ТЕМА 3 ВВЕДЕННЯ В ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

Лекція 3.1(3) **Поняття вектора. Координатні системи. Представлення векторів в прямокутних і косокутних прямолінійних координатах. Основний і взаємний векторні базиси. Властивості змішаного добутку векторів. Німий, вільний, коваріантний і контраваріантний індекси. Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора. Дії над векторами**

Тензорний аналіз або тензорне числення є основою математичного апарату механіки суцільних середовищ. Використання цього апарату дає змогу значно спростити та стиснути об’єм інформації при записі математичних моделей МСС.

Вектор це геометрична величина, яка характеризується модулем і напрямком. Наприклад, вектор швидкості позначається як $\mathbf{v}$, а його модуль – $|\mathbf{v}|$.

Координатні системи. Координатні системи, які визначаються 3-а векторами поділяють на дві групи:

– *декартова* система координат (ортогональна, рисунок 3.1);
– *афінна* або *косокутна* система координат визначається будь-якими 3-а векторами, які не лежать в одній площині (рисунок 3.2).

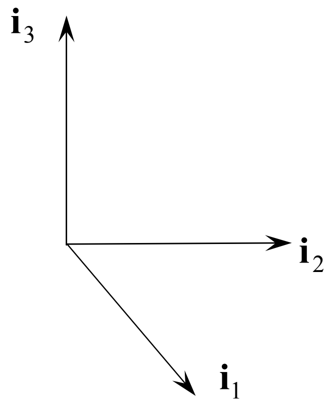


Рисунок 3.1 – Декартова система координат

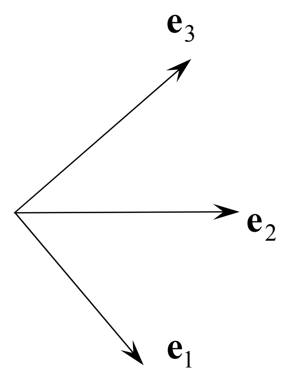


Рисунок 3.2 – Афінна система координат

Вектори, що визначають системи координат є базисними. Наприклад, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – базисні вектори ортогональної декартової системи координат, а $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базисні вектори афінної системи координат.

Представлення векторів в прямокутних і косокутних прямолінійних координатах. Основним призначенням координатних систем є розклад векторів за заздалегідь прийнятим базисним векторам системи координат (рисунки 3.3, 3.4).

Наприклад, тензор (вектор) **a** в декартовій системі координат (рисунок 3.3) можна розкласти за основним базисом $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, який позначається нижніми індексами

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{i}_1 + a^2\mathbf{i}_2 + a^3\mathbf{i}_3, \qquad (3.1)$$

де a^1, a^2, a^3 – компоненти вектора $\vec{a}$ в декартовій системі координат, які являють собою числа або скаляри.

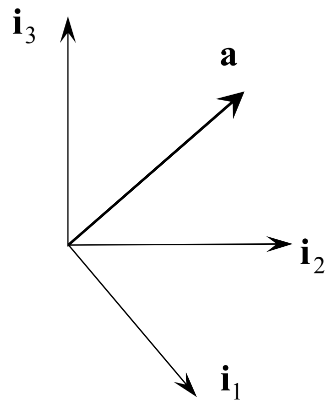


Рисунок 3.3 – Представлення вектора у декартовій (прямокутній) системі координат

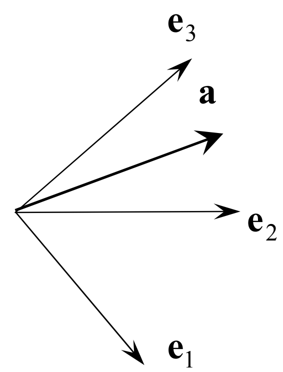


Рисунок 3.4 – Представлення вектора у афінній (косокутній) системі координат

Розклад тензору **a** в афінній (косокутній) системі координат (рисунок 3.4) за основним базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (який позначається нижніми індексами) записується як

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, \qquad (3.2)$$

де a^1, a^2, a^3 – компоненти вектора $\vec{a}$ в афінній системі координат.

Основний і взаємний векторні базиси. Основним базисом декартової системи координат є 3 орти $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Причому компоненти вектора $\vec{a}$

визначаються як скалярний добуток (який позначається знаком $\cdot$) вектора $\mathbf{a}$ на базисні вектори $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$

$$a^1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_1; \quad a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_2; \quad a^3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_3. \tag{3.3}$$

Основним базисом афінної системи координат є 3 орти $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Компоненти вектора $\vec{a}$ в афінній визначаються аналогічним чином (3.3).

В тензорному аналізі поряд з основним базисом було запропоновано ввести додатковий базис, який також складається з 3-х векторів і називається *взаємним*. *Взаємний базис* позначається верхніми індексами і визначається формулами:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}; \qquad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}; \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{3.4}$$

де $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ – одночасний скалярний і векторний добуток, який називається *змішаним добутком*. При цьому спочатку виконується векторний добуток, а потім скалярний. Результатом змішаного добутку $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ є скаляр.

Властивості змішаного добутку векторів:

– змішаний добуток не залежить від розташування знаків векторного і скалярного добутку;
– якщо в змішаному добутку два з векторів мають однаковий напрям або збігаються, то змішаний добуток дорівнює нулю;
– циклічна заміна індексів не змінює результату змішаного добутку;
– при нециклічній зміні індексів векторів результатом будемо мати від'ємний знак.

Вектори взаємного базису так само як і вектори основного базису використовують для того, щоб визначення компонент розкладу вектора виконати шляхом скалярного добутку.

Розглянемо приклади розкладу вектора на взаємному базисі. Для коваріантних компонент вектора $\mathbf{a}$ (з нижніми індексами) маємо

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^1; \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2; \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^3,$$
$$\text{або } a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i \quad (i = 1,2,3). \tag{3.5}$$

Розклад вектора **a** на взаємному базисі можна записати через його коваріантні компоненти

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}^i , \qquad (3.6)$$

де $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i \quad (i = 1,2,3)$.

Німий, вільний, коваріантний і контраваріантний індекси. Індекс, що повторюється у виразі називається *німим*, а індекс який не повторюється – *вільним*.

Німі індекси мають такі властивості:

1. по німим індексам виконується сумування, яке при записі виразів записується таким чином
$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}^i = a_i\mathbf{e}^i ;$$
2. німі індекси можуть розташовуватись в різних положеннях: A_i^i, A_{ii};
3. німі індекси можна замінити на будь-який інший, який не зустрічається у виразі;
4. німі індекси можна одночасно змінювати з точки зору їх положення (коваріантні на контраваріантні і навпаки)
$a^i_{\cancel{i}} - \mathbf{e}^{\cancel{i}}_i$.

Для вільних індексів є правило: якщо в лівій частині рівняння є вільний індекс, то він має бути і в правій його частині і в тому ж самому положенні; або погодження про ранг – всі вільні індекси, що зустрічаються тільки внизу або тільки вверху, пробігають значення від 1 до n, так що рівняння з R вільними індексами є скороченим записом n^R рівнянь. Як верхні, так і нижні індекси різних частин рівняння повинні співпадати.

Індекси, що знаходяться знизу називаються *коваріантними*, а зверху – *контраваріантними*.

Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора. Контраваріантні компоненти вектора $\vec{a}$ наведені в (3.1)–(3.3), а коваріантні – в (3.5), (3.6).

Дії над векторами:

– *від'ємний вектор* – це дія, яка полягає в тому, що модуль вектора залишається незмінним, а напрям змінюється на протилежний;

– *множення вектора на скаляр* – результатом є збільшення модуля вектора на цей скаляр;
– *сума векторів* – вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма побудованого на векторах, що складаються;
– *скалярний добуток* двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є скаляр (число) і дорівнює добутку модулів цих векторів на cos кута між ними – $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$. Скалярний добуток двох векторів можна також записати через їх компоненти

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_ib_i; \tag{3.7}$$

– *векторний добуток* двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є вектор $\mathbf{c}$ (позначається знаком $\times$), модуль якого дорівнює добутку модулів на sin кута між ними, а напрям результуючого вектора збігається з напрямком нормалі векторів, що перемножуються при умові, що з кінця результуючого вектора видно рух від першого до другого вектора проти годинникової стрілки (правило правого буравчика, рисунок 3.5)

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \tag{3.8}$$

а через компоненти векторів для векторного добутку двох векторів будемо мати

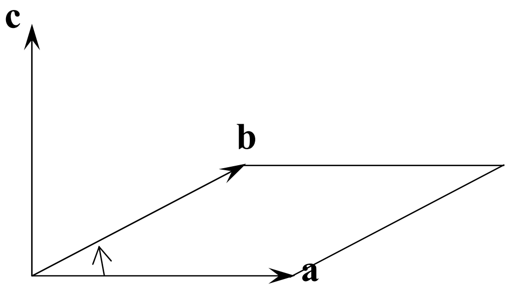
$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}^1+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}^2+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}^3; \tag{3.9}$$

– *тензорне множення* 2-х векторів полягає в тому, що виникає нова величина, яка називається *діадою* і є елементарним тензором

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\mathbf{ab}. \tag{3.10}$$

Наприклад, (матричне) множення вектора-стовпця на вектор-рядок дає їх тензорний добуток

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \to \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}. \qquad (3.11)$$



площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

Рисунок 3.5 – До векторного добутку векторів

Кількість векторів, які беруть участь у тензорному добутку характеризують властивість, яку називають *рангом* тензора (більше 3-х – *поліада*, 3 – *тріада*, 2 – *діада*). Якщо перед векторами стоять скаляри, то скалярні величини перемножуються звичайним чином

$$(2\mathbf{a}) \otimes (3\mathbf{b}) = 6\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}. \qquad (3.12)$$

Лекція 3.2(4) **Визначення тензора. Представлення тензорів через вектори основного і взаємного базисів, векторний супровід. Фундаментальні тензори систем координат: метричний, перетворення координат, Леві-Чівіти. Компоненти метричного тензора. Компоненти тензора перетворення координат**

Визначення тензора. Тензором називається геометрична величина, яка має n^r компонент, де n – розмірність простору, r – ранг тензора, і може бути представлена у вигляді $\hat{T} = t^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – тензор 2-го рангу, (тут знак ^ вказує на те, що це тензор 2-го рангу) $\overset{3}{\hat{S}} = S^{ijk}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ – тензор 3-го рангу.

У відповідності з визначенням тензора, скаляр це тензором нульового рангу, а вектор – 1-го рангу.

Розглянемо запис *тензорного добутку* двох векторів з використанням базисних векторів

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=a^i\mathbf{e}_i\otimes b^j\mathbf{e}_j=\underline{a^ib^j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=t^{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=t^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\ . \qquad (4.1)$$

В результаті вираз $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ зведено до тензорного добутку базисних векторів, які називаються діадами (2), тріадами (3) і поліадами (>3). Величини, що стоять перед діадами називають *компонентами тензора* $t^{ij}=a^ib^j$, а діади, тріади, поліади – *векторним супроводом тензора*.

У випадку тріади для тензорного добутку маємо, що

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}=S^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}S^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\ \text{– 27 членів.} \qquad (4.2)$$

Представлення тензорів через вектори основного і взаємного базисів, векторний супровід. Наприклад, тензор напружень 2-го рангу $\hat{\sigma}$ представляється контраваріантними компонентами σ^{ij} через векторний супровід $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, який є векторами основного базису

$$\hat{\sigma}=\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\ , \qquad (4.3)$$

а тензор деформацій 2-го рангу $\hat{\varepsilon}$ представляється коваріантними компонентами ε_{ij} через векторний супровід $\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$, який є векторами взаємного базису

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\ . \qquad (4.4)$$

Фундаментальні тензори систем координат. До фундаментальних тензорів відносяться:

– *метричний* тензор

$$\hat{g}=g^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=g_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j=g_i^j\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i\ ; \qquad (4.5)$$

– тензор *перетворення координат* – тензор, компоненти якого утворені базисними векторами різних систем координат

$$\hat{c}=c_i^{j'}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_{j'}=c_{j'}^i\mathbf{e}_i\mathbf{e}^{j'}\ ; \qquad (4.6)$$

– тензор *Леві-Чівіта*

$$\overset{3}{\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k . \tag{4.7}$$

Компоненти метричного тензора. Розрізняють такі компоненти метричного тензору відносно основного базису

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ji} \text{ – коваріантні;}$$
$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ji} \text{ – контраваріантні;}$$
$$g_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \text{ – змішані,} \tag{4.8}$$

тобто метричний тензор є симетричним.

Компоненти тензора перетворення координат:

$$\begin{aligned} c_i^{j'} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{j'} ; \\ c_{i'}^{j} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}^{j} , \end{aligned} \tag{4.9}$$

тобто компоненти тензора перетворення координат завжди є змішаними.

Компоненти тензора Леві-Чівіти

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\mathbf{e}_i , \mathbf{e}_j , \mathbf{e}_k \right). \tag{4.10}$$

Одиничний тензор. Істотне значення серед диадиків або тензорів 2-го рангу має тензор тотожного перетворення, який при скалярному добутку на вектор не змінює його. Внаслідок цієї властивості він також має назву одиничного тензора і позначається через $\mathbf{I}$. При використанні двох взаємних координатних базисів одиничний тензор може бути представлений рівністю

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_n\mathbf{e}^n . \tag{4.11}$$

При скалярному добутку одиничного тензора $\mathbf{I}$ на вектор $\mathbf{a}$ отримуємо

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = \left(\mathbf{e}^n\mathbf{e}_n\right) \cdot \mathbf{a} = a_n\mathbf{e}^n = \mathbf{a} . \tag{4.12}$$

Компоненти метричного тензора. Як було відмічено вище (4.8) змішані компоненти метричного тензора визначаються скалярним добутком коваріантного на контраваріантний базис

$$g_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j, \tag{4.13}$$

де $\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$ – символ Кронекера.

Визначимо скалярні добутки базисів:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3} = 1,$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 1, \ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 1,$$

всі інші $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = 0$ при $i \neq j$.

Властивість 1. Змішані компоненти метричного тензора є компонентами матриці символу Кронекера.

Властивість 2. Компоненти метричного тензора є компонентами розкладу векторів взаємного базису за векторами основного базису

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_i \tag{4.14}$$

$$\text{і } \mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^i, \tag{4.15}$$

навпаки, компонентами розкладу основного базису по взаємному базису. Тобто за допомогою метричного тензора виконуються операції опускання або підняття індексу.

Властивість 3. Метричний тензор дозволяє в будь-якій системі координат визначати відстань між двома точками заданих координатами або модуль вектору заданого компонентами. Нехай маємо вектор $\mathbf{a}$, заданий компонентами

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3,$$

тоді вектор можна записати через взаємний базис

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3.$$

Скориставшись узагальненою формулою Піфагора можна отримати модуль вектора

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\,.$$

Тоді

$$(\mathbf{a})^2 = \left(a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3\right)^2 = a_1a_1\mathbf{e}^1\mathbf{e}^1 + a_1a_2\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2 + a_1a_3\mathbf{e}^1\mathbf{e}^3 +$$
$$+ a_2a_1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^1 + a_2a_2\mathbf{e}^2\mathbf{e}^2 + a_2a_3\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3 + a_3a_1\mathbf{e}^3\mathbf{e}^1 + a_3a_2\mathbf{e}^3\mathbf{e}^2 + a_3a_3\mathbf{e}^3\mathbf{e}^3$$

або

$$\left(\mathbf{a}^2\right) = a_i a_j g^{ij}\,.$$

Наслідком властивостей метричного тензора (4.14), (4.15) є можливість підняття і опускання індексів. Тобто скориставшись (4.15) отримаємо

$$c^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = c^{ij}g_{im}\mathbf{e}^m g_{jn}\mathbf{e}^n = c^{ij}g_{im}g_{jn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n = c_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n\,, \tag{4.16}$$

де $c_{mn} = c^{ij}g_{im}g_{jn}$.

Аналогічно можна записати для підняття індексів

$$c^{st} = c_{pq}g^{ps}g^{qt}\,. \tag{4.17}$$

Компоненти тензора перетворення координат. Використовуючи формули, які визначають тензор перетворення координат

$$\begin{aligned} c_i^{j'} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^{j'}; \\ c_{i'}^{j} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}^{j}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

запишемо вирази для базисів при переході з однієї системи координат (з індексом i) в іншу (з індексом i')

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^{m}\mathbf{e}_m\,, \qquad \mathbf{e}_m = c_m^{s'}\mathbf{e}_{s'}\,, \tag{4.19}$$

$$\mathbf{e}^{i'} = c_n^{i'}\mathbf{e}^n\,, \qquad \mathbf{e}^n = c_{s'}^{n}\mathbf{e}^{s'}\,. \tag{4.20}$$

Використовуючи (4.19), (4.20) запишемо компоненти вектора **a** через базиси різних координатних систем

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i = a_i \mathbf{e}^{m'} c^i_{m'} = \underline{a_i c^i_{m'}} \mathbf{e}^{m'} = a_{m'} \mathbf{e}^{m'}, \tag{4.21}$$

де $a_{k'} = a_i c^i_{k'}$;
і зворотне перетворення компонентів вектора **a**

$$a_i = a_{k'} c^{k'}_i . \tag{4.22}$$

Через тензор перетворення координат також неважко записати вираз для компонент тензора для переходу з однієї системи координат в іншу. Наприклад, візьмемо тензор 3-го рангу для переходу від системи координат з індексами $(i', j', k' = 1,2,3)$ до другої системи з індексами $(p, q, z = 1,2,3)$

$$S^{pqz} = S^{i'j'k'} c^p_{i'} c^q_{j'} c^z_{k'} \qquad \text{(27 компонент).} \tag{4.23}$$

Формула (4.23) також використовується для доведення твердження про те, що компоненти якоїсь заданої величини є компонентами тензора.

У відповідності з властивостями тензора перетворення координат і зокрема формулою (4.23) можна сформулювати друге визначення тензора. *Тензором* називається геометрична величина, яка має n^r компонент (n – розмірність простору, r – ранг тензора), який при зміні координатної системи перетворюється у відповідності до формул:

$$a^i = a^{m'} c^i_{m'}; \tag{4.24}$$

$$b^{kl} = b^{s't'} c^k_{s'} c^l_{t'} . \tag{4.25}$$

Лекція 3.3(5) **Компоненти тензора Леві-Чівіта. Унарні дії над тензором: транспонування, скалярна згортка, векторна згортка, слід тензора. Бінарні операції з тензорами: сума тензорів, скалярний добуток, подвійний скалярний добуток, векторний добуток, тензорний добуток. Диференціювання тензорів. Оператор Гамільтона. Градієнт тензора. Оператор дивергенції**

Компоненти тензора Леві-Чівіта. Компоненти тензора Леві-Чівіта або символу перестановки ε_{ijk}, ε^{ijk} можна представити таким чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j &= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}^k; \\ \varepsilon_{ijk} &= \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\right); \\ \mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j &= \varepsilon^{ijk}\mathbf{e}_k. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Наприклад, тензор (символ) Леві-Чівіти, який має 27 компонент, в будь-якій ортогональній системі координат визначається в такій формі:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають парну перестановку із } 1,2,3; \\ -1, & \text{якщо } i,j,k \text{ дають непарну перестановку із } 1,2,3; \\ 0, & \text{у всіх інших випадках } (i = j, \text{ або } j = k, \text{ або } k = i). \end{cases}$$

Тобто, скориставшись рисунком 5.1 нескладно записати:

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$

$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1,$

а всі інші 18 компонент, у яких символи повторюються, дорівнюють нулю.

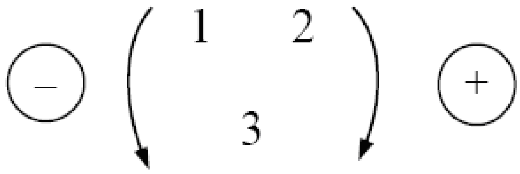


Рисунок 5.1 – До визначення ε_{ijk}

Унарні дії над тензором. Транспонування тензора виконується шляхом перестановки векторного супроводу тензора. При виконанні транспонування тензорів більшого рангу повинно бути вказано, які вектори мають бути переставлені.

Нехай маємо тензор другого рангу

$$\hat{M} = m^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \tag{5.2}$$

де m^{ij} – компоненти тензора; $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – супровід тензора.

Результатом його транспонування буде

$$\hat{M}^T = m^{ji}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i, \tag{5.3}$$

де T – знак операції транспонування.

Скалярна згортка полягає в тому, що два з векторів супроводу тензора скалярно перемножуються між собою

$$a^{ij}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a^{ij}g_{ij} = a_i^i, \tag{5.4}$$

де $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ – коваріантні компоненти метричного тензору (див. лекцію №4).

Наприклад, згортка тензорів 2-го рангу за двома парами індексів

$E_{ij}F_{km}$ згортається в $E_{ij}F_{ij}$ або $\hat{E}:\hat{F}$ – в результаті отримуємо скаляр.

Операція скалярної згортки знижує ранг тензора на дві одиниці і може виконуватись для тензорів, починаючи з 2-го рангу. Якщо ранг тензора > 2, то повинні бути визначені вектори між якими відбувається скалярний добуток

$$\underset{1\cdot 3}{\overset{3}{\hat{P}}} = p^{krq}\underbrace{\mathbf{e}_k\mathbf{e}_r\mathbf{e}_q}_{1\cdot 3} = p^{krq}g_{kq}\mathbf{e}_r = p^{kr}_{\cdot\cdot k}\mathbf{e}_r. \tag{5.5}$$

Скалярна згортка одиничного тензора $\hat{I} = \mathbf{I} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^i$ дає значення

$$\underset{1\cdot 2}{\hat{I}} = 3.$$

Векторна згортка виконується так само як і скалярна тільки замість скалярного добутку між векторами супроводу виконується векторний добуток

$$\underset{1\otimes 2}{\overset{3}{\hat{P}}} = p^{krq}(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_q = p^{krq}\varepsilon_{krm}\mathbf{e}^m\mathbf{e}_k. \tag{5.6}$$

При векторному згортанні ранг тензора зменшується на одиницю.

При векторному згортанні одиничного тензора отримуємо нуль

$$\underset{1\otimes 2}{\hat{I}} = 0 .$$

Слід тензора (має відношення тільки до тензорів 2-го рангу) визначається підсумовуванням його діагональних компонент

$$\mathbf{tr}\left(\hat{T}\right) = T_{11} + T_{22} + T_{33} .$$

Бінарні операції з тензорами. (операції з двома тензорами) *Сума тензорів.* Тензори можна додавати один до одного, якщо вони мають однаковий ранг. При цьому компоненти результуючого тензора дорівнюють сумі відповідних компонент тензорів, що складаються. Нехай маємо два тензори 2-го рангу:

$$\hat{C} = c^{ip}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_p , \qquad \hat{F} = f^{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l .$$

Тоді можна записати, що

$$\begin{gathered}\hat{B} = \hat{C} + \hat{F} ;\ \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{F} ;\quad b^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = c^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + f^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j ; \\ b^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \left(c^{ij} + f^{ij}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j ,\end{gathered} \tag{5.7}$$

де $b^{ij} = c^{ij} + f^{ij}$ – компоненти результуючого тензора.

Скалярний добуток двох тензорів є тензор, ранг якого на дві одиниці менший від суми рангів тензорів, що перемножуються

$$\hat{A}\cdot\hat{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot b^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = a^{ij}b^{mn}\mathbf{e}_i\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_m\right)\mathbf{e}_n = a^{ij}b^{mn}g_{jm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_n , \tag{5.8}$$

де $g_{jm} = \mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_m$ – коваріантні компоненти метричного тензору (див. лекцію №4).

Наприклад, в декартовій системі координат результатом скалярного добутку двох тензорів другого рангу буде тензор другого рангу

$$\begin{aligned}\hat{C} = \hat{A}\cdot\hat{B} &= \left(a^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\right)\cdot\left(b^{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\right) = \left(a^{ij}b^{kl}\mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k\right)\mathbf{e}_l = \left(a^{ij}b^{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l\right)\delta_{jk} = \\ &= a^{ij}b^{jl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l ,\end{aligned}$$

де $\delta_{jk} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = 1$ – символ Кронекера; $c_{il} = a^{ij} b^{jl}$ – декартові компоненти тензора $\hat{C}$.

Подвійний скалярний добуток двох тензорів однакового рангу (≥ 2) дає скаляр (або тензор нульового рангу) і визначається для тензорів 2-го рангу як

$$p = \hat{A} : \hat{B} = \left(a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) : \left(b^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l\right) = \left(a^{ij} b^{kl}\right)\left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k\right)\left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l\right) = \left(a^{ij} b^{kl}\right)\delta_{jk}\delta_{il} = a^{ij} b^{ji}. \quad (5.9)$$

Векторний добуток двох тензорів є тензор, ранг якого на одиницю менший від суми рангів тензорів, що перемножуються. В процесі векторного множення компоненти тензорів перемножуються між собою. Векторний супровід першого тензора записується перед векторним супроводом другого тензора і виконується векторне множення між останнім вектором лівого тензора і першим вектором правого тензора. Векторний добуток тензорів позначається так само як векторний добуток векторів

$$\begin{aligned} &\overset{3}{\hat{A}} \times \overset{3}{\hat{B}} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = a^{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \times b^{mns} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \mathbf{e}_s = a^{ijk} b^{mns} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \left(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_m\right) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_s =, \\ &= \left(a^{ijk} b^{mns} \varepsilon_{kmq}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^q \mathbf{e}_n \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (5.10)$$

де ε_{kmq} – тензор Леві-Чівіта (див. лекцію №4); $a^{ijk} b^{mns} \varepsilon_{kmq}$ – компоненти векторного добутку 2-х тензорів.

Розглянемо також запис *векторного добутку двох векторів* через подвійний скалярний добуток з використанням тензора Леві-Чівіта

$$\begin{aligned} &\vec{a} \times \vec{b} = \left(\varepsilon^i_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k\right) : \left(b^l a^m \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m\right) = \\ &= \left(\varepsilon^i_{jk} b^l a^m \mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{e}^j \mathbf{e}^k\right) : \left(\mathbf{e}_l \mathbf{e}_m\right) = \left(\varepsilon^i_{jk} b^l a^m \mathbf{e}_i\right)\delta^j_l \delta^k_m = \\ &= \varepsilon^i_{jk} b^l a^m \mathbf{e}_i = \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right)\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тензорний добуток двох тензорів є тензор, ранг якого є сумою рангів тензорів, що перемножуються. Дана операція полягає в тому, що компоненти тензорів перемножуються, а векторний супровід лівого тензора записується перед векторним супроводом правого тензора і між ними виконується дія тензорного добутку (див. лекцію № 4)

$$\overset{3}{\hat{A}}\otimes\overset{3}{\hat{B}} = \mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = a^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \otimes b^{mns}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s = a^{ijk}b^{mns}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s = \\ = a^{ijk}b^{mns}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_s. \quad (5.12)$$

Диференціювання тензорів. Будемо вважати, що тензори є функціями координат. Нехай маємо тензор 2-го рангу

$$\hat{S} = \mathbf{S} = S^{mn},$$

тоді результат його диференціювання можна записати так

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}S^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = S^{mn}_{,i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n, \quad (5.13)$$

де $\frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} = S^{mn}_{,i}$. Тут кома вказує на диференціювання по x^i.

$\frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}$ – похідна від компонент тензора в прямолінійній системі координат є компонентами нового тензора, який є на один ранг вищий за тензор, що диференціюється. Тобто можна записати, що

$$\frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \mathbf{e}^i\frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \mathbf{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(S^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\right), \quad (5.14)$$

де $\mathbf{e}^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_i$ – оператор набла ∇ або *оператор Гамільтона*.

Тензор, який утворюється в результаті тензорного добутку оператора Гамільтона на тензор називається *градієнтом тензора*)[2]

[2] З математичної точки зору **градієнт** — це похідна скалярної функції, що визначена на векторному просторі, або *градієнтом* скалярної величини U називають вектор в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні в сторону збільшення U і чисельно рівний похідній від U за цим напрямком.
В декартовій системі координат градієнт скалярної величини U записується як
$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x^2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x^3}\mathbf{e}_3$; в циліндричній – $\mathrm{grad}U(r,\theta,z) = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{e}_z$;
у сферичній – $\mathrm{grad}U(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$.
З фізичної точки зору *градієнт*, наприклад, напруженість електростатичного поля є мінус градієнт електричного потенціалу, напруженість гравітаційного поля (прискорення вільного падіння) в класичній

$$\nabla \otimes \hat{S} = \nabla \otimes \mathbf{S} = \mathbf{e}^i \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \operatorname{grad} \hat{S} = \operatorname{grad} \mathbf{S}. \qquad (5.15)$$

Операція скалярного добутку (оператор дивергенції[3]). Скалярний добуток оператора Гамільтона на тензор

$$\nabla \cdot \hat{S} = \nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}^i \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \frac{\partial}{\partial x^i} S^{in} \mathbf{e}_n = \operatorname{div} \hat{S} = \operatorname{div} \mathbf{S}. \qquad (5.16)$$

В результаті застосування до тензора операції дивергенції його ранг зменшується на одиницю (в (5.16) індекс i є німим, тобто по ньому виконується підсумовування).

Лекція 3.4(6) **Ротор. Криволінійні координати. Диференціювання тензорів в криволінійних координатах. Властивості символів Кристофеля. Коваріантні похідні від тензора 2-го рангу заданого контраваріантними компонентами. Диференціювання тензора заданого коваріантними компонентами**

Ротор)[4]. Векторний добуток оператора Гамільтона на тензор називається ротором

$$\begin{aligned}\nabla \times \hat{S} = \nabla \times \mathbf{S} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} S^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \\ = \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} \left(\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}_m\right) \mathbf{e}_n = \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} \varepsilon^i_{mk} \mathbf{e}^k \mathbf{e}_n = \operatorname{rot} \hat{S} = \operatorname{rot} \mathbf{S}.\end{aligned} \qquad (6.1)$$

теорії гравітації є мінус градієнт гравітаційного потенціалу. Консервативна сила в класичній механіці є мінус градієнт потенціальної енергії.

[3] Дивергенція (від лат. *divergere* — виявляти розходження) — з математичної точки зору диференціальний оператор, який відображає векторне поле на скалярне (тобто операція диференціювання, в результаті застосування якої до векторного поля отримують скалярне поле), і який визначає (для кожної точки простору), «наскільки розходяться вхідні і вихідні потоки з малого околу даної точки поля».
З точки зору фізики дивергенція векторного поля є показником того, в якому ступені дана точка простору (точніше достатньо малий окіл точки) є джерелом або стоком цього поля: $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$ – точка поля є джерелом; $\operatorname{div}\mathbf{F} < 0$ – точка поля є стоком; $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ – стік і джерело відсутні або компенсуються один одним.
[4] Ротор або вихор це векторний диференціальний оператор над векторним полем, результатом застосування якого є нове векторне поле. Ротор вказує наскільки і в якому напрямку закручене поле в кожній точці середовища.

Ротор не змінює ранг тензора.

Криволінійні координати. Загальне визначення координат є таким: координатами точки називаються три числа, які однозначно визначають положення точки у просторі.

Якщо з трьох чисел безперервно змінюється одне число, то замість точки отримуємо лінію – *координатну лінію*.

Якщо брати різні точки і змінювати першу координату, то отримаємо *сімейство координатних ліній*.

Якщо те саме повторити для другої координати – отримаємо друге сімейство.

Якщо одночасно змінювати 1 і 2 число координат, то отримаємо *координатну поверхню*.

Якщо одна з координатних ліній є кривою, то така система координат називається *криволінійною*.

Якщо одна з трьох координат поверхні є криволінійною, то така система координат також є криволінійною.

Оскільки в криволінійній системі координат виконувати математичні дії неможливо, то в криволінійній системі координат у кожній точці простору ставиться відповідна прямолінійна система координат, яка називається додатковою прямолінійною системою координат (рисунок 6.1).

Особливостями застосування криволінійної системи координат є те, що розклад тензорів і векторів ведеться в кожній точці простору координатного базису, який визначений в даній точці простору. Всі алгебраїчні операції над тензорами, включаючи їх представлення через компоненти в кожній точці простору виконуються за правилами, які були визначені в прямолінійній афінній координатній системі. За основним базисом в кожній точці простору визначається взаємний базис, що дає можливість визначити фундаментальні тензори (див. лекцію № 4).

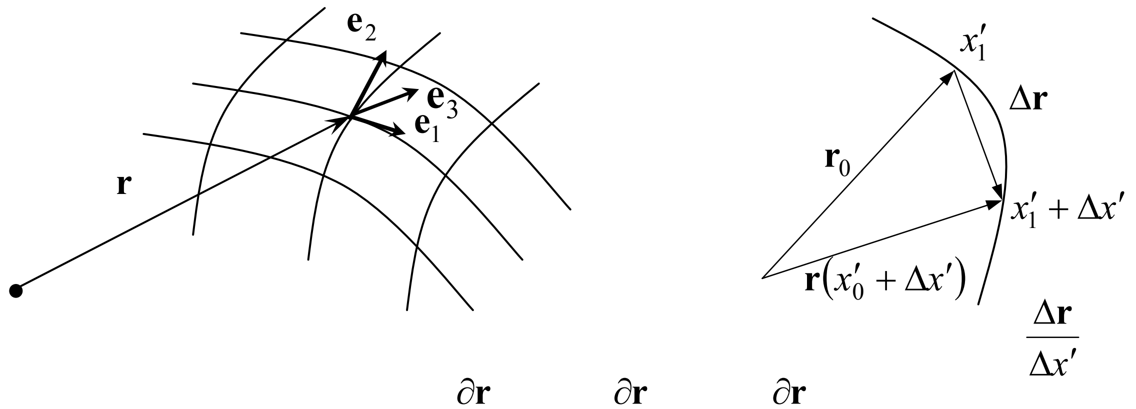
Диференціювання тензорів в криволінійних координатах. Нехай маємо тензор 1-го рангу (наприклад, вектор $\mathbf{a}$)

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,$$

тоді результат його диференціювання можна записати для 1-ї координати x^1 у виді

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(a^i \mathbf{e}_i\right) = \frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^1} = \frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^i \Gamma_{i1}^m \mathbf{e}_m, \tag{6.2}$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^1} = \Gamma_{i1}^m \mathbf{e}_m$ або $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \mathbf{e}_m$ – компоненти розкладу від базисних векторів називаються *символами Кристофеля 2-го роду*, які включають 27 компонент.



$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1};\ \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2};\ \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3}$$

Рисунок 6.1 – Додаткова прямолінійна система координат в криволінійній системі координат

Замінимо індекси в (6.2): i на m і навпаки

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^i \Gamma_{i1}^m \mathbf{e}_m = \frac{\partial a^i}{\partial x^1}\mathbf{e}_i + a^m \Gamma_{m1}^i \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^1} + a^m \Gamma_{m1}^i\right)\mathbf{e}_i, \tag{6.3}$$

або

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^1} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^1} + a^m \Gamma_{m1}^i\right)\mathbf{e}_i = \nabla_1 a^i \mathbf{e}_i, \tag{6.4}$$

де $\nabla_1 a^i = \dfrac{\partial a^i}{\partial x^1} + a^m \Gamma_{m1}^i$ – коваріантна похідна від компонент вектора.

При диференціюванні вектора $\mathbf{a}$ по трьох координатах, маємо

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^m \Gamma_{mj}^i\right)\mathbf{e}_i = \nabla_j a^i \mathbf{e}_i = a^i_{,j}\mathbf{e}_i, \tag{6.5}$$

де $\nabla_j a^i = a^i_{,j} = \dfrac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^m \Gamma^i_{mj}$. Тут кома вказує на диференціювання по x^j.

Властивості символів Кристофеля. Символи Кристофеля не є тензорами, тому що при переході до нової системи координат вони також перетворюються

$$\Gamma^{r'}_{hk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^m} \Gamma^m_{ij} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{h'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^m}. \tag{6.6}$$

Символи Кристофеля симетричні по нижніх індексах

$$\Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji} \text{ – (18 компонент)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^m_{ij} \mathbf{e}_m = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} = \Gamma^m_{ji} \mathbf{e}_m. \tag{6.7}$$

Коваріантні похідні від тензора 2-го рангу заданого контраваріантними компонентами. Нехай маємо тензор

$$\hat{T} = \mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

тоді для нього можна записати похідну виду

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(t^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{ij} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \mathbf{e}_j + t^{ij} \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m}, \tag{6.8}$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} = \Gamma^n_{jm} \mathbf{e}_n$ – символи Кристофеля.

Використовуючи заміну в (6.8) з використанням символів Кристофеля індексу i на n і навпаки, j на n і навпаки, запишемо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{ij} \Gamma^n_{im} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_j + t^{ij} \mathbf{e}_i \Gamma^n_{jm} \mathbf{e}_n = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{nj} \Gamma^i_{nm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + t^{in} \Gamma^i_{nm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \\ &= \left(\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} + t^{nj} \Gamma^i_{nm} + t^{in} \Gamma^i_{nm}\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla_m t^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = t^{ij}_{,m} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \end{aligned} \tag{6.9}$$

де $\nabla_m t^{ij} = t^{ij}_{,m} = \dfrac{\partial t^{ij}}{\partial x^m} + t^{nj}\Gamma^i_{nm} + t^{in}\Gamma^i_{nm}$ – коваріантна похідна.

Треба відзначити корисні властивості німих індексів, що були використані при перетвореннях в (6.9), які полягають в заміні індексів при векторах супроводу таким чином, щоб вони були єдиними для всіх доданків.

Коваріантна похідна будь-якого тензора складається з частини похідних від компонент + кількість додаткових елементів, яка дорівнює рангу тензора. Тобто маємо для тензора 3-го рангу

$$\nabla_m S^{ijk} = S^{ijk}_{,m} = \frac{\partial S^{ijk}}{\partial x^m} + S^{njk}\Gamma^i_{nm} + S^{ink}\Gamma^j_{nm} + S^{ijn}\Gamma^k_{nm}. \tag{6.10}$$

Диференціювання тензора заданого коваріантними компонентами. Розглянемо вектор

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^k, \tag{6.11}$$

тоді

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(a_i \mathbf{e}^i\right) = \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i + a_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}. \tag{6.12}$$

Тепер визначимо вираз для похідних від вектора взаємного базису

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} - ?, \tag{6.13}$$

$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = g^i_j = \delta^i_j$ – символи Кронекера $\delta^i_j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$

Скориставшись останнім виразом запишемо, що

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} = 0, \tag{6.14}$$

тому що від константи диференціал дорівнює нулю, тоді

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}\mathbf{e}_j + \mathbf{e}^i \cdot \Gamma^s_{jm}\mathbf{e}_s = 0\,,$$

звідки

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}^i \cdot \Gamma^s_{jm}\mathbf{e}_s\,.$$

Значить, якщо замінити індекси, то будемо мати

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} = -\Gamma^i_{ms}\mathbf{e}^s\,. \tag{6.15}$$

Звідси витікає, що похідна від взаємного базису буде виражатись за допомогою тих самих компонент, але зі знаком «–».

При доведенні останнього рівняння (6.15) ми скористалися множенням на основний базисний вектор $\mathbf{e}_j$ виразу (6.13). Далі враховуючи те, що символи Кристофеля 2-го роду $\Gamma^i_{mn} = \Gamma^i_{nm}$ – симетричні відносно нижніх символів, то для (6.12) можна записати, замінюючи індекси

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^m} &= \frac{\partial}{\partial x^m}\left(a_i\mathbf{e}^i\right) = \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i + a_i\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m} = \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i - a_i\Gamma^i_{mn}\mathbf{e}^n = \\ &= \frac{\partial a_i}{\partial x^m}\mathbf{e}^i - a_n\Gamma^n_{mi}\mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^m} - a_n\Gamma^n_{mi}\right)\mathbf{e}^i = \nabla_m a_i\mathbf{e}^i = a_{i,m}\mathbf{e}^i.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Тоді для тензора 2-го рангу заданого коваріантними компонентами $\hat{T} = \mathbf{T} = t_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$ можна отримати

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(t_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\right) = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j + t_{ij}\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^m}\mathbf{e}^j + t_{ij}\mathbf{e}^i\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^m} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j - t_{ij}\Gamma^i_{mn}\mathbf{e}^n\mathbf{e}^j - t_{ij}\mathbf{e}^i\Gamma^j_{mn}\mathbf{e}^n = \\
&= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^i - t_{nj}\Gamma^n_{mi}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j - t_{in}\Gamma^n_{mj}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \\
&= \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial x^m} - t_{nj}\Gamma^n_{mi} - t_{in}\Gamma^n_{mj}\right)\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = \nabla_m t_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = t_{ij,m}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j.
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

Для тензора третього рангу

$$\overset{3}{\hat{S}} = \mathbf{S} = S_{ijk}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k,$$

маємо, що

$$\nabla_m S_{ijk} = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x^m} - S_{njk}\Gamma^n_{im} - S_{ink}\Gamma^n_{jm} - S_{ijn}\Gamma^n_{km}. \tag{6.18}$$

Лекція 3.5(7) **Коваріантні похідні змішаних компонент тензорів. Перетворення компонент фундаментальних тензорів і символів Кристофеля при зміні системи координат. Скалярний добуток будь-якого тензора на метричний тензор. Зв'язок між метричними тензорами і символами Кристофеля. Символи Кристофеля 1-го роду. Фізичні компоненти тензорів. Матеріальна або тензорна похідна. Інваріантна форма запису рівнянь**

Коваріантні похідні змішаних компонент тензорів. Розглянемо змішаний тензор 3-го рангу

$$\overset{3}{\hat{S}} = S_{i\cdot k}^{\cdot j}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^k,$$

тоді його коваріантна похідна буде виражена співвідношенням

$$\nabla_m S_{i\cdot k}^{\cdot j} = \frac{\partial S_{i\cdot k}^{\cdot j}}{\partial x^m} - S_{n\cdot k}^{\cdot j}\Gamma^n_{im} + S_{i\cdot k}^{\cdot n}\Gamma^j_{nm} - S_{i\cdot n}^{\cdot j}\Gamma^n_{km}. \tag{7.1}$$

Коваріантні похідні від компонент тензора є компонентами нового тензора, ранг якого на одиницю вищий від рангу тензора, який диференціюється. Цей новоутворений тензор називається градієнтом

$$\nabla\hat{T} = \nabla\mathbf{T} = \nabla_m T^{ij} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^m}\mathbf{e}^m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = t^{ij}_{,m}\mathbf{e}^m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \left(\nabla_m = \mathbf{e}^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right),$$
$$\nabla\hat{T} = \operatorname{grad}\hat{T}. \tag{7.2}$$

Дивергенцію тензорного поля, утвореного тензором 2-го рангу, можна записати через скалярний добуток оператора Гамільтона на тензор

$$\nabla\cdot\hat{T} = \operatorname{div}\hat{T} = \nabla_m t^{mj}\mathbf{e}_j = t^{mj}_{,m}\mathbf{e}_j, \tag{7.3}$$

а ротор – через векторний добуток

$$\nabla\times\hat{T} = \operatorname{rot}\hat{T} = \nabla_m t^{ij}\varepsilon^m_{ik}\mathbf{e}^k\mathbf{e}_j. \tag{7.4}$$

Перетворення компонент фундаментальних тензорів і символів Кристофеля при зміні системи координат. Розглянемо метричний тензор

$$\hat{g} = g_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j, \tag{7.5}$$

де $g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$.

Тензор перетворення координат можна записати як

$$\hat{C} = c_i^{j'}\mathbf{e}^i\mathbf{e}_{j'}, \tag{7.6}$$

де $c_i^{j'} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^{j'}$. Тут індекси j' – відносяться до іншої системи координат.

Компоненти метричного тензора при переході до нової системи координат повинні змінюватись згідно таким формулам:

$$\text{– коваріантні } g_{ij} = g_{k'l'}c_i^{k'}c_j^{l'}, \tag{7.7}$$

$$\text{– контраваріантні } g^{ij} = g^{k'l'}c^i_{k'}c^j_{l'}. \tag{7.8}$$

Якщо система координат є декартовою, то компоненти метричного тензору стають рівними символу Кроненкера

$$g_{k'l'} = g^{k'l'} = \delta_{k'}^{l'} = \begin{cases} 1 \text{ при } k' = l'; \\ 0 \text{ при } k' \neq l', \end{cases} \tag{7.9}$$

$$g_{ij} = c_i^{k'} c_j^{l'} \delta_{k'}^{l'} = c_i^{k'} c_j^{l'}, \tag{7.10}$$

$$\delta_{k'}^{l'} = \delta_{k'l'} = \delta^{k'l'}, \tag{7.11}$$

метричний тензор

$$g^{ij} = c_{k'}^{i} c_{k'}^{j} = \sum_{k=1}^{3} c_{k'}^{i} c_{k'}^{j}, \tag{7.12}$$

Символи Кристофеля

$$\Gamma_{mn}^{i} = \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial \left(c_n^{s'} \mathbf{e}_{s'} \right)}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} \mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^i + c_n^{s'} \frac{\partial \mathbf{e}_{s'}}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i, \tag{7.13}$$

враховуючи те, що

$$\mathbf{e}_n = c_n^{s'} \mathbf{e}_{s'}, \qquad \mathbf{e}^i = c_{k'}^{i} \mathbf{e}^{k'} \tag{7.14}$$

можна записати, що

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} \mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^i + c_n^{s'} \frac{\partial \mathbf{e}_{s'}}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} \mathbf{e}_{s'} \cdot c_{k'}^{i} \mathbf{e}^{k'} + c_n^{s'} \frac{\partial \mathbf{e}_{s'}}{\partial x^{p'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^m} \cdot c_{k'}^{i} \mathbf{e}^{k'} = \\
&= \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} c_{k'}^{i} \left(\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right) + c_n^{s'} \Gamma_{s'p'}^{q'} \mathbf{e}_{q'} c_m^{p'} \cdot c_{k'}^{i} \mathbf{e}^{k'} = \\
&= \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} c_{k'}^{i} \left(\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right) + c_n^{s'} \Gamma_{s'p'}^{q'} c_m^{p'} \cdot c_{k'}^{i} \left(\mathbf{e}_{q'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right) = \\
&= \frac{\partial c_n^{s'}}{\partial x^m} c_{k'}^{i} \delta_{s'}^{k'} + c_n^{s'} c_m^{p'} c_{k'}^{i} \delta_{q'}^{k'} \Gamma_{s'p'}^{q'} = \\
&= \frac{\partial c_n^{k'}}{\partial x^m} c_{k'}^{i} + c_n^{s'} c_m^{p'} c_{k'}^{i} \Gamma_{s'p'}^{k'} = \Gamma_{mn}^{i}.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Тут $\delta_{s'}^{k'} = \left(\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right)$ і $\delta_{q'}^{k'} = \left(\mathbf{e}_{q'} \cdot \mathbf{e}^{k'} \right)$.

Висновки:

В результаті перетворення згідно до формули перетворень можна зробити висновок, що друга частина формули (7.15) відповідає закону перетворення компонент тензора і, якби була б тільки ця частина, то символи Кристофеля були б компонентами тензора 3-го рангу. Але, оскільки, крім другої частини є і перша (7.15), то символи Кристофеля не є компонентами тензора.

Якщо Γ^i_{mn} відповідає декартовій системі координат, то формула (7.15) спрощується до виду

$$\Gamma^i_{mn} = \frac{\partial c^{k'}_n}{\partial x^m} c^i_{k'}, \tag{7.16}$$

оскільки символи Кристофеля в декартовій системі координат дорівнюють нулю.

В (7.16) $c^{k'}_n$ є символами перетворення координат від декартової в будь-яку іншу систему координат.

Скалярний добуток будь-якого тензора на метричний тензор дорівнює самому тензору

$$\hat{g} = g_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = g_{ji}\mathbf{e}^j\mathbf{e}^i = g^j_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i = \delta^j_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i\mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i\mathbf{e}_j, \tag{7.17}$$

$$\hat{A}\cdot\hat{g} = A^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^m\mathbf{e}_m = A^{ij}\mathbf{e}_i\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^m\right)\mathbf{e}_m = A^{ij}\delta^m_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_m = A^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{7.18}$$

Розглянемо визначення тензора перетворення координат $c^{i'}_m$

$$c^{i'}_m = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m};$$

$$\mathbf{e}_j = c^{i'}_j\mathbf{e}_{i'}; \quad c^{i'}_j = \left(\mathbf{e}^{i'}\cdot\mathbf{e}_j\right),$$

де $\mathbf{e}_j = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^j}$, $\mathbf{e}^{i'} = \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^{i'}}$, $\mathbf{r}$ – радіус-вектор або вектор положення точки у просторі.

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i},$$

тоді

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \to c_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},\ c_{j'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}},\ c_j^{i'} = \left(\mathbf{e}^{i'} \cdot \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Зв'язок між метричним тензором і символами Кристофеля

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} &= \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} = \Gamma_{im}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \Gamma_{jm}^k \cdot \mathbf{e}_k = \\ &= \Gamma_{im}^k \left(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j\right) + \Gamma_{jm}^k \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k\right) = \Gamma_{im}^k g_{kj} + \Gamma_{jm}^k g_{ik},\end{aligned} \tag{7.19}$$

де $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} = \Gamma_{im}^k \mathbf{e}_k$; $g_{kj} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j$; $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$.

Символи Кристофеля 1-го роду $\Gamma_{im,j}$ визначається як

$$\Gamma_{im}^k g_{kj} = \Gamma_{im,j} \text{ і } \Gamma_{im}^k = \Gamma_{im,j} g^{jk}. \tag{7.20}$$

Візьмемо співвідношення (7.20)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_i,$$

із нього отримаємо

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{im}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{im}^k g_{kj} \tag{7.21}$$

і аналогічно (зі зміною місць індексів i та m в чисельнику і знаменнику)

$$\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_m = \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^i} \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{mi}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \Gamma_{mi}^k g_{kj}. \tag{7.22}$$

Складемо дві рівності (7.21) і (7.22) і скористаємось симетрією символів Кристофеля по нижніх індексах $\left(\Gamma_{im}^k = \Gamma_{mi}^k\right)$, рівністю $\left(\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^m} = \dfrac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^i}\right)$ і тим, що

$$\frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^j}\cdot \mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}\cdot \mathbf{e}_m = \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j},$$

отримаємо

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^m}\cdot \mathbf{e}_i - \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i}\cdot \mathbf{e}_m = \Gamma_{im}^k g_{kj} + \Gamma_{mi}^k g_{kj} \to$$
$$\to \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial x^j}\cdot \mathbf{e}_i - \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}\cdot \mathbf{e}_m = 2\Gamma_{mi}^k g_{kj} \to \tag{7.23}$$
$$\to \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} = 2\Gamma_{mi}^k g_{kj},$$

або через символи Кристофеля 1-го роду

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} = 2\Gamma_{mi,j}. \tag{7.24}$$

Звідки з (7.24) маємо, що

$$\Gamma_{mi,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}\right). \tag{7.25}$$

Згорнувши вираз (7.25) з $\frac{1}{2}g^{kj}$, отримаємо

$$\Gamma_{mi}^k = \Gamma_{mi,j}g^{kj} = \frac{1}{2}g^{kj}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}\right). \tag{7.26}$$

Співвідношення (7.25) і (7.26) є формулами для визначення символів Кристофеля 1,2-го родів через метричний тензор.

Фізичні компоненти тензорів. Вектор у довільній системі координат можна розкласти на компоненти у вигляді

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3. \tag{7.27}$$

Коли розглядається тензор в довільній системі координат значення його компонент буде залежати від модулів базисних векторів $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Якщо, наприклад, збільшити модуль базисного вектора в 2 рази, то значення компоненти вектора зменшиться відповідно у 2 рази.

Тому виникає потреба зробити так, щоб базисні вектори мали одиничний модуль, щоб не змінювалися значення компонент вектора.

Компоненти, які приведені до одиничних модулів базисних векторів називаються *фізичними компонентами*

$$a^1\mathbf{e}_1 = a^1|\mathbf{e}_1|\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|} = \tilde{a}^1\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}, \tag{7.28}$$

де $\tilde{a}^1$ – фізична компонента вектора $\mathbf{a}$, $|\mathbf{e}_1| = \sqrt{g_{11}}$, $g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = |\mathbf{e}_1|^2$, g_{11} – компонента метричного тензора.

Тоді можна записати для фізичних компонент вектора $\mathbf{a}$ такі співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{a}^1 &= a^1|\mathbf{e}_1| = a^1\sqrt{g_{11}}, \\ \tilde{a}^2 &= a^2|\mathbf{e}_2| = a^2\sqrt{g_{22}}, \\ \tilde{a}^3 &= a^3|\mathbf{e}_3| = a^3\sqrt{g_{33}}, \end{aligned} \tag{7.29}$$

і, наприклад, для фізичних компонент тензора напружень $\sigma^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$

$$\begin{aligned} \sigma^{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 &= \sigma^{11}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_1|\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}, \\ \tilde{\sigma}^{11} &= \sigma^{11}|\mathbf{e}_1|^2 = \sigma^{11}g_{11}, \end{aligned} \tag{7.30}$$

де $\tilde{\sigma}^{11}$ – фізична компонента,

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma}^{22} = \sigma^{22}|\mathbf{e}_2|^2 = \sigma^{22}g_{22},\ \tilde{\sigma}^{33} = \sigma^{33}|\mathbf{e}_3|^2 = \sigma^{33}g_{33}, \\ \sigma^{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \sigma^{12}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2|\frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}\frac{\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|},\ \tilde{\sigma}^{12} = \sigma^{12}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2| = \sigma^{12}\sqrt{g_{11}g_{22}}, \\ \tilde{\sigma}^{13} = \sigma^{13}|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_3| = \sigma^{13}\sqrt{g_{11}g_{33}},\ \tilde{\sigma}^{23} = \sigma^{23}|\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3| = \sigma^{23}\sqrt{g_{22}g_{33}}. \end{gathered} \tag{7.31}$$

Матеріальна або тензорна похідна (див. лекцію №2, субстанціональна похідна). Існує зв'язок між величинами, які використовуються в Ейлеревій і Лагранжевій системах координат. Наприклад, матеріальна похідна або тензорна похідна в будь-якій точці тіла визначається як

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \left.\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right|_{x^i = \mathrm{const}} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial x^i} v^i + \left.\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right|_{x^i = \mathrm{const}}. \qquad (7.32)$$

Два доданки в (7.32) виникають через те, що тензор $\hat{A}$ залежить від координати і від часу

$$\hat{A} = \hat{A}\left(x^1, x^2, x^3, t\right);\quad x^i = x^i(t)\quad \left(i = 1,2,3\right). \qquad (7.33)$$

Перший доданок (7.32) називається *конвективною похідною початку*, а другий – *локальною похідною початку* (див. лекцію №2).

Локальна похідна враховує зміну тензора з часом у фіксованій точці простору, а конвективна враховує рух точки в просторі.

Формула (7.32) дозволяє перехід від рівнянь записаних в Лагранжевій системі до рівнянь в Ейлеревій системі координат.

Інваріантна форма запису рівнянь. Якщо рівняння складені відносно тензорів, то перехід від декартових координат до будь-яких інших можна робити формально, заміняючи частинні похідні по координатах на коваріантні похідні

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_i . \qquad (7.34)$$

Отримані таким чином рівняння є *інваріантними*, тобто не залежними від вибору системи координат.