

УДК 539.3

І. В. Зіновєєв, Н. С. Дзундза

Запорізький національний університет

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ШАРУ

Розглядаються перша, друга основні та змішана крайові задачі лінійної теорії пружності для однорідного ортотропного шару постійної товщини. На шар діє поверхнєве навантаження. Внутрішні зусилля відсутні. Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці шару, за умови плоскої деформації. Побудовано розв'язки поставлених задач. Розв'язок задачі шукається у просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є, де встановлюється співвідношення між трансформантами функції напружень та трансформантами переміщень і напружень. Шукані величини виражаються через чотири допоміжні функції, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень на верхній межі. Для отримання істинних значень напружень і переміщень в точках ортотропного шару до знайдених трансформант напружень і переміщень застосовується обернене інтегральне перетворення Фур'є. Отримано числові розв'язки для конкретних випадків та проведено аналіз результатів.

MSC: 74A10, 74B05, 74E10.

Ключові слова: ортотропний шар, плоска деформація, напружено деформований стан, функція напружень, інтегральне перетворення Фур'є.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305252](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305252).

Вступ

Досить часто в інженерній практиці виникають задачі в яких необхідно визначити напружено-деформований стан певного пружного тіла, його частини, елементів конструкцій. Для розв'язання таких задач застосовуються аналітичні, чисельні та чисельно-аналітичні методи. Зазвичай аналітичні розв'язки задач про знаходження НДС пластин отримуються за допомогою наближених методів, які базуються на зведенні початкової тривимірної задачі до більш простої двовимірної задачі.

Одним з таких методів є метод пом'якшення нев'язок розглянутий в роботах Кільчинського О. О. і Масалітіної Є. В. [1; 2], що застосовувався для розв'язання задачі про НДС ортотропної пластини під дією поверхневих навантажень. Застосування чисельно-аналітичного методу для дослідження НДС товстостінних прямокутних ізотропних пластин наведено в роботі

Григоренка О. Я. [3]. За допомогою методу сплайн-колокації вихідна тривимірною крайова задача зводиться до систем звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується методом дискретної ортогоналізації.

Також варто зазначити ефективність застосування методу граничних елементів для розрахунку ортотропних пластин. Загалом метод граничних елементів суттєво зменшив обчислювальні зусилля за рахунок зменшення розмірності задачі, оскільки дискретизувати потрібно лише границю. В роботах Jianguo W., Maokuang H. [4] і Dos Reis [5] побудовано фундаментальні розв'язки ортотропних товстих пластин з урахуванням деформації поперечного зсуву і проаналізовано за допомогою методу граничних елементів.

Необхідно також відзначити застосування методу інтегральних перетворень Фур'є описаних в роботі Антоненко Н. М., Величка І. Г. [6], для визначення контактних напружень ізотропної смуги на абсолютно жорсткій півплощині.

У даній роботі узагальнено підхід розроблений для ізотропних плоскопаралельних шарів [6; 7] на випадок ортотропного матеріалу в межах загальної схеми, що представлена в роботі [8].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Постановка завдання.

Метою роботи є побудова розв'язків першої основної, другої основної та змішаної крайових задач лінійної теорії пружності про визначення напружено деформованого стану ортотропного шару в умовах плоскої деформації.

Відомими є навантаження на поверхнях шару (перша основна крайова задача) або переміщення точок поверхонь шару (друга основна крайова задача) або на одній поверхні відомі напруження, а на другій переміщення (змішана задача).

Під шаром будемо розуміти однорідне пружне ортотропне тіло постійної товщини h обмежене паралельними площинами. Навантаження шару є таким, що деформація є плоскою. Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці шару, за умови, плоскої деформації.

Віднесемо шар до прямокутної декартової системи координат (рис. 1).

Тоді шар займає область $G(x, y) : \{-\infty < x < +\infty, -h \leq y \leq 0\}$, що

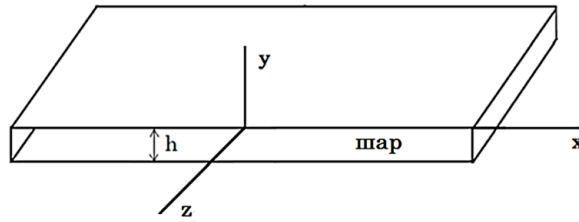


Рис. 1. Постановка задачі

обмежена площинами $y = 0$ і $y = -h$.

Матеріал шару характеризується пружними константами ν_{xz} , ν_{xy} , ν_{yz} , E_x , E_y .

Розглянемо задачу в трьох постановках, що відповідають основним крайовим (межовим) задачам механіки деформованого твердого тіла.

Перша основна крайова задача для ортотропного шару.

1. на межах $y = 0$ та $y = -h$ задані навантаження:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, 0) &= f_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = f_2(x), \\ \sigma_y(x, -h) &= f_3(x), \quad \tau_{xy}(x, -h) = f_4(x).\end{aligned}\quad (1)$$

2. на нескінченності напруження прямують до нуля:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \sigma_y(x, y) = 0, \quad \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \tau_{xy}(x, y) = 0. \quad (2)$$

Друга основна крайова задача для ортотропного шару.

На межах $y = 0$ та $y = -h$ задані переміщення:

$$u_y(x, 0) = g_1(x), \quad u_x(x, 0) = g_2(x), \quad u_y(x, -h) = g_3(x), \quad u_x(x, -h) = g_4(x). \quad (3)$$

Змішана крайова задача для ортотропного шару.

1. на верхній межі $y = 0$ задані навантаження:

$$\sigma_y(x, 0) = p_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = p_2(x). \quad (4)$$

2. на нижній межі $y = -h$ задані переміщення:

$$u_y(x, -h) = 0, \quad u_x(x, -h) = 0. \quad (5)$$

3. на нескінченності напруження прямують до нуля.

Для розв'язання поставлених задач визначаємо функцію напружень $\varphi(x, y)$ як розв'язок бігармонічного рівняння плоскої теорії пружності для ортотропного матеріалу [9].

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \left(\frac{1 + \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}}{\sqrt{E_x E_y}} - \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_y} \right) \times \\ & \times \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yx}, \nu_{yz}, \nu_{zx}, \nu_{zy}, E_x, E_y$ – пружні константи матеріалу шару.

Функція напружень $\varphi = \varphi(x, y)$ пов'язана з напруженнями та переміщеннями залежностями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= c_{11}\sigma_x - c_{12}\sigma_y, \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = c_{33}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $c_{11} = \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x}$, $c_{12} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_y}$, $c_{33} = \frac{2(1 + \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}})}{\sqrt{E_x E_y}}$ – константи пружності в законі Гука для ортотропного матеріалу [9].

Вважаємо, що у нескінченно віддалених точках при $x \rightarrow \pm\infty$ напруження та функція напружень прямують до нуля (2) та задовольняють умовам існування одновимірного інтегрального перетворення Фур'є за змінною x (при кожному значенні y). Це дозволяє отримати розв'язок задачі в просторі трансформант Фур'є [7].

2. Розв'язання задач.

Розв'язання задачі будемо проводити за схемою, що запропонована в [8].

1. Бігармонічне рівняння (6) та крайові умови (для першої основної задачі умови (1), (2), для другої задачі умови (3), для змішаної – (4), (5)) піддаються одновимірному інтегральному перетворенню Фур'є [10]:

$$\bar{F}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \cdot e^{i\xi x} dx, \quad F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\xi, y) \cdot e^{-i\xi x} d\xi,$$

де $\bar{F}(\xi, y)$ - трансформанта Фур'є функції $F(x, y)$, ξ - параметр перетворення.

Внаслідок цього переходимо до задачі в просторі трансформант Фур'є. Рівняння (6) в частинних похідних в просторі трансформант перетворюється на звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку.

$$A_1 \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial y^4} - 2A_3 \xi^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + A_2 \xi^4 \bar{\varphi} = 0, \quad (8)$$

де $A_1 = \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y}$, $A_2 = \frac{1-\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x}$, $A_3 = \frac{1+\sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}}{\sqrt{E_x E_y}} - \frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy}}{E_y}$ - константи пружності.

Крайові умови (1) в просторі трансформант приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y(\xi, 0) &= \bar{f}_1(\xi), \bar{\tau}_{xy}(\xi, 0) = \bar{f}_2(\xi), \\ \bar{\sigma}_y(\xi, -h) &= \bar{f}_3(\xi), \bar{\tau}_{xy}(\xi, -h) = \bar{f}_4(\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Знаходиться розв'язок диференціального рівняння (8) - трансформанта функції напружень та трансформанти напружень й переміщень [7] відповідно до формул:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\xi, y) &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_y(\xi, y) = -\xi^2 \bar{\varphi}, \quad \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) = i\xi \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \\ \bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} (c_{11} \bar{\sigma}_x(\xi, y) - c_{12} \bar{\sigma}_y(\xi, y)), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} (c_{33} \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}). \end{aligned} \quad (10)$$

3. Із умов на верхній межі шару знаходяться дві з чотирьох допоміжних функцій $\alpha(\xi), \beta(\xi), \gamma(\xi), \delta(\xi)$, що задаються формулами (11)

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \bar{\sigma}_y|_{y=0}, \beta(\xi) = \frac{r}{\sqrt{a_1}} \bar{u}_y|_{y=0}, \\ \gamma(\xi) &= -i\xi \bar{u}_x|_{y=0}, \delta(\xi) = -\frac{i\xi}{r\sqrt{a_1}} \bar{\tau}_{xy}|_{y=0}, \end{aligned} \quad (11)$$

а інші дві знаходяться із умов на нижній межі.

Наприклад для першої основної задачі знаходяться $\alpha(\xi) = \bar{f}_1(\xi)$ і $\delta(\xi) = \bar{f}_2(\xi)$, а для другої $\beta(\xi) = \frac{r}{\sqrt{a_1}} \cdot \bar{g}_1(\xi)$ і $\gamma(\xi) = -i\xi \cdot \bar{g}_1(\xi)$.

4. Знаходяться вирази трансформант напружень і переміщень через допоміжні функції $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$.
5. Обчислюються істинні значення напружень та переміщень за допомогою зворотного інтегрального перетворення Фур'є.

Продемонструємо більш детально застосування цієї схеми на прикладі першої основної крайової задачі.

Розв'язок $\bar{\varphi}(\xi, y)$ рівняння (8) визначається формулою:

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = A(\xi) \sinh(t) + B(\xi) \sqrt{a_1} y \sinh(t) + C(\xi) \cosh(t) + D(\xi) \sqrt{a_1} y \cosh(t), \quad (12)$$

де $r = |\xi|$, $\sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$, $t = ry\sqrt{a_1}$.

Виразимо $\bar{\varphi}(\xi, y)$ через допоміжні функції $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$ (11).

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi, y) = & (3a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta + ry(\gamma - \alpha(a_1 c_{11} + c_{12}))) \cdot \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2a_1 c_{11} r^2} - \\ & - \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11} r^2} \cdot (2\sqrt{a_1} c_{11} \alpha + ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)). \end{aligned} \quad (13)$$

Трансформанти напружень та переміщень визначаються формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = & (2\gamma a_1 - 4a_1 c_{11} \alpha - 2c_{12} \alpha - \sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)) \cdot \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11}} - \\ & - \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11}} \cdot (\sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} \alpha + c_{12} \alpha - \gamma) - (a_1 c_{11} - c_{12} + c_{33})\delta - \beta), \\ \bar{\sigma}_y = & (2\sqrt{a_1} c_{11} \alpha + ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)) \cdot \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11}} - \\ & - \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2a_1 c_{11}} \cdot (3a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta + ry(\gamma - a_1 c_{11} \alpha - c_{12} \alpha)), \\ \bar{\tau}_{xy} = & (2\sqrt{a_1} c_{11} \delta + ry(\gamma - a_1 c_{11} \alpha - c_{12} \alpha)) \cdot \frac{i\xi \cosh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11} r} - \\ & - \frac{i\xi \sinh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11} r} \cdot (\sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta) + 3a_1 c_{11} \alpha + c_{12} \alpha - \gamma), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_x = & (\sqrt{a_1} c_{11} (\gamma - 2c_{12} \alpha - 2a_1 c_{11} \alpha) - ry(a_1 c_{11} + c_{12})(a_1 c_{11} + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)) \cdot \\ & \cdot \frac{i \cosh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11} \xi} + \frac{i \sinh(ry\sqrt{a_1})}{2a_1 c_{11} \xi} \cdot (\sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} + c_{12})(\gamma - a_1 c_{11} \alpha - c_{12} \alpha) + a_1^2 c_{11}^2 \delta + \\ & + a_1 c_{11} (2c_{12} \delta + c_{33} \delta + \beta) + c_{12} (c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_y = & (a_1 c_{11} ry(\gamma - 2c_{12} \alpha + c_{33} \alpha) - a^2 c_{11}^2 ry \alpha + ry(c_{12} - c_{33})(\gamma - c_{12} \alpha) + \\ & + 2a_1 c_{11} \beta) \cdot \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11} r} - \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11} r} \cdot (a_1 c_{11} ry(2c_{12} \delta - 2c_{33} \delta - \beta) + \\ & + a_1^2 c_{11}^2 ry \delta + 5a_1 \sqrt{a_1} c_{11}^2 \alpha + ry(c_{12} - c_{33})(c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta) + \\ & + 3a_1 c_{11} (2c_{12} \alpha - c_{33} \alpha - \gamma) - (c_{12} - c_{33})(\gamma - c_{12} \alpha)). \end{aligned} \quad (15)$$

З умов на поверхні шару $\alpha(\xi) = \bar{f}_1$ і $\delta(\xi) = \bar{f}_2$. Із умов на нижній межі шару отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $\beta(\xi)$ і $\gamma(\xi)$. Розв'язавши систему отримаємо:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\Delta} \cdot (-\sqrt{a_1} \bar{f}_2 \xi (3a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot C^2 + 2a_1 \sqrt{a_1} c_{11} \xi (\sqrt{a_1} r h \bar{f}_3 - \bar{f}_1 S) \cdot C + \\ &+ 2a_1 \sqrt{a_1} c_{11} (i r^2 h \bar{f}_4 + \bar{f}_3 \xi) \cdot S - 2a_1^2 c_{11} r h \bar{f}_1 \xi + a_1^2 \sqrt{a_1} c_{11} r^2 h^2 \bar{f}_2 \xi + a_1 \sqrt{a_1} \bar{f}_2 \xi \cdot \\ &\cdot (3c_{11} + r^2 h^2 (c_{12} - c_{33})) + \sqrt{a_1} \bar{f}_2 \xi (c_{12} - c_{33})), \\ \gamma &= \frac{1}{\Delta} \cdot (-\sqrt{a_1} \bar{f}_1 \xi (c_{12} + 3a_1 c_{11}) \cdot C^2 + 2a_1 \sqrt{a_1} c_{11} (i r^2 h \bar{f}_4 - \bar{f}_2 \xi S) \cdot C + \\ &+ 2a_1 c_{11} r (i \bar{f}_4 - \xi a_1 h \bar{f}_3) \cdot S + \sqrt{a_1} \xi (\bar{f}_1 a_1 (c_{12} r^2 h^2 + 3c_{11}) + \\ &+ a_1^2 c_{11} \bar{f}_1 r^2 h^2 + 2a_1 \sqrt{a_1} c_{11} \bar{f}_2 r h + c_{12} \bar{f}_1)), \end{aligned} \quad (16)$$

де $\Delta = \sqrt{a_1} \xi (a_1 r^2 h^2 - C^2 + 1)$, $C = \cosh(ry\sqrt{a_1})$, $S = \sinh(ry\sqrt{a_1})$.

Знайдені вирази для $\alpha(\xi)$, $\delta(\xi)$ та $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$ (16) підставляємо в (14), (15). Отримані вирази підлягають зворотному інтегральному перетворенню Фур'є, що дає істинні значення шуканих величин.

Аналогічні дії застосовуються для розв'язання другої основної та змішаної задач. Наведемо необхідні формули, що відповідають пункту (3) схеми розв'язання.

Для другої крайової задачі відомими є функції $\beta(\xi) = \frac{r}{\sqrt{a_1}} \cdot \bar{g}_1(\xi)$ і $\gamma(\xi) = -i\xi \cdot \bar{g}_1(\xi)$. Інші дві функції $\alpha(\xi)$ і $\delta(\xi)$ знаходяться з відповідних умов на нижній межі (3) і описуються формулам:

$$\begin{aligned} \alpha &= ((3a_1 c_{11} + c_{12} - c_{33})(a_1^2 c_{11}^2 + a_1 c_{11} (2c_{12} + c_{33}) + c_{12} (c_{12} - c_{33})) \cdot C^2 \bar{g}_2 - \\ &- 2a_1 c_{11} \bar{g}_1 \cdot (a_1^2 c_{11}^2 + a_1 c_{11} (2c_{12} + c_{33}) + c_{12} (c_{12} - c_{33})) \cdot SC + \\ &+ 2a_1 \sqrt{a_1} c_{11} c_{12} r h \bar{g}_1 \cdot (c_{12} - c_{33}) + 2a_1^2 \sqrt{a_1} c_{11}^2 r h \bar{g}_1 (2c_{12} - c_{33}) + 2a_1^3 \sqrt{a_1} c_{11}^3 r h \bar{g}_1 - \\ &- a_1^4 c_{11}^3 r^2 h^2 \bar{g}_2 - 3a_1^3 c_{11}^3 \bar{g}_2 - a_1^2 c_{11}^2 \bar{g}_2 (a_1 r^2 h^2 (3c_{12} - 2c_{33}) + 7c_{12} + 2c_{33}) - \\ &- a_1 c_{11} \bar{g}_2 (c_{12} - c_{33}) \cdot (a_1 r^2 h^2 (3c_{12} - 2c_{33}) + 5c_{12} + c_{33}) - \\ &- c_{12} \bar{g}_2 (c_{12} - c_{33})^2 (a_1 r^2 h^2 + 1)) \cdot \frac{i}{4a_1 \sqrt{a_1} c_{11}^2 r \xi \Delta_1}, \\ \delta &= ((a_1 \sqrt{a_1} c_{11} r h \bar{g}_1 (c_{12}^2 - c_{33}^2) - (a_1^2 \sqrt{a_1} c_{11}^2 r h \bar{g}_1 (c_{12} - 2c_{33}) - a_1^3 \sqrt{a_1} c_{11}^3 r h \bar{g}_1 + \\ &+ \sqrt{a_1} c_{12} r h \bar{g}_1 (c_{12} - c_{33})^2 + a_1^2 c_{11}^2 \bar{g}_2 (a_1 r^2 h^2 (3c_{12} - 2c_{33}) - 4.5c_{12} - c_{33}) + \\ &+ c_{11}^3 \bar{g}_2 \cdot (a_1^4 r^2 h^2 - 1.5a_1^3) + a_1 c_{11} \bar{g}_2 (c_{12} - c_{33}) (a_1 r^2 h^2 (3c_{12} - c_{33}) - 2.5c_{12} - 0.5c_{33}) + \\ &+ c_{12} \bar{g}_2 (c_{12} - c_{33})^2 (a_1 r^2 h^2 - 0.5)) \cdot C^2 + (2a_1 \sqrt{a_1} c_{11} r h \bar{g}_2 (c_{12} - c_{33})^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}^2 \cdot rh\bar{g}_2(c_{12} - c_{33}) + 2a_1^3\sqrt{a_1}c_{11}^3 rh\bar{g}_2 - a_1c_{11}^3\bar{g}_1(a_1^3r^2h^2 - a_1^2) - \\
& -a_1^2c_{11}^2\bar{g}_1(-2c_{12} - c_{33} + a_1r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33})) - a_1\bar{g}_1(c_{12} - c_{33})(a_1c_{11}r^2h^2(3c_{12} - \\
& - c_{33}) - c_{12}) - a_1c_{12}r^2h^2 \cdot \bar{g}_1(c_{12} - c_{33})^2 S - a_1\sqrt{a_1}c_{11}rh\bar{g}_1(c_{12} - c_{33})(2c_{12} + c_{33}) - \\
& - a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}^2 rh\bar{g}_1(c_{12} + c_{33}) - \sqrt{a_1}c_{12}rh\bar{g}_1(c_{12} - c_{33})^2 - \\
& - 0.5c_{11}^3\bar{g}_2(a_1^4r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33}) - 7c_{12} - 2c_{33}) - \\
& - 0.5a_1c_{11}\bar{g}_2(c_{12} - c_{33})(a_1r^2h^2(3c_{12} - c_{33}) - 5c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{i}{4a_1\sqrt{a_1}c_{11}^2 r\xi\Delta_1}, \\
\Delta_1 = & \frac{i}{4a_1\sqrt{a_1}c_{11}^2 r\xi} \cdot ((5a_1^2c_{11}^2 + 3a_1c_{11}(2c_{12} - c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1^2c_{11}^2 + \\
& + a_1c_{11} \cdot (2c_{12} - c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot C^2 - a_1^5c_{11}^4 r^2h^2 - a_1^4c_{11}^3(5c_{11} + \\
& + 2r^2h^2(2c_{12} - c_{33})) - a_1^2c_{11}(3c_{11}(6c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33} - c_{33}^2) + \\
& + 2c_{12}r^2h^2(2c_{12} - c_{33})(c_{12} - c_{33})) - a_1c_{12} \cdot \\
& \cdot (2c_{11}(4c_{12} - c_{33}) + c_{12}r^2h^2(c_{12} - c_{33})) - c_{12}^2(c_{12} - c_{33})^2).
\end{aligned} \tag{17}$$

Для змішаної задачі допоміжними функціями є $\alpha(\xi) = \bar{p}_1(\xi)$ і $\delta(\xi) = \bar{p}_2(\xi)$.
З умов (5) знаходимо $\beta(\xi)$ і $\gamma(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\beta = & 2a_1c_{11}(a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot \frac{CS\bar{p}_1}{\Delta} + (a_1^2c_{11}^2 + \\
& + 2a_1c_{11}c_{12} + a_1c_{11}c_{33} + c_{12}^2 - c_{12}c_{33})(3a_1c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{S^2\bar{p}_2}{\Delta}, \\
\gamma = & (a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1c_{11} - c_{12}) \cdot \frac{S^2\bar{p}_1}{\Delta} + \\
& + 2a_1c_{11} \cdot (a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1c_{11} - c_{12}) \cdot \frac{SC\bar{p}_2}{\Delta},
\end{aligned} \tag{18}$$

де $\Delta = (a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1c_{11} - c_{12}) \cdot C^2 + (a_1c_{11} - c_{12})(3a_1c_{11} + c_{12} - c_{33})$, $C = \cosh(ry\sqrt{a_1})$, $S = \sinh(ry\sqrt{a_1})$.

Таким чином маємо всі необхідні формули для розв'язання поставлених задач. Отримані формули піддаємо оберненому інтегральному перетворенню Фур'є. Для окремих випадків вдається отримати аналітичні вирази, в загальному випадку проводиться чисельне інтегрування за допомогою адаптивних алгоритмів.

3. Числові розрахунки.

Розглянемо ортотропний шар, матеріал якого $\nu_{xy} = 0.26$, $\nu_{xz} = 0.19$, $\nu_{yz} = 0.41$, $\nu_{zy} = 0.30$, $E_x = 3.86 \cdot 10^{10}$ Па, $E_y = 8.27 \cdot 10^9$ Па. Товщина шару $h = 1$ м.

3.1. Перша основна крайова задача.

На межі $y = 0$ діє зовнішнє навантаження $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$ (Па), $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ (Па), на межі $y = -1$ навантаження $\sigma_y(x, -1) = -\frac{1}{x^2+1}$ (Па), $\tau_{xy}(x, -1) = 0$ (Па).

Як бачимо на рис. 2 значення $\sigma_y(0, 0) = 1$, $\sigma_y(0, -1) = -1$, що свідчить про виконання умов на верхній та нижній межі. Характер навантаження шару обумовлює симетричність розподілу напружень в шарі при цьому максимальні по модулю значення напружень спостерігаються вздовж лінії дії максимального нормального навантаження.

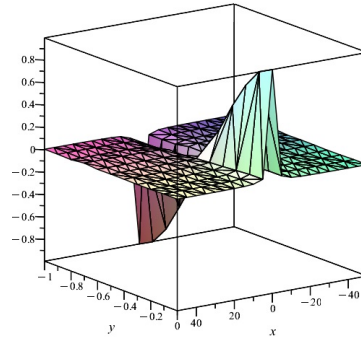


Рис. 2.: Значення напруження $\sigma_y(x, y)$

3.2. Друга основна крайова задача.

Відомі переміщення на верхній межі $u_y(x, 0) = \frac{10^{-4}}{x^2+1}$ (м), $u_x(x, 0) = 0$ (м) та на нижній межі $u_y(x, -1) = -\frac{10^{-4}}{x^2+1}$ (м), $u_x(x, -1) = 0$ (м).

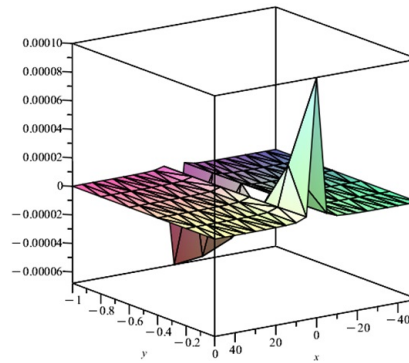
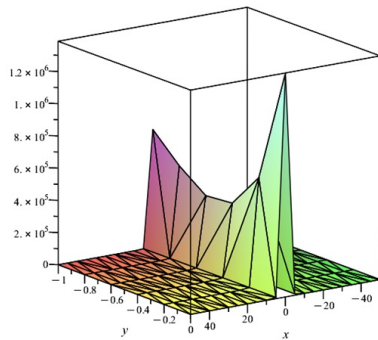
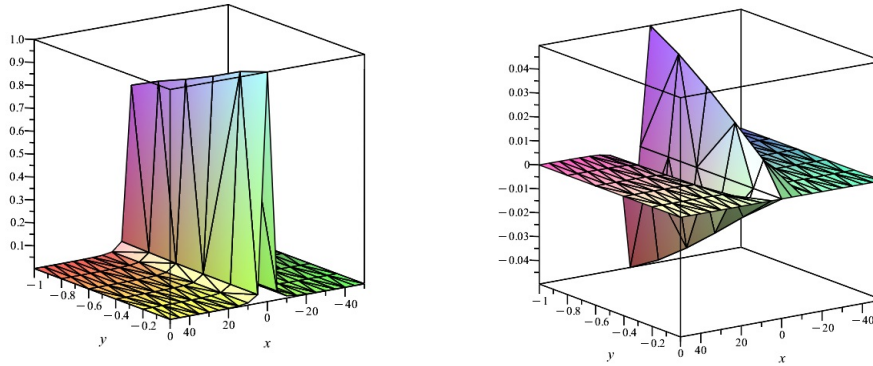


Рис. 3.: Значення напруження $\sigma_y(x, y)$ і переміщення $u_y(x, y)$

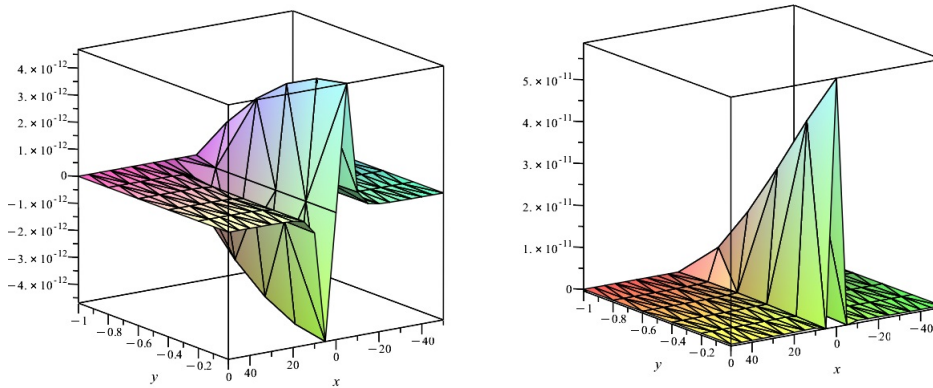
Отримані результати цілком узгоджуються з очікуваною картиною: максимальні значення поблизу $x = 0$, а за глибиною значення напружень і переміщень зменшуються і прямують до 0. Спостерігається виконання умов на верхній та нижній межах $u_y(0, 0) = 0.0001$, $u_y(0, -1) = -0.0001$.

3.3. Змішана крайова задача.

На межі $y = 0$ діє зовнішнє навантаження $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$ (Па), $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ (Па). На межі $y = -1$ переміщення дорівнюють нулю.

Рис. 4.: Значення напружень $\sigma_y(x, y)$ і $\tau_{xy}(x, y)$

Як бачимо на рис. 4 отримані значення напружень приймають найбільші значення поблизу $x = 0$ для кожного y , а при віддалені від $x = 0$ значення напружень зменшуються та на нескінченності прямують до нуля. Окрім того отримані результати свідчать про виконання умов на верхній межі $\sigma_y(0, 0) = 1$ і $\tau_{xy}(0, 0) = 0$.

Рис. 5.: Значення переміщень $u_x(x, y)$ і $u_y(x, y)$

Отримані результати для переміщень $u_x(x, y)$ і $u_y(x, y)$ демонструють симетричний характер деформування. Максимальні значення нормальних переміщень $u_y(x, y)$ відповідають лінії дії максимального нормального навантаження. На нижній межі переміщення дорівнюють нулю, що свідчить про виконання крайових умов.

ВИСНОВКИ

В роботі наведено підхід до розв'язання крайових задач лінійної теорії пружності для ортотропного шару в умовах плоскої деформації. Отримано чисельно-аналітичні розв'язки першої, другої та змішаної крайових задач, що представлені в просторі трансформант. Проведено числові розрахунки виконано їх аналіз. В перспективі планується поширення описаного методу на багат шарові основи з ортотропними шарами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Кільчинський О. О.** Уточнений метод пом'якшення нев'язок для ортотропної пластини / О. О. Кільчинський, Є. В. Массалітіна // Зб. наук. праць ДЕТУТ. Транспортні системи і технології. — 2014. — № 24. — С. 163–172.
2. **Кільчинський О. О.** Метод пом'якшення нев'язок для круглої пластини під дією масових сил / О. О. Кільчинський, Є. В. Массалітіна // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 4. — С. 481–494.
3. **Григоренко О. Я.** Розв'язання тривимірних крайових задач про згин прямокутних пластин / О. Я. Григоренко, А. С. Бергульов, С. М. Яремченко // Доп. НАН України. — 2010. — № 10. — С. 44–51.
4. **Jianguo W.** Boundary element method for orthotropic thick plates / W. Jianguo, H. Maokuang // Acta Mechanica Sinica. — 1991. — Vol. 7, № 3. — P. 258–266.
5. **Dos Reis A.** The boundary element method applied to orthotropic shear deformable plates / A. Dos Reis, E. Lima Albuquerque, L. Palermo Junior // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2013. — Vol. 37, № 4, P. 738–746.
6. **Антоненко Н. М.** Узагальнення задачі про односторонній контакт смуги з півплощиною / Н. М. Антоненко, І. Г. Величко // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — 2010. — № 1. — С. 12–18.
7. **Приварніков А. К.** Двовимірні граничні завдання теорії пружності для багат шарових основ / А. К. Приварніков. — Запоріжжя: Запорізький державний університет, 1990. — 84 с.
8. **Дзундза Н. С.** Алгоритм знаходження напружено-деформованого стану пружного ортотропного шару / Н. С. Дзундза, І. В. Зіновеев // Scientific discussion. — 2022. — Т. 1, № 64. — С. 16–20.
9. **Timoshenko S. P.** Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. — N.-Y.: McGraw-Hill, 1970. — 888 p.
10. **Bracewell R. N.** The Fourier Transform and Its Applications / R. N. Bracewell. — Boston: McGraw-Hill, 2000. — 422 p.

Zinovieiev I. V., Dzundza N. S.

SOLVING BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR AN ORTHOTROPIC LAYER

Summary

We consider the first, second basic and mixed boundary value problems of the linear theory of elasticity for a homogeneous orthotropic layer of constant thickness. The layer is subjected to a surface load. There are no internal forces. It is required to determine the stresses and displacements at an arbitrary point of the layer, assuming plane deformation. The solutions to the problem are constructed. The solution to the problem is sought in the space of transformants of the one-dimensional integral Fourier transform, where the relationship between the transformants of the stress function and the transformants of displacements and stresses is established. The desired values are expressed through four auxiliary functions that are associated with the stress and displacement transforms at the upper boundary. To obtain the true values of stresses and displacements at the points of the orthotropic layer, the inverse integral Fourier transform is applied to the found stress and displacement transforms. Numerical solutions for specific cases are obtained and the results are analyzed.

Key words: orthotropic layer, plane deformation, stress-strain state stress function, integral Fourier transform.

REFERENCES

1. Kilchynskiy, O. O., Massalitina, E. V. (2014). Utochnenyi metod pomiakshennia neviazok dlia ortotropnoi plastyny [Refined method of residual softening for an orthotropic plate]. *Collection of scientific works of DETUT. Transport Systems and Technologies*, №24, P. 163–172.
2. Kilchynskiy, O. O., Massalitina, E. V. (2018). Metod pomiakshennia neviazok dlia kruhloi plastyny pid diieiu masovykh syl [Method for mitigating inelasticities for a round plate under the action of mass forces]. *Proceedings of the International Conference Issues of Optimization of Computing*, Vol. 70, №5, P. 481–494.
3. Grigorenko, O. Y., Bergulev, A. S. and Yaremchenko, C. M. (2010). Rozviazannia tryvymirnykh kraiovykh zadach pro zghyn priamokutnykh plastyn [Solution of three-dimensional boundary value problems on bending of rectangular plates]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, Vol. 10, P. 44–51.
4. Jianguo, W., Maokuang, H. (1991). Boundary element method for orthotropic thick plates. *Acta Mechanica Sinica*. Vol. 7, № 3. P. 258–266.

5. Dos Reis, A., Lima Albuquerque, E., Palermo Junior, L. (2013). The boundary element method applied to orthotropic shear deformable plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 37, № 4. P. 738–746.
6. Antonenko, N. M., Velichko, I. G. (2010). Uzhahalennia zadachi pro odnostorononii kontakt smuhy z pivploshchynoiu [Generalization of the problem of one-sided contact of a strip with a half-plane]. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and mathematical sciences*. №1, P. 12–18.
7. Pryvarnikov, A. K. (1990). *Dvovymirni hranychni zavrannia teorii pruzhnosti dlia bahatosharovykh osnov [Two-dimensional boundary value problems of elasticity theory for multilayer bases]*. Zaporizhzhia: Zaporizhzhia State University, 84 p.
8. Dzundza, N. S., Zinovieiev, I. V. (2022). Alhorytm znakhodzhennia napruzhenodeformovanoho stanu pruzhnoho ortotropnoho sharu [Algorithm for finding the stress-strain state of an elastic orthotropic layer]. *Scientific discussion*. Vol. 1, № 64. P. 16–20.
9. Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity*., New York: McGraw-Hill, 888 p.
10. Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier Transform and Its Applications*. Boston: McGraw-Hill, 422 p.