ТЕМА 7 ФІЗИЧНІ РІВНЯННЯ ОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА

Лекція 7.1(8) **Фізичні рівняння стану. Фізичні закони для твердих тіл. Девіатор деформації і напружень. Ізотропні, ортотропні і анізотропні матеріали. Представлення фізичних рівнянь стану в тензорній формі. Тензор 4-го рангу фізичних констант. Властивості компонент тензорів 4-го рангу фізичних (пружних) констант. Перехід з однієї системи координат в іншу. Співвідношення між напруженням і швидкістю деформації для рідин і газів. Закон Нав'є-Стокса. Девіаторні та середні напруження в рідині**

Фізичні рівняння стану. Перші роботи, пов'язані з описанням поведінки твердих і рідких середовищ з'явились в XVII ст. (Гук, Ньютон)

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ – закон Гука (1612 р.)} \qquad (8.1)$$

$$\text{або} \quad \sigma = \mu\dot{\gamma}, \qquad (8.2)$$

де E – модуль пружності – коефіцієнт пропорційності в (8.1)[5], Па; μ – динамічна в'язкість – коефіцієнт пропорційності в (8.2), Па·с; $\dot{\gamma}$ – швидкість деформації зсуву, с$^{-1}$.

Фізичні закони для твердих тіл. На протязі наукових досліджень твердих і рідких тіл було виявлено, що вони працюють по різному при деформаціях (зміна форми і об'єму).

Як відомо, деформації відбуваються зі зміною об'єму і форми

$$\theta = \hat{\varepsilon} : \hat{g} = \varepsilon_{ij} g^{ij} = \varepsilon_i^i \text{ – скаляр,} \qquad (8.3)$$

де θ – деформація зміни об'єму – відношення приросту об'єму до початкового об'єму; $\frac{1}{3}\theta = \varepsilon_0$ – середня лінійна деформація.

Деформація зміни форми (*девіатор деформації*)

$$\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0 \hat{g} = \hat{D}, \qquad (8.4)$$

[5] Фізичний зміст *модуля пружності*: модуль пружності це фізична величина, яка характеризує опір матеріалу при розтягу/стисканні при пружній деформації і чисельно дорівнює напруженню, яке виникає у зразку, якщо його довжина збільшилась у два рази (тобто при деформації у 100%).

де $\hat{D}$ – девіатор деформації; $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_i^i$ – середня лінійна деформація.

Девіатор напружень визначається як

$$\hat{S} = \hat{\sigma} - \sigma_0 \hat{g}\,, \tag{8.5}$$

де $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma^{ij} g_{ij} = \frac{1}{3}\hat{\sigma} : \hat{g} = \frac{1}{3}\sigma_i^i$ – скаляр – середнє напруження це напруження еквівалентне усесторонньому стиску з від'ємним знаком.

Для твердих тіл зв'язок між напруженнями і деформаціями не завжди однаковий. В ізотропних тілах – відношення між напруженнями і деформаціями найбільш прості. Для *ізотропних* матеріалів достатньо знати 2 константи, для *ортотропних* – 9, а для *анізотропних* – 21.

В рідинах та газах властивості приймаються ізотропними, тобто однаковими в різних напрямах.

Представлення фізичних рівнянь стану в тензорній формі. Складність фізичних рівнянь полягає в тому, що їх можна визначити тільки експериментальним шляхом. Запишемо закон Гука у тензорній формі в декартовій системі координат для ізотропного середовища

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}\,, \\
\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}\,, \\
\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (2\mu + \lambda)\varepsilon_{33}\,, \\
\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}\,,\ \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}\,, \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}\,,
\end{gathered} \tag{8.6}$$

де μ, λ – коефіцієнти Ламе 1-го і 2-го родів, відповідно, Па.

Рівняння (8.6) можна об'єднати в одне

$$\sigma_{ij} = \left[\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\varepsilon_{kl}\,, \tag{8.7}$$

де δ – символи Кронекера.

Рівняння (8.6) також можна переписати у більш компактному вигляді

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\,, \tag{8.8}$$

або у векторній формі

$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{\varepsilon} + \lambda\mathbf{I}\hat{\varepsilon}\,, \tag{8.9}$$

де $\mathbf{I}$ – одиничний тензор.

Записи (8.8), (8.9) дістали назву узагальненого закону Гука і справедливі тільки для декартової системи координат.

Перепишемо (8.7) через контраваріантні компоненти тензорів у вигляді

$$\sigma^{ij} = \left[\mu\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right) + \lambda\delta^{ij}\delta^{kl}\right]\varepsilon_{kl} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{8.10}$$

де C^{ijkl} – тензор 4-го рангу, тому що із властивостей скалярного добутку векторів витікає: якщо з трьох тензорів два є тензорами, то і третій також є тензором.

Вираз (8.10) також називається узагальненим законом Гука.

Перепишемо (8.10) у векторній формі

$$\hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\varepsilon}, \tag{8.11}$$

де $\overset{4}{\hat{C}}$ – *тензор 4-го рангу фізичних констант*, який вміщує 81 компоненту; $\overset{4}{\hat{C}} = \left(\mu\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right) + \lambda\delta^{ij}\delta^{kl}\right)\varepsilon_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$; $\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$; $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{kl}\mathbf{e}^k\mathbf{e}^l$.

Властивості компонент тензорів 4-го рангу фізичних (пружних) констант. Перехід з однієї системи координат в іншу. Для переходу із однієї системи координат в іншу використовується тензор перетворення координат $c_i^{j'}$

$$C^{p'q'r't'} = C^{ijkl}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'}. \tag{8.12}$$

Підставимо в (8.12) C^{ijkl} із (8.10), отримаємо

$$\begin{aligned} C^{p'q'r't'} &= \left(\mu\left(\delta^{ik}\delta^{jl}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'} + \delta^{il}\delta^{jk}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'}\right) + \right. \\ &+ \lambda\delta^{ij}\delta^{kl}c_i^{p'}c_j^{q'}c_k^{r'}c_l^{t'}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Введемо заміну

$$\begin{gathered} \delta^{ik}c_i^{p'}c_k^{r'} = g^{p'r'}, \quad \delta^{il}c_i^{p'}c_l^{t'} = g^{p't'}, \quad \delta^{jl}c_l^{q'}c_l^{t'} = g^{q't'}, \\ \delta^{jk}c_j^{q'}c_k^{r'} = g^{q'r'}, \quad \delta^{ij}c_i^{p'}c_j^{q'} = g^{p'q'}, \quad \delta^{kl}c_k^{r'}c_l^{t'} = g^{r't'}. \end{gathered} \tag{8.14}$$

З врахуванням заміни (8.14) вираз (8.13) запишеться у вигляді

$$C^{p'q'r't'} = \mu\left(g^{p'r'}g^{q't'} + g^{p't'}g^{q'r'}\right) + \lambda g^{p'q'}g^{r't'}. \qquad (8.15)$$

Вираз (8.15) є формулою для тензора 4-го рангу фізичних властивостей матеріалу для будь-якої системи координат.

Таким чином, співвідношення для довільної системи координат можна отримати за допомогою тензора перетворень координат.

Розглянемо зв'язок між коефіцієнтами Ламе 1-го і 2-го родів та модулем пружності E і коефіцієнтом Пуассона ν. Запишемо вираз для девіаторних напружень і середнього напруження

$$S^{ij} = \mu D^{ij}, \quad \sigma_0 = K\varepsilon_0,$$

де $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_i^i$ – середня лінійна деформація; $K = \frac{E}{1-2\nu}$ – модуль стисливості матеріалу; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; ν – коефіцієнт Пуасона)[6].

Девіаторні напруження також можна виразити через модуль зсуву

$$S^{ij} = GD^{ij},$$

де $G \equiv \mu$ модуль зсуву)[7], Па.

Запишемо співвідношення для компонент тензора деформації для ортотропних матеріалів через вектор модуля пружності $\vec{E}$, тензор коефіцієнта Пуассона $\hat{\nu}$ і тензор модуля зсуву $\hat{G}$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{33}; \qquad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2};$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{33}; \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3};$$

---

[6] Фізичний зміст *коефіцієнта Пуассона*: коефіцієнт Пуассона ізотропного матеріалу це фізична величина, яка характеризує пружні властивості матеріалу і визначається відношенням поперечного стискання до повздовжнього розтягу зразка матеріалу і лежить в межах ($0 < \nu \le 0{,}5$). Для абсолютно крихкого матеріалу $\nu = 0$, а для абсолютно пружного $\nu = 0{,}5$.

[7] Фізичний зміст *модуля зсуву*: модуль зсуву це фізична величина, яка чисельно дорівнює дотичному напруженню, яке виникло б у зразку при відносному зсуві рівному 100 % (при умові, що закон Гука виконується).

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33}; \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}; \qquad \varepsilon_{13} = \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13}; \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23},$$

де $G_{ij} = \dfrac{E_i}{2\left(1+\nu_{ij}\right)}$ – компоненти тензора пружного модуля зсуву; E_i – компоненти вектора модуля пружності при розтягу; ν_{ij} – компоненти тензора коефіцієнта Пуассона.

При визначенні тензора деформації $\hat{\varepsilon}$ для ортотропних матеріалів необхідно знати 9 констант, які визначаються експериментально (3 компоненти модуля пружності при розтягу і 6 компонент коефіцієнта Пуассона $\hat{\nu}$).

Співвідношення між напруженням і швидкістю деформації для рідин і газів. Запишемо *закон Нав'є-Стокса*, який встановлює зв'язок між напруженнями і швидкістю деформації в декартовій системі координат

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = \left(2\mu+\lambda\right)\dot{\varepsilon}_{11} + \lambda\dot{\varepsilon}_{22} + \lambda\dot{\varepsilon}_{33} - p, \\
\sigma_{22} = \lambda\dot{\varepsilon}_{11} + \left(2\mu+\lambda\right)\dot{\varepsilon}_{22} + \lambda\dot{\varepsilon}_{33} - p, \\
\sigma_{33} = \lambda\dot{\varepsilon}_{11} + \lambda\dot{\varepsilon}_{22} + \left(2\mu+\lambda\right)\dot{\varepsilon}_{33} - p, \\
\sigma_{12} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{12},\ \sigma_{13} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{13}, \sigma_{23} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{23},
\end{gathered} \tag{8.16}$$

де p – зовнішній гідростатичний тиск, Па; μ – коефіцієнт в'язкості 1-го роду)[8], Па·с; λ – коефіцієнт в'язкості 2-го роду (пов'язаний зі швидкістю зміни об'єму), Па·с; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – тензор швидкості деформації, с$^{-1}$.

Запишемо *закон Нав'є-Стокса* у векторній формі через тензор фізичних властивостей рідини 4-го рангу

$$\hat{\sigma} = \overset{4}{\hat{C}} : \hat{\dot{\varepsilon}} - p\hat{g}, \tag{8.17}$$

де $\hat{g}$ – метричний тензор;

---

[8] Фізичний зміст *динамічної в'язкості* або коефіцієнта внутрішнього тертя: (з фізичної точки зору динамічна в'язкість представляє собою питому силу тертя при градієнті швидкості, рівному одиниці – у відповідності з законом в'язкості Ньютона $\sigma^{11} = -2\mu\dfrac{\partial v^1}{\partial x^1} + \dfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\left(\mathbf{vI}\right)$.

$\overset{4}{\hat{C}} = C^{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$; $C^{ijkl} = \mu\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \lambda g^{ij}g^{kl}$ – тензор 4-го рангу в’язкості.

Девіаторні напруження в рідині визначаються співвідношенням у векторній формі

$$\hat{S} = 2\mu\hat{D}. \tag{8.18}$$

Середнє напруження

$$\sigma_0 = k\dot{\varepsilon}_0 - p,$$

де $\dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_i^i$ – швидкість середньої лінійної деформації; k – коефіцієнт швидкості зміни об’єму.