2.1 Функції Бесселя

При вирішенні багатьох задач математичної фізики приходять до необхідності розв'язування лінійного диференціального рівняння

$$x^2 y^n + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \qquad (2.1)$$

де v – постійна.

Це рівняння зустрічається також у багатьох питаннях фізики, механіки, астрономи тощо. Рівняння (2.1) називається рівнянням Бесселя. Оскільки рівняння (2.1) має особливу точку $x = 0$, його частинний розв'язок слід шукати як узагальненого степеневого ряду:

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (a_0 \neq 0). \qquad (2.2)$$

Підставляючи ряд (2.2) у рівняння (2.1), отримаємо:

$$(\rho^2 - v^2)a_0 x^0 + [(p+1)^2 - v^2]a_1 x^{p+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\{[(p+k)^2 - v^2]a_k + $$
$$+ a_{k-2}\} x^{p+k} = 0 \, . \qquad (2.3)$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при різних степенях x , матимемо:

$$\rho^2 - v^2 = 0, \qquad (2.4)$$

$$[(p+1)^2 - v^2]a_1 = 0, \qquad (2.5)$$

$$[(p+k)^2 - v^2]a_k + a_{k-2} = 0. \qquad (2.6)$$

З першої рівності знаходимо два значення для p :

$$p_1 = v \text{ та } p_2 = -v.$$

Якщо ми візьмемо перший корінь $p = v$, то формул (2.5) і (2.6) отримаємо

$$a_1 = 0 \quad \text{та} \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2v+k} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Звідси випливає, що

$$a_{2k+1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

а коефіцієнти з парними індексами визначаються, очевидно, за формулами

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)\cdot 1!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4(v+1)(v+2)\cdot 2!} \text{ і т.д.,}$$

з яких ясно, що загальний вираз для коефіцієнтів a_{2k} має такий вигляд:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(v+1)(v+2)\ldots(v+k)\cdot k!} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Що ж до коефіцієнта a_0, який був досі абсолютно довільним, то виберемо його таким чином:

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}, \tag{2.7}$$

де $\Gamma(v)$ – гамма-функція, яка визначається для всіх позитивних значень v (а також для всіх комплексних значень з позитивною речовою частиною) таким чином:

$$\Gamma(v)=\int_0^\infty e^{-x}x^{v-1}\,dx. \qquad (2.8)$$

При такому виборі a_0 коефіцієнт a_{2k} може бути записаним у такому вигляді:

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{2k+v}k!(v+1)(v+2)\ldots(v+k)\Gamma(v+1)}. \qquad (2.9)$$

Цей вираз може бути спрощений, якщо скористатися однією з основних властивостей гамма-функцій. Для цього проінтегруємо праву частину рівності (2.8) частинами; тоді отримаємо наступну основну формулу:

$$\Gamma(v+1)=v\Gamma(v). \qquad (2.10)$$

Зазначимо, що формула (2.10) дає можливість визначити гамма-функцію для від’ємних значень v, а також для всіх комплексних значень.

Нехай k – деяке ціле позитивне. Застосовуючи кілька разів формулу (2.10), отримаємо

$$\Gamma(v+k+1)=(v+1)(v+2)\ldots(v+k)\Gamma(v+1). \qquad (2.11)$$

Вважаючи в цій формулі $v=0$, знайдемо, через рівність

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$$

іншу важливу властивість гамма-функції, що виражається рівністю

$$\Gamma(k+1) = \mathrm{k}!. \tag{2.12}$$

За допомогою формули (2.11) вираз (2.9) для коефіцієнта a_{2k} набуде наступного вигляду:

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+v} k! \Gamma(v+\mathrm{k}+1)}. \tag{2.13}$$

Вносячи знайдені значення коефіцієнтів a_{2k+1} і a_{2k}до ряду(2.2), отримаємо частинний розв’язок рівняння (2.1). Цей розв’язок носить назву функції Беселя 1-го роду v-го порядку і позначається зазвичай через $J_y(x)$.

Таким чином,

$$J_y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k+v}}{k! \Gamma(v+k+1)}. \tag{2.14}$$

Ряд (2.14) збігається для будь-якого значення x, у яких неважко переконатися, застосовуючи ознаку Даламбера.

Використовуючи другий корінь $p_2 = -v$ можна побудувати другий частинний розв’язок рівняння (2.1). Він може бути отриманим, очевидно, з розв’язку (2.14) простою заміною v на $-v$, оскільки рівняння (2.1) містить тільки v_2 і не змінюється при заміні v на – v:

$$J_{-y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{-v+2k}}{k! \Gamma(-v+k+1)}. \tag{2.15}$$

Якщо v не дорівнює цілому числу, то приватні рішення $J_y(x)$ і $J_{-y}(x)$ рівняння Бесселя (2.1) будуть лінійно незалежними, оскільки розкладання, що стоять у правих частинах формул (2.14) і (2.15), починаються з різних ступенів x. Якщо ж є ціле позитивне число n, то в цьому випадку легко виявити лінійну залежність рішень $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$. Справді, загалом v для k=0, 1, 2, …, n -1 величина – v + k+1 приймає цілі від'ємні значення чи нуль. Для цих значень k:$\Gamma(-v+k+1)=\infty$, що випливає з формули

$$\Gamma(m)=\frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{m}.$$

Таким чином, перші n членів у розкладанні (15) дорівнюють нулю і ми отримаємо

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{-n+2k}}{\Gamma(k+1)(-n+k+1)}.$$

Або, поклавши $k=n+l$, отримаємо

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^l(\frac{x}{2})^{n+2l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(-n+l+1)},$$

тобто

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \qquad (n-\text{ціле})\ . \tag{2.16}$$

Звідси випливає, що загалом n функції $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$ лінійно незалежні.

Для того, щоб знайти загальне рішення рівняння (2.1), коли v дорівнює цілому числу n, необхідно знайти друге, лінійно-незалежне від$J_v(x)$, приватне рішення. Для цього введемо нову функцію $Y_v(x)$, поклавши

$$Y_v(x) = \frac{J_v(x)\cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}\,. \tag{2.17}$$

Очевидно, що ця функція також є рішенням рівняння (2.1), оскільки вона є лінійною комбінацією частинних розв’язків $J_v(x)$ та $J_{-v}(x)$ цього рівняння. Потім неважко переконатися, на підставі співвідношення (2.16), що при v, рівному цілому числу n, права частина рівності (2.17) набуває невизначеного вигляду $\frac{0}{0}$. Якщо розкрити цю невизначеність за правилом Лопіталя, то в результаті ряду викладок (які через їхню складність тут не відтворюються) отримаємо наступне подання функції $Y_n(x)$ при цілому позитивному n :

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]. \tag{2.18}$$

В окремому випадку, при n=0, функція $Y_0(x)$ представляється таким чином:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}. \tag{2.19}$$

Ведена тут функція $Y_v(x)$ називається функцією Бесселя 2-го роду *v-го порядку або функцією Неймана*.

Функція Неймана $Y_v(x)$ є розв'язком рівняння Беселя також у тому випадку, коли v -ціле число.

Функції $J_v(x)$ и $Y_v(x)$ очевидно, лінійно незалежні, отже, ці функції при всякому -дробовому чи цілому v – утворюють фундаментальну систему розв'язків. Звідси випливає, що загальне розв'язків рівняння (2.1) може бути подане у вигляді

$$y = C_1 J_v(x) + y = C_2 Y_v(x)\ , \tag{2.20}$$

де C_1 и C_2 – довільні постійні.

На закінчення цього параграфа зауважимо, що з функцій Бесселя і Неймана різних порядків мають місце такі рекурентні формули:

$$J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x)\ ,\quad Y'_v(x) = Y_{v-1}(x) - \frac{v}{x} Y_v(x), \tag{2.21}$$

$$J'_v(x) = -J_{v+1}(x) + \frac{v}{x} J_v(x)\ ,\quad Y'_v(x) = -Y_{v+1}(x) + \frac{v}{x} Y_v(x), \tag{2.22}$$

$$J'_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) - J_{v-1}(x)\ ,\quad Y_{v+1}(x) = \frac{2v}{x} Y_v(x) - Y_{v-1}(x). \tag{2.23}$$

Формули (2.21), (2.22) перевіряються безпосереднім диференціюванням рядів для функції Бесселя. Доведемо, наприклад, справедливість формули (2.21). Маємо

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(v+k) x^{2v+2k-1}}{2^{v+2k} k!\Gamma(v+k+1)}.$$

Або, приймаючи до уваги, що $\Gamma(v+k+1) = (v+k)\Gamma(v+k)$ отримаємо

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{v-1+2k}}{k!\Gamma(v-1+k+1)}.$$

Порівнявши з розвиненням (2.14), матимемо

$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x).$$

Продиференціювавши добуток, ми переконаємося у справедливості формули (2.21). Справедливість формули (2.22) доводиться аналогічно.

Деякі окремі випадки функцій Бесселя.

У математичній фізиці найчастіше зустрічаються функції Бесселя

$$J_0(x), J_1(x),\ Y_0(x) \text{ та } J_{\pm n\frac{1}{2}}(x),$$

де n – ціле число.

Перші дві з цих функцій подаються такими рядами:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots, \tag{2.24}$$

$$J_0(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots\right). \tag{2.25}$$

Їх є докладні таблиці. функцій Графіки функцій $J_2(x)$, $J_3(x)$ і т.д. зводиться до обчислення відповідних значень функцій $J_0(x)$ и $J_1(x)$

Звернемося тепер до функції $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$. де n –ціле число. Знайдемо насамперед значення функцій $J_{\frac{1}{2}}$ и $J_{-\frac{1}{2}}$, для чого звернемося до розкладання (2.14); з нього видно, що

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}.$$

Але з формули(2.11) безпосередньо випливає, що

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}}\Gamma(\frac{1}{2}),$$

де

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Таким чином,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Остання сума є розкладання sin x в степенний ряд, внаслідок чого

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\ . \tag{2.26}$$

Аналогічно, з розвинення (2.15) випливає, що

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\ . \tag{2.27}$$

Якщо тепер скористатися формулою(2.23), то можна бачити, що

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(-\cos x+\frac{\sin x}{x})=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{x}\cos(x-\frac{\pi}{2})\right],$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\sin x + \frac{3}{x}\left[\sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\},$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(1 - \frac{3}{x^2})\sin(x - \pi) + \frac{3}{x}\cos(x - \pi)\right].$$

Взагалі, функція Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$. при цілому n виражається через елементарні функції, а саме:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n(\frac{1}{x})\sin(x - \frac{n\pi}{2}) + Q_{n-1}(\frac{1}{x})\cos(x - \frac{n\pi}{2})\right]. \quad (2.28)$$

де $P_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня n відносно $\frac{1}{x}$, а $Q_{n-1}(\frac{1}{x})$ – многбагаточлен ступеня $n-1$, причому $P_n(0) = 1, Q_{n-1}(0) = 0$.

Звідси випливає, що при великих значеннях x має місце асимптотичне подання функції Бесселя:

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right] \quad (x > 0), \quad (2.29)$$

де через $O(x^{-1})$ позначено величину порядку $\frac{1}{x}$

Зазначимо, що асимптотична формула (2.29) справедлива не тільки за $v = n + \frac{1}{2}$, але й за всіх значень v.

2.2 Означення та властивості інтегрального перетворення Ханкеля (Фур'є-Бесселя)

Формули типу (1.14), (1.15), (1.16), що дають розкладання довільної функції $f(x)$ в інтеграл Фур'є, становлять значний інтерес у багатьох проблемах математики та фізики. До розкладів подібного типу відноситься розкладання по циліндричних функцій, відоме під назвам інтеграла Фур'є – Бесселя:

$$f(x) = \int_0^{\infty} J_v(xu)u\, du \int_0^{\infty} f(t)J_v(ut)t\, dt \quad (0 < x < +\infty)\ , \tag{2.30}$$

де $J_v(x)$ – функкція Беселя, $v > -\frac{1}{2}$.

Нехай функкція $f(x)$ обмеженої варіації у будь-якому скінченному інтервалі (0,R) і

$$\int_0^{\infty} |f(x)|\, x^{\frac{1}{2}} dx < \infty.$$

Тоді при $v > -\frac{1}{2}$ маємо

$$\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\} = \int_0^{\infty} J_v(xu)u\, du \int_0^{\infty} f(t)J_v(ut)t\, dt\ . \tag{2.31}$$

У точках неперервності має місце формула (2.30).

Справедливість зазначеного розвинення сформульована і за інших припущень [2].

Перетворенням Ханкеля називають інтеграл

$$f_v(u) = H_v[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)tJ_v(ut)\, dt \quad (0 < u < +\infty)\ . \tag{2.32}$$

З інтегрального розвинення (2.31) випливає формула обернення

$$f(t) = H_v^{-1}[f_v(u)] = \int_0^\infty f_v(u) J_v(ut)\, u dt \ \ (0 < t < +\infty)\ . \qquad (2.33)$$

Зауважимо, що якщо функція $f(t)$ така, що $f(t) = O(t^2)$ при $t \to 0$ $\alpha + v + 2 > 0$ $f(t) = O(t^3)$ при $t \to \infty$ $\beta + \frac{3}{2} > 0$, то інтеграл (2.32) збігається [4].

До розвинення (2.31) можна додати ще одне розвинення аналогічного типу

$$f(x) = \int_0^\infty H_v(xu)(xu)^{\frac{1}{2}} u\, du\ \int_0^\infty Y_v(ut)(ut)^{\frac{1}{2}} f(t) t\, dt\ \ , \qquad (2.35)$$

де Y_v – функція Бесселя другого роду, H_v – функція Струве.

Формула (2.35) є основою для введення відповідного інтегрального перетворення.

Наведемо зв'язок, що існує між перетворенням Ханкеля та кратними перетвореннями Фур'є [1].

Нехай

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma x + i\omega y} f^*(\gamma, \omega) d\gamma d\omega\ ,$$
$$f^*(\gamma, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma x + i\omega y} f(x,y) dx dy\ .$$

При переході до полярних координат за формулами $x + iy = re^{l\varphi}$ і $\gamma + i\omega = pe^{l\varphi}$ функції $f(x,y)$ і $f^*(\gamma, \omega)$ пов'язані між собою наступними співвідношеннями:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{p=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{\infty} e^{irp\cos(\varphi - \varphi)} v(p,\varphi) p dp d\varphi.$$

Вважаючи

$$v(p,\varphi) = i^{-n}X(p)e^{tn\varphi}$$

і беручи до уваги інтегральне подання функцій Бесселя

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta + ln\theta}d\theta,$$

отримаємо

$$u(r,\varphi) = e^{ln\varphi}\int_0^{\infty}\rho J_n\,(r\rho)\chi(\rho)d\rho\ .$$

Введемо позначення

$$u(r,\varphi) = \Phi(r)e^{in\varphi},$$

де $\Phi(r) = \int_0^{\infty}\rho J_n\,(r\rho)\chi(\rho)d\rho.$

Тоді отримаємо

$$v(r,\varphi) = i^n e^{in\varphi}\int_0^{\infty} J_n\,(-r\rho)\Phi(r)rdr,$$
$$\chi(p) = \int_0^{\infty} J_n\,(r\rho)\Phi(r)rdr.$$

Наведемо ще кілька властивостей перетворення Ханкеля.

$$H_v[f(at)] = \frac{1}{a^2}f_v^*(\frac{u}{a}).$$

За допомогою інтегрування частинами можна отримати співвідношення

$$H_v\left[\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{df}{dt}-\frac{v^2}{t^2}f\right]=-u^2H_v[f(t)].$$

При цьому передбачається, що

$$(t\to 0)\begin{cases} t^{v+1}\frac{df}{dt}=0, \\ t^v f(t)=0, \end{cases} \qquad (t\to\infty)\begin{cases} t^{\frac{1}{2}}\frac{df}{dt}=0, \\ t^{\frac{1}{2}}f(t)=0. \end{cases}$$

Рівність Парсеваля у цьому випадку має вигляд:

$$H_v[f(t)]=f_v^*(u) \qquad H_v[g(t)]=g_v^*(u)\ .$$

Тоді

$$\int_0^\infty uf_v^*(u)\,g_v^*(u)du=\int_0^\infty tf(t)g(t)dt \qquad (v>-\tfrac{1}{2})\ .$$

Умови справедливості останньої формули сформульовані у [4]. Асимптотика [4]: якщо $f(t)=O(t^\alpha)$ при $t\to 0$ і $\alpha+v+2>0$ $f(t)=O(t^3)$ при $t\to\infty$ при $\beta+\frac{3}{2}<0$, то $f_v^*(u)(v>-1,u>0)$ існує, і, окрім цього, $f_v^*(u)=O\left(u^{\alpha'}\right)(u\to 0),\alpha'\geq\min(v,-\beta-2)$ і $f_v^*(u)=O\left(u^{\beta'}\right)(u\to\infty),\beta'\geq\max(-\frac{1}{2},-\alpha-2)$.

Узагальненням інтегрального розвинення (2.31) є формула

$$f(t)=\int_0^\infty\frac{\varphi_u(t)udu}{J_v^2(au)+Y_v^2(au)}\int_0^\infty f(\tau)\,\varphi_u(\tau)\tau d\tau(a<t<+\infty)\ , \tag{2.36}$$

де $\varphi_u(t) = J(au)Y_v(ut) - Y_v(au)J_v(ut) \quad (v < -\frac{1}{2})$ – лінійна комбінація функції Бесселя першого та другого роду -го порядку.

Розвинення (2.36) має місце, якщо $f(t)$ – кусочно-неперервна функція обмеженої варіації у будь-якому інтервалі (a, R) та інтеграл

$$\int_0^\infty |f(t)|\, t^{\frac{1}{2}} dt < \infty.$$

при $a \to 0$ (3.36) переходить в (3.31).

За аналогією з перетворенням Ханкеля інтегральне розкладання (3.36) призводить до відповідного інтегрального перетворення, яке називається узагальнене перетворення Вебера

$$f^*(u) = \int_a^\infty tC_v\,(ut, au)f(t)dt,$$

де $C_v(z, w) = J_v(z)[PY_v(w) - QwY_{v+1}(w)] - Y_v(z)[PJ_v(w) - QwJ_{v+1}(w)]$,

P і Q – деякі довільні сталі.

Перетворення Ханкеля та Вебера можуть бути успішно застосовані до вирішення крайових задач для рівняння Лапласа та Гельмгольця, деяких задач теорії пружності та теплопровідності.

3 ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАНКЕЛЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТЕПЛА

3.1 Застосування перетворення Ханкеля до дослідження коливань

Перетворення Ханкеля є корисним при розв'язані плоских задач у полярній системі координат або просторових задач у циліндричній системі координат. Якщо функція $f(r)$ визначена на $0;\ +\infty)$, абсолютна інтегрована на цьому проміжку з ваговою функцією $\rho(r) = \sqrt{r}$ та задовольняє умови Діріхле, то така функція є оригіналом для перетворення Ханкеля.

Перетворення Ханкеля застосовують для виключення оператора

$$L_1[u] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\nu^2}{r^2}u. \tag{3.1}$$

Згідно з формулою [5]: $H\big[L_1[u]\big] = -p^2 H[u]$.

При дослідженні малих поперечних коливань нескінченної однорідної мембрани [1], якщо початкові умови мають осьову симетрію, необхідно розв'язати наступну задачу Коші відносно невідомих поперечних коливань $u(r,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ t > 0,\ r > 0,$$

$$u(r,0) = f(r),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(r). \tag{3.2}$$

Вважаючи, що функції $u(r,t)$, $f(r)$, $\psi(r)$ задовольняють умовам оригіналам перетворення Ханкеля порядку $\nu = 0$, застосуємо це перетворення.

Отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку відносно зображення $U(t,p)$:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + a^2p^2U = 0,$$
$$U(0,p) = F(p),\ U_t^{'}(0,p) = \Psi(p),$$

де $U(t,p),\ F(p),\ \Psi(p)$ – зображення відповідно невідомої функції переміщення та функцій початкових умов.

З врахуванням початкових умов розв’язок останньої задачі Коші має вигляд:

$$U(t,p) = F(p)\,cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap}sin(apt).$$

Остаточний розв’язок задачі про поперечне коливання мембрани отримаємо, застосовавши обернене перетворення Ханкеля до отриманого зображення:

$$u(r,t) = \int_0^{+\infty}\left[F(p)\,cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap}sin(apt)\right]J_0(pr)pdp.$$

Використавши інтегральне перетворення Ханкеля для крайової задачі, аналогічної (3.2), що моделює процеси поперечні коливання мембрани з іншими початковими умовами:

$$u(r,0) = \frac{A}{\sqrt{1+\frac{r^2}{b^2}}},\ u_t(r,0) = 0.$$

Застосувавши до рівняння (3.2) інтегральне перетворення Ханкеля (нульового) порядку за змінною r. Отримаємо:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \int_0^{+\infty} r u(r,t)\, J_0(\lambda r) dr.$$

При цьому $u(r,t) = \int_0^{+\infty} \lambda \tilde{u}(\lambda, t) J_0(\lambda r) d\lambda$.

Для лівої частини зображення рівняння (3.2) отримуємо, що зображенням похідної по часу оригіналу буде відповідати похідна по часу зображення $\tilde{u}_{tt}(\lambda, t)$.

Для правої частини цього рівняння отримуємо, застосувавши формулу інтегруваннями частинами:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) r J_0(\lambda r) dr = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) J_0(\lambda r) dr = \left(r\frac{\partial u}{\partial r} J_0(\lambda r)\right)\Big|_0^{+\infty} -$$

$$-\int_0^{+\infty} \lambda r \frac{\partial u}{\partial r} J_0'(\lambda r) dr = -\lambda \int_0^{+\infty} r \frac{\partial u}{\partial r} J_0'(\lambda r) dr = -\lambda \left(u r J_0'(\lambda r)\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\lambda \int_0^{+\infty} u \frac{\partial u}{\partial r}\left(r J_0'(\lambda r)\right) dr =$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} \left(J_0'(\lambda r) + J_0''(\lambda r) + \lambda J_0'(\lambda r)\right) u dr.$$

Тут позаінтегральні доданки дорівнюють нулю, оскільки виконуються умови $u(\infty, t) = u_r(\infty, t) = 0$.

За визначенням для функції Бесселя нульового порядку виконується рівність:

$$\lambda^2 J_0''(\lambda r) + \frac{\lambda}{r} J_0'(\lambda r) + \lambda^2 J_0(\lambda r) = 0.$$

Звідси випливає, що виконується наступна рівність:

$$\lambda^2 r J_0''(\lambda r) + \lambda J_0'(\lambda r) = -r\lambda^2 J_0(\lambda r).$$

Отже, отримаємо рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) r J_0(\lambda r)dr = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} r u J_0(\lambda r)dr = -\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Тому рівняння (3.2) з частинними похідними переходить в звичайне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами виду (параметр перетворення λ тут розглядається як константа):

$$\tilde{u}_{tt}(\lambda, t) + a^2\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t) = 0.$$

Знайдемо зображення Ханкеля початкової умови – функції $u(r, 0) = \frac{A}{\sqrt{1+\frac{r^2}{b^2}}}$, отримаємо:

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \int_0^{+\infty} \frac{rA}{\sqrt{1+\frac{r^2}{b^2}}} J_0(\lambda r)dr.$$

Відомо [6], що

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega\lambda} J_0(\lambda r)d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+r^2}},$$

Звідси знаходимо, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega\lambda}}{\lambda} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+r^2}}.$$

З останньої рівності за формулами обертання знаходимо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{r J_0(\lambda r)}{\sqrt{\omega^2+r^2}} dr = \frac{e^{-\omega\lambda}}{\lambda},$$

тобто маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{Ab}{\sqrt{b^2+r^2}} r J_0(\lambda r) dr = \frac{Ab e^{-b\lambda}}{\lambda}.$$

Отже, ми отримали наступну задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другої порядку відносно невідомої функції – зображення розв’язку:

$$\tilde{u}_{tt}(\lambda, t) + a^2\lambda^2\tilde{u}(\lambda, t) = 0,$$
$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-b\lambda},\ \tilde{u}_t(\lambda, 0) = 0.$$

Розв’язок цієї задачі Коші – це функція:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-b\lambda} cos(a\lambda t).$$

Розв’язуючи вихідної задачі отримуємо з допомогою оберненого перетворення Ханкеля:

$$u(r, t) = \int_0^{+\infty} \lambda\tilde{u}(\lambda, t) J_0(\lambda r) d\lambda = Ab \int_0^{+\infty} e^{-b\lambda} cos(a\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda.$$

Оскільки $cos(a\lambda t) = Re\left[e^{-ia\lambda t}\right]$, отримаємо:

$$u(r,t) = Ab \cdot Re\left[\int_0^{+\infty} \lambda \tilde{u}(\lambda,t) J_0(\lambda r) d\lambda\right] = Ab \cdot Re\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(b+ait)^2}}\right].$$

Далі знаходимо:

$$Ab \cdot Re\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(b+ait)^2}}\right] = Re\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}+i\frac{2at}{b}}} = \frac{1}{b} Re\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\right].$$

Тут введено наступні позначення:

$$\alpha = 1 + \frac{r^2-a^2t^2}{b^2}, \ \beta = \frac{2at}{b}.$$

Тоді отримуємо:

$$Re\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\right] = Re\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(cos\frac{\varphi}{2} + i\, sin\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \ tg\varphi = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+cos\,\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}} \ \Rightarrow \ Re\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}.$$

Отже, розв’язком поставленої задачі є функція:

$$u(r,t)=\frac{A}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}\right)^2+\left(\frac{2at}{b}\right)^2}}+\frac{1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}}{\left(1+\frac{r^2-a^2t^2}{b^2}\right)^2+\left(\frac{2at}{b}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо радіально симетричні поперечні коливання необмеженої пластини, якщо є відомим її початкове положення, що залежить лише від радіуса, а початкові швидкості точок цієї пластини дорівнюють нулю.

Відомо, що поперечні коливання $u(r,t)$ необмеженої пластини моделюються рівнянням коливань, що містить бігармонічний оператор Δ^2, тобто двічі поспіль застосувавши гармонічний оператор Δ:

$$u_{tt}+b^2\Delta^2u=0.$$

До цього рівняння додають початкові умови, щоб отримати математичну модель цієї задачі у вигляді задачі Коші. Враховуючи радіальну симетричну коливань, зручно перейти до полярної системy координат. Отримаємо математичну постановку задачу у вигляді:

$$\begin{cases}u_{tt}+b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u=0,\ r>0,\ t>0,\\ u(r,0)=f(r),\ u_t(r,0)=0,\ r>0,\\ u(\infty,t)=u_r(\infty,t)=u_{rr}(\infty,t)=u_{rrr}(\infty,t)=0,\ t>0.\end{cases}$$

Тут у математичній постановці задачі додані, ще умови обмеженості при $r\to\infty$ переміщення $u(r,t)$ та його похідних по радіальній координаті, які є затухають і прямують до нуля.

Обчислим зображення при перетворенні Ханкеля виразу для бігармонічного оператору

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]\right].$$

З врахуванням того, що позаінтегральні члени, що утворюються при подальшому інтегруванні частинами, дорівнюють нулю, отримуємо:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]rJ_0(\lambda r)dr=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]\right]J_0(\lambda r)dr=$$

$$=-\int_0^{+\infty}r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)dr=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)dr=$$

$$=-\int_0^{+\infty}r\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)\right)dr=$$

$$=\int_0^{+\infty}u\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)\right)\right)dr.$$

Далі використаємо рівність:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\big(J_0(\lambda r)\big)\right)\right)\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(\lambda rJ_0'(\lambda r)\big)\right)\right)=$$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(J_0'(\lambda r) + \lambda r J_0''(\lambda r)\right)\right)\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(J_0'(\lambda r) + \lambda J_0''(\lambda r)\right)\right)\right).$$

З рівняння Бесселя

$$\lambda^2 r^2 J_0''(\lambda r) + \lambda r J_0'(\lambda r) + \lambda^2 r^2 J_0(\lambda r) = 0$$

випливає рівність, яку повинна задовольняти функція Бесселя $J_0(\lambda r)$:

$$\frac{1}{r} J_0'(\lambda r) + \lambda J_0''(\lambda r) = -\lambda J_0(\lambda r).$$

Отже, маємо:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(J_0'(\lambda r) + \lambda J_0''(\lambda r)\right)\right)\right) = -\lambda^3 \frac{d}{dr}\left(r J_0'(\lambda r)\right) =$$

$$= -\lambda^3\left[J_0'(\lambda r) + \lambda r J_0''(\lambda r)\right] = \lambda^4 r J_0(\lambda r).$$

Таким чином, отримали:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u r J_0(\lambda r) dr = \lambda^4 \int_0^{+\infty} u(r,t) r J_0(\lambda r) dr = \lambda^4 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Отже, з вихідної задачі відносно функції-оригіналу отримаємо для зображення задачу Коші для звичайного диференціального рівняння:

$$\tilde{u}_{tt}(\lambda, t) + b^2 \lambda^4 \tilde{u}(\lambda, t) = 0, \qquad (3.3)$$

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{f}(\lambda), \ \tilde{u}_t(\lambda, 0) = 0. \qquad (3.4)$$

Тут $\tilde{f}(\lambda)$ – це зображення початкового переміщення точок пластини:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(r) r J_0(\lambda r) dr.$$

Розв'язком задачі Коші (5),(6) є функція – зображення переміщення:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{f}(\lambda)\, cos(b\lambda^2 t)\ \tilde{f}(\lambda).$$

Розв'язок вихідної задачі відновимо за формулою обернення перетворення Ханкеля:

$$u(r,t) = \int_0^{+\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda)\, cos(b\lambda^2 t)\, J_0(\lambda r) d\lambda =$$
$$= \int_0^{+\infty} \lambda\, cos(b\lambda^2 t)\, J_0(\lambda r) \left[\int_0^{+\infty} \mu f(\mu) J_0(\lambda\mu) d\mu\right] d\lambda =$$
$$\int_0^{+\infty} \mu f(\mu) \left(\int_0^{+\infty} \lambda\, cos(b\lambda^2 t)\, J_0(\lambda r) J_0(\lambda\mu) d\lambda\right) d\mu.$$

Цей інтеграл перетворим наступним чином:

$$\int_0^{+\infty} \lambda\, cos(b\lambda^2 t)\, J_0(\lambda r) J_0(\lambda\mu) d\lambda = Re\left[\int_0^{+\infty} \lambda e^{ibt\lambda^2} J_0(\lambda r) J_0(\lambda\mu) d\lambda\right] =$$
$$= \frac{1}{2bt} sin \frac{r^2+\mu^2}{4bt} J_0\left(\frac{r\mu}{2bt}\right).$$

Отже, остаточний розв'язок поставленої задачі має вигляд:

$$u(r,t) = \frac{1}{2bt} \int_0^{+\infty} \mu f(\mu) \sin \frac{r^2+\mu^2}{4bt} J_0\left(\frac{\rho\mu}{2bt}\right) d\mu J_0(\lambda r).$$

Побудуємо розв’язок задачу про радіальні симетричні коливання круглої необмеженої пластинки, прогин якої $u(r,t)$ є малим у порівнянні з товщиною h пластини, а товщина h є малою у порівнянні з радіусом пластини (пластина необмежена по радіальній координаті, тому це припущення виконується).

Розташуємо полярну систему координат r, φ у серединній площині пластині та помістим полярний центр у центр кола, по якому бокова поверхні пластини перетинається з серединною площини. Позначимо D циліндричну жорсткість пластини. Відомо початкові умови для коливального процесу, що досліджується:

$$u(r,0) = f(r),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{3.5}$$

Тобто відомі початкові переміщення точок пластинки, а їх початкова швидкість дорівнює нулю. Диференціальне рівняння, що описує поперечні вісесиметричні коливання $u(r,t)$, має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \Delta\Delta u = 0, \tag{3.6}$$

де $b^2 = \frac{\gamma h}{D}$, де γ – щільність матеріалу пластини, оператор Δ – гармонічний оператор у циліндричних координат.

Для вісесиметричого випадку він має вигляд:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}. \tag{3.7}$$

Для розв’язування задачі інтегрування рівняння (3.6) з початковими умовами використаємо метод інтегрального перетворення Ханкеля нульового порядку (порядок перетворення визначається порядком функції Бесселя, що використається у якості ядра перетворення) [4]. Зображення функції *f(r)* визначається рівністю:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi)\, d\xi. \tag{3.8}$$

Тут λ – параметр перетворення.

Оригінал відновлюється за формулою оберненого перетворення:

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \tilde{f}(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{3.9}$$

Застосувавши перетворення Ханкеля за змінною *r* до задачі (3.2), (3.1), приходим до задачі розв’язування звичайного диференціального рівняння відносно зображення:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -b^2 \lambda^4 \tilde{u}(\lambda, t), \tag{3.10}$$

$$\tilde{u}(0) = \tilde{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi) d\xi. \quad \left.\frac{d\tilde{u}}{dt}\right|_{t=0} = 0. \tag{3.11}$$

Самий простий вигляд зображення бігармонічного оператора при перетворенні Ханкеля обумовив вибір метода розв’язування задачі, що ґрунтується на використанні перетворенні Ханкеля. Прийшли до задачі інтегрування простого однорідного звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + b^2\lambda^4 = 0$. Його коренями є $k_{1,2} = \pm b\lambda^2 i$, отже, зображення розв'язок має вигляд:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = C_1(\lambda) \cos(b\lambda^2 t) + C_2(\lambda) \sin(b\lambda^2 t).$$

Знаючи $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, визначаючи з початкових умов (3.11). Отримуючи при цьому, що $C_1(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$, $C_2(\lambda) = 0$. Отже, розв'язок отриманої задачі Коші для звичайного диференціального рівняння (3.10) з початковими умовами (3.11) має вигляд:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \cos(b\lambda^2 t) \cdot \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi) d\xi. \tag{3.12}$$

Знайдемо розв'язок задачі, коли розподіл початкових переміщень має вигляд:

$$u(r, 0) = f(r) = Ae^{-\frac{r^2}{a^2}}. \tag{3.13}$$

У (3.13) А та a^2 задані сталі величини.

Для обчислення інтеграла у правій частині рівності (3.12) використаєм перший експоненціальний інтеграл Вебера [6]:

$$\int_0^{+\infty} \lambda J_0(a\lambda) e^{-p^2\lambda} d\lambda = \frac{1}{2p^2} e^{\frac{a^2}{4p^2}}. \tag{3.14}$$

Підставивши у (3.12) замість $f(r)$ її вираз (3.13) і використаємо інтеграл (3.14), отримаємо:

$$\tilde{u}(\lambda,t) = cos(b\lambda^2 t)\cdot\int_0^{+\infty}\xi e^{-\frac{\xi^2}{a^2}}J_0(\lambda\xi)d\xi = \frac{A}{2}a^2 e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}}cos(b\lambda^2 t). \quad (3.15)$$

Оригінал переміщень знаходимо за формулою обернення перетворення Ханкеля:

$$u(r,t) = \int_0^{+\infty}\lambda\tilde{u}(\lambda,t)J_0(\lambda r)\,d\lambda. \quad (3.16)$$

Представимо (3.15) у вигляді:

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \frac{A}{2}a^2 e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}}cos(b\lambda^2 t) = \left\| cos(b\lambda^2 t) = Re\left[e^{b\lambda^2 ti}\right]\right\| =$$

$$= \frac{A}{2}a^2\,Re\left[e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}+b\lambda^2 ti}\right].$$

Тут Re – позначимо дійсну частину комплексного виразу. Тоді знаходимо оригінал переміщень точок пластини:

$$u(r,t) = \frac{A}{2}a^2\,Re\left[\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{2}+b\lambda^2 ti}J_0(\lambda r)\,d\lambda\right] = \frac{Ae^{-\frac{R^2}{1+\tau^2}}}{1+\tau^2}\left(cos\left(\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}+\tau\,sin\,\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}\right)\right),$$

де $\tau = \frac{4bt}{a^2},\ R = \frac{r}{a}$.

Аналізуючи отриманий розв’язок, можемо відзначити наступне. Легко переконатися, що при t=0 $\tau = 0$ і виконується задані початкові умови. При $t \to \infty$ переміщення точок пластини прямують до нуля, те ж має місце і при $r \to \infty$.

Застосування перетворення Ханкеля має переваги при розв’язуванні нестаціонарних задач у циліндричних координатах, якщо їх диференціальні математичні моделі містять у рівнянні гармонічні або бігармонічні оператори, тому рівняння відносно зображення є звичайним дуже простим звичайним диференціальним рівнянням, з якого легко можливо відшукати зображення.

Основним при застосування інтегрального перетворення проблемою є знаходження оригіналу при відомому зображенні. Для інтегральних перетворень Лапласа та Фур’є добре розроблена методика знаходження зворотного перетворення і ця задача легко розв’язується з допомогою різних систем комп’ютерної алгебри, наприклад, у Maple, чого, на жаль, для обернення перетворення Ханкеля. У нескладних випадках цю задачу можна розв’язати аналітично, використовуючи властивості циліндричних функцій та відомі формули, пов’язані з інтегруванням, як у розв’язаній у роботі задачі.