ТЕМА 1 ПРЕДМЕТ МСС. ВЛАСТИВОСТІ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Лекція 1.1(1) **Визначення МСС. Аксіоматика механіки суцільних середовищ. Основні методи та напрямки досліджень різних об'єктів МСС (твердих тіл, рідин та газів). Зв'язок курсу з іншими дисциплінами (опір матеріалів, гідравліка, термодинаміка, обчислювальна математика, програмування, технологічні розрахунки та розрахунки на міцність машин та апаратів). Загальна характеристика фізичних явищ та процесів, що протікають в твердих тілах, рідинах та газах. Фізичні моделі МСС. Закони термодинаміки**

Механіка суцільних середовищ – це наука, що вивчає напружено-деформований стан (НДС) твердих, рідких та газоподібних тіл при їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи (гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо).

Аксіоматика механіки суцільних середовищ. Основні положення МСС можна представити у вигляді аксіом або найважливіших теорем:

1. *Евклідність простору.* Простір, в якому розглядається рух тіла є тривимірний евклідовий простір E^3.
2. *Абсолютність часу* t. Плин часу не залежить від вибору системи відліку.
3. *Гіпотеза суцільності*. Матеріальне тіло це суцільне середовище – континуум у просторі E^3.
4. *Закон збереження маси*. Усяке матеріальне тіло V має скалярну невід’ємну характеристику – масу M, яка: а) не змінюється при будь-яких рухах тіла, якщо тіло складається з одних і тих самих матеріальних частинок; б) маса є адитивною величиною $M(V)=M(V_1)+M(V_2)$, де $V=V_1+V_2$.
5. *Закон збереження імпульсу* (або зміни кількості руху).
6. *Закон збереження моменту імпульсу* (або зміни моменту кількості руху).
7. *Закон збереження енергії* (або перший закон термодинаміки).
8. *Аксіома про існування абсолютної температури* (або нульовий початок термодинаміки).
9. *Закон балансу ентропії* (або другий закон термодинаміки).

В некласичних моделях МСС ці аксіоми можуть замінюватись на інші. Наприклад, замість перших двох аксіом можуть використовуватися відповідні положення теорії ймовірності.

Основні методи та напрямки досліджень різних об'єктів МСС (твердих тіл, рідин та газів) при проектуванні промислового обладнання. Теоретичне та експериментальне дослідження руху і різноманітних фізико-хімічних процесів в деформованих тілах пов’язано з введенням, вивченням та використанням багатьох характерних понять, математичних методів описання і фундаментальних законів природи, що приводять до формулювання замкнутих систем рівнянь. При цьому постановка і розв’язання задач теоретичного опису різних явищ в оточуючому нас світі завжди пов’язані з введенням схематизованих моделей та ідеальних процесів, що відповідають спостереженням і дослідженням реальних тіл.

Як відомо, система диференціальних або взагалі функціональних рівнянь називається замкнутою, коли кількість незалежних рівнянь дорівнює кількості шуканих величин або функцій. Виділення фіксованих замкнутих систем рівнянь дозволяє ставити та вивчати багато класів задач. При теоретичному розв’язанні конкретних задач необхідно опиратися на замкнуту систему рівнянь і на різного роду додаткових умов, таких як: початкові і граничні умови, умови стаціонарності, умови неперервності і умови на розривах, умови на нескінченності та інше. Явне формулювання всіх рівнянь і додаткових умов, що визначають єдиний розв’язок, є постановкою задачі.

Необхідність врахування динамічних, теплових та інших фізичних ефектів та їх взаємодію є характерною особливістю сучасних інженерних задач, що виникають в процесі проектування промислових об’єктів.

До основних напрямків розрахунків в рамках теорії механіки суцільних середовищ можна віднести такі: *теорія пластичності і повзучості; механічні моделі полімерних пластичних матеріалів; механічні моделі композиційних матеріалів; рух твердих, рідких та газоподібних тіл з фазовими перетвореннями та хімічними реакціями; рух дуже сильно стиснутих рідин та газів або, навпаки, розріджених газів; рух рідких суспензій (сумішей), що наповнені газами і парами рідини, кавітація з утворенням та зникненням бульбашок в рідині; механіка сипучих матеріалів; газо- і гідродинаміка при русі рідин або газів через пористі структури; теорія руху плазми та ін.*

Зв'язок курсу з іншими дисциплінами (опір матеріалів, гідравліка, термодинаміка, обчислювальна математика, програмування, технологічні розрахунки та розрахунки на міцність машин та апаратів). Викладення дисципліни МСС базується на знаннях студентів, що були отримані при вивченні інших дисциплін:

- математика – частинна та повна похідна, теорія диференціальних рівнянь, поняття градієнта, ротора дивергенції та ін.;
- обчислювальна математика – методи скінчених різниць, скінчених елементів, розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь та ін.;
- опір матеріалів – принцип Сен-Венана, закон Гука, механічні константи матеріалів, теорія пружності і пластичності, критерії міцності, розрахунки на міцність та ін.;
- теоретична механіка – поняття матеріальної точки, абсолютно твердого тіла, кінематика, статика, динаміка, векторне числення і диференціальна геометрія, рівняння Лагранжа, принцип найменшої дії, рівняння Гамільтона-Якобі та ін.;
- термодинаміка – термодинамічні параметри, перший та другий закони термодинаміки, рівняння стану, термодинамічні потенціали та ін.;
- гідравліка – закон Стокса, рівняння Бернуллі, ідеальна рідина та ін.;
- програмування – алгоритмізація, мови програмування високого рівня та ін.

Загальна характеристика фізичних явищ та процесів, що протікають в твердих тілах, рідинах та газах. Фізичне явище – це явище, при якому не утворюються нові речовини, а тільки змінюються його фізичні характеристики (наприклад, зміна агрегатного стану, розмірів, місця положення та ін.).

Фізичний процес – це послідовна зміна станів об’єкту тіла у часі.

Виходячи з визначень фізичного явища і процесу можна зазначити їх збіг між собою.

Прикладами фізичних явищ та процесів в твердих тілах, рідинах та газах можуть бути такі: деформація, плавлення і затвердіння, випаровування і конденсація, дифузія, теплопровідність, електропровідність, магнетизм, гравітація, пружність, в’язкість та ін.

Фізичні моделі МСС. До основних фізичних моделей МСС відносяться такі: пружного тіла; пружно-пластичного тіла; в’язкої рідини; ідеальної рідини; моделі в’язко-пружного тіла Максвела і Кельвіна.

Модель пружного тіла описується законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1.1}$$

де σ – напруження, Па; E – модуль пружності, Па; ε – деформація.

Модель пружного-пластичного тіла описується законом Гука, який в цьому випадку зв'язує прирощення напруження ($\dot{\sigma}^{ij}$) зі швидкістю повної деформації ($\dot{\varepsilon}_{ij}$)

$$\dot{\sigma}^{ij} = C_{ep}^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}, \qquad (1.2)$$

де $C_{ep}^{ijkl} = C^{ijkl} - C^{ijmn}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{mn}}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{rp}}C^{rpkl}\left(H' + \frac{\partial F}{\partial \sigma^{ij}}C^{ijkl}\frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}\right)^{-1}$ – компоненти тензора пружно-пластичних властивостей матеріалу або *тензор 4-го рангу пружно-пластичності*, Па; C^{ijkl} – компоненти *тензора 4-го рангу пружності*, Па; F – функція плинності матеріалу при ізотропному зміцненні; H' – тангенс кута нахилу дотичної до кривої, яка визначає залежність напруження від деформації при одновісному розтягу; $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{n}$ – тензор повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ – пружна і $\dot{\varepsilon}_{ij}^{n} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{T} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ – непружна частини тензора повної швидкості деформації, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{T}$ – швидкості пластичної і температурної деформації, відповідно, с$^{-1}$; $\dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ – швидкість початкової деформації, обумовленої іншими причинами, с$^{-1}$.

Модель в'язкої рідини описується законом Стокса

$$\sigma = \mu\dot{\varepsilon} - p, \qquad (1.3)$$

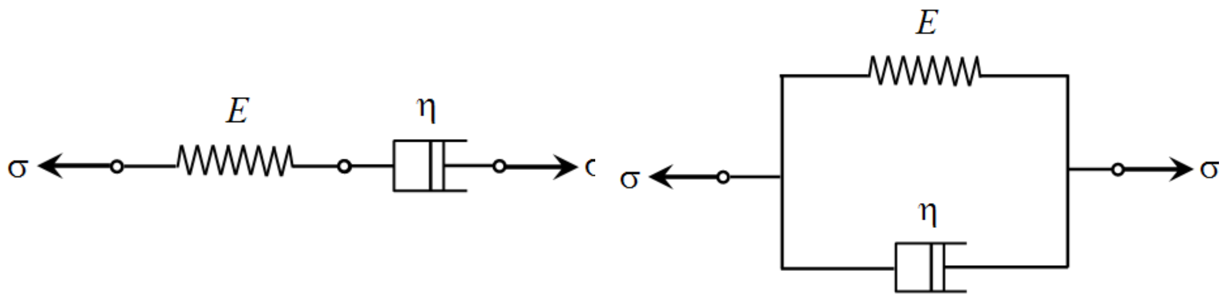
де μ – динамічна в'язкість, Па·с; $\dot{\varepsilon}$ – швидкість деформації, с$^{-1}$; p – зовнішній гідростатичний тиск, Па.

Модель ідеальної рідини. Ідеальною рідиною або ідеальним газом називають суцільне середовище, в якому тензор напружень σ^{ij} в кожній точці рідини є кульовим

$$\sigma^{ij} = -p\delta^{ij}, \qquad (1.4)$$

де p – тиск рідини, Па; δ^{ij} – символ Кронекера.

Моделі в'язко-пружного тіла Максвела і Кельвіна показані на рисунку 2.1.



$a - \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \dfrac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}$ – Максвела – послідовна

б – $\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ – Кельвіна – паралельна

σ – напруження; $\dot{\sigma}$ – прирощення напруження; ε – деформація;
$\dot{\varepsilon}$ – швидкість деформації; E – модуль пружності; η – в’язкість

Рисунок 2.1 – Приклад графічної інтерпретації та математичного запису фізичних моделей в’язко-пружного тіла

Закони термодинаміки. Перший закон термодинаміки або *закон збереження енергії*.

Розглянемо 4 формулювання I закону термодинаміки.

1. В будь-якій ізольованій системі кількість енергії не змінюється – формулювання Дж.П.Джоуля (1842 р.).

2. Кількість теплоти, що отримано системою, йде на зміну її внутрішньої енергії (U) і здійснення роботи (A) проти зовнішніх сил.

3. Зміна внутрішньої енергії системи при переході її із одного стану в інший дорівнює сумі роботи зовнішніх сил і кількості теплоти, переданого системі, тобто, кількість теплоти залежить тільки від початкового і кінцевого стану системи і не залежить від способу, яким здійснюється цей перехід. Це визначення особливо важливе для хімічної термодинаміки. Іншими словами, внутрішня енергія є функцією стану.

В циклічному процесі внутрішня енергія не змінюється

$$\oint dU = 0. \tag{1.5}$$

4. Елементарна зміна внутрішньої енергії системи (dU) в квазістатичному процесі дорівнює елементарній кількості теплоти δQ, що передається системі, в сумі зі зміною енергії, яка зв’язана з елементарною кількістю речовини dN при хімічному потенціалі μ, і роботи $\delta A'$, яка здійснена над системою зовнішніми силами і полями, за відрахуванням елементарної роботи δA, яка здійснена системою проти зовнішніх сил

$$dU = \delta Q - \delta A + \mu dN + \delta A'. \qquad (1.6)$$

Розділення роботи на дві частини, одна з яких описує роботу, здійснену над системою, а друга – роботу, здійснену самою системою, підкреслює, що ці роботи можуть бути здійснені силами різної фізичної природи внаслідок різних джерел цих сил.

Важливо відмітити, що dU і dN є повними диференціалами, а δA і δQ – ні.

Другий закон термодинаміки.

Розглянемо 3 формулювання II закону термодинаміки.

1. Теплота спонтанно переходить лише від тіла з більшою температурою до тіла з меншою температурою і не може спонтанно переходити у зворотному напрямку – вперше сформулював Клаузіс.

2. Всі довільні (спонтанні) процеси в природі йдуть зі збільшенням ентропії. Ентропія S – міра хаотичності, неупорядкованості системи.

3. Неможливо побудувати перпетум мобіле (вічний двигун) другого роду, тобто теплову машину, яка, у відповідності з I законом, перетворювала би теплову енергію, що взята від джерела з найменшою температурою, в механічну роботу.

Всі процеси у природі поділяються на рівноважні (зворотні, що протікають без втрат енергії) та нерівноважні (незворотні, що протікають з втратою енергії).

Для багатьох нерівноважних процесів істотним є так званий принцип Онсагера, який полягає в такому: всі мікроскопічні взаємодії між елементарними частинками зворотні, незворотність проявляється тільки за рахунок статистичних законів вирівнювання середніх макроскопічних характеристик для великих сукупностей елементарних частинок.

За допомогою II закону термодинаміки вводиться поняття абсолютної температури і ентропії як макроскопічних характеристик.

Для малої частинки у випадку зворотних процесів ентропія визначається з точністю до адитивної постійної із рівності

$$dSdm = dS_m = \frac{\delta Q}{T}, \qquad (1.7)$$

де T – абсолютна температура, К; δQ – зовнішній приток теплоти до частинки, Дж.

Так само, як і температуру, ентропію можна ввести статистичним шляхом. Ентропія вводиться як ймовірність відповідного макроскопічного стану середовища.

В статистичній фізиці для ентропії встановлюється наступна формула Больцмана

$$S = k \ln P , \qquad (1.8)$$

де k – постійна Больцмана, а P – міра ймовірності стану, що розглядається, і визначається як число можливих макроскопічних станів, які відповідають даному макроскопічному стану.

Якщо процес незворотний, то із другого закону термодинаміки виводиться нерівність виду

$$dS_m > \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU_m + \delta A}{T} , \qquad (1.9)$$

і, зокрема, при незворотних адіабатичних процесах ентропія росте.

На відміну від поняття температури, як і внутрішню енергію, ентропію можна визначити для термодинамічних нерівноважних станів.

Для різко виражених нерівноважних процесів поняття про температуру може втрачати свій зміст, коли для фізично малої частинки відсутнє статистичне вирівнювання енергії між різними степенями свободи. Наприклад, в деяких випадках при вельми різкій зміні стану частинки можна говорити про декілька температур: про температуру вібраційних рухів молекул і про температуру поступальних степенів свободи молекул. І тільки при наявності термодинамічної рівноваги в малих об’ємах тіла температура визначена однозначно.

Розглянемо незворотні процеси, в яких стан даної малої частинки характеризується певною абсолютною температурою T.

В цьому випадку відповідно до II закону термодинаміки для елементарного процесу рівність (1.7) повинна бути замінена на рівність

$$TdS_m = \delta Q + \delta Q' , \quad \delta Q' > 0 . \qquad (1.10)$$

Позитивна величина $\delta Q'$ називається нескомпенсованим теплом. При зворотних процесах в даній частинці $\delta Q' = 0$. Рівняння (1.10) дістало назву об’єднаного рівняння термодинаміки.

ТЕМА 2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВИЗНАЧЕННЯ ТА ГІПОТЕЗИ МСС

Лекція 2.1(2) **Поняття континууму. Лагранжеві та Ейлереві координати для опису руху тіл, субстанціональна похідна за часом. Векторні базиси в початковій та актуальній конфігурації тіл. Гіпотези МСС і їх роль при розробці математичних моделей. Задачі механіки суцільного середовища**

Поняття континууму. Всі тіла складаються з окремих частинок (молекул, атомів і т.д.), але їх надто багато в будь-якому актуальному для нас об'ємі, тому тіло можна наближено розглядати як середовище, що заповнює простір суцільним чином, або інакше континуумом. Наприклад, повітря, вода, залізо та інші матеріальні середовища розглядаються як тіла, що всуціль заповнюють деяку частину простору.

Континуумом можна вважати не тільки звичайні матеріальні тіла, але й різноманітні поля, наприклад, електромагнітне поле.

Ідеалізація будови матеріальних тіл на базі введення поняття континууму, зокрема, необхідна для того, щоб при дослідженні руху деформівних середовищ використовувати апарат неперервних функцій, диференціальне і інтегральне числення.

Лагранжеві та ейлереві координати для опису руху тіл, субстанціональна похідна за часом. Під дією зовнішніх сил кожна частинка суцільного середовища отримує певну швидкість. Існує два еквівалентних підходи до опису руху матеріальних частинок суцільного середовища – підхід Лагранжа та підхід Ейлера.

В підході Лагранжа об'єктом є матеріальні частинки, зокрема зміна їх кінетичних характеристик (положення в просторі, швидкість, прискорення). Для опису руху в такій формі необхідно індивідуалізувати кожну частинку. Такими параметрами, що індивідуалізують кожну частинку середовища, є її координати $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ в початковий момент часу t_0. Координати частинки в нерухомому просторі (глобальній системі координат $Ox^1x^2x^3$) залежать від початкових координат частинки та часу

$$x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), \; \left(i = 1,2,3\right). \tag{2.1}$$

Фіксуючи початкові координати і вважаючи змінним тільки час, ми отримуємо закон руху кожної частинки суцільного середовища. Якщо зафіксувати в формулах (2.1) час, то отримаємо розподіл матеріальних частинок в просторі в конкретний момент часу. Якщо ж вважати змінними і початкові координати і час, то отримаємо опис руху суцільного середовища.

Початкові координати $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$, що індивідуалізують кожну частинку, і час t називаються *змінними Лагранжа*.

Переміщення матеріальних точок визначаються як різниця між їх поточним (актуальним) і початковим значеннями:

$$\begin{cases} u^1 = x^1 - \xi^1; \\ u^2 = x^2 - \xi^2; \\ u^3 = x^3 - \xi^3. \end{cases} \tag{2.2}$$

Введемо поняття *супутньої системи координат*. Це рухома деформівна система координат, координатні лінії якої завжди асоційовані з одними і тими ж матеріальними частинками. В початковий момент часу координатні лінії прямолінійні та співпадають з координатними лініями декартової системи координат. В подальшому супутня координатна система переміщується і деформується разом з матеріальним середовищем Можна сказати, що вона «вморожена» в матеріальне середовище. Координатні лінії такої системи в загальному випадку при русі середовища стають криволінійними (рисунок 2. 1).

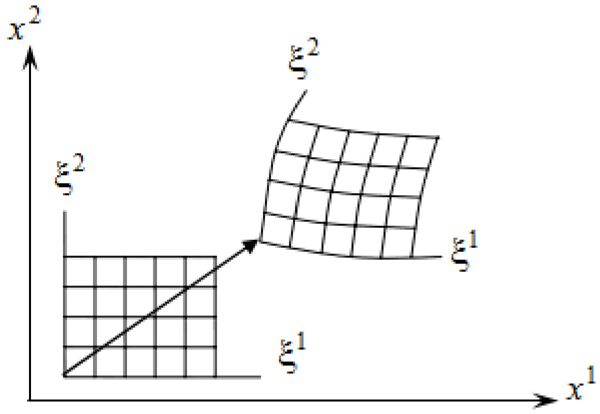


Рисунок 2.1 – Рух середовища і супутня система координат

В підході Ейлера об’єктом дослідження є нерухомий простір спостерігача, який заповнено середовищем, що рухається. Величини, які характеризують рух, вважаються функціями координат точки в нерухомому середовищі спостерігача і часу t. Ці змінні носять назву *змінних Ейлера*. Таким чином, об'єктом дослідження в підході Ейлера є різноманітні поля (тобто розподіл величин в просторі), що характеризують рух суцільного середовища. Рух суцільного середовища з точки зору Ейлера можна вважати заданим, якщо відомо розподіл компонент переміщень $\left(u^i\right)$, $(i=1,2,3)$ або швидкості $\left(v^i\right)$, $(i=1,2,3)$ суцільного середовища в нерухомому просторі спостерігача в залежності від змінних Ейлера:

$$\begin{cases} u^1 = u^1\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ u^2 = u^2\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ u^3 = u^3\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} v^1 = v^1\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ v^2 = v^2\left(x^1, x^2, x^3, t\right); \\ v^3 = v^3\left(x^1, x^2, x^3, t\right). \end{cases} \tag{2.3}$$

Від змінних Лагранжа можна перейти до змінних Ейлера і навпаки. Розв'язуючи систему (1) відносно змінних Лагранжа, отримуємо

$$\xi^i = \xi^i\left(x^1, x^2, x^3, t\right), \ (i=1,2,3). \tag{2.4}$$

Формули (2.4) дозволяють індивідуалізувати матеріальну частинку суцільного середовища (знайти її початкові координати), що знаходиться в даний момент часу в точці нерухомого простору з координатами $\left(x^1, x^2, x^3\right)$. Ці формули є альтернативним в порівнянні з формулами (2.1) способом завдання руху суцільного середовища за Ейлером.

Таким чином, опис руху суцільного середовища за Лагранжем визначає закони зміни переміщень, швидкості і прискорення для кожної індивідуальної частинки суцільного середовища, а опис руху за Ейлером – закони зміни тих самих величин, але для фіксованих точок простору.

Опис руху за Ейлером і Лагранжем механічно еквівалентний. В числових розрахунках використовується як Ейлеревий, так і Лагранжевий опис руху суцільного середовища.

Відмінність точок зору Лагранжа і Ейлера на вивчення руху суцільного середовища. Таким чином, з точки зору Лагранжа, ми цікавимося законами зміни швидкості, прискорення, температури та інших величин для даної індивідуальної точки суцільного середовища, а з точки зору Ейлера – швидкістю, прискоренням, температурою і т.д. в даному місці середовища. З точки зору Ейлера, ми виділяємо деяку область простору і хочемо знати всі дані про частинки, які в неї приходять.

Ясно, що математично точка зору Ейлера відрізняється від точки зору Лагранжа тільки тим, що в першій змінними є координати точок простору x^1, x^2, x^3 і часу t, а в другій – параметри ξ^1, ξ^2, ξ^3 є індивідуальними координатами частинок середовища, що змінюються у часі t.

У відповідності до описаних систем відліку, розрізняють відносну деформацію)[1] Коші (або показник Коші)

$$\xi = \frac{\Delta L}{L_0},$$

відносну деформацію Ейлера

$$\xi = \frac{\Delta L}{L},$$

логарифмічну деформацію або показник Генки (для великих деформацій)

$$\delta = \ln \frac{L}{L_0},$$

де $\Delta L = L - L_0$ – абсолютна деформація – різниця між кінцевою L і початковою L_0 відстанню між двома точками суцільного середовища.

При малих деформаціях (5–10 % від 1) показники Коші і Генки практично співпадають.

Субстанціональна похідна або індивідуальна і локальна похідна за часом. Розподіл температур можна задати як з точки зору Лагранжа – $T = T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, так і з точки зору Ейлера – $T = T(x^1, x^2, x^3, t)$. Якщо розподіл T задано з точки зору Лагранжа, то обчислити зміну температури T в одиницю часу t в частинці суцільного середовища дуже просто

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}. \tag{2.5}$$

[1] Деформація – це таке зміщення частинок тіла одна відносно другої, при якому змінюється відстань між ними, але не порушується неперервність самого тіла. Розрізняють пружну деформацію, яка є зворотною, і незворотну – пластичну.

Як обчислити ту ж величину, якщо розподіл температури задано в залежності від змінних Ейлера $T\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$? Очевидно, для цього треба перейти від змінних Ейлера до змінних Лагранжа

$$T\left(x^1, x^2, x^3, t\right) = T\left[x^1\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), x^2\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), x^3\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right), t\right] \tag{2.6}$$

та скористатися правилом диференціювання складної функції. Тоді

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + \frac{\partial T}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i} + \frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \tag{2.7}$$

де похідні $\frac{\partial x^1}{\partial t}, \frac{\partial x^2}{\partial t}, \frac{\partial x^3}{\partial t}$ беруться при постійних ξ^1, ξ^2, ξ^3 і, відповідно, є компонентами швидкості v^1, v^2, v^3. Тому можна записати, що

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}. \tag{2.8}$$

Замітимо, що при заданій функції $T\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$ для обчислення $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ не треба повністю знати закон руху суцільного середовища, необхідно знати тільки поле швидкості $\mathbf{v}$.

Похідна $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ характеризує зміну температури з часом в даній точці суцільного середовища і називається індивідуальною, або субстанціональною, або матеріальною, або повною похідною температури T за часом t і позначається символом $\frac{dT}{dt}$. Похідна $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i}$ характеризує зміну температури T в одиницю часу в даній точці простору x^1, x^2, x^3 і називається локальною похідною і позначається $\frac{\partial T}{\partial t}$. В загальному випадку індивідуальна похідна $\frac{dT}{dt}$ не дорівнює локальній $\frac{\partial T}{\partial t}$, а відрізняється від неї на величину, яка залежить від руху частинок і називається конвективною похідною. Отже

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}, \tag{2.9}$$

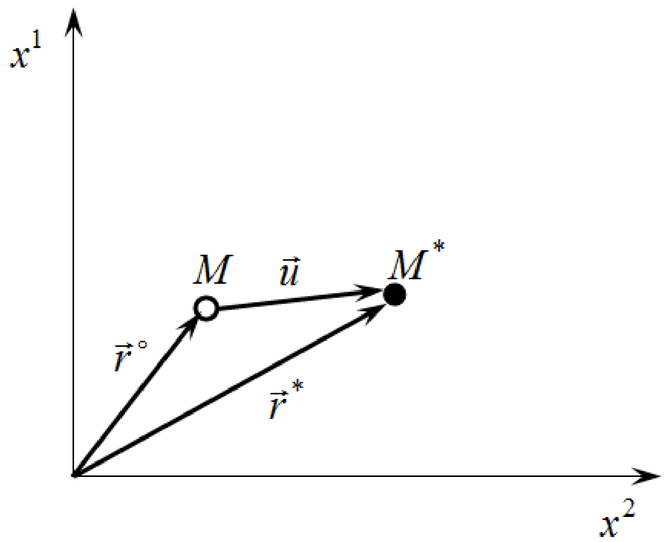
або

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} T. \tag{2.10}$$

Векторні базиси в початковій та актуальній конфігурації тіл. Розглянемо початкову і актуальну (поточну) конфігурації тіла на прикладі переміщення його окремої частинки, тобто зміни її положення у просторі під дією зовнішніх або внутрішніх сил. Початкове і актуальне положення частинки тіла у просторі можна охарактеризувати відповідним радіусом вектором (рисунок 2.2).

У відповідності до рисунку 2.2 початковий векторний базис $\mathbf{e}_i^\circ$ частинки тіла M визначається співвідношенням

$$\mathbf{e}_i^\circ = \frac{\partial \mathbf{r}^\circ}{\partial x^i}. \tag{2.11}$$



M° і M^* – точки, що характеризують початкове і актуальне положення частики тіла у просторі, відповідно; $\vec{r}^\circ$ і $\vec{r}^*$ – радіуси-вектори початкового і актуального положення частики тіла у просторі, відповідно; $\vec{u}$ – вектор переміщення; (x^1, x^2) – система координат

Рисунок 2.2 – Початкове і актуальне положення частинки тіла у просторі

Тоді актуальний векторний базис $\mathbf{e}_i^*$ визначається як

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}^\circ}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}, \tag{2.12}$$

де $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^\circ + \mathbf{u}$ – вектор переміщення, що спричинює зміну положення частинки тіла у просторі під дією зовнішніх або внутрішніх сил.

Початковий векторний базис $\mathbf{e}_i^\circ$ відповідає або відсутності напружень, або положенню рівноваги зовнішніх масових сил $\vec{F}^\circ = \overset{\circ}{f}{}^m \mathbf{e}_m^\circ$ з внутрішніми напруженнями $\hat{\sigma}^\circ = \overset{\circ}{\sigma}{}^{mn} \mathbf{e}_m^\circ \mathbf{e}_n^\circ$.

Актуальний векторний базис $\mathbf{e}_i^*$ відповідає довільному деформованому стану рухомого середовища під дією зовнішніх масових сил $\vec{F}^* = \overset{*}{f}{}^m \mathbf{e}_m^*$ з внутрішніми напруженнями $\hat{\sigma}^* = \overset{*}{\sigma}{}^{mn} \mathbf{e}_m^* \mathbf{e}_n^*$.

Скінчена деформація рухомого середовища відносно початкового фіксованого базису $\mathbf{e}_i^\circ$ у загальному випадку визначається як

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{mn} \mathbf{e}^{*m} \mathbf{e}^{*n}, \tag{2.13}$$

де $\varepsilon_{mn} = \overset{*}{\varepsilon}_{mn} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}$ – компоненти тензора деформацій у початковій конфігурації тіла; $\overset{*}{\varepsilon}_{mn}$ – компоненти тензора деформацій рухомого середовища.

При відсутності напружень у початковому базисі маємо, що $\varepsilon_{mn} = \overset{*}{\varepsilon}_{mn}$.

Гіпотези МСС і їх роль при розробці математичних моделей. Основними гіпотезами МСС є такі: *гіпотеза суцільності; гіпотеза однорідності; гіпотеза ізотропності властивостей середовища; гіпотеза про природній ненапружений стан; гіпотеза про простір і час*.

I – гіпотеза суцільності: тіла складаються з нескінченно малих частинок, які суцільно заповнюють заданий об'єм порожнин, розривів та ін. Суцільне середовище це континуум в тривимірному евклідовому просторі E^3);

II – гіпотеза однорідності: властивості тіл не залежать від положення точки (тобто є константами) або, якщо вони змінюються, то змінюються плавно без стрибків таким чином, що функції, які описують зміну властивостей є неперервними і диференційованими функціями;

III – гіпотеза ізотропності: передбачає рівність фізичних властивостей середовища в будь-якому напрямку;

IV – гіпотеза про природній ненапружений стан: передбачає відсутність напружень в тілі до прикладення навантаження. В дійсності такі напруження існують. Використання цієї гіпотези, по-перше, пов'язано з невизначеністю в загальному випадку таких напружень, а по-друге, з необхідністю визначення напружень, що пов'язані з конкретним зовнішнім навантаженням;

V – гіпотеза про простір і час: передбачає, що всі процеси розглядаються у просторі, в якому визначені відстані між точками, і розгортаються у часі, причому в класичній механіці МСС час не залежить від вибору системи відліку, а в релятивістській – простір і час зв'язується в єдиний простір-час.

Розглянуті гіпотези дозволяють застосовувати добре розроблений математичний апарат диференціального і інтегрального числення неперервних функцій для формулювання математичних моделей і методів розв'язання систем диференціальних рівнянь МСС.

Основні величини, які розглядаються в МСС (термодинамічні параметри):

1. напруження,
2. деформації,
3. температура,
4. переміщення,
5. швидкість переміщення та ін.

Крім того, розглядаються зовнішні та внутрішні (зусилля) сили.

Розглянемо визначення основних величин МСС.

Напруження є відношення внутрішніх сил, що діють на задану площу перерізу тіла до цієї площі, при умові, що площа є нескінченно малою (тобто прямує до нуля). Розрізняють *нормальні* та *дотичні* напруження. В залежності від дії внутрішніх сил на кожній площині може діяти 1 нормальне і 2 дотичних напружень. Вимірюється у системі СІ у Паскалях (Па).

Головним напруженням називають напруження, що діє на головній площині (де дотичні напруження дорівнюють нулю).

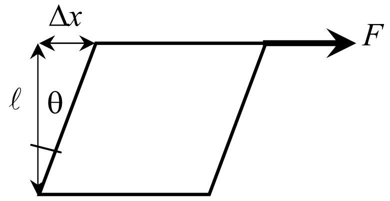
Розрізняють три види деформацій:

1. лінійну (безрозмірну);
2. зсуву;

3. об'ємну.

Лінійна деформація – це відношення приросту довжини тіла до його початкової довжини.

Деформація зсуву виникає тоді, коли на тіло, наприклад брусок, діє сила паралельна основі (рисунок 2.3). В цьому випадку виникає зміщення горизонтальних шарів в тілі відносно один одного без зміни їх розмірів.



ℓ – відстань між шарами; Δx – абсолютний зсув паралельних шарів тіла; θ – кут зсуву; F – сила, що діє паралельно основі бруска

Рисунок 2.3 – Деформація зсуву (дисторсія)

Відносна деформація зсуву визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\Delta x}{\ell},$$

де Δx – абсолютний зсув паралельних шарів тіла відносно один одного; ℓ – відстань між шарами (для малих кутів справедливо – $\mathrm{tg}\theta = \gamma$).

Кут θ вимірюється в радіанах. *Радіан* – це кут сектора, в якому довжина дуги дорівнює радіусу.

Об'ємна деформація – це відношення зміни об'єму тіла до його початкового значення.

Температура (від лат. *temperatura* — належне зміщення, нормальний стан) — скалярна фізична величина, яка характеризує середню кінетичну енергію частинок макроскопічної системи (середовища), що припадає на один ступінь свободи, і знаходиться в стані термодинамічної рівноваги. Вимірюється у системі СІ у Кельвінах (К).

Переміщення (в кінематиці) – це зміна місця положення фізичного тіла в просторі відносно вибраної системи відліку. Також *переміщенням* називають вектор, який характеризує цю зміну і має властивості адитивності. Довжина відрізку – це модуль переміщення, вимірюється в метрах (СІ). Можна визначити переміщення, як зміну радіус-вектора точки $d\mathbf{r}$.

Швидкість переміщення – це зміна переміщення у часі, вимірюється метрах за секунду в (СІ) – м/с.

Задачі механіки суцільного середовища. До задач МСС відносяться задачі дослідження напружено-деформованого стану твердих, рідких та газоподібних тіл при їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи – гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо, що безпосередньо витікає із визначення МСС як науки.