальної похідної (9.32), або навпаки

$$\frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + v^i \nabla_i (\ )$$

отримаємо, що

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \nabla_i \rho . \tag{9.13}$$

В результаті підстановки (9.13) в (9.12), отримуємо, що

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0 . \tag{9.14}$$

Форма запису рівняння збереження маси у вигдяді (9.14) описує швидкість зміни густини, якби її спостерігав дослідник, який рухається разом з середовищем.

Форми запису рівняння збереження маси (9.11) і (9.14) відносяться до форм запису Ейлера.

Інтегральну форму представлення рівняння збереження маси можна записати так

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0. \tag{9.15}$$

Представимо останнє рівняння в *лагранжевій системі*. Рівняння нерозривності також можна записати в *лагранжевій* або матеріальній формі. Для збереження маси вимагається, щоб виконувалося рівняння

$$\int_{V_0} \rho_0(\vec{\xi},0)dV_0 = \int_V \rho(\vec{x},0)dV, \tag{9.16}$$

де $\vec{\xi} = \left(\xi^i, (i = 1,2,3)\right)$ – змінні Лагранжа.

Тут обидва інтеграли взяті по одним і тим же частинкам, тобто V – це об'єм, який тепер займає середовище, яке заповнювало в момент $t = 0$ об'єм V_0. Використовуючи перетворення змінних Ейлера на змінні Лагранжа інтеграл у правій частині (9.16) можна перетворити таким чином

$$\int_{V_0} \rho_0(\vec{\xi},0)dV_0 = \int_{V_0} \rho\left(\vec{x}(\vec{\xi},t)\right)JdV_0 = \int_{V_0} \rho(\vec{\xi},t)JdV_0, \tag{9.17}$$

де $J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ – якобіан переходу від системи відліку Ейлера до системи відліку Лагранжа, який визначається із співвідношення між об'ємами середовища

$$dV = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^1}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^2}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^3}d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = JdV_0,$$

де dV – об'єм елементарного паралелепіпеда обчислюється через змішаний добуток $dV = d\mathbf{x}^1 \times d\mathbf{x}^2 \cdot d\mathbf{x}^3 = \varepsilon_{ijk}dx^1dx^2dx^3$.

Співвідношення (9.17) повинно мати силу для довільного вибраного об'єму V_0, і тому

$$\rho_0 = \rho J. \tag{9.18}$$

Це означає, що добуток ρJ не залежить від часу, тому що об'єм V довільний, тому що

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0\,. \tag{9.19}$$

Рівняння (9.19) є *Лагранжевою диференціальною формою* запису рівняння нерозривності.

Лекція 8.2(10) **Рівняння руху. Форми запису диференціального рівняння руху. Рівняння рівноваги і тензори напружень в Лагранжевих змінних. Тензори Піоли та Коші-Ейлера**

Рівняння руху або рівняння рівноваги. Вивід диференціального рівняння руху базується на законі збереження кількості руху, який можна сформулювати таким чином: кількість руху не змінюється в процесі руху тіла, якщо на нього не діють зовнішні сили.

Розглянемо елементарний об’єм $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ з поверхнею dS (рисунок 10.1). Тоді умови рівноваги для dV можна сформулювати таким чином:

1. Головний вектор поверхневих і масових сил дорівнює нулю

$$\int_S \hat{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{F} dV = 0\,,$$

де $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\vec{n}$ – вектор зовнішньої нормалі; $\vec{F}$ – вектор масових сил; $\rho\vec{F} = \vec{f}$ – вектор об’ємних сил; ρ – густина.

2. Головний момент поверхневих і масових сил дорівнює нулю

$$\int_S \vec{r} \times (\hat{\sigma} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \vec{r} \times \rho \vec{F} dV = 0\,,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор.

При виведенні рівняння руху будемо використовувати Ейлереву систему координат. Для одержання диференціальної форми рівняння рівноваги використаємо розкладання компонент тензора напружень σ^{ij} у ряд Тейлора до першого порядку малості.

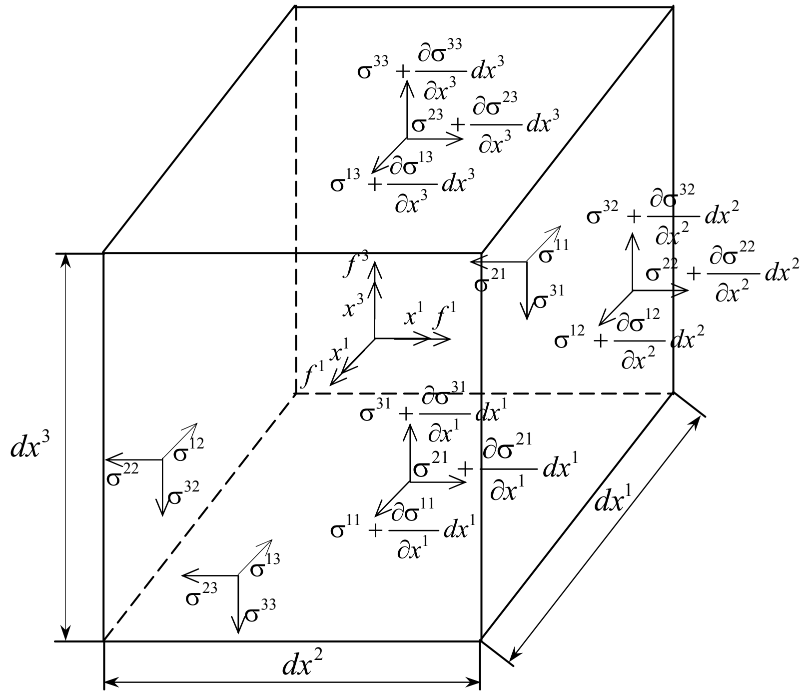
Для виводу диференціального рівняння руху розглянемо баланс сил на гранях елементарного об’єму $\left(dV = dx^1 dx^2 dx^3\right)$ (див. рисунок 10.1).

У відповідності з рисунком 10.1 для напрямку осі x^1 можна записати

$$-\sigma^{11}dx^2dx^3+\left(\sigma^{11}+\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2dx^3-$$

$$-\sigma^{12}dx^1dx^3+\left(\sigma^{12}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2}dx^2\right)dx^1dx^3-$$

$$-\sigma^{13}dx^1dx^2+\left(\sigma^{13}+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^3}dx^3\right)dx^1dx^2+f^1dx^1dx^2dx^3=0,$$



$\sigma^{11},\sigma^{22},\sigma^{33}$ – нормальні напруження, що діють вздовж осей декартової системи координат; $\sigma^{12}=\sigma^{21},\sigma^{13}=\sigma^{31},\sigma^{23}=\sigma^{32}$ – дотичні напруження, які згідно закону збереження моменту імпульсу задовольняють умові симетрії (закону парності дотичних напружень); f^1,f^2,f^3 – компоненти вектора інтенсивності

об'ємного навантаження; $\dfrac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}dx^j$ – прирощення напруження на гранях dV, що отримано за допомогою розкладання σ^{ij} в ряд Тейлора до 1-го порядку малості

Рисунок 10.1 – До виводу диренціального рівняння руху

або після скорочення відповідних членів і ділення рівняння на $dx^1dx^2dx^3$

$$\frac{\partial\sigma^{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial x^3}+f^1=0. \qquad (10.1)$$

Рівняння (10.1) називається диференціальним рівнянням руху відносно осі x^1.

У відповідності з рисунком 10.1 для напрямку осі x^2 можна записати

$$-\sigma^{21}dx^2dx^3+\left(\sigma^{21}+\frac{\partial\sigma^{21}}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2dx^3-$$
$$-\sigma^{22}dx^1dx^3+\left(\sigma^{22}+\frac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2}dx^2\right)dx^1dx^3-$$
$$-\sigma^{23}dx^1dx^2+\left(\sigma^{23}+\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^3}dx^3\right)dx^1dx^2+f^2dx^1dx^2dx^3=0,$$

або після скорочення відповідних членів і ділення рівняння на $dx^1dx^2dx^3$

$$\frac{\partial\sigma^{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{23}}{\partial x^3}+f^2=0. \qquad (10.2)$$

Рівняння (10.2) називається диференціальним рівнянням руху відносно осі x^2.

У відповідності з рисунком 10.1 для напрямку осі x^3 можна записати

$$-\sigma^{31}dx^2dx^3+\left(\sigma^{31}+\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial x^1}dx^1\right)dx^2dx^3-$$
$$-\sigma^{32}dx^1dx^3+\left(\sigma^{32}+\frac{\partial\sigma^{32}}{\partial x^2}dx^2\right)dx^1dx^3-$$
$$-\sigma^{33}dx^1dx^2+\left(\sigma^{33}+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial x^3}dx^3\right)dx^1dx^2+f^3dx^1dx^2dx^3=0,$$

або після скорочення відповідних членів і ділення рівняння на $dx^1dx^2dx^3$

$$\frac{\partial\sigma^{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma^{32}}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma^{33}}{\partial x^3}+f^3=0. \qquad (10.3)$$

Рівняння (10.3) називається диференціальним рівнянням руху відносно осі x^3.

Згідно закону збереження моменту імпульсу можна записати, що

$$\Sigma M_{x^1} = 0; \ \Sigma M_{x^2} = 0; \ \Sigma M_{x^3} = 0.$$

Форми запису диференціального рівняння руху. З врахуванням правила Ейнштейна систему рівнянь (10.1)–(10.3) можна записати в компактній тензорній формі

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i = 0. \qquad (10.4)$$

Оскільки у (10.4) входять тільки тензори, то його можна переписати в інваріантній формі (тобто, незалежній від координатної системи формі), замінюючи при цьому частинну похідну на коваріантну похідну

$$\nabla_j \sigma^{ij} + f^i = 0 \ \text{ або } \ \sigma^{ij}_{,j} + f^i = 0. \qquad (10.5)$$

У векторній формі рівняння (10.5) має вигляд

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \text{ або } \operatorname{div}\hat{\sigma} + \mathbf{f} = 0. \qquad (10.6)$$

Перевіримо правильність запису (10.6) за допомогою переходу до компонент тензора напружень:

$$\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e}_m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

$$\mathbf{f} = \vec{f} = f^i\mathbf{e}_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\hat{\sigma} = \nabla_m \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

Тобто, можна тепер записати

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i = 0, \quad \text{або } \sigma^{ij}_{,j} + f^i = 0,$$

що і треба було показати.

Рівняння рівноваги і тензори напружень в Лагранжевих змінних. Виведені диференціальні рівняння рівноваги (10.4) містять похідні компонент тензора напружень по ейлеревим змінним x^i. В нелінійній механіці деформованого твердого тіла доцільно перейти до змінних Лагранжа, в яких форма тіла, як правило, задана. Виконаємо цей перехід в інтегральній умові рівноваги в проекціях на осі Ox^j

$$\int_S \sigma^{ij} n_j dS + \int_V f^i(\vec{x}) dV = 0, \tag{10.7}$$

де n_j – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла; $f^i = \rho(\vec{x}) F^i(\vec{x})$ – компоненти вектора об'ємної сили; F^i – компоненти вектора масової сили; V – об'єм тіла; S – поверхня тіла; $\vec{x} = \left(x^i, (i = 1,2,3)\right)$ – змінні Ейлера.

Звідки з врахуванням формули Остроградського-Гауса витікають вже відомі нам рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho F^i = 0. \tag{10.8}$$

З іншого боку в формулі (10.7) можна перейти до інтегрування по області V_0 (тобто до початкового об'єму тіла)

$$\int_{S_0} p^{ij} n_j^0 dS_0 + \int_{V_0} \rho(\vec{\xi}) F^i(\vec{\xi}) J dV_0 = 0, \tag{10.9}$$

де $J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right| = \frac{dx}{d\xi} = \frac{\rho_0}{\rho}$ – якобіан переходу від системи відліку Ейлера до системи відліку Лагранжа, який визначається із співвідношення між об'ємами середовища $dV = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^3} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = J dV_0$; $\vec{\xi} = \left(\xi^i, (i = 1,2,3)\right)$ – змінні Лагранжа.

Рівність (10.9) виражає закон збереження маси $\rho_0 d\xi = \rho dx$, $\vec{n}^0$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S_0 до початку деформації і вводиться новий тензор p^{ij}, для компонент якого виконується рівність

$$p^{ij} n_j^0 dS_0 = \sigma^{ij} n_j dS, \left(i, j = 1,2,3\right). \qquad (10.10)$$

Відмітимо, що компоненти густини масової сили F^i у формулах (10.7) і (10.9) лишаються однаковими, тільки в першому випадку вони розглядаються як функції ейлеревих змінних. а в другому – Лагранжевих.

Перепишемо (10.9) у вигляді

$$\int_{S_0} p^{ij} n_j^0 dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 F^i d\xi = 0, \qquad (10.11)$$

і скористаємося теоремою Остроградського-Гауса. В результаті отримуємо диференціальне рівняння рівноваги в Лагранжевих змінних

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial \xi^j} + \rho_0 F^i = 0. \qquad (10.12)$$

Тензор p^{ij} називається тензором Піоли або несиметричним тензором Лагранжа. Залежність між несиметричним тензором Піоли і симетричним тензором Коші-Ейлера має вигляд

$$p^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \sigma^{pj}, \qquad (10.13)$$

або в матричній формі

$$\hat{p} = \frac{\rho_0}{\rho} J^{-1} \hat{\sigma}. \qquad (10.14)$$

Окрім несиметричного тензора $\hat{p}$ вводиться симетричний тензор напружень Лагранжа або тензор Кірхгофа з компонентами

$$K^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_p} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_q} \sigma^{pq}, \tag{10.15}$$

Тензор Піоли виражається через тензор Кірхгофа у вигляді співвідношення

$$p^{ij} = K^{ip} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^p}, \text{ або } \hat{p} = \hat{K} J. \tag{10.16}$$

В лінійній теорії тензори Кірхгофа і Піоли практично не відрізняються від тензора Коші-Ейлера

$$K^{ij} \approx p^{ij} \approx \sigma^{ij}.$$

В завершенні відмітимо, що диференціальні рівняння рівноваги записані у ейлеревих змінних (10.8) і у змінних Лагранжа (10.12) можна представити в без індексній формі, яка витікає з інваріантної форми (10.5).

Рівняння рівноваги в Ейлеревих змінних в безіндексній формі має вигляд

$$\nabla_x \hat{\sigma} + \rho \vec{F} = 0, \tag{10.17}$$

а у Лагранжевих змінних –

$$\nabla_\varsigma \hat{p} + \rho_0 \vec{F} = 0. \tag{10.18}$$

Лекція 8.3(11) **Зовнішні сили на поверхні тіла. Зв'язок між тензором напружень і вектором напружень. Нормальне зусилля і напруження на поверхні. Дотичне напруження на поверхні. Принцип Даламбера. Закон збереження кількості руху (імпульсу). Кількість руху, імпульс**

Зовнішні сили на поверхні тіла. У відповідності до III закону Ньютона відомо, що сума внутрішніх і зовнішніх сил на поверхні тіла дорівнює нулю (що є відображенням принципу парності сил, рисунок 11.1).

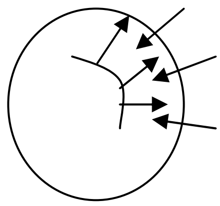
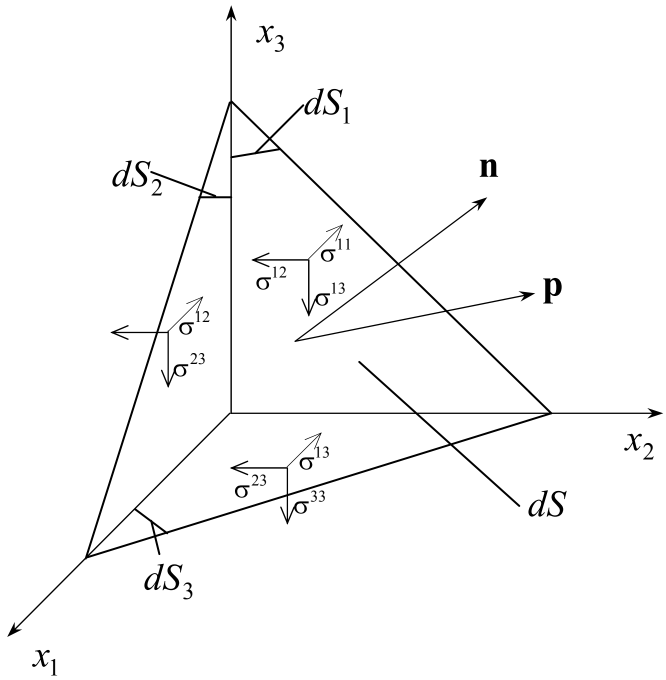


Рисунок 11.1 – Рівновага сил на поверхні тіла

Зв'язок між тензором напружень і вектором напружень. Визначення напружень на похилій площині. Розглянемо рисунок 11.2, за допомогою якого визначимо компоненти зусилля $\mathbf{p}$, яке задано на поверхні dS



dS – елементарна площа зовнішньої площини,
$dS_1 = n_1 dS$, $dS_2 = n_2 dS$, $dS_3 = n_3 dS$,
n_1, n_2, n_3 – проекції вектора нормалі на відповідні осі координат
Рисунок 11.2 – До визначення компонент зусилля $\mathbf{p}$,
заданого на поверхні dS

Запишемо рівняння для суми проекцій сили на координатні осі (див. рисунок 11.2):

– вісь x^1

$$\Sigma x^1 = -\sigma^{11} dS_1 - \sigma^{12} dS_2 - \sigma^{13} dS_3 + p^1 dS = 0, \tag{11.1}$$

де p^1 – проекція вектора $\mathbf{p}$ на вісь x^1;

підставимо значення складових dS, що записані через проекції нормалі n_1, n_2, n_3

$$-\sigma^{11}n_1 dS - \sigma^{12}n_2 dS - \sigma^{13}n_3 dS + p^1 dS = 0,$$

після скорочення останнього рівняння на dS, отримаємо

$$-\sigma^{11}n_1 - \sigma^{12}n_2 - \sigma^{13}n_3 = p^1; \qquad (11.2)$$

– вісь x^2

$$\Sigma x^2 = -\sigma^{21}dS_1 - \sigma^{22}dS_2 - \sigma^{23}dS_3 + p^2 dS = 0,$$

де p^2 – проекція вектора $\mathbf{p}$ на вісь x_2;

$$\begin{gathered}-\sigma^{21}n_1 dS - \sigma^{22}n_2 dS - \sigma^{23}n_3 dS + p^2 dS = 0, \\ -\sigma^{21}n_1 - \sigma^{22}n_2 - \sigma^{23}n_3 = p^2;\end{gathered} \qquad (11.3)$$

– вісь x^3

$$\Sigma x^3 = -\sigma^{31}dS_1 - \sigma^{32}dS_2 - \sigma^{33}dS_3 + p^3 dS = 0,$$

де p^3 – проекція вектора $\mathbf{p}$ на вісь x_3,

$$\begin{gathered}-\sigma^{31}n_1 dS - \sigma^{32}n_2 dS - \sigma^{33}n_3 dS + p^3 dS = 0, \\ -\sigma^{31}n_1 - \sigma^{32}n_2 - \sigma^{33}n_3 = p^3.\end{gathered} \qquad (11.4)$$

Рівняння (11.2)–(11.4) перепишемо у компактному вигляді

$$\sigma^{ij}n_j\Big|_{S_p} = p^i, \qquad (11.5)$$

де S_p – площа поверхні тіла, на якій задана зовнішня сила $\mathbf{p}$.

Векторна форма рівняння (11.5) записується як

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n}\big|_{S_p} = \vec{p} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\big|_{S_p} = \mathbf{p}. \tag{11.6}$$

Перевірка правильності запису (11.6) з використанням тензорного супроводу:

$$\sigma^{ij} n_j = p^i \to \sigma^{ij} n_j \mathbf{e}_i = p^i \mathbf{e}_i,$$

$$\sigma^{ij} n_j = \sigma^{ij} \mathbf{e}_j \cdot n_m \mathbf{e}^m = \sigma^{ij} n_m \left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^m\right) = \sigma^{ij} n_m \delta_j^m = \sigma^{ij} n_j,$$

тому що в декартовій системі координат $\left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^m\right) = \delta_j^m$, де δ_j^m – символ Кронекера.

Тоді можна записати, що

$$\sigma^{ij} n_j \mathbf{e}_i = p^i \mathbf{e}_i \to \left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) \cdot \left(n_m \mathbf{e}^m\right) = p^i \mathbf{e}_i \to \hat{\sigma} \cdot \vec{n}\big|_{S_p} = \vec{p},$$

тому що $\left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) = \hat{\sigma}$, а $\left(n_m \mathbf{e}^m\right) = \vec{n}$.

Визначимо *нормальне зусилля на поверхні* dS

$$p_n = \sqrt{\left(p^1\right)^2 + \left(p^2\right)^2 + \left(p^3\right)^2};$$

нормальне напруження на поверхні dS

$$\sigma_n = p^i n_i = p^1 n_1 + p^2 n_2 + p^3 n_3 \quad \text{або} \quad \sigma_n = \left(\sigma^{ij} n_j\right) n_i;$$

дотичне напруження на поверхні dS

$$\tau_n = \sqrt{\left(p_n\right)^2 - \left(\sigma_n\right)^2}.$$

З II закону Ньютона витікає, що, якщо тіло рухається нерівномірно, то на нього діє зовнішня сила, яка дорівнює добутку маси m на прискорення $\mathbf{a}$.

Принцип Даламбера. Всі сили, що діють на тіло, будуть знаходитись у рівновазі, якщо до цих сил додати сили інерції, які дорівнюють

$$\vec{J} = m\vec{a} \quad \text{або} \quad \mathbf{J} = m\mathbf{a},$$

тобто

$$\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i + J^i = 0, \qquad (11.7)$$

де

$$J^i = -\rho a^i = -\rho \frac{d^2 u^i}{dt^2}, \qquad (11.8)$$

де a^i – проекція вектора прискорення на вісь x^i, u^i – проекція вектора переміщення на вісь x^i, ρ – густина, t – час.

З врахуванням (11.8) рівняння (11.7) приймає вигляд

$$\rho \frac{d^2 u^i}{dt^2} = \frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i. \qquad (11.9)$$

Рівняння (11.9) називається диференціальним рівнянням руху суцільного середовища. Це рівняння є справедливим для тіл будь-якої природи: твердих тіл, рідин та газів.

Розглянемо рівняння для тіла в цілому

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i, \qquad (11.10)$$

де $v^i = \frac{du^i}{dt}$ – компонента швидкості руху тіла.

Виконаємо інтегрування (11.10) по об’єму тіла V, отримаємо

$$\int_V \rho \frac{dv^i}{dt} dV = \int_V \frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j} dV + \int_V f^i dV. \qquad (11.11)$$

Скориставшись формулою Остроградського-Гауса (див. лекцію №9, (9.1)) і (11.5) можна отримати:

при $\rho dV = const$ будемо мати

$$\int_V \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} dV = \int_S \sigma^{ij} n_j dS = \int_S p^i dS\,;$$
$$\rho \frac{dv^i}{dt} dV = \frac{d}{dt} v^i \rho dV\,;$$
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v^i dV = \int_V f^i dV + \int_S p^i dS\,. \qquad (11.12)$$

Помножимо праву і ліву частини (11.12) на вектор супроводу тензора $\mathbf{e}_i$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v^i \mathbf{e}_i dV = \int_V f^i \mathbf{e}_i dV + \int_S p^i \mathbf{e}_i dS\,. \qquad (11.13)$$

Оскільки $v^i \mathbf{e}_i = \vec{v} = \mathbf{v}$, $f^i \mathbf{e}_i = \vec{f} = \mathbf{f}$, $p^i \mathbf{e}_i = \vec{p} = \mathbf{p}$, то рівняння (11.13) дозволяє перейти до векторної форми запису

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{f} dV + \int_S \vec{p} dS\,, \qquad (11.14)$$

або

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{p} dS\,, \qquad (11.15)$$

де $\rho\mathbf{v}$ – *кількість руху*; $\int \rho\mathbf{v}$ – *імпульс*.

Вираз (11.14) є інтегральною формою формулювання закону *збереження кількості руху (або імпульсу)*.

Імпульс тіла при відсутності зовнішніх сил є константою, яка не залежить від процесів, що відбуваються в тілі.

Кількість руху не змінюється в процесі руху тіла, якщо на нього не діють зовнішні сили.

Лекція 8.4(12) **Закон збереження механічної енергії. Оператори подвійного (кратного) скалярного добутку двох тензорів. Симетричність тензорів напружень**

Закон збереження механічної енергії. Помножимо ліву і праву частини рівняння (11.10) (див. лекцію №11) на швидкість (коваріантну її компоненту), отримаємо

$$\rho \frac{dv^i}{dt} v_i = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} v_i + f^i v_i . \qquad (12.1)$$

Оскільки рівняння (11.7), (11.10) (див. лекцію №11) є виразом II закону Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, то можна стверджувати, що рівняння (12.1) є рівнянням потужності. Оскільки

сила × швидкість = потужність

або в одиницях вимірювання фізичних величин – Н·м/с=Дж/с=Вт.

Запишемо інтегральну форму рівняння (12.1)

$$\int_V \rho \frac{dv^i}{dt} v_i dV = \int_V \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} v_i dV + \int_V f^i v_i dV . \qquad (12.2)$$

Перепишемо ліву частину (12.2) у вигляді

$$\int_V \rho \frac{dv^i}{dt} v_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v^i v_i}{2} dV , \qquad (12.3)$$

де $\rho \frac{v^i v_i}{2}$ – об'ємна густина кінетичної енергії, Дж/м^3 .

Розглянемо похідну рівняння (12.2)

$$\frac{\partial \left(\sigma^{ij} v_i\right)}{\partial x^j} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} v_i + \sigma^{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j}, \text{ звідки}$$
$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} v_i = \frac{\partial \left(\sigma^{ij} v_i\right)}{\partial x^j} - \sigma^{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} . \qquad (12.4)$$

Перепишемо рівняння (12.4) в інтегральній формі і застосуємо до нього формулу Остроградського-Гауса

$$\int_V \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} v_i dV = \int_V \frac{\partial \left(\sigma^{ij} v_i\right)}{\partial x^j} dV - \int_V \sigma^{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} dV =$$
$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sigma^{ij} v_i\right) dV - \int_V \sigma^{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} dV =$$
$$= \int_S \sigma^{ij} v_i n_j dS - \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S p^i v_i dS - \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV, \qquad (12.5)$$

де $\sigma^{ij} n_j = p^i$; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – тензор швидкості деформації.

Розглянемо більш детально звідки береться величина $\dot{\varepsilon}_{ij}$ (тут точка означає похідну за часом)

$$\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \sigma^{ji}\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma^{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \sigma^{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right) = \sigma^{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right),$$

тоді можна записати, що $v_i = \dfrac{du^i}{dt}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)\right] = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{ij}, \qquad (12.6)$$

де $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$ – тензор деформацій (тензор нескінченно малих деформацій Ейлера).

Підставимо (12.3) і (12.5) у (12.2)

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{v^i v_i}{2} dV = -\int_V \sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V f^i v_i dV + \int_S p^i v_i dS. \qquad (12.7)$$

Інтегральне рівняння (12.7) є математичним формулюванням *закону збереження механічної енергії* – зміна (або швидкість зміни) кінетичної енергії дорівнює різниці між потужністю зовнішніх і внутрішніх сил.

Тут величина $\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$ є енергією дисипації (енергетичним тензором), або частиною механічної енергії, яка переходь у теплову енергію.

Кінетична енергія залежить від процесів, які відбуваються в середені тіла.

Перепишемо (12.7) у векторній формі.

Розглянемо попередньо добутки з (12.7):

$$v^i v_i = v^i \mathbf{e}_i \cdot v_i \mathbf{e}^i = \vec{v} \cdot \vec{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \qquad (12.8)$$

$$\left.\begin{aligned} f^i v_i &= \vec{f} \cdot \vec{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \\ p^i v_i &= \vec{p} \cdot \vec{v} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}\right. \qquad (12.9)$$

$$\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \hat{\sigma} \cdot\cdot \hat{\dot{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \qquad (12.10)$$

Вираз (12.10) є представленням густини енергії деформації в тензорному вигляді. Тут оператори $(\cdot\cdot)$ або $(:)$ є *операторами подвійного (кратного) скалярного добутку двох тензорів*. Оскільки $\hat{\sigma}$ і $\hat{\dot{\varepsilon}}$ є тензорами 2-го рангу, то результатом їх подвійного скалярного добутку буде скаляр)[9]

$$\begin{aligned} s = \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} = \sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma^{11}\varepsilon_{11} + \sigma^{12}\varepsilon_{12} + \sigma^{13}\varepsilon_{13} + \\ \sigma^{21}\varepsilon_{21} + \sigma^{22}\varepsilon_{22} + \sigma^{23}\varepsilon_{23} + \\ \sigma^{13}\varepsilon_{31} + \sigma^{32}\varepsilon_{32} + \sigma^{33}\varepsilon_{33}. \end{aligned} \qquad (12.11)$$

Тоді можна записати еквівалентні форми *закону збереження механічної енергії* у векторному вигляді:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2} dV = -\int_V \hat{\sigma}\cdot\cdot\hat{\dot{\varepsilon}} dV + \int_V \vec{f}\cdot\vec{v} dV + \int_S \vec{p}\cdot\vec{v} dS, \qquad (12.12)$$

або

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2} dV = -\int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} dS. \qquad (12.13)$$

Симетричність тензорів напружень. Скористаємось формулою для головних моментів поверхневих і масових сил

$$\int_S \vec{r}\times(\hat{\sigma}\cdot\vec{n}) dS + \int_V \vec{r}\times\rho\vec{F} dV = 0. \qquad (12.14)$$

де $\hat{\sigma}\cdot\vec{n} = \sigma^{ij} n_j = p^i$.

В проекції на вісь Ox^1 (12.14) перепишеться у вигляді

$$\int_S \left(x^2 p^3 - x^3 p^2\right) dS + \int_V \rho\left(x^2 F^3 - x^3 F^2\right) dV = 0, \qquad (12.15)$$

---

[9] На відміну від тензорів однакового рангу, результатом подвійного (кратного) скалярного добутку двох тензорів різного рангу, наприклад, 2-го і 3-го буде вектор: $\mathbf{a} = \mathbf{T} : \mathbf{P}$ з компонентами $a_i = T_{jk} P_{jki}$. Такий добуток не є комутативним.

де $\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ p^1 & p^2 & p^3 \end{vmatrix} = x^2 p^3 - x^3 p^2$ і $\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = x^2 F^3 - x^3 F^2$.

Тепер скористуємося формулою Остроградського-Гауса і перетворимо інтеграл по поверхні в (12.15) на об'ємний

$$\int_S \left(x^2 p^3 - x^3 p^2\right) dS \to \int_V \left(x^2 \sigma^{i3} n_3 - x^3 \sigma^{j2} n_2\right) dS \to \int_V \left(\frac{\partial\left(x^2 \sigma^{i3}\right)}{\partial x^i} - \frac{\partial\left(x^3 \sigma^{j2}\right)}{\partial x^j} \right) dV.$$

Тому можна записати, що

$$\int_V \left(\frac{\partial\left(x^2 \sigma^{i3}\right)}{\partial x^i} - \frac{\partial\left(x^3 \sigma^{j2}\right)}{\partial x^j} + \rho\left(x^2 F^3 - x^3 F^2\right) \right) dV = 0. \qquad (12.16)$$

Виконаємо диференціювання і прийдемо до рівності

$$\int_V \left(x^2 \frac{\partial \sigma^{i3}}{\partial x^i} + \sigma^{23} - x^3 \frac{\partial \sigma^{j2}}{\partial x^j} - \sigma^{32} + \rho\left(x^2 F^3 - x^3 F^2\right) \right) dV = 0. \qquad (12.17)$$

Тепер виконаємо групування, що містять члени x^2 і x^3

$$\int_V \left[x^2 \left(\frac{\partial \sigma^{i3}}{\partial x^i} + \rho F^3 \right) + \sigma^{23} - x^3 \left(\frac{\partial \sigma^{j2}}{\partial x^j} + \rho F^2 \right) - \sigma^{32} \right] dV = 0. \qquad (12.18)$$

Вирази в круглих скобках (12.18) дорівнюють нулю в силу рівнянь рівноваги, тому отрмуємо, що

$$\int_V \left(\sigma^{23} - \sigma^{32}\right) dV = 0. \qquad (12.19)$$

Область V є довільною, тому можна записати, що $\sigma^{23} = \sigma^{32}$. Аналогічним чином можна отримати рівності $\sigma^{13} = \sigma^{31}$ і $\sigma^{12} = \sigma^{21}$. Таким чином $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$ – тензор напружень є симетричним.

Треба відмітити, що властивість симетрії тензора напружень називають законом парності дотичних напружень і формулюють так:

дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках та направлені по нормалі до лінії їх перетину, є рівними.

Якщо в умову рівноваги (12.14) ввести об’ємні та поверхневі моменти, то тензор напружень напружень буде вже несиметричним. Теорія суцільного середовища, в якій враховуються поверхеві або об’ємні моменти, називається моментною.

Лекція 8.5(13) **Закон збереження повної енергії. Теплоємність. Закон балансу ентропії. II закон термодинаміки. Рівняння теплопровідності. Основна система рівнянь МСС. Фізичні рівняння стану. Геометричні рівняння. Закон Фур’є. Рівняння теплопровідності. Геометричні рівняння Коші. Швидкості деформації**

Закон збереження повної енергії. Математичне формулювання *закону збереження повної енергії* у векторній формі має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho w dV = \int_V \vec{f}\cdot\vec{v}dV + \int_S \vec{p}\cdot\vec{v}dS + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS\,, \qquad (13.1)$$

або

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\varepsilon dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho w dV = \int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dV + \int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}dS + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS\,. \qquad (13.2)$$

Закон збереження повної енергії можна сформулювати таким чином: зміна у часі внутрішньої енергії (ε) плюс зміна кінетичної енергії (w) дорівнює потужності об’ємних сил $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})$, потужності поверхневих сил $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})$, плюс теплова енергія, що надходить з об’ємних джерел теплоти і плюс теплота, що надходить через поверхню.

q_v – енергія, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи.

Внутрішня енергія (ε) – це енергія, яку має середовище і, яка може бути звільнена в результаті фізичних або хімічних перетворень.

Коли ми досліджуємо процеси, то оскільки, в рівняння енергії входить похідна від внутрішньої енергії, то будемо розглядати тільки ті види внутрішньої енергії, які змінюються в тому процесі, який розглядається. У зворотному випадку, якщо енергія не змінюється, то похідна від неї дорівнює нулю.

Процеси, які розглядаються у даному курсі МСС, пов'язані тільки з механічною і тепловою енергією.

Внутрішня енергія тіла пропорційна його температурі

$$\varepsilon = c_v T + const, \tag{13.3}$$

де c_v – коефіцієнт пропорційності – масова ізохорна теплоємність середовища, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К. Під константою в (13.3) розуміються інші види внутрішньої енергії.

Визначення масової *теплоємності*: теплоємність це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти (теплової енергії), яку треба надати 1 кг тіла, щоб підвищити його температуру на 1 К.

Враховуючи (13.3), математичне формулювання *закону збереження повної енергії* можна представити у виді

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho c_v T dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho w dV = \int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} dS + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS. \tag{13.4}$$

Для однозначності рівняння (13.4) до нього треба додати початкові (оскільки рівняння нестаціонарне) і граничні умови. Початкові умови включають в себе розподіл польових характеристик тіла в початковий момент часу (тобто описують початковий стан середовища):

$$\hat{\sigma} = \varphi_\sigma(\mathbf{x}) \text{ або } \mathbf{u} = \varphi_u(\mathbf{x}), \tag{13.5}$$

$$T = \varphi_T(\mathbf{x}), \tag{13.6}$$

де $\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$.

Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується (тобто описують актуальний стан середовища):

$$\hat{\sigma}\cdot\mathbf{n}\big|_{S_p} = \mathbf{p}, \tag{13.7}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\big|_{S_q} = -q_s, \tag{13.8}$$

де $\mathbf{q}$ – тепловий потік – кількість теплоти, що протікає через одиницю площі площину перпендикулярну до неї за одиницю часу, Вт/м^2;

$\mathbf{n}$ – нормаль до поверхні тіла. В (13.8) записано знак «–», тому що теплота розсіюється у зовнішнє середовище.

Для розв'язання задач МСС достатньо знати три закони, які були розглянуті раніше. Однак для описання незворотних процесів використовується ще *закон балансу ентропії*: ентропія замкнутої системи при будь-яких процесах зростає (*II закон термодинаміки,* див. лекцію №1)

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \tag{13.9}$$

де $\int dS = S$ – ентропія – ступінь упорядкованності системи. В (13.9) для зворотних процесів справедливий знак «=», а для незворотних «>».

Будь-які перетворення енергії пов'язані з тим, що її частина переходить в теплоту.

Запишемо рівняння для кінетичної енергії

$$\frac{d}{dt}\int_V w dV = -\int_V \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} dV + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS\,, \tag{13.10}$$

де $w = \rho \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}$ – об'ємна кінетична енергія, Дж/м^3.

Віднімемо від рівняння для повної енергії (13.2) рівняння для кінетичної енергії (13.10). В результаті отримаємо *рівняння теплопровідності* або рівняння притоку теплоти

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho c_v T dV = \int_V \hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}} dV + \int_V q_v dV + \int_S q_s dS\,. \tag{13.11}$$

де $\hat{\sigma} : \hat{\dot{\varepsilon}}$ – дисипативна функція.

В рівнянні (13.11) ліворуч записано зміну внутрішньої енергії в часі, а праворуч: перший доданок визначає енергію дисипації механічної енергії, другий і третій об'ємні і поверхневі джерела теплоти.

Основна система рівнянь МСС. Основна система рівнянь включає такі рівняння: збереження маси (9.15) (див. лекцію №9), збереження кількості руху (11.14) (див. лекцію №11) і теплопровідності (13.11):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0; \\ \dfrac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_V \mathbf{f}dV + \int\limits_S \mathbf{p}dS; \\ \dfrac{d}{dt}\int\limits_V \rho c_v T dV = \int\limits_V \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} dV + \int\limits_V q_v dV + \int\limits_S q_s dS. \end{cases} \qquad (13.12)$$

Для того, щоб отримати замкнуту систему рівнянь треба додати до системи (13.12) два види рівнянь: *фізичні рівняння стану*, *геометричні рівняння*.

Фізичні рівняння стану пов’язують між собою фізичні параметри середовища, наприклад, такі: кількість теплової енергії з градієнтом температури, напруження з деформацією.

При розгляді рівняння збереження енергії першим фізичним законом є закон, який зв’язує тепловий потік з градієнтом температури і називається *законом Фур’є*

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T . \qquad (13.13)$$

Закон Фур’є можна сформулювати таким чином: тепловий потік прямопропорційний градієнту температури ∇T. Коефіцієнтом пропорційності тут є теплопровідність λ)[10]. Праворуч в (13.13) стоїть знак мінус, тому що за означенням градієнт температури направлений перпендикулярно ізолініям температур в сторону збільшення температур, а тепловий потік, навпаки, в сторону їх зменшення.

Запишемо деякі перетворення, що пов’язані з рівнянням (13.13):

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -q_s \rightarrow -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} = -q_s$$

або в інтегральному вигляді

$$\int\limits_S q_s dS = -\int\limits_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = -\int\limits_S \left(-\lambda \nabla T\right) \cdot \mathbf{n} dS .$$

[10] Фізичний зміст *теплопровідності*: теплопровідність це фізична величина, яка чисельно дорівнює тепловому потоку, який передається між ізотермічними поверхнями тіла при відстані між ними в 1 м і при різниці температур між ними в 1 К.

До останнього виразу застосуємо теорему Остроградського-Гауса, щоб перейти від інтеграла по поверхні до інтеграла по об'єму

$$-\int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dS = -\int_V \nabla\cdot\mathbf{q}dV = -\int_V \nabla\cdot\left(-\lambda\nabla T\right)dV = \int_V \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right)dV\,. \qquad (13.14)$$

Підставимо (13.14) в рівняння теплопровідності (13.11), отримаємо

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho c_v T dV = \int_V \hat{\sigma}:\hat{\dot{\varepsilon}}dV + \int_V q_v dV + \int_V \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right)dV\,. \qquad (13.15)$$

Рівняння (13.15) буде справедливим тоді і тільки тоді, коли його підінтегральні вирази будуть задовольняти наступному диференціальному рівнянню

$$C_v\frac{dT}{dt} = \hat{\sigma}:\hat{\dot{\varepsilon}} + \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right) + q_v\,. \qquad (13.16)$$

Рівняння (13.16) є диференціальним *рівнянням теплопровідності*.

Тепер запишемо основну систему рівнянь МСС в диференціальній формі

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0; \\ \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\hat{\sigma} + \mathbf{f}; \\ C_v\dfrac{dT}{dt} = \hat{\sigma}:\hat{\dot{\varepsilon}} + \nabla\cdot\left(\lambda\nabla T\right) + q_v, \end{cases} \qquad (13.17)$$

де $C_v = \rho c_v$ – об'ємна теплоємність, Дж/(м^3·К).

Система рівнянь (13.17) має 16 невідомих $\left(\rho, \mathbf{v}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}\right)$ – 1+3+6+6=16. Завдяки симетрії тензорів напружень і деформацій $\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}$ – кількість невідомих в системі (13.17) зменшується на 6.

Геометричні рівняння. Фундаментальним тензором є метричний тензор (див. лекцію №4). Тому за критерій деформації тіла виберемо зміну величини метричного тензора

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\,, \qquad (13.18)$$

де $\mathbf{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор положення точки тіла в просторі.

Під дією зовнішніх або внутрішніх сил точки тіла переміщуються на вектор $\mathbf{u}$, що спричинює зміну їх положення у просторі. Тобто можна записати, що

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u},$$

тоді базисні вектори перепишуться у виді

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i + \nabla_i u^m \mathbf{e}_m$$

і, відповідно, метричний тензор

$$\begin{aligned} g_{ij}^* &= \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* = \left(\mathbf{e}_i + \nabla_i u^m \mathbf{e}_m\right) \cdot \left(\mathbf{e}_j + \nabla_j u^n \mathbf{e}_n\right) = \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \nabla_i u^m g_{mj} + \nabla_j u^n g_{ni} + \nabla_i u^m \nabla_j u^n g_{mn} = \\ &= g_{ij} + \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^m \nabla_j u_m. \end{aligned}$$

На підставі останнього виразу можна записати *геометричні рівняння Коші*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(g_{ij}^* - g_{ij}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^m \nabla_j u_m\right). \end{aligned} \qquad (13.19)$$

Тут ε_{ij} є компонентами тензора скінчених деформацій.

При розгляді конструкційних матеріалів приймається, що деформації є малими величинами $<< 1$. Цей чинник дозволяє спростити вираз (13.19), відкинувши найменший член. В результаті отримаємо

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right), \qquad (13.20)$$

або $\hat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla\right).$

Швидкості деформації. $d\mathbf{u} = \mathbf{v}dt$, звідки $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ – вектор швидкості переміщень. Тоді можна записати для швидкості деформації

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j dt + \nabla_j v_i dt + \nabla_i v^m \nabla_j v_m (dt)^2\right). \tag{13.21}$$

Відкидаючи останній доданок з другим порядком малості у (13.21), отримуємо

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)dt, \tag{13.22}$$

або $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)$, (13.23)

або у векторній формі з врахуванням нелінійних членів

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T + (\nabla\mathbf{v})^T \cdot (\nabla\mathbf{v})\right), \tag{13.24}$$

або у векторній формі лінійний тензор деформацій Коші

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\right) \text{ або } \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\right). \tag{13.25}$$