1 Знайти величину та напрямок головних напружень

При рішенні задач наведено посилання на формули та рисунки з навчального посібника [1]. Приклади рішення задач № 1-3 взято з робіт Е. Томсена та ін. [2].
Напружений стан в точці записано у вигляді тензора [1] (п. 1.5)

$$(T_\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Приймаємо σ_x=100 Н/мм^2, σ_y=200 Н/мм^2, , σ_z=300 Н/мм^2, τ_{xy}= τ_{xy} =-50 Н/мм^2, τ_{xz}= τ_{zx} = τ_{yz}=0. Тоді

$$(T_\sigma) = \begin{bmatrix} 100 & -50 & 0 \\ -50 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Рішення. Одну складову головних напружень можливо визначити з даного тензора напружень (при , τ_{xz}= τ_{zy} = 0), а саме σ_z= σ_1=300 Н/мм^2 (максимальне головне напруження). Нормальні складові σ_2 та σ_3 визначимо з девіатора напружень для двох строк тензора напружень (1), включивши додатково середнє напруження, яке поки що нам не відоме:

$$(D_б) = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_{cp}) & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_{cp}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_z - \sigma_{cp}) \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Для нашого випадку при вже відомому значенні σ_z= σ_1 маємо:

$$\left(D_б\right)=\begin{bmatrix}(100-\sigma_{cp}) & -50\\ -50 & (200-\sigma_{cp})\end{bmatrix}=0.$$

Рішення даного визначника дає наступні

$$(100-\sigma_{cp})(200-\sigma_{cp})-2500=0$$

Звідки

$$\sigma_{cp}^2-300\sigma_{cp}+17500=0. \qquad (3)$$

Рівняння (3) для визначення середнього напруження σ_{cp} в загальному вигляді запишемо так

$$a\sigma_{cp}^2-b\sigma_{cp}-c=0$$

Рішення даного рівняння має вигляд

$$\sigma_{cp}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Для нашого випадку [форм.(3)] отримаємо:

$$\sigma_{cp}=\frac{300\pm\sqrt{300^2-4\cdot 17500}}{2}.$$

Після перетворення отримаємо [1,рис.1.13 ,]:

$$\sigma_{cp}=150\pm\sqrt{150^2-17500}=150\pm 70{,}8\ \text{Н/мм}^2$$

Звідки головне середнє та мінімальне напруження рівне:

$$\sigma_2=150+70{,}8=220{,}8\ \text{Н/мм}^2$$

$$\sigma_3=150-70{,}8=79{,}2\ \text{Н/мм}^2$$

Таким чином, нормальні напруження будуть рівні: максимальне – σ_1=300Н/мм^2; середнє – σ_2 = 220,8 Н/мм^2; мінімальне – σ_3 = 79,2 Н/мм^2.

Визначимо направляючі косинуси, використовуючи формули п. 1.5 [1]:

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_x-\sigma_{cp})\alpha_x+\tau_{xy}\alpha_y+\tau_{xz}\alpha_z=0\\&\tau_{yx}\alpha_x+(\sigma_y-\sigma_{cp})\alpha_y+\tau_{yz}\alpha_z=0\\&\tau_{zx}\alpha_x+\tau_{xy}\alpha_y+(\sigma_z-\sigma_{cp})\alpha_z=0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Маємо на увазі, що

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1. \qquad (6)$$

Розглянемо рішення першого рівняння (5). Згідно з умовами задачі τ_{xz}=0, то α_z=0 (напруга τ_{xy} з мінусом). Тоді

$$(\sigma_x - \sigma_{cp})\alpha_x - \tau_{xy}\alpha_y = 0. \qquad (7)$$

Дотичні напруження τ_{xy} задано з мінусом.

Маємо з формули (6) при α_z=0.

$$\alpha_y^2 = 1 - \alpha_x^2. \qquad (8)$$

Зведемо у квадрат формулу (7) та проведемо рішення рівняння (7) та (8) сумісно. Отримаємо ($\sigma_{ср}$=σ_2)

$$(\sigma_x - \sigma_{cp})^2\alpha_x^2 - \tau_{xy}^2(1 - \alpha_x^2) = 0. \qquad (9)$$

Вирішуючи цей вираз відносно α_x отримаємо

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_2)^2 + \tau^2{}_{xy}}}. \qquad (10)$$

Так як σ_x=100 Н/мм^2, τ_{xy}=-50 Н/мм^2 після підстановки в рівняння (10) та рішення отримаємо

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{(-50)^2}{(100 - 220{,}8)^2 + (-50)^2}} = 0{,}384(\approx 67°35').$$

З формул (5) та (7) знайдемо направляючий конус α_y. Маємо

$$\alpha_y = (100 - 220{,}8) \cdot 0{,}384 / (-50) = 0{,}925(\approx 22°25')$$

Аналогічно визначаємо направляючі конуси для напруження σ_y з другого рівняння (5). Маємо для нашого випадку

$$-\tau_{xy}\alpha_{xy} + (\sigma_y - \sigma_2)\alpha_y = 1$$

Виконаємо аналогічні дії по рівнянню (8) та (9) та отримаємо

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_2)^2 + \tau^2{}_{xy}}}. \qquad (12)$$

Так як σ_y=200 Н/мм^2, а τ_{xy}=-50 Н/мм^2, то отримаємо

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{2500}{388 + 2500}} = 0{,}925\,(22°25').$$

Кут α_y з формули (11)

$$\alpha_y = \frac{(200 - 220{,}8)\cdot 0{,}925}{-50} = 0{,}384(67°35')$$

2 Визначити розміри і деформацію плити

Плита довжиною L=1200 мм, шириною B=360 мм та товщиною H=5 мм розтягується рівномірно при контрольованому розтягненні у повздовжньому напрямку до тих пір, поки її довжина не збільшиться до L_1=1440 мм без зміни ширини. Знайти: а) кінцеві розміри плити; б) загальну ефективну деформацію (пружніми деформаціями знехтувати).

<u>Рішення.</u> Використовуючи залежності з розділів 2.2-2.6 [1] та обрав наступні напрямки осей (довжина – x, ширина – y, товщина – z), отримаємо

$$\varepsilon_x = \ln x/x_0 = \ln 1440\,/1200 = 0{,}182;$$

$$\varepsilon_y = \ln y/y_0 = \ln 360\,/360 = 0;$$

При ε_y=0

$$\varepsilon_z = \ln z/z_0 = \ln x/x_0 = \ln h/H = -0{,}182;$$

Що відповідає закону сталості об’єму.

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_y = 0$$

З рівняння

$$\varepsilon_z = \ln h / H$$

отримаємо

$$h = H \cdot e^{\varepsilon_z} = 5 \cdot e^{-0,182} = 5 \cdot (1200 / 1440) = 4,16 \text{ мм.}$$

З цього випливає що, розміри деформації будуть наступні: довжина L_1=1440 мм; ширина b=360 мм, товщина h=4,16 мм. При наявності розширення товщина h буде більша.

Нескінченно мала ефективна деформація записується у вигляді ($d\varepsilon_x = d\varepsilon_z$; $d\varepsilon_y=0$):

$$d\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y\right)^2 + \left(d\varepsilon_y - d\varepsilon_z\right)^2 + \left(d\varepsilon_z - d\varepsilon_x\right)^2}; \qquad (13)$$

$$d\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_x - 0\right)^2 + \left(0 - d\varepsilon_z\right)^2 + \left(d\varepsilon_z - d\varepsilon_x\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_x;$$

Оскільки приріст є постійним, кінцеву ефективну деформацію можливо отримати інтегруванням:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{-0,182} d\varepsilon_x = \frac{2 \cdot 0,182}{\sqrt{3}} = 0,21.$$

Якщо деформування було проведено простим розтягненням до тієї самої довжини (L=1440 мм) при відповідному відносному зменшенні ширини на величину ε_y=ε_z, тоді з виразу (13) отримуємо ε_1 = 0,182. Тоді, деформація до отримання ідентичного деформованого стану в довжині дає ефективну деформацію, яка на 15% більше в випадку пласкої деформації, ніж при простому розтягненні з розширенням.

3 Визначати напружений стан деталі

Деталь зі сталі навантажена та заміряно наступні деформації: $\varepsilon_x = 0,001$; $\varepsilon_y = 0,002$; $\varepsilon = 0,003$; $\gamma_{xy} = 0,0015$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ (см. п.2.4) [1]. Знайти напружений стан деталі.

Рішення. Для розрахунку напруженого стану можливо використовувати рівняння (1.47) [1].. Модуль пружності для сталі $E=2,1\cdot10^5$ Н/мм^2 и коефіцієнт Пуансона – $\mu = \nu =$ 0,33. Визначимо модуль зсуву (п. 1.6) [1].

$$G = \frac{E}{2(l+\nu)} = \frac{2,1\cdot10^5}{2\cdot1,33} = 7,9\cdot10^4 \text{ Н/мм}^2.$$

Дотичні напруження в одному напрямку (при $\tau_{xy}=\tau_{zx}=0$)

$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} = 7,9\cdot10^4\cdot(0,0015) = 118 \text{ Н/мм}^2.$$

Нормальні напруження можливо розрахувати, якщо підставити відомі деформації в перетворене рівняння (1.47) [1], а саме:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z - 2,1\cdot10^5\cdot0,001 = 0 \\ &-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z - 2,1\cdot10^5\cdot0,002 = 0 \\ &-\sigma_x - \nu\sigma_y + \nu\sigma_z - 2,1\cdot10^5\cdot0,003 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Вирішуємо сумісно наведені вирази. Оскільки перше та третє рівняння дорівнюють нулю, то вони рівні між собою:

$$\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z - 210 = -\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \nu\sigma_z - 630.$$

Після скорочення та перетворення отримаємо

$$\sigma_z = \sigma_x + 316. \qquad (15)$$

Вирішуючи сумісно друге та третє рівняння формули (14), отримаємо

$$-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z - 420 = -\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \nu\sigma_z - 630.$$

$$\sigma_y(l+\nu) - \sigma_z(l+\nu) + 210 = 0$$

$$\sigma_z = \sigma_y + 158. \quad (16)$$

Вирішуючи сумісно рівняння (15) та (16) отримаємо

$$\sigma_y = \sigma_x + 158. \quad (17)$$

Рівняння (15) и (17) вирішуються сумісно з першим рівнянням (14). Маємо

$$\sigma_x - \nu(\sigma_x + 158) - \nu(\sigma_x + 316) - 210 = 0$$

Після перетворення та скорочення отримаємо

$$\sigma_x = 366/(1-2\nu) = 366/0{,}34 = 1080 \text{ Н/мм}^2 \quad (18)$$

З рівнянь (15) та (17) маємо

$$\sigma_z = 1080 + 316 = 1396 \text{ Н/мм}^2$$

$$\sigma_y = 1080 + 158 = 1238 \text{ Н/мм}^2$$

Середнє напруження рівне

$$\sigma_{cp} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = 1250 \text{ Н/мм}^2$$

Ефективне напруження в присутності дотичних напружень рівне

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\cdot(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (19)$$

Раніше зазначали, що τ_{xy}=118 Н/мм^2, τ_{yz}= τ_{zx}=0. Тоді

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1080-1238)^2 + (1238-1396)^2 + (1396_z - 1080)^2 + 6\cdot(118^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{25100 + 25100 + 100000 + 84000} = 341 \text{ Н/мм}^2.$$

Треба відзначити, що для наведених в цьому прикладі деформацій нормальне та середнє напруження дуже високе, в той час як ефективне напруження залишається низьким. Якщо межа течії даного матеріалу перевищує $\sigma_т$>341 Н/мм^2, як випливає з рівняння (1.53) та п. 1.6) [1] , пластична деформація не розпочнеться, навіть якщо нормальні напруження будуть високими.

Варіанти вхідних даних для вирішення задач

Таблиця 1. Задача 1 (розмірність Н/мм^2) ($\tau_{xz}= \tau_{zy}=0$)

Варіант	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}
1	60	80	100	-30
2	50	80	120	-40
3	70	90	150	50
4	70	80	140	-40
5	90	120	200	45
6	100	180	250	30
7	80	170	240	-60
8	90	190	280	60
9	110	220	350	-70
10	120	240	400	-70

Таблиця 2. Задача 2.

Варіант	**L, мм**	**L_1, мм**	**B, мм**	**H, мм**
1	1000	1300	200	6
2	500	700	100	5
3	600	800	150	7
4	700	1000	200	8
5	900	1200	250	9
6	1000	1350	300	6
7	1100	1400	250	7
8	1000	1400	250	6
9	900	1250	200	5
10	950	1200	20	6

Таблиця 3. Задача 3.

Варіант	ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}
1	0,001	0,0015	0,002	0,001
2	0,0008	0,0018	0,003	0.0015
3	0,0009	0,0016	0,0025	0,0018
4	0,001	0,001	0,0015	0,001
5	0,0015	0,002	0,0035	0,0018
6	0,0013	0,0018	0,0025	0,0015
7	0,0012	0,0022	0,0035	0,002
8	0,0015	0,0024	0,0033	0,0015
9	0,0016	0,0028	0,0035	0,0018
10	0,002	0,003	0,004	0,002