Практичне заняття № 1. Знаходження зображень.

1. Сформулюйте означення інтегрального перетворення.
2. Наведіть означення перетворення Лапласа.
3. Яку функцію називають оригіналом?
4. Наведіть приклади функцій-оригіналів.
5. Сформулюйте теорему існування зображення.
6. Сформулюйте необхідну умову зображення.
7. Наведіть приклади функцій, які задовольняють необхідній умові зображення при перетворенні Лапласа.
8. Чи може функція $F(p)=\cos\frac{1}{p}$ бути зображенням деякого оригінала?
9. Перевірте, які з вказаних функцій є оригіналами: а) $t^2\eta(t)$; б) $b^t\eta(t)$, $b>0$, $b\neq 1$; в) $e^{4t^2}\eta(t)$; г) $\frac{\eta(t)}{t-3}$; д) $t^t\eta(t)$; е) $\frac{\eta(t)}{t^2+2}$; ж) $\operatorname{ctg} t\,\eta(t)$.
10. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайдіть зображення функції $f(t)=t^n$, $n\in N$.
11. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайти зображення функції $f(t)=\begin{cases}1,\ 0\le t\le 3,\\ 0,\ t>3.\end{cases}$
12. Використовуючи означення перетворення Лапласа, знайдіть зображення функції $f(t)=\begin{cases}1-t, t\in[0;1],\\ 0, t\notin[0;1].\end{cases}$

Практичне заняття № 2. Властивості перетворення Лапласа.

1. Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайдіть зображення наступних функцій: 1) $\sin^2\omega t$; 2) $\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch} t)$; 3) $\sin\alpha t\cos\beta t$; 4) $\cos^3\omega t$; 5) $e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$; 6) $\sin\alpha t\cdot\operatorname{ch}\beta t$.
2. Знайдіть зображення наступних функцій: а) $e^{t-2}\eta(t-2)$, б) $e^{t-2}\eta(t)$; в) $e^t\eta(t-2)$; г) $t^2\eta(t-1)$; д) $(t-1)^2\eta(t-1)$.

3. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ 1,\ 0\le t<1,\\ -1,\ 1\le t<2,\\ 0, t\ge 2.\end{cases}$ б) $f(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ t,\ 0\le t<1,\\ 1,\ t\ge 1.\end{cases}$
4. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=|\sin 2t|$; б) $f(t)=\{2t\}$.
5. Знайдіть зображення розв'язку задачі Коші: $x''+3x'=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$.
6. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=t^2\cos t$; б) $f(t)=(t+2)\operatorname{sh}4t$.
7. Знайдіть зображення функції $f(t)=\int\limits_0^t \tau^{10}e^{-2\tau}d\tau$.
8. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$; б) $f(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.
9. Обчисліть інтеграли ($a>0$, $b>0$): а) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos at-\cos bt}{t}dt$.
10. Знайдіть зображення функцій: а) $f(t)=t\sqrt[3]{t}$; б) $f(t)=t^3\sqrt{t}$.
11. Знайдіть згортку функцій $f*g$, якщо: а) $f(t)=t^2$, $g(t)=t^3$; б) $f(t)=\sqrt{1+t}$, $g(t)=1$.
12. Знайдіть зображення згорток функцій із завдання 22.
13. Користуючись теоремою множення зображень, знайдіть оригінали для наступних функцій: а) $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$; б) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+16)}$.
14. Знайдіть зображення розв'язку інтегрального рівняння:

$$x(t)=\sin t+2\int\limits_0^t\cos(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau.$$

Практичне заняття № 3. Елементарний метод знаходження оригіналів за заданим зображенням

1. Чи може бути зображенням функція $F(p)=\dfrac{2p^2+p}{p^2+p+1}$?
2. Розклавши задане зображення $F(p)$ на елементарні дроби, знайдіть оригінали, якщо:

   1) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-5p+6}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$; 3) $F(p)=\dfrac{3p-2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-p+1\right)}$

   4) $F(p)=\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$; 5) $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$; 6) $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3-6p^2+5p}$.

Практичне заняття № 4. Застосування теорем розвинення.

3. Знайдіть оригінали для наступних зображень:

   1) $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{(p-2)\left(p^2-p-20\right)}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)}$;

   3) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p+1)^4}$; 4) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^3\left(p^2+1\right)(p-2)}$.
4. Знайдіть оригінал для зображення $F(p)$, якщо:

   а) $F(p)=\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}$.
5. Знайдіть оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)=\dfrac{n!}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}$.
6. Знайдіть оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

   Побудуйте графік $f(t)$.