ДАДАТОК В

Приклади розв’язання типових задач МСС

Задача В.1 Ввести просторову систему координат і Лагранжеві координати частинок та знайти закон руху у таких випадках:

а) тверде тіло рухається поступально зі швидкістю постійною за напрямком та величиною *v*;

б) тверде тіло обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю ω.

Розв’язок

Введемо в просторі декартову систему координат (x_1, x_2, x_3). За Лагранжеві координати частинки візьмемо координати (ξ_1, ξ_2, ξ_3) точки простору, в якому частинка знаходилась в момент часу $t = 0$.

а) Нехай вісь x_1 направлена за вектором швидкості v. Рух полягає в переносі тіла в напрямку осі x_1 на відстань vt. Тоді закон руху можна записати у виді

$$x_1 = vt + \xi_1,\ x_2 = \xi_2,\ \ x_3 = \xi_3,$$

що і треба було знайти.

б) *Перший розв’язок.* Нехай вісь x_3 направлена вздовж осі обертання, яка є нерухомою у просторі. Тоді рух полягає в повороті навколо неї на кут ωt. Перетворення вектора початкового положення частинки у вектор її положення в момент часу t здійснюється при такому повороті ортогональної матриці

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Тому закон руху має вид (в результаті добутку матриці на вектор)
$x_1 = \xi_1 \cos\omega t - \xi_2 \sin\omega t$, $x_2 = \xi_1 \sin\omega t + \xi_2 \cos\omega t$, $x_3 = \xi_3$.

Другий розв’язок. Відповідність $F \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$ векторів евклідового простору і трійок чисел не обов’язково встановлюється у вигляді

$$a_1 = x_1,\ a_2 = x_2,\ a_3 = x_3,$$

де (x_1, x_2, x_3) – компоненти радіуса вектора $\mathbf{r}$ в декартовій системі координат.

Наприклад, можна використовувати циліндричні координати

$$x_1 = R,\ x_2 = \varphi,\ x_3 = z,$$

де R – відстань від кінця вектора $\mathbf{r}$ до осі x_3; φ – кут між площиною, яка проходить через $\mathbf{r}$ і вісь x_3, і площиною x_1Ox_3; $z = x_3$. При обертанні навколо осі x_3 циліндричні координати R і z частинки очевидно не змінюються, а координата φ змінюється за час t на величину ωt, якщо кутова швидкість постійна. Тому закон руху в циліндричних координатах має вид

$$R = R_0,\ \varphi = \omega t + \varphi_0,\ z = z_0,$$

тут (R_0, φ_0, z_0) – Лагранжеві координати частинки.

Таким чином, декартова система координат не завжди є зручною.

Задача В.2 Деформація задана у Лагранжевій формі: $x^1 = \xi^1 + \xi^3\left(e^2 - 1\right)$, $x^2 = \xi^2 + \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right)$, $x^3 = \xi^3 e^2$, де e – константа число e. Довести, що якобіан J відмінний від нуля, і знайти Ейлереві рівняння, що описують цю деформацію.

Розв'язок

Якобіан J переходу від змінних Ейлера до змінних Лагранжа визначається за формулою

$$J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}. \tag{B.1}$$

Визначимо похідні:

$$\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} = \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\xi^1 + \xi^3\left(e^2 - 1\right)\right) = 1; \ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\xi^1 + \xi^3\left(e^2 - 1\right)\right) = 0;$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\xi^1 + \xi^3\left(e^2 - 1\right)\right) = \left(e^2 - 1\right); \ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} = \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\xi^2 + \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right)\right) = 0;$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\xi^2 + \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right)\right) = 1;$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} = \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\xi^2 + \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right)\right) = \left(e^2 - e^{-2}\right);$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} = \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\xi^3 e^2\right) = 0; \ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left(\xi^3 e^2\right) = 0; \ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} = \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left(\xi^3 e^2\right) = e^2.$$

Після підстановки знайдених похідних в (В.1) отримуємо, що

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^2 - 1 \\ 0 & 1 & e^2 - e^{-2} \\ 0 & 0 & e^2 \end{vmatrix} = e^2 \neq 0.$$

Тобто задані функції деформації є взаємно однозначними функціями, оскільки $J \neq 0$. Тому формули $x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right)$ можна вирішити відносно ξ^1, ξ^2, ξ^3 та представити у вигляді однозначних неперервних функцій

$$\xi^i = \xi^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right) = \xi^i\left(\vec{x}, t\right).$$

Лагранжева форма запису деформації має вигляд

$$x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right). \qquad \text{(В.2)}$$

Ейлерева форма запису деформації має вигляд

$$\xi^i = \xi^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right). \qquad \text{(В.3)}$$

Форму (В.3) отримують з (В.2) шляхом розв’язання (В.2) відносно змінних ξ^1, ξ^2, ξ^3

$$x^3 = \xi^3 e^2 \to \xi^3 = x^3 e^{-2};$$
$$x^2 = \xi^2 + \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right) \to \xi^2 = x^2 - \xi^3\left(e^2 - e^{-2}\right) \to \xi^2 = x^2 - x^3 e^{-2}\left(e^2 - e^{-2}\right) \to$$
$$\to \xi^2 = x^2 - x^3\left(1 - e^{-4}\right) \to \xi^2 = x^2 + x^3\left(e^{-4} - 1\right);$$
$$x^1 = \xi^1 + \xi^3\left(e^2 - 1\right) \to \xi^1 = x^1 - \xi^3\left(e^2 - 1\right) \to \xi^1 = x^1 - x^3 e^{-2}\left(e^2 - 1\right) \to$$
$$\to \xi^1 = x^1 - x^3\left(1 - e^{-2}\right) \to \xi^1 = x^1 + x^3\left(e^{-2} - 1\right).$$

Тобто отримали такі розв’язки для системи відліку Ейлера

$$\xi^1 = x^1 + x^3\left(e^{-2} - 1\right);$$
$$\xi^2 = x^2 + x^3\left(e^{-4} - 1\right);$$
$$\xi^3 = x^3 e^{-2}.$$

Задача В.3 Рух середовища відбувається з полем швидкості

$$v_1 = kx_1,\ v_2 = -kx_2,\ v_3 = 0,\ k = \text{const}$$

і полем густини

$$\rho = \rho_0 A x_2 e^{kt},\ \rho_0, A = \text{const}.$$

Знайти швидкість зміни густини в кожній із частинок середовища.

Розв’язок

Запишемо рівняння нерозривності

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

В декартовій системі координат рівняння нерозривності приймає вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3} = -\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right).$$

Звідки нескладно визначити $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ – швидкість зміни густини

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) - \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right).$$

Спочатку знайдемо похідні за координатами

$$v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = kx_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho_0 A x_2 e^{kt}\right) = 0,$$

$$v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = -kx_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho_0 A x_2 e^{kt}\right) = -kx_2 \rho_0 A e^{kt},$$

$$v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho_0 A x_2 e^{kt}\right) = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = \rho\left(\frac{\partial (kx_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (-kx_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (0)}{\partial x_3} \right) =$$
$$= \rho(k - k + 0) = 0.$$

Тоді, після підстановки отриманих виразів для похідних, отримуємо вираз для швидкості зміни густини в кожній із частинок середовища

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(0 - kx_2 \rho_0 A e^{kt} + 0\right) - 0 = kx_2 \rho_0 A e^{kt},$$

що і треба було знайти.

Задача В.4 Покажіть, що за допомогою тензора Леві-Чівіта, що змішаний добуток трьох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ може бути представлений в такому вигляді

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$$

в будь-якій системі координат.

Розв'язок

Змішаний добуток векторів можна представити через компоненти у вигляді визначника (який можна визначити, наприклад, за правилом Крамера)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-$$
$$-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2. \qquad \text{(B.4)}$$

Скористаємось символом Леві-Чевіта ε_{ijk}, який має 27 компонент і в будь-якій ортогональній системі координат визначається в такій формі:

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3;\\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3;\\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i=j, \text{ або } j=k, \text{ або } k=i).\end{cases}$$

Тобто, скориставшись рисунком 1 нескладно записати

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1,\\ &\varepsilon_{321}=\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=-1,\end{aligned} \qquad \text{(B.5)}$$

а всі інші 18 компонент, у яких символи повторюються, дорівнюють нулю.

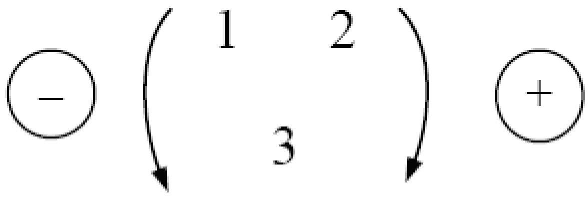

Рисунок 1 – до визначення ε_{ijk}

Із порівняння індексів при компонентах векторів $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ і знаків в (B.4) з індексацією і знаками символів Леві-Чевіта ε_{ijk} в (B.5) витікає формула для визначення змішаного добутку трьох векторів $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ за допомогою тензора Леві-Чівіта

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\varepsilon_{ijk}a^i b^j c^k ,$$

що і треба було показати. Змішаний добуток 3-х векторів є скаляром і не змінюється при перетворенні координат.

Задача B.5 В деякій точці тіла в декартовій ортогональній системі координат тензор напружень задано такими компонентами (Па)

$$\left(\sigma^{ij}\right)=\begin{pmatrix}100 & 100 & 160\\ 100 & 0 & -150\\ 160 & -150 & -60\end{pmatrix}.$$

Для площадки з нормаллю $n_1 = 1/2,\ n_2 = 1/2,\ n_3 = 1/\sqrt{2}$, знайти компоненти вектора $\mathbf{p}_n$, а також величину тангенціального $p_{n\tau}$ і нормального p_{nn} напружень та кут θ між $\mathbf{p}_n$ і $\mathbf{n}$.

Розв'язок

Компоненти вектора $\mathbf{p}_n$

$$p_n^1 = \sigma^{1j} n_j = 100\frac{1}{2} + 100\frac{1}{2} + 160\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 213\,\text{Па},$$

$$p_n^2 = \sigma^{2j} n_j = 100\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} - 150\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -56\,\text{Па},$$

$$p_n^3 = \sigma^{3j} n_j = 160\frac{1}{2} - 150\frac{1}{2} - 60\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -37\,\text{Па},$$

$$|\mathbf{p}_n| = \sqrt{\left(p_n^1\right)^2 + \left(p_n^2\right)^2 + \left(p_n^3\right)^2} = \sqrt{213^2 + (-56)^2 + (-37)^2} \approx 223\ \text{Па}.$$

Нормальна складова вектора напружень p_{nn} визначається із співвідношення

$$p_{nn} = p_n^i n_i = 213\frac{1}{2} - 56\frac{1}{2} - 37\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 52\ \text{Па}.$$

Величина тангенціальної складової вектора напружень $p_{n\tau}$ визначається за формулою

$$\left(p_{n\tau}\right)^2 = p_n^i p_n^i - \left(p_{nn}\right)^2,$$

звідки

$$p_{n\tau} = \sqrt{p_n^i p_n^i - \left(p_{nn}\right)^2} = \sqrt{213^2 + (-56)^2 + (-37)^2 - 52^2} \approx 217\ \text{Па}.$$

Кут θ між $\mathbf{p}_n$ і $\mathbf{n}$ знаходиться за формулою

$$\cos\theta = p_{nn} / |\mathbf{p}_n| = \frac{52}{223} \approx 0{,}23,$$

$$\theta = \arccos(0{,}23) = 76{,}7\ ^\circ,$$

що і треба було знайти.

Задача В.6 Використовуючи закон Фур'є, отримати вираз для масового притоку теплоти $dq^{(e)}$, якщо теплопровідність:

а) $\chi = \mathrm{const}$; б) $\chi = \chi(T)$.

Розв'язок

Закон Фур'є для ізотропних тіл записується як

$$\mathbf{q} = -\chi \,\mathrm{grad} T,$$

де $\mathbf{q}$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м^2;

Тоді маємо, що

$$\text{а)}\ \frac{dq^{(e)}}{dt} = -\frac{\mathrm{div}\mathbf{q}}{\rho} = -\frac{\mathrm{div}(-\chi \,\mathrm{grad} T)}{\rho} = \frac{\nabla(\chi \nabla T)}{\rho} = \frac{\chi}{\rho}\nabla^2 T = \frac{\chi}{\rho}\Delta T,$$

де $q^{(e)}$ – масовий приток теплоти, Дж/кг; t – час, с; $\dfrac{dq^{(e)}}{dt}$ – масовий приток теплоти за одиницю часу, Вт/кг; $\mathbf{q}$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м^2; ρ – густина, кг/м^3; χ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); div – оператор дивергенції (набла $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} \quad \dfrac{\partial}{\partial y} \quad \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$), 1/м; $\Delta = \nabla^2 = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат, 1/м^2; T – температура, К.

$$\text{б)}\ \frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\left[\chi(T)\mathrm{grad} T\right] = \frac{\chi(T)}{\rho}\Delta T + \frac{1}{\rho}\frac{d\chi(T)}{dT}(\nabla T)^2.$$

Другий доданок останнього виразу перетворюється таким чином

$$\frac{1}{\rho}\left[\mathrm{div}\chi(T)\right]\mathrm{grad} T = \frac{1}{\rho}\left[\nabla\chi(T)\right]\nabla T = \frac{1}{\rho}\frac{d\chi(T)}{dT}\nabla T\nabla T = \frac{1}{\rho}\frac{d\chi(T)}{dT}(\nabla T)^2.$$

Тут $\left[\nabla\chi(T)\right] = \dfrac{d\chi(T)}{dT}\nabla T$ – похідна від функції $\chi(T)$ вираженої неявно.

Задача В.7 Показати, що у нестисливої в'язкої рідини ентропія кожної частинки при адіабатному русі в загальному випадку збільшується, а в ізотермічному лишається постійною.

Розв'язок

Запишемо тотожність Гібса

$$d\Psi = -sdT + \frac{dp}{\rho}, \tag{В.6}$$

$$\text{або } d\Psi = -sdT + vdp,$$

де $v = 1/\rho$ – масовий об'єм; $\Psi(p,T) \equiv u(T) - Ts + p/\rho$ – термодинамічний потенціал Гібса; s – ентропія; T – температура; p – тиск; ρ – густина.

Виходячи з (В.6) для нестисливої рідини маємо, що ентальпія рідини є функцією температури $s = s(T)$

$$s = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_p.$$

Тому ентропія кожної частинки нестисливої в'язкої рідини при адіабатному русі в загальному випадку збільшується

$$ds = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}\right)_p > 0,$$

(тотожність Гібса можна перетворити до виду $du(T) = p\dfrac{d\rho}{\rho^2} + Tds$, а для нестисливої рідини $d\rho$=0 маємо $du(T) = Tds$, тому $ds = \dfrac{du(T)}{T} > 0$), а при ізотермічному процесі $T = \text{const}$, тому і $s = \text{const}$, що і треба було показати.

Перетворення тотожності Гібса

$$d\left(u - Ts + \frac{p}{\rho}\right) = -sdT + \frac{dp}{\rho} \Rightarrow$$

$$du - Tds - sdT + \frac{dp}{\rho} - p\frac{d\rho}{\rho^2} = -sdT + \frac{dp}{\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du - Tds - p\frac{d\rho}{\rho^2} = 0 \Rightarrow du = Tds + p\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Задача В.8 Показати, що якщо для деякого ідеального газу виконується рівняння Клайперона $p = R\rho T$, то густина внутрішньої енергії u цього газу і питома теплоємність при постійному об'ємі c_V є функціями тільки температури T і для знаходження виразу для u достатньо задати $c_V(T)$.

Розв'язок

Тотожність Гібса

$$d\Psi = -sdT + \frac{dp}{\rho}, \tag{В.7}$$

де $\Psi(p,T) \equiv u(T) - Ts + p/\rho$ термодинамічний потенціал Гібса; s – ентропія; T – температура; p – тиск; ρ – густина,

Рівняння (В.7) можна перетворити, підставляючи $p = R\rho T$, таким чином

$$du = p\frac{d\rho}{\rho^2} + Tds = T\left(R\frac{d\rho}{\rho} + ds\right) = Td(R\ln\rho + s) = Td\varphi, \tag{В.8}$$

де $\varphi = s + R\ln\rho$.

Для одержання (В.8) скористалися перетворенням виразу термодинамічного потенціалу Гібса задачі В.7.

З (В.8) витікає, що $u = \text{const}$, якщо $\varphi = \text{const}$, тобто $u = u(\varphi)$, $T = \dfrac{du}{d\varphi} = T(\varphi)$, тому $\varphi = \varphi(T)$, тобто $u = u(T)$. Цей висновок справедливий, якщо наперед вважається, що s і u можуть залежати від T і ρ, але не залежати від похідних T і ρ за часом. При $\rho = \text{const}$, $du = dq$ і $du = (du/dT)dT$, $dq = c_V dT$, тому

$$c_V = \frac{du}{dT} = c_V(T), \text{ а } u = \int c_V(T)dT,$$

що і треба було показати.

Задача В.9 Зразок із лінійно-пружного матеріалу знаходиться між двома парами паралельних жорстких стінок, так що його поперечні розміри не можуть змінюватись. На торцях діють однорідні стискуючі напруження p. Знайти напруження і деформації в матеріалі, вважаючи, що між ним та стінками тертя відсутнє.

Розв'язок

За умовами задачі маємо, що:

– на торцях зразка діють однорідні стискуючі напруження p (приймемо цей напрямок за x_1), то нормальні напруження σ_{11} будуть дорівнювати

$$\sigma_{11} = -p \text{ і } \sigma_{22} = \sigma_{33},\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0;$$

– поперечні розміри зразка не змінюються, тобто поперечна деформація зразка дорівнює нулю

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0,\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Деформацію ε_{11} знайдемо із узагальненого закону Гука для тензора деформації

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}.$$

Тоді для ε_{11} при умові, що $\sigma_{11} = -p$ і $\sigma_{22} = \sigma_{33}$, маємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\sigma_{11} + 2\sigma_{22}) + \frac{1}{2\mu}\sigma_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(-p + 2\sigma_{22}) - \frac{1}{2\mu}p.$$

Із узагальненого закону Гука для напружень

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

знайдемо складову напруження σ_{22} при умові, що $\varepsilon_{22} = 0$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + 0 + 0) + 2\mu \cdot 0 = \lambda\varepsilon_{11}.$$

В результаті для знаходження ε_{11} і σ_{22} маємо лінійну систему рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(-p+2\sigma_{22}\right)-\dfrac{1}{2\mu}p, \\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11}. \end{cases}$$

Підставляючи σ_{22} з другого рівняння системи рівнянь в перше, отримуємо лінійне рівняння відносно ε_{11}

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left(-p+2\lambda\varepsilon_{11}\right)-\frac{1}{2\mu}p\,.$$

В результаті розв’язання отриманого рівняння, одержуємо

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda p}{2\mu(3\lambda+2\mu)}-\frac{2\lambda^2\varepsilon_{11}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}-\frac{1}{2\mu}p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\left(1+\frac{2\lambda^2}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right) = p\left(\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}-\frac{1}{2\mu}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)+2\lambda^2}{2\mu(3\lambda+2\mu)} = p\frac{\lambda-(3\lambda+2\mu)}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{11}\left(2\mu(3\lambda+2\mu)+2\lambda^2\right) = p\left(\lambda-(3\lambda+2\mu)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = p\frac{\lambda-(3\lambda+2\mu)}{2\mu(3\lambda+2\mu)+2\lambda^2} = -p\frac{2(\lambda+\mu)}{2\left[\mu(3\lambda+2\mu)+\lambda^2\right]} =$$
$$= -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+3\lambda\mu+2\mu^2} = -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+\lambda\mu+2\lambda\mu+2\mu^2} =$$
$$= -p\frac{\lambda+\mu}{\lambda(\lambda+\mu)+2\mu(\lambda+\mu)} = -p\frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)} =$$
$$= -\frac{p}{\lambda+2\mu}.$$

Тобто

$$\varepsilon_{11} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu}.$$

Тоді

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} = -\frac{p\lambda}{\lambda + 2\mu},$$

що і треба було знайти.

Задача В.10 Напружений стан, що описується кульовим тензором напружень $\sigma_{ij} = -pg_{ij}$, називається всебічним стисканням. Визначити компоненти деформації і відносну зміну об'єму θ. Коефіцієнт пропорційності між p і θ називається модулем об'ємного стискання K. Знайти вираз для K через E і ν та через коефіцієнти Ламе λ і μ.

Розв'язок

Для тензора деформацій при $\sigma_{ij} = -pg_{ij}$ співвідношення $\left(\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\right)$ приймає вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(-pg_{ij} + \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)}g_{ij}(3p)\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\left(-1 + \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\left(\frac{-3\lambda - 2\mu + 3\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) = \frac{pg_{ij}}{2\mu}\frac{-2\mu}{3\lambda + 2\mu} =$$
$$= -\frac{pg_{ij}}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{1}{3}\frac{pg_{ij}}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}.$$

Відносна зміну об'єму $\theta = \varepsilon_{ii}$,

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{1}{3}\frac{pg_{ii}}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{1}{3}\frac{p \cdot 3}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} = -\frac{p}{\lambda + \frac{2}{3}\mu},$$

тоді $\theta = -\dfrac{p}{\lambda + \dfrac{2}{3}\mu}$.

Для модуля об'ємного стискання, записаного через коефіцієнти Ламе, маємо

$$K = -\frac{p}{\varepsilon_{ii}} = -\frac{p}{-\dfrac{p}{\lambda + \dfrac{2}{3}\mu}} = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

або через модуль пружності E і коефіцієнт Пуасона ν будемо мати

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3}\frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

де $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ і $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.
Що і треба було знайти.