Змістовий модуль 3. Конспект лекцій.

3.1 Застосування операційного методу до розв'язання інтегральних рівнянь типу згортки

Операційний метод можна ефективно застосувати до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра типу згортки:

$$a \cdot f(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau. \qquad (3.4)$$

Тут інтеграл $\int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau$ є згорткою $K(t) * f(t)$ ядра інтегрального рівняння $K(t)$ та невідомої функції $f(t)$. Розв'язок цього рівняння можна знайти, застосувавши до нього перетворення Лапласа з подальшим застосуванням теореми множення зображень.

Розглянемо застосування операційного методу до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, тобто при значеннях сталої $a \neq 0$ у (3.4).

Якщо інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-pt} K(t) * f(t) dt$ є абсолютно збіжним, то перетворення Лапласа за теоремою множення зображень відображає згортку у добуток зображень, тобто $K(t) * f(t) \div \tilde{K}(p) \cdot F(p)$, де $K(t) \div \tilde{K}(p)$. Тому рівняння (3.4) після переходу до зображень $f(t) \div F(p)$, $\varphi(t) \div \Phi(p)$, $K(t) \div \tilde{K}(p)$, набуває вигляду:

$$a \cdot F(p) = \Phi(p) + \lambda \tilde{K}(p) F(p).$$

Звідси отримуємо, що $F(p) = \dfrac{\Phi(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)}$. Цю рівність можна записати у вигляді: $F(p) = \dfrac{1}{a}\Phi(p) + \dfrac{\lambda}{a} \cdot \dfrac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} \Phi(p)$. Позначимо $\dfrac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} = \Psi(p)$ і нехай $\Psi(p) \div \psi(t)$. Тоді рівності $F(p) = \dfrac{1}{a}\Phi(p) + \dfrac{\lambda}{a} \cdot \Psi(p)\Phi(p)$ відповідає на множині оригіналів розв'язок $f(t) = \dfrac{1}{a}\varphi(t) + \dfrac{\lambda}{a}\psi(t) * \varphi(t)$.

Зокрема, якщо ядро $K(t)$ є многочленом, тобто $K(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, то його зображення набуває вигляду: $\tilde{K}(p) = \dfrac{a_0}{p} + \dfrac{a_1}{p^2} + ... + \dfrac{a_n \cdot n!}{p^{n+1}}$. Тоді отримуємо:

$$\Psi(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{a - \lambda \tilde{K}(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + n! a_n}{a p^{n+1} - \lambda\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} - a_n n!\right)}.$$

Функція $\Psi(p)$ є дробово-раціональною і її оригінал можна знайти з допомогою першої теореми розвинення (формула (2.4)).

Приклад 3.6. Розв'язати операційним методом інтегральне рівняння:

$$f(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau .$$

Розв'язання. Застосуємо до даного рівняння перетворення Лапласа. Нехай $f(t) \div F(p)$. Тоді $\sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau = t^2 * f(t) \div \frac{2}{p^3}F(p)$. Рівняння відносно зображення $F(p)$, що відповідає заданому інтегральному рівнянню, має вигляд:

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^3}F(p).$$

Звідси знаходимо вираз для зображення $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p^3}{(p-1)\left(p^2+1\right)\left(p^2+p+1\right)}.$$

Оригінал $f(t)$ розв'язку заданого інтегрального рівняння Вольтерра другого роду типу згортки знаходимо, записавши вираз для $F(p)$ у вигляді суми елементарних дробів та застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (див. п. 2.1):

$$F(p) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{p^2+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2p+1}{p^2+1}.$$

Після елементарних перетворень за таблицею зображень при перетворенні Лапласа знаходимо шуканий розв'язок $f(t) = \dfrac{e^t}{6} + \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t) - \dfrac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

Інтегральне рівняння Вольтерра першого роду типу згортки отримуємо з (3.4) при $a = 0$. Воно має вигляд:

$$\varphi(t) = \lambda\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)\,d\tau . \qquad (3.5)$$

Застосування до цього рівняння перетворення Лапласа приводить до операторного рівняння $\Phi(p) = \lambda\tilde{K}(p)F(p)$, розв'язком якого є функція

$$F(p) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\tilde{K}(p)}\Phi(p). \qquad (3.6)$$

Для неї неможливо знайти оригінал з допомогою теореми множення зображень, оскільки функція $1/\tilde{K}$ не є зображенням, для неї не виконується необхідна умова існування зображення – рівність $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\tilde{K}(p)} = 0$. Проте у деяких випадках розв'язок $f(t)$ рівняння (3.5) існує. Якщо функції $K(t)$ та

$\varphi(t)$ диференційовні і при цьому $K(0)\neq 0$, то, диференціюючи рівняння (3.5), отримуємо інтегральне рівняння другого роду

$$\varphi'(t)=\lambda\int_0^t K'(t-\tau)f(\tau)d\tau+K(0)f(t). \qquad (3.7)$$

Розв'язок цього рівняння можна знайти, використовуючи операційний метод. Якщо $K(0)=K'(0)=...=K^{(n-1)}(0)=0$, а $K^{(n)}(0)\neq 0$, то після $(n+1)$ – кратного диференціювання рівняння (3.5) отримаємо інтегральне рівняння другого роду

$$\varphi^{(n+1)}(t)=\lambda\int_0^t K^{(n+1)}(t-\tau)f(\tau)d\tau+K^{(n)}(0)f(t). \qquad (3.8)$$

Застосування перетворення Лапласа дозволяє знайти розв'язок отриманого інтегрального рівняння (3.8).

Приклад 3.7. Розв'язати інтегральне рівняння $\sin t=\int_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

Розв'язання. Тут $K(t)=\cos t$, $K(0)\neq 0$. З формули (3.7) отримуємо:

$$\cos t=-\int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau+f(t).$$

Застосуємо перетворення Лапласа:

$$f(t)\div F(p),\ \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau\div\frac{F(p)}{p^2+1},\ \cos t\div\frac{p}{p^2=1}$$

Рівняння відносно зображення $F(p)$ шуканої функції $f(t)$ набуває вигляду: $\frac{p}{p^2+1}=\frac{F(p)}{p^2+1}+F(p)$. Звідси знаходимо, що $F(p)=\frac{1}{p}$. Отже, $f(t)=1$.

Інтегральне рівняння (3.4) називають особливим, якщо його ядро $K(t)$ у одній або декількох точках проміжку інтегрування має нескінченний розрив, або ж одна чи обидві межі інтегрування є нескінченними. Прикладом такого рівняння є окремий випадок рівняння Вольтерра першого роду – *інтегральне рівняння Абеля.* Це рівняння має вигляд:

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}=\varphi(t),\quad 0<\alpha<1. \qquad (3.9)$$

Ядро цього рівняння $K(t)=t^{-\alpha}$, $\lim\limits_{t\to 0+}K(t)=+\infty$. Зображення ядра $K(t)$ має вигляд: $t^{-\alpha}\div\frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}=\tilde{K}(p)$.

Нехай ядро $K(t)$ інтегрального рівняння (3.4) при $t=0$ має нескінченний розрив і не є диференційовним у цій точці. Розглянемо згортку функцій

$$f(t)*1=\int_0^t f(\tau)d\tau=g(t).$$

За теоремою про інтегрування оригіналу $g(t)\div G(p)=\dfrac{F(p)}{p}$ і за формулою (3.6) для зображення розв'язку рівняння (3.5) маємо:

$$G(p)=\frac{1}{\lambda p\tilde{K}(p)}\Phi(p).$$

Для рівняння Абеля отримуємо:

$$G(p)=\frac{1}{p^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)}\Phi(p).$$

Оригінал зображення $G(p)$ має вигляд:

$$g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}t^{\alpha-1}*\varphi(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^t\tau^{\alpha-1}\varphi(t-\tau)d\tau.$$

Тут ми використали відому формулу: $\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha},\ 0<\alpha<1$. Вважаючи функцію $g(t)$ диференційовною, знаходимо розв'язок інтегрального рівняння Абеля у вигляді:

$$f(t)=g'(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot\left(\int_0^t\tau^{\alpha-1}\varphi'(t-\tau)d\tau+\varphi(0)t^{\alpha-1}\right).$$

3.2 Застосування операційного методу до розв'язання диференціально-різницевих рівнянь

У різноманітних науково-технічних задачах доводиться мати справу з диференціальними рівняннями, у які невідома функція входить при різних значеннях аргументу. Прикладом таких рівнянь є диференціальне рівняння n-го порядку:

$$f\Big(t,x(t),x\big(t-\tau_1(t)\big),x'(t),x'\big(t-\tau_2(t)\big),\ldots,x\big(t-\tau_n(t)\big),x^{(n)}\big(t-\tau_n(t)\big)\Big)=0.$$

<u>Означення 3.1</u> Диференціальні рівняння, до яких невідома функція входить при різних значеннях аргументу, називають *диференціальними рівняннями з відхиленням.* Якщо у диференціальному рівнянні з відхиленням всі відхилення $\tau_i(t),\ i=1,2,\ldots,n$, є сталими величинами, то таке рівняння називають *диференціально-різницевим рівнянням*. Якщо у диференціально-різницевому рівнянні всі відхилення $\tau_i(t),\ i=1,2,\ldots,n$, є додатними константами, а старша похідна невідомої функції входить у рівняння лише при одному значенні аргументу, не меншому, ніж всі інші аргументи функції та її похідних у даному рівнянні, то таке диференціально-різницеве рівняння називають *диференціальним рівнянням з запізненням*.

Прикладом диференціального рівняння з запізненням є рівняння

$$x''(t) = \varphi\left(t, x(t), x'(t), x(t-\tau_1), x'(t-\tau_2)\right).$$

Розглянемо диференціальне рівняння з запізненням з сталими коефіцієнтами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t-\tau_k) + f(t), \tag{3.10}$$

де коефіцієнти a_k та відхилення τ_k є сталими величинами, $\tau_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., n$, $t \geq 0$. Шукана функція $x(t)$ має задовольняти заданим початковим умовам:

$$x(0) = x'(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{3.11}$$

Застосуємо до обох частин рівняння (3.10) перетворення Лапласа, використавши при цьому теорему запізнення (1.6). Отримаємо алгебраїчне рівняння відносно зображення $X(p)$ шуканої функції $x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \tag{3.12}$$

де $f(t) \div F(p)$.

З рівності (3.12) визначаємо зображення $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}.$$

Знайшовши функцію $x(t)$, що є оригіналом для $X(p)$, отримуємо розв'язок задачі (3.10), (3.11).

Приклад 3.8. Розв'язати рівняння $x''(t) - x(t-1) = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язання. Застосувавши до заданого рівняння перетворення Лапласа, отримаємо: $p^2 X(p) - X(p) e^{-p} = \frac{1}{p^2}$. Звідси знаходимо зображення розв'язку рівняння: $X(p) = \frac{1}{\left(p^2 - e^{-p}\right) p^2}$. Використовуючи формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, запишемо отриманий вираз для $X(p)$ у наступному вигляді:

$$X(p) = \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p^2}} = \frac{1}{p^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p^{2n}}.$$

З врахуванням теореми запізнення, знаходимо оригінал $x(t)$ у вигляді ряду:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \eta(t-k),$$

де $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

Для диференціальних рівнянь з запізненням, що описують процеси з післядією, часто зустрічаються задачі у наступній постановці. Потрібно знайти розв'язок $x(t)$ рівняння (3.10) для $t \ge t_0$, причому для всіх $t < t_0$, значення яких впливають на значення розв'язку $x(t)$ при $t \ge t_0$ функція $x(t)$ є відомою. Наприклад, потрібно знайти неперервний розв'язок $x(t)$ при $t \ge t_0$ рівняння

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau)\right),$$

де τ – задана додатна константа, якщо відомо, що $x(t) = \varphi(t)$, $t_0 - \tau \le t \le t_0 + \tau$. Розглянемо приклад розв'язання такої задачі.

Приклад 3.9. Розв'язати рівняння $x'(t) = x(t-1)$, якщо $x(t) = t$ при $-1 \le t \le 0$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді $x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p)$. З заданого рівняння випливає, що $pX(p) = \int\limits_0^{+\infty} x(t-1)e^{-pt}dt$. Виконаємо у останньому інтегралі заміну змінної $\tau = t-1$. Тоді $d\tau = dt$, при $t = 0$ $\tau = -1$, при $t \to \infty$ $\tau \to \infty$. Отримуємо:

$$\int\limits_0^{+\infty} x(t-1)e^{-pt}dt = \int\limits_{-1}^{+\infty} x(\tau)e^{-p(\tau+1)}d\tau = e^{-p}\int\limits_{-1}^{0} x(\tau)e^{-p\tau}d\tau + e^{-p}\int\limits_{0}^{+\infty} x(\tau)e^{-p\tau}d\tau =$$

$$= e^{-p}\int\limits_{-1}^{0} \tau e^{-p\tau}d\tau + e^{-p}F(p).$$

Застосувавши до останнього інтеграла формулу інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int\limits_{-1}^{0} \tau e^{-p\tau}d\tau = \left\| \begin{matrix} u = \tau, dv = e^{-p\tau}d\tau, \\ du = d\tau, v = \int dv = -\dfrac{e^{-p\tau}}{p} \end{matrix} \right\| = -\left.\frac{\tau e^{-p\tau}}{p}\right|_{-1}^{0} + \frac{1}{p}\int\limits_{-1}^{0} e^{-p\tau}d\tau = -\frac{e^{p}}{p} -$$

$$-\left.\frac{e^{-p\tau}}{p^2}\right|_{-1}^{0} = -\frac{e^{p}}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{e^{p}}{p^2}.$$

Отже, $pX(p) = \dfrac{1-e^{-p}}{p^2} - \dfrac{1}{p} + e^{-p}X(p)$. З отриманого рівняння відносно зображення $X(p)$ знаходимо:

$$X(p)=\frac{1}{p^2\left(p-e^{-p}\right)}-\frac{1}{p\left(p-e^{-p}\right)}-\frac{e^{-p}}{p^2\left(p-e^{-p}\right)}=\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^3}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{1-e^{-p}\big/p}=\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^3}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^{n+3}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(n+1)p}}{p^{n+3}}\div$$

$$\div\left\|\frac{1}{p^k}\div\frac{t^{k-1}}{(k-1)!},\ f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)\div e^{-p\tau}F(p)\right\|\div\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+2}\cdot\eta(t-n)}{(n+2)!}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+1}\cdot\eta(t-n)}{(n+1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n-1)^{n+2}\cdot\eta(t-n-1)}{(n+2)!}.$$

Таким чином, отримали розв'язок даної задачі:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+2}\cdot\eta(t-n)}{(n+2)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n)^{n+1}\cdot\eta(t-n)}{(n+1)!}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-n-1)^{n+2}\cdot\eta(t-n-1)}{(n+2)!}.$$

3.5 Розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь

Рівняння виду

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)+\sum_{m=0}^{n}\int_0^t k_m(t-\tau)x^{(m)}(\tau)d\tau=f(t),\qquad(3.13)$$

де a_0, $a_1,\ldots,$ a_n – задані числа, ядра $k_m(t)$ та $f(t)$ – задані функції, $x(t)$ – шукана функція , називають *інтегро-диференціальним рівнянням*.

Інтегро-диференціальне рівняння (3.13) можна розв'язати, застосувавши до нього перетворення Лапласа. Нехай $x(t)\div X(p)$, $k_m(t)\div K_m(p)$. Оскільки за теоремою про диференціювання оригіналу

$$x^{(m)}(t)\div p^mX(p)-p^{m-1}x(0)-p^{m-2}x'(0)-\ldots-x^{(m-1)}(0)=\Phi(p),$$

то за теоремою множення зображень маємо:

$$\int_0^t k_m(t-\tau)x^{(m)}(\tau)d\tau\div K_m(p)\Phi(p).$$

Таким чином, застосування перетворення Лапласа дозволяє звести розв'язання інтегро-диференціального рівняння (3.13) відносно оригіналу $x(t)$ до розв'язання алгебраїчного рівняння відносно зображення $X(p)$.

Приклад 3.10. Розв'язати інтегро-диференціальне рівняння:

$$x''(t)+\int_0^t\sin(t-\tau)\cdot\left(x''(\tau)+x(\tau)\right)d\tau=2\cos t,$$

якщо $x(0)=x'(0)=0$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді $x''(t) \div p^2 X(p)$, $\cos t \div \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$. За теоремою множення зображень отримуємо:

$$\int_0^t \sin(t-\tau)\cdot\left(x''(\tau)+x(\tau)\right)d\tau \div \frac{1}{p^2+1}\left(p^2X(p)+X(p)\right).$$

Після застосування перетворення Лапласа отримуємо рівняння відносно зображення $X(p)$:

$$p^2X+\frac{1}{p^2+1}\cdot\left(p^2+1\right)X=\frac{2p}{p^2+1}.$$

Розв'язавши його, знаходимо:

$$X(p)=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

За таблицею перетворення Лапласа знаходимо оригінал $X(p)\div x(t)=t\sin t$.

3.6 Застосування операційного методу до розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно невідомої функції $u(x,t)$:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu+a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad (3.14)$$

де a, b, c, a_1, b_1 є неперервними функціями, що залежать лише від змінної x, $x\in[0;l]$. Будемо вважати, що $a>0$. Розглянемо два випадки: 1) $a_1<0$ – гіперболічний випадок; 2) $a_1\equiv 0$, $b_1<0$ – гіперболічний випадок.

Потрібно знайти розв'язок $u(x,t)$ диференціального рівняння (3.14) для $t\ge 0$ та $0\le x\le l$, що задовольняє початкові умови $u(x,0)=\varphi(x)$ для параболічного випадку або $u(x,0)=\varphi(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)$ для гіперболічного випадку, а також крайовим умовам $u(0,t)=f(t)$, $\alpha\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\beta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}=\gamma u(l,t)$, де α, β, γ – задані сталі величини. Такі задачі називають *нестаціонарними*.

Будемо вважати, що u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що розглядаються як функції змінної t, є функціями – оригіналами. Застосуємо до рівняння (3.14) перетворення Лапласа за змінною t. Нехай $U(p,x)=\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$. Тоді отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \div \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt}dt = \frac{dU}{dx},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \div \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt}dt = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

За теоремою про диференціювання оригіналу з врахуванням початкових умов маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div pU - u(x,0) = pU - \varphi(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2 U - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Будемо вважати також, що $f(t)$ є оригіналом і при цьому $f(t) \div F(p)$. Тоді з крайових умов маємо:

$$U\big|_{x=0} = F(p),\ \left.\left(\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi)\right)\right|_{x=l} = \gamma U\big|_{x=l}. \qquad (3.15)$$

Застосування операційного методу дозволяє звести розв'язання нестаціонарної задачі для рівняння (3.14) з частинними похідними до розв'язання звичайного диференціального рівняння

$$a\frac{d^2U}{dx^2} + b\frac{dU}{dx} + AU + B = 0, \qquad (3.16)$$

де $A = c + a_1 p^2 + b_1 p$, $B = -a_1 p\varphi - a_1\psi - b_1\varphi$, при крайових умовах (3.15).

Приклад 3.11. Температура $u(x,t)$ у тонкому стержні задовольняє рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a^2 = \text{const}$. Знайти розподіл температур у півпросторі $x > 0$, якщо є відомим закон зміни температури його лівого кінця, а початкова температура стержня дорівнює нулю: $u\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{x=0} = f(t)$.

Розв'язання. Застосуємо до заданого рівняння перетворення Лапласа за змінною t. Отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення $U(x,p)$: $pU = a^2 \frac{d^2U}{dx^2}$. Знайдемо його розв'язок з врахуванням умови $U\big|_{x=0} = F(p)$. Загальний розв'язок отриманого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

Згідно з умовою задачі функції u та U повинні бути обмеженими при $x \to +\infty$, тому $C_2 = 0$, а загальний розв'язок U отриманого рівняння набуває вигляду: $U(x,p)=C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}$. Для знаходження сталої C_1 використаємо умову $U\big|_{x=0}=F(p)$. Звідси знаходимо, що $C_1=F(p)$. Отже, зображення розв'язку вихідного рівняння має вигляд: $U(x,p)=F(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}$.

Для знаходження оригіналу розв'язку розглянемо спочатку окремий випадок $f(t)=1$. Тоді $F(p)=\frac{1}{p}$, $U_1(x,p)=\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}}{p}$. Оригіналом цієї функції є

$$u_1(x,t)=\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x/2a\sqrt{t}} e^{-\tau^2}d\tau .$$

Для довільної $f(t)\div F(p)$ використаємо формулу Дюамеля (3.3). Оскільки для нашого випадку у цій формулі

$$x_1=\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),\ x_1'(t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},\ x_1(0)=0,$$

то, підставивши ці вирази у (3.3), отримуємо розв'язок вихідної задачі у вигляді:

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau .$$

Приклад 3.12. Один кінець стержня, довжина якого дорівнює l, закріплений, на інший кінець діє сила $f(t)=A\sin\omega t$, спрямована вздовж осі стержня. Знайти повздовжні коливання $u(x,t)$ цього стержня.

Розв'язання. Математична модель даної задачі – це гіперболічне рівняння відносно шуканої функції $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де a – коефіцієнт, що залежить від матеріалу стержня. Для цього рівняння маємо початкові умови: $u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$. Крайові умови для функції $u(x,t)$ мають вигляд: $u(0,t)=0$, $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{A}{E}\sin\omega t$, E – модуль пружності стержня.

Застосуємо до диференціального рівняння, що описує коливання стержня, перетворення Лапласа. Нехай $u(x,t)\div U(x,p)$. Тоді

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\div p^2U(x,p)-pu(x,0)-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=p^2U(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \div \frac{d^2 U(x,p)}{d\,x^2}.$$

Отримуємо звичайне диференціальне рівняння відносно зображення $U(x,p)$:

$$\frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} = \frac{p^2}{a^2} U(x,p),$$

крайові умови для якого мають вигляд: $U(0,p)=0$, $\dfrac{dU(l,p)}{dx} = \dfrac{A}{E}\cdot\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Інтегруючи це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, отримуємо:

$$U(x,p) = C_1 \operatorname{ch}\frac{px}{a} + C_2 \operatorname{sh}\frac{px}{a}.$$

Використовуючи крайові умови, знаходимо значення сталих інтегрування C_1 та C_2.

$$U(0,p) = C_1 = 0, \frac{dU(l,p)}{dx} = \frac{p}{a} C_2 \operatorname{ch}\frac{pl}{a} = \frac{A}{E}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{1}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}.$$

Таким чином, отримали зображення шуканого розв'язку $u(x,t)$ у вигляді:

$$U(x,p) = \frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{px}{a}}{p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}.$$

Позначимо $A_1(p) = \operatorname{sh}\dfrac{p}{a}x$, $A_2(p) = p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{p}{a}l$. Тоді зображення $U(x,p)$ набуває вигляду:

$$U(x,p) = \frac{Aa\omega}{E}\cdot\frac{A_1(p)}{A_2(p)}.$$

Знайдемо особливі точки для $U(x,p)$. Для цього розв'яжемо рівняння $A_2(p)=0$ або $p\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{p}{a}l=0$. Звідси $p=0$, $p=\pm i\omega$, $\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}=0$. Враховуючи, що $\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a} = \cos i\dfrac{pl}{a}$, маємо: $\cos i\dfrac{pl}{a}=0 \Rightarrow i\dfrac{pl}{a} = \dfrac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow p_k = i\omega_k$, де $\omega_k = \dfrac{\pi a}{l}\left(k-\dfrac{1}{2}\right)$. Функція $U(x,p)$ має прості полюси $p=0$, $p=\pm i\omega$, $p_k = i\omega_k$ (далі вважатимемо, що $\omega \neq \omega_k$. Оригінал $u(x,t)$ для знайденого зображення $U(x,p)$ знаходимо за першою теоремою розвинення (теорема 2.2) :

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left[\left.\left(\frac{A_1(p)}{A_2'(p)}e^{pt}\right)\right|_{p=0}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{A_1(i\omega)}{A_2'(i\omega)}e^{i\omega}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_1(i\omega_k)}{A_2'(i\omega_k)}e^{i\omega_k t}\right)\right].$$

Оскільки

$$A_2'(p)=\left(p^2+\omega^2\right)\mathrm{ch}\frac{lp}{a}+2p^2\mathrm{ch}\frac{lp}{a}+\frac{l}{a}p\left(p^2+\omega^2\right)\mathrm{sh}\frac{lp}{a},$$

то підставляючи у вираз для $u(x,t)$ значення функцій $A_1(p)$ та $A_2'(p)$, отримуємо:

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}2\,\mathrm{Re}\left[\frac{i\sin\frac{\omega x}{a}}{-2\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}e^{i\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\sin\frac{\omega_k}{a}xe^{i\omega_k t}}{\frac{l}{a}i\omega_k\left(\omega^2-\omega_k{}^2\right)i\sin\frac{l}{a}\omega_k}\right].$$

Знайшовши дійсну частину виразу у дужках, остаточно отримуємо шуканий розв’язок даної задачі у вигляді:

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left[\frac{\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}{}^{i\omega t}+\frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{\omega_k\left(\omega^2-\omega_k{}^2\right)}\right].$$

3.7 Підсумовування рядів

Знайдемо суму S числового ряду $\sum_{n=m}^{\infty}(\pm1)^n F(n)$. Нехай існує така функція $f(t)$, що $f(t)\to F(p)$. Тоді $F(n)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-nt}dt$. Шукану суму ряду можна записати у вигляді: $S=\sum_{n=m}^{\infty}(\pm1)^n\int_0^{+\infty}f(t)e^{-nt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)\sum_{n=m}^{\infty}(\pm1)^n e^{-nt}dt$. Оскільки ряд $\sum_{n=m}^{\infty}(\pm1)^n e^{-nt}$ при $t>0$ є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $(\pm1)^n e^{-t}$, то отримуємо:

$$s=(\pm1)^m\int_0^{+\infty}\frac{f(t)e^{-mt}}{1-e^{-t}}dt. \qquad (3.17)$$

Приклад 3.13. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $F(p)=\dfrac{p^2+3p+3}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$. Її особливими точками є прості полюси $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-2$, $p_4=-3$. За першою теоремою розвинення знаходимо:

$$f(t)=\sum_k \operatorname{Res}\left(F(p_k)e^{p_k t}\right)=\sum_k \frac{\left(p_k{}^3+3p_k+3\right)e^{p_k t}}{\left(p(p+1)(p+2)(p+3)\right)'\Big|_{p=p_k}}.$$

Після відповідних обчислень у правій частині останньої рівності отримуємо:

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}\right).$$

Для знаходження суми заданого ряду застосуємо формулу (3.17), згідно з якою знаходимо:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\left(1-e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}\right)e^{-t}}{1-e^{-t}}dt=\frac{1}{2}\left(-e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{3}.$$

Розглянемо збіжний функціональний ряд $s(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, $a\le t\le b$. Нехай функції $f_n(t)$ є оригіналами і при цьому $f_n(t)\div F_n(p)$. Будемо вважати, що ряд $S(p)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(p)$ є збіжним і при $p\to\infty$ $S\to 0$, а $S(p)$ є аналітичною функцією у околі нескінченно віддаленої точки $p=\infty$. Тоді $s(t)\div S(p)$.Якщо знаходження суми $S(p)$ є простішою задачею у порівнянні з обчисленням $s(t)$, то $s(t)$ можна знайти за допомогою другої теореми розвинення як оригінал для зображення $S(p)$.

Приклад 3.14. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}J_{2n}(t)$.

Розв'язання. У п. 1.6 було отримано зображення функцій Бесселя n-го порядку $J_n(t)\div\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$. Отже, $J_{2n}(t)\div\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{2n}}{\sqrt{p^2+1}}$. Знайдемо суму ряду, що є зображенням заданого ряду.

$$S(p)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{2n}}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{2n}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^2}{1+\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{p}{p^2+1}\right).$$

Враховуючи, що $J_0(t) \div \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, $\cos t \div \dfrac{p}{p^2+1}$, отримуємо:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n}(t) = \frac{1}{2}\left(J_0(t) - \cos t\right).$$

Розглянемо збіжний у деякому інтервалі $t \in (a;b)$ функціональний ряд $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)\varphi_n(t)$. Якщо члени послідовності $\varphi_n(t)$ є коефіцієнтами розвинення функції $\Phi(x,t)$ у збіжний при $|x|<1$ степеневий ряд $\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) x^n$, то функцію $\Phi(x,t)$ називають *твірною функцією* послідовності $\varphi_n(t)$.

Нехай $f(t) \div F(p)$, тоді при $p = n$ маємо:

$$F(n) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt.$$

Підставляючи цей вираз для $F(n)$ у заданий функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} F(n)\varphi_n(t)$, отримуємо формулу для суми цього ряду:

$$s(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) e^{-nx} \right) dx.$$

З врахуванням розвинення у степеневий ряд для твірної функції $\Phi(x,t)$ цю рівність можна записати у вигляді:

$$s(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \Phi\left(e^{-x}, t\right) dx. \tag{3.18}$$

Цю формулу можна використати для знаходження сум тригонометричних рядів. Для цього потрібно визначити твірну функцію для послідовностей виду

$$(\pm 1)^n \sin(nk+m)t,\ (\pm 1)^n \cos(nk+m)t.$$

Використаємо розвинення у степеневий ряд $\dfrac{\pm z}{1 \mp z} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\pm 1)^n z^n$, де $z = xe^{ikt}$, $0 < x < 1$. Отримуємо:

$$\frac{xe^{i(k+m)t}}{1 \mp e^{ikt}} = \frac{x\cos(k+m)t \mp x^2 \cos mt + i\left(x\sin(k+m)t \mp x^2 \sin mt\right)}{1 \mp 2x\cos kt + x^2} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} x^n e^{i(nk+m)t}.$$

Звідси знаходимо шукані твірні функції:

$$\Phi_{k,m}(x,t)=\frac{x\cos(k+m)t\mp x^2\cos mt}{1\mp 2x\cos kt+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n\cos(nk+m)t\cdot x^n\,, \qquad (3.19)$$

$$\Phi_{k,m}(x,t)=\frac{x\sin(k+m)t\mp x^2\sin mt}{1\mp 2x\cos kt+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n\sin(nk+m)t\cdot x^n\,. \qquad (3.20)$$

Приклад 3.15. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nt}{(2n-1)(2n+1)}$.

Розв'язання. Маємо $F(p)=\frac{1}{(2p-1)(2p+1)}\div\frac{1}{2}\mathrm{sh}\frac{x}{2}=f(x)$. Використаємо твірну функцію (3.20). Для заданого ряду вона має вигляд:

$$\Phi_{2,0}(x,t)=\frac{x\sin 2t}{1-2x\cos 2t+x^2}.$$

За формулою (3.18) знаходимо:

$$s(t)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{sh}\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{-x}\sin 2t}{1-2e^{-x}\cos 2t+e^{-2x}}dx.$$

Виконаємо заміну змінної $e^{-\frac{x}{2}}=u$. Тоді $-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=du$. Отримуємо інтеграл:

$$s(t)=-\frac{\sin 2t}{2}\int_0^1\frac{u^2-1}{u^4-2u^2\cos 2t+1}du=-\frac{\sin 2t}{2}\int_0^1\frac{d\left(u+\frac{1}{u}\right)}{\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-4\cos^2 t}=$$

$$=-\frac{\sin t}{4}\ln\frac{u+\frac{1}{u}-2\cos t}{u+\frac{1}{u}+2\cos t}\Bigg|_0^1=\frac{\sin t}{2}\ln\left|ctg\frac{t}{2}\right|.$$

Таким чином, сумою заданого ряду є функція $s(t)=\frac{\sin t}{2}\ln\left|ctg\frac{t}{2}\right|$.