ТЕМА 9 РОЗВ'ЯЗУЮЧІ РІВНЯННЯ МСС В ДЕКАРТОВИХ ТА КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ

Лекція 9.1(14) **Основи постановки задач механіки суцільних середовищ в декартових координатах. Геометричні рівняння. Фізичні рівняння. Рівняння рівноваги, енергії, деформації і фізичне рівняння відносно компонент. Рівняння рівноваги, енергії і закон Гука в декартовій системі координат**

Основи постановки задач механіки суцільних середовищ в декартових координатах. Математична постановка задач МСС для твердих тіл включає сукупність всіх диференціальних і алгебраїчних рівнянь разом з властивостями матеріалів, початковими і граничними умовами (ГУ). Основним елементом математичної постановки є система диференціальних рівнянь (див. лекцію №13, (13.17)), яка включає: рівняння збереження маси (або нерозривності), рівняння руху, рівняння енергії (теплопровідності):

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0; \\ \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}; \\ C_v\dfrac{dT}{dt} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda\vec{\nabla}T\right) + q_v. \end{cases} \tag{14.1}$$

Геометричні рівняння. Рівняння Коші (13.19) (див. лекцію №13)

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T \cdot \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)\right). \tag{14.2}$$

Фізичні рівняння. Закон Гука (див. лекцію №8, (8.11)), який встановлює зв'язок між напруженнями і деформаціями

$$\hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}, \tag{14.3}$$

швидкість деформації

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \tag{14.4}$$

де $\overset{4}{\hat{C}}$ – тензор 4-го рангу фізичних констант, який вміщує 81 компоненту; $\mathbf{u}$ – вектор переміщень; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості переміщень.

В системі рівнянь (14.1) невідомими є такі величини: $\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, T$. Підрахуємо кількість невідомих в (14.1) у відповідності із записаними невідомими величинами: 1+3+3+6+6+1=20.

Кількість рівнянь, які можна записати з постановки (14.1)–(14.4) теж дорівнює 20. Тому можна зазначити, що кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Тобто система рівнянь (14.1)–(14.4) є замкнутою.

Постановка задачі (14.1)–(14.4) справедлива для тіл, що можуть отримувати великі деформації, наприклад, гумоподібні.

При конструктивних розрахунках вузлів та деталей з металу постановка задач суттєво спрощується, виходячи з додаткових припущень, що деформації є малими величинами в порівнянні з одиницею і, тому нелінійними членами в геометричному рівнянні (14.2) можна знехтувати:

1. Оскільки деформації є невеликими величинами і, відповідно, густина матеріалу змінюється слабо, тому в (14.1) рівняння збереження маси можна не розглядати.
2. Нелінійні члени, які присутні в виразі для тензора деформації (14.2) малі порівняно з лінійними, тому їми також можна знехтувати.
3. Енергія дисипації (перетворення механічної енергії в теплову) в рівнянні енергії (14.1) теж мала і, тому її також можна не враховувати.

В результаті описаних припущень отримуємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}; \\ C_v \dfrac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v; \\ \hat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\right); \\ \hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}. \end{cases} \tag{14.5}$$

Невідомими в системі диференціальних рівнянь (14.5) є $\mathbf{u}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, T$, що відповідає кількості невідомих – 3+6+6+1=16.

В (14.5) задача про розподіл температури є незалежною задачею.

Далі можна ввести ще одне спрощення для системи рівнянь (14.5).

4. Тіло розглядається в стані спокою, тобто коли всі сили знаходяться в рівновазі. В цьому випадку кількість рівнянь і невідомих не змінюється, але всі шукані функції ($\mathbf{u}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, T$) стають незалежними від часу.

В результаті система рівнянь (14.5) стає статичною (стаціонарною) і набуває вигляду:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} = 0; \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v = 0; \\ \hat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\mathbf{u} + \left(\vec{\nabla}\mathbf{u}\right)^T\right); \\ \hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}. \end{cases} \tag{14.6}$$

Для конструкторських розрахунків, як правило, використовуються ізотропні матеріали. Тоді тензор фізичних констант 4-го рангу набуває вигляду

$$C^{ijkl} = \mu\left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}\right) + \lambda g^{ij} g^{kl}, \tag{14.7}$$

де $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коефіцієнти Ламе виражені через модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν.

Розглянемо *рівняння рівноваги* з (14.6) *відносно компонент* тензорів. Представимо тензори через їх компоненти

$$\begin{gathered} \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \ \mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i, \\ \hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j. \end{gathered} \tag{14.8}$$

Додамо компоненти оператора Гамільтона

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

тоді можна записати, що

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j .$$

Останній запис справедливий для будь-якої криволінійної системи координат.

Отже можна записати

$$\mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla_m \sigma^{ij} \left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i\right) \mathbf{e}_j = \nabla_m \sigma^{ij} g_i^m \mathbf{e}_j = \nabla_i \sigma^{ij} \mathbf{e}_j . \qquad (14.9)$$

Тут $\left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i\right) = g_i^m$.

Для вільного члена *рівняння рівноваги* маємо

$$\mathbf{f} = f^n \mathbf{e}_n . \qquad (14.10)$$

Після підстановки (14.9) і (14.10) в рівняння рівноваги, отримуємо

$$\nabla_i \sigma^{ij} \mathbf{e}_j + f^n \mathbf{e}_n = 0 \rightarrow \nabla_i \sigma^{ij} \mathbf{e}_j + f^j \mathbf{e}_j = 0 \rightarrow \left(\nabla_i \sigma^{ij} + f^j\right) \mathbf{e}_j = 0,$$

або

$$\nabla_i \sigma^{ij} + f^j = 0, \quad j = 1,2,3 . \qquad (14.11)$$

Оскільки в (14.11) не було проведено спрощення відносно системи координат, то треба відмітити, що це рівняння є інваріантним, тобто справедливим для будь-якої системи координат.

Рівняння енергії записане через компоненти має вигляд

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\lambda \frac{\partial}{\partial x^i} T \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right)\right) \mathbf{e}^i = \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right) \left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^i\right) =$$
$$= \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right) g^{mi} .$$

Тут $\left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^i\right) = g^{mi}$.

$$\nabla_m\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i}\right) g^{mi} + q_v = 0, \text{ – стаціонарне рівняння енергії.} \qquad (14.12)$$

де $\dfrac{\partial T}{\partial x^i} = \nabla_i T$.

Рівняння для *деформації* записане через компоненти має вигляд

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(u^m \mathbf{e}_m\right) = \mathbf{e}^k\left(\nabla_k u^m\right)\mathbf{e}_m = \nabla_k u^m \mathbf{e}^k \mathbf{e}_m,$$

$$\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T = \nabla_k u^m \mathbf{e}_m \mathbf{e}^k,$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = \frac{1}{2}\left(\nabla_k u^m \mathbf{e}^k \mathbf{e}_m + \nabla_k u^m \mathbf{e}_m \mathbf{e}^k\right).$$

Перейдемо на коваріантні компоненти вектора переміщень

$$\varepsilon_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = \frac{1}{2}\left(\nabla_k u_m \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m + \nabla_k u_m \mathbf{e}^m \mathbf{e}^k\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\nabla_k u_m \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m + \nabla_m u_k \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_k u_m + \nabla_m u_k\right)\mathbf{e}^k \mathbf{e}^m =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\nabla_m u_n + \nabla_n u_m\right)\mathbf{e}^m \mathbf{e}^n,$$

тобто тепер можна записати, що

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\nabla_m u_n + \nabla_n u_m\right), \quad m, n = 1,2,3. \qquad (14.13)$$

Фізичне рівняння записане через компоненти тензорів

$$\hat{\sigma} = \sigma^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = C^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l : \varepsilon_{pq} \mathbf{e}^p \mathbf{e}^q =$$
$$= C^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \varepsilon_{pq} g_l^p g_k^q = C^{ijqp} \varepsilon_{pq} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \quad \text{, тут } \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}^p = g_l^p \ \text{ і } \ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^q = g_k^q$$
$$= C^{mnqp} \varepsilon_{pq} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad m, n = 1,2,3$$

або

$$\sigma^{mn} = C^{mnqp}\varepsilon_{pq}. \tag{14.14}$$

Використовуючи (14.11)–(14.14) запишемо всю систему рівнянь (14.6) в інваріантній формі:

$$\begin{cases} \nabla_i \sigma^{ij} + f^j = 0; \\ \nabla_m \left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x^i} \right) g^{mi} + q_v = 0; \\ \varepsilon_{mn} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_m u_n + \nabla_n u_m \right); \\ \sigma^{mn} = C^{mnqp}\varepsilon_{pq}. \end{cases} \tag{14.15}$$

Перепишемо систему рівнянь (14.15) у декартовій системі координат. При цьому всі коваріантні похідні записуються як частинні похідні:

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^j = 0;$$
$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) g^{mi} + q_v = 0;$$
$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x^m} + \frac{\partial u_m}{\partial x^n} \right);$$
$$\sigma^{mn} = C^{mnqp}\varepsilon_{pq}.$$

Рівняння рівноваги в декартовій системі координат має вигляд:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial x^3} + f^1 = 0; \\ &\frac{\partial \sigma^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial x^3} + f^2 = 0; \\ &\frac{\partial \sigma^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial x^3} + f^3 = 0. \end{aligned} \tag{14.16}$$

Рівняння енергії в декартовій системі координат

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x^3}\right)+q_v=0. \qquad (14.17)$$

Фізичні рівняння – закон Гука в декартовій системі координат:

$$\begin{gathered}\sigma^{11}=(2\mu+\lambda)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33};\\ \sigma^{22}=\lambda\varepsilon_{11}+(2\mu+\lambda)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33};\\ \sigma^{33}=\lambda\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+(2\mu+\lambda)\varepsilon_{33};\\ \sigma^{12}=2\mu\varepsilon_{12};\ \sigma^{13}=2\mu\varepsilon_{13};\ \sigma^{23}=2\mu\varepsilon_{23}.\end{gathered} \qquad (14.18)$$

Лекція 9.2(15) **Побудова рівнянь механіки суцільних середовищ в криволінійних координатах. Визначення геометричних характеристик циліндричної системи координат. Визначення базисних векторів циліндричної системи координат. Визначення компонент фундаментальних тензорів. Компоненти тензора Леві-Чівіта. Компоненти тензора перетворення координат. Зв'язок між компонентами тензорів перетворення координат**

Побудова рівнянь механіки суцільних середовищ в криволінійних координатах. Розглянемо процес задання рівнянь МСС на прикладі циліндричної системи координат.

Послідовність дій.

1. Запис рівнянь відносно компонент термомеханічних параметрів (напружень, деформацій, переміщень, температури, тощо) в інваріантній формі (див. лекцію №13, (13.17)).
2. Визначення геометричних характеристик криволінійної системи координат.

   Визначення основного і взаємного базисів системи координат.

   Визначення фундаментальних тензорів (метричного тензора, компонент тензора Леві-Чівіта та компонент тензора перетворень координат), визначення символів Кристофеля.

   Запис коваріантних похідних для обраної системи координат з підстановкою значень символів Кристофеля.

   При необхідності можна перейти до фізичних компонент термомеханічних параметрів.

Визначення геометричних характеристик циліндричної системи координат. Це виконується за допомогою побудови співвідношень між декартовою системою координат і криволінійною (рисунок 15.1).

Радіус-вектор точки M в криволінійній системі координат $\left(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\right)$

$$\mathbf{r}_M = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + x^{2'}\mathbf{e}_{2'} + x^{3'}\mathbf{e}_{3'} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}.$$

Зв'язок між циліндричними і декартовими координатами (див. рисунок 15.1)

$$\begin{gathered}\rho \equiv x^1 - \text{радіус};\ \varphi \equiv x^2 - \text{азимутальний кут};\ z \equiv x^3 - \text{апліката};\\ x^{1'} = \rho\cos\varphi = x^1\cos x^2;\ x^{2'} = \rho\sin\varphi = x^1\sin x^2;\ x^{3'} = z = x^3.\end{gathered} \qquad (15.1)$$

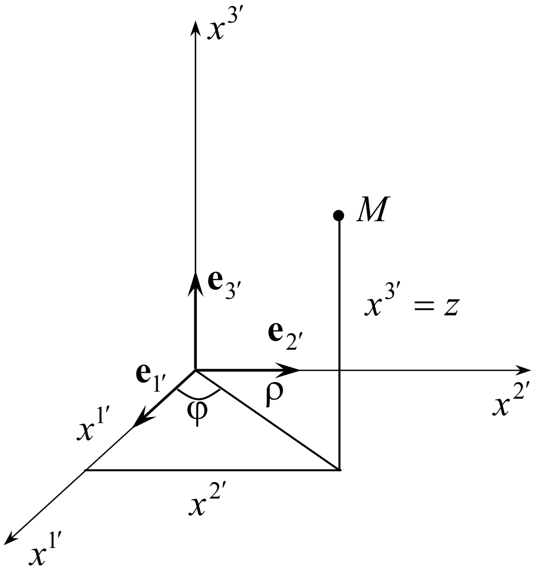

Рисунок 15.1 – Декартова і циліндрична системи координат

Визначення базисних векторів циліндричної системи координат. Основний базис циліндричної системи координат

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i};$$

враховуючи те, що $\mathbf{r} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}$ і (15.1), можна записати

$$\mathbf{e}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^{i'}\mathbf{e}_{i'}\right)=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+x^3\mathbf{e}_{3'}\right)=$$
$$=\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'};\tag{15.2}$$

$$\mathbf{e}_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+x^3\mathbf{e}_{3'}\right)=$$
$$=-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'};\tag{15.3}$$

$$\mathbf{e}_3=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+x^3\mathbf{e}_{3'}\right)=\mathbf{e}_{3'}.\tag{15.4}$$

Тобто в результаті отримали для основного базису циліндричної системи координат

$$\begin{cases}\mathbf{e}_1=\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'};\\ \mathbf{e}_2=-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'};\\ \mathbf{e}_3=\mathbf{e}_{3'}.\end{cases}\tag{15.5}$$

Визначимо взаємний базис циліндричної системи координат (див. лекцію №3, (3.4))

$$\mathbf{e}^1=\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right)}=\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+\cos x^2\mathbf{e}_{1'},\tag{15.6}$$

де векторний добуток базисних векторів

$$\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\times\mathbf{e}_3=-x^1\sin x^2\left(\mathbf{e}_{1'}\times\mathbf{e}_{3'}\right)+$$
$$+x^1\cos x^2\left(\mathbf{e}_{2'}\times\mathbf{e}_{3'}\right)=\left|\begin{matrix}\left(\mathbf{e}_{1'}\times\mathbf{e}_{3'}\right)=-\mathbf{e}_{2'};\\ \left(\mathbf{e}_{2'}\times\mathbf{e}_{3'}\right)=\mathbf{e}_{1'};\end{matrix}\right|=x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'};\tag{15.7}$$

змішаний добуток базисних векторів

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=\\
&=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(x^1\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=\\
&=\left|\begin{matrix}(\mathbf{e}_{1'})^2=1;\\(\mathbf{e}_{2'})^2=1;\end{matrix}\right|=x^1\cos^2\left(x^2\right)+x^1\sin^2\left(x^2\right)=\\
&=x^1\left(\cos^2\left(x^2\right)+\sin^2\left(x^2\right)\right)=x^1;
\end{aligned}\tag{15.8}$$

$$\mathbf{e}^2=\frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}=\frac{\cos x^2\mathbf{e}_{2'}}{x^1}-\frac{\sin x^2\mathbf{e}_{1'}}{x^1},\tag{15.9}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_{3'}\times\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{1'})\cos x^2+\\
&+(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{2'})\sin x^2=\left|\begin{matrix}(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{1'})=\mathbf{e}_{2'};\\(\mathbf{e}_{3'}\times\mathbf{e}_{2'})=-\mathbf{e}_{1'};\end{matrix}\right|=\\
&=\cos x^2\mathbf{e}_{2'}-\sin x^2\mathbf{e}_{1'};
\end{aligned}\tag{15.10}$$

$$\mathbf{e}^3=\frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}=\frac{x^1\mathbf{e}_{3'}}{x^1}=\mathbf{e}_{3'},\tag{15.11}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\times\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=\\
&=(\mathbf{e}_{1'}\times\mathbf{e}_{2'})\cos x^2\left(x^1\cos x^2\right)+(\mathbf{e}_{2'}\times\mathbf{e}_{1'})\sin x^2\left(-x^1\sin x^2\right)=\\
&=\left|\begin{matrix}(\mathbf{e}_{1'}\times\mathbf{e}_{2'})=\mathbf{e}_{3'};\\(\mathbf{e}_{2'}\times\mathbf{e}_{1'})=-\mathbf{e}_{3'};\end{matrix}\right|=x^1\left(\cos^2\left(x^2\right)+\sin^2\left(x^2\right)\right)\mathbf{e}_{3'}=x^1\mathbf{e}_{3'}.
\end{aligned}\tag{15.12}$$

Визначення компонент фундаментальних тензорів циліндричної системи координат. Коваріантні компоненти метричного тензора (див. лекцію №4) визначаються на підставі (15.5)

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j,\tag{15.13}$$

$$g_{11}=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=1;\tag{15.14}$$

$$g_{12}=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=0;\tag{15.15}$$

$$g_{13}=\left(\cos x^2\mathbf{e}_{1'}+\sin x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\mathbf{e}_{3'}=0;\tag{15.16}$$

$$g_{22}=\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)\cdot\left(-x^1\sin x^2\mathbf{e}_{1'}+x^1\cos x^2\mathbf{e}_{2'}\right)=\left(x^1\right)^2;\tag{15.17}$$

$$g_{23}=0;\qquad g_{21}=g_{12}=0;\qquad g_{31}=g_{13}=0;\tag{15.18}$$

$$g_{33}=\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{3'}=1.\tag{15.19}$$

Тобто для недіагональних компонент метричного тензора справедливо

$$g_{ij}\Big|_{i\neq j} = 0. \qquad (15.20)$$

Контраваріантні компоненти метричного тензора. Визначаються на підставі (15.6), (15.9) і (15.11)

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j, \qquad (15.21)$$

$$g^{11} = \left(\sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}\right) \cdot \left(\sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}\right) = 1; \qquad (15.22)$$

$$g^{22} = \left(\frac{\cos x^2 \mathbf{e}_{2'}}{x^1} - \frac{\sin x^2 \mathbf{e}_{1'}}{x^1}\right) \cdot \left(\frac{\cos x^2 \mathbf{e}_{2'}}{x^1} - \frac{\sin x^2 \mathbf{e}_{1'}}{x^1}\right) = \frac{1}{\left(x^1\right)^2}; \qquad (15.23)$$

$$g^{33} = \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{3'} = 1; \qquad (15.24)$$

$$g^{ij}\Big|_{i\neq j} = 0. \qquad (15.25)$$

Змішані компоненти метричного тензора. Визначаються на підставі (15.5), (15.6), (15.9) і (15.11)

$$g^i_j = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j, \qquad (15.26)$$

$$g^1_1 = \left(\sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}\right) \cdot \left(\cos x^2 \mathbf{e}_{1'} + \sin x^2 \mathbf{e}_{2'}\right) = 1; \qquad (15.27)$$

$$g^2_2 = \left(\frac{\cos x^2 \mathbf{e}_{2'}}{x^1} - \frac{\sin x^2 \mathbf{e}_{1'}}{x^1}\right) \cdot \left(-x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_{1'} + x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_{2'}\right) = 1; \qquad (15.28)$$

$$g^3_3 = \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{3'} = 1; \qquad (15.29)$$

$$g^i_j\Big|_{i\neq j} = 0. \qquad (15.30)$$

Компоненти тензора Леві-Чівіта (див. лекції №4, 5) циліндричної системи координат. Коваріантні компоненти

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\right) = \begin{cases} x^1 \quad \text{при} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \\ -x^1 \quad \text{при} \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow . \\ 0 \quad \text{при}\, i = j,\ i = k,\ j = k \end{cases} \qquad (15.31)$$

Контраваріантні компоненти

$$\varepsilon^{ijk} = \left(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^1} & \text{при} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \\ -\dfrac{1}{x^1} & \text{при} \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow . \\ 0 & \text{при}\, i = j,\ i = k,\ j = k \end{cases} \qquad (15.32)$$

Зв'язок між контраваріантними і коваріантними компонентами тензора Леві-Чівіта встановлюється через контраваріантні компоненти метричного тензора

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{mnq} g^{mi} g^{nj} g^{qk}. \qquad (15.33)$$

Компоненти тензора перетворення координат (див. лекцію №4) циліндричної системи координат

$$\begin{aligned} c_{i'}^{j} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}^{j}, \\ c_{j}^{i'} &= \mathbf{e}^{i'} \cdot \mathbf{e}_{j}, \end{aligned} \qquad (15.34)$$

$\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}^{i'}$ – для декартової системи координат.

Використовуючи (15.5), (15.6), (15.9) і (15.11) можна записати для $c_{i'}^{j}$. Детально розглянемо отримання компоненти $c_{1'}^{1}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}^1 = \sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}; \\ &c_{1'}^{1} = \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_{1'} \cdot \left(\sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}\right) = \\ &= \sin x^2 \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{2'}\right) + \cos x^2 \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'}\right) = \\ &= \begin{vmatrix} \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{2'}\right) = 0; \\ \left(\mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'}\right) = 1; \end{vmatrix} = \cos x^2; \end{aligned}$$

інші компоненти тензора перетворень координат отримують аналогічним чином

$$c_{1'}^{1} = \cos x^2; \qquad c_{1'}^{2} = -\frac{\sin x^2}{x^1}; \qquad c_{1'}^{3} = 0; \qquad (15.35)$$

$$c_{2'}^{1} = \sin x^2; \qquad c_{2'}^{2} = \frac{\cos x^2}{x^1}; \qquad c_{2'}^{3} = 0; \tag{15.36}$$

$$c_{3'}^{1} = 0; \qquad c_{3'}^{2} = 0; \qquad c_{3'}^{3} = 1; \tag{15.37}$$

і для $c_j^{i'}$

$$c_1^{1'} = \cos x^2; \qquad c_1^{2'} = \sin x^2; \qquad c_1^{3'} = 0; \tag{15.38}$$

$$c_2^{1'} = -x^1 \sin x^2; \qquad c_2^{2'} = x^1 \cos x^2; \qquad c_2^{3'} = 0; \tag{15.39}$$

$$c_3^{1'} = 0; \qquad c_3^{2'} = 0; \qquad c_3^{3'} = 1. \tag{15.40}$$

Компоненти тензора перетворень з декартової в циліндричну систему координат можна представити у вигляді матриці

$$\left[c_{i'}^{j}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\dfrac{\sin\varphi}{\rho} & 0 \\ \sin\varphi & \dfrac{\cos\varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і, навпаки, з циліндричної у декартову

$$\left[c_{i}^{j'}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зв'язок між компонентами тензорів перетворення координат в прямому $c_{i'}^{j}$ і зворотному $c_i^{j'}$ напрямках встановлюється через обернену матрицю

$$\left[c_{i'}^{j}\right] = \left[c_i^{j'}\right]^{-1}.$$

Лекція 9.3(16) **Визначення символів Кристофеля. Запис градієнта переміщень і напружень через символи Кристофеля. Рівняння рівноваги в циліндричній системі координат**

Визначення символів Кристофеля (див. лекцію №6). Для символів Кристофеля 2-го роду можна записати

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}^m = \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m . \tag{16.1}$$

Символи Кристофеля 1-го роду виражаються через метричний тензор як

$$\Gamma_{m,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right), \tag{16.2}$$

а символи Кристофеля 2-го роду зв’язані з символами Кристофеля 1-го роду таким співвідношенням

$$\Gamma_{ij}^n = \Gamma_{m,ij} g^{mn} . \tag{16.3}$$

Запишемо коваріантні компоненти базису циліндричної системи координат (див. лекцію №15)

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos x^2 \mathbf{e}_{1'} + \sin x^2 \mathbf{e}_{2'}; \\ \mathbf{e}_2 = -x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_{1'} + x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_{2'}; \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{3'}; \end{cases} \tag{16.4}$$

і контраваріантні компоненти базису циліндричної системи координат

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 = \sin x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cos x^2 \mathbf{e}_{1'}; \\ \mathbf{e}^2 = \dfrac{\cos x^2 \mathbf{e}_{2'}}{x^1} - \dfrac{\sin x^2 \mathbf{e}_{1'}}{x^1}; \\ \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_{3'}. \end{cases} \tag{16.5}$$

Запишемо компоненти метричного тензору циліндричної системи координат (див. лекцію №15)

$$\begin{gathered} g_{11} = g^{11} = 1; \\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = \left(x^1\right)^2 = \rho^2 ; \\ g_{33} = g^{33} = 1; \end{gathered} \tag{16.6}$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (\text{при } i \neq j).$$

На підставі (16.6) визначимо символи Кристофеля 1-го роду (16.2) в циліндричній системі координат

$$\Gamma_{m,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right);$$

$$\Gamma_{2,11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) = 0;$$

$$\Gamma_{3,11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) = 0;$$

$$\Gamma_{1,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}\right) = 0;$$

$$\Gamma_{2,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}\right) = x^1 = \rho;$$

$$\Gamma_{3,21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3}\right) = 0;$$

$$\Gamma_{1,11} = 0; \qquad \underline{\Gamma_{1,22} = -\rho;} \qquad \Gamma_{1,33} = 0;$$

$$\Gamma_{2,11} = 0; \qquad \Gamma_{2,22} = 0; \qquad \Gamma_{2,33} = 0;$$

$$\Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = 0; \qquad \Gamma_{3,22} = 0; \qquad \Gamma_{3,33} = 0;$$

$$\underline{\Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \rho;} \qquad \Gamma_{1,32} = \Gamma_{1,23} = 0;$$

$$\Gamma_{3,12} = \Gamma_{3,21} = 0; \qquad \Gamma_{2,32} = \Gamma_{2,23} = 0;$$

$$\Gamma_{1,31} = \Gamma_{1,13} = 0; \qquad \Gamma_{1,32} = \Gamma_{1,23} = 0;$$

$$\Gamma_{1,13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}\right) = 0;$$

$$\Gamma_{2,31} = \Gamma_{2,13} = 0; \qquad \Gamma_{3,31} = \Gamma_{3,13} = 0;$$

$$\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -x^1 = -\rho;$$

$$\Gamma_{2,22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Тепер визначимо символи Кристофеля 2-го роду (16.3)

$$\Gamma_{ij}^{n} = \Gamma_{m,ij} g^{mn},$$

$$\Gamma_{ij}^{1} = \Gamma_{1,ij} g^{11}; \qquad \Gamma_{ij}^{2} = \Gamma_{2,ij} g^{22}; \qquad \Gamma_{ij}^{3} = \Gamma_{3,ij} g^{33};$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial x^2} \cdot \mathbf{e}^1 = \Gamma_{1,22} g^{11} = -\rho;$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial x^2} \cdot \mathbf{e}^2 = \Gamma_{2,12} g^{22} = \frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}.$$

Тепер запишемо вираз для *градієнта переміщень* через символи Кристофеля 2-го роду

$$\vec{\nabla}\mathbf{u} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(u^n \mathbf{e}_n\right) = \mathbf{e}^m \left(\nabla_m u^n\right)\mathbf{e}_n = \nabla_m u^n \mathbf{e}^m \mathbf{e}_n, \tag{16.7}$$

де $\nabla_m u^n = \dfrac{\partial u^n}{\partial x^m} + \Gamma_{mk}^{n} u^k$ *– градієнт переміщень.*

Вираз для *градієнта напружень* через символи Кристофеля 2-го роду має наступний вигляд

$$\vec{\nabla}\hat{\sigma} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) = \mathbf{e}^m \left(\nabla_m \sigma^{ij}\right)\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla_m \sigma^{ij} \mathbf{e}^m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \tag{16.8}$$

де $\nabla_m \sigma^{ij} = \dfrac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^m} + \Gamma_{mk}^{i} \sigma^{kj} + \Gamma_{mk}^{j} \sigma^{ik}$ *– градієнт напружень.*

Запишемо вираз для дивергенції переміщень

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial x^m}\left(u^n \mathbf{e}_n\right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m u^n\right)\mathbf{e}_n = \nabla_m u^n \left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_n\right) = \nabla_n u^n. \tag{16.9}$$

Запишемо *рівняння рівноваги* для будь-якого тіла *в циліндричній системі координат*

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{f} = 0,$$

$\mathbf{e}^m \dfrac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\sigma_j^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j\right) + f^k \mathbf{e}_k = 0$ – скалярна форма рівняння рівноваги,

$$\mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma_j^i\right)\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0,$$

$$\left(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i\right)\left(\nabla_m \sigma_j^i\right)\mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0 \rightarrow \delta_i^m \nabla_m \sigma_j^i \mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0,$$

$$\nabla_m \sigma_j^m \mathbf{e}^j + f^k \mathbf{e}_k = 0,$$

$$\nabla_m \sigma_j^m \mathbf{e}^j + f_j \mathbf{e}^j = 0 \rightarrow \left(\nabla_m \sigma_j^m + f_j\right)\mathbf{e}^j = 0,$$

$$\nabla_m \sigma_j^m + f_j = 0 \text{ при } j = 1,2,3.$$

Тоді остаточно можна записати, використовуючи при цьому символи Кристофеля 2-го роду

$$\frac{\partial \sigma_j^m}{\partial x^m} + \Gamma_{mk}^m \sigma_j^k - \Gamma_{mj}^k \sigma_k^m + f_j = 0. \qquad (16.10)$$

Лекція 9.4(17) **Основні рівняння МСС для рідин та газів. Системи координат Лагранжа і Ейлера. Рівняння руху в різних системах відліку. Отримання інваріантної форми рівняння руху. Рівняння збереження маси в різних системах відліку. Отримання інваріантної форми рівняння збереження маси. Рівняння збереження енергії в різних системах відліку. Інваріантна форма запису рівняння збереження енергії**

Основні рівняння МСС для рідин та газів. Рівняння МСС для рідин і газів відрізняються між собою в залежності від обраної системи відліку, наприклад, *системи відліку Ейлера* або *Лагранжа*.

При використанні Лагранжевої системи координат маємо, що:

– координати точки є координатами і в початковому стані;
– рух точок в просторі визначається виключно вектором переміщень $\mathbf{u}$;
– координати точок не залежать від їх переміщення в просторі.

Нехай маємо деяку функцію скалярного поля φ виду

$$\varphi\left(x^1, x^2, x^3, t\right),$$

то її субстанціональну (матеріальну) похідну можна записати як (див. лекції №2, 7)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{x^1, x^2, x^3 = const} \qquad (17.1)$$

В Лагранжевій системі координат координати точок не залежать від часу $\frac{\partial x^i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1,2,3)$. Тобто (17.1) перетворюється на

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (17.2)$$

В Ейлеревій системі координат маємо, що

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} v^3 + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{x^1, x^2, x^3 = const} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad (17.3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (17.4)$$

Запишемо тепер матеріальну похідну від тензора $\hat{T}$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = v^i \cdot \nabla \hat{T} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}. \qquad (17.5)$$

Висновок. Матеріальна похідна за часом від будь-якої фізичної величини дорівнює сумі конвективної $\left(v^i \cdot \nabla \hat{T}\right)$ і локальної похідних $\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}\right)$.

Якщо ми маємо рівняння, в яких містяться похідні за часом в Лагранжевій системі відліку (тобто похідні за часом є матеріальними похідними, тобто похідними за часом, що відносяться до матеріальної точки суцільного середовища), то для переходу до Ейлеревої системи відліку достатньо і необхідно замінити матеріальну похідну за часом сумою конветивної і локальної похідних згідно з формулою (17.5).

При переході від Ейлеревої системи відліку до Лагранжевої, навпаки, необхідно суму конветивної і локальної похідних замінити на матеріальну похідну (17.4), (17.5).

В Лагранжевій системі координат використовуються координати і переміщення.

Рівняння руху в різних системах відліку. Лагранжева система відліку

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}, \qquad (17.6)$$

якщо ввести швидкість $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, то (17.6) можна переписати у виді

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}. \tag{17.7}$$

Ейлерева система відліку

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{v} \right) = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f}, \tag{17.8}$$

де $\dfrac{\partial u^i}{\partial t} = v^i$ – швидкість переміщень.

Виконаємо перетворення (17.8) для отримання інваріантної форми запису рівняння руху. Перейдемо від векторної форми до тензорної для представлення швидкості, напруження, вектора об'ємного навантаження і оператора Гамільтона:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \qquad \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{f} = f^m \mathbf{e}_m, \qquad \vec{\nabla} = \mathbf{e}^s \frac{\partial}{\partial x^s}. \tag{17.9}$$

З врахуванням (17.9) рівняння (17.8) перепишеться у виді

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(v^i \mathbf{e}_i \right) + v^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \left(v^n \mathbf{e}_n \right) \right) = \mathbf{e}^m \cdot \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) + f^i \mathbf{e}_i. \tag{17.10}$$

Виконаємо деякі перетворення рівняння (17.10)

$$\rho \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m \left(\nabla_m v^n \right) \mathbf{e}_n \right) = \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \sigma^{ij} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + f^i \mathbf{e}_i. \tag{17.11}$$

В (17.11) використано перетворення виду

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \left(t^{kp} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_p \right) = \left(\nabla_m t^{kp} \right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_p.$$

$$\rho \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \delta_i^m \left(\nabla_m v^n \right) \mathbf{e}_n \right) = \delta_i^m \left(\nabla_m \sigma^{ij} \right) \mathbf{e}_j + f^i \mathbf{e}_i, \tag{17.12}$$

в (17.12) використана заміна $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m = \delta_i^m$

$$\rho\left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \nabla_m v^n \mathbf{e}_n\right) = \nabla_m \sigma^{ij} \mathbf{e}_j + f^i \mathbf{e}_i, \qquad (17.13)$$

проведемо заміну індексів в (17.13), отримаємо

$$\rho\left(\mathbf{e}_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \nabla_n v^i \mathbf{e}_i\right) = \nabla_j \sigma^{ij} \mathbf{e}_i + f^i \mathbf{e}_i, \qquad (17.14)$$

винесемо за дужки $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{e}_i \rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \nabla_n v^i\right) = \left(\nabla_j \sigma^{ij} + f^i\right)\mathbf{e}_i, \qquad (17.15)$$

в результаті отримали *інваріантну форму рівняння руху*

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \nabla_n v^i\right) = \nabla_j \sigma^{ij} + f^i \quad (i = 1,2,3). \qquad (17.16)$$

Рівняння руху у інваріантній формі (17.16) є справедливим для будь-якої системи координат.

Рівняння руху в декартовій системі координат приймає вигляд

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^n \frac{\partial v^i}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i \quad (i = 1,2,3). \qquad (17.17)$$

Для стаціонарних процесів в Ейлеревій системі відліку похідні за часом дорівнюють нулю $\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} = 0\right)$, тобто всі величини залежать тільки від просторових координат.

Наприклад, для циліндричної системи координат (див. лекції №15,16) маємо, що

$$\begin{cases} \rho = x^1; \\ \varphi = x^2; \\ z = x^3; \end{cases} \tag{17.18}$$

компоненти метричного тензора

$$\begin{gathered} g_{11} = g^{11} = g_{33} = g^{33} = 1; \\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = \rho^2; \end{gathered} \tag{17.19}$$

символи Кристофеля 2-го роду

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho}; \qquad \Gamma_{22}^1 = -\rho. \tag{17.20}$$

Рівняння збереження маси в різних системах відліку. Лагранжева система відліку

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{17.21}$$

Перейдемо до Ейлеревої системи відліку за допомогою розкладання матеріальної похідної $\dfrac{d\rho}{dt}$ на локальну і конвективну похідні

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{17.22}$$

В результаті отримуємо рівняння збереження маси в Ейлеревій системі відліку

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{17.23}$$

Виконаємо перетворення (17.23) для отримання інваріантної форми запису рівняння збереження маси (нерозривності). При цьому використаємо перехід від векторної до тензорної форми запису

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \qquad \vec{\nabla} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\rho v^i \mathbf{e}_i\right) = 0, \tag{17.24}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{e}^m \cdot \left(\nabla_m \left(\rho v^i\right)\right)\mathbf{e}_i = 0, \tag{17.25}$$

заміна $\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \delta_i^m \nabla_m \left(\rho v^i\right) = 0, \tag{17.26}$$

в результаті отримали *інваріантну форму рівняння збереження маси*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i\right) = 0. \tag{17.27}$$

Рівняння збереження маси в декартовій системі координат приймає вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho v^i\right) = 0. \tag{17.28}$$

Рівняння збереження енергії в різних системах відліку. Лагранжева система відліку

$$C_v \frac{dT}{dt} = \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v. \tag{17.29}$$

В рівнянні (17.29) також замість знака «:» (подвійного скалярного добутку) в літературі також користуються еквівалентним позначенням «$\cdot\cdot$». Ейлереву систему відліку (отримують в результаті розкладання матеріальної похідної на локальну і конвективну похідні)

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} T\right) = \hat{\sigma} : \hat{\varepsilon} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v. \tag{17.30}$$

Виконаємо перетворення (17.30) для отримання інваріантної форми запису рівняння збереження енергії. Перейдемо від векторної форми до тензорної для представлення швидкості, напруження, деформації і оператора Гамільтона:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \qquad \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \qquad \hat{\dot{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n, \qquad \vec{\nabla} = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m}(T) \right) = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j : \dot{\varepsilon}_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \left(\lambda \mathbf{e}^n \frac{\partial}{\partial x^n}(T) \right) + q_v, \qquad (17.31)$$

використовуючи заміни в (17.31)

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^m = \delta_i^m, \ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^m = g_j^m, \ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^n = g_i^n, \ \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^n = g^{mn},$$

отримуємо

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \delta_i^m \nabla_m T \right) = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{mn} g_j^m g_i^n + \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) g^{mn} + q_v, \qquad (17.32)$$

в результаті *інваріантна форма запису рівняння збереження енергії* буде мати вигляд

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \nabla_i T \right) = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \nabla_m \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) g^{mn} + q_v, \qquad (17.33)$$

де $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji}$, $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$.

Лекція 9.5(18) **Зв'язані рівняння лінійної термопружності. Початкові і граничні умови. Рівняння термопластичності. Початкові і граничні умови**

Зв'язані рівняння лінійної термопружності. Система рівнянь МСС зв’язаної задачі лінійної термопружності для твердого середовища в наближенні малих деформацій включає рівняння руху, енергії, фізичне рівняння у вигляді закону Гука, геометричні рівняння для тензорів пружних та температурних деформацій:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \rho \mathbf{F}; \\ C_v \dfrac{dT}{dt} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + q_v; \\ \hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \left(\hat{\varepsilon}^e - \hat{\varepsilon}^T \right); \\ \hat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \mathbf{u} + \left(\vec{\nabla} \mathbf{u} \right)^T \right) = \hat{\varepsilon}^e - \hat{\varepsilon}^T; \\ \hat{\varepsilon}^T = \beta \left(T - T_0 \right) g_{ij}; \\ \dot{\hat{\varepsilon}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}, \end{cases} \tag{18.1}$$

де ρ – густина, кг/м^3; $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ – вектор швидкості $\left(\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \right)$, м/с; t – час, с; $\vec{\nabla} = \mathbf{e}^s \dfrac{\partial}{\partial x^s}$ – оператор Гамільтона, м$^{-1}$; $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор напружень, що визначається *фізичним рівнянням* – законом Гука, який встановлює зв'язок між напруженнями і деформаціями, Па; $\mathbf{F} = F^m \mathbf{e}_m$ – вектор масових сил, Па/кг; $\dot{\hat{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{mn} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n$ – тензор швидкості деформацій, який визначається через похідну $\dot{\hat{\varepsilon}} = \dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}$, с$^{-1}$; $C_v = c_v \rho$ – об’ємна ізохорна теплоємність середовища, Дж/(м^3·К); c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); T – абсолютна температура, К; λ – теплопровідність, Вт/(м·К); q_v – об’ємна густина внутрішнього джерела теплоти, що спричинена джерелом будь-якої немеханічної природи, Вт/м^3; $\overset{4}{\hat{C}}$ – тензор 4-го рангу фізичних констант, який у загальному випадку вміщує 81 компоненту, Па; $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ – вектор переміщень, м; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення середовища; T_0 і T – початкова і поточна температура середовища, відповідно; g_{ij} – метричний тензор.

Початкові і граничні умови. Початкові умови описують початковий стан середовища:

$$\mathbf{u}_0 = \varphi_u(\mathbf{x}); \tag{18.2}$$

$$T_0 = \varphi_T(\mathbf{x}), \tag{18.3}$$

де $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$.

Граничні умови:

– крайові умови Дирихле (стосуються геометричного рівнянь рівноваги та енергії)

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0; \\ T = T_b, \end{cases} \tag{18.4}$$

де перша умова відповідає умові закріплення тіла; T_b – температура на границі середовища;

– крайові умови Неймана (стосуються рівнянь рівноваги та енергії)

$$\begin{cases} \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}; \\ \mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \vec{\nabla} T\right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_{\mathrm{n}}, \end{cases} \tag{18.5}$$

де $\mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i$ – вектор зовнішньої сили, що діє на поверхні середовища; $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ – вектор густини теплового потоку на поверхні середовища;

– конвективні умови (стосуються тільки рівняння енергії)

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \vec{\nabla} T\right) = \alpha \left(T - T_{\mathrm{p}}\right), \tag{18.6}$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; T_{p} – температура оточуючого середовища;

– механічні умови абсолютного контакту

$$\begin{cases} \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\} = 0; \\ \{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}\} = 0, \end{cases} \tag{18.7}$$

де $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до поверхні контакту; $\mathbf{u}$ – вектор переміщень; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{u}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{u}^-$; $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ – компоненти напруження в нормальному напрямку до поверхні контакту; $\{\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}\} = \boldsymbol{\sigma}_n{}^+ \cdot \mathbf{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}_n{}^- \cdot \mathbf{n}^-$; «+» і «–» – означає ліворуч і праворуч від поверхні контакту;

– теплові умови абсолютного контакту

$$\begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0, \end{cases} \tag{18.8}$$

де $\{T\} = T^+ - T^-$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ – вектор густини теплового потоку.

Рівняння термо-пластичності. Розглянемо постановку задачі в наближенні теорії пластичної течії для ізотропного середовища. В інкрементарній теорії пластичності настання пластичного стану можна зв'язати з параметром аналогічним часу і всі співвідношення представляти через швидкості. Тоді рівняння рівноваги, записане через швидкості і у тензорній формі, приймає вигляд

$$\dot{\sigma}^{ij}_{,j} + \rho \dot{F}^i = 0, \; i = \overline{1,3}, \tag{18.9}$$

де ρ – густина, кг/м^3; $\dot{\sigma}^{ij}_{,j}, \dot{F}^i$ – похідні за часом.

При цьому непружні деформації ($\dot{\varepsilon}^n_{ij}$) розглядаються як початкові. Тоді узагальнений закон Гука можна записати через прирощення початкових напружень і швидкості повної деформації ($\dot{\varepsilon}_{ij}$)

$$\dot{\sigma}^{ij} = 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta^{ij} - \dot{\sigma}^{ij}_{in}, \;\; i, j = \overline{1,3}, \tag{18.10}$$

де $\dot{\sigma}^{ij}_{in} = 2G\dot{\varepsilon}^n_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}^n_{kk}\delta^{ij}, \;\; i, j = \overline{1,3}$ – компоненти прирощення початкових напружень, Па; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – пружний модуль зсуву, Па; E – модуль пружності при розтягу, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) = \dot{\varepsilon}^e_{ij} - \dot{\varepsilon}^{in}_{ij}$ – тензор повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}^e_{ij}$ – компоненти пружної і $\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} = \dot{\varepsilon}^p_{ij} + \dot{\varepsilon}^T_{ij} + \dot{\varepsilon}^I_{ij}$ – непружної частини тензора повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}^p_{ij}, \dot{\varepsilon}^T_{ij}$ – компоненти швидкості пластичної і температурної деформації, с$^{-1}$, відповідно; $\dot{\varepsilon}^I_{ij}$– швидкість початкової деформації, обумовленої іншими причинами, с$^{-1}$.

Настання пластичного стану матеріалу визначається критерієм пластичності матеріалу. Наприклад, при використанні моделі ізотропного зміцнення, маємо таку функцію настання пластичної течії середовища (або поверхню течії)

$$F\left(\sigma^{ij}, h\right) = \sigma_{\text{ekv}} - \sigma_{\text{yield}}\left(h\right) = 0\,, \qquad (18.11)$$

де $\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{3J_2}$ – еквівалентне напруження за Мізесом, Па; $J_2 = \dfrac{1}{2}s^{ij}s^{ij}$ – другий інваріант тензора девіацій напружень, Па^2; $s^{ij} = \sigma^{ij} - \dfrac{1}{3}\sigma^{kk}\delta_{ij}$, $i, j = \overline{1,3}$ – компоненти тензора девіаторних напружень, Па; $\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)$ – границя пластичності матеріалу при одновісному навантаженні, яка залежить від параметру ізотропного зміцнення середовища, Па; h– параметр, який характеризує роботу зміцнення $\left(h = \int \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}\right)$.

При $F\left(\sigma^{ij}, h\right) < 0$ має місце пружний стан середовища.

Швидкість пластичної деформації визначається асоціативним законом пластичної течії

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}\,, \qquad (18.12)$$

де $d\lambda = \dfrac{1}{\gamma'}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl}$ – невід’ємна скалярна змінна; $\gamma' = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} C^{ijkl} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} + \dfrac{\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)}{dh}\sigma^{ij}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}$ або $\gamma' = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} C^{ijkl} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} + \dfrac{\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)}{d\varepsilon_{ij}^{p}}$; $\dfrac{\sigma_{\text{yield}}\left(h\right)}{d\varepsilon_{ij}^{p}} = H'$ – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, що визначає залежність напружень від деформації при одновісному розтягуванні; C^{ijkl} – компоненти тензора 4-го рангу пружних констант середовища, Па.

Співвідношення

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl} \text{ або } \dot{\lambda} = \frac{1}{\gamma'}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}} C^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (18.13)$$

використовуються для визначення прирощення напружень і деформацій за формулою

$$\dot{\sigma}^{ij} = C^{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}\right), \tag{18.14}$$

або

$$\dot{\sigma}^{ij} = C^{ijkl}_{pl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{18.15}$$

де $C^{ijkl}_{pl} = C^{ijkl} - \frac{1}{\gamma'}C^{ijmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{rp}}C^{rpkl}$ – компоненти тензора 4-го рангу пружно-пластичних констант середовища, Па.

Для того щоб ці співвідношення застосовувати, використовуючи формулювання з початковими напруженнями, треба виконати деякі додаткові перетворення. Запишемо

$$\dot{\sigma}^{ij}_{e} = C^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{18.16}$$

де $\dot{\sigma}^{ij}_{e}$ – компоненти тензора прирощень пружних напружень, тобто значень прирощень напружень, що відповідають виключно пружним деформаціям, Па.

Вираз (18.16) тепер можна переписати дещо в іншому вигляді

$$\dot{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij}_{e} - \frac{1}{\gamma'}C^{ijmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}\dot{\sigma}^{kl}_{e}, \tag{18.17}$$

або

$$d\sigma^{ij} = d\sigma^{ij}_{e} - \frac{1}{\gamma'}C^{ijmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}d\sigma^{kl}_{e}. \tag{18.18}$$

Це рівняння означає, що істинні значення напружень можна обчислити за допомогою відповідних пружних напружень, взявши ці значення в формі прирощень. Крім того, можна обчислювати прирощення початкових напружень, скориставшись співвідношенням

$$d\sigma_p^{ij} = d\sigma_e^{ij} - d\sigma^{ij} = \frac{1}{\gamma'} C^{ijmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} d\sigma_e^{kl}, \tag{18.19}$$

де $d\sigma_p^{ij}$ – прирощення початкових напружень, Па.

Для визначення поля температур використовується рівняння енергії виду

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \hat{\sigma} : \dot{\hat{\varepsilon}} + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T\right) + q_v . \tag{18.20}$$

Початкові і граничні умови. Початкові умови включають розподіл температур та прирощення непружних напружень або деформацій середовища:

$$\begin{cases} T_{in} = \varphi_T(\mathbf{x}); \\ \dot{\sigma}_{in}^{ij} = \varphi_\sigma(\mathbf{x}) \vee \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{18.21}$$

Граничні умови:

– механічні умови

прирощення переміщень

$$\dot{\mathbf{u}} = 0; \tag{18.22}$$

прирощення зусиль

$$\dot{\hat{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{p}}; \tag{18.23}$$

– теплові умови

температурні

$$T = T_b; \tag{18.24}$$

конвективні або тепловий потік

$$\mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \nabla T\right) = \alpha\left(T - T_{\text{p}}\right) \vee \mathbf{n} \cdot \left(-\lambda \nabla T\right) = q_{\text{n}}, \tag{18.25}$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м^2·К); T_{p} – температура оточуючого середовища, К; $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла; q_{n} – нормальна складова вектора густини теплового потоку $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$, Вт/м^2.