Практичне заняття на тему «Правила Лопіталя»

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційованими у околі точки $x = x_0$ і при цьому $f(x_0) = g(x_0) = 0$, а $g'(x) \neq 0$ у околі цієї точки. Якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то існує $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційовними у околі точки x_0 (можливо, окрім самої цієї точки), і у цьому околі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, причому $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то існує і границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\,.$$

Обчислити границі:

1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-1\right)'}{\left(x^2+2x-3\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x+2}=\frac{3}{4}.$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{\cos x}=\frac{3}{1}=3\,.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1/\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\cos^2 x=0\cdot 1=0.$$

4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\ln x-x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-x\right)'}{(\ln x-x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{\frac{1}{x}-1}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty\,.$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\sin x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

6.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}:\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{2\sqrt{x-1}}=+\infty.$$

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln\left(1+x\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1/\left(1+x\right)}=\frac{3a}{1}=3a.$$

8.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\ln x\right)'}{x'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0.$$

9.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{\left(1+2x\right)^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}+1}=\frac{2}{3}:\frac{3}{2}=\frac{4}{9}.$$

10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln\cos\left(2x-x^2\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6x\cdot\cos 3x^2}{-\dfrac{\left(2-2x\right)\cdot\sin\left(2x-x^2\right)}{\cos\left(2x-x^2\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x\cdot\cos 3x^2\cdot\cos\left(2x-x^2\right)}{2\left(1-x\right)\cdot\sin\left(2x-x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x^2\cdot\cos\left(2x-x^2\right)}{1-x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x-x^2\right)}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x-x^2\right)}=$$

$$=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(2-2x\right)\cos\left(2x-x^2\right)}=\frac{3}{2}.$$

11.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x-\dfrac{\pi}{2}}:\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\cos x\cdot\sin x}{1}=0.$$

12.

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}5x=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 5x}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cos 5x\right)'}{\left(\sin 5x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-5x\sin 5x}{5\cos 5x}=\frac{1}{5}.$$

13.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-2x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(e^{2x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

14.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = A.$$

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(\cos x)\right)'}{x'} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$A = e^0 = 1.$$

15.

$$\lim_{x\to 0+0}(\sin x)^{\mathrm{tg}x} = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln(\sin x)^{\mathrm{tg}x}} = \lim_{x\to 0+0} e^{\mathrm{tg}x\cdot\ln(\sin x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln\sin x}{\mathrm{ctg}x}}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\sin x}{\mathrm{ctg}x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} : \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0+0}(\cos x\cdot\sin x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0+0}(\sin x)^{\mathrm{tg}x} = e^0 = 1.$$

16.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

17.

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=\left(\infty^0\right)=A.$$

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\left(\ln(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\ln(\operatorname{ctg}x)\right)=(0\cdot\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{ctg}x)}{1/\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right):\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=A=e^0=1.$$

18.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\left(\infty^0\right)=A.$$

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\sin x\cdot\ln x\right)=\left(0\cdot\infty\right)=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{\cos x/\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 0\cdot 1=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=A=e^0=1.$$

Домашнє завдання:

Обчислити вказані границі.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$. Відповідь: $\dfrac{4}{7}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$. Відповідь: $\ln a-1$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{1-x^2}$. Відповідь: $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$. Відповідь: 3.
5. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}\left(x-a\right)$. Відповідь: $\dfrac{1}{a}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$. Відповідь: $\ln a$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. Відповідь: 1.

8. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$. Відповідь: $\frac{2}{\pi}$.

Знаходження асимптот графіка функції.

Короткі теоретичні відомості

Асимптотою кривої називають пряму, відстань якої від точки, що лежить на кривій, прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат.

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними та похилими.

1. Пряма $x=a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y=f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$.

2. Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Якщо хоча б одна з цих границь не існує або є нескінченною, то крива $y=f\left(x\right)$ похилих асимптот не має. 3. Рівняння горизонтальної асимптоти має вигляд $y=b$, де

$$b=\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right).$$

Приклад 1. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{5x}{x-3}$.

Розв'язання. Графік має вертикальну асимптоту $x=3$, оскільки $\lim\limits_{x\to3\pm0}\dfrac{5x}{x-3}=\pm\infty$. Знайдемо похилі асимптоти, якщо вони існують.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-3}=0.$$

Оскільки $k=0$, то похилих асимптот для графіка даної функції не існує. Можуть існувати горизонтальні асимптоти. Знаходимо $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x}{x-3}=5$. Отже, пряма $y=5$ є горизонтальною асимптотою даної функції.

Приклад 2. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{3x^2}{x-1}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to1\pm0}\dfrac{3x^2}{x-1}=\pm\infty$, то пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=3,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}=3.$$

Отже, пряма $y=kx+b=3x+3$ є похилою асимптотою. Горизонтальні асимптоти відсутні ($k\neq 0$).

Приклад 3. Знайти асимптоти кривої $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to+0}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-0}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=\left(0\cdot 0\right)=0.$$

Отже, $x=0$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{1/x}=1.$$

Таким чином, пряма $y = x + 1$ є похилою асимптотою. Горизонтальні асимптоти відсутні.

Приклад 4. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{1+x^2} + 2x$.

Розв'язання. Оскільки функція є неперервною при всіх дійсних x, то вертикальні асимптоти у її графіку відсутні. Знайдемо похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + 2 \right).$$

Розглянемо окремо випадки, коли $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$.

При $x \to +\infty$ маємо:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + 2 \right) == \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} + 2 \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2 \right) = 3.$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x^2} + 2x - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\sqrt{1+x^2} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0.$$

Нехай $x \to +\infty$.

$$k_2 = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+2\right) == \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}+2\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right) = 1.$$

$$b_2 = \lim_{x\to -\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+2x-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = \left(\infty-\infty\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\sqrt{1+x^2}-x} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0.$$

Таким чином, при $x \to +\infty$ графік функції має похилу асимптоту $y = 3x$, при $x \to -\infty$ похила асимптота має вигляд $y = x$. Горизонтальні асимптоти відсутні.

Приклад 5. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Розв’язання. Область визначення функції знаходимо, розв’язавши нерівність $\frac{x^3}{x-2} \ge 0$. Звідси знаходимо:

$x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. Оскільки $\lim\limits_{x \to 2+0} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} = +\infty$, то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою.

Знаходимо похилі асимптоти.

Розглянемо окремо випадки $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$.

Нехай $x \to +\infty$. Маємо:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1.$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_1 x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{x}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \left(\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} - 1 \right) \left(1 + \sqrt{\dfrac{x}{x-2}} \right)}{1 + \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{x-2}}{1 + \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}} = 1.$$

Таким чином, існує похила асимптота

$$y = k_1 x + b_1 = x + 1.$$

Нехай $x \to -\infty$.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = -1.$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x}{x-2}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}\right)\left(1+\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}\right)}{1+\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{-2x}{x-2}}{1+\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}} = -1.$$

Отже, існує похила асимптота $y=-x-1$.

Приклад 6. Знайти асимптоти кривої $y = x + 2\operatorname{arctg} x$.

Розв’язання. Оскільки функція визначена на всій числовій прямій і неперервна, то вертикальні асимптоти відсутні. Перевіримо наявність похилих асимптот.

Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то доцільно окремо розглянути випадки $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

При $x\to+\infty$ отримуємо:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2\operatorname{arctg} x}{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1.$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + 2\operatorname{arctg} x - x\right) =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Отже, пряма $y = x + \pi$ є похилою асимптотою при $x \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ знаходимо:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(f - k_2 x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(x + 2\operatorname{arctg} x - x\right) =$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

Пряма $y = x - \pi$ – похила асимптота при $x \to -\infty$.

Приклад 7. Знайти асимптоти кривої $y = x^2 e^{-x}$.

Розв’язання. При $x \to +\infty$ $y \to 0$, отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота. Оскільки функція визначена та неперервна на всій числовій прямій, то вертикальні асимптоти відсутні. Визначимо, чи існують похилі асимптоти.

$$\frac{x}{} k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^x}.$$

Остання границя дорівнює нулю при $x\to+\infty$ і є нескінченною при $x\to-\infty$. Отже, похилих асимптот графік цієї функції не має.

Приклад 8. Знайти асимптоти графіка функції $y=\ln\left(4-x^2\right)$

.

Розв'язання. Область визначення функції знаходимо з нерівності $4-x^2>0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow |x|<2$. Область визначення функції $D(y)=(-2;2)$.

$$\lim_{x\to2-0}\ln\left(4-x^2\right)=\lim_{x\to-2+0}\ln\left(4-x^2\right)=-\infty.$$

Прямі $x=2$ та $x=-2$ є вертикальними асимптотами. Інших асимптот для цього графіка не існує.

Домашнє завдання.

Знайти асимптоти наступних функцій:

1) $y=\dfrac{5x}{x-3}$.

Відповідь: $x=3$ – вертикальна асимптота, $y=1$ – горизонтальна асимптота.

2) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: $x = 0$ – вертикальна асимптота

3) $y = \frac{3x}{2} \ln\left(e - \frac{1}{3x} \right)$.

Відповідь: $x = \frac{1}{3e}$ – вертикальна асимптота, $y = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2e}$ – похила асимптота.

4) $y = \frac{x^2}{1+x}$.

Відповідь: $x = -1$ – вертикальна асимптота, $y = x - 1$ – похила асимптота.

Формула Тейлора

Формулу Тейлора використовують для наближення функції за допомогою многочлена. Вона має вигляд:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x). \tag{1}$$

Формула (1) – ***формула Тейлора*** **для функції** $f(x)$ **у околі точки** $x = a$.

Многочлен

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}}{k}$$

, (2)

називають ***многочленом Тейлора***. Вираз $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ називають ***залишковим членом формули Тейлора***. Для значень x, при яких залишковий член є достатньо малим, многочлен $P_n(x)$ є наближенням функції $f(x)$. Формула (1) дає можливість замінити функцію $f(x)$ многочленом Тейлора $P_n(x)$ з точністю, що дорівнює значенню залишкового члена $R_n(x)$.

Залишковий член формули Тейлора $R_n(x)$ можна представити у вигляді:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (3)$$

де точка ξ знаходиться між точками x та a.

Формулу (3) для залишкового члена формули Тейлора називають ***залишковим членом у формі Лагранжа.***

При $x \to a$ $R_n(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x-a)^n$, тому можна записати, що

$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right). \qquad (4)$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають ***залишковим членом у формі Пеано.***

Формулу Тейлора (1) при $a=0$ називають ***формулою Маклорена***. Формула Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x), \tag{5}$$

де $R_n(x)$ визначається за формулою:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\ . \tag{6}$$

У формулі (6) точка ξ знаходиться між точками 0 та x, тобто $\xi=\theta x$, де. $0<\theta<1$.

Формула (6) визначає залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа.

Залишковий член у формі Пеано:

$$R_n(x)=o\left(x^n\right). \tag{7}$$

Формула (4.17) означає, що при заміні функції $f(x)$ многочленом Тейлора у околі точки $x=0$ похибка є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $\left|x^n\right|$.

Наведемо формулу Маклорена для наближення деяких основних елементарних функцій.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right). \tag{8}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o\left(x^{2n}\right). \tag{9}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).\end{aligned} \tag{11}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o\left(x^n\right). \tag{12}$$

Приклад 1. Написати розвинення за цілими невід’ємними степенями $x-1$ до члена 5-го порядку для функції $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Розв'язання. Функція визначена у околі точки $a=1$ і має у околі цієї точки похідні будь-якого порядку. Обчислимо значення функції та її похідних до 5-го порядку включно у цій точці.

$$f(1)=\frac{1}{1-2}=-1, \qquad f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}, \qquad f'(1)=-\frac{1}{(1-2)^2}=-1,$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3},\ f''(1)=\frac{2}{(1-2)^3}=-2,$$

$$f'''(x)=-\frac{2\cdot 3}{(x-2)^4}=-\frac{6}{(x-2)^4}, \qquad f'''(1)=-\frac{6}{(1-2)^4}=-6,$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{6\cdot 4}{(x-2)^5}=\frac{24}{(x-2)^5},$$

$$f^{(4)}(1)=\frac{24}{(1-2)^5}=-24, \qquad f^{(5)}(x)=-\frac{24\cdot 5}{(x-2)^6}=-\frac{120}{(x-2)^6},$$

$$f^{(5)}(1)=-\frac{120}{(1-2)^6}=-120.$$

За формулою (1) отримуємо:

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+$$
$$+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+\frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5+o\left((x-1)^5\right)=-1-(x-1)-$$
$$-\frac{2}{2!}(x-1)^2-\frac{6}{3!}(x-1)^3-\frac{24}{4!}(x-1)^4-\frac{120}{5!}(x-1)^5+o\left((x-1)^5\right)=$$
$$=-1-(x-1)-(x-1)^2-(x-1)^3-(x-1)^4-(x-1)^5+o\left((x-1)^5\right).$$

Приклад 2. Написати розвинення за цілими невід'ємними степенями змінної x до члена вказаного порядку включно для наступних функцій

а) $f\left(x\right)=\sin\dfrac{x}{2}$ до x^5;

б) $f\left(x\right)=\cos\left(2x^2\right)$ до x^8;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+16x^2}}$ до x^4;

г) $f\left(x\right)=e^{2x-x^2}$ до члена з x^5 ;

д) $f\left(x\right)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до члена з x^6 .

Розв'язання. а) Застосуємо стандартний розклад за формулою Маклорена (9) функції $\sin x$, підставивши туди замість x $\dfrac{x}{2}$. Отримуємо:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\left(-1\right)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}+o\left(x^{2n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}x^{2k-1}}{\left(2k-1\right)!}+o\left(x^{2n}\right).$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{5!}+o\left(x^5\right)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^5}{3840}+o\left(x^5\right).$$

б) Застосуємо формулу Маклорена (10) для функції $\cos x$, підставивши туди замість x $2x^2$. Отримуємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\cos\left(2x^2\right) = 1 - \frac{\left(2x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(2x^2\right)^4}{4!} + o\left(x^8\right) = 1 - 2x^4 + \frac{2x^8}{3} + o\left(x^8\right).$$

в) Застосуємо формулу Маклорена (11) для функції $(1+x)^\alpha$, $\alpha = -\frac{1}{4}$

, підставивши туди замість x

$16x^2$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o\left(x^n\right).$$

$$f(x) = \left(1+16x^2\right)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{-\frac{1}{4}\cdot 16x^2}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(16x^2\right)^2}{2!} + o\left(x^4\right) = 1 - 4x^2 +$$

.

г) Застосовуємо стандартне розвинення (8)

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + o\left(t^n\right).$$

Для функції $f(x) = e^{2x-x^2}$ маємо $t = 2x - x^2$, $n = 5$, тому

$$e^{2x-x^2} =$$

$$1+\frac{2x-x^2}{1!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^4}{4!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^5}{5!}+o\left(2x-x^2\right)^5.$$

Маючи на увазі властивості функцій $o(\beta)$, де $\beta(x)$ нескінченно мала функція, отримаємо $o\left(2x-x^2\right)^5=o(x^5)$, а для многочленів $p_n(x)$ степеня $n>5$ сума $p_n(x)+o(x^5)=o(x^5)$. Тому розкриваємо дужки, враховуючи тільки доданки зі степенями, що не перевищують 5. Одержимо:

$$e^{2x-x^2}$$

$$=1+\left(2x-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(4x^2-4x^3+x^4\right)+\frac{1}{6}\left(8x^3-12x^4+6x^5+...\right)+\frac{1}{24}\left(16x^4-32x^5+...\right)$$

$$+\frac{1}{120}\left(32x^5+...\right)+o\left(x^5\right)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right).$$

д) Для розвинення функції $\ln\frac{\sin x}{x}$ до члена з x^6 застосуємо другий спосіб, в якому застосовуються розвинення функцій із таблиці розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано. У даному випадку – це два розвинення

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right),$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+o\left(t^n\right).$$

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o\left(x^7\right)}{x}=\ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^6\right)\right).$$

В розвиненні $\ln(1+t)$ покладемо $t=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^6\right)$, а найвищу степінь розвинення $\ln(1+t)$ візьмемо $n=3$, щоб після піднесення до цього степеня мати найменший степінь x^6, тоді отримаємо:

$$\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)-\frac{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(\right.\right.}{3}$$

$$-o\left(\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^7\right)\right)^3\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o\left(x^7\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36}-\frac{x^6}{360}+\ldots\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{216}+\ldots\right)-o\left(x^6\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+\underbrace{o\left(x^7\right)+o\left(x^6\right)}_{=o\left(x^6\right)}=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o\left(x^6\right).$$

Приклад 3. Застосовуючи таблицю розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано, знайти такі границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}$.

Розв'язання. а) Спочатку спростимо знаменник, застосовуючи еквівалентне перетворення, а саме: $\sin x \sim x$ при $x\to 0$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3},$$

тому розвивати функції чисельника потрібно до члена з x^3. Застосуємо розвинення функцій e^x і $\sin x$ до членів з x^3, а саме:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right);$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right),$$

одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)-x(1+x)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{3x^3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3}.$$

При розв'язанні застосовано формулу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^3)}{x^3}=0$, що відповідає означенню «о-малого».

б) Спочатку зробимо такі перетворення:

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{t} \\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{array}\right.$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right).$$

Оскільки в знаменнику стоїть t^2, то застосовувати будемо таке розвинення до члена з другим степенем:

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+o\left(z^2\right).$$

Для функції $\sqrt{1+t}$ візьмемо в цьому розвиненні $m=\frac{1}{2},\ z=t$, а для функції $\sqrt{1-t}$ покладемо $m=\dfrac{1}{2}$, $z=-t$, тоді

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!}+o(t^2)+1-\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!}+o(t^2)-2\right)=$$

$$=\left|o(t^2)+o(t^2)=o(t^2)\right|=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(t^2)}{t^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

в) Для обчислення границі $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}$ зазначеним умовою способом дізнаємося найменший степінь розвинення знаменника за формулою Маклорена, щоб потім до цього степеня розвивати чисельник. Маємо

$$6\sin x-6x+x^3=6\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)\right]-6x+x^3=$$

$$=6x-x^3+\frac{x^5}{20}-\frac{6x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)-6x+x^3=$$

$$=\frac{x^5}{20}\underbrace{-\frac{6x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o\left(x^{2m}\right)}_{=0(x^6)}=\frac{x^5}{20}+o(x^6).$$

Чисельник будемо розвивати до x^5, застосовуючи розвинення функцій $(1+t)^m$ для $m=\frac{1}{3}$, $t=-x^2$ і $\sin t$ спочатку для $t=x$, а потім для $t=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)$:

$$x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}=x\cdot\left[1+\frac{1}{3}(-x^2)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)(-x^2)^2}{2!}+o(x^4)\right]=x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{9}+o(x^5);$$

$$\sin(\sin x)=\sin\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)\right)^5+o(x$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+\ldots\right)+\frac{x^5}{120}+o\left(x^6\right)=$$

$$=\left|o\left(x^6\right)+o\left(x^6\right)=o\left(x^6\right)\right|=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o\left(x^6\right).$$

В результаті отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x-6x+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o\left(x^6\right)-x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{9}+o(x^5)}{\frac{x^5}{20}+o(x^6)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{19x^5}{10}+o(x^5)}{\frac{x^5}{20}+o(x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{19}{10}+\overbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}^{\to 0}}{\frac{1}{20}+\underbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}_{\to 0}\cdot\underbrace{x}_{\to 0}}=38.$$