ЧАСТИНА 1
ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. ВСТУП

Моделювання як метод дослідження відоме дуже давно – ще з часів Леонардо да Вінчі та Галілея. З розвитком виробничих сил суспільства воно знаходить усе нові й нові застосування. У сучасному світі моделювання стало складовою частиною не тільки експериментальних досліджень і конкретного технічного проектування – інженерної справи; завдяки моделюванню створюються абстрактні теорії, воно використовується в усіх галузях науки.

Математичне моделювання є найвищою формою моделювання. Воно сприяло розвитку науки й техніки індустріального суспільства, а з появою електронно-обчислювальних засобів обробки інформації привело до бурхливого розвитку сучасного – постіндустріального – суспільства.

Термін *модель* походить від латинських слів *modus, modulus,* які означають *міра, образ, спосіб.* У багатьох мовах світу вслід за латинською з’явились відповідні слова: *modello* – в італійській, *modelo* – в іспанській, *modelle* – у французькій, *model* – в англійській, *Modell* – у німецькій, *модель* – у російській та українській.

Початковий розвиток моделі отримали в будівельному мистецтві. Моделями стали називати речі, виготовлені на основі вимірів, які відтворювали існуючі об’єкти або були зразками для нових – ще не існуючих.

Надалі термін *модель* поступово набуває іншого змісту. Так, моделлю почали називати уявну або матеріальну структуру, що зображує у зручній формі стан деякої системи, процеси в якій мають бути вивчені. Разом з тим на певних етапах розвитку суспільства моделями стали вважати зображення систем, явищ або процесів, які вивчаються за допомогою систем, явищ або процесів іншої природи, іноді навіть уявних.

Найпростішими прикладами є добре відома модель ефіру, яка використовувалася для пояснення поширення електромагнітних коливань у просторі, та модель електричного струму, який моделювався рідиною, що тече провідником. Поняття моделі тут значною мірою збігається з поняттям аналогії, причому навіть з'явилась тенденція вважати аналогію загальним випадком моделі, що не зовсім вірно, оскільки аналогія відображає умовні, часто поверхові співвідношення.

1.2. ОСНОВНІ КАТЕГОРІЇ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання. Метод моделювання є методом дослідження властивостей певного об'єкта (оригіналу) за допомогою вивчення властивостей іншого об'єкта (моделі), який є зручнішим для дослідження і знаходиться у певній відповідності до першого об'єкта (оригіналу).

Моделювання – це побудова (або вибір) і вивчення такого об'єкта будь-якої природи (моделі), що здатний замінити собою досліджуваний об'єкт (оригінал) і вивчення якого дає нову інформацію про досліджуваний об'єкт.

Оригінал. У теорії моделювання *оригінал* – це об'єкт, певні властивості (аспекти) якого підлягають вивченню методом моделювання.

У загальному випадку поняття оригіналу має широку інтерпретацію. Воно охоплює об'єкти (системи, підсистеми, елементи), як реально існуючі, так і такі, що проектуються, а також явища, режими і процеси, які в них відбуваються.

Означимо коротко терміни, які зустрічаються у визначенні оригіналу. *Система* – це сукупність компонентів, яка розглядається як єдине ціле й організована для розв'язання певних функціональних задач так, що два будь-які її компоненти взаємозалежні завдяки деякому системостворюючому відношенню.

У системі можуть бути виділені *підсистеми* – відносно самостійні частини системи, які пов'язані функціонально між собою, а також *елементи* – компоненти системи, які приймаються за відповідної постановки задачі як неподільні.

Явище – це сукупність процесів, які є супутніми функціонуванню або поведінці системи й виявляються у вигляді змін стану або режимів цієї системи.

Режим – це стан системи, який визначається багатьма різними процесами й залежить як від власних параметрів системи, так і від параметрів збурюючих впливів.

Існують стаціонарні (усталені) і нестаціонарні (перехідні) режими.

Стаціонарний режим – це такий стан системи, за якого параметри режиму не змінюються в часі.

У протилежному випадку режим є *нестаціонарним* (перехідним).

Процес – це закономірна послідовна зміна деякої групи параметрів режиму, які називаються параметрами процесу.

Система також характеризується своїми параметрами. Наприклад, при дослідженні механічних явищ параметрами процесів є сили, швидкості, прискорення, а параметрами системи – маси тіл, коефіцієнти тертя, в'язкості рідин тощо.

Системи, у яких параметри є сталими на всьому інтервалі часу, протягом якого відбувається процес, що вивчається, називаються *лінійними*.

Системи, у яких хоча б один параметр змінюється як функція іншого або кількох інших параметрів, називаються *нелінійними*.

Модель. Це допоміжний об'єкт, який знаходиться у певній відповідності до об'єкта, що вивчається (оригіналу), і є більш зручним для дослідження оригіналу.

Відображаючи окремі особливості поведінки об'єкта-оригіналу, модель має деякі риси, ідентичні з оригіналом, і використовується для одержання такої інформації про оригінал, яку важко або неможливо одержати шляхом безпосереднього дослідження оригіналу.

Інтуїтивні уявлення про модель найчастіше асоціюються з технічними засобами, які застосовуються для створення відповідного „еквівалента" об'єкта дослідження, адекватного йому в тому чи іншому сенсі, але практично більш зручного для розв'язання поставлених задач.

Як приклад розглянемо моделі літака. Це матеріальні моделі, оскільки вони є фізичними, матеріальними об'єктами. Модель літака може бути натурною, тобто точною копією літака, яка від оригінала відрізняється тільки розмірами. Така модель, як правило, не може літати. Натурні моделі використовують, наприклад, як експонати на виставках, замість літака-оригіналу.

Інший тип моделі літака – це його функціональна модель (напр., так звана схематична). Вона не відображує зовнішності жодного літака. Такі моделі будують юні авіамоделісти у шкільних гуртках. Ці моделі використовуються для відтворення найважливішої функції літака – його здатності літати.

Проте поняття моделі принципово і суттєво ширше: функції моделі може виконувати не тільки спеціально створений експериментальний пристрій, але й явище, яке спостерігається, і символічне (знакове) описання оригіналу (текстове описання, математичне рівняння, креслення, схема тощо), і уявний образ. Тому у загальному випадку модель – це явище, технічний засіб, знакове утворення або інший умовний образ, що знаходиться у певній відповідності (схожості, подібності) до об'єкта-оригіналу, який вивчається. Модель може замінити оригінал у процесі дослідження, надаючи про нього необхідну інформацію.

Як приклад можна назвати математичну модель гармонійних коливань. З фізики відомо, що диференціальне рівняння вільного коливання пружинного маятника має вигляд

$$m\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\psi\xi(t)\,, \tag{1.1.1}$$

де $\xi(t)$ – відхилення центра мас пружинного маятника від положення рівноваги в момент часу t ; m – маса маятника; ψ – коефіцієнт пружності пружини; $\psi\xi(t)$ – сила, яка діє на маятник з боку пружини. Якщо позначимо

$$\frac{\psi}{m} = \omega_0{}^2, \quad \xi(t) = z ,$$

то рівняння (1.1.1) можна переписати у загальній формі рівняння вільних коливань

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0{}^2 z = 0. \qquad (1.1.2)$$

Розглянемо вільні коливання в електричному контурі. Якщо позначити ємність конденсатора C , його заряд у момент часу t – $q(t)$, а індуктивність котушки – L , то рівняння коливань в електричному контурі набуде вигляду

$$L\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0. \qquad (1.1.3)$$

Введемо позначення

$$\frac{1}{LC} = \omega_0{}^2, \quad q(t) = z$$

і отримаємо знову рівняння (1.1.2).

Отже, рівняння (1.1.2), яке описує різні за природою коливальні процеси, є математичною моделлю гармонійних коливань. Ця модель, на відміну від попереднього прикладу моделей літака, є уявною. Оскільки при її побудові отримується звичайне диференціальне рівняння, то вона є математичною моделлю. Повна класифікація моделей і способи їх побудови будуть наведені далі.

Подібність. Наведене визначення моделі дозволяє сформулювати вимоги, які мають задовольняти методи моделювання.

1. Методи моделювання мають наділяти модель здатністю відображення реально існуючого об’єкта або об’єкта, що проектується.

2. Методи моделювання мають базуватися на певних правилах, які б дозволяли встановлювати взаємооднозначну відповідність між моделлю й оригіналом.

3. Методи моделювання мають забезпечити можливість створення моделі, яка, з одного боку, була б достатньо простою, а з іншого – могла б з необхідною повнотою й достовірністю відобразити ту частину властивостей оригіналу, яка є суттєвою саме в даному дослідженні і при даній постановці задачі.

Забезпечення третьої вимоги залежить великою мірою від майстерності й досвіду дослідника, а виконання першої і другої – забезпечується теорією подібності.

Поняття подібності було запозичено з геометрії. *Геометрична подібність* у найпростішому випадку подібності многокутників полягає в тому, що многокутники з однаковою кількістю сторін подібні, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони – пропорційні.

Тобто, якщо

$$l_{1_A}, l_{2_A}, ..., l_{n_A}; \alpha_{1_A}, \alpha_{2_A}, ..., \alpha_{n_A}$$

– сторони й кути n-кутника A,

$$l_{1_B}, l_{2_B}, ..., l_{n_B}; \alpha_{1_B}, \alpha_{2_B}, ..., \alpha_{n_B}$$

– сторони й кути n-кутника B, то мають виконуватися такі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_{1_A}}{l_{2_B}} = \frac{l_{2_A}}{l_{2_B}} = ... = \frac{l_{n_A}}{l_{n_B}} = m_l; \\ \frac{\alpha_{1_A}}{\alpha_{1_B}} = \frac{\alpha_{2_A}}{\alpha_{2_B}} = ... = \frac{\alpha_{n_A}}{\alpha_{n_B}} = m_\alpha = 1. \end{aligned} \right\} \qquad (1.1.4)$$

Подібність, таким чином, означає існування певних масштабних співвідношень типу (1.1.4) для параметрів відповідних елементів об’єктів, які зіставляються – многокутників. Ці співвідношення визначають правила переходу від параметрів одного з об’єктів до відповідних параметрів іншого. Масштабні коефіцієнти (масштаби) m_l і m_α, які характеризують пропорційність відповідних параметрів, у теорії подібності називають також *коефіцієнтами подібності.* У співвідношеннях (1.1.4) – це m_l і m_α. Умови вигляду (1.1.4) можна сформулювати інакше, якщо ввести систему прямокутних координат Oxy: при геометричній подібності всі координати x_{i_A}, y_{i_A} першого многокутника пропорційні відповідним координатам x_{i_B}, y_{i_B} другого многокутника

$$\frac{x_{i_A}}{x_{i_B}} = m_x, \frac{y_{i_A}}{y_{i_B}} = m_y, m_x = m_y, \qquad (1.1.5)$$

де x_i і y_i – координати відповідних точок, які знаходяться на відрізках, що складають контури відповідного (A чи B) многокутника.

Для геометричної подібності у тривимірному просторі до співвідношень (1.1.5) додається

$$\frac{z_{i_A}}{z_{i_B}} = m_z, \qquad (1.1.6)$$

і при цьому $m_x = m_y = m_z$.

Подальшим розвитком і узагальненням поняття геометричної подібності є поняття *афінної подібності*, при якій допускається нерівність масштабів по окремих координатах x, y, z. У цьому випадку геометричні фігури або тіла деформуються: круг перетворюється на еліпс, паралелепіпед з нерівними ребрами – на куб і т. д. Для відповідних точок $(x_{i_A}, y_{i_A}, z_{i_A})$ і $(x_{i_B}, y_{i_B}, z_{i_B})$ при афінній подібності замість (1.1.5) і (1.1.6) будуть справедливими співвідношення

$$\frac{x_{i_A}}{x_{i_B}} = m_x, \frac{y_{i_A}}{y_{i_B}} = m_y, \frac{z_{i_A}}{z_{i_B}} = m_z$$

і, наприклад, $m_x \neq m_y = m_z$.

Поняття подібності фізичних процесів (об'єктів) є розвитком поняття афінної подібності.

Нехай фізичний процес A характеризується певною функціональною залежністю

$$F(P_1, P_2, ..., P_n) = 0$$

між сукупністю параметрів $P_1, P_2, ..., P_n$, що характеризують процес і систему, у якій він відбувається.

Розглянемо цю функціональну залежність у n-вимірному узагальненому координатному просторі $x_1, x_2, ..., x_n$, у якому параметри $P_1, P_2, ..., P_n$ вимірюються у відповідних координатах $x_1, x_2, ..., x_n$.

Нехай у цій же системі відбувається ще один фізичний процес B, який описується функціональною залежністю $f(R_1, R_2, ..., R_n) = 0$. Він характеризується параметрами $R_1, R_2, ..., R_n$, відповідними до параметрів $P_1, P_2, ..., P_n$, які можуть відрізнятися від $R_1, R_2, ..., R_n$ лише своїми значеннями. Якщо при цьому всі відповідні параметри пропорційні, тобто

$$\frac{P_1}{R_1} = m_1, \frac{P_2}{R_2} = m_2, ..., \frac{P_n}{R_n} = m_n, \qquad (1.1.7)$$

то процеси A і B є подібними.

У зв'язку з тим, що певні параметри P_i, як і параметри R_i, можуть бути взаємозалежними, не всі масштабні коефіцієнти $m_1, m_2, ..., m_n$ подібних фізичних процесів можуть набувати незалежних значень. Це дає можливість упровадження деяких узагальнених характеристик подібних процесів – *критеріїв подібності*, які є функціями груп залежних і незалежних параметрів.

Масштабні коефіцієнти m_i у загальному випадку можуть бути чисельно різними для певних груп подібних процесів, що зіставляються. А критерії подібності набувають однакових значень для всіх подібних процесів у відповідних точках узагальненого координатного простору $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пропорційність параметрів (1.1.7) є частинним випадком подібності фізичних процесів. У загальному ж випадку під подібністю розуміють таку взаємооднозначну відповідність між процесами (об'єктами), що зіставляються, за якої правила переходу від параметрів, що характеризують один із процесів (об'єктів), до параметрів, які характеризують інший процес (об'єкт), відомі, а математичне описання процесів (об'єктів), якщо воно може бути отримане, допускає їх перетворення до однакового вигляду**.**

1.3. КЛАСИФІКАЦІЯ ВИДІВ ПОДІБНОСТІ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Абсолютна подібність. При встановленні такої подібності можуть порівнюватися між собою процеси в різних системах. Такі процеси є абсолютно подібними, якщо подібними є і процеси, і системи, у яких вони відбуваються. При цьому пропорційність (1.1.7) відповідних параметрів систем і процесів у них можлива при $m_i = \text{const}$, $m_i = \text{var}$, $m_i = g\left(P_{i-r}, P_{i+k}, ...\right)$ тощо.

Таким чином, оригінал і його модель будуть абсолютно подібними, якщо подібними є системи, з яких вони складаються, а також процеси, які в них відбуваються.

Якщо і оригінал, і модель є матеріальними об'єктами, то вони за абсолютної подібності мають бути структурно і фізично ідентичними; різними в них можуть бути лише значення параметрів, які характеризують елементи структури оригіналу й моделі.

Абсолютна подібність на практиці значною мірою є абстрактним поняттям. Повною мірою вона реалізується тільки при математичному моделюванні процесів. У цьому разі оригінал і модель описуються однаковими функціональними залежностями чи рівняннями, відповідні змінні в яких є пропорційними.

Практична подібність. При застосуванні теорії подібності в технічних задачах виникає необхідність введення *практичної подібності.* Розрізняють повну, неповну й наближену практичні подібності.

Повна практична подібність (або *повна подібність*) – це подібність протікання в часі й у просторі тільки тих процесів, які є суттєвими для даного дослідження і з достатньою повнотою характеризують явище, що вивчається, згідно з конкретною постановкою задачі дослідження.

Відповідно, якщо при моделюванні забезпечена повна практична подібність, то має місце *повне моделювання*.

Неповна практична подібність (або *неповна подібність*) – це подібність протікання процесів або тільки в часі, або тільки у просторі.

Цій подібності відповідає *неповне моделювання*.

Наближена практична подібність (або *наближена подібність*) характеризується існуванням спрощувальних припущень, які приводять до певної відмінності процесів, що розглядаються як подібні. Ця відмінність вважається допустимою на основі попередніх оцінок, які отримуються при додаткових дослідженнях. Цій подібності відповідає *наближене моделювання*. Воно, як і наближена подібність, також може бути як повним, так і неповним. Класифікацію типів моделювання наведено на рис. 1.1.1.

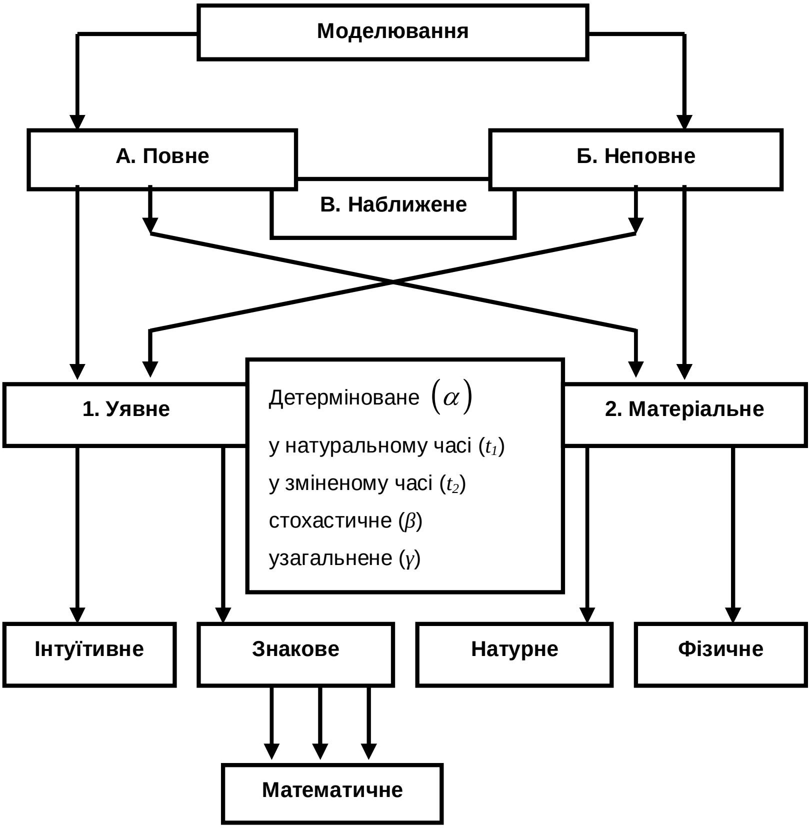

Рис. 1.1.1

Далі всі вказані типи моделювання диференціюються на *уявні* (1) і *матеріальні* (2) залежно від способу їх матеріальної реалізації.

Модель називають матеріальною, якщо вона відтворює основні фізичні, динамічні, геометричні й функціональні параметри об'єкта, що досліджується.

Частинним випадком матеріального моделювання є *натурне* моделювання. При такому моделюванні, залежно від його мети, модель у найпростішому випадку може тільки зовнішньо копіювати об'єкт, тобто бути лише його репрезентативною моделлю. Однак натурна модель може бути настільки складною й максимально наближеною до оригіналу, що за спеціально підібраних умов можна отримати корисну для дослідника інформацію як результат натурного експерименту з моделлю. Надалі виникають принаймні дві проблеми: як обробити отриману інформацію найбільш раціонально, щоб одержати максимальну кількість достовірних даних, і як потім відповідно інтерпретувати отримані результати про матеріальну модель у термінах об'єкта, що вивчається.

Другим частинним випадком матеріального моделювання є *фізичне моделювання.* У цьому випадку об'єкт, що моделюється, і модель мають одну й ту саму фізичну природу, між ними досягається фізична подібність.

Клас так званих *уявних (ідеальних) моделей* створюється як результат побудови ідеальних (уявних) аналогій.

Розрізняють два підкласи моделей: *інтуїтивні* й *знакові*. Інтуїтивні моделі часто виникають у тих сферах знань, які знаходяться ще на попередньому, описовому етапі розвитку дослідження. При такому моделюванні, як правило, не використовуються чітко фіксовані знакові системи. Деякі поняття свідомо подаються дещо розмитими, багатозначними. Така модель може описуватися словесно з використанням гіпотез.

Знакова модель є формалізованим описанням об'єкта з використанням більш-менш економних форм (мова, схема, креслення, формула тощо). До знакових моделей належать, наприклад, географічні карти, хімічні моделі, зображені у вигляді умовних знаків, а також різні топологічні й графові побудови.

Надалі нас в основному буде цікавити важливий частинний випадок знакового моделювання – *математичне моделювання.* Математичне моделювання ґрунтується на математичній подібності, за якої виявляється відповідність схожих параметрів процесів різної фізичної природи, що порівнюються між собою.

Знакову модель з використанням математики можна описати різними способами: аналітично (у вигляді заданих функціональних співвідношень, диференціальних, інтегральних, різницевих рівнянь тощо), алгоритмічно, графічно і т. п. Математичними уявними моделями можна вважати алгоритми й програми, розроблені для обчислювальних машин, які в умовних знаках відбивають (моделюють) певні процеси, що описані диференціальними рівняннями, покладеними в основу алгоритмів, а також різні структурні схеми, які відображають функціональні зв’язки між підсистемами складних систем.

Усі види таких математичних формалізацій будемо об’єднувати однією назвою – *математична модель*, а зміст цього терміну уточнюється залежно від конкретної ситуації.

Як уявні, так і матеріальні типи моделювання можуть бути або детермінованими (α) (відображають детерміновані процеси з однозначно визначеними причинами та їх наслідками), або стохастичними (β) (відображають імовірнісні події). Подібність і моделювання будь-якого типу ($1, 2, A, Б, В, \alpha, \beta$) можуть бути узагальненими (γ), тобто відображати явища оригіналу з тією чи іншою умовністю й реалізовуватися в реальному часі (t_1) при вивченні лінійних систем, а також у зміненому (t_2) відносно реального – при вивченні нелінійних.

2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. ВСТУП

Надалі зосередимось на вивченні математичного моделювання. Нагадаємо, що під математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об’єкта на його математичній моделі. Метою математичного моделювання є виявлення оптимальних умов протікання процесу, керування ним на основі математичної моделі та перенесення результатів на об’єкт.

Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого використання математичного моделювання. Сутність цієї методології полягає в заміні об’єкта, що досліджується, його образом – математичною моделлю – і подальшим вивченням моделі як методами математичного аналізу (аналітично), так і за допомогою обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються на електронних обчислювальних машинах.

Цей метод пізнання, конструювання, проектування поєднує в собі переваги як теорії, так і експерименту. Робота не з самим об’єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість безболісно, відносно швидко і без суттєвих витрат вивчати його властивості й поведінку в будь-яких можливих ситуаціях (переваги теорії). У той же час, обчислювальні експерименти (комп’ютерні, симуляційні, імітаційні) з моделями об’єктів дозволяють, опираючись на можливості сучасних обчислювальних методів і технічних засобів інформатики, детально й глибоко вивчати об’єкти з достатньою повнотою, недоступною чисто теоретичним (аналітичним) підходам (переваги експерименту). Не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплюючи все нові сфери – від розробки технічних систем і керування ними до аналізу найскладніших економічних і соціальних процесів.

Використання математичного моделювання можна хронологічно розбити на три етапи його розвитку.

Елементи математичного моделювання використовувались із самого початку виникнення точних наук. Не випадково, що деякі методи обчислень названі іменами таких корифеїв науки, як Ньютон і Ейлер, а слово *алгоритм* походить від імені середньовічного арабського вченого Аль-Хорезмі.

Друге народження цієї методології припало на кінець 40-х – початок 50-х рр. XX ст. і було зумовлено принаймні двома причинами. Перша з них – поява ЕОМ. Друга – безпрецедентне соціальне замовлення – виконання національних програм США і СРСР зі створення ракетно-ядерного щита, які не могли бути реалізованими традиційними методами. Математичне моделювання справилося з цією задачею: ядерні вибухи та польоти ракет і супутників були спочатку здійснені у надрах ЕОМ за допомогою математичних моделей, і лише потім – на практиці.

Зараз математичне моделювання вступає у третій принципово важливий етап свого розвитку – воно вбудовується у структури так званого інформаційного суспільства. Без володіння інформаційними ресурсами не можна навіть уявити розв’язання масштабних проблем, які стоять перед світовою спільнотою. Однак інформація як така мало що дає для аналізу і прогнозу, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Потрібні надійні способи переробки інформаційної сировини на готовий продукт, тобто на точне знання. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може й має бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства.

Технічні, екологічні, економічні та інші системи, які вивчаються сучасною наукою, більше не піддаються дослідженню (з потрібною повнотою й точністю) звичайними теоретичними методами. Прямий натурний експеримент над ними є довгим, дорогим, часто або небезпечним, або просто неможливим, оскільки багато з цих систем існують у єдиному екземплярі. Ціна помилок і прорахунків у поводженні з ними неприпустимо висока. Тому математичне (ширше – інформаційне) моделювання є обов’язковою складовою науково-технічного прогресу.

2.2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОСНОВНІ ЗАХОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Основним поняттям методу математичного моделювання є поняття математичної моделі.

Математичною моделлю називається наближене описання якого-небудь явища або процесу оточуючого світу за допомогою математичної символіки.

На самому початку скористаємося тим, що при вивченні деяких розділів математики читач уже познайомився з деякими прийомами математичного моделювання. Так, вивченню рівнянь математичної фізики передує нехай невеликий, але системно дуже важливий, етап математичного моделювання. Саме на цьому етапі були виведені основні рівняння математичної фізики. Для цього використовується математичне моделювання поширення тепла в нерівномірно нагрітому середовищі, а також моделюються коливання закріпленої на кінцях струни. Моделювання цих процесів дозволило отримати основні рівняння математичної фізики: теплопровідності, хвильове рівняння, рівняння Лапласа й Пуассона, а також сформулювати для них крайові й змішані задачі. Отже, розпочнемо з того, що вже знаємо.

1. При математичному моделюванні вивчається не сам реальний фізичний процес, а деяка його модель, від якої вимагається, щоб вона зберігала основні риси процесу, що розглядається, і в той же час була настільки простою, щоб піддаватися вивченню математичними методами.

2. Створення математичної моделі фізичного явища можна розбити на такі етапи:

2.1. Вибирається основна величина (кілька основних величин), яка характеризує процес. При математичному моделюванні поширення тепла такою величиною є температура u точок середовища, яка в загальному випадку є функцією просторових координат x, y, z і часу t.

2.2. На другому етапі виводиться визначальне рівняння для основної величини, яка характеризує процес. При вивченні поширення тепла таким рівнянням є рівняння теплопровідності. Для виведення цього рівняння використовується закон збереження тепла в деякому довільному об’ємі нерівномірно нагрітого середовища.

2.3. Одержане на другому етапі диференціальне рівняння має безліч розв’язків. Отже, його не досить для описання конкретного процесу. Тому на третьому етапі побудови математичної моделі виводяться так звані умови однозначності, які з безлічі розв’язків визначального рівняння дозволяють виділити єдиний розв’язок, що характеризує даний процес, який моделюється. Нагадаємо, що для рівнянь математичної фізики такими додатковими умовами є крайові й початкові умови.

Таким чином, математична модель процесів, які вивчаються за допомогою рівнянь математичної фізики, складається з диференціального рівняння для основної величини, яка характеризує процес, і додаткових умов, які дозволяють отримати єдиний розв’язок цього рівняння – розв’язок, що описує даний, конкретний фізичний процес.

Після такого вступу перейдемо до основної частини розділу, у якому познайомимось з основними прийомами, що використовуються при виведенні визначальних рівнянь математичної моделі. Наприкінці розділу наведемо формалізовану схему математичного моделювання.

Основною тезою на початку буде така: другий етап побудови математичної моделі, тобто етап виведення визначального рівняння математичної моделі, є суттєво різним залежно від прийомів, які використовуються при її побудові. Розглянемо деякі підходи до побудови математичних моделей, які ілюструють застосування законів природи, варіаційних принципів, аналогій, ієрархічних ланцюгів. Це дає змогу обговорити такі поняття, як адекватність моделей, їх „оснащення”, нелінійність, чисельну реалізацію та низку інших фундаментальних понять математичного моделювання.

2.2.1. Використання законів природи

Найпоширеніший метод побудови математичних моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Ці закони загальновизнані, багаторазово підтверджені досвідом, служать основою великої кількості науково-технічних досягнень. Тому їх обґрунтованість не викликає сумніву, що, крім усього іншого, надає досліднику сильну психологічну підтримку.

Закон збереження енергії. Цей закон відомий майже двісті років і посідає, напевне, найбільш почесне місце серед великих законів природи. Покладаючись на нього, експерт з балістики, який хоче визначити швидкість револьверної кулі і не має поблизу спеціальної лабораторії, може скористатися відносно простим пристроєм типу маятника – вантажем, підвішеним на легкому недеформівному стрижні, який може вільно обертатися (рис. 1.2.1).

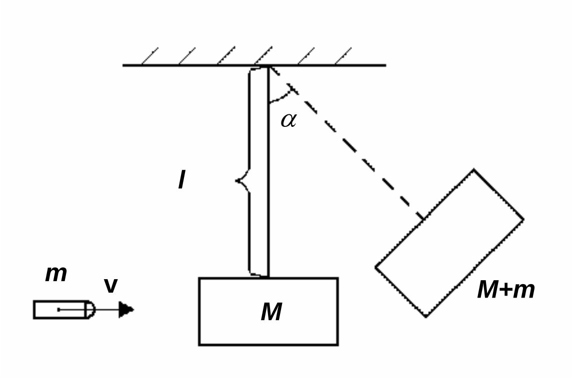

Рис. 1.2.1

Куля, яка застряє у вантажі, надає системі куля-вантаж свою кінетичну енергію, яка в момент найбільшого відхилення стрижня від вертикалі повністю переходить у потенціальну енергію системи. Ці трансформації описуються ланцюгом рівностей

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha) .$$

Тут $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія кулі масою m, яка має швидкість v; M – маса вантажу; V – швидкість системи куля-вантаж відразу після зіткнення; g – прискорення вільного падіння; l – довжина стрижня; α – кут найбільшого відхилення. Шукана швидкість кулі v, таким чином, визначається з формули

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha) ,$$

а саме

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}} ,$$

яка є досить точною, якщо не враховані нами втрати енергії на нагрівання кулі й вантажу, на подолання опору повітря, розгін стрижня і т. д. є невеликими. Процеси, які відбуваються при зіткненні кулі й маятника, уже не є чисто механічними. Тому закон збереження механічної енергії, який був застосований у цьому підрозділі для обчислення величини v, не є справедливим повною мірою: зберігається повна, а не механічна енергія системи. Закон збереження механічної енергії дає лише нижню межу для оцінки швидкості кулі.

Аналогічні міркування можна застосувати для оцінки часу t_k свердління шару металу товщиною L лазером з потужністю W, випромінювання якого є перпендикулярним до поверхні металу (рис. 1.2.2).

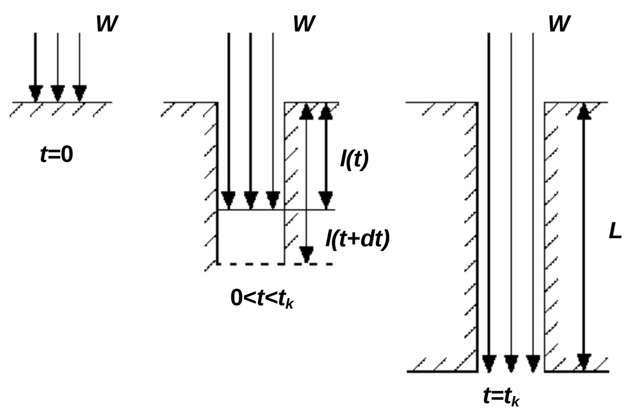

Рис. 1.2.2

Якщо енергія лазера повністю йде на випаровування стовпчика металу масою $LS\rho$, де S – площа, яка опромінюється; LS – об'єм стовпчика; ρ – густина речовини, то закон збереження енергії виражається рівністю

$$E_0 = Wt_k = hLS\rho \,, \qquad (1.2.1)$$

де h – енергія, яка потрібна для випаровування одиниці маси. Величина h має складну структуру: $h = (T_{пл} - T)h_1 + h_2 + h_3$, оскільки матеріал необхідно послідовно нагріти до температури плавлення $T_{пл}$, а потім розплавити й перетворити на пару; тут T – початкова температура; h_1 – питома теплоємність; h_2 і h_3 – відповідно питома теплота плавлення й пароутворення.

Зміна глибини заглиблення $l(t)$ із часом визначається з балансу енергії на проміжку часу від t до $t + dt$. На випарувану за цей час масу

$$[l(t + dt) - l(t)]S\rho = dlS\rho$$

витрачається енергія $dlS\rho h$, яка дорівнює енергії Wdt, що надходить від лазера до речовини:

$$dlS\rho h = Wdt \,,$$

звідки отримується диференціальне рівняння

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{S\rho h} \,. \qquad (1.2.2)$$

При інтегруванні цього рівняння слід використовувати умову, що початкова глибина заглиблення дорівнює нулю:

$$l\big|_{t=0} = 0 \,. \qquad (1.2.3)$$

Інтегруючи (1.2.2) з урахуванням (1.2.3), матимемо

$$l(t) = \frac{W}{S\rho h} t = \frac{E(t)}{S\rho h} \,, \qquad (1.2.4)$$

де $E(t)$ – це вся енергія, яка була виділена лазером на момент часу t. Отже, глибина заглиблення є пропорційною затраченій енергії. При $t = t_k$, коли $l(t_k) = L$, обчислення часу t_k свердління шару металу товщиною L дає однакові результати і з формули (1.2.1), і з формули (1.2.4):

$$t_k = \frac{hLS\rho}{W} \,.$$

Насправді процес свердління є набагато складнішим за розглянуту схему: енергія витрачається й на нагрівання речовини, і на виділення пари із заглиблення, яке може мати неправильну форму і т. і. Тому впевненість у правильності запропонованого математичного описання є значно меншою, ніж у випадку з кулею. Питання про відповідність об'єкта та його моделі – одне з центральних у математичному моделюванні.

Закон збереження матерії. Використання цього закону при створенні математичної моделі ілюструється таким прикладом. Нехай є невелика кількість радіоактивної речовини (урану), яка оточена товстим шаром звичайного матеріалу (напр., свинцю), – ситуація, яка є типовою при збереженні матеріалів, що розщеплюються, або при їх використанні в енергетиці (рис. 1.2.3).

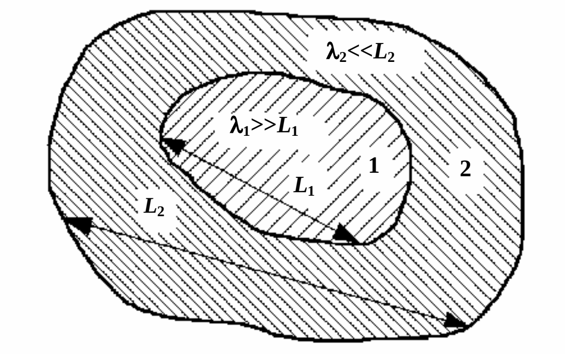

Рис. 1.2.3

Припущення про невелику кількість радіоактивної речовини є спрощувальним, воно дозволяє стверджувати, що всі продукти розщеплення без перешкод залишають область 1 без зіткнень з атомами речовини цієї області. Іншими словами, довжина вільного пробігу продуктів розщеплення λ_1 у першій речовині значно більша за характерні розміри самого матеріалу L_1, тобто $\lambda_1 >> L_1$. Слова „товстий шар” означають, що згідно з метою зберігання продукти розщеплення повністю поглинаються в області 2. Це гарантується при виконанні протилежної умови: $\lambda_2 << L_2$, де λ_2 – довжина вільного пробігу продуктів розщеплення у другій речовині; L_2 – характерний розмір другої речовини.

Отже, усе, що вилітає з області 1, поглинається в області 2, і сумарна маса обох речовин з часом не змінюється. Це і є закон збереження матерії, застосований до даної ситуації. Якщо в початковий момент часу $t = 0$ маси речовин були рівними $M_1(0)$ і $M_2(0)$, то в будь-який момент часу є справедливим баланс

$$M_1(0) + M_2(0) = M_1(t) + M_2(t) . \quad (1.2.5)$$

Одного рівняння (1.2.5), очевидно, недостатньо для знаходження поточних значень двох мас – $M_1(t)$ і $M_2(t)$. Для замикання математичного формулювання необхідно залучити додаткові дані про характер розщеплення. Ці дані формулюються таким твердженням: швидкість розщеплення (кількість атомів, які розпадаються в одиницю часу) є пропорційною загальній кількості атомів радіоактивної речовини.

За малий проміжок часу dt між моментами t і $t+dt$ усього розщепиться

$$N_1(t+dt)-N_1(t)=-\alpha N_1(t+\xi dt),\quad (\alpha>0,\ 0<\xi<1) \tag{1.2.6}$$

атомів. Тут повторно використано закон збереження маси, але стосовно не всього процесу, а до відрізка часу dt. У цьому рівнянні, яке описує баланс атомів, у правій частині стоїть знак мінус (кількість речовини зменшується), а величина $N_1(t+\xi dt)$ відповідає деякому середньому значенню кількості атомів за час dt. Перепишемо рівність (1.2.6) у диференціальній формі:

$$\frac{dN_1(t)}{dt}=-\alpha N_1(t)\,.$$

Ураховуючи, що $M_1(t)=\mu_1 N_1(t)$, де μ_1 – атомна вага речовини 1, отримаємо

$$\frac{dM_1(t)}{dt}=-\alpha M_1(t)\,. \tag{1.2.7}$$

При самочинному (спонтанному) поділі ядер будь-який атом має деяку, не залежну від стану оточуючої речовини, імовірність розщеплення. Тому чим більша (менша) кількість самої радіоактивної речовини, тим більше (менше) виділяється продуктів розщеплення в одиницю часу. Коефіцієнт пропорційності $\alpha>0$ (стала розщеплення) визначається конкретною речовиною. Рівняння (1.2.5) і (1.2.7) разом з умовами $\lambda_1>>L_1$ і $\lambda_2<<L_2$, а також величинами α, $M_1(0)$ і $M_2(0)$ складають математичну модель об’єкта, який розглядається.

Інтегруючи (1.2.7), отримуємо, що маса матеріалу, який розщеплюється, зменшується за експоненціальним законом:

$$\frac{dM_1(t)}{M_1(t)}=-\alpha dt \;\Rightarrow\; \ln M_1(t)=-\alpha t+\ln C \;\Rightarrow\; M_1(t)=Ce^{-\alpha t}\,.$$

При $t=0 \;\Rightarrow\; M_1(0)=C$, тому остаточно

$$M_1(t)=M_1(0)e^{-\alpha t}\,.$$

При $t\to\infty$ в області 1 речовина повністю зникає.

Оскільки сумарна маса згідно з (1.2.5) залишається сталою, то в області 2 кількість речовини зростає:

$$M_2(t)=M_2(0)+M_1(0)-M_1(0)e^{-\alpha t}=$$
$$=M_2(0)+M_1(0)(1-e^{-\alpha t}),$$

і при $t\to\infty$ продукти розщеплення повністю переходять з області 1 в область 2.

Закон збереження імпульсу. Човен, який стоїть нерухомо в безвітряну погоду на поверхні озера, почне рухатись уперед, якщо зробити кілька кроків від його носа до корми. Так виявляє себе закон збереження імпульсу, який стверджує: повний імпульс системи, на яку не діють зовнішні сили, зберігається. На переміщення весляра човен реагує зміщенням у протилежний бік.

Принцип реактивного руху покладено в основу багатьох технічних пристроїв, наприклад, ракети, яка виводить на орбіту Землі штучний супутник, для чого їй потрібно розвинути швидкість приблизно 8 км/с. Найпростіша математична модель руху ракети отримується із закону збереження імпульсу при нехтуванні опором повітря, гравітацією та іншими силами, за виключенням, звичайно, тяги реактивних двигунів.

Нехай продукти згоряння ракетного палива залишають розташовані в задній частині ракети вихлопні сопла зі швидкістю u (для сучасних палив швидкість u дорівнює 3-4 км/с). За малий проміжок часу dt між моментами t і $t+dt$ частина палива вигоріла і маса ракети змінилася на величину dm. Змінився також імпульс ракети, але сумарний імпульс системи “ракета плюс продукти згоряння” залишився тим самим, що й у момент t, тобто

$$m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm[v(t+\xi dt) - u],$$

де $v(t)$ – швидкість ракети; $v(t+\xi dt) - u, 0 < \xi < 1$ – середня за проміжок dt швидкість витікання із сопел газів (обидві швидкості беруться відносно Землі). Перший член у правій частині цієї рівності – імпульс ракети в момент $t+dt$, другий – імпульс, переданий газом, що витікає за час dt.

Ураховуючи, що $m(t+dt) = m(t) + (dm/dt)dt + O((dt)^2)$, а також $v(t+dt) = v(t) + (dm/dt)dt + O((dt)^2)$, закон збереження імпульсу можна переписати у вигляді диференціального рівняння

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u, \qquad (1.2.8)$$

у якому член

$$-\frac{dm}{dt}u,$$

очевидно, є ні чим іншим, як силою тяги ракетних двигунів. Рівняння (1.2.8) перетворимо до вигляду

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt} \qquad (1.2.8а)$$

$$\left((1.2.8) \Rightarrow \frac{1}{m}\left| m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \right. \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -u\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt}\right)$$

і проінтегруємо.

Після інтегрування рівняння (1.2.8а) матимемо

$$v(t) + C = -u(\ln m(t) + \ln B),$$

де C і B – довільні сталі, або

$$v(t) + C = -u \ln(Bm(t)) . \qquad (1.2.8б)$$

Одержаний загальний розв’язок (1.2.8б) має задовольняти початкову умову: при $t = 0$ $v = v_0; m = m_0$, де v_0, m_0 – відповідно швидкість і маса ракети в момент часу $t = 0$.

Тому довільну сталу C слід узяти рівною v_0, а довільну сталу $B = \frac{1}{m_0}$. При цьому (1.2.8б) набуває вигляду

$$v(t) - v_0 = -u \ln(\frac{m(t)}{m_0})$$

і при $t = 0$ перетворюється на тотожність. Звідси

$$v(t) = v_0 + u \ln(\frac{m_0}{m(t)}) . \qquad (1.2.9)$$

Якщо $v_0 = 0$, то максимальна швидкість ракети, яка досягається при повному згорянні палива, дорівнює

$$v = u \ln(\frac{m_0}{m_p + m_s}) . \qquad (1.2.10)$$

У (1.2.10) m_p – корисна маса (маса супутника); m_s – структурна маса власне ракетної конструкції – паливних баків, двигунів, систем управління тощо.

Формула (1.2.10) – це *формула Ціолковського.* Вона дозволяє зробити фундаментальний висновок про конструкцію ракети для космічних польотів. Уведемо величину $\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$, яка характеризує при $m_p = 0$ відношення структурної й початкової мас ракети (без корисної маси, тобто супутника). Тоді для практично реальних значень $\lambda = 0{,}1$ і $u = 3$ км/с отримаємо при $m_p = 0$

$$v = u \ln(\frac{1}{\lambda}) = 7 \text{ км/с}.$$

Звідси випливає, що навіть у самій ідеальній ситуації (корисна маса дорівнює нулю, відсутні гравітація та опір повітря тощо) ракета того типу, що розглядається, не здатна розвинути першої космічної швидкості. Звідси випливає важливий висновок – необхідно використовувати так звані багатоступеневі ракети.

Розглянутий приклад ілюструє також свого роду принцип *найбільшого сприяння*, який часто використовується на початковій стадії математичного моделювання складних об'єктів: якщо об'єкт, будучи поставленим у найкращі умови, не в змозі досягнути потрібних характеристик, то слід змінити сам підхід до об'єкта або пом'якшити вимоги до нього; якщо ж вимоги в принципі є досяжними, то наступні кроки пов'язані з дослідженням впливу на об'єкт додаткових, більш складних факторів.

2.2.2. Використання варіаційних принципів

Ще один підхід до побудови моделей полягає у використанні так званих варіаційних принципів. Цей підхід за широтою та універсальністю його можливостей можна зіставити з використанням фундаментальних законів природи при побудові математичних моделей. Варіаційні принципи є досить загальними твердженнями про об'єкт, що розглядається (система, явище), вони стверджують, що з усіх можливих варіантів поведінки об'єкта (руху, еволюції) вибираються лише ті, що задовольняють певну умову. Зазвичай згідно з цією умовою деяка величина, яка пов'язана з об'єктом, досягає свого екстремального значення при переході об'єкта з одного стану в інший.

Приклад. Припустимо, що автомобіль, який рухається зі сталою швидкістю v, має потрапити з точки A в точку B і при цьому торкнутися деякої прямої лінії C. На рис. 1.2.4 показані різні траєкторії руху з точки A в точку B з дотиком до прямої C. Суцільною лінією виділено найкоротший шлях**.**

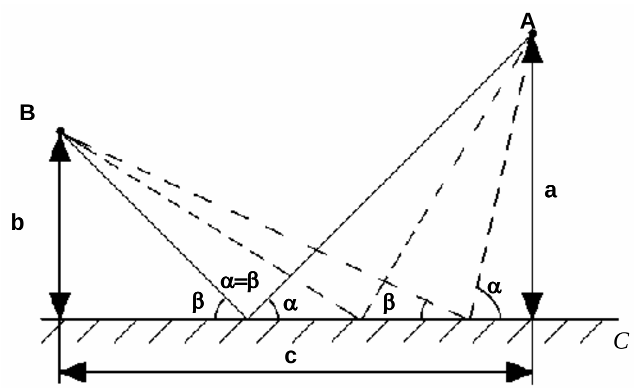

Рис. 1.2.4

Водій автомобіля дуже поспішає й вибирає з багатьох траєкторій шлях, який вимагає мінімальних затрат часу. Зобразимо витрачений час як функцію величини α – кута між прямою С і відрізком шляху від точки А до прямої С:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v\sin\alpha} + \frac{b}{v\sin\beta(\alpha)} .$$

Тут a і b – довжини перпендикулярів, які опущені з точок А і В на пряму С; $\beta(\alpha)$ – кут між прямою С і відрізком шляху з точки дотику до точки В.

Умова екстремальності $t(\alpha)$ за аргументом α означає, що

$$\left.\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{ext}} = 0 ,$$

або

$$\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{b\cos\beta(\alpha)}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 . \qquad (1.2.11)$$

Для будь-яких значень α є справедливою рівність

$$c = \frac{a}{tg\alpha} + \frac{b}{tg\beta(\alpha)} , \qquad (1.2.12)$$

де c – відстань між проекціями точок А і В на пряму С (ця відстань є однаковою для всіх траєкторій). Диференціюючи (1.2.12), отримаємо співвідношення

$$\frac{a}{\sin^2\alpha} + \frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 , \qquad (1.2.13)$$

яке разом з умовою мінімальності (1.2.11) (порівняємо (1.2.11) і (1.2.13)) дає

$$\cos\alpha = \cos\beta\left(\alpha\right) ,$$

тобто рівність кутів α і β .

Далі неважко знайти самі значення $\alpha_{\min}, t_{\min}$ через задані величини a, b, c . Однак зараз для нас важливо інше – умова мінімальності витрат часу привела до вибору відповідної траєкторії за правилом *кут падіння дорівнює куту відбивання*. Однак такому ж закону підкоряється і хід променя світла, який потрапляє на дзеркальну поверхню. Може, і промені світла рухаються траєкторіями, які забезпечують найшвидше потрапляння сигналу з однієї точки в іншу? Так, саме так і відбувається згідно з відомим варіаційним принципом Ферма, спираючись на який можна отримати всі основні закони геометричної оптики.

2.2.3. Застосування аналогій при побудові моделей

У дуже великій кількості випадків при побудові математичної моделі об'єкта або неможливо прямо вказати фундаментальні закони чи варіаційні принципи, яким він підкоряється, або, з погляду наших сьогоднішніх знань, узагалі не можна бути впевненими в існуванні подібних законів, які допускають математичне формулювання. Одним із плідних підходів до такого типу об'єктів є використання аналогій з уже вивченими явищами. Що, здавалося б, може бути спільного між радіоактивним розщепленням і динамікою популяцій, зокрема зі зміною чисельності населення нашої планети? Однак на найпростішому рівні така аналогія повністю спостерігається. Про це свідчить одна з найпростіших моделей популяцій, яка називається *моделлю Мальтуса*. В її основу покладено просте твердження: швидкість зміни населення з часом t пропорційна її поточній кількості $N(t)$, помноженій на різницю коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t)$ і смертності $\beta(t)$. У результаті приходимо до рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \qquad (1.2.14)$$

яке доволі схоже з рівнянням радіоактивного розщеплення і збігається з ним при $\alpha < \beta$ (якщо α і β – сталі). Це не дивно, оскільки при виведенні цих рівнянь використовувались однакові міркування. Інтегрування рівняння (1.2.14) дає:

$$(1.2.14) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(t)}{N(t)} = [\alpha(t) - \beta(t)]dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln N(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz + \ln C \quad \Rightarrow$$

$$\ln \frac{N(t)}{C} = \int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz \quad \Rightarrow$$

$$N(t) = C \exp(\int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz).$$

Довільна стала C знаходиться з початкової умови $N(0) = N_0$, де N_0 – початкова чисельність населення, звідки $C = N(0) = N_0$, і розв'язок рівняння (1.2.14) остаточно буде таким:

$$N(t) = N_0 \exp(\int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz). \qquad (1.2.15)$$

Проаналізуємо (1.2.15). При $\alpha = \beta$ чисельність населення залишається сталою. У цьому випадку розв'язком рівняння (1.2.14) буде стала величина $N(t) = N_0$ (рис. 1.2.5).

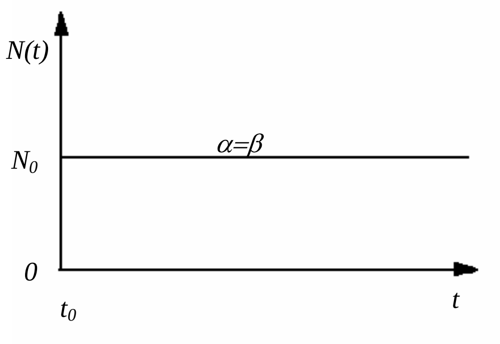

Рис. 1.2.5

Рівновага між народжуваністю і смертністю нестійка у тому розумінні, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ приводить із часом до все більшого відхилення функції $N(t)$ від рівноважного значення N_0. При сталих α і β за умови $\alpha < \beta$ чисельність населення зменшується і прямує до нуля при $t \to \infty$ за експоненціальним законом

$$N(t) = N_0 e^{(\alpha-\beta)t} \quad (\alpha - \beta < 0)$$

(рис. 1.2.6), а при $\alpha > \beta$ зростає $(\alpha - \beta > 0)$, знов-таки за експоненціальним законом (рис. 1.2.7), прямуючи до нескінченності при $t \to \infty$. Такий результат став основою для побоювань Мальтуса про перенаселення Землі з усіма наслідками, які з цього випливають.

Як у даному прикладі, так і в багатьох розглянутих нами випадках можна вказати чимало очевидних обмежень застосування побудованої моделі. Звичайно, дуже складний процес зміни чисельності населення, який залежить до того ж від свідомого втручання самих людей, не може описуватися якимись простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності повною мірою хоча б через обмеженість ресурсів, які необхідні для її існування.

Однак це зауваження ніскільки не применшує ролі аналогій у побудові математичних моделей дуже складних явищ. Застосування аналогій базується на одній з найважливіших властивостей моделей – їх універсальності, тобто їх застосовності до об’єктів принципово різної природи. Так, припущення типу “швидкість зміни величини пропорційна значенню самої величини (або деякої функції від неї)” широко використовується в далеких одна від одної сферах знань.

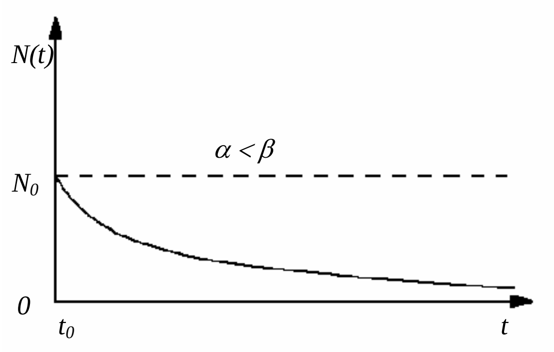

Рис. 1.2.6

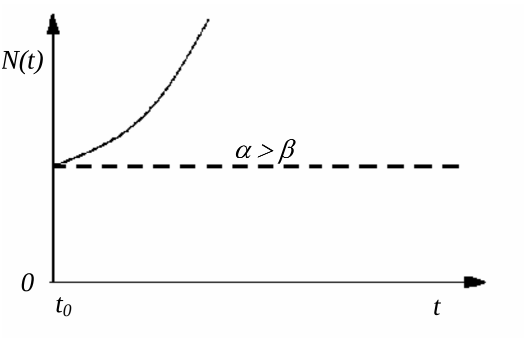

Рис. 1.2.7

2.2.4. Застосування ієрархічного підходу до створення моделей

Лише в окремих випадках буває зручною й виправданою побудова математичних моделей, навіть відносно простих об'єктів, одразу у всій повноті, з урахуванням усіх факторів, які є суттєвими для поведінки об'єктів. Тому природним є підхід, який реалізує принцип *від простого – до складного*, коли наступний крок робиться після досить детального вивчення не дуже складної моделі. При цьому виникає ланцюг (ієрархія) усе більш повних моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх як частинні випадки.

Побудуємо такий ієрархічний ланцюг на прикладі моделі багатоступеневої ракети. Нами вже було встановлено наприкінці підрозділу 2.2.1, що реальна одноступенева ракета неспроможна розвинути першу космічну швидкість. Причина цього – витрата пального на розгін непотрібної, відпрацьованої частини структурної маси. Тому під час руху ракети необхідно періодично позбуватися баласту. На практиці це означає, що ракета має складатися з кількох ступенів, які відкидаються після їх використання.

Нехай m_i – загальна маса *i*-го ступеня ракети; λm_i – відповідна структурна маса (при цьому маса пального дорівнює величині $(1-\lambda)m_i$); m_p – маса корисного вантажу. Припускається, що величини λ і швидкість витікання газу u однакові для всіх ступенів. Візьмемо для визначеності кількість ступенів $n=3$. Початкова маса такої ракети буде рівною

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3 .$$

Розглянемо момент, коли витрачено все паливо першого ступеня й маса ракети дорівнює величині

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3 .$$

Тоді за формулою Ціолковського (1.2.10)

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right)$$

швидкість ракети у випадку, що розглядається, буде

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right) .$$

Після досягнення цієї швидкості v_1 структурна маса λm_1 відкидається і вмикається другий ступінь ракети. Маса ракети у цей момент становить

$$m_p + m_2 + m_3 .$$

Починаючи з цього моменту і до моменту повного вигоряння палива другого ступеня, ніщо не заважає скористатися вже збудованою моделлю, застосувавши її до випадку, що розглядається. Усі міркування стосовно збереження сумарного імпульсу й відповідні перетворення залишаються чинними (слід тільки врахувати, що ракета вже має початкову швидкість v_1). Тоді за формулою (1.2.10) після вигоряння палива у другому ступені ракета досягне швидкості

$$v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right) .$$

Такі ж самі міркування є застосовними й до третього ступеня ракети. Після відключення її двигунів швидкість ракети дорівнюватиме

$$v_3 = v_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right) .$$

Цей ланцюг неважко продовжити для будь-якого числа ступенів і отримати відповідні формули. У випадку ж $n=3$ для остаточної швидкості будемо мати

$$\frac{v_3}{u} = \ln\{(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3})\}$$

або, вводячи величини

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p},$$

отримаємо

$$\frac{v_3}{u} = \ln\{(\frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1 - 1)})(\frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2 - 1)})(\frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3 - 1)})\}.$$

Даний вираз є симетричним відносно до величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, і неважко показати, що його максимум досягається в симетричному випадку, тобто коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. При цьому *i*=3,

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, P = e^{-\frac{v_3}{3u}}.$$

Добуток $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha^3$ дорівнює, як легко перевірити, відношенню $\frac{m_0}{m_p}$, або

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = (\frac{1-\lambda}{P-\lambda})^3.$$

Для багатоступеневої ракети, аналогічно, маємо

$$\frac{m_0}{m_p} = (\frac{1+\lambda}{P-\lambda})^n, P = e^{-\frac{v_n}{nu}}, \qquad (1.2.16)$$

де n – кількість ступенів ракети.

Проаналізуємо формулу (1.2.16). Приймемо $v_n = 10{,}5 км/с, \lambda = 0{,}1$. Тоді для $n = 2{,}3{,}4$ отримаємо

$$m_0 = 149 m_p, \quad m_0 = 77 m_p, \quad m_0 = 65 m_p$$

відповідно. Це означає, що двоступенева ракета придатна для виведення на орбіту деякої корисної маси (однак при одній тоні корисного вантажу необхідно мати ракету вагою 149 тон). Перехід до третього ступеня зменшує масу ракети майже у два рази (звичайно при цьому ускладнює її конструкцію), а чотирьохступенева ракета не дає помітного виграшу порівняно з триступеневою.

Побудова ієрархічного ланцюга дозволила відносно просто прийти до цих важливих висновків. Ієрархія математичних моделей часто будується й за протилежним принципом – *від складного – до простого*. У цьому випадку реалізується шлях *згори – униз*: – із досить загальної та складної моделі за відповідних спрощувальних припущень отримується послідовність усе простіших (але таких, які мають меншу сферу застосування) моделей.

2.2.5. Про нелінійність математичних моделей

Простота розглянутих математичних моделей значною мірою пов'язана з їх лінійністю. У математичному сенсі це важливе поняття означає, що є справедливим принцип суперпозиції, тобто будь-яка лінійна комбінація розв'язків (напр., їх сума) теж є розв'язком задачі. Користуючись принципом суперпозиції, не важко, знайшовши розв'язок у якомусь частинному випадку, побудувати розв'язок у більш складній ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна міркувати за властивостями частинного – різниця між двома розв'язками має лише кількісний характер. Наприклад, збільшення у два рази швидкості витікання ракетного палива веде також до дворазового збільшення швидкості ракети, зменшення кута падіння світлового променя на дзеркальну поверхню означає таку саму зміну кута відбивання і т. д. Іншими словами, у випадку лінійних моделей відгук об'єкта на зміну якихось умов є пропорційним величині цієї зміни.

Для нелінійних явищ, математичні моделі яких не задовольняють принцип суперпозиції, знання про поведінку частини об'єкта ще не гарантує знання поведінки всього об'єкта, а його відгук на зміну умов може якісно залежати від величини цієї зміни.

Більшість реальних процесів і математичних моделей, які їм відповідають, є нелінійними. Лінійні ж моделі відповідають вельми частинним випадкам і, як правило, є лише першим наближенням до реальності. Наприклад, популяційні моделі відразу стають нелінійними, якщо прийняти до уваги обмеженість доступних для популяції ресурсів.

2.2.6. Висновки. Схема математичного моделювання

Процес побудови математичних моделей може бути умовно розбитий на такі етапи.

1. Побудова моделі починається зі словесно-змістового описання об'єкта чи явища. Окрім знань загального характеру про природу об'єкта і мету його дослідження, ця стадія може містити також деякі припущення (невагомий стрижень, товстий шар речовини, прямолінійне поширення світла тощо). Даний етап можна назвати формулюванням передмоделі.

2. Наступний етап – завершення ідеалізації об'єкта. Відкидаються всі фактори та ефекти, які вважаються не самими суттєвими для його поведінки. Наприклад, при складанні балансу матерії не враховувався, через його мализну, дефект мас, яким супроводжується радіоактивне розщеплення. За можливості припущення, які використовуються при ідеалізації, записуються в математичній формі. Наприклад, $\lambda_1 >> L_1$ – довжина ві-

льного пробігу продуктів розщеплення λ_1 значно більша за характерний розмір самого матеріалу L_1 (у прикладі про зберігання радіоактивних матеріалів). Це необхідно, щоб справедливість цих припущень піддавалась кількісному контролю.

3. Після виконання перших двох етапів можна переходити до вибору чи формулювання закону (варіаційного принципу, аналогії тощо), якому підлягає об'єкт, і його запису в математичній формі. За необхідності використовуються додаткові дані про об'єкт, які також записуються математично (напр., сталість величини c для всіх траєкторій руху автомобіля – у прикладі про рух автомобіля з точки A у точку B з дотиком до деякої прямої). Слід мати на увазі, що навіть для простих об'єктів вибір відповідного закону є зовсім не тривіальною задачею.

4. Формулювання моделі завершує її "оснащення". Наприклад, необхідно задати дані про початковий стан об'єкта (швидкість ракети та її масу в момент $t = 0$) або інші його характеристики, без знання яких неможливо визначити поведінку об'єкта. І, нарешті, формулюється мета дослідження моделі (напр., досягнути розуміння закономірностей зміни популяції, встановити вимоги до конструкції ракети, яка запускає супутник тощо).

5. Побудована модель вивчається всіма доступними методами, у тому числі – перевіркою з використанням різних підходів. На відміну від найпростіших випадків, які ми розглянули до цього часу, більшість моделей не піддаються чисто теоретичному аналізу, і тому необхідно широко застосовувати обчислювальні методи. Ця обставина особливо важлива при вивченні нелінійних об'єктів, оскільки їх якісна поведінка заздалегідь, як правило, невідома.

6. У результаті дослідження моделі не тільки досягається поставлена мета, але має бути встановлена усіма можливими способами (порівнянням з практикою, з іншими підходами) адекватність моделі – відповідність моделі до об'єкта та сформульованих припущень. Неадекватна модель може дати результат, який буде як завгодно відрізнятися від істинного. Така модель має бути відкинутою або відповідним чином модифікованою.