И. Л. Акулич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

И. Л. АКУЛИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ в ПРИМЕРАХ и ЗАДАЧАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье, стереотипное

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР • 2011

ББК 22.18я73
А 44

Акулич И. Л.

А 44 Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 352 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0916-7

В учебном пособии рассматриваются задачи линейного, нелинейного и динамического программирования. Приведены определения, формулы, а также методические указания, необходимые для решения задач; даны решения типовых задач, показаны возможности использования в этих целях различных пакетов прикладных программ. В конце каждого параграфа приведены задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов и преподавателей вузов, изучающих экономико-математические методы и модели и их использование при решении практических задач.

ББК 22.18я73

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Математическое программирование представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i\ (i = \overline{1, m})$, где f и g_i — заданные функции, а b_i — некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_i математическое программирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

Прежде всего задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции f и g_i линейные, то соответствующая задача является *задачей линейного программирования*. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является *задачей нелинейного программирования*.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены *задачи выпуклого программирования*. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

В свою очередь, среди задач выпуклого программирования более подробно исследованы *задачи квадратичного программирования*. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений либо некоторой системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В *задачах параметрического программирования* целевая функция или функции, определяющие область возможных изменений переменных, либо то и другое, зависят от некоторых параметров.

В *задачах дробно-линейного программирования* целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также являются линейными.

Выделяют отдельные классы задач стохастического и динамического программирования.

Если в целевой функции или в функциях, определяющих область возможных изменений переменных, содержатся случайные величины, то такая задача относится к *задаче стохастического программирования.*

Задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным, относится к *задаче динамического программирования.*

Глава 1

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1.1. Примеры задач линейного программирования

1.1. Для изготовления трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1.1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Таблица 1.1

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени (ч)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц вида B и x_3 единиц вида C. Тогда для производства такого количества изделий потребуется затратить

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \text{ станко-ч}$$

фрезерного оборудования.

Так как общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120, то должно выполняться неравенство

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120.$$

Аналогичные рассуждения относительно возможного использования токарного, сварочного и шлифовального оборудования приведут к следующим неравенствам:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360.$$

Так как количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, то

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (1.1)$$

Далее, если будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц изделий вида B и x_3 единиц изделий вида C, то прибыль от их реализации составит

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3.$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче. Дана система четырех линейных неравенств с тремя неизвестными x_j

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 280, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360, \end{cases} \qquad (1.2)$$

и линейная функция относительно этих же переменных

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3. \qquad (1.3)$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств (1.2) найти такое, при котором функция (1.3) принимает максимальное значение. Как это сделать, будет показано в дальнейшем.

Линейная функция (1.3), максимум которой требуется определить, вместе с системой неравенств (1.2) и условием неотрицательности переменных (1.1) образуют математическую модель исходной задачи.

Так как функция (1.3) линейная, а система (1.2) содержит только линейные неравенства, то задача (1.1)—(1.3) является задачей линейного программирования.

1.2. Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136 000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны — в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 у.е. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Р е ш е н и е. Предположим, что молочный завод будет ежедневно производить x_1 тонн молока, x_2 тонн кефира и x_3 тонн сметаны. Тогда ему для изготовления этой продукции необходимо

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \text{ кг молока.}$$

Так как завод может использовать ежедневно не более 136 000 кг молока, то должно выполняться неравенство

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136\,000.$$

Аналогичные рассуждения в отношении возможного использования линий разлива цельномолочной продукции и автоматов по расфасовке сметаны позволяют записать следующие неравенства:

$$0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4,$$

$$3{,}25x_2 \le 16{,}25.$$

Так как ежедневно должно вырабатываться не менее 100 т молока, то $x_1 \ge 100$. По своему экономическому смыслу переменные x_2 и x_3 могут принимать только неотрицательные значения: $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$. Общая прибыль от реализации x_1 тонн молока, x_2 тонн кефира и x_3 тонн сметаны равна

$$30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \text{ у.е.}$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче. Дана система

$$\begin{cases} 1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136\,000, \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4, \\ 3{,}25x_2 \le 16{,}25, \\ x_1 \ge 100 \end{cases} \qquad (1.4)$$

четырех линейных неравенств с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 и линейная функция относительно этих же переменных

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3. \quad (1.5)$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств (1.4) найти такое, при котором функция (1.5) принимает максимальное значение. Так как система (1.4) представляет собой совокупность линейных неравенств и функция (1.5) линейная, то исходная задача является задачей линейного программирования.

1.3. На швейной фабрике для изготовления нужных деталей швейных изделий ткань может быть раскроена несколькими способами. Пусть при j-м варианте раскроя ($j = \overline{1, n}$) 100 м^2 ткани изготовляется b_{ij} деталей i-го вида ($i = \overline{1, m}$), а величина отходов при данном варианте раскроя равна c_j м^2. Зная, что деталей i-го вида следует изготовлять B_i штук, требуется раскроить ткань так, чтобы было получено необходимое количество деталей каждого вида при минимальных общих отходах. Составить математическую модель задачи.

Р е ш е н и е. Предположим, что по j-му варианту раскраивается x_j сотен м^2 ткани. Поскольку при раскрое 100 м^2 ткани по j-му варианту получается b_{ij} деталей i-го вида, по всем вариантам раскроя из используемых тканей будет получено деталей i-го вида

$$b_{i1}x_i + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n.$$

Так как должно быть изготовлено B_i деталей данного вида, то

$$b_{i1}x_i + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n = B_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Общая величина отходов по всем вариантам раскроя ткани составит

$$F = c_1x_i + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (j = \overline{1, n}).$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче. Найти минимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \quad (j = \overline{1, 3}) \quad (1.6)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют системе уравнений (1.7) и условию неотрицательности $x_j \geq 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = B_i \ (i = \overline{1,m}) \tag{1.7}$$

Сформулированная задача является задачей линейного программирования, так как функция (1.6) линейная, а система (1.7) содержит только лишь линейные уравнения.

Составьте математические модели задач 1.4—1.10.

1.4. В трех пунктах отправления сосредоточен однородный груз в количествах, соответственно равных 420, 380 и 400 т. Этот груз необходимо перевезти в три пункта назначения в количествах, соответственно равных 260, 520 и 420 т. Тарифы перевозок 1 т груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения являются известными величинами и задаются матрицей

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Найти план перевозок, обеспечивающий вывоз имеющегося в пунктах отправления и завоз необходимого в пунктах назначения груза при минимальной общей стоимости перевозок.

1.5. Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A, B и C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья для каждого вида 1 т карамели приведены в табл. 1.2. В ней же указано общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано фабрикой, а также приведена прибыль от реализации 1 т карамели данного вида.

Таблица 1.2

Вид сырья	Нормы расхода сырья (т) на 1 т карамели			Общее количество сырья (т)
	A	*B*	*C*	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	—	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции	108	112	126	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

1.6. При откорме животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества A, не менее 50 ед. вещества B и не менее 12 ед. вещества C. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма вида		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг корма I вида составляет 9 коп., II вида — 12 коп., III вида — 10 коп.

1.7. В m пунктах могут быть размещены предприятия, производящие некоторую однородную продукцию. Эта продукция поступает в n пунктов ее потребления, причем в j-м пункте потребности в продукции равны a_j единицам. Затраты, связанные с доставкой единицы продукции с i-го пункта отправления в j-й пункт потребления, составляют C_{ij} у.е. Известно, что в i-м пункте изготовления продукции максимальный объем ее производства не может превышать b_i единиц, а затраты, связанные с изготовлением единицы продукции, составляют d_i у.е.

Определить такое размещение предприятий, при котором обеспечиваются потребности в продукции в каждом из пунктов ее потребления при наименьших общих затратах, связанных с производством и доставкой продукции.

1.8. Для производства n видов изделий предприятие использует m групп взаимозаменяемого оборудования. Изделий i-го вида необходимо изготовить B_i единиц ($i = \overline{1, n}$), причем j-я группа оборудования может быть занята изготовлением изделий не больше чем a_j часов ($j = \overline{1, n}$). Время изготовления одного изделия i-го вида на j-й группе оборудования равно a_{ij} часам, а цена производства равна c_{ij} у.е.

Определить, сколько изделий данного вида с использованием каждой из групп оборудования следует изготовить, чтобы произвести нужное количество изделий каждого вида при наименьшей общей стоимости их изготовления.

1.9. При выращивании некоторой культуры (или группы родственных культур) может быть использован i-й вид удобрений в количестве не большем, чем b_i кг ($i = \overline{1, m}$). Вся посевная площадь содержит n почвенно-климатических зон, причем площадь j-й зоны равна d_j га. Внесение на каждый гектар площади j-й зоны 1 кг удобрений i-го вида увеличивает среднюю урожайность на c_{ij} центнеров.

Требуется распределить выделенный фонд удобрений между посевными зонами так, чтобы суммарный прирост урожайности культур за счет внесения удобрений был максимален.

1.10. Для производства чугунного литья используется n различных исходных шихтовых материалов (чугун различных марок, стальной лом, феррофосфор и др.). Химический состав чугунного литья определяется содержанием в нем химических элементов (кремния, марганца, фосфора и др.). Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, который задается величинами H_j, представляющими собой доли (в процентах) j-го химического элемента в готовом продукте. При этом известны величины: h_{ij} — содержание (в процентах) j-го химического элемента в i-м исходном шихтовом материале; c_i — цена единицы каждого i-го шихтового материала.

Определить состав шихты, обеспечивающий получение литья заданного качества при минимальной общей стоимости используемых шихтовых материалов.

§ 1.2. Общая и основная задачи линейного программирования

В предыдущем параграфе были рассмотрены примеры задач линейного программирования. Во всех этих задачах требовалось найти максимум или минимум некоторой линейной функции при условии, что ее переменные принимали неотрицательные значения и удовлетворяли некоторой системе линейных уравнений или линейных неравенств либо системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения. Каждая из этих задач является частным случаем общей задачи линейного программирования.

Определение 1.1. Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции при условиях

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, k}), \tag{1.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}), \tag{1.10}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, l},\ l \le n), \tag{1.11}$$

где a_{ij}, b_i, c_j — заданные постоянные величины и $k \le m$.

Определение 1.2. Функция (1.8) называется *целевой функцией* (или *линейной формой*) задачи (1.8)—(1.11), а условия (1.9)—(1.11) — *ограничениями* данной задачи.

Определение 1.3. *Стандартной* (или *симметричной*) *задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.8) при выполнении условий (1.9) и (1.11), где $k = m$ и $l = n$.

Определение 1.4. *Основной* (или *канонической*) *задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.8) при выполнении условий (1.10) и (1.11), где $k = 0$ и $l = n$.

Определение 1.5. Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1.9)—(1.11), называется *допустимым решением* (или *планом*).

Определение 1.6. План $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$, при котором целевая функция задачи (1.8) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным*.

Значение целевой функции (1.8) при плане X будем обозначать через $F(X)$. Следовательно, X^* — оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) \le F(X^*)$ [соответственно $F(X) \ge F(X^*)$].

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда требуется найти минимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

можно перейти к нахождению максимума функции

$$F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n,$$

поскольку функция F принимает минимальное значение в той же точке, в которой функция F_1 принимает максимальное значение.

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид " $\le$ ", можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида " $\ge$ " — в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \ge 0), \qquad (1.12)$$

а ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + A_{in}x_n \ge b_i \text{ —}$$

в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \ge 0). \qquad (1.13)$$

В то же время каждое уравнение системы ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде неравенств

$$\begin{cases} a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \dots + a_{in}x_n \le b_i, \\ -a_{i1}x_{i1} - a_{i2}x_{i2} - \dots - a_{in}x_n \le -b_i. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в форме основной, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

Отметим, наконец, что если переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$.

1.11. Записать в форме основной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Решение. В данной задаче требуется найти максимум функции, а система ограничений содержит четыре неравенства. Поэтому, чтобы записать ее в форме основной задачи, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Так как число неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырем, то этот переход может быть осуществлен введением четырех дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого из неравенств вида "$\le$" соответствующая дополнительная переменная прибавляется, а из левых частей каждого из неравенств вида "$\ge$" — вычитается. В результате ограничения принимают вид уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 9}).$$

Следовательно, данная задача может быть записана в форме основной задачи таким образом: максимизировать функцию

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 9}).$$

1.12. Записать задачу, состоящую в минимизации функции

$$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 4})$$

в форме основной задачи линейного программирования.

Р е ш е н и е. В данной задаче требуется найти минимум целевой функции, а система ограничений содержит три неравенства. Поэтому, чтобы записать ее в форме основной задачи, вместо нахождения минимума функции F нужно найти максимум функции $F_1 = -F$ при ограничениях, получающихся из ограничений исходной задачи добавлением к левым частям каждого из ограничений-неравенств вида “ $\leq$ ” соответствующей дополнительной неотрицательной переменной, а из левых частей каждого из ограничений-неравенств вида “ $\geq$ ” дополнительная переменная вычитается.

Следовательно, исходная задача может быть записана в форме основной задачи линейного программирования так: найти максимум функции

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 7}).$$

1.13. Записать в форме стандартной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции

$$F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Р е ш е н и е. Методом последовательного исключения неизвестных сведем данную задачу к следующей: найти максимум функции

$$F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 26, \\ x_1 + x_3 + 11x_4 = 20, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Последняя задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции

$$F = x_3 + 2x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \leq 26, \\ x_3 + 11x_4 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \geq 0.$$

Целевая функция задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_1 и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений задачи.

Запишите задачи 1.14—1.17 в форме основной задачи линейного программирования.

1.14. $F = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \min$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

1.15. $F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 16, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 18, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

1.16. $F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 16, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

1.17. $F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \ge 15, \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \le 17, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

1.18—1.27. Используя математические модели задач 1.1—1.10, записать их в форме моделей основной задачи.

§ 1.3. Свойства основной задачи линейного программирования. Геометрическое истолкование задачи линейного программирования

Рассмотрим основную задачу линейного программирования. Как было отмечено в § 1.2, она состоит в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Перепишем эту задачу в векторной форме: найти максимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.15}$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_nP_n = P_0, \tag{1.16}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{1.17}$$

где P_1, ..., P_n и P_0 — m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи

$$P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \dots; P_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Определение 1.7. План $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *опорным планом* основной задачи линейного программирования, если положительные коэффициенты ($x_j > 0$) стоят при линейно независимых векторах P_j.

Так как векторы P_j являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может быть больше, чем m.

Определение 1.8. Опорный план называется *невырожденным*, если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае он называется *вырожденным*.

Свойства основной задачи линейного программирования (1.15)—(1.17) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 1.9. Пусть X_1, X_2, ..., X_n — произвольные точки евклидова пространства E_n. *Выпуклой линейной комбинацией этих точек* называется сумма

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n,$$

где a_i — произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \quad a_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Определение 1.10. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение 1.11. Точка X выпуклого множества называется *угловой*, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1.1. *Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).*

Определение 1.12. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется *многогранником решений*, а всякая угловая точка многогранника решений — *вершиной*.

Теорема 1.2. *Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.*

Теорема 1.3. *Если система векторов $P_1, P_2, ..., P_k$ $(k \le n)$ в разложении* (1.16) *линейно независима и такова, что*

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_kP_k = P_0, \tag{1.18}$$

где все $x_i \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 1.4. *Если $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — вершина многогранника решений, то векторы P_j, соответствующие положительным x_j $(x_j > 0)$ в разложении* (1.16), *линейно независимы.*

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (то есть для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если целевая функция принимает максимальное значение более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в форме стандартной, содержит не более двух переменных или задача, записанная в форме основной, содержит не более двух свободных переменных, то есть

$$n - r \leq 2,$$

где n — число переменных, r — ранг матрицы, составленной из коэффициентов в системе ограничений задачи.

В качестве примера найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{1.19}$$

при условиях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \; (i = \overline{1, k}), \tag{1.20}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1, 2}). \tag{1.21}$$

Каждое из неравенств (1.20), (1.21) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,$$

$$(i = \overline{1, k}), \;\; x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 0.$$

В том случае, если система неравенств (1.20), (1.21) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей выпуклое, то областью допустимых решений задачи (1.19)—(1.21) является выпуклое множество, которое называется *многоугольником решений* (введенный ранее термин "многогранник решений" обычно употребляется, если $n \geq 3$). Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (где h — некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи (1.19)—(1.21), отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 1.1—1.4.

Рис. 1.1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке A. Из рис. 1.2 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка AB. На рис. 1.3 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис. 1.4 — случай, когда система ограничений задачи несовместна.

Отметим, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня

$$c_1x_1 + c_2x_2 = h$$

передвигается не в направлении вектора $\vec{C} = (c_1;\ c_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения

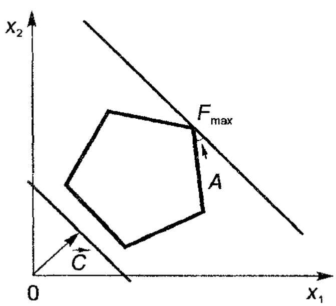


Рис. 1.1

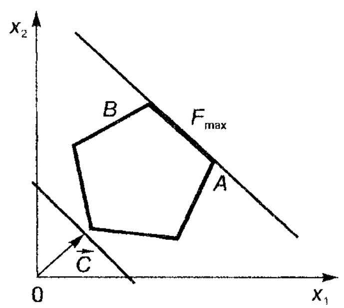


Рис. 1.2

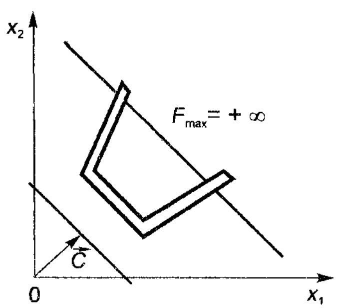


Рис. 1.3

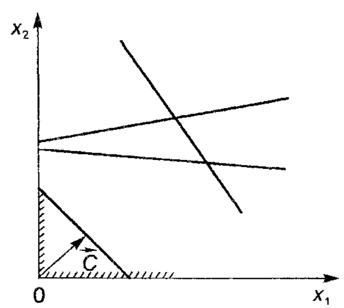


Рис. 1.4

целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования (1.19)—(1.21) на основе ее геометрической интерпретации включает семь этапов.

1°. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (1.20) и (1.21) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2°. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3°. Находят многоугольник решений.

4°. Строят вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$.

5°. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, проходящую через многоугольник решений.

6°. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7°. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

1.28. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 1.4. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 1.4

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (у.е.)	30	40	

Учитывая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B составит

$$F = 30x_1 + 40x_2.$$

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & \text{(I)} \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & \text{(II)} \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, & \text{(III)} \end{cases}$$
$$x_1 = 0, \qquad \text{(IV)}$$
$$x_2 = 0. \qquad \text{(V)}$$

Эти прямые изображены на рис. 1.5. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой — нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае — другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 < 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис. 1.5 это прямая I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку O (0, 0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$; значит, полуплоскость, которой принадлежит точка O (0, 0), определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Это показано стрелками на рис. 1.5. Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 1.5, многоугольником решений является пятиугольник $OABCD$. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику $OABCD$, в которой функция F принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор $\vec{C} = (30; 40)$ и прямую $30x_1 + + 40x_2 = h$, где h — некоторая постоянная такая, что прямая $30x_1 + 40x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, $h = 480$ и построим прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$.

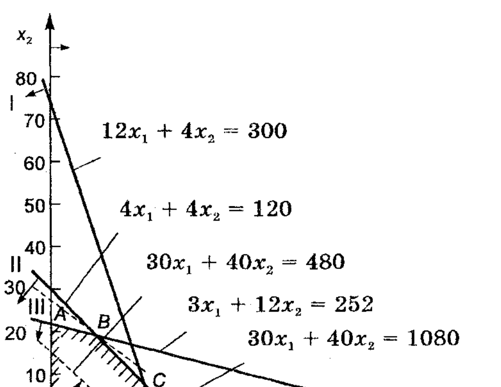


Рис. 1.5

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий A и B, при котором прибыль от их реализации равна 480 у.е. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему, чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий A и B, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 у.е.

Перемещая построенную прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка B. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий A и B, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x^*_1 = 12$, $x^*_2 = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида A и 18 изделий вида B, то оно получит максимальную прибыль, равную

$$F_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080 \text{ у.е.}$$

1.29. Найти максимум и минимум функции

$$F = x_1 + x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Построим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, & \text{(I)} \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, & \text{(II)} \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, & \text{(III)} \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \qquad \text{(IV)}$$

$$x_2 = 0. \qquad \text{(V)}$$

Построив полученные прямые, найдем соответствующие полуплоскости и их пересечение (рис. 1.6).

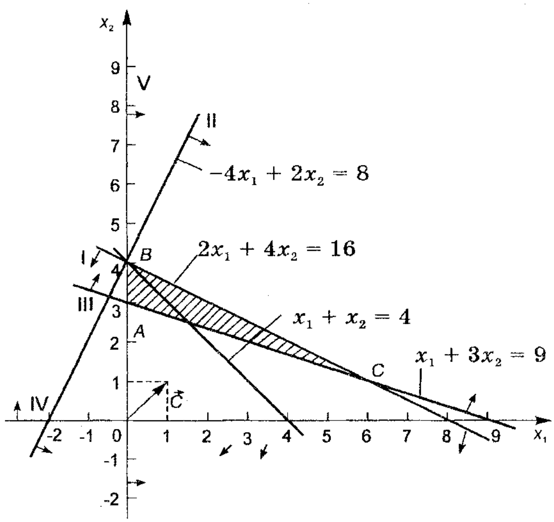


Рис. 1.6

Как видно из рис. 1.6, многоугольником решений задачи является треугольник ABC. Координаты точек этого треугольника удовлетворяют условию неотрицательности и неравенствам системы ограничений задачи. Следовательно, задача будет решена, если среди точек треугольника ABC найти такие, в которых функция $F = x_1 + x_2$ принимает максимальное и минимальное значения. Для нахождения этих точек построим прямую $x_1 + x_2 = 4$ (число 4 взято произвольно) и вектор $\vec{C} = (1; 1)$.

Передвигая данную прямую параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что ее последней общей точкой с многоугольником решений задачи является точка C. Следовательно, в этой точке функция F принимает максимальное значение. Так как C — точка пересечения прямых I и III, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x^*_1 = 6$, $x^*_2 = 1$. Таким образом, максимальное значение функции $F_{max} = 7$.

Для нахождения минимального значения целевой функции задачи передвигаем прямую $x_1 + x_2 = 4$ в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{C} = -(1; 1)$. В этом случае, как видно из рис. 1.6, последней общей точкой прямой с многоугольником решений задачи является точка A. Следовательно, в этой точке функция F принимает минимальное значение. Для определения координат точки A решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

откуда $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 3$. Подставляя найденные значения переменных в целевую функцию, получим $F_{min} = 3$.

1.30. Найти максимальное значение функции

$$F = -16x_1 - x_2 + 5x_4 + 5x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Решение. В отличие от рассмотренных выше задач, в исходной задаче ограничения заданы в виде уравнений. При этом число неизвестных равно пяти. Поэтому данную задачу следует свести к задаче, в которой число неизвестных было бы равно двум. В рассматриваемом случае это можно сделать путем перехода от исходной задачи, записанной в форме основной, к задаче, записанной в форме стандартной.

Выше было показано (см. § 1.2), что исходная задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + 3x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Из целевой функции исходной задачи переменные x_3, x_4, x_5 исключены с помощью подстановки их значений из соответствующих уравнений системы ограничений.

Построим многоугольник решений полученной задачи (рис. 1.7). Как видно из рисунка, максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке C пересечения прямых I и II. Вдоль каждой из граничных прямых значение одной из переменных, исключенной при переходе к соответствующему неравенству, равно нулю. Поэтому в каждой из вершин полученного многоугольника решений последней задачи по крайней мере две переменные исходной задачи принимают нулевые значения. Так, в точке C имеем $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$. Подставляя эти значения в первое и второе уравнения системы ограничений, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 = 6, \end{cases}$$

решая которую находим $x^*_1 = 3$, $x^*_2 = 4$.

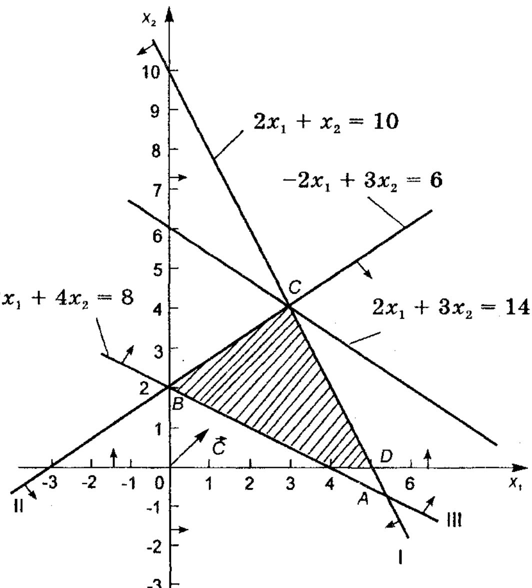


Рис. 1.7

Подставляя найденные значения x_1 и x_2 в третье уравнение системы ограничений исходной задачи, определяем значение переменной x_5, равное 14.

Следовательно, оптимальным планом рассматриваемой задачи является $X^* = (3, 4, 0, 0, 14)$. При этом плане значение целевой функции есть $F_{max} = 18$.

1.31. Найти решение задачи 1.13, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 - 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j \geq \overline{1, 5}).$$

Решение. Как было показано при решении задачи 1.13, исходная задача может быть записана в форме стандартной следующим образом: найти максимум функции

$$F = x_3 + 2x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \leq 26, \\ x_3 + 11x_4 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \geq 0.$$

Полученная задача содержит две неизвестные. Следовательно, ее решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования. Из рис. 1.8 видно, что максимальное значение целевая функция $F = x_3 + 2x_4$ принимает в точке B, в которой пересекаются прямые I и II. Следовательно, координаты этой точки можно найти из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 6, \\ 3x_3 + 10x_4 = 26. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x^*_3 = 34/7$ и $x^*_4 = 8/7$. Подставляя найденные значения x_3 и x_4 в уравнения системы ограничений исходной задачи, имеем $x^*_1 = 18/7$, $x^*_2 = 0$, $x^*_5 = 0$.

Таким образом, $X^* = (18/7, 0, 34/7, 8/7, 0)$ является оптимальным планом исходной задачи. При этом плане $F_{max} = 50/7$.

Используя геометрическую интерпретацию, найдите решения задач 1.32—1.40.

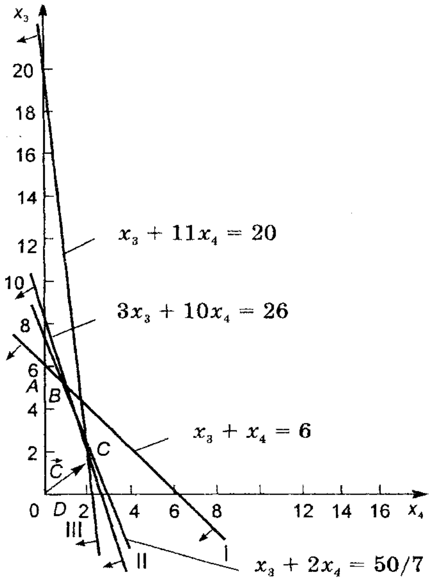


Рис. 1.8

1.32. $F = x_1 + x_2 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

1.33. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

1.34. $F = -2x_1 + x_2 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

1.35. $F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0\ (j \ge \overline{1, 5}).$

1.36. $F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \; (j \geq \overline{1, 5}).$$

1.37. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина (м^3)			
I вида	0,2	0,1	40
II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (чел.-ч)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

1.38. Для производства двух видов изделий *A* и *B* используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в табл. 1.6. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Таблица 1.6

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	A	*B*	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия	14	18	

Найти план выпуска изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

1.39. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в табл. 1.7. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Таблица 1.7

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	A	*B*
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

1.40. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в табл. 1.8. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Таблица 1.8

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма (кг)
	лисица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки (у.е.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

§ 1.4. Нахождение решения задачи линейного программирования

Решение любой задачи линейного программирования можно найти либо симплексным методом, либо методом искусственного базиса. Прежде чем применять один из указанных методов, следует записать исходную задачу в форме основной задачи линейного программирования, если она не имеет такой формы записи.

1. Симплексный метод. Этот метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает (при условии, что данная задача имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Такой переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план. Рассмотрим задачу, для которой этот план можно непосредственно записать.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Здесь a_{ij}, b_i и c_j $(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n})$ — заданные постоянные числа ($m < n$ и $b_i > 0$).

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \qquad (1.22)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0 \qquad (1.23)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \qquad (1.24)$$

где

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; \dots ; P_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; P_{m+1} = \begin{bmatrix} a_{1_{m+1}} \\ a_{2_{m+1}} \\ \dots \\ a_{m_{m+1}} \end{bmatrix}; \dots ; P_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}; P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Так как

$$b_1 P_1 + b_2 P_2 + \dots + b_m P_m = P_0,$$

то по определению опорного плана $X = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n-m$ компонент вектора X равны нулю). Этот план определяется системой единичных векторов P_1, P_2, ..., P_n, которые образуют базис m-мерного пространства. Поэтому каждый из векторов P_1,P_2, ..., P_n, а также вектор P_0 могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса. Пусть

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \ (j = \overline{0, n}).$$

Положим,

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \ (j = \overline{1, n}); \ \Delta_j = z_j - c_j \ (j = \overline{1, n}).$$

Так как P_1, P_2, ..., P_m — единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$ и

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \text{ а } \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j.$$

Теорема 1.5 (признак оптимальности опорного плана). *Опорный план $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_m, 0, 0, ..., 0)$ задачи (1.22)—(1.24) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для любого j $(j = \overline{1, n})$.*

Теорема 1.6. *Если $\Delta_k < 0$ для некоторого $j = k$ и среди чисел a_{ik} $(i = \overline{1, m})$ нет положительных $(a_{ik} \leq 0)$, то целевая функция (1.22) задачи (1.22)—(1.24) не ограничена на множестве ее планов.*

Теорема 1.7. *Если опорный план X задачи (1.22)—(1.24) не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} \leq 0$), то существует опорный план X' такой, что $F(X') > F(X)$.*

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать так, как показано в табл. 1.9.

Таблица 1.9

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_r	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				P_1	P_2	...	P_r	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0		1		0	a_{rm+1}	...	a_{rk}		a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0		0		1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$m+1$			F_0	0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n

В столбце $C_б$ этой таблицы записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце P_0 записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана. Столбцы векторов P_j представляют собой коэффициенты разложения этих векторов по векторам данного базиса.

В табл. 1.9 первые m строк определяются исходными данными задачи, а показатели $(m + 1)$-й строки вычисляют. В этой строке в столбце вектора P_0 записывают значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце вектора P_j — значение

$$\Delta_j = z_j - c_j.$$

Значение z_j находится как скалярное произведение вектора $P_j\ (j = \overline{1, n})$ на вектор $\vec{C}_б = (c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_m)$:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\ (j = \overline{1, n}).$$

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора P_0 на вектор $\vec{C}_б$:

$$F_0 = \sum_{i=n}^{m} c_i b_i.$$

После заполнения табл. 1.9 исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого просматривают элементы $(m + 1)$-й строки таблицы. В результате может иметь место один из следующих трех случаев:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = m + 1, m + 2, \ldots, n$ (при $j = \overline{1, m}$, $z_j = c_j$). Поэтому в данном случае числа $\Delta_j \geq 0$ для всех j от 1 до n;

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого j, и все соответствующие этому индексу величины $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1, m})$;

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов j, и для каждого такого j по крайней мере одно из чисел a_{ij} положительно.

В первом случае на основании признака оптимальности исходный опорный план является оптимальным. Во втором случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов, а в третьем случае можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится. Этот переход от одного опорного плана к другому осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь из векторов и введением в него нового вектора. В качестве вектора, вводимого в базис, можно взять любой из векторов P_j, имеющий индекс j, для которого $\Delta_j < 0$. Пусть, например, $\Delta_k < 0$ и решено ввести в базис вектор P_k.

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, находят $\min (b_i / a_{ik})$ для всех $a_{ik} > 0$. Пусть этот минимум достигается при $i = r$. Тогда из базиса исключают вектор P_k, а число a_{rk} называют *разрешающим элементом.*

Столбец и строку, на пересечении которых находится разрешающий элемент, называют *направляющими* (или *разрешающими*).

После выделения направляющей строки и направляющего столбца находят новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану. Это легко реализовать, если воспользоваться методом Жордана—Гаусса. При этом можно показать, что положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b'_i = \begin{cases} b_i - (b_r / a_{rk}) a_{ik} & \text{при} \quad i \neq r, \\ b_r / a_{rk} & \text{при} \quad i = r, \end{cases} \tag{1.25}$$

а коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану, — по формулам

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj} / a_{rk})a_{ik} & \text{при} \quad i \neq r, \\ a_{rj} / a_{rk} & \text{при} \quad i = r. \end{cases} \tag{1.26}$$

Т а б л и ц а 1.10

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_r	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				P_1	P_2	...	P_r	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
1	P_1	c_1	b'_1	1	0	...	a'_{1r}	...	0	a'_{1m+1}	...	0	...	a'_{1n}
2	P_2	c_2	b'_2	0	1	...	a'_{2r}	...	0	a'_{2m+1}	...	0	...	a'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b'_r	0	0		a'_{rr}		0	a'_{rm+1}	...	1		a'_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b'_m	0	0		a'_{mr}		1	a'_{mm+1}	...	0	...	a'_{mn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$m+1$			F'_0	0	0	...	$z'_r - c_r$	...	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	...	0	...	$z'_n - c_n$

После вычисления b'_i, и a'_{ij} согласно формулам (1.25) и (1.26) их значения заносят в табл. 1.10. Элементы $(m + 1)$-й строки этой таблицы могут быть вычислены либо по формулам

$$F'_0 = F_0 - (b_r / a_{rk})\Delta_k, \tag{1.27}$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - (a_{rj} / a_{rk})\Delta_k, \tag{1.28}$$

либо на основании их определения.

Наличие двух способов нахождения элементов $(m + 1)$-й строки позволяет осуществлять контроль правильности проводимых вычислений.

Из формулы (1.27) следует, что при переходе от одного опорного плана к другому наиболее целесообразно ввести в базис вектор P_j, имеющий индекс j, при котором максимальным по абсолютной величине является число $(b_r / a_{rj})\Delta_j$ $(\Delta_j < 0,\ a_{rj} > 0)$. Однако с целью упрощения вычислительного процесса в дальнейшем будем определять вектор, вводимый в базис, исходя из максимальной абсолютной величины отрицательных чисел Δ_j. Если же таких чисел несколько, то в базис будем вводить вектор, имеющий такой же индекс, как и максимальное из чисел c_j, определяемых данными числами Δ_j $(\Delta_j < 0)$.

Итак, переход от одного опорного плана к другому сводится к переходу от одной симплекс-таблицы к другой. Элементы новой симплекс-таблицы можно вычислить как с помощью рекуррентных формул (1.25)—(1.28), так и по правилам, непосредственно вытекающим из них. Эти правила состоят в следующем.

В столбцах векторов, входящих в базис, на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляют единицы, а все остальные элементы данных столбцов полагают равными нулю.

Элементы векторов P_0 и P_j в строке новой симплекс-таблицы, в которой записан вектор, вводимый в базис, получают из элементов этой же строки исходной таблицы делением их на величину разрешающего элемента. В столбце $C_б$ в строке вводимого вектора проставляют величину c_k, где k — индекс вводимого вектора.

Остальные элементы столбцов вектора P_0 и P_j новой симплекс-таблицы вычисляют по *правилу треугольника*. Для вычисления какого-нибудь из этих элементов находят три числа:

1) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на месте искомого элемента новой симплекс-таблицы;

2) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на пересечении строки, в которой находится искомый элемент новой симплекс-таблицы, и столбца, соответствующего вектору, вводимому в базис;

3) число, стоящее в новой симплекс-таблице на пересечении столбца, в котором стоит искомый элемент, и строки вновь вводимого в базис вектора (как отмечено выше, эта строка получается из строки исходной симплекс-таблицы делением ее элементов на разрешающий элемент).

Эти три числа образуют своеобразный треугольник, две вершины которого соответствуют числам, находящимся в исходной симплекс-таблице, а третья — числу, находящемуся в новой симплекс-таблице. Для определения искомого элемента новой симплекс-таблицы из первого числа вычитают произведение второго и третьего.

После заполнения новой симплекс-таблицы просматривают элементы $(m + 1)$-й строки. Если все $z'_j - c_j \geq 0$, то новый опорный план является оптимальным. Если же среди указанных чисел имеются отрицательные, то, используя описанную выше последовательность действий, находят новый опорный план. Этот процесс продолжают до тех пор, пока либо получат оптимальный план задачи, либо установят ее неразрешимость.

При нахождении решения задачи линейного программирования мы предполагали, что эта задача имеет опорные планы и каждый такой план является невырожденным. Если же задача имеет вырожденные опорные планы, то на одной из итераций одна или несколько переменных опорного плана могут оказаться равными нулю. Таким образом, при переходе от одного опорного плана к другому значение функции может остаться прежним. Более того, оно может сохраняться в течение нескольких итераций. Возможен также возврат к первоначальному базису, и тогда говорят, что произошло *зацикливание.* Поскольку при решении практических задач такое встречается очень редко, мы не будем останавливаться на этом случае.

Итак, нахождение оптимального плана симплексным методом включает шесть этапов.

1°. Находят опорный план.

2°. Составляют симплекс-таблицу.

3°. Выясняют, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δ_j. Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану.

4°. Находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j, а направляющая строка — минимальным из отношений компонент столбца вектора P_0 к положительным компонентам направляющего столбца.

5°. По формулам (1.25)—(1.28) определяют положительные компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов P_i по векторам нового базиса и числа $F^1{}_0$, $\Delta^1{}_j$. Все эти числа записываются в новой симплекс-таблице.

6°. Проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к этапу 4°, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения задачи заканчивают.

1.41. Для изготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг)			Общее количество сырья
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (у.е.)	9	10	16	

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* — через x_2, изделий *C* — через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 300, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \qquad (1.29)$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий *A*, x_2 изделий *B* и x_3 изделий *C* составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \qquad (1.30)$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \qquad (1.31)$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче. Среди всех неотрицательных решений системы неравенств (1.29) требуется найти такое, при котором функция (1.30) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 300, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 — это неиспользуемое количество сырья I вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix};\ P_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix};\ P_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix};\ P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ P_0 = \begin{bmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

Поскольку среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план $X = (0, 0, 0, 360, 192, 180)$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу I итерации (табл. 1.12), подсчитываем значения F_0, $z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность.

Таблица 1.12

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	−9	−10	−16	0	0	0

Как видно из табл. 1.12, значения всех основных переменных x_1, x_2, x_3 равны нулю, а дополнительные переменные принимают свои значения в соответствии с ограничениями задачи. Эти значения переменных отвечают такому "плану", при котором ничего не производится, сырье не используется и значение целевой функции равно нулю (то есть стоимость произведенной продукции отсутствует). Этот план, конечно, не является оптимальным.

Это видно и из 4-й строки табл. 1.12, так как в ней имеются три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -9$, $z_2 - c_2 = -10$ и $z_3 - c_3 = -16$. Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Так, число -9 означает, что при включении в план производства одного изделия A обеспечивается увеличение выпуска продукции на 9 у.е. Если включить в план производства по одному изделию B и C, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 у.е. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий C. Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4-й строке столбца вектора P_3. Следовательно, в базис введем вектор P_3. Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим $\Theta_0 = \min(b_i / a_{i3})$ для $a_{i3} > 0$, то есть

$$\Theta_0 = \min(360/12;\ 192/8;\ 180/3) = 192/8.$$

Найдя число $192/8 = 24$, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое количество изделий C предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида. Так как сырья данного вида соответственно имеется 360, 192 и 180 кг, а на одно изделие C требуется затратить сырья каждого вида соответственно 12, 8 и 3 кг, то максимальное число изделий C, которое может быть изготовлено предприятием, равно

$$\min(360/12;\ 192/8;\ 180/3) = 192/8 = 24,$$

то есть ограничивающим фактором для производства изделий C является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить 24 изделия C. При этом сырье II вида будет полностью использовано.

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 и 2-я строка являются направляющими. Составляем таблицу II итерации (табл. 1.13).

Таблица 1.13

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	–3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, то есть строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки. Здесь направляющей является 2-я строка. Элементы этой строки табл. 1.13 получаются из соответствующих элементов табл. 1.12 делением их на разрешающий элемент (то есть на 8). При этом в столбце $C_б$ записываем коэффициент $C_3 = 16$, стоящий в столбце вводимого в базис вектора P_3. Затем заполняем элементы столбцов для векторов, входящих в новый базис. В этих столбцах на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляем единицы, а все остальные элементы полагаем равными нулю.

Для определения остальных элементов табл. 1.13 применяем правило треугольника. Эти элементы могут быть вычислены и непосредственно по рекуррентным формулам.

Вычислим элементы табл. 1.13, стоящие в столбце вектора P_0. Первый из них находится в 1-й строке этого столбца. Для его вычисления находим три числа:

1) стоящее в табл. 1.12 на пересечении столбца вектора P_0 и 1-й строки (360);

2) стоящее в табл. 1.12 на пересечении столбца вектора P_3 и 1-й строки (12);

3) стоящее в табл. 1.13 на пересечении столбца вектора P_0 и 2-й строки (24).

Вычитая из первого числа произведение двух других, находим искомый элемент

$$360 - 12 \cdot 24 = 72,$$

записываем его в 1-й строке столбца вектора P_0 табл. 1.13.

Второй элемент столбца вектора P_0 табл. 1.13 был уже вычислен ранее. Для вычисления третьего элемента столбца вектора P_0 также находим три числа. Первое из них (180) находится на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_0 табл. 1.12, второе (3) — на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_3 табл. 1.12, третье (24) — на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_0 табл. 1.13. Итак, указанный элемент есть

$$180 - 24 \cdot 3 = 108.$$

Число 108 записываем в 3-й строке столбца вектора P_0 табл. 1.13.

Значение F_0 в 4-й строке столбца этого же вектора можно найти двумя способами:

1) по формуле $F_0 = (C, P_0)$, т.е. $F_0 = 0 \cdot 72 + 16 \cdot 24 + 0 \cdot 108 = 384$;

2) по правилу треугольника; в данном случае треугольник образован числами 0, –16, 24. Этот способ приводит к тому же результату: $0 - (-16) \cdot 24 = 384$.

При определении по правилу треугольника элементов столбца вектора P_0 третье число, стоящее в нижней вершине треугольника, все время оставалось неизменным и менялись лишь первые два числа. Учтем это при нахождении элементов столбца вектора P_1 табл. 1.13. Для вычисления указанных элементов первые два числа берем из столбцов векторов P_1 и P_3 табл. 1.12, а третье число — из табл. 1.13. Это число стоит на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_1 последней таблицы. В результате получаем значения искомых элементов

$$18 - 12 \cdot (3/4) = 9;$$

$$5 - 3 \cdot (3/4) = 11/4.$$

Число $z_1 - c_1$ в 4-й строке столбца вектора P_1 табл. 1.13 можно найти двумя способами:

1) по формуле $z_1 - c_1 = (C, P_1) - c_1$ имеем $0 \cdot 9 + 16 \cdot 3/4 + 0 \times \times 11/4 - 9 = 3$;

2) по правилу треугольника получим: $-9 - (-16) \cdot (3/4) = 3$.

Аналогично находим элементы столбца вектора P_2.

Элементы столбца вектора P_5 вычисляем по правилу треугольника. Однако построенные для определения этих элементов треугольники выглядят иначе.

При вычислении элемента 1-й строки указанного столбца получается треугольник, образованный числами 0, 12 и 1/8. Следовательно, искомый элемент равен

$$0 - 12 \cdot (1/8) = -3/2.$$

Элемент, стоящий в 3-й строке данного столбца, равен

$$0 - 3 \cdot (1/8) = -3/8.$$

По окончании расчета всех элементов табл. 1.13 в ней получены новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_j $(j = \overline{1, 6})$ через базисные векторы P_4, P_3, P_6 и значения Δ'_j и F'_0. Как видно из этой таблицы, новым опорным планом задачи является план $X = (0, 0, 24, 72, 0, 108)$. При данном плане производства изготовляется 24 изделия C и остаются не использованными 72 кг сырья I вида и 108 кг сырья III вида. Стоимость всей производимой при этом плане продукции равна 384 у.е. Указанные числа записаны в столбце вектора P_0 табл. 1.13. Как видно, данные этого столбца по-прежнему представляют собой параметры рассматриваемой задачи, хотя они претерпели значительные изменения. Изменились данные и других столбцов, а их экономическое содержание стало более сложным. Так, например, возьмем данные столбца вектора P_2. Число 1/2 во 2-й строке этого столбца показывает, на сколько следует уменьшить изготовление изделий *C*, если запланировать выпуск одного изделия *B*. Числа 9 и 3/2 в 1-й и 3-й строках вектора P_2 показывают соответственно, сколько потребуется сырья I и II вида при включении в план производства одного изделия *B*, а число −2 в 4-й строке показывает, что если будет запланирован выпуск одного изделия *B*, то это обеспечит увеличение выпуска продукции в стоимостном выражении на 2 у.е. Иными словами, если включить в план производства продукции одно изделие *B*, то это потребует уменьшения выпуска изделия *C* на 1/2 ед. и потребует дополнительных затрат — 9 кг сырья I вида и 3/2 кг сырья III вида, а общая стоимость изготовляемой продукции в соответствии с новым оптимальным планом возрастет на 2 у.е. Таким образом, числа 9 и 3/2 выступают как бы новыми "нормами" затрат сырья I и III вида на изготовление одного изделия *B* (как видно из табл. 1.12, ранее они были равны 15 и 3), что объясняется уменьшением выпуска изделий *C*.

Такой же экономический смысл имеют и данные столбца вектора P_1 табл. 1.13. Несколько иное экономическое содержание имеют числа, описанные в столбце вектора P_5. Число 1/8 во 2-й строке этого столбца показывает, что увеличение объемов сырья II вида на 1 кг позволило бы увеличить выпуск изделий *C* на 1/8 ед. Одновременно потребовалось бы дополнительно 3/2 кг сырья I вида и 3/8 кг сырья III вида. Увеличение выпуска изделий *C* на 1/8 ед. приведет к росту выпуска продукции на 2 у.е.

Из изложенного выше экономического содержания данных табл. 1.13 следует, что найденный на II итерации план задачи не является оптимальным. Это видно и из 4-й строки табл. 1.13, поскольку в столбце вектора P_2 этой строки стоит отрицательное число −2. Значит, в базис следует ввести вектор P_2, то есть в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий *B*. При определении возможного числа изготовления изделий *B* следует учитывать имеющееся количество сырья каждого вида, а именно: возможный выпуск изделий *B* определяется $\min(b'_i/a'_{i2})$ для $a'_{i2} > 0$, то есть находим

$$\Theta_0 = \min\left\{\frac{72}{9};\quad \frac{24\cdot 2}{1};\quad \frac{108\cdot 2}{3}\right\} = \frac{72}{9} = 8.$$

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор P_2. Иными словами, выпуск изделий B ограничен имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида. С учетом имеющихся объемов этого сырья предприятию следует изготовить 8 изделий B. Число 9 является разрешающим элементом, а столбец вектора P_2 и 1-я строка табл. 1.13 являются направляющими. Составляем таблицу III итерации (табл. 1.14).

Таблица 1.14

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	−1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

В табл. 1.14 сначала заполняем элементы 1-й строки, которая представляет собой строку вновь вводимого в базис вектора P_2. Элементы этой строки получаем из элементов 1-й строки табл. 1.13 делением последних на разрешающий элемент (то есть на 9). При этом в столбце $C_б$ данной строки записываем $c_2 = 10$.

Затем заполняем элементы столбцов векторов базиса и по правилу треугольника вычисляем элементы остальных столбцов. В результате в табл. 1.14 получаем новый опорный план $X = (0, 8, 20, 0, 0, 96)$ и коэффициенты разложения векторов P_j ($j = \overline{1, 6}$) через базисные векторы P_2, P_3, P_6 и соответствующие значения Δ''_j и F''_0.

Проверяем, является ли данный опорный план оптимальным. Для этого рассмотрим 4-ю строку табл. 1.14. В этой строке среди чисел Δ''_j нет отрицательных. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{max} = 400$.

Следовательно, план выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий B и 20 изделий C, является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и II видов и остаются не использованными 96 кг сырья II вида, а стоимость производимой продукции равна 400 у.е.

Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий A. Введение в план выпуска продукции изделий вида A привело бы к уменьшению указанной общей стоимости. Это видно из 4-й строки столбца вектора P_1, где число 5 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия A приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 5 у.е.

Решение данного примера симплексным методом можно было бы проводить, используя лишь одну таблицу (табл. 1.15). Здесь последовательно записаны одна за другой все три итерации вычислительного процесса.

Таблица 1.15

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	–9	–10	–16	0	0	0
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	–3/8	1
4			384	3	–2	0	0	2	0
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

1.42. Найти максимум функции

$$F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1, 6}).$$

Решение. Систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \; P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \; P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \; P_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}; \; P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; P_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Так как среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеются три единичных вектора, то для данной задачи можно непосредственно найти опорный план. Таковым является план $X = (0, 0, 20, 24, 0, 18)$. Составляем симплексную таблицу (табл. 1.16) и проверяем, является ли данный опорный план оптимальным.

0, 18). Составляем симплексную таблицу (табл. 1.16) и проверяем, является ли данный опорный план оптимальным.

Таблица 1.16

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	20	−2	1	1	0	1	0
2	P_4	0	24	−1	−2	0	1	3	0
3	P_6	0	18	3	−1	0	0	−12	1
4			0	−2	6	0	0	−5	0

Как видно из табл. 1.16, исходный опорный план не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану. Это можно сделать, так как в столбцах векторов P_1 и P_5, 4-я строка которых содержит отрицательные числа, имеются положительные элементы. Для перехода к новому опорному плану введем в базис вектор P_5 и исключим из базиса вектор P_4. Составляем таблицу II итерации (табл. 1.17).

Таблица 1.17

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	12	−5/3	5/3	1	−1/3	0	0
2	P_5	5	8	−1/3	−2/3	0	1/3	1	0
3	P_6	0	114	−1	−9	0	4	0	1
4			40	−11/3	8/3	0	5/3	0	0

Как видно из табл. 1.17, новый опорный план задачи не является оптимальным, так как в 4-й строке столбца вектора P_1 стоит отрицательное число — −11/3. Поскольку в столбце этого вектора нет положительных элементов, данная задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений.

1.43. Найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

и дать геометрическую интерпретацию процесса решения.

Р е ш е н и е. Систему уравнений задачи запишем в векторной форме

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Так как среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 имеются три единичных вектора P_3, P_4, P_5, то для данной задачи можно непосредственно написать опорный план и, следовательно, найти ее решение симплексным методом (табл. 1.18).

Т а б л и ц а 1.18

i	Базис	$C_б$	P_0	2	1	−1	1	−1
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	−1	5	1	1	1	0	0
2	P_4	1	9	2	1	0	1	0
3	P_5	−1	7	1	2	0	0	1
4			−3	−2	−3	0	0	0
1	P_3	−1	3/2	1/2	0	1	0	−1/2
2	P_4	4	11/2	3/2	0	0	1	−1/2
3	P_2	1	7/2	1/2	1	0	0	1/2
4			15/2	−1/2	0	0	0	3/2
1	P_1	2	3	1	0	2	0	−1
2	P_4	1	1	0	0	−3	1	1
3	P_2	1	2	0	1	−1	0	1
4			9	0	0	1	0	1

Из табл. 1.18 видно, что $X^* = (3, 2, 0, 1, 0)$ является оптимальным планом исходной задачи. При этом плане значение линейной формы равно $F_{\max} = 9$.

Дадим геометрическую интерпретацию процесса нахождения решения задачи. Для этого прежде всего перейдем от исходной задачи, система ограничений которой содержит уравнения, к задаче, система ограничений которой включает лишь неравенства. Это сделать нетрудно, так как исходная задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции

$$F = -3 + 2x_1 + 3x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 7, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Целевая функция исходной задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_3, x_4, x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений.

Решение последней задачи можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1.9). Исходный опорный план задачи $X = (0, 0, 5, 9, 7)$ соответствует на рис. 1.9 точке O. После II итерации был получен новый опорный план $X = (0, 7/2, 3/2, 11/2, 0)$, которому соответствует точка A. На рисунке переход от одного опорного плана к другому показан стрелкой, указывающей направление перехода. После III итерации получен опорный план $X^* = (3, 2, 0, 1, 0)$, соответствующий точке B, то есть осуществлен переход от точки A к точке B. Полученный на данной итерации опорный план является оптимальным.

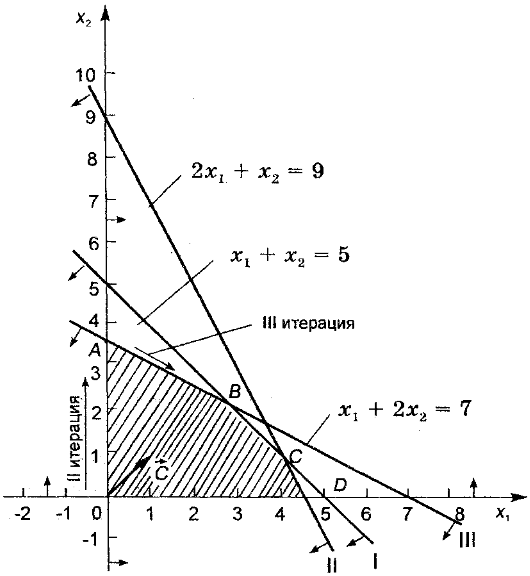


Рис. 1.9

2. Метод искусственного базиса. Как показано выше, для задачи, записанной в форме основной задачи линейного программирования, можно непосредственно указать ее опорный план, если среди векторов P_j, компонентами которых служат коэффициенты при неизвестных в системе уравнений данной задачи, имеется m единичных. Однако для многих задач линейного программирования, записанных в форме основной задачи и имеющих опорные планы, среди векторов P_j не всегда есть m единичных. Рассмотрим такую задачу.

Пусть требуется найти максимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.32}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.33}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{1.34}$$

где $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$, $m < n$ и среди векторов

$$P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \ldots; P_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

нет m единичных.

Определение 1.13. Задача, состоящая в определении максимального значения функции

$$\overline{F} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \tag{1.35}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{1.36}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n+m}), \tag{1.37}$$

где M — некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается, называется *расширенной задачей* по отношению к задаче (1.32)—(1.34).

Расширенная задача имеет опорный план

$$\overline{X} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ нулей}}, b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

определяемый системой единичных векторов $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$, образующих базис m-го векторного пространства, который называется *искусственным*. Сами векторы, так же, как и переменные x_{n+i} $(i = \overline{1, m})$, называются *искусственными*. Так как расширенная задача имеет опорный план, то ее решение может быть найдено симплексным методом.

Теорема 1.8. *Если в оптимальном плане* $\overline{X}^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, x^*_{n+1}, \ldots, x^*_{n+m})$ *расширенной задачи (1.35)—(1.37) значения искусственных переменных* $x^*_{n+i} = 0$ $(i = \overline{1, m})$, *то* $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$ *является оптимальным планом задачи (1.32)—(1.34).*

Таким образом, если в найденном оптимальном плане расширенной задачи значения искусственных переменных равны нулю, то тем самым получен оптимальный план исходной задачи. Поэтому остановимся более подробно на нахождении решения расширенной задачи.

При опорном плане $\overline{X} = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ расширенной задачи значение линейной формы есть $\overline{F}_0 = -M\sum_{i=1}^{m} b_i$, а значения $\Delta_j = z_j - c_j$ равны $-M\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j$. Таким образом, F_0 и разности $z_j - c_j$ состоят из двух частей, одна из которых зависит от M, а другая — нет.

После вычисления F_0 и Δ_j их значения, а также исходные данные расширенной задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. При этом в $(m + 2)$-ю строку помещают коэффициенты при M, а в $(m + 1)$-ю — слагаемые, не содержащие M.

При переходе от одного опорного плана к другому в базис вводят вектор, соответствующий наибольшему по абсолютной величине отрицательному числу $(m + 2)$-й строки. Искусственный вектор, исключенный из базиса в результате некоторой итерации, в дальнейшем не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов, и, следовательно, преобразование столбцов этого вектора излишне. Однако если нужно найти решение двойственной задачи для данной задачи (о чем будет сказано в § 1.6), то такое преобразование необходимо. Может случиться так, что в результате некоторой итерации ни один из искусственных векторов из базиса не будет исключен.

Пересчет симплекс-таблиц при переходе от одного опорного плана к другому производят по общим правилам симплексного метода.

Итерационный процесс по $(m + 2)$-й строке ведут до тех пор, пока:

1) либо все искусственные векторы не будут исключены из базиса;

2) либо не все искусственные векторы исключены, но $(m + 2)$-я строка не содержит больше отрицательных элементов в столбцах векторов $P_1, P_2, \ldots, P_{n+m}$.

В первом случае базис отвечает некоторому опорному плану исходной задачи и определение ее оптимального плана продолжают по $(m + 1)$-й строке.

Во втором случае, если элемент, стоящий в $(m + 2)$-й строке столбца вектора P_0, отрицателен, исходная задача не имеет решения; если же он равен нулю, то найденный опорный план исходной задачи является вырожденным и базис содержит по крайней мере один из векторов искусственного базиса.

Если исходная задача содержит несколько единичных векторов, то их следует включить в искусственный базис.

Следовательно, процесс нахождения решения задачи (1.32)—(1.34) методом искусственного базиса включает четыре основных этапа.

1°. Составляют расширенную задачу (1.35)—(1.37).

2°. Находят опорный план расширенной задачи.

3°. С помощью обычных вычислений симплекс-метода исключают искусственные векторы из базиса. В результате либо находят опорный план исходной задачи (1.32)—(1.34), либо устанавливают ее неразрешимость.

4°. Используя найденный опорный план задачи (1.32)—(1.34), либо находят симплекс-методом оптимальный план исходной задачи, либо устанавливают ее неразрешимость.

1.44. Найти минимум функции

$$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4}).$$

Р е ш е н и е. Запишем данную задачу в форме основной задачи: найти максимум функции

$$F_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6}).$$

В системе уравнений последней задачи рассмотрим векторы из коэффициентов при неизвестных

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 только два единичных (P_4 и P_5). Поэтому в левую часть третьего уравнения системы ограничений задачи добавим дополнительную неотрицательную переменную x_7 и рассмотрим расширенную задачу, состоящую в максимизации функции

$$\overline{F}_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 7}).$$

Расширенная задача имеет опорный план $\overline{X} = (0, 0, 0, 24, 22, 0, 10)$, определяемый системой трех единичных векторов: P_4, P_5, P_7.

Таблица 1.19

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−3	6	1	0	0	−M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	−2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	−1	2	0	0	−1	1
4			24	0	4	−8	0	0	0	0
5			−10	−1	1	−2	0	0	1	0

Составляем таблицу I итерации (табл. 1.19), содержащую пять строк. Для заполнения 4-й и 5-й строк находим $\overline{F}_{10}$ и значения разностей $z_j - c_j$ $(j = \overline{1, 7})$:

$$\overline{F}_{10} = 24 - 10M; \ z_1 - c_1 = 0 - M; \ z_2 - c_2 = 4 + M;$$

$z_3 - c_3 = -8 - 2M$; $z_4 - c_4 = 0$; $z_5 - c_5 = 0$; $z_6 - c_6 = 0 + M$; $z_j - c_j = 0$.

Значения $\overline{F}_{10}$ и $z_j - c_j$ состоят из двух слагаемых, одно из которых содержит M, а другое — нет. Для удобства итерационного процесса число, стоящее при M, записываем в 5-й строке, а слагаемое, которое не содержит M, — в 4-й строке.

В 5-й строке табл. 1.19 в столбцах векторов P_j ($j = \overline{1, 7}$) имеются два отрицательных числа (–1 и –2). Наличие этих чисел говорит о том, что данный опорный план расширенной задачи не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану расширенной задачи. В базис вводим вектор P_3. Чтобы определить вектор, исключаемый из базиса, находим $\Theta = \min(22/4; 10/2) = 10/2$. Следовательно, вектор P_7 исключаем из базиса. Этот вектор не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов, поэтому в дальнейшем столбец данного вектора не заполняется (табл. 1.20 и 1.21).

Составляем таблицу II итерации (табл. 1.20). Она содержит только четыре строки, так как искусственный вектор из базиса исключен.

Таблица 1.20

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1
2	P_5	0	2	–1	4	0	0	1	2
3	P_3	6	5	1/2	–1/2	1	0	0	–1/2
4			64	4	0	0	0	0	–4

Как видно из табл. 1.20, для исходной задачи опорным является план $X = (0, 0, 5, 34, 2, 0)$. Проверим его на оптимальность. Для этого рассмотрим элементы 4-й строки. В этой строке в столбце вектора P_6 имеется отрицательное число (–4). Следовательно, данный опорный план не является оптимальным и может быть улучшен благодаря введению в базис вектора P_6. Из базиса исключается вектор P_5. Составляем таблицу III итерации (табл. 1.21).

Таблица 1.21

i	Базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	–1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

Это означает, что найденный новый опорный план исходной задачи $X^* = (0, 0, 11/2, 35, 0, 1)$ является оптимальным. При этом плане значение линейной формы $F_{\max} = 68$, а $F_{\min} = -68$ при $X^* = (0, 0, 11/2, 35)$. Решение данной задачи можно было бы проводить, используя одну таблицу (табл. 1.22), в которой последовательно записаны все три итерации.

Таблица 1.22

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−3	6	1	0	0	−M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	−2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	−M	10	1	−1	2	0	0	−1	1
4			24	0	4	−8	0	0	0	0
5			−10	−1	1	−2	0	0	1	0
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	−1	
2	P_5	0	2	−1	4	0	0	1	2	
3	P_3	6	5	1/2	−1/2	1	0	0	−1/2	
4			64	4	0	0	0	0	−4	
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0	
2	P_6	0	1	−1/2	2	0	0	1/2	1	
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0	
4			68	2	8	0	0	2	0	

1.45. Найти минимум функции

$$F = 2x_1 - x_2 - x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 36, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 4}).$$

Решение. Запишем данную задачу в форме основной задачи линейного программирования: найти максимум функции

$$F_1 = -2x_1 + x_2 + x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 = 36, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6}).$$

Так как среди векторов

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

имеется только один единичный (P_3), то находим решение расширенной задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$\overline{F}_1 = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 = 36, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1, 8}).$$

Расширенная задача имеет опорный план $X = (0, 0, 10, 0, 0, 0, 18, 36)$, определяемый системой трех единичных векторов: P_3, P_7 и P_8. Составляем таблицу I итерации (табл. 1.23).

Таблица 1.23

i	Базис	$C_б$	P_0	−2	1	0	1	0	0	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_3	0	10	1	−2	1	0	0	0	0	0
2	P_7	$-M$	18	−2	−1	0	−2	−1	0	1	0
3	P_8	$-M$	36	3	2	0	1	0	−1	0	1
4			0	2	−1	0	−1	0	0	0	0
5			−54	−1	−1	0	1	1	1	0	0

В 5-й строке табл. 1.23 в столбцах векторов P_1 и P_2 имеются отрицательные числа. Поэтому переходим к новому опорному плану расширенной задачи. В базис вводим вектор P_2, а из базиса исключаем вектор P_8.

Составляем таблицу II итерации (табл. 1.24). Так как исключенный из базиса искусственный вектор P_8 не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов, то в таблице этот вектор не указывается.

Таблица 1.24

i	Базис	$C_б$	P_0	−2	1	0	1	0	0	−M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	0	46	4	0	1	1	0	−1	0
2	P_7	−M	36	−1/2	0	0	−3/2	−1	−1/2	1
3	P_2	1	18	3/2	1	0	1/2	0	−1/2	0
4			18	7/2	0	0	−1/2	0	−1/2	0
5			−36	1/2	0	0	3/2	1	1/2	0

В 5-й строке табл. 1.24 в столбцах векторов $P_1, P_2, \ldots, P_7$ не содержится отрицательных элементов. В столбце же вектора P_0 этой строки находится отрицательное число (−36). Следовательно, исходная задача не имеет опорного плана.

1.46. Найти максимум функции

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1, 4}).$$

Решение. Запишем данную задачу в форме основной задачи линейного программирования: найти максимум функции

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1, 6}).$$

Среди векторов

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

имеются лишь два единичных (P_4 и P_5). Поэтому находим решение расширенной задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$\overline{F} = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 7}).$$

Расширенная задача имеет опорный план $\overline{X} = (0, 0, 0, 24, 20, 0, 10)$, определяемый системой трех единичных векторов P_4, P_5 и P_7. Составляем таблицу I итерации (табл. 1.25)

Таблица 1.25

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–3	6	1	0	0	–M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	20	1	2	–4	0	1	0	0
2	P_7	–M	10	1	–1	2	0	0	–1	1
3	P_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0
4			24	0	4	–8	0	0	0	0
5			–10	–1	1	–2	0	0	1	0

Из табл. 1.25 видно, что исходный опорный план не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану. В базис вводим вектор P_3, а из базиса исключаем вектор P_7.

Составляем таблицу II итерации (табл. 1.26). Эта таблица содержит только четыре строки, так как искусственный вектор P_7 из базиса исключен.

Из последней таблицы видно, что найденный опорный план исходной задачи $X = (0, 0, 5, 34, 40, 0)$ не является оптимальным, поскольку в 4-й строке столбца вектора P_6 этой таблицы находится отрицательное число (–4). Так как в указанном столбце нет положительных элементов, то данная задача не имеет оптимального плана.

Таблица 1.26

i	Базис	$C_б$	P_0	2	–3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	0	40	3	0	0	0	1	–2
2	P_3	6	5	1/2	–1/2	1	0	0	–1/2
3	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1
4			64	4	0	0	0	0	–4

3. Модифицированный симплекс-метод. При решении задач линейного программирования симплексным методом мы осуществляли упорядоченный переход от одного опорного плана к другому до тех пор, пока не устанавливали неразрешимость задачи либо не находили ее оптимальный план. Чтобы определить, является ли найденный опорный план оптимальным, на каждой из итераций нужно было находить числа

$$\Delta_j = z_j - c_j = c_{i1}x_{i1j} + c_{i2}x_{i2j}, + \ldots + c_{im}x_{imj} - c_j,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — номера базисных векторов, а $x_{i1j}, x_{i2j}, \ldots, x_{imj}$ — коэффициенты разложения векторов P_j по векторам данного базиса.

Коэффициенты мы определяли на каждой из итераций вычислительного процесса. Эти сложности отпадают при решении задач линейного программирования модифицированным симплексным методом. В этом случае на каждой из итераций вычисляют вектор

$$'\Omega = C_б B^{-1}, \tag{1.38}$$

где B^{-1} — матрица, обратная матрице B, составленной из компонент векторов данного базиса.

Затем находят числа Δ_j по формуле

$$\Delta_j = '\Omega P_j - c_j. \tag{1.39}$$

Определим компоненты вектора $'\Omega$ и чисел Δ_j в случае решения основной задачи линейного программирования модифицированным симплекс-методом.

Итак, пусть дана задача линейного программирования, записанная в форме основной задачи, и пусть для нее найден опорный план, который определяется базисом, образованным векторами $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}$. Следовательно, известна матрица B, для которой можно найти обратную матрицу B^{-1}. Дальнейшее вычисление удобнее вести, если результаты, как и при решении задачи симплексным методом, оформлять в виде таблиц. В этом случае при переходе от одной так называемой основной таблицы к другой используется вспомогательная таблица.

Вспомогательная таблица (табл. 1.27) отличается от обычной симплекс-таблицы тем, что в ней содержатся дополнительные столбцы и строки, в которых соответственно записывают координаты векторов $'\Omega^{(i)}$ и значения $\Delta_j^{(i)}$, получаемые в процессе нахождения решения задачи.

Таблица 1.27

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_n	$'\Omega^{(1)}$	$'\Omega^{(2)}$	...	$'\Omega^{(k)}$
				P_1	P_2	...	P_n				
1	P_{i1}	c_{i1}	x_{i10}	x_{i11}	x_{i12}	...	x_{i1n}	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_1^{(2)}$	...	$\lambda_1^{(k)}$
2	P_{i2}	c_{i2}	x_{i20}	x_{i21}	x_{i22}	...	x_{i2n}	$\lambda_2^{(1)}$			$\lambda_2^{(k)}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_{im}	c_{im}	x_{im0}	x_{im1}	x_{im2}	...	x_{imn}	$\lambda_m^{(1)}$	$\lambda_m^{(2)}$	...	$\lambda_m^{(k)}$
$m+1$		$\Delta_j^{(1)}$		$\Delta_1^{(1)}$	$\Delta_2^{(1)}$	...	$\Delta_n^{(1)}$				
$m+2$		$\Delta_j^{(2)}$		$\Delta_1^{(2)}$	$\Delta_2^{(2)}$	...	$\Delta_n^{(2)}$				
...		...		...	...	...	...				
$m+k$		$\Delta_j^{(k)}$		$\Delta_1^{(k)}$	$\Delta_2^{(k)}$	...	$\Delta_n^{(k)}$				

Основная таблица (табл. 1.28) отличается от обычной симплекс-таблицы, во-первых, тем, что вместо столбцов векторов P_j с соответствующими числами C_j записывают столбцы векторов A_i, координатами которых являются соответствующие столбцы матрицы B^{-1}; во-вторых, в $(m + 1)$-й строке записывают компоненты векторов $'\Omega$, а не числа Δ_j; в-третьих, табл. 1.28 имеет один дополнительный столбец, в первых m-строках которого записывают координаты вектора P_s в базисе $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}$, который и было бы целесообразно включить в базис на следующей итерации.

Таблица 1.28

i	Базис	$C_б$	$P0$	A_1	A_2	…	A_m	Ps
1	P_{i1}	c_{i10}	x_{i10}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	x_{i1s}
2	P_{i2}	c_{i20}	x_{i20}	a_{11}	a_{22}	…	a_{2m}	x_{i2s}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	P_{ir}	c_{i2r}	x_{ir0}	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rm}	x_{irs}
…	…	…	…	…	…	…	…	
m	P_{im}	c_{im}	x_{im0}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mm}	x_{ims}
$m+1$		$'\Omega^{(1)}$	F_0	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	…	$\lambda_m^{(1)}$	$\lambda_s^{(2)}$

Чтобы определить вектор P_s, сначала находят вектор $'\Omega^{(1)}$. Его компоненты определяют как скалярное произведение вектора $C_б$ на соответствующие векторы A_i, то есть по формуле (1.38). Найденные компоненты вектора $'\Omega^{(1)}$ записывают в последней строке табл. 1.28 и в столбце $'\Omega^{(1)}$ табл. 1.27. После этого по формуле (1.39) находят элементы $(m + 1)$-й строки вспомогательной таблицы. Если среди найденных чисел $(m + 1)$-й строки вспомогательной таблицы нет отрицательных, то исходный опорный план является оптимальным. Если же таковые есть, то либо задача не имеет решения, либо можно перейти к новому опорному плану, при котором значение целевой функции не уменьшится. Для выяснения этого выбирают среди отрицательных чисел $(m + 1)$-й строки табл. 1.27 наибольшее по абсолютной величине. В том случае, когда таких чисел несколько, берут какое-нибудь одно. Пусть этим числом является $\Delta_j^{(1)}$. Тогда последний столбец табл. 1.28 отводят для вектора P_s. В первых m-строках этого столбца записывают компоненты вектора P_s в базисе $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}$. Они получаются в результате умножения матрицы B^{-1}, записанной в табл. 1.28, на вектор P_s, компоненты которого указаны в табл. 1.27. После определения чисел x_{i1s}, x_{i2s}, …, x_{ims} выясняют, имеются ли среди них положительные или нет. Если таких чисел нет, то задача не имеет решения. Если же положительные числа имеются, то переходят к новому опорному плану задачи.

Для этого находят $\min\limits_{x_{i_k s} > 0}\left(x_{i_k 0} / x_{i_k s}\right)$.

Пусть $\min\limits_{x_{i_k s} > 0}\left(x_{i_k 0} / x_{i_k s}\right) = x_{i_r 0} / x_{i_r s}$. Тогда новый опорный план определяется базисом, получаемым из исходного исключением из него вектора P_{i_r} и введением вместо него вектора P_s. Считая элемент $x_{i_k s}$ разрешающим, а r-ю строку и столбец вектора P_s направляющими, переходят к новой основной таблице. Первые m строк столбцов вектора $P_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ новой таблицы находят по известным правилам перехода от одной симплекс-таблицы к другой, рассмотренным выше. После того как эти элементы определены, находят вектор $'\Omega^{(2)}$. Компоненты этого вектора записывают как в новой основной таблице, так и во вспомогательной таблице (табл. 1.27). Затем вычисляют числа $\Delta_j^{(2)}$ и проверяют новый опорный план на оптимальность. Если план не оптимален, то либо устанавливают неразрешимость исходной задачи, либо переходят к новому опорному плану. Продолжая итерационный процесс, после конечного числа шагов либо находят оптимальный план задачи, либо устанавливают ее неразрешимость.

Таким образом, процесс нахождения решения задачи модифицированным симплекс-методом включает семь этапов.

1°. Находят опорный план задачи.

2°. Вычисляют матрицу B^{-1}, обратную матрице B, составленной из компонент векторов исходного базиса.

3°. Находят вектор $'\Omega = C_б B^{-1}$.

4°. Вычисляют числа $\Delta_j = {}'\Omega P_j - c_j$. Если все Δ_j неотрицательны, то исследуемый опорный план является оптимальным. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то выбирают среди них наибольшее по абсолютной величине. Пусть это Δ_s.

5°. Вычисляют компоненты вектора P_s в исходном базисе. Если среди компонент вектора P_s нет положительных, то целевая функция задачи не ограничена на множестве планов. Если же среди компонент вектора P_s имеются положительные, то переходят к новому опорному плану.

6°. По известным правилам симплекс-метода находят разрешающую строку и вычисляют положительные компоненты нового опорного плана, а также матрицу B^{-1}, обратную матрице B, составленной из компонент векторов нового базиса.

7°. Проверяют новый опорный план на оптимальность и в случае необходимости проводят вычисление, начиная с этапа 3°.

1.47. Решить модифицированным симплексным методом задачу 1.41, состоящую в определении максимального значения функции

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1, 6}).$$

Решение. Данная задача имеет опорный план $X = (0, 0, 0, 360, 192, 180)$, который определяется базисом, образованным векторами P_4, P_5, и P_6. Компоненты этих векторов определяют единичную матрицу B, обратная к которой B^{-1} также является единичной.

Таблица 1.29

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0	$'\Omega^{(1)}$	$'\Omega^{(2)}$	$'\Omega^{(3)}$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6			
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0	0	0	2/9
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0	0	2	5/3
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1	0	0	0
4		$\Delta_j^{(1)}$		−9	−10	−16	0	0	0			
5		$\Delta_j^{(2)}$		3	−2	0	0	2	0			
6		$\Delta_j^{(3)}$		5	0	0	2/9	5/3	0			

Таблица 1.30

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3	P_s
1	P_4	0	360	1	0	0	12
2	P_5	0	192	0	1	0	8
3	P_6	0	180	0	0	1	3
4			0	0	0	0	−16

Составляем вспомогательную и основную таблицы (табл. 1.29 и 1.30). Сначала в табл. 1.29 на основе исходных данных заполняем первые три строки столбцов векторов P_0, P_1, ..., P_6, а в табл. 1.30 — первые три строки столбцов векторов P_0, A_1, A_2, A_3 (элементы столбцов векторов A_1, A_2, A_3 представляют собой соответствующие столбцы матрицы B^{-1}). После этого находим вектор $'\Omega^{(1)}$, компоненты которого запишем в 4-й строке табл. 1.30. Эти числа определяем по формуле (1.38), то есть получаем в результате скалярных произведений вектора $C_б$ на соответствующие векторы A_i:

$$\lambda_1^{(1)} = C_б A_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lambda_2^{(1)} = C_б A_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lambda_3^{(1)} = C_б A_3 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

В 4-й строке табл. 1.30 в столбце вектора P_0 записано также значение целевой функции задачи при исходном опорном плане, которое получено как результат скалярного произведения вектора $C_б$ на вектор P_0

$$F_0 = C_б P_0 = 0 \cdot 360 + 0 \cdot 192 + 0 \cdot 180 = 0.$$

После заполнения 4-й строки табл. 1.30 найденные компоненты вектора $'\Omega^{(1)}$ записываем в табл. 1.29. На основе данных этой таблицы по формуле (1.39) находим числа $\Delta_j^{(1)}$:

$$\Delta_1^{(1)} = {}'\Omega^{(1)} P_1 - C_1 = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 - 9 = -9,$$

$$\Delta_2^{(1)} = {}'\Omega^{(1)} P_2 - C_2 = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 - 10 = -10,$$

$$\Delta_3^{(1)} = {}'\Omega^{(1)} P_3 - C_3 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 3 - 16 = -16,$$

$$\Delta_4^{(1)} = \Delta_5^{(1)} = \Delta_6^{(1)} = 0.$$

Так как среди чисел $\Delta_j^{(1)}$ имеются отрицательные, то исходный опорный план не является оптимальным. Перейдем к новому опорному плану. Вектор, который при этом следует ввести в базис, определяют по наибольшей абсолютной величине отрицательных чисел $\Delta_j^{(1)}$. В данном случае это число -16, которое находится в столбце вектора P_3 табл. 1.29. Поэтому последний столбец табл. 1.30 отводим для вектора P_3. В этом столбце записываем компоненты разложения вектора P_3 по векторам данного базиса. Они определяются в результате умножения матрицы B^{-1} (записанной в табл. 1.30) на матрицу-столбец, элементами которой являются компоненты вектора P_3 (записанные в табл. 1.29):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Если бы среди найденных чисел не было положительных, то задача не имела бы оптимального плана. Поскольку положительные числа имеются, переходим к новому опорному плану. Для этого введем в базис вектор P_3, а исключим из него вектор P_5. Вывод из базиса вектора P_5 обусловлен тем, что $\min (x_{i0}/x_{i3}) = \min (360/12;\ 192/8; 180/3) = 192/8$ достигается при $i = 5$.

Таблица 1.31

i	Базис	C_6	P_0	A_1	A_2	A_3	P_2
1	P_4	0	72	1	–3/2	0	9
2	P_3	16	24	0	1/8	0	2
3	P_6	0	108	0	–3/8	1	3/2
4			384	0	2	0	–2

Считая теперь число 8 разрешающим элементом, а 2-ю строку и столбец вектора P_3 табл. 1.29 — направляющими, переходим к табл. 1.31, в которой элементы первых трех строк столбцов векторов P_0, A_1, A_2 и A_3 найдены с помощью известных правил перехода от одной симплекс-таблицы к другой. После этого находим компоненты вектора $'\Omega^{(2)}$. Их значения получаются в результате скалярного произведения вектора C_6 и соответствующих векторов A_1, A_2 и A_3, компоненты которых записаны в табл. 1.31:

$$\lambda_1^{(2)} = C_6A_1 = 0\cdot 1 + 16\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0,$$
$$\lambda_2^{(2)} = C_6A_2 = 0\cdot(-3/2) + 16\cdot 1/8 + 0\cdot(-3/8) = 2,$$
$$\lambda_3^{(2)} = C_6A_3 = 0\cdot 0 + 16\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$$

Полученные компоненты вектора $'\Omega^{(2)}$ записываем в 4-й строке табл. 1.31 и в соответствующем столбце табл. 1.29. После этого находим числа $\Delta_j^{(2)}$ и записываем их в 5-й строке таблицы. Так как среди чисел $\Delta_j^{(2)}$ есть отрицательное (–2), то найденный опорный план $X = (0,\ 0,\ 24,\ 72,\ 0,\ 108)$ не является оптимальным. Поэтому в табл. 1.31 отводим последний столбец для вектора P_2. Его компоненты в новом базисе определяются в результате умножения матрицы B^{-1} (элементами которой являются числа табл. 1.31, стоящие в столбцах векторов A_1, A_2 и A_3) на матрицу-столбец, элементами которой являются компоненты вектора P_2 (записанные в табл. 1.29):

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & -3/8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Найденные числа записываем в столбце вектора P_2 табл. 1.31. Так как среди этих чисел имеются положительные, то переходим к новому опорному плану (табл. 1.32). Это достигается введением в базис вектора P_2 и исключением из него вектора P_4.

Таблица 1.32

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3
1	P_2	10	8	1/9	−1/6	0
2	P_3	16	20	−1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	−1/6	−1/8	1
			400	2/90	5/3	0

После заполнения первых трех строк табл. 1.32 вычисляем, как и выше, компоненты вектора $'\Omega^{(3)}$, записываем их в 4-й строке табл. 1.32 и в соответствующем столбце табл. 1.29. Затем находим числа. В табл. 1.29 они записаны в 6-й строке. Так как среди них нет отрицательных, то найденный опорный план $X^* = (0, 8, 20, 0, 0, 96)$ является оптимальным. При этом плане целевая функция принимает свое максимальное значение $F_{max} = 400$.

1.48. Найти модифицированным симплекс-методом решение задачи 1.44, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6}).$$

Решение. Для сформулированной задачи нельзя непосредственно написать опорный план. Поэтому рассмотрим расширенную задачу: найти максимум функции

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 7}).$$

Расширенная задача имеет опорный план $X = (0, 0, 0, 24, 22, 0, 10)$, который определяется базисом, образованным векторами P_4, P_5, P_7. Так как эти векторы единичные, то матрица B, составленная из компонент этих векторов, и обратная к ней B^{-1} являются единичными.

Таблица 1.33

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0	$-M$	$'\Omega^{(1)}$	$'\Omega^{(3)}$	$'\Omega^{(3)}$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7			
1	P_4	1	24	2	1	−2	1	0	0	0	1	1	1
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0	0	0	2
3	P_7	$-M$	10	1	−1	2	0	0	−1	1	$-M$	4	0
4		$\Delta_j^{(1)}$		$-M$	$M+4$	$-2M-8$	0	0	M	0			
5		$\Delta_j^{(2)}$		4	0	0	0	0	−4	$4+M$			
6		$\Delta_j^{(3)}$		2	8	0	0	2	0	M			

Таблица 1.34

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3	P_3
1	P_4	1	24	1	0	0	−2
2	P_5	0	22	0	1	0	4
3	P_7	$-M$	10	0	0	1	2
4			$-10M+24$	1	0	$-M$	

Составляем вспомогательную и основную таблицы (табл. 1.33 и 1.34). Затем находим компоненты вектора $'\Omega^{(1)}$, записываем их в 4-й строке табл. 1.33 и в соответствующем столбце табл. 1.34. После этого находим числа $\Delta_j^{(1)}$, записываем их в 4-й строке табл. 1.33. Так как под M понимается некоторое сколь угодно большое положительное число, то среди чисел $\Delta_j^{(1)}$ есть два отрицательных: $-M$ и $(-2M-8)$. Наибольшее по абсолютной величине отрицательное число находится в столбце вектора P_3. Поэтому в последнем столбце табл. 1.34 записываем компоненты разложения вектора P_3 по векторам данного базиса. Вводя в базис вектор P_3 и исключая из него вектор P_7, переходим к новому опорному плану (табл. 1.35).

Таблица 1.35

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3	P_6
1	P_4	1	34	1	0	1	−1
2	P_5	0	2	0	1	−2	2
3	P_3	6	5	0	0	1/2	−1/2
4			64	1	0	4	

Найденный опорный план $X = (0, 0, 5, 34, 2, 0)$ проверяем на оптимальность. Для этого находим вектор $'\Omega^{(2)}$ и определяем числа $\Delta_j^{(2)}$. Так как среди этих чисел есть отрицательные (−4), то в табл. 1.35 заполняем столбец вектора P_6 и переходим к новому опорному плану (табл. 1.36).

Таблица 1.36

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3
1	P_4	1	35	1	1/2	0
2	P_6	0	1	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	0	1/4	0
4			68	1	2	0

Находим вектор $'\Omega^{(3)}$, записываем его компоненты в 4-й строке табл. 1.36 и в соответствующем столбце табл. 1.33. После этого находим числа $\Delta_j^{(3)}$. Эти числа записаны в 6-й строке табл. 1.33. Так как среди указанных чисел нет отрицательных, то найденный опорный план $X^* = (0, 0, 11/2, 35, 0, 1)$ является оптимальным планом исходной задачи. При этом плане целевая функция принимает свое максимальное значение $F_{\max} = 68$.

Сравнивая процессы нахождения решения приведенных выше задач симплексным методом и модифицированным симплексным методом, заключаем, что при использовании последнего метода понадобилось проводить меньше вычислений. Это характерно и для нахождения решения других задач линейного программирования, прежде всего таких, для которых число m существенно меньше, нежели n. Поэтому во многих случаях при выборе метода решения конкретных задач предпочтение отдается модифицированному симплексному методу. При этом для различных форм этого метода разработаны стандартные программы его использования при решении конкретных задач на ЭВМ.

Используя рассмотренные методы, найдите решение задач 1.49—1.64.

1.49. $F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.50. $F = 2x_1 + 3x_3 - x_4 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.51. $F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.52. $F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.53. $F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 34, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.54. $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3})$.

1.55. $F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5})$.

1.56. $F = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.57. $F = -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 8x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 6x_5 + x_6 = 60, \\ 7x_1 + 17x_2 + 26x_3 + 31x_4 - 35x_5 + 6x_6 = 420, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.58. $F = 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 36, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = 6)$.

1.59. Определить оптимальный план производства изделий по условиям задачи 1.1.

1.60. Определить оптимальный план перевозок груза по условиям задачи 1.4.

1.61. Определить оптимальный план производства продукции кондитерской фабрикой по условиям задачи 1.5.

1.62. На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий (*A*, *B*, *C*, и *D*) может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. 1.37. В ней же указаны имеющееся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида.

Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Таблица 1.37

Артикул ткани	Нормы расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани (м)
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	–	2	1	180
II	–	1	3	2	210
III	4	2	–	4	800
Цена одного изделия (у.е.)	9	6	4	7	

1.63. Предприятие выпускает четыре вида продукции (*A*, *B*, *C* и *D*) и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в табл. 1.38. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Таблица 1.38

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	A	*B*	*C*	*D*	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	–	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	–	340
Прибыль от реализации одного изделия	8	3	2	1	

1.64. Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара (A, B, C и D), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м². При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров A, B, C и D и прибыль от их продажи, которые приведены в табл. 1.39.

Таблица 1.39

Показатели	Товар				Общее количество ресурсов
	A	B	C	D	
Расход рабочего времени на единицу товара (ч)	0,6	0,8	0,6	0,4	840
Использование площади торгового зала на единицу товара (м²)	0,1	0,2	0,4	0,1	180
Прибыль от продажи единицы товара	5	8	7	9	

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли.

§ 1.5. Использование пакета Solver для решения задач линейного программирования

В предыдущих параграфах были рассмотрены методы нахождения решения различных задач линейного программирования. Эти методы определяют алгоритмы решения конкретных задач. Под *алгоритмом* понимается определенное правило, согласно которому установлен соответствующий порядок выполнения действий над исходными данными в целях получения искомых результатов.

Зная алгоритм решения данной конкретной задачи, можно составить программу ее решения на ЭВМ. Однако во многих случаях составление такой программы оказывается излишним, поскольку можно воспользоваться существующими информационными технологиями.

Пакет прикладных программ (ППП) представляет собой набор программ, позволяющий решать определенный класс задач и ориентированный на определенный тип машин. Рассмотрим подробнее наиболее часто используемые для нахождения решения задач линейного программирования пакеты прикладных программ. Одним из них является Solver.

В основе работы пакета Solver лежат итерационные методы поиска решений. Пакет позволяет находить решения задач, имеющих целевую функцию, вычисление которой можно записать в виде формулы в одну из ячеек рабочего листа электронной таблицы.

При этом пакет обеспечивает возможность:

- ♦ использовать одновременно до 200 адресов ячеек, содержащих отыскиваемые значения переменных (параметров);
- ♦ устанавливать конкретный результат для целевой функции и для этого значения отыскивать значения параметров;
- ♦ отыскивать оптимальное значение (минимальное или максимальное) целевой функции, то есть находить одно из наилучших возможных решений;
- ♦ генерировать множество различных решений для сложных задач линейного программирования. При этом возможно сохранение вариантов решений в виде сценариев.

Алгоритм решения задачи линейного программирования сводится к 3 этапам:

1 этап: описание математической модели задачи линейного программирования на рабочем листе электронной таблицы. На этом этапе определяются: а) область ячеек, в которых будут содержаться подбираемые значения неизвестных; б) область данных, содержащих ограничения; в) ячейки, в которые заносятся функции ограничений и целевая функция;

2 этап: подготовка пакета Solver для решения задачи. На этом этапе в пакет передается значение адреса ячейки, содержащей целевую функцию, определяется отыскиваемое оптимальное или конкретное значение целевой функции, указывается диапазон ячеек, содержащий значения неизвестных (он должен быть непрерывным), заносятся все ограничения;

3 этап: решение задачи. На этом этапе уточняются характеристики пакета и осуществляется поиск множества различных решений.

1.65. Рассмотрим алгоритм решения задачи, состоящей в определении плана изготовления изделий A, B и C, обеспечивающего максимальный их выпуск в стоимостном выражении с учетом ограничений на возможное использование сырья трех видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также общее количество сырья данного вида приведены в табл. 1.40.

Таблица 1.40

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (у.е.)	9	10	16	

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий A обозначим через x_1, изделий B — через x_2, изделий C — через x_3. Математическая постановка задачи состоит в определении максимального значения функции

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \tag{1.40}$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \tag{1.41}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,3}). \tag{1.42}$$

Следующим шагом является обращение к пакету Solver.

1 этап. Описание математической модели на рабочем листе электронной таблицы.

Неизвестными в решении данной задачи являются количество изделий типа A (x_1), количество изделий типа B (x_2), количество изделий типа C (x_3). Допустим, что неизвестные параметры будут находиться в ячейках:

x_1 — в ячейке A2;

x_2 — в ячейке B2;

x_3 — в ячейке C2

и их значения первоначально равны 1. Фрагмент оформления приведен на рис. 1.10.

	A	B	C
1	Изделия типа *A*	Изделия типа *B*	Изделия типа *C*
2	1	1	1

Рис. 1.10

Данными в решении этой задачи являются объемы сырья и цены изделий. Допустим, что объем сырья типа I заносится в ячейку D2, объем сырья типа II — в ячейку E2, объем сырья типа III — в ячейку F2. Фрагмент оформления приведен на рис. 1.11.В соответствующие ячейки помещаются цены (фрагмент оформления цен изделий — на рис. 1.12).

	D	E	F
1	Сырье I типа	Сырье II типа	Сырье III типа
2	360	192	180

Рис. 1.11

	D	E	F
3	Цена изделия типа *A*	Цена изделия типа *B*	Цена изделия типа *C*
4	9	10	16

Рис. 1.12

Условиями в решении данной задачи являются выражения (1.41) и (1.42).

Допустим, что функция ограничения

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360$$

рассчитывается в ячейке A4. Тогда в эту ячейку необходимо записать следующую функцию ограничения:

$$= 18 \cdot A2 + 15 \cdot B2 + 12 \cdot C2.$$

По аналогии для второго условия выражения (1.41) допустим, что в ячейку B4 следует записать функцию ограничения

$$= 6 \cdot A2 + 4 \cdot B2 + 8 \cdot C2,$$

а для третьего условия выражения (1.41) в ячейку C4 функцию ограничения

$$= 5 \cdot A2 + 3 \cdot B2 + 3 \cdot C2.$$

Выражение для расчета целевой функции заносится в ячейку A6:

$$= D4 \cdot A2 + E4 \cdot B2 + F4 \cdot C2.$$

2 этап. Подготовка пакета Solver для решения задачи.

На первом шаге необходимо активизировать пакет Solver, для чего в меню Tools (Сервис) выбирают команду Solver (Поиск решения). После активизации диалоговое окно пакета Solver Parameters имеет вид, как на рис. 1.13.

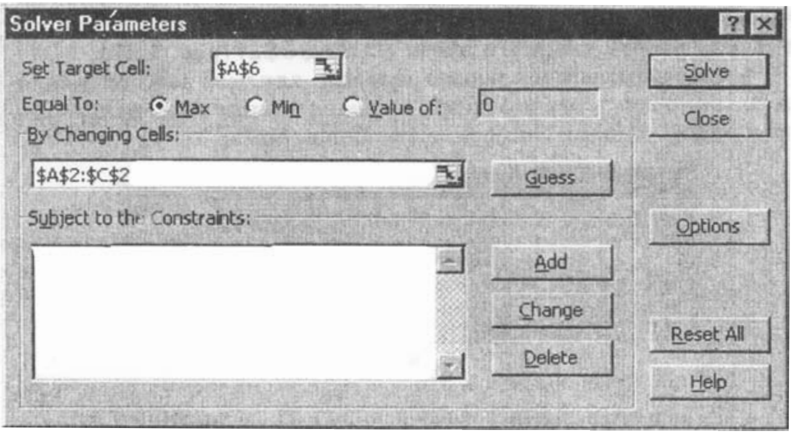


Рис. 1.13

В соответствии с описанием математической модели решаемой задачи, выполненным на 1-м этапе, необходимо:

♦ занести в поле Set Target Cell адрес ячейки (в рассматриваемом случае это $A$6), которая содержит целевую функцию (рис. 1.14);

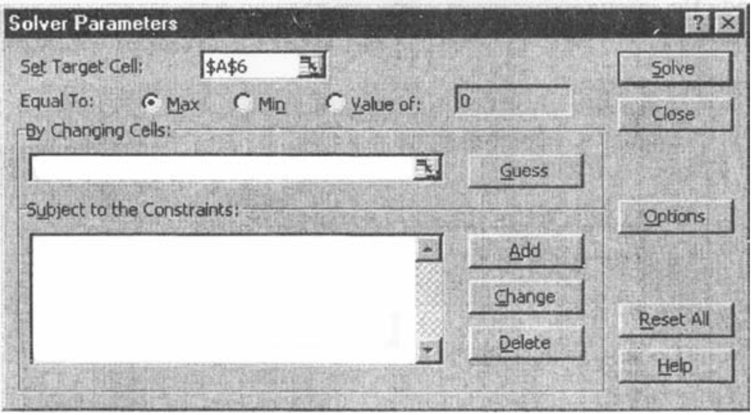


Рис. 1.14

♦ приравнять значение целевой функции максимальному значению, для чего в опции Equal To необходимо выбрать максимальное значение (Max);

♦ установить область ячеек, содержащих подбираемые значения неизвестных, в поле By Changing Cells (в рассматриваемом случае это диапазон ячеек $A$2:$C$2) (рис. 1.13);

♦ ввести ограничивающие условия, для чего вызвать диалоговое окно ввода ограничений, нажав клавишу Add, находящуюся рядом с полем Subject to the Constraints;

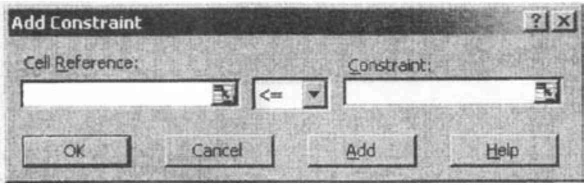


Рис. 1.15

♦ в диалоговом окне Add Constraint в окошко Cell Reference (рис. 1.15) внести адрес ячейки, содержащей функцию ограничения, в окошко Constraint — адрес ячейки, содержащей значение данных по сырью. В среднем окошке выбирается операция отношений ограничивающего условия. Для ввода ограничения по сырью 1 необходимо в окошко Cell Reference внести адрес ячейки A4, в окошко Constraint — адрес D2 и установить операцию отношений (рис. 1.16). Для ввода следующего ограничивающего условия необходимо выполнить щелчок на клавише Add. По окончании ввода всех ограничений список ограничений Subject to the Constraints выглядит следующим образом:

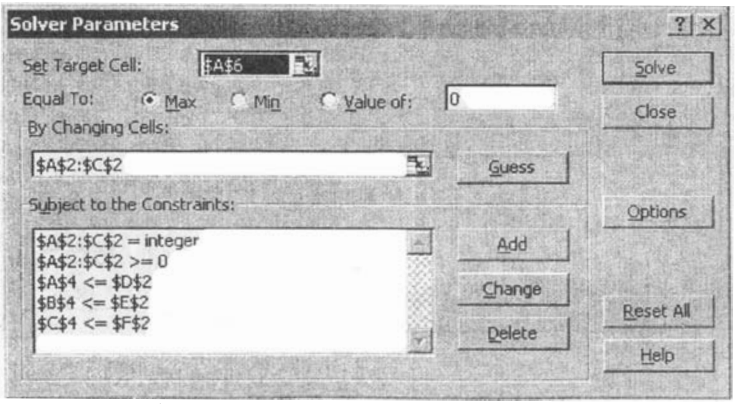


Рис. 1.16

З э т а п. Решение задачи.

Для решения задачи необходимо выполнить щелчок на кнопке Solve, что по окончании решения приведет к появлению диалогового окна результатов поиска решения. Сохранение найденного решения подтверждается нажатием кнопки ОК. На экране появятся результат решения задачи и предложение сохранить полученное решение в качестве сценария.

Из сценария решения задачи видно, что оптимален план, согласно которому следует изготовить 8 изделий типа *B* и 20 изделий типа *C* (табл. 1.41). Общая стоимость изготовляемой продукции — 400 у.е., количество используемого сырья — 360 кг вида I, 192 кг вида II и 84 кг — вида III (что меньше имеющегося на 96 кг).

Таблица 1.41

Изделия типа *A*	Изделия типа *B*	Изделия типа *C*	Сырье I типа	Сырье II типа	Сырье III типа
0	8	20	360	192	180
Количество использованного сырья I типа	Количество использованного сырья II типа	Количество использованного сырья III типа	Цена изделия типа *A*	Цена изделия типа *B*	Цена изделия типа *C*
360	192	84	9	10	16
Целевая функция					
400					

В последующем эту модель можно использовать для разработки планов изготовления продукции при изменении данных по сырью или цене, изменяя их значения в соответствующих ячейках рабочего листа и запуская пакет Solver. При этом уже нет необходимости дополнять пакет Solver новыми условиями. Каждое решение, полученное с помощью Solver, можно сохранить в виде отдельного сценария, присвоив ему имя. В дальнейшем результаты можно просматривать с помощью менеджера сценариев и, анализируя их, принимать соответствующее решение.

Используя пакет Solver, найдите решение задач 1.66—1.76.

1.66. Машиностроительное предприятие для изготовления четырех видов продукции (I, II, III и IV) использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия. Кроме того, сборка изделий требует выполнения определенных сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов ресурсов на изготовление каждого из изделий приведены в табл. 1.42. В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции видов II и III.

Таблица 1.42

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия				Общий объем ресурсов
	I	II	III	IV	
Производительность оборудования (чел.-ч):					
токарного	550	–	620	–	64 270
фрезерного	40	30	20	20	4800
сверлильного	86	110	150	52	22 360
расточного	160	92	158	128	26 240
шлифовального	–	158	30	50	7900
Комплектующие изделия (шт.)	3	4	3	3	520
Сборочно-наладочные работы (чел.-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации одного изделия	315	278	573	370	–
Выпуск (шт.):					
минимальный	–	40	–	–	–
максимальный	–	–	120	–	–

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида I, x_2 изделий вида II, x_3 изделий вида III и x_4 изделий вида IV. Задача состоит в определении максимального значения прибыли (F)

$$F = 315x_1 + 278x_2 + 573x_3 + 370x_4 \tag{1.43}$$

при следующих ограничениях:

а) на имеющийся фонд рабочего времени каждой из групп оборудования:

$$\begin{cases} 550x_1 + 620x_3 \le 64\,270, \\ 40x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 20x_4 \le 4800, \\ 86x_1 + 110x_2 + 150x_3 + 52x_4 \le 22\,360, \\ 160x_1 + 92x_2 + 158x_3 + 128x_4 \le 26\,240, \\ 158x_1 + 30x_3 + 50x_4 \le 7900; \end{cases} \tag{1.44}$$

б) на возможное использование комплектующих изделий:

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 520; \tag{1.45}$$

в) на возможный объем выполнения сборочно-наладочных работ:

$$4{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 4{,}5x_3 + 4{,}5x_4 \leq 720; \tag{1.46}$$

г) на возможный выпуск изделий каждого вида:

$$x_2 \geq 40, \tag{1.47}$$

$$x_3 \leq 120, \tag{1.48}$$

$$x_1,\ x_3,\ x_4 \geq 0. \tag{1.49}$$

Изделие I	Изделие II	Изделие III	Изделие IV		
0	40	103	17		
Прибыль от реализации I изделия (у.е.)					
315	278	573	370		
Объем ресурсов (чел.-ч) для:					
токарного производства	фрезерного производства	сверлильного производства	расточного производства	шлифовального производства	сборочно-наладочных работ
64 270,00	4800,00	22 360,00	26 240,00	7900,00	720,00
Реально использованные ресурсы					
63 860,00	3600,00	20 768,00	22 130,00	3940,00	720,00
объем комплектующих изделий	реально использованные комплектующие				
520,00	520,00				
Целевая функция					
76 429,00					

Рис. 1.17

В результате решения задачи в пакете Solver получены следующие данные: максимум прибыли достигается при изготовлении 40 ед. изделий вида II, 103 ед. изделий вида III и 17 ед. изделий IV вида и соответствует 76 429 у.е. (рис. 1.17).

Ограничивающими ресурсами в данной задаче являются: ресурс комплектующих изделий и ресурс сборочно-наладочных работ.

Используя пакеты прикладных программ, найдите решение задач 1.67—1.76.

1.67. На ткацкой фабрике для изготовления ткани трех артикулов используются ткацкие станки двух типов, пряжа и красители. В табл. 1.43 указаны производительность станков каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 м ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющиеся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Таблица 1.43

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-ч):				
I типа	0,02	–	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа (кг)	1,0	1,5	2,0	15000
Красители (кг)	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1 м ткани (у.е.)	5	8	8	–
Выпуск ткани (м):				
минимальный	1000	2000	2500	–
максимальный	5000	9000	4000	–

Составить такой план изготовления тканей, согласно которому будет произведено нужное количество тканей данного артикула, а общая стоимость всех тканей максимальна.

1.68. $F = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 280, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 80, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 250, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4})$.

1.69. $F = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 2{,}5x_1 - 2{,}375x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 0{,}75x_5 + x_6 \ge 12, \\ 2{,}5x_1 - 0{,}125x_2 + 2x_3 + 2{,}25x_5 + 3x_6 \ge 18, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_4 - 2x_5 + 8x_6 \ge 32, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.70. $F = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 - 2x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 \le 36, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 24, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_5 - x_6 \ge 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \ge 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.71. $F = 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 + 5x_6 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 48, \\ -3x_1 + 4x_3 + 4x_5 + 3x_6 \le 36, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 4x_6 \ge 20, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 30, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

1.72. Для обогрева помещений используют четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, имеющегося в количествах 90, 110, 70, 80 и 150 т. Потребность в топливе каждого из агрегатов соответственно равна 80, 120, 140 и 160 т. Теплотворная способность i-го сорта топлива при использовании его на j-м агрегате задается матрицей

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

1.73. Изготовляемый на пяти заводах кирпич поступает на шесть строящихся объектов. Ежедневное производство кирпича и потребность в нем указаны в табл. 1.44. В ней же указана цена перевозки 1000 шт. кирпича с каждого из заводов к каждому из объектов.

Таблица 1.44

Кирпичный завод	Цена перевозки 1 тыс. шт. кирпича к строящемуся объекту						Производство кирпича (шт.)
	1	2	3	4	5	6	
I	8	7	5	10	12	8	240
II	13	8	10	7	6	13	360
III	12	4	11	9	10	11	180
IV	14	6	12	13	7	14	120
V	9	12	14	15	8	13	150
Потребность в кирпиче (тыс. шт.)	230	220	130	170	190	110	

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

1.74. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в табл. 1.45.

Таблица 1.45

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продукта						
	Мясо	Рыба	Молоко	Масло	Сыр	Крупа	Картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	–	–	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продукта (у.е.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

1.75. Для производства трех видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в табл. 1.46. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объемы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Таблица 1.46

Ресурсы	Нормы затрат на 1 изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (нормо-ч):				
I типа	2	–	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырье (кг):				
1 вида	10	15	20	1495
2 вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (у.е.)	10	15	20	–
Выпуск (шт.):				
минимальный	10	20	25	–
максимальный	20	40	100	–

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготовляемой продукции будет максимальна.

1.76. При производстве четырех видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в табл. 1.47.

Таблица 1.47

Технологическая операция	Нормы затрат времени на обработку 1 км кабеля (ч) вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляций	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11 176
Освинцовывание	3,0	–	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля	1,2	0,8	1,0	1,3	

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции являлась бы максимальной.

§ 1.6. Двойственные задачи линейного программирования

1. Прямая и двойственная задачи. С каждой задачей линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче линейного программирования, состоящей в нахождении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{1.50}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{(k+1)1}x_1 + a_{(k+1)2}x_2 + \dots + a_{(k+1)n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.51}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, l};\ l \le n). \tag{1.52}$$

Определение 1.14. Задача, состоящая в определении минимального значения функции

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \tag{1.53}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_l \ge c_l, \\ a_{(l+1)1}y_1 + a_{(l+1)2}y_2 + \dots + a_{(l+1)m}y_m = c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_n, \end{cases} \tag{1.54}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = \overline{1, k};\ k \le m), \tag{1.55}$$

называется *двойственной* по отношению к задаче (1.50)—(1.52).

Задачи (1.50)—(1.52) и (1.53)—(1.55) образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*.

Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим пяти правилам.

1°. Целевая функция исходной задачи (1.50)—(1.52) задается на максимум, а целевая функция двойственной (1.53)—(1.55) — на минимум.

2°. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad (1.56)$$

составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничения (1.51) исходной задачи (1.50)—(1.52), и аналогичная матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.57)$$

в двойственной задаче (1.53)—(1.55) получаются друг из друга транспонированием (то есть заменой строк столбцами, а столбцов — строками).

3°. Число переменных в двойственной задаче (1.53)—(1.55) равно числу ограничений в системе (1.51) исходной задачи (1.50)—(1.52), а число ограничений в системе (1.54) двойственной задачи — числу переменных в исходной задаче.

4°. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции (1.53) двойственной задачи (1.53)—(1.55) являются свободные члены в системе (1.51) исходной задачи (1.50)—(1.52), а правыми частями в ограничениях системы (1.54) двойственной задачи — коэффициенты при неизвестных в целевой функции (1.50) исходной задачи.

5°. Если переменная X_j исходной задачи (1.50)—(1.52) может принимать только неотрицательные значения, то j-е ограничение в системе (1.54) двойственной задачи (1.53)—(1.55) является неравенством вида " $\geq$ ". Если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j-*е* ограничение в системе (1.54) представляет собой уравнение. Аналогичные связи имеют место между ограничениями (1.51) исходной задачи (1.50)—(1.52) и переменными двойственной задачи (1.53)—(1.55). Если i-е ограничение в системе (1.51) исходной задачи является неравенством, то i-я переменная двойственной задачи $y_i \geq 0$. Если же i-е ограничение есть уравнение, то переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственные пары задач обычно подразделяют на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач ограничения (1.51) прямой задачи и ограничения (1.54) двойственной задачи являются соответственно неравенствами вида " $\leq$ " и " $\geq$ ". Таким образом, переменные обеих задач могут принимать только лишь неотрицательные значения.

1.77. Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \tag{1.58}$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \end{cases} \tag{1.59}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3}). \tag{1.60}$$

Решение. Для данной задачи

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Число переменных в двойственной задаче равно числу уравнений в системе (1.59), то есть равно трем. Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы уравнений (1.59), то есть числа 12, 24, 18.

Целевая функция исходной задачи (1.58)—(1.60) задана на максимум, а система условий (1.59) содержит только уравнения. Поэтому в двойственной задаче целевая функция задается на минимум, а ее переменные могут принимать любые значения (в том числе и отрицательные). Так как все три переменные исходной задачи (1.58)—(1.60) принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе ограничений двойственной задачи должны быть три неравенства вида " $\geq$ ". Следовательно, для задачи (1.58)—(1.60) двойственная задача такова: найти минимум функции

$$F^* = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3$$

при условиях

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3. \end{cases}$$

1.78. Для задачи, состоящей в максимизации функции

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3}),$$

сформулировать двойственную задачу.

Решение. Для данной задачи

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с общими правилами задача, двойственная по отношению к данной, формулируется следующим образом: найти минимум функции

$$F^* = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4, \end{cases}$$

$$y_1, y_3 \geq 0.$$

Сформулируйте двойственные задачи по отношению к задачам 1.79—1.83.

1.79. $F = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 19, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3})$.

1.80. $F = 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 18, \\ 4x_1 - 5x_3 \leq 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 14, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 3})$.

1.81. $F = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 3})$.

1.82. $F = -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 3})$.

1.83. $F = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 8, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 3})$.

1.84.—1.86. Используя математические модели задач 1.1—1.3, построить математические модели двойственных задач.

2. Связь между решениями прямой и двойственной задач. Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной задачей линейного программирования и двойственной к ней.

Исходная задача: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.61)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}), \qquad (1.62)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \qquad (1.63)$$

Двойственная задача: найти минимум функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (1.64)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \ (j = \overline{1, n}). \qquad (1.65)$$

Каждая из задач двойственной пары (1.61)—(1.63) и (1.64)—(1.65) фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при определении симплексным методом или методом искусственного базиса оптимального плана одной из задач находится решение и другой задачи.

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами и теоремами двойственности.

Лемма 1.1. *Если X — некоторый план исходной задачи (1.61)—(1.63),* а Y *— произвольный план двойственной задачи (1.64)—(1.65), то значение целевой функции исходной задачи на плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи на плане Y, то есть $f(X) \leq F^*(Y)$.*

Лемма 1.2. *Если $F(X^*) = F^*(Y^*)$ для некоторых планов X^* и Y^* задач (1.61)—(1.63) и (1.64)—(1.65), то X^* — оптимальный план исходной задачи, а Y^* — оптимальный план двойственной задачи.*

Теорема 1.9 (первая теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач (1.61)—(1.63) или (1.64)—(1.65) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, то есть $F_{max} = F^*_{min}$.*

Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена [для исходной (1.61)—(1.63) — сверху, для двойственной (1.64)—(1.65) — снизу], то другая задача вообще не имеет планов.

Теорема 1.10 (вторая теорема двойственности). *План $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$ задачи (1.61)—(1.63) и план $Y^* = (y^*_1, y^*_2, \ldots y^*_m)$ задачи (1.64)—(1.65) являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого j ($j = \overline{1, n}$) выполняется равенство*

$$\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right] x_j^* = 0.$$

3. Геометрическая интерпретация двойственных задач. Если число переменных в прямой и двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, можно легко найти решение данной пары задач. При этом имеет место один из следующих трех взаимно исключающих друг друга случаев: 1) обе задачи имеют планы; 2) планы имеет только одна задача; 3) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

1.87. Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + 7x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_i + x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

Решение. Двойственной задачей по отношению к исходной является задача, состоящая в определении минимального значения функции

$$F^* = 14y_1 + 8y_2$$

при условиях

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Как в исходной, так и в двойственной задаче число неизвестных равно двум. Следовательно, их решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1.18 и 1.19).

Как видно из рис. 1.18, целевая функция исходной задачи принимает максимальное значение в точке B. Следовательно, $X^* = (2, 6)$ является оптимальным планом, при котором $F_{max} = 46$.

Минимальное значение целевая функция двойственной задачи принимает в точке E (рис. 1.19). Значит, $Y^* = (1, 4)$ является оптимальным планом двойственной задачи, при котором $F^*_{min} = 46$. Таким образом, значения целевых функций исходной и двойственной задач при их оптимальных планах равны между собой.

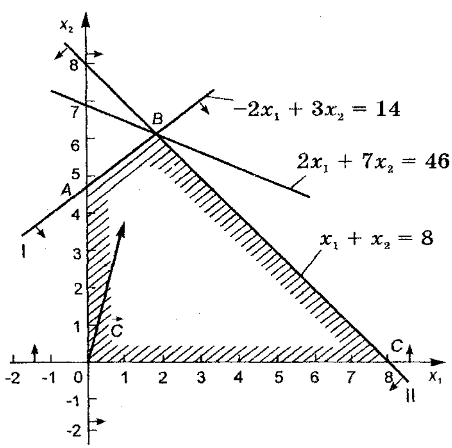


Рис. 1.18

На рис. 1.18 видно, что при всяком плане исходной задачи значение целевой функции не больше 46. Одновременно, как видно на рис. 1.19, значение целевой функции двойственной задачи при любом ее плане не меньше 46. Таким образом, при любом плане исходной задачи значение целевой функции не превос-

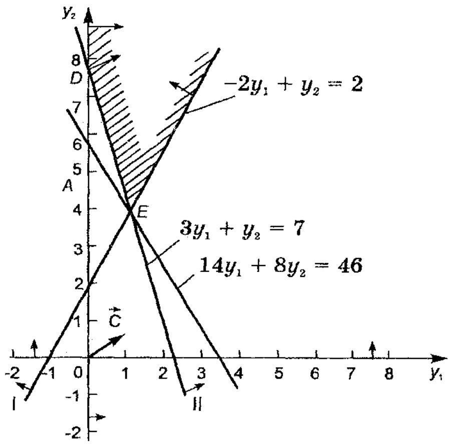


Рис. 1.19

ходит значения целевой функции двойственной задачи при ее произвольном плане.

1.88. Найти решение двойственной пары задач.

Исходная задача:

$$F = -2x_1 - 3x_2 \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Двойственная задача:

$$F^* = 4y_2 + 6y_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 \leq -2, \\ 2y_1 + y_2 \leq -3, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Решение. Как исходная, так и двойственная задача содержат по две переменные. Поэтому их решение находим, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1.20 и 1.21). На рис. 1.20 видно, что исходная задача не имеет оптимального плана из-за неограниченности снизу ее целевой функции на множестве допустимых решений.

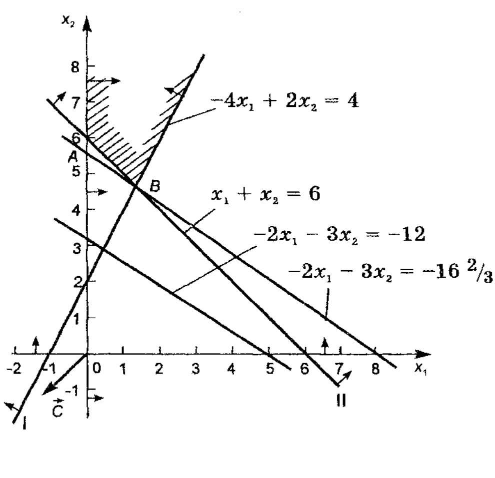


Рис. 1.20

Из рис. 1.21 следует, что двойственная задача не имеет планов, поскольку ее многоугольник решений пуст. Это означает, что если исходная задача

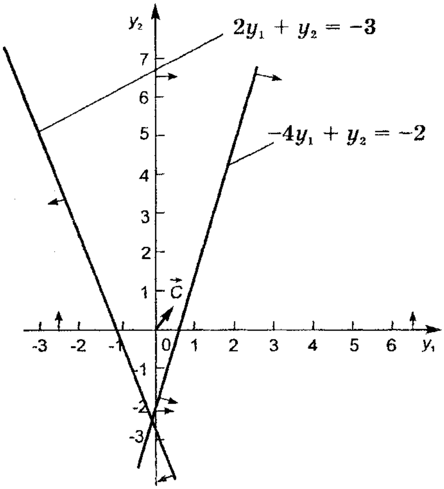


Рис. 1.21

двойственной пары не имеет оптимального плана из-за неограниченности на множестве допустимых решений ее целевой функции, то двойственная задача не имеет планов.

4. Нахождение решения двойственных задач. Рассмотрим пару двойственных задач — основную задачу линейного программирования (1.61)—(1.63) и двойственную к ней задачу (1.64)—(1.65).

Предположим, что с помощью симплексного метода или метода искусственного базиса найден оптимальный план X^* задачи (1.61)—(1.63) и этот план определяется базисом, образованным векторами P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im}.

Обозначим через $C_б = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{im})$ матрицу-строку, составленную из коэффициентов при неизвестных в целевой функции (1.61) задачи (1.61)—(1.63), а через P^{-1} — матрицу, обратную матрице P, составленной из компонент векторов P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im} базиса. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.11. *Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план X^*, то $Y^* = C_б P^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.*

Таким образом, если найти симплексным методом или методом искусственного базиса оптимальный план задачи (1.61)—(1.63), то, используя последнюю симплекс-таблицу, можно определить $C_б$ и P^{-1} и с помощью соотношения $Y^* = C_б P^{-1}$ найти оптимальный план двойственной задачи (1.64)—(1.65).

В том случае, когда среди векторов P_1, P_2, ..., P_n, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (1.62), имеются m единичных, указанную матрицу P^{-1} образуют числа первых m строк последней симплекс-таблицы, стоящие в столбцах данных векторов. Тогда нет необходимости определять оптимальный план двойственной задачи умножением $C_б$ на P^{-1}, поскольку компоненты этого плана совпадают с соответствующими элементами $(m + 1)$-й строки столбцов единичных векторов, если данный коэффициент $c_j = 0$, и равны сумме соответствующего элемента этой строки и c_j, если $c_j \neq 0$.

Сказанное выше справедливо и для симметричной пары двойственных задач. При этом, так как система ограничений исходной задачи содержит неравенства вида "$\leq$", то компоненты оптимального плана двойственной задачи совпадают с соответствующими числами $(m + 1)$-й строки последней симплекс-таблицы решения исходной задачи. Указанные числа стоят в столбцах векторов, соответствующих дополнительным переменным.

1.89. Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

составить двойственную задачу и найти ее решение.

Р е ш е н и е. Двойственная задача по отношению к исходной состоит в нахождении минимума функции

$$F^* = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3$$

при условиях

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Чтобы найти решение двойственной задачи, сначала находим решение исходной задачи методом искусственного базиса. Оно приведено в табл. 1.48.

Т а б л и ц а 1.48

i	Базис	$C_б$	P_0	1	2	−1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	P_4	0	12	−1	4	−2	1	0	0
2	P_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	P_6	$-M$	4	2	−1	2	0	0	1
4			0	−1	−2	1	0	0	0
5			−4	−2	1	−2	0	0	0
1	P_4	0	14	0	7/2	−1	1	0	1/2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	P_5	0	15	0	3/2	1	0	1	–1/2
3	P_1	1	2	1	–1/2	1	0	0	1/2
4			2	0	–5/2	2	0	0	1/2
1	P_2	2	4	0	1	–2/7	2/7	0	1/7
2	P_5	0	9	0	0	10/7	–3/7	1	–5/7
3	P_1	1	4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7

Из последней симплекс-таблицы видно, что двойственная задача имеет решение $y^*_1 = 5/7$; $y^*_2 = 0$; $y^*_3 = 6/7$.

Оптимальные двойственные оценки удовлетворяют всем условиям двойственной задачи. При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи, равное $F^*_{\min}=12 \cdot (5/7) + 17 \cdot 0 + 4 \cdot (6/7) = 12$, совпадает с максимальным значением целевой функции $F_{\max}$ исходной задачи.

5. Экономическая интерпретация двойственных задач. Экономическую интерпретацию двойственных задач и двойственных оценок рассмотрим на конкретном примере.

1.90. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* требуется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в табл. 1.49.

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальной, а суммарная оценка сырья, необходимого для производства единицы продукции каждого вида, — не меньше цены единицы продукции данного вида.

Таблица 1.49

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (у.е.)	10	14	12

Р е ш е н и е. Предположим, что производится x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C. Для определения оптимального плана производства нужно решить задачу, состоящую в максимизации целевой функции

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \tag{1.66}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases} \tag{1.67}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{1.68}$$

Припишем каждому из видов сырья, используемых для производства продукции, двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2, и y_3. Тогда общая оценка сырья, используемого на производство продукции, составит

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min \tag{1.69}$$

Согласно условию двойственные оценки должны быть такими, чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше цены единицы продукции данного вида, то есть y_1, y_2, и y_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases} \tag{1.70}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0. \tag{1.71}$$

Как видно, задачи (1.66)—(1.68) и (1.69)—(1.71) образуют симметричную пару двойственных задач. Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий A, B и C, а решение двойственной — оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этих изделий. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой-либо одной из них. Так как система ограничений задачи (1.66)—(1.68) содержит лишь неравенства вида “ $\le$ ”, то лучше сначала найти решение этой задачи (табл. 1.50).

Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства изделий является такой, при котором изготовляется 82 изделия B и 16 изделий C. При данном плане производства остаются неиспользованными 80 кг сырья II вида, а общая стоимость изделий равна 1340 у.е. Из табл. 1.50 также видно, что оптимальным решением двойственной задачи является $y^*_1 = 23/4$; $y^*_2 = 0$; $y^*_3 = 5/4$.

Таблица 1.50

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
I	P_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
II	P_5	0	80	23/8	0	1	1/8	1	–5/8
III	P_3	12	16	–3/4	0	0	–1/4	0	1/4
			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Переменные y^*_1 и y^*_3 обозначают условные двойственные оценки единицы сырья соответственно I и III видов. Эти оценки отличны от нуля, а сырье I и III видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы сырья II вида равна нулю. Этот вид сырья не полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием сырья. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг. Так, увеличение количества сырья I вида на 1 кг приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 5,75 у.е. и станет равной

$$1340 + 5{,}75 = 1345{,}75 \text{ у.е.}$$

При этом числа, стоящие в столбце вектора P_4 табл. 1.50, показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска изделий B на 5/8 ед. и сокращения выпуска изделий C на 1/4 ед. Вследствие этого использование сырья II вида уменьшится на 1/8 кг. Точно так же увеличение на 1 кг сырья III вида позволит найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 1,25 и составит

$$1340 + 1,25 = 1341,25 \text{ у.е.}$$

Это будет достигнуто в результате увеличения выпуска изделий C на 1/4 ед. и уменьшения изготовления изделий B на 1/8 ед., причем объем используемого сырья II вида возрастет на 5/8 кг.

Продолжим рассмотрение оптимальных двойственных оценок. Вычисляя минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$F^*_{\min} = 180 \cdot (23/4) + 210 \cdot 0 + 244 \cdot (5/4) = 1340,$$

видим, что оно совпадает с максимальным значением целевой функции исходной задачи.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем

$$\begin{cases} 23 + 5/4 > 10, \\ 23/2 + 5/2 = 14, \\ 23/4 + 25/4 = 12. \end{cases}$$

Первое ограничение двойственной задачи выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия вида A, выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать изделия вида A невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом прямой задачи. Второе и третье ограничения двойственной задачи являются равенствами. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы соответственно изделий B и C, равны в точности их ценам. Поэтому выпускать эти два вида продукции по двойственным оценкам экономически целесообразно. Их производство и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

Таким образом, двойственные оценки тесным образом связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи может оказать влияние как на ее оптимальный план, так и на систему оптимальных двойственных оценок. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости.

6. Анализ устойчивости двойственных оценок. Продолжим рассмотрение основной задачи линейного программирования (1.61)—(1.63) и двойственной к ней (1.64)—(1.65).

Предположим, что задача (1.61)—(1.63) имеет невырожденные опорные планы и хотя бы один из них является оптимальным. Максимальное значение целевой функции (1.61) задачи

(1.61)—(1.63) будем рассматривать как функцию свободных членов системы линейных уравнений (1.62)

$$F_{\max}(b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Теорема 1.12. *В оптимальном плане двойственной задачи (1.64)—(1.65) значение переменной y^*_1 численно равно частной производной функции $F_{max}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ по данному аргументу, то есть*

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*. \tag{1.72}$$

Равенство (1.72) означает, что изменение значений величин b_i приводит к увеличению или уменьшению $F_{\max}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Это изменение $F_{\max}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ определяется величиной $|y^*_i|$ и может быть охарактеризовано лишь тогда, когда при изменении величин b_i значения переменных y^*_i в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи (1.64)—(1.65) остаются неизменными. Поэтому представляет интерес определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы линейных уравнений (1.62), в которых оптимальный план двойственной задачи (1.64)—(1.65) не меняется. Это имеет место для всех тех значений $b_i + \Delta b_i$, при которых столбец вектора P_0 последней симплекс-таблицы решения задачи (1.61)—(1.63) не содержит отрицательных чисел, то есть тогда, когда среди компонент вектора

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_n + \Delta b_n \end{bmatrix}$$

нет отрицательных. Здесь P^{-1} — матрица, обратная матрице P, составленной из компонент векторов базиса, который определяет оптимальный план задачи (1.61)—(1.63).

Таким образом, если найдено решение задачи (1.61)—(1.63), то нетрудно провести анализ устойчивости двойственных оценок относительно изменений b_i. Это, в свою очередь, позволяет проанализировать устойчивость оптимального плана задачи (1.64)—(1.65) относительно изменений свободных членов системы линейных уравнений (1.62), оценить степень влияния изменения b_i на максимальное значение целевой функции задачи (1.61)—(1.63) и дает возможность определить наиболее целесообразный вариант возможных изменений b_i.

1.91. Для изготовления четырех видов продукции предприятие использует три типа ресурсов. Нормы расхода ресурсов каждого типа на единицу продукции, их наличие в распоряжении предприятия, а также цена единицы продукции приведены в табл. 1.51.

Таблица 1.51

Тип ресурса	Нормы расхода ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурса
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена единицы продукции (у.е.)	9	6	4	7	

Требуется: **А.** Сформулировать двойственную задачу и найти оптимальные планы прямой и двойственной задач. **Б.** Найти интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям ресурсов каждого типа. **В.** Выявить изменение общей стоимости изготовляемой продукции, определяемой оптимальным планом ее производства при уменьшении количества ресурса I типа на 60 ед. и увеличении количества ресурсов II и III типов соответственно на 120 и 160 ед. **Г.** Провести анализ возможного изменения общей стоимости продукции как при изменении объемов каждого из ресурсов по отдельности, так и при их одновременном изменении в указанных размерах.

Решение. **А.** Предположим, что изделия видов *A*, *B*, *C* и *D* будут произведены соответственно в количествах x_1, x_2, x_3 и x_4. Для определения оптимального плана производства продукции следует найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \qquad (1.73)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ 4x_1 + 2x_3 + 4x_4 \le 800, \end{cases} \qquad (1.74)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4}). \qquad (1.75)$$

Припишем единице каждого из используемых ресурсов двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2 и y_3. Тогда двойственная задача по отношению к задаче (1.73)—(1.75) состоит в определении минимального значения функции

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3 \qquad (1.76)$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 4y_3 \geq 9, \\ y_1 + 2y_3 \geq 6, \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 4, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 7, \end{cases} \qquad (1.77)$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0. \qquad (1.78)$$

Как видно, задачи (1.73)—(1.75) и (1.76)—(1.78) образуют симметричную пару двойственных задач. Решение исходной задачи дает оптимальный план производства изделий видов A, B, C и D, а решение двойственной — оптимальную систему двойственных оценок ресурсов, используемых для производства этих изделий. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой-нибудь одной из них. Так как система ограничений задачи (1.73)—(1.75) содержит лишь неравенства вида "$\leq$", то сначала целесообразно обратиться к ней. Ее решение симплексным методом приведено в табл. 1.52.

Таблица 1.52

i	Базис	$C_б$	P_0	9	6	4	7	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	210	0	1	3	2	0	1	0
3	P_7	0	800	4	2	0	4	0	0	1
4			0	–9	–6	–4	–7	0	0	0
1	P_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	210	0	1	3	2	0	1	0
3	P_7	0	80	0	2	–8	0	–4	0	1
4			1620	0	–6	14	2	9	0	0
1	P_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	170	0	0	7	2	2	1	–1/2
3	P_7	6	40	0	1	–4	0	–2	0	1/2
4			1860	0	0	–10	2	–3	0	3
1	P_1	9	95	1	0	–3/2	0	0	–1/2	1/4
2	P_5	0	85	0	0	7/2	1	1	1/2	–1/4
3	P_2	6	210	0	1	3	2	0	1	0
4			2115	0	0	1/2	5	0	3/2	9/4

Из таблицы видно, что оптимальным является план производства изделий, при котором изготовляется 95 изделий вида A и 210 изделий вида B. При таких условиях общая стоимость изделий равна 2115 у.е. Из табл. 1.52 также видно, что оптимальным планом двойственной задачи является $Y^* = (0,\ 3/2,\ 9/4)$.

Б. Определим теперь интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям ресурсов каждого вида. Для этого найдем компоненты вектора

$$P^{-1}\begin{bmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 180 + \Delta b_1 \\ 210 + \Delta b_2 \\ 800 + \Delta b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 - (1/2)\Delta b_2 + 1/4\Delta b_3 \\ 85 + \Delta b_1 + (1/2)\Delta b_2 - 1/4\Delta b_3 \\ 210 + \Delta b_2 \end{bmatrix}$$

и определим, при каких значениях Δb_1, Δb_2, и Δb_3 они неотрицательны. Прежде чем это сделать, отметим, что матрица P^{-1}, обратная матрице P, составленной из компонент векторов P_1, P_5, и P_2 базиса, который определяет оптимальный план задачи (1.73)— (1.75), записана непосредственно на основании данных табл. 1.52, а именно: элементы матрицы P^{-1} взяты из столбцов векторов P_5, P_6, и P_7, образующих первоначальный единичный базис.

Условие неотрицательности компонент указанного выше вектора приводит к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 95 - (1/2)\Delta b_2 + (1/4)\Delta b_3 > 0, \\ 85 + \Delta b_1 + (1/2)\Delta b_2 - (1/4)\Delta b_3 > 0, \\ 210 + \Delta b_2 > 0. \end{cases} \tag{1.79}$$

Очевидно, если $\Delta b_2 = 0$ и $\Delta b_3 = 0$, то $\Delta b_1 > -85$. Это означает, что если количество ресурсов I типа будет увеличено на произвольное количество или уменьшено в пределах 85 ед., то, несмотря на это, оптимальным планом двойственной задачи (1.76)—(1.78) останется $Y^* = (0,\ 3/2,\ 9/4)$.

Далее, если $\Delta b_1 = 0$ и $\Delta b_3 = 0$, то $-170 < \Delta b_2 < 190$, а если $\Delta b_1 = 0$ и $\Delta b_2 = 0$, то $-380 < \Delta b_3 < 340$. Таким образом, если количество одного из типов ресурсов II или III принадлежит соответственно промежутку $40 < b_2 < 400$ или $420 < b_3 < 1140$, а количество остальных ресурсов остается первоначальным, то двойственная задача (1.76)—(1.78) имеет один и тот же оптимальный план $Y^* = (0,\ 3/2,\ 9/4)$.

Если b_1, b_2, и b_3 изменяются одновременно, то исследование устойчивости двойственных оценок несколько усложняется, поскольку в данном случае нужно найти многогранник решений системы линейных неравенств (1.79). Точки этого многогранника определяют количество ресурсов каждого типа, при которых двойственные оценки остаются прежними.

В. В данной задаче одновременно изменяется количество ресурсов всех трех типов. При этом количество ресурса I типа уменьшается на 60 ед. ($\Delta b_1 = -60$), а количество ресурсов II и III типов соответственно увеличивается на 120 и 160 ед. ($\Delta b_2 = 120$ и $\Delta b_3 = 160$). Следовательно, чтобы выяснить, остается ли $Y^* = (0,\ 3/2,\ 9/4)$ оптимальным планом двойственной задачи (1.76)— (1.78) при указанном изменении количества ресурсов или нет, нужно проверить, удовлетворяют данные значения Δb_1, Δb_2, и Δb_3 системе неравенств (1.79) или нет. Для этого подставим в неравенства (1.79) вместо Δb_1, Δb_2, и Δb_3 их значения −60, 120 и 160:

$$\begin{cases} 95-(1/2)\cdot 120+(1/4)\cdot 160 = 75 > 0, \\ 85-60+(1/2)\cdot 120+(1/4)\cdot 160 = 45 > 0, \\ 210+120 > 0. \end{cases}$$

Следовательно, несмотря на изменение объемов ресурсов в указанных размерах, оптимальным планом двойственной задачи останется $Y^* = (0,\ 3/2,\ 9/4)$. Данное заключение позволяет воспользоваться равенством (1.72) для определения приращения максимального значения функции (1.73) при указанных изменениях количества ресурсов. В этом случае

$$\Delta F_{\max} = y^*_1\Delta b_1 + y^*_2\Delta b_2 + y^*_3\Delta b_3 = 0\cdot(-60) + (3/2)\cdot 120 + (9/4)\cdot 160 = 540.$$

Это означает, что уменьшение количества ресурсов I типа на 60 ед. и увеличение количества ресурсов II и III типов соответственно на 120 и 160 ед. приведет к возможности построения такого плана производства продукции, реализация которого обеспечит выпуск изделий на 540 у.е. больше, чем при плане производства продукции, обусловленном первоначальным количеством ресурсов. Уменьшение количества ресурсов I типа на 60 ед. не повлияет на изменение максимального значения функции, в то время как увеличение количества ресурсов II и III типов на 120 и 160 ед. приведет к увеличению максимального значения функции соответственно на $y^*_2\Delta b_2 = (3/2)\cdot 120 = 180$ и $y^*_3\Delta b_3 = (9/4)\cdot 160 = 360$.

Сформулируйте двойственные задачи по отношению к задачам 1.92—1.97 и найдите их решения.

1.92. $F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 3})$.

1.93. $F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

1.94. $F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 3})$.

1.95. $F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 3})$.

1.96. $F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

1.97. $F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 6})$.

1.98. Сформулировать двойственную задачу по отношению к задаче 1.1 и найти ее решение.

1.99. Найти решение двойственной задачи по отношению к задаче 1.5.

1.100. Сформулировать двойственную задачу по отношению к задаче 1.6 и найти ее решение.

1.101. Найти решение двойственной задачи по отношению к задаче 1.63.

1.102. Сформулировать двойственную задачу по отношению к задаче 1.62 и найти ее решение.

1.103. Сформулировать для задачи 1.41 двойственную задачу. Кроме того:

а) найти оптимальный план двойственной задачи;

б) найти интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям количества сырья каждого типа;

в) определить увеличение максимального значения общей стоимости изготовляемой продукции при увеличении количества сырья всех трех типов соответственно на 30, 40 и 50 кг. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений.

1.104. Для производства продукции трех видов *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в объеме, соответственно не большем, чем 180, 210 и 236 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в табл. 1.53.

Т а б л и ц а 1.53

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (у.е.)	10	14	12

Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальный ее выпуск в стоимостном выражении.

Сформулировать для данной задачи двойственную. Кроме того:

а) найти оптимальный план двойственной задачи;

б) найти интервалы устойчивости двойственных оценок;

в) найти увеличение максимального значения общей стоимости изготовляемой продукции при увеличении количества сырья II и III видов соответственно на 80 и 160 ед. и при уменьшении количества сырья I вида на 40 ед. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений;

г) определить целесообразность в плане производства IV вида изделий, нормы затрат сырья на единицу которого равны 2, 4 и 3 кг, а цена единицы изделия равна 18 у.е.;

д) найти оптимальные планы прямой и двойственной задач, если количество сырья I, II и III видов равно 140, 250 и 244 кг.

7. Двойственный симплекс-метод. Двойственный симплекс-метод, как и симплекс-метод, используется при нахождении решения задачи линейного программирования, записанной в форме основной задачи, для которой среди векторов P_j, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений, имеется m единичных. Вместе с тем двойственный симплекс-метод можно применять при решении задачи линейного программирования, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагались неотрицательными). Такую задачу и рассмотрим теперь, предварительно предположив, что единичными являются векторы P_1, P_2, ..., P_m, то есть рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.80}$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + \ldots + x_nP_n = P_0\ , \tag{1.81}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \qquad (1.82)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; \dots; P_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \dots; P_{m+1} \begin{bmatrix} a_{1_{m+1}} \\ a_{2_{m+1}} \\ a_{3_{m+1}} \\ \dots \\ a_{m_{m+1}} \end{bmatrix}; \dots; P_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}; P_0 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

и среди чисел b_i $(i = \overline{1, m})$ имеются отрицательные.

В данном случае $X = (b_1, b_2, \dots, b_m, \dots, 0, \dots, 0)$ есть решение системы линейных уравнений (1.81). Однако это решение не является планом задачи (1.80)—(1.82), так как среди его компонент имеются отрицательные числа.

Поскольку векторы P_1, P_2, ..., P_m — единичные, каждый из векторов P_j $(j = \overline{1, n})$ можно представить в виде линейной комбинации данных векторов, причем коэффициентами разложения векторов P_j по векторам P_1, P_2, ..., P_m служат числа $x_{ij} = a_{ij}$ $(i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n})$. Таким образом, можно найти

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \ (j = \overline{1, n}).$$

Определение 1.15. Решение $X = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ системы линейных уравнений (1.81), определяемое базисом P_1, P_2, ..., P_m, называется *псевдопланом* задачи (1.80)—(1.82), если $\Delta_j > 0$ для любого j $(j = \overline{1, n})$.

Теорема 1.13. *Если в псевдоплане $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, определяемом базисом P_1, P_2, ..., P_m, есть хотя бы одно отрицательное число $b_j < 0$ такое, что все $a_{ij} \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$, то задача (1.80)—(1.82) вообще не имеет планов.*

Теорема 1.14. *Если в псевдоплане $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, определяемом базисом P_1, P_2, ..., P_m, имеются отрицательные числа $b_j < 0$ такие, что для любого из них существуют числа $a_{ij} < 0$, то можно перейти к новому псевдоплану, при котором значение целевой функции задачи (1.80)—(1.82) не уменьшится.*

Сформулированные теоремы дают основание для построения алгоритма двойственного симплекс-метода.

Итак, продолжим рассмотрение задачи (1.80)—(1.82). Пусть $X = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ — псевдоплан этой задачи. На основе исходных данных составляем симплекс-таблицу (табл. 1.54), в которой некоторые элементы столбца вектора P_0 являются отрицательными числами. Если таких чисел нет, то в симплекс-таблице записан оптимальный план задачи (1.80)—(1.82), поскольку, по предположению, все $\Delta_j \geq 0$. Поэтому для определения оптимального плана задачи (при условии, что он существует) следует производить упорядоченный переход от одной симплекс-таблицы к другой до тех пор, пока из столбца вектора P_0 не будут исключены отрицательные элементы. При этом должны оставаться неотрицательными все элементы $(m + 1)$-й строки, то есть $x_j - c_j \geq 0$ для любого j $(j = \overline{1,\ n})$.

Таблица 1.54

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_l	...	c_m	c_{m+1}	...	c_r	...	c_n
				P_1	P_2	...	P_l	...	P_m	P_{m+1}	...	P_r	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1r}	...	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2r}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
e	P_e	c_e	b_e	0	0		1		0	a_{em+1}	...	a_{er}		a_{en}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	P_i	c_i	b_i	0	0	...	0	...	0	a_{im+1}	...	a_{ir}	...	a_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0		0		1	a_{mm+1}	...	a_{mr}	...	a_{mn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m+1			F_0	0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_r	...	Δ_n

Таким образом, после составления симплекс-таблицы проверяют, имеются ли в столбце вектора P_0 отрицательные числа. Если их нет, то оптимальный план исходной задачи найден. Если же они имеются (что мы и предполагаем), то выбирают наибольшее по абсолютной величине отрицательное число. В том случае, когда таких чисел несколько, берут какое-нибудь одно из них, например число b_i. Выбор этого числа определяет вектор, исключаемый из базиса, то есть в данном случае из базиса выводится вектор P_i. Чтобы определить, какой вектор следует ввести в базис, находим $\min\ (-\Delta_j / a_{ij})$, где $a_{ij} < 0$.

Пусть это минимальное значение принимается при $j = r$, тогда в базис вводят вектор P_r. Число a_{ir} является разрешающим элементом. Переход к новой симплекс-таблице производят по обычным правилам симплексного метода. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока в столбце вектора P_0 не будет больше отрицательных чисел. При этом находят оптимальный план исходной задачи, а следовательно, и двойственной. Если на некотором шаге окажется, что в i-й строке симплекс-таблицы (табл. 1.54) в столбце вектора P_0 стоит отрицательное число

b_i, а среди остальных элементов этой строки нет отрицательных, то исходная задача не имеет решения.

Таким образом, отыскание решения задачи (1.80)—(1.82) двойственным симплекс-методом включает четыре этапа.

1°. Находят псевдоплан задачи.

2°. Проверяют этот псевдоплан на оптимальность. Если псевдоплан оптимален, то решение задачи найдено. В противном случае либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому псевдоплану.

3°. Выбирают разрешающую строку с помощью определения наибольшего по абсолютной величине отрицательного числа столбца вектора P_0 и разрешающий столбец с помощью нахождения наименьшего по абсолютной величине отношения элементов $(m + 1)$-й строки к соответствующим отрицательным элементам разрешающей строки.

4°. Находят новый псевдоплан и повторяют все действия начиная с этапа 2.

1.105. Найти максимальное значение функции

$$F = x_1 + x_2 + 2x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Р е ш е н и е. Запишем исходную задачу линейного программирования в форме основной задачи: найти максимум функции

$$F = x_1 + x_2 + 2x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Умножив второе и третье уравнения системы ограничений последней задачи на −1, переходим к следующей задаче: найти максимум функции

$$F = x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad (1.83)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = 6, \end{cases} \tag{1.84}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1, 5}). \tag{1.85}$$

Составим для последней задачи двойственную. Такой является задача, в результате решения которой требуется найти минимальное значение функции

$$F^* = 8y_1 - 4y_2 - 6y_3 \tag{1.86}$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1, \\ y_1 \geq 2, \end{cases} \tag{1.87}$$

$$y_1, y_3 \geq 0. \tag{1.88}$$

Выбрав в качестве базиса векторы P_3, P_4 и P_5, составим симплексную таблицу (табл. 1.55) для исходной задачи (1.83)—(1.85).

Таблица 1.55

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8	1	1	1	0	0
2	P_4	0	–4	–1	1	0	1	0
3	P_5	0	–6	–1	–2	0	0	1
4			16	1	1	0	0	0

Из этой таблицы видно, что планом двойственной задачи (1.86)—(1.88) является $Y = (2, 0, 0)$. При этом плане $F^* = 16$. Так как в столбце вектора P_0 табл. 1.55 имеются два отрицательных числа (–4 и –6), а в 4-й строке отрицательных чисел нет, то в соответствии с алгоритмом двойственного симплекс-метода переходим к новой симплекс-таблице. (В данном случае это можно сделать, так как в строках векторов P_4 и P_5 имеются отрицательные числа. Если бы они отсутствовали в одной из строк, то задача была бы неразрешима.) Вектор, исключаемый из базиса, определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом, стоящим в столбце вектора P_0. В данном случае это число –6. Следовательно, из базиса исключаем вектор P_5. Чтобы определить, какой вектор необходимо ввести в базис, находим $\min(-\Delta_j/a_{3j})$, где $a_{3j} < 0$. Имеем

$$\min(-\Delta_j/a_{3j}) = \min\,(-1/(-1);\ -1/(-2)) = 1/2.$$

Значит, в базис вводим вектор P_2. Переходим к новой симплекс-таблице (табл. 1.56).

Таблица 1.56

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	5	1/2	0	1	0	1/2
2	P_4	0	–7	–3/2	0	0	1	1/2
3	P_2	1	3	1/2	1	0	0	–1/2
			13	1/2	0	0	0	1/2

Из этой таблицы видно, что получен новый план двойственной задачи $Y = (2, 0, 1/2)$. При этом плане значение ее линейной формы равно $F^* = 13$. Таким образом, с помощью алгоритма двойственного симплекс-метода произведен упорядоченный переход от одного плана двойственной задачи к другому.

Так как в столбце вектора P_0 табл. 1.56 стоит отрицательное число –7, то рассмотрим элементы 2-й строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное –3/2. Если бы такое число отсутствовало, то исходная задача была бы неразрешима. В данном случае переходим к новой симплекс-таблице (табл. 1.57).

Таблица 1.57

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
2	P_1	1	14/3	1	0	0	–2/3	–1/3
3	P_2	1	2/3	0	1	0	1/3	–1/3
4			32/3	0	0	0	1/3	2/3

Как видно из табл. 1.57, найдены оптимальные планы исходной и двойственной задач. Ими являются $X^* = (14/3, 2/3, 8/3)$ и $Y^* = (2, 1/3, 2/3)$. При этих планах значения линейных форм исходной и двойственной задач равны:

$$F_{\max} = F^*_{\min} = 32/3.$$

1.106. Найти максимальное значение функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 6x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Р е ш е н и е. Умножая первое и третье уравнения системы ограничений задачи на −1, в результате приходим к задаче определения максимального значения функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = -18, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}).$$

Взяв в качестве базиса векторы P_3, P_4 и P_5, составляем симплекс-таблицу (табл. 1.58).

Т а б л и ц а 1.58

i	Базис	$C_б$	P_0	2	3	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	−12	2	−1	1	0	0
2	P_4	5	10	1	2	0	1	0
3	P_5	0	−18	−3	2	0	0	1
4			50	30	7	0	0	0

В 4-й строке табл. 1.58 нет отрицательных чисел. Следовательно, если бы в столбце вектора P_0 не было отрицательных чисел, то был бы получен оптимальный план. Поскольку в указанном столбце отрицательные числа имеются и такие же числа содержатся в соответствующих строках, переходим к новой симплекс-таблице (табл. 1.59). Для этого исключим из базиса вектор P_5 и введем в базис вектор P_1. В результате получим псевдоплан $X = (6, 0, -24, 4, 0)$.

Таблица 1.59

i	Базис	$C_б$	P_0	2	3	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	−24	0	1/3	1	0	2/3
2	P_4	5	4	0	8/3	0	1	1/3
3	P_1	0	6	1	−2/3	0	0	−1/3
4			32	0	9	0	0	1

Так как в строке вектора P_3 нет отрицательных чисел, то исходная задача не имеет решения.

Найдите решение задач 1.107—1.117, используя двойственный симплекс-метод.

1.107. $F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

1.108. $F = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

1.109. $F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

1.110. $F = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3x_6 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \ge 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 6})$.

1.111. $F = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \ge 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 5})$.

1.112. $F = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 12, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 16, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

1.113. $F = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30, \end{cases}$$

$x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

1.114. Определить оптимальный рацион для животных по условиям задачи 1.6.

1.115. Из трех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества A, 30 ед. вещества B и 24 ед. вещества C. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в табл. 1.60. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Таблица 1.60

Вид сырья	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	I	II	III	IV
A	1	1	–	4
B	2	–	3	5
C	1	2	4	6
Цена 1кг сырья (у.е.)	5	6	7	4

Составить смесь, содержащую не менее нужного количества веществ данного вида и имеющую минимальную стоимость.

1.116. Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в табл. 1.61.

Таблица 1.61

Длина заготовок (см)	Варианты разреза					
	I	II	III	IV	V	VI
45	2	1	1	–	–	–
35	–	1	–	3	1	–
50	–	–	1	–	1	2
Величина отходов (см)	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

1.117. Из отходов производства предприятие может организовать выпуск четырех видов продукции. Для этого оно планирует использовать два типа взаимозаменяемого оборудования. Количество изделий каждого вида, которое может быть изготовлено на соответствующем оборудовании в течение 1 ч, а также затраты, связанные с производством одного изделия, приведены в табл. 1.62.

Таблица 1.62

Тип оборудования	Количество производимых в течение 1 ч изделий вида				Затраты, связанные с производством в течение 1 ч изделий вида			
	A	*B*	*C*	*D*	*A*	*B*	*C*	*D*
I	8	7	4	5	2,7	2,6	2,7	2,4
II	6	8	6	4	2,6	2,7	2,6	2,5

Оборудование I типа предприятие может использовать не более 80 ч, а оборудование II типа — не более 60 ч.

Учитывая, что предприятию следует изготовить изделий каждого вида соответственно не меньше 240, 160, 150 и 220 ед., определить, в течение какого времени и на каком оборудовании следует изготовлять каждое из изделий так, чтобы получить не менее нужного количества изделий при минимальных затратах на их производство.

§ 1.7. Использование пакетов прикладных программ для послеоптимизационного анализа решения задачи

Рассмотренный выше послеоптимизационный анализ решения задачи линейного программирования имеет большое значение для эффективного использования экономико-математических методов в реальных условиях. При этом использование ЭВМ и ППП позволяет за короткое время и при незначительных затратах находить оптимальный план данной конкретной задачи и проводить послеоптимизационный анализ найденного решения. Это очень важно при принятии управленческих решений, поскольку позволяет выбрать для конкретной ситуации наиболее подходящий вариант решения данной задачи.

1.118. На молочном комбинате для производства двух видов сливочного мороженого и двух видов пломбира требуется молоко натуральное, молоко сухое, молоко сухое обезжиренное, масло сливочное, сахар, молоко сгущенное, молоко сгущенное обезжиренное. Используется оборудование для расфасовки и упаковки мороженого. Нормы затрат указанных ресурсов на производство 1 т мороженого приведены в табл. 1.63. В этой же таблице указана прибыль от реализации 1 т мороженого каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении молочного комбината, а также указаны минимально возможный выпуск сливочного мороженого II вида и максимально возможный — пломбира I вида (эти границы определены на основе установившегося спроса на мороженое).

Определить план производства мороженого молочным комбинатом, обеспечивающий максимальную прибыль от его реализации. Используя пакет Solver, найти решение задачи и провести послеоптимизационный анализ найденного решения.

Таблица 1.63

Ресурсы (кг)	Норма расхода ресурса на 1 т мороженого				Общее количество ресурсов
	сливочного I вида	сливочного II вида	пломбира I вида	пломбира II вида	
Молоко натуральное	550	–	620	–	64 100
Молоко сухое	40	30	20	20	4800
Молоко сухое обезжиренное	30	40	30	30	5200
Масло сливочное	86	110	150	52	22 360
Сахар	160	92	158	128	26 240
Молоко сгущенное	–	–	–	50	800
Молоко сгущенное обезжиренное	–	158	30	50	7910
Производительность оборудования (машино-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации 1 т мороженого	315	278	573	370	–
Выпуск (т):					
минимальный	–	40	–	–	–
максимальный	–	–	120	–	–

1.119—1.122. Используя пакет Solver, провести послеоптимизационный анализ решения задач 1.74—1.76.

1.123. На мебельной фабрике изготовляется пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в табл. 1.64. Здесь же указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объемов может изготовляться каждый вид продукции.

Таблица 1.64

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	Диван-кровать	Кресло-кровать	Тахта	
Трудозатраты (чел.-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина (м^3)	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	–	–	6	4	5	2400
Прибыль от реализации одного изделия	8	10	16	14	12	–
Выпуск (шт.):						
минимальный	120	90	20	40	30	–
максимальный	480	560	180	160	120	–

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от ее реализации является максимальной. Одновременно провести послеоптимизационный анализ решения задачи.

Глава 2

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 2.1. Транспортная задача

1. Математическая постановка задачи. Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через c_{ij} тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i — запасы груза в i-м пункте отправления, через b_j — потребности в грузе в j-м пункте назначения, а через x_{ij} — количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Тогда математическая постановка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j = \overline{1,n}), \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; (i = \overline{1,m}), \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = \overline{1,m}; \overline{1,n}). \tag{2.4}$$

Поскольку переменные x_{ij} $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ удовлетворяют системам линейных уравнений (2.2) и (2.3) и условию неотрицательности (2.4), обеспечиваются доставка необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения, вывоз имеющегося груза из всех пунктов отправления, а также исключаются обратные перевозки.

Определение 2.1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (2.2) и (2.3), определяемое матрицей $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$, называется *планом* транспортной задачи.

Определение 2.2. План $X^* = (x^*_{ij})$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$, при котором функция (2.1) принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записывают в виде таблицы (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	...	b_j	...	b_n	

Очевидно, общее наличие груза у поставщиков равно $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в грузе в пунктах назначения равна единице. Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{2.5}$$

то модель такой транспортной задачи называется *закрытой*. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой*.

Теорема 2.1. *Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, то есть чтобы выполнялось равенство* (2.5).

В случае превышения запаса над потребностью, то есть при

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

вводят фиктивный $(n + 1)$-й пункт назначения с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

и соответствующие тарифы считают равными нулю:

$$c_{in+1} = 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

Полученная задача является транспортной задачей, для которой выполняется равенство (2.5).

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводят фиктивный $(m + 1)$-й пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и соответствующие тарифы полагают равными нулю:

$$c_{m+1j} = 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Этим задача сводится к транспортной задаче с закрытой моделью, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только закрытую модель транспортной задачи. Если же модель конкретной задачи является открытой, то, исходя из сказанного выше, перепишем таблицу условий задачи так, чтобы выполнялось равенство (2.5).

Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно nm, а число уравнений в системах (2.2) и (2.3) равно $n + m$. Так как мы предполагаем, что выполняется условие (2.5), то число линейно независимых уравнений равно $n + m - 1$. Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более $n + m - 1$ отличных от нуля неизвестных.

Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $n + m - 1$, то план является невырожденным, а если меньше — то вырожденным.

Для определения опорного плана существует несколько методов. Три из них — метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод аппроксимации Фогеля — рассматриваются ниже.

Как и для всякой задачи линейного программирования, оптимальный план транспортной задачи является и опорным планом.

Для определения оптимального плана транспортной задачи можно использовать изложенные выше методы. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ее ограничений (каждое неизвестное входит лишь в два уравнения системы (2.2) и (2.3) и коэффициенты при неизвестных равны единице) для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы. Два из них — метод потенциалов и метод дифференциальных рент — рассмотрены ниже.

2.1. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Решение. Обозначим через x_{ij} количество единиц сырья, перевозимого из i-го пункта его получения на j-е предприятие. Тогда условия доставки и вывоза необходимого и имеющегося сырья обеспечиваются за счет выполнения следующих равенств:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 190, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110, \end{cases} \qquad (2.6)$$

При данном плане $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1, 3};\ j = \overline{1, 4})$ перевозок общая стоимость их составит

$$F = 7x_{11} + 8x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 9x_{23} + \\ + 8x_{24} + 9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34}. \qquad (2.7)$$

Таким образом, математическая постановка данной транспортной задачи состоит в нахождении такого неотрицательного решения системы линейных уравнений (2.6), при котором целевая функция (2.7) принимает минимальное значение.

Составьте математические модели транспортных задач 2.2—2.7.

Таблица 2.1.

2.2.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	7	9	200
A_2	5	1	8	12	270
A_3	11	6	4	3	130
Потребности	120	80	240	160	600

Таблица 2.2

2.3.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	2	3	12	180
A_2	3	4	8	7	160
A_3	4	5	6	12	140
A_4	7	1	5	6	220
Потребности	150	250	120	180	700

Таблица 2.3

2.4.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_3
A_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	a_4
A_5	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	a_5
Потребности	b_1	b_2	b_3	b_4	

2.5. На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 90, 60 и 150 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120, 40, 60 и 80 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок являлась бы минимальной.

2.6. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 30, 30, 10 и 20 ед. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов потребителям задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок являлась бы минимальной.

2.7. Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах, соответственно равных 110, 90, 120, 80 и 150 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общие затраты являлись бы минимальными.

2. Определение опорного плана транспортной задачи. Как и при решении задачи линейного программирования симплексным методом, определение оптимального плана транспортной задачи начинают с поиска какого-нибудь ее опорного плана. Как уже отмечалось выше, его находят методом северо-западного угла, методом минимального элемента или методом аппроксимации Фогеля. Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за $n + m - 1$ шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, называемую *занятой*. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из какого-либо пункта отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка).

В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматривают задачу, таблица условий которой содержит на один столбец меньше, чем было перед этим шагом, но то же количество строк и соответственно измененные запасы груза в одном из пунктов отправления (в том, за счет запаса которого была удовлетворена потребность в грузе пункта назначения на данном шаге). Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную клетку, и считают, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности в грузе в пункте назначения, в столбце которого находится заполняемая клетка.

После того как проделаны $m + n - 2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом остается свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребностям оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают $(n + m - 1)$-й шаг и получают искомый опорный план.

Следует заметить, что на некотором шаге (но не на последнем) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (что-нибудь одно). Таким образом, либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребности данного пункта назначения считают равными нулю. Этот нуль записывают в очередную заполняемую клетку. Указанные выше условия гарантируют получение $n + m - 1$ занятых клеток, в которых стоят компоненты опорного плана, что является исходным условием проверки последнего на оптимальность и нахождения оптимального плана.

Метод северо-западного угла. При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} ("северо-западный угол") и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}, то есть идет как бы по диагонали таблицы с севера на запад.

2.8. На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 140, 180 и 160 ед. Этот груз требуется перевезти в пять пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130 и 100 ед. Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов отправления в пункты назначения указаны в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Найти план перевозок данной транспортной задачи методом северо-западного угла.

Решение. Здесь число пунктов отправления $m = 3$, а число пунктов назначения $n = 5$. Следовательно, опорный план задачи определяется числами, стоящими в $5 + 3 - 1 = 7$ заполненных клетках.

Заполнение таблицы начнем с клетки для неизвестного x_{11}, то есть попытаемся удовлетворить потребности первого пункта назначения за счет запасов первого пункта отправления. Так как запасы пункта A_1 больше, чем потребности пункта B_1, то полагаем $x_{11} = 60$, записываем это значение в соответствующей клетке табл. 2.5 и временно исключаем из рассмотрения столбец B_1, считая при этом запасы пункта A_1 равными 80.

Рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_2. Запасы пункта A_1 больше потребностей пункта B_2. Положим $x_{12} = 70$, запишем это значение в соответствующей клетке табл. 2.5 и временно исключим из рассмотрения столбец B_2. В пункте A_1 запасы считаем равными 10 ед. Снова рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_3. Потребности пункта B_3 больше оставшихся запасов пункта A_1. Положим $x_{13} = 10$ и исключим из рассмотрения строку A_1. Значение $x_{13} = 10$ запишем в соответствующую клетку табл. 2.5 и считаем потребности пункта B_3 равными 110 ед.

Таблица 2.5

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 / 60	3 / 70	4 / 10	2	4	140
A_2	8	4	1 / 110	4 / 70	1	180
A_3	9	7	3	7 / 60	2 / 100	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Теперь перейдем к заполнению клетки для неизвестного x_{23} и т.д. Через шесть шагов остается один пункт отправления A_3 с запасом груза 100 ед. и один пункт назначения B_5 с потребностью 100 ед. Соответственно имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, полагая $x_{35} = 100$ (табл. 2.5). В результате получаем опорный план

$$X = \begin{bmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{bmatrix}.$$

Согласно данному плану перевозок общая стоимость перевозок всего груза составляет

$$S = 2 \cdot 60 + 3 \cdot 70 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 110 + 4 \cdot 70 + 7 \cdot 60 + 2 \cdot 100 = 1380 \text{ у.е.}$$

Метод минимального элемента. При использовании метода северо-западного угла на каждом шаге потребности первого из оставшихся пунктов назначения удовлетворялись за счет запасов первого из оставшихся пунктов отправления. Очевидно, выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок, а именно: на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбрать любую из них), и рассмотреть пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке. Сущность метода минимального элемента и состоит в выборе клетки с минимальным тарифом. Следует отметить, что этот метод, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем общая стоимость перевозок при плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла. Поэтому наиболее целесообразно опорный план транспортной задачи находить методом минимального элемента.

2.9. Найти опорный план транспортной задачи 2.1 методом минимального элемента.

Решение. Исходные данные задачи запишем в виде табл. 2.6. Минимальный тариф, равный 1, находится в клетке для переменной x_{13}. Положим $x_{13} = 160$, запишем это значение в соответствующую клетку табл. 2.6 и исключим временно из рассмотрения строку A_1. Потребности пункта назначения B_3 считаем равными 30 ед.

Таблица 2.6

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потребности	120	50	190	110	470

В оставшейся части таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_2, B_3 и B_4 клетка с наименьшим значением тарифа c_{ij} находится на пересечении строки A_3 и столбца B_2, где $c_{32} = 2$. Положим $x_{32} = 50$ и внесем это значение в соответствующую клетку табл. 2.6.

Временно исключим из рассмотрения столбец B_2 и будем считать запасы пункта A_3 равными 120 ед. После этого рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и тремя столбцами B_1, B_3 и B_4. В ней минимальный тариф c_{ij} находится в клетке на пересечении строки A_3 и столбца B_3 и равен 3. Заполним описанным выше способом эту клетку и аналогично заполним (в определенной последовательности) клетки, находящиеся на пересечении строки A_2 и столбца B_1, строки A_3 и столбца B_4, строки A_2 и столбца B_4. В результате получим опорный план

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{bmatrix}.$$

При данном плане перевозок общая стоимость перевозок составляет

$$S = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530 \text{ у.е.}$$

Метод аппроксимации Фогеля. При определении опорного плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

2.10. Используя метод аппроксимации Фогеля, найти опорный план транспортной задачи 2.1, исходные данные которой приведены в табл. 2.7 (опорный план этой задачи ранее был найден методом минимального элемента).

Таблица 2.7

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	8	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

Р е ш е н и е. Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или дополнительной строке табл. 2.8. Так, в строке A_2 минимальный тариф равен 4, а следующий за ним равен 5, разность между ними $5 - 4 = 1$. Точно так же разность между минимальными элементами в столбце B_4 равна $6 - 2 = 4$. Вычислив все эти разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу B_4. В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки A_1 и столбца B_4. Таким образом, эту клетку следует заполнить. Заполнив ее, тем самым мы удовлетворим потребности пункта B_4. Поэтому исключим из рассмотрения столбец B_4 и будем считать запасы пункта A_1 равными $160 - 110 = 50$ ед. После этого определим следующую клетку для заполнения. Снова найдем разности между оставшимися двумя минимальными тарифами в каждой из строк и столбцов и запишем их во втором дополнительном столбце и во второй дополнительной строке табл. 2.8.

Т а б л и ц а 2.8

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы	Разности по строкам					
	B_1	B_2	B_3	B_4							
A_1	7	8	1 50	2 110	160	1	6	–	–	–	–
A_2	4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	1	1	0
A_3	9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	7	–	–
Потребности	120	50	190	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2	–							
	5	3	6	–							
	5	3	–	–							
	0	0	–	–							
	—	0	–	–							

Как видно из таблицы, наибольшая указанная разность соответствует строке A_1. Минимальный тариф в этой строке записан в клетке, которая находится на пересечении ее со столбцом B_3. Следовательно, заполняем эту клетку. Поместив в нее число 50, тем самым предполагаем, что запасы в пункте A_1 полностью исчерпаны, а потребности в пункте B_3 стали равными $190 - 50 = 140$ ед. Исключим из рассмотрения строку A_1 и определим новую клетку для заполнения. Продолжая итерационный процесс, последовательно заполняем клетки, находящиеся на пересечении строки A_3 и столбца B_3, строки A_3 и столбца B_2, строки A_2 и столбца B_1, строки A_2 и столбца B_2. В результате получим опорный план

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом плане общая стоимость перевозок такова:

$$S = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 110 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330 \text{ у.е.}$$

Как правило, применение метода аппроксимации Фогеля позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному, либо сам оптимальный план. Кстати, найденный выше опорный план транспортной задачи является и оптимальным.

Используя методы северо-западного угла, минимального элемента и аппроксимации Фогеля, найдите опорные планы транспортных задач 2.11—2.13.

Таблица 2.9

2.11.

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	2	8	6	115
A_2	3	1	9	7	3	175
A_3	9	6	7	2	1	130
Потребности	70	220	40	30	60	420

Таблица 2.10

2.12.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	7	280
A_2	7	6	2	9	175
A_3	1	3	9	8	125
A_4	2	4	5	6	130
Потребности	90	180	310	130	710

Таблица 2.11

2.13.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	4	7	3	510
A_2	5	6	8	9	90
A_3	7	2	4	8	120
Потребности	270	140	200	110	720

2.14—2.16. Найдите опорные планы транспортных задач 2.5—2.7 методами северо-западного угла, минимального элемента и аппроксимации Фогеля и сравните их между собой.

3. Определение оптимального плана транспортной задачи. Для определения оптимального плана транспортной задачи разработано несколько методов. Однако наиболее часто используются метод потенциалов и метод дифференциальных рент.

Метод потенциалов. Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Для определения опорного плана транспортной задачи будем пользоваться одним из методов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Эти методы гарантируют получение занятых в исходной таблице условий $n + m - 1$ клеток; в некоторых из них могут стоять нули. Полученный план следует проверить на оптимальность.

Теорема 2.2. *Если для некоторого опорного плана $X^* = (x^*_{ij})$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ транспортной задачи существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m, \beta_1, \beta_2,..., \beta_n$, что*

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0, \tag{2.8}$$

$$\beta_j - \alpha_i \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0 \tag{2.9}$$

для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, то $X^* = (x^*_{ij})$ — оптимальный план транспортной задачи.

Определение 2.3. Числа α_i и β_j $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ называются *потенциалами* соответственно пунктов назначения и пунктов потребления.

Сформулированная теорема позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи. Он состоит в следующем. Пусть одним из рассмотренных выше методов найден опорный план транспортной задачи. Для каждого из пунктов отправления и назначения определяют потенциалы α_i и β_j $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$. Эти числа находят из системы уравнений

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \tag{2.10}$$

где c_{ij} — тарифы, стоящие в заполненных клетках таблицы условий транспортной задачи.

Так как число заполненных клеток равно $n + m - 1$, то система (2.10) с $n + m$ неизвестными содержит $n + m - 1$ уравнений. Поскольку число неизвестных превышает на единицу число уравнений, одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу, например $\alpha_1 = 0$, и найти последовательно из уравнений (2.10) значения остальных неизвестных. После того как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток определяют числа $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$.

Если среди чисел $\alpha_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. Если же для некоторой свободной клетки $\alpha_{ij} > 0$, то исходный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого рассматривают все свободные клетки, для которых $\alpha_{ij} > 0$, и среди данных чисел выбирают максимальное. Клетку, которой это число соответствует, следует заполнить.

Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых клеток и связанных с заполненной так называемым циклом.

Определение 2.4. *Циклом* в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья — вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое — в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами. Примеры некоторых циклов показаны на рис. 2.1.

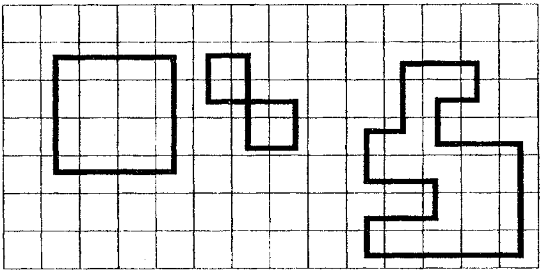


Рис. 2.1

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл. После того как для выбранной свободной клетки он построен, следует перейти к новому опорному плану — переместить грузы в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой. Это перемещение производят по следующим правилам:

1) каждой из клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, приписывают определенный знак, причем свободной клетке — знак плюс, а всем остальным клеткам — поочередно знаки минус и плюс (будем называть эти клетки минусовыми и плюсовыми);

2) в данную свободную клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в плюсовых клетках, и вычитают из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а минусовая клетка, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij}, считается свободной.

В результате указанных выше перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому ее опорному плану называется *сдвигом по циклу пересчета*.

Следует отметить, что при сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным, а именно — остается равным $n + m - 1$. При этом если в минусовых клетках имеется два (или более) одинаковых числа x_{ij}, то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$ для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется положительных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же положительные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Из изложенного выше следует, что процесс нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает пять этапов.

1°. Находят опорный план. При этом число заполненных клеток должно быть равным $n + m - 1$.

2°. Находят потенциалы α_i и β_j соответственно пунктов назначения и отправления.

3°. Для каждой свободной клетки определяют число α_{ij}. Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то получен оптимальный план транспортной задачи; если же они имеются, то переходят к новому опорному плану.

4°. Среди положительных чисел α_{ij} ($\alpha_{ij} > 0$) выбирают максимальное, строят для свободной клетки, которой оно соответствует, цикл пересчета и производят сдвиг по циклу пересчета.

5°. Полученный опорный план проверяют на оптимальность, то есть снова повторяют все действия, начиная с этапа 2°.

В заключение отметим, что при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать в этом случае зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым положительным числом ε и решать задачу как невырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать ε равным нулю.

2.17. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 2.12, найти оптимальный план.

Таблица 2.12

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 / 30	2 / 20	4	1	50
A_2	2	3 / 10	1 / 10	5 / 10	30
A_3	3	2	4 / 10	4 / 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Решение. Сначала, используя метод северо-западного угла, находим опорный план задачи (он записан в табл. 2.12). Найденный опорный план проверяем на оптимальность — находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для определения потенциалов получаем систему

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_2 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_2 - \alpha_2 = 3,$$
$$\beta_3 - \alpha_2 = 1, \quad \beta_4 - \alpha_2 = 5, \quad \beta_4 - \alpha_3 = 4,$$

содержащую шесть уравнений с семью неизвестными. Полагая $\alpha_1 = 0$, находим

$$\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2,\ \alpha_2 = -1,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 4,\ \alpha_3 = 0.$$

Для каждой свободной клетки вычисляем число $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$:

$$\alpha_{13} = -4,\ \alpha_{14} = 3,\ \alpha_{21} = \alpha_{32} = 0,\ \alpha_{31} = -2,\ \alpha_{33} = -4.$$

Заключаем найденные числа в рамки и записываем их в каждую из свободных клеток табл. 2.13.

Так как среди чисел α_{ij} имеются положительные, то построенный план перевозок не является оптимальным и надо перейти к новому опорному плану. Наибольшим среди положительных чисел α_{ij} является $\alpha_{14} = 3$, поэтому для данной свободной клетки строим цикл пересчета (табл. 2.13) и производим сдвиг по этому циклу. Наименьшее из чисел в минусовых клетках равно 10. Клетка, в которой оно находится, становится свободной в новой табл. 2.14. Другие числа в этой таблице получаются так: к числу 10, стоящему в плюсовой клетке табл. 2.13, добавим 10 и вычтем 10 из числа 20, находящегося в минусовой клетке табл. 2.13. Клетка на пересечении строки A_2 и столбца B_2 становится свободной.

Таблица 2.13

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 − 20	4 −4	1 + 3	50
A_2	2 0	3 + 10	1 10	5 − 10	30
A_3	3 −2	2 0	4 −4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

После этих преобразований получаем новый опорный план (табл. 2.14).

Таблица 2.14

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 − 10	2 −2	1 + 10	50
A_2	2 0	3 20	1 10	5 −3	30
A_3	3 +1	2 + +3	4 −1	4 − 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Этот план проверяем на оптимальность. Снова находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для этого составляем следующую систему уравнений:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_2 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_4 - \alpha_1 = 1,$$
$$\beta_2 - \alpha_2 = 1, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 1, \quad \beta_4 - \alpha_3 = 4.$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, получаем

$$\beta_1 = \beta_4 = 1,\ \beta_2 = 2,\ \beta_3 = 0,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_2 = -1.$$

Для каждой свободной клетки вычисляем число α_{ij}; имеем

$$\alpha_{13} = -2,\ \alpha_{21} = 0,\ \alpha_{24} = -3,\ \alpha_{31} = 1,\ \alpha_{32} = 3,\ \alpha_{33} = -1.$$

Таким образом, очевидно, что данный план перевозок не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану (табл. 2.15).

Таблица 2.15

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 / 30	2 / 0	4 / −4	1 / 20	50
A_2	2 / 0	3 / 20	1 / 10	5 / −3	30
A_3	3 / −2	2 / 10	4 / −4	4 / −3	10
Потребности	30	30	10	20	90

Сравнивая разности $\beta_j - \alpha_i$ новых потенциалов, отвечающих свободным клеткам табл. 2.15, с соответствующими числами c_{ij}, видим, что указанные разности потенциалов для всех свободных клеток не превосходят соответствующих чисел c_{ij}. Следовательно, полученный план

$$X^* = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

является оптимальным.

При данном плане стоимость перевозок

$$S = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 140 \text{ у.е.}$$

2.18. Для строительства четырех дорог используется гравий из трех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 280 и 160 у.е. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 130, 220, 60 и 70 у.е. Известны также тарифы перевозок 1 у.е. гравия из каждого из карьеров к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

Решение. Исходные данные задачи сведем в табл. 2.16.

Таблица 2.16

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	1	2	160
Потребности	130	220	60	70	

Как видно из табл. 2.16, запасы гравия в карьерах (120 + + 280 + 160 = 560) больше, чем потребности в нем (130 + 220 + + 60 + 70 = 480) на строящихся дорогах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительный пункт назначения B_5 с потребностями, равными 560 − 480 = 80 у.е. Тарифы перевозки единицы гравия из всех карьеров в пункт B_5 полагаем равными нулю. В результате получаем закрытую модель транспортной задачи, план перевозок которой определяем методом минимального элемента (табл. 2.17).

Таблица 2.17

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 40	7	9	5	0 80	120
A_2	4 60	2 220	6	8	0	280
A_3	3 30	8	1 60	2 70	0	160
Потребности	130	220	60	70	80	560

Оптимальный план находим методом потенциалов (табл. 2.18).

Таблица 2.18

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 120	7	9	5	0	120
A_2	4	2 220	6	8	0 60	280
A_3	3 10	8	1 60	2 70	0 20	160
Потребности	130	220	60	70	80	560

Как видно из табл. 2.18, исходная задача имеет оптимальный план

$$X^* = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{bmatrix}.$$

При этом плане остаются неиспользованными 60 у.е. гравия во втором карьере и 20 у.е. в третьем карьере, а общая стоимость перевозок составляет

$$S = 1 \cdot 120 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 = 790 \text{ у.е.}$$

Метод дифференциальных рент. Если при определении оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов сначала находят какой-нибудь ее опорный план, а затем его последовательно улучшают, то при нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое *условно оптимальное распределение*), а на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок. Первоначальный вариант распределения груза получают следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф и числа заключают в кружки, а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют, записывая в них максимально возможные числа. В результате происходит некоторое распределение поставок груза в пункты назначения, которое в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому, совершая ряд последующих шагов, постепенно сокращают нераспределенные поставки груза так, чтобы общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки.

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, при том, что потребности пунктов назначения, связанных с ними, не удовлетворены, называются *недостаточными* (иногда их называют отрицательными). Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, называются *избыточными* (или положительными).

После того как определены избыточные и недостаточные строки, для каждого из столбцов ищут разности между числом в кружке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в кружке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел выбирают наименьшее. Оно называется *промежуточной рентой.* После этого переходят к новой таблице. Она получается из предыдущей таблицы после прибавления к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считаются свободными.

После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь их на одну больше, чем на предыдущем этапе: дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Остальные клетки размещаются по одной в каждом из столбцов, и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в кружки. Обведены кружками и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, при заполнении клеток следует пользоваться специальным правилом. Оно состоит в следующем. Выбирают некоторый столбец (строку), в котором имеется одна клетка с кружком. Ее заполняют, а данный столбец (строку) исключают из рассмотрения. После этого переходят к строке (столбцу), в которой имеется одна клетка с кружком. Ее также заполняют и исключают из рассмотрения. Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены кружки с заключенными в них числами. Если к тому же удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получается оптимальный план транспортной задачи. Если оптимальный план не получился, то переходят к новой таблице: находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на их основе строят новую таблицу. При этом могут возникнуть некоторые затруднения в определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных задач с использованием ЭВМ применяется метод дифференциальных рент.

2.19. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 2.19, найти оптимальный план методом дифференциальных рент.

Р е ш е н и е. Перейдем от табл. 2.19 к табл. 2.20, добавив один дополнительный столбец для указания избытка и недостатка по строкам и одну строку для записи соответствующих разностей.

Т а б л и ц а 2.19

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Потребности	110	90	120	80	150	550

В каждом из столбцов табл. 2.20 находим минимальные тарифы и обводим их кружками. Заполняем клетки, в которых стоят указанные числа. Для этого в каждую из клеток записываем максимально допустимое число. Например, в клетку, находящуюся на пересечении строки A_1 и столбца B_3, записываем число 120. В эту клетку нельзя поместить большее число, поскольку в таком случае были бы превышены потребности пункта назначения B_3.

Т а б л и ц а 2.20

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы	Недостаток (–), избыток (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	7	12	4 120	8	5	180	+60
A_2	1 110	8 90	6	5 80	3 70	350	–80
A_3	6	13	8	7	4	20	+20
Потребности	110	90	120	80	150	550	
Разность	5	4	–	2	1		

В результате заполнения отмеченных выше клеток получается так называемый условно оптимальный план, согласно которому полностью удовлетворяются потребности пунктов назначения B_1, B_2, B_3 и B_4 и частично — пункта назначения B_5. При этом оказываются полностью распределенными запасы пункта отправления A_2, частично — пункта отправления A_1 и остаются совсем нераспределенными запасы пункта отправления A_3.

После получения условно оптимального плана определяем избыточные и недостаточные строки. В данном случае недостаточной является строка A_2, так как запасы пункта отправления A_2 полностью использованы, а потребности пункта назначения B_5 удовлетворены частично. Величина недостатка равна 80 ед.

Строки A_1 и A_3 являются избыточными, поскольку запасы пунктов отправления A_1 и A_3 распределены не полностью. При этом величина избытка строки A_1 равна 60 ед., а строки A_3 — 20 ед. Общая величина избытка ($60 + 20 = 80$) совпадает с общей величиной недостатка, равной 80.

После определения избыточных и недостаточных строк по каждому из столбцов находим разности между минимальными тарифами, записанными в избыточных строках, и тарифами, стоящими в заполненных клетках. В данном случае эти разности соответственно равны 5, 4, 2, 1 (табл. 2.20). Для столбца B_3 разность не определена, так как число, записанное в кружке в данном столбце, находится в положительной строке. В столбце B_1 число, стоящее в кружке, равно 1, а в избыточных строках в клетках данного столбца наименьшим является число 6. Следовательно, разность для данного столбца равна $6 - 1 = 5$. Аналогично находим разности для других столбцов:

$$B_2\colon 12 - 8 = 4;\ B_4\colon 7 - 5 = 2;\ B_5\colon 4 - 3 = 1.$$

Таблица 2.21

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы	Недостаток (–), избыток (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	7	12	4 120	8	5	180	+60
A_2	2 110	9 90	7	6 80	4 70	350	–60
A_3	6	13	8	7	4 20	20	–0
Потребности	110	90	120	80	150	550	
Разность	5	3	–	2	1		

Выбираем наименьшую из найденных разностей, которая является промежуточной рентой. В данном случае промежуточная рента равна 1 и находится в столбце B_5. Найдя промежуточную ренту, переходим к табл. 2.21.

В эту таблицу в строки A_1 и A_3 (являющиеся избыточными) переписываем соответствующие тарифы из строк A_1 и A_3 табл. 2.20. Элементы строки A_2 (которая была недостаточной) получаются в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящимся в строке A_2 табл. 2.20, промежуточной ренты, то есть 1.

В табл. 2.21 число заполняемых клеток возросло на одну. Это обусловлено тем, что число минимальных тарифов, стоящих в каждом из столбцов данной таблицы, увеличилось на единицу и теперь, к примеру, в столбце B_5 имеются два минимальных элемента 4. Эти числа заключают в кружки, а клетки, в которых они стоят, заполняют. Заполняют и клетки с наименьшими для других столбцов тарифами. В табл. 2.21 соответствующие тарифы заключены в них в кружки.

После того как указанные клетки определены, устанавливаем последовательность их заполнения — находим столбцы (строки), в которых лишь одна клетка требует заполнения; заполнив ее, исключаем из рассмотрения соответствующий столбец (строку) и переходим к следующей клетке.

В данном случае заполнение клеток проводим в такой последовательности. Сначала отрабатываем клетки A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_4, так как они являются единственными клетками для заполнения в столбцах B_1, B_2, B_3 и B_4. Затем — A_3B_5, поскольку она единственная требует заполнения в строке A_3. Исключаем из рассмотрения строку A_3. В столбце B_5 лишь одна клетка ожидает заполнения — A_2B_5. После ее заполнения устанавливаем избыточные и недостаточные строки. Как видно из табл. 2.21, еще имеется нераспределенный остаток. Следовательно, получен условно оптимальный план задачи и нужно перейти к новой таблице. Для этого по каждому из столбцов находим разности между числом, записанным в кружке данного столбца, и наименьшим по отношению к нему числом, находящимся в избыточных строках. Среди этих разностей наименьшая равна 1. Это и есть промежуточная рента. Переходим к новой таблице (табл. 2.22).

В табл. 2.22 элементы строк A_2 и A_3 получены в результате прибавления к соответствующим числам строк A_2 и A_3 (являющихся недостаточными) табл. 2.21 промежуточной ренты, то есть 1. В результате в табл. 2.22 число клеток для заполнения возросло еще на одну и стало равным 7. Определяем указанные клетки и заполняем их. Сначала — клетки A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_4, а затем A_3B_5, A_2B_5, A_1B_5. В результате все имеющиеся запасы поставщиков распределяются в соответствии с фактическими потребностями пунктов назначения. Число заполненных клеток равно 7, и все они имеют наименьший показатель c_{ij}. Следовательно, получен оптимальный план исходной транспортной задачи

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 110 & 90 & 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

При этом плане перевозок общие затраты таковы:

$S = 4 \cdot 120 + 5 \cdot 60 + 1 \cdot 110 + 8 \cdot 90 + 5 \cdot 80 + 3 \cdot 70 + 4 \cdot 20 = 2300$ у.е.

Таблица 2.22

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы	Недостаток (–), избыток (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	7	12	4 / 120	8	5 / 60	180	0
A_2	3 / 110	10 / 90	8	7 / 80	5 / 70	350	0
A_3	7	14	9	8	5 / 20	20	0
Потребности	110	90	120	80	150	550	

4. Использование пакета Solver для решения транспортной задачи 2.18. В данной задаче искомыми значениями являются объемы гравия, которые необходимо выбирать из трех карьеров для строительства четырех дорог при минимальной стоимости перевозок. Вводим переменные

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34},$$

где x — это количество гравия; первая цифра в индексе — порядковый номер карьера, из которого выбирают гравий (1, 2, 3); вторая цифра в индексе — номер дороги, которую строят (1, 2, 3, 4).

При таких допущениях математическое описание решения сводится к системе неравенств 2.11 и целевой функции 2.12.

Система неравенств при введении неизвестных имеет вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 120, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 280, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 160, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 130, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 70. \end{cases} \qquad (2.11)$$

При известных тарифах перевозок 1 у.е. гравия из каждого карьера к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Общая стоимость перевозок определяется целевой функцией

$$F = 1 \cdot x_{11} + 7 \cdot x_{12} + 9 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 4 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{22} + 6 \times \times x_{23} + 8 \cdot x_{24} + 3 \cdot x_{31} + 8 \cdot x_{32} + 1 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34}. \qquad (2.12)$$

По своему экономическому содержанию переменные x_{11}, x_{12}, ..., x_{34} могут принимать только неотрицательные значения

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1, 3};\ j = \overline{1, 4}). \qquad (2.13)$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2.11) требуется найти такое решение, при котором функция (2.12) принимает минимальное значение.

Запишем эту задачу на рабочем листе электронной таблицы в виде табл. 2.23 и 2.24.

Таблица 2.23

План поставок

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы ($F9$–$F11$)	Суммарный план перевозки из пунктов отправления ($G9$–$G11$)
	A	B	C	D		
9					120	
10					280	
11					160	
Потребности пунктов назначения ($B12$–$E12$)	130	220	60	70		
Суммарный план перевозки в пункты назначения ($B13$–$E13$)						

Таблица 2.24

Стоимость доставки груза

	A	B	C	D
1	1	7	9	5
2	4	2	6	8
3	3	8	1	2

Функции ограничений, содержащиеся в левой части неравенств (2.11), отображают плановые суммарные перевозки из пунктов отправления (первые три неравенства) и суммарные плановые перевозки в пункты назначения (последние 4 неравенства).

Соответствующие функции, характеризующие суммарные плановые перевозки из пунктов отправления, записываются в ячейки $G9$—$G11$, а функции, характеризующие суммарные плановые перевозки в пункты назначения, — в ячейки $B13$—$E13$. Выражение для расчета целевой функции помещается в ячейку $A15$.

После описания математической задачи на рабочем листе EXCEL в пакет Solver заносятся сведения об адресе ячейки, заключающей целевую функцию, о нахождении оптимального минимального значения целевой функции, о диапазоне ячеек, содержащих неизвестные, и ограничения. Вид параметров пакета Solver для решаемой задачи приведен на рис. 2.2.

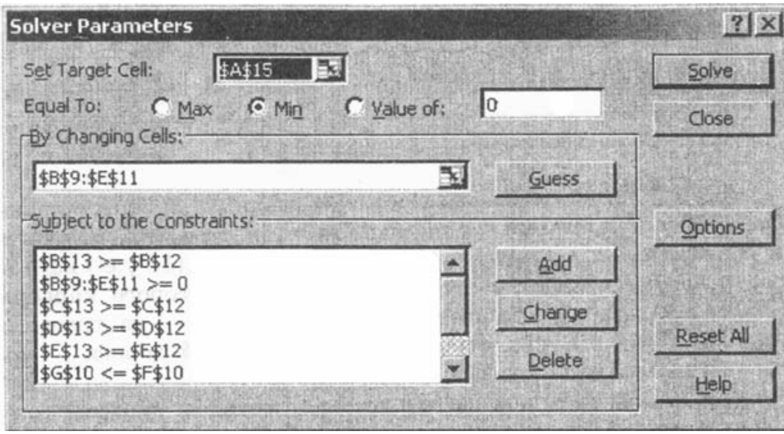


Рис. 2.2

Результатом решения задачи является следующий оптимальный план поставок (табл. 2.25 и 2.26).

Таблица 2.25

План поставок

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы	Суммарный план перевозки из пунктов отправления
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	120	0	0	0	120	120
A_2	0	220	0	0	280	220
A_3	10	0	60	70	160	140
Потребности пунктов назначения	130	220	60	70		
Суммарный план перевозки в пункты назначения	130	220	60	70		
Целевая функция: 790						

Таблица 2.26

Стоимость доставки груза

1	7	9	5
4	2	6	8
3	8	1	2

Минимальная стоимость доставки гравия при этом составляет 790 у.е.; поставки гравия для строительства первой дороги осуществляются из первого (120 у.е.) и третьего (10 у.е.) карьеров, для строительства второй дороги — из второго карьера (220 у.е.), для строительства третьей дороги — из третьего карьера (60 у.е.), для строительства четвертой дороги — из третьего карьера (70 у.е.).

2.20—2.22. Методом потенциалов и методом дифференциальных рент с использованием пакета Solver найти оптимальные планы транспортных задач 2.5—2.7.

Используя рассмотренные методы, найдите оптимальные планы транспортных задач 2.23—2.28.

Таблица 2.27

2.23.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потребности	80	80	60	80	

Таблица 2.28

2.24.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	100
A_3	3	2	6	3	70
Потребности	80	50	50	70	

Таблица 2.29

2.25.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Потребности	45	45	100	160	

2.26. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготовляемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовлять 100, 150 и 50 у.е. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 75, 80, 60 и 85 у.е. Известны также тарифы перевозок 1 у.е. кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок являлась бы минимальной.

2.27. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов на хлебозаводы задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок являлась бы минимальной.

2.28. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т бензина из хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок являлась бы минимальной.

5. Определение оптимального плана транспортных задач, имеющих некоторые усложнения в их постановке. При нахождении решения ряда конкретных транспортных задач часто приходится учитывать дополнительные ограничения, которые мы не рассматривали выше. Остановимся подробнее на некоторых возможных усложнениях в постановках транспортных задач.

1°. При некоторых реальных условиях не могут быть осуществлены перевозки груза из определенного пункта отправления A_i в пункт назначения B_j. Чтобы определить оптимальный план в подобных задачах, предполагают, что тариф перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j является сколь угодно большой величиной M, и при этом условии известными методами находят решение новой транспортной задачи. С таким предположением исключается возможность перевозить груз из пункта A_i в пункт B_j при оптимальном плане транспортной задачи. Подход к нахождению решения транспортной задачи называют *запрещением перевозок* или *блокированием* соответствующей клетки таблицы данных задачи. В пакете Solver тариф перевозки единицы груза для заблокированных пунктов достаточно повысить на порядок по сравнению с максимально имеющимся тарифом из таблицы стоимости перевозок.

2°. В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j требуется обязательно перевести α_{ij} единиц груза. Тогда в клетку таблицы данных транспортной задачи, находящуюся на пересечении строки A_i и столбца B_j, записывают указанное число α_{ij} и в дальнейшем эту клетку считают свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок M. Для полученной новой транспортной задачи находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи. В пакете Solver для решения такой задачи вводится дополнительное ограничение на значение соответствующей ячейки.

3°. Иногда требуется найти решение транспортной задачи, при котором из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j должно быть завезено не менее заданного количества груза α_{ij}. Для определения оптимального плана такой задачи условливаются, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j меньше фактических на α_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план новой транспортной задачи, который и определяет решение исходной задачи. В пакете Solver для решения такой задачи вводится дополнительное ограничение на значение соответствующих ячеек.

4°. В некоторых транспортных задачах требуется найти оптимальный план перевозок при условии, что из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j перевозится не более чем α_{ij} единиц груза, то есть

$$x_{ij} \leq \alpha_{ij}. \tag{2.14}$$

Сформулированную задачу можно решить так. В таблице исходных данных задачи для каждого j-го ограничения (2.14) предусматривают дополнительный столбец, то есть вводят дополнительный пункт назначения. В него записывают те же тарифы, что стоят в столбце B_j, за исключением тарифа, находящегося в i-й строке. В дополнительном столбце в этой строке тариф считают равным некоторому сколь угодно большому числу M. При этом потребности пункта B_j считают равными α_{ij}, а потребности вновь введенного пункта назначения полагают равными $b_j - \alpha_{ij}$. Решение полученной транспортной задачи может быть найдено методом потенциалов, и тем самым будет определен оптимальный план или установлена неразрешимость исходной задачи. Заметим, что исходная транспортная задача разрешима лишь в том случае, когда для нее существует хотя бы один опорный план. В пакете Solver для решения такой задачи вводится дополнительное ограничение на значение соответствующих ячеек.

Приведенную выше задачу можно решить и иным способом. С учетом ограничения (2.14) по правилу минимального элемента строят опорный план. Если величина записываемого на данном шаге в соответствующую клетку числа определяется только ограничением (2.14), то в последующем из рассмотрения исключают только заполненную клетку. В других случаях из рассмотрения исключают либо строку, либо столбец (что-нибудь одно).

Если в результате составления плана поставок все имеющиеся запасы пунктов отправления распределены и потребности в пунктах назначения удовлетворены, то получен опорный план транспортной задачи.

Если в какой-то строке (а следовательно, и в столбце) остался нераспределенный остаток, равный d, то вводят дополнительный пункт назначения и дополнительный пункт отправления с потребностями и запасами, равными d. В клетке, находящейся на пересечении столбца дополнительного пункта назначения и строки дополнительного пункта отправления, тариф считают равным нулю. Во всех остальных клетках данной строки и столбца тарифы полагают равными некоторому сколь угодно большому числу M.

Полученную в результате этого транспортную задачу решают методом потенциалов. После конечного числа шагов либо устанавливают, что исходная задача не имеет опорного плана, либо находят ее оптимальный план. При этом x^*_{ij} — оптимальный план исходной задачи, если

$$\begin{cases} \beta_j - \alpha_i - c_{ij} \le 0 \text{ при } x_{ij}^* = 0, \\ \beta_j - \alpha_i - c_{ij} \ge 0 \text{ при } x_{ij}^* = \alpha_{ij}, \\ \beta_j - \alpha_i - c_{ij} = 0 \text{ при } 0 < x_{ij}^* < \alpha_{ij}. \end{cases}$$

2.29. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 2.30, с учетом того, что из A_1 в B_2 и из A_2 в B_5 перевозки не могут быть осуществлены, а из A_2 в B_1 будет завезено 60 ед. груза.

Таблица 2.30

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	–	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	–	220
A_3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Решение. Так как из A_1 в B_2 и из A_2 в B_5 перевозки не могут быть осуществлены, то в клетках тарифы A_1B_2 и A_2B_5 табл. 2.31 будем считать равными некоторому сколь угодно большому числу M. Полагаем равным этому же числу и тариф для клетки A_2B_1. Одновременно в эту клетку помещаем число 60, поскольку, по условию, из A_2 в B_1 нужно завезти 60 ед. груза. В дальнейшем клетку A_2B_1 считаем свободной, со сколь угодно большим тарифом M.

Таблица 2.31

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 60	M $2-M$	3 30	1 90	4 $M-5$	180
A_2	M 60 $2-M$	3 80	4 30	5 -3	M 50	220
A_3	8 -9	2 -2	1 100	9 -10	3 $M-6$	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Для транспортной задачи, исходные данные которой записаны в табл. 2.31, методом минимального элемента находим опорный план. Этот план проверяем на оптимальность. Для каждого из пунктов отправления и назначения находим потенциалы, а для каждой из свободных клеток — числа $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$. Эти числа заносим в кружки в соответствующих клетках табл. 2.31. Если среди них нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. В данном случае есть два положительных числа — в клетках A_1B_5 и A_3B_5. Поэтому переходим к новому опорному плану. Строим для клетки A_1B_5 цикл пересчета и производим сдвиг по циклу пересчета (табл. 2.32).

Таблица 2.32

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 60	M $-2M+7$	3 $-M+5$	1 90	4 30	180
A_2	M 60 $M-3$	3 80	4 60	5 $M-8$	M 20	220
A_3	8 $M-8$	2 -2	1 100	9 $M-15$	3 $M-6$	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Полученный опорный план проверяем на оптимальность; так как он не оптимален, то переходим к новому опорному плану (табл. 2.33).

Таблица 2.33

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 60	M $1-M$	3 -1	1 90	4 30	180
A_2	M 60 $3-M$	3 80	4 80	5 -2	M $6-M$	220
A_3	8 -8	2 -2	1 80	9 -9	3 20	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Как видно из табл. 2.33, исходная транспортная задача имеет оптимальный план

$$X^* = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 90 & 30 \\ 60 & 80 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

При этом общая стоимость перевозок

$$S = 1 \cdot 60 + 1 \cdot 90 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 60 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 80 + 1 \cdot 80 + \\ + 3 \cdot 20 = 1330 \text{ у.е.}$$

является минимальной.

2.30. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 2.34. Дополнительные условия: из A_1 в B_2 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_5 — не менее 60 ед. груза, а из A_2 в B_4 — не более 40 ед. груза.

Таблица 2.34

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140
Потребности	90	60	80	70	90	390

Р е ш е н и е. Так как из A_1 и A_3 соответственно в B_1 и B_5 необходимо завезти не менее 50 и 60 ед. груза, то запасы этих пунктов отправления и потребности пунктов назначения считаем меньшими соответственно на 50 и 60 ед. (табл. 2.35). Кроме того, поскольку из A_2 в B_4 необходимо завезти не более 40 ед. груза, то рассмотрим дополнительный пункт назначения B_4^1 с потребностями, равными 70 – 40 = 30 ед., а потребности пункта B_4 — равными 40 ед. В столбец B_4^1 записываем тарифы, размещающиеся в клетках столбца B_4, за исключением клетки A_2B_4. В этой клетке тариф полагаем равным некоторому сколь угодно большому числу M. В результате получаем транспортную задачу, исходные данные которой записаны в табл. 2.35.

Т а б л и ц а 2.35

Пункт отправления	Пункт назначения						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_4^1	
A_1	5	3 30	2 80	4	8	4	110
A_2	7 20	6	5	3 40	1 30	M	90
A_3	8 20	9 30	4	5	2	5 30	80
Потребности	40	60	80	40	30	30	280

Т а б л и ц а 2.36

Пункт отправления	Пункт назначения						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B^1_4	
A_1	5 20	3 60	2 30	4 –3	8 –9	4 –1	110
A_2	7 20	6 –1	5 –1	3 40	1 30	M $5–M$	90
A_3	8 –1	9 –4	4 50	5 –2	2 –1	5 30	80
Потребности	40	60	80	40	30	30	280

К данной задаче применяем метод потенциалов. Найденное решение приведено в табл. 2.36. Как следует из этой таблицы, оптимальное решение исходной задачи —

$$X^* = \begin{bmatrix} 70 & 60 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 40 & 30 \\ 0 & 0 & 50 & 30 & 60 \end{bmatrix}.$$

При таком плане перевозок общая стоимость перевозок

$$S = 5 \cdot 70 + 3 \cdot 60 + 2 \cdot 30 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 30 + 4 \cdot 50 + \\ + 5 \cdot 30 + 2 \cdot 60 = 1350 \text{ у.е.}$$

является минимальной.

2.31. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой определяются табл. 2.37.

Таблица 2.37

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	8	7	2	1	220
A_2	6	3	5	4	6	140
A_3	7	4	2	3	2	160
Потребности	90	140	90	130	80	520

и матрицей

$$D = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 60 & \infty & \infty \\ \infty & 70 & \infty & 70 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}.$$

Числа в матрице D означают предельное количество груза, которое можно перевезти из данного пункта отправления в соответствующий пункт назначения. Символ ∞ означает, что на перевозки из данного пункта отправления в соответствующий пункт назначения нет ограничений.

2.32. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой определяются табл. 2.38.

Таблица 2.38

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

и матрицей

$$D = \begin{bmatrix} \infty & 70 & 40 & 60 & \infty \\ \infty & \infty & 80 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 40 & \infty & \infty \end{bmatrix}.$$

2.33. На трех складах оптовой базы хранится мука в количествах, равных соответственно 140, 360 и 180 т. Эту муку необходимо завезти в пять магазинов, каждый из которых должен получить соответственно 90, 120, 230, 180 и 60 т. С первого склада муку не представляется возможным перевозить во второй и пятый магазины, а со второго склада в третий магазин должно быть завезено 100 т муки. Зная тарифы перевозки 1 т муки с каждого из складов в соответствующие магазины, которые определяются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 7 & - & 8 & 2 & - \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix},$$

составить план перевозок, обеспечивающий минимальную общую стоимость перевозок.

2.34. На трех железнодорожных станциях A_1, A_2 и A_3 скопилось 120, 110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 80, 60, 70, 100 и 50 ед. Учитывая, что с железнодорожной станции A_2 не представляется возможным перегнать вагоны на станции B_2 и B_4, и зная, что тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

составить такой план перегонки вагонов, при котором общая стоимость операции была бы минимальной.

6. Нахождение решения некоторых экономических задач, сводящихся к транспортной. Выше были подробно рассмотрены методы поиска решения транспортной задачи. Этими же методами могут быть решены и задачи, которые по своей экономической сущности не связаны с транспортными перевозками. Рассмотрим некоторые из них.

2.35. На текстильном предприятии имеется три типа ткацких станков. На всех станках могут вырабатываться четыре вида тканей: миткаль, бязь, ситец и сатин. Производительность каждого станка и затраты, связанные с изготовлением тканей, приведены в табл. 2.39. Учитывая, что фонд рабочего времени каждой из групп ткацких станков соответственно равен 90, 220 и 180 станко-ч, составить такой план их загрузки, при котором общие затраты, обусловленные изготовлением 1200 м миткаля, 900 м бязи, 1800 м ситца и 840 м сатина, являлись бы минимальными.

Таблица 2.39

Тип станка	Производительность станка (м/ч) при выработке				Затраты на 1 м ткани при выработке			
	миткаля	бязи	ситца	сатина	миткаля	бязи	ситца	сатина
I	24	30	18	42	0,2	0,1	0,3	0,1
II	12	15	9	21	0,3	0,2	0,4	0,1
III	8	10	6	14	0,6	0,3	0,5	0,2

Решение. Составим математическую модель задачи. Будем считать, что i-й тип станков занят изготовлением j-го вида тканей x_{ij} станко-ч. Тогда переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180; \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} 24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200, \\ 30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900, \\ 18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800, \\ 42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840. \end{cases} \tag{2.16}$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять также условию неотрицательности:

$$x_{ij} \ge 0 \; (i = \overline{1, 3};\; j = \overline{1, 4}). \qquad (2.17)$$

Среди всех возможных значений неизвестных x_{ij}, удовлетворяющих уравнениям (2.15) и (2.16) и условию неотрицательности переменных (2.17), требуется найти такое, при котором линейная функция

$$F = 4{,}8x_{11} + 3x_{12} + 5{,}4x_{13} + 4{,}2x_{14} + 3{,}6x_{21} + 3x_{22} + 3{,}6x_{23} + \\ + 2{,}1x_{24} + 4{,}8x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} + 2{,}8x_{34} \qquad (2.18)$$

принимает минимальное значение.

Преобразуем математическую модель задачи так, чтобы свести ее к модели транспортной задачи. Для этого приведем исходные данные и неизвестные величины исходной задачи к одной единице, в качестве которой возьмем 1 станко-ч работы станков I типа. Поскольку производительность станков II и III типов соответственно составляет 1/2 и 1/3 производительности станков I типа (табл. 2.39), фактический фонд рабочего времени в приведенных станко-часах для станков II типа равен 110, а для станков III типа — 60 станко-ч. Общий фонд рабочего времени в приведенных станко-часах составляет

90 + 110 + 60 = 260 станко-ч.

Определим теперь время, требуемое для выработки нужного количества каждого из видов тканей. Так как нужно изготовить 1200 м миткаля, а за один приведенный станко-час можно выработать 24 м, то для выпуска необходимого количества миткаля потребуется

1200/24 = 50 станко-ч.

Аналогично определяем потребности для выработки бязи, ситца и сатина. Они соответственно составляют 30, 100 и 20 станко-ч. Обозначим теперь через x'_{ij} количество приведенных станко-часов i-го типа станков, используемых при выработке j-го вида ткани. Тогда системы уравнений (2.15) и (2.16) исходной задачи можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} x'_{11} + x'_{12} + x'_{13} + x'_{14} = 90, \\ x'_{21} + x'_{22} + x'_{23} + x'_{24} = 110, \\ x'_{31} + x'_{32} + x'_{33} + x'_{34} = 60; \end{cases} \qquad (2.19)$$

$$\begin{cases} x'_{11} + x'_{21} + x'_{31} = 50, \\ x'_{12} + x'_{22} + x'_{32} = 30, \\ x'_{13} + x'_{23} + x'_{33} = 100, \\ x'_{14} + x'_{24} + x'_{34} = 20, \end{cases} \qquad (2.20)$$

где

$$\begin{cases} x'_{11} = x_{11}; x'_{12} = x_{12}; x'_{13} = x_{13}; x'_{14} = x_{14}; \\ x'_{21} = \frac{1}{2}x_{21}; x'_{22} = \frac{1}{2}x_{22}; x'_{23} = \frac{1}{2}x_{23}; x'_{24} = \frac{1}{2}x_{24}; \\ x'_{31} = \frac{1}{3}x_{31}; x'_{32} = \frac{1}{3}x_{32}; x'_{33} = \frac{1}{3}x_{33}; x'_{34} = \frac{1}{3}x_{34}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Целевая функция (2.18) исходной задачи записывается в виде

$$F = 4{,}8x'_{11} + 3x'_{12} + 5{,}4x'_{13} + 4{,}2x'_{14} + 7{,}2x'_{21} + 6x'_{22} + 7{,}2x'_{23} + \\ + 4{,}2x'_{24} + 14{,}4x'_{31} + 9x'_{32} + 9x'_{33} + 8{,}4x'_{34}. \quad (2.22)$$

В результате приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений систем линейных уравнений (2.19) и (2.20) требуется найти такое, при котором функция (2.22) принимала бы минимальное значение. Таким образом, исходная задача свелась к задаче, математическая модель которой ничем не отличается от математической модели транспортной задачи. Поскольку

$$90 + 110 + 60 = 260 > 50 + 30 + 100 + 20 = 200,$$

полученная задача имеет открытую модель. Поэтому, чтобы найти ее решение, считаем, что имеется фиктивная потребность в тканях, на выработку которых необходимо затратить

$$260 - 200 = 60 \text{ станко-ч.}$$

Полученную в результате последнего предположения задачу решаем методом потенциалов (табл. 2.40).

Таблица 2.40

Тип станка	Ткань					Производственная мощность
	миткаль	бязь	ситец	сатин	некоторая ткань	
I	4,8 50	3 30	5,4 10	4,2	0	90
II	7,2	6	7,2 90	4,2 20	0	110
III	14,4	9	9 0	8,4	0 60	60
Потребность в ткани	50	30	100	20	60	260

Как видно из табл. 2.40, оптимальный план задачи (2.19)—(2.22) определяется матрицей

$$\overline{X^*} = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношение (2.21), для определения оптимального плана исходной задачи (2.15)—(2.18) получим матрицу

$$\overline{X^*} = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно плану выработки тканей предусматривается использовать соответственно 50, 30 и 10 станко-ч станков I типа для производства миткаля, бязи и ситца, 180 и 40 станко-ч станков II типа для выработки ситца и сатина. При этом 180 станко-ч станки III типа остаются свободными, то есть полностью не используются. В соответствии с данным планом на станках I типа вырабатывается 1200 м миткаля, 900 м бязи, 180 м ситца, на станках II типа — 1620 м ситца и 840 м сатина. При этом 180 станко-ч станки III типа могут использоваться для выработки сверхплановой продукции. При данном плане выработки тканей затраты, связанные с их производством, являются минимальными и равны

$$S = 0{,}2 \cdot 1200 + 0{,}1 \cdot 900 + 0{,}3 \cdot 180 + 0{,}4 \cdot 1620 + 0{,}1 \cdot 840 = 1116.$$

2.36. На пяти токарных станках различных типов можно выполнять пять операций по обработке деталей. При этом за каждым из станков может быть закреплена лишь одна операция и одна и та же операция может выполняться только одним станком. Зная время выполнения каждой из операций на каждом из станков, которое задается матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

составить такое распределение выполняемых операций между станками, при котором суммарные затраты времени на обработку детали являлись бы минимальными.

Р е ш е н и е. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} ($i = \overline{1, 5}$; $j = \overline{1, 5}$) переменную, значение которой равно 1, если на i-м станке j-я операция выполняется, и равно

0 — в противном случае. Тогда закрепление за каждым станком только одной операции выражается равенствами

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1, \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1, \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1,
\end{cases} \tag{2.23}
$$

а закрепление каждой из операций только на одном станке — равенствами

$$
\begin{cases}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1, \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1, \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1, \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1, \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1.
\end{cases} \tag{2.24}
$$

Требуется найти такие значения неизвестных x_{ij} ($i = \overline{1, 5}$; $j = \overline{1, 5}$), удовлетворяющие системам линейных уравнений (2.23) и (2.24) и равные 0 или 1, при которых функция

$$
\begin{aligned}
F = 2x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 8x_{14} + 3x_{15} + x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} + \\
+ 7x_{24} + 6x_{25} + 7x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34} + 8x_{35} + 9x_{41} + x_{42} + \\
+ 3x_{43} + 4x_{44} + 6x_{45} + 3x_{51} + 2x_{52} + x_{53} + 4x_{54} + 5x_{55}
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

принимает минимальное значение.

Таблица 2.41

Тип станка	Операция					За каждым станком закрепляется одна операция
	1	2	3	4	5	
I	2 0	4	6	8	3 1	1
II	1 1	3	2 0	7	6	1
III	7	2 1	4	5	8	1
IV	9	1 0	3	4 1	6	1
V	3	2	1 1	4 0	5	1
Каждая операция выполняется только на одном станке	1	1	1	1	1	5

Оптимальный план сформулированной задачи может быть найден методами решения транспортных задач. Найдем его методом потенциалов (табл. 2.41).

Как видно, оптимальным планом задачи является план, согласно которому на станке I типа выполняется пятая операция, на станке II типа — первая операция, на станке III типа — вторая операция, на станке IV типа — четвертая операция и на станке V типа — третья операция. В соответствии с этим планом время обработки детали является минимальным и составляет

$$S = 3 + 1 + 2 + 1 + 4 = 11 \text{ станко-ч.}$$

Сведите задачи 2.37—2.40 к транспортной задаче и найдите их решение.

2.37. Имеется три участка земли, на которых могут быть засеяны кукуруза, пшеница, ячмень и просо. Площадь каждого из участков соответственно равна 600, 180 и 220 га. С учетом наличия семян кукурузой, пшеницей, ячменем и просом следует засеять соответственно 290, 180, 110 и 420 га. Урожайность каждой из культур для каждого из участков различна и задается матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{bmatrix}.$$

Определить, сколько гектаров на каждом из участков следует засеять каждой культурой так, чтобы общий сбор зерна был максимальным.

2.38. На каждом из четырех филиалов производственного объединения могут изготовляться изделия четырех видов. Учитывая необходимость углубления специализации, решено, что каждый филиал будет выпускать только один из видов изделий. Себестоимость изделий различается по филиалам и определяется матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найти такое распределение выпуска продукции между филиалами, чтобы общая себестоимость продукции была минимальной.

2.39. Мясокомбинат имеет в своем составе четыре завода, на каждом из которых могут выпускать три вида колбасных изделий. Мощности каждого из заводов соответственно равны 320, 280, 270 и 350 т/сутки. Ежедневные потребности в колбасных изделиях каждого вида также известны и соответственно равны 450, 370 и 400 т. Зная себестоимость 1 т каждого вида колбасных изделий на каждом заводе, которые определяются матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix},$$

найти такое распределение выпуска колбасных изделий между заводами, при котором себестоимость изготовляемой продукции являлась бы минимальной.

§ 2.2. Целочисленные задачи линейного программирования

1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи целочисленного программирования. Экстремальная задача, переменные которой принимают лишь целочисленные значения, называется *задачей целочисленного программирования*.

В математической модели задачи целочисленного программирования как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Ограничимся случаем, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными.

2.40. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 19/3 м^2 площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 10 000 у.е., при этом оно может купить оборудование двух видов. Комплект оборудования I вида стоит 1000 у.е., а II вида — 3000 у.е. Приобретение одного комплекта оборудования I вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования II вида — на 4 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования I вида требуется 2 м^2 площади, а оборудования II вида — 1 м^2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который даст возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Р е ш е н и е. Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие приобретет x_1 комплектов оборудования I вида и x_2 комплектов оборудования II вида. Тогда переменные x_1 и x_2 должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Если предприятие приобретет указанное количество оборудования, то общее увеличение выпуска продукции составит

$$F = 2x_1 + 4x_2. \qquad (2.27)$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1 и x_2 могут принимать лишь целые неотрицательные значения, то есть

$$x_1,\ x_2 \le 0, \qquad (2.28)$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \qquad (2.29)$$

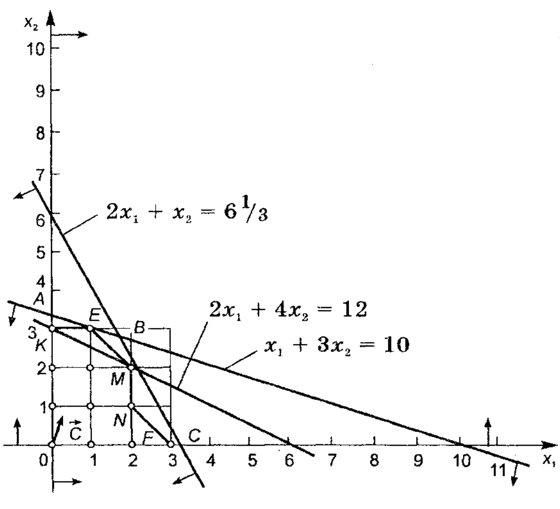


Рис. 2.3

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: найти максимальное значение линейной функции (2.27) при выполнении условий (2.26), (2.28) и (2.29). Так как неизвестные могут принимать только целые значения, то задача (2.26)—(2.29) является задачей целочисленного программирования.

Поскольку число неизвестных в задаче равно двум, ее решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию. Прежде всего построим многоугольник решений задачи *OABC* (рис. 2.3). Координаты всех его точек удовлетворяют системе линейных неравенств (2.26) и условию неотрицательности переменных (2.28). Вместе с тем, условию (2.29), то есть условию целочисленности переменных, удовлетворяют координаты лишь 12 точек. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник $OABC$ многоугольником $OKEMNF$, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами. Найдя точку максимума функции (2.27) на многоугольнике $OKEMNF$, мы получим координаты, которые и будут определять оптимальный план задачи.

Построим вектор $\vec{C} = (2; 4)$ и прямую $2x_1 + 4x_2 = 12$, проходящую через многоугольник решений $OKEMNF$ (число 12 взято произвольно). Построенную прямую передвигаем в направлении вектора $\vec{C}$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю общую с данным многоугольником точку. Ее координаты определяют оптимальный план, а значение целевой функции в ней является максимальным.

В данном случае искомой является точка E (1; 3), в которой целевая функция принимает максимальное значение $F_{max} = 14$. Следовательно, координаты точки E определяют оптимальный план задачи (2.26)—(2.29). В соответствии с этим планом предприятию следует приобрести один комплект оборудования I вида и три комплекта оборудования II вида. Это обеспечит предприятию при имеющихся у него ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.

2.41. Для выполнения работ требуется n механизмов. Производительность i-го механизма ($i = \overline{1, n}$) при выполнении j-й работы ($j = \overline{1, n}$) равна c_{ij}.

Предполагая, что каждый механизм может быть использован только на одной работе и каждая работа может выполняться только одним механизмом, определить закрепление механизмов за работами, обеспечивающее максимальную производительность. Построить математическую модель задачи.

Р е ш е н и е. Введем переменную x_{ij}, значение которой равно 1, если при выполнении i-й работы используется j-й механизм, и равно 0 — в противном случае. Тогда условия использования каждого механизма только на одной работе выражаются равенством

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = \overline{1, m}), \qquad (2.30)$$

а условия выполнения работы только одним механизмом — равенством

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\ (j = \overline{1, n}) \tag{2.31}$$

при условиях

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ю работу выполняет } j\text{-й механизм;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{2.32}$$

Таким образом, задача состоит в определении таких значений неизвестных $x_{ij}(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n})$, удовлетворяющих системам уравнений (2.30) и (2.31) и условию (2.32), при которых достигается максимальное значение функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{2.33}$$

Сформулированная задача является задачей целочисленного программирования.

Найдите решение задач целочисленного программирования 2.42—2.44.

2.42. $3x_1 + x_2 \to \min$

при условиях

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$; x_1, x_2 — целые.

2.43. $5x_1 + 7x_2 \to \min$

при условиях

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$; x_1, x_2 — целые.

2.44. $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_5 \ge 0$; $x_1, \ldots, x_5$ — целые.

Составьте математические модели задач 2.45—2.48.

2.45. Необходимо составить план развития каждого из m предприятий, выпускающих однородную продукцию. Число возможных вариантов развития i-го предприятия различно и равно n_i. Реализация j-го варианта развития i-го предприятия

($j = \overline{1, n_i}$) требует капитальных затрат, равных K_{ij}, и обеспечивает выпуск продукции в объеме b_{ij} единиц. При этом экономический эффект от капитальных вложений на развитие i-го предприятия по j-му варианту равен c_{ij}. Учитывая, что необходимо выпустить продукцию в количестве B единиц и что общая величина капиталовложений ограничена и равна K, составить такой план развития предприятий, при котором экономический эффект от реализации выбранных вариантов развития предприятий являлся бы максимальным.

2.46. В аэропорту для перевозки пассажиров по n маршрутам может быть использовано m типов самолетов. Вместимость самолета i-го типа равна a_i человек, а количество пассажиров, перевозимых по j-му маршруту за сезон, составляет b_j человек. Затраты, связанные с использованием самолета i-го типа на j-м маршруте, составляют c_{ij} у.е.

Определить, сколько самолетов данного типа и на каком из маршрутов следует использовать, чтобы удовлетворить потребности в перевозках при наименьших общих затратах.

2.47. На обувном производственном объединении производится раскрой m различных партий материалов, причем каждая из партий состоит из b_i единиц материала, имеющего одинаковую форму (например, пластины) и размер. Из материалов всех партий требуется выкроить максимальное количество комплектов деталей обуви, в каждый из которых входит d_j ($j = \overline{1, n}$) деталей j-го вида. При раскрое единицы материала i-й партии по k-му варианту ($k = \overline{1, K}$) получается a_{ikj} деталей j-го вида.

2.48. Имеется n городов, расстояние между любыми двумя из которых равно c_{ij}. Найти маршрут, имеющий минимальную длину, начинающийся и кончающийся в одном и том же городе и включающий по одному разу все остальные города.

2. Определение оптимального плана задачи целочисленного программирования. Рассмотрим задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В связи с этим сформулируем основную задачу линейного программирования, в которой переменные могут принимать только целые значения. В общем виде эту задачу можно записать так: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.34}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{2.35}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{2.36}$$

$$x_j \text{ — целые.} \tag{2.37}$$

Если искать решение задачи (2.34)—(2.37) симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет (примером задачи линейного программирования, решение которой всегда является целочисленным, служит транспортная задача). В общем же случае для определения оптимального плана данной задачи требуются специальные методы. В настоящее время их существует несколько. Наиболее известен метод Гомори, основывающийся на описанном выше симплексном методе.

Метод Гомори. Решение задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи (2.34)—(2.36) без учета целочисленности переменных. После того как план найден, просматривают его компоненты. Если среди них нет дробных чисел, то этот план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования (2.34)—(2.37). Если же в оптимальном плане задачи (2.34)—(2.36) переменная x_j принимает дробное значение, то к системе уравнений (2.35) добавляют неравенство

$$\sum_{j} f(a_{ij}^{*}) x_j \ge f(b_i^{*}) \tag{2.38}$$

и находят решение задачи (2.34)—(2.36), (2.38).

В неравенстве (2.38) a^*_{ij} и b^*_i — преобразованные исходные величины a_{ij} и b_i, значения которых взяты из последней симплекс-таблицы, а $f(a_{ij}^*)$ и $f(b_i^*)$ — *дробные части чисел (под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число b* — такое, что разность между *a* и *b* есть целое). Если в оптимальном плане задачи (2.34)—(2.36) дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство (2.38) определяется наибольшей дробной частью.

Если в найденном плане задачи (2.34)—(2.36), (2.38) переменные принимают дробные значения, то следует добавить одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторить. Проведя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования (2.34)—(2.37), либо устанавливают ее неразрешимость.

Если требование целочисленности (2.37) относится лишь к некоторым переменным, то такие задачи называются *частично целочисленными*. Их решение также находят последовательным решением задач, каждая из которых вытекает из предыдущей после введения дополнительного ограничения. В нашем случае такое ограничение имеет вид

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geq f(b_i^*), \tag{2.39}$$

где γ_{ij} определяются из следующих соотношений:

1) для x_j, которые могут принимать нецелочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^* & \text{при } a_{ij}^* \geq 0, \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} \cdot \left|a_{ij}^*\right| & \text{при } a_{ij}^* < 0; \end{cases} \tag{2.40}$$

2) для x_j, которые могут принимать только целочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}^*) & \text{при } f(a_{ij}^*) \leq f(b_i^*), \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f(b_i^*)} \left[1 - f(a_{ij}^*)\right] & \text{при } f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \tag{2.41}$$

Из изложенного выше следует, что процесс определения оптимального плана задачи целочисленного программирования методом Гомори включает четыре основных этапа.

1°. Используя симплексный метод, находят решение задачи (2.34)—(2.36) без учета требования целочисленности переменных.

2°. Составляют дополнительное ограничение для переменной, которая в оптимальном плане задачи (2.34)—(2.36) имеет максимальное дробное значение, а в оптимальном плане задачи (2.34)—(2.37) должна быть целочисленной.

3°. Используя двойственный симплекс-метод, находят решение задачи, получающейся из задачи (2.34)—(2.36) в результате присоединения дополнительного ограничения.

4°. В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение и продолжают итерационный процесс до получения оптимального плана задачи (2.34)—(2.37) или установления ее неразрешимости.

2.49. Методом Гомори найти максимальное значение функции

$$F = 3x_1 + 2x_2 \tag{2.42}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases} \tag{2.43}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}), \tag{2.44}$$

$$x_j \text{ — целые } \ (j = \overline{1, 5}). \tag{2.45}$$

Дать геометрическую интерпретацию решения задачи.

Решение. Для определения оптимального плана задачи (2.42)—(2.45) сначала находим оптимальный план задачи (2.42)—(2.44) (табл. 2.42).

Таблица 2.42

i	Базис	$C_б$	P_0	3	2	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	0	13	1	1	1	0	0
2	P_4	0	6	1	−1	0	1	0
3	P_5	0	9	−3	1	0	0	1
4			0	−3	−2	0	0	0
1	P_3	0	7	0	2	1	−1	0
2	P_1	3	6	1	−1	0	1	0
3	P_5	0	27	0	−2	0	3	1
4			18	0	−5	0	3	0
1	P_2	2	7/2	0	1	1/2	−1/2	0
2	P_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0
3	P_5	0	34	0	0	1	2	1
4			71/2	0	0	5/2	1/2	0

Как видно из табл. 2.42, найденный оптимальный план $X = (19/2,\ 7/2,\ 0,\ 0,\ 10)$ задачи (2.42)—(2.44) не является оптимальным планом задачи (2.42)—(2.45), поскольку две компоненты x_1 и x_2 имеют нецелочисленные значения. При этом дробные части этих чисел равны между собой. Поэтому для одной из этих переменных составляется дополнительное ограничение. Составим, например, такое ограничение для переменной x_2. Из последней симплекс-таблицы (табл. 2.42) имеем

$$x_2 + (1/2)x_3 - (1/2)x_4 = 7/2.$$

Таким образом, к системе ограничений задачи (2.42)—(2.44) добавляем неравенство

$$f(1)x_2 + f(1/2)x_3 + f(-1/2)x_4 \geq f(7/2), \text{ или } (1/2)x_3 + (1/2)x_4 \geq 1/2,$$

то есть

$$x_3 + x_4 \geq 1. \qquad (2.46)$$

Находим теперь максимальное значение функции (2.42) при выполнении условий (2.43), (2.44) и (2.46) (табл. 2.43).

Таблица 2.43

i	Базис	$C_б$	P_0	3	2	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	2	7/2	0	1	1/2	−1/2	0	0
2	P_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0	0
3	P_5	0	34	0	0	1	2	1	0
4	P_6	0	−1	0	0	−1	−1	0	1
5			71/2	0	0	5/2	1/2	0	0
1	P_2	2	4	0	1	1	0	0	−1/2
2	P_1	3	9	1	0	0	0	0	1/2
3	P_5	0	32	0	0	−1	0	1	2
4	P_4	0	1	0	0	1	1	0	−1
5			35	0	0	2	0	0	1/2

Из табл. 2.43 видно, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (9, 4, 0, 1, 32)$. При этом плане значение целевой функции равно $F_{max} = 35$. Дадим геометрическую интерпретацию решения задачи. Областью допустимых решений задачи (2.42)—(2.44) является многоугольник $OABCD$ (рис. 2.4). На рисунке видно, что максимальное значение целевая функция принимает в точке C (19/2; 7/2), то есть $X = (19/2, 7/2, 0, 0, 34)$ является оптимальным планом. Это следует и из табл. 2.42. Так как $X = (19/2, 7/2, 0, 0, 34)$ не является оптимальным планом задачи (2.42)—(2.45) (числа 19/2 и 7/2 — дробные), то вводится дополнительное ограничение

$$x_3 + x_4 \geq 1.$$

Исключая из него x_3 и x_4 подстановкой вместо них соответствующих значений из уравнений системы ограничений (2.43), получим $x_1 \leq 9$. Этому неравенству соответствует полуплоскость, ограниченная прямой $x_1 = 9$, отсекающей от многоугольника $OABCD$ треугольник EFC.

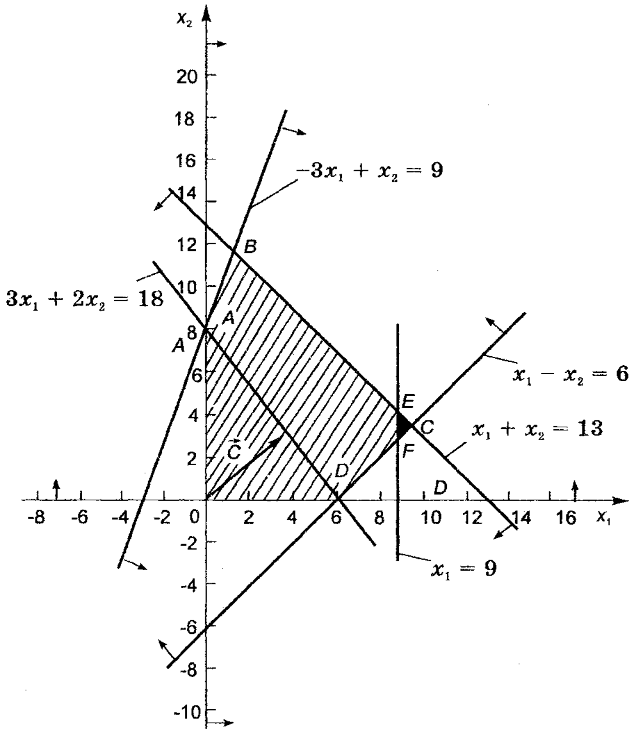


Рис. 2.4

Как видно из рис. 2.4, областью допустимых решений полученной задачи является многоугольник $OABEFD$. В точке E (9; 4) этого многоугольника целевая функция данной задачи принимает максимальное значение. Так как координаты точки E — целые числа и неизвестные x_3, x_4 и x_5 принимают целочисленные значения при подстановке в уравнения (2.43) значений $x_1 = 9$ и $x_2 = 4$, то $X^* = (9, 4, 0, 0, 32)$ является оптимальным планом задачи (2.42)—(2.45). Это следует и из табл. 2.43.

2.50 Методом Гомори найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = x_1 + 4x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 - \text{целые}.$$

Дать геометрическую интерпретацию решения задачи.

Решение. Сформулированную задачу перепишем так: найти максимальное значение функции

$$F = x_1 + 4x_2 \qquad (2.47)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4, \end{cases} \qquad (2.48)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 4}), \qquad (2.49)$$

$$x_1, x_2 \text{ — целые}. \qquad (2.50)$$

Задача (2.47)—(2.50) является частично целочисленной, так как переменные x_3 и x_4 могут принимать нецелочисленные значения. Находим симплексным методом решение задачи (2.47)—(2.50) (табл. 2.44).

Таблица 2.44

i	Базис	$C_б$	P_0	1	4	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	19/3	2	1	1	0
2	P_4	0	4	1	3	0	1
3			0	–1	–4	0	0
1	P_3	0	5	5/3	0	1	–1/3
2	P_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3
3			16/3	1/3	0	0	4/3

После II итерации получаем оптимальный план данной задачи $X = (0, 4/3, 5, 0)$, при котором переменная x_2 имеет нецелочисленное значение. Поэтому необходимо перейти к новой задаче, добавив к системе ограничений (2.48)—(2.50) еще одно:

$$f(1/3)x_1 + f(1)x_2 + f(1/3)x_4 \ge f(4/3) \text{ или } (1/3)x_1 + (1/3)x_4 \ge 1/3,$$

то есть

$$x_1 + x_4 - x_5 = 1 \ (x_5 \ge 0). \qquad (2.51)$$

Теперь определим максимальное значение функции (2.47) при условиях (2.48), (2.49) и (2.51). Данную задачу решаем двойственным симплекс-методом (табл. 2.45).

Таблица 2.45

i	Базис	$C_б$	P_0	1	4	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	5	5/3	0	1	–1/3	0
2	P_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0
3	P_5	0	–1	–1	0	0	–1	1
4			16/3	1/3	0	0	4/3	0
1	P_3	0	10/3	0	0	1	–2	5/3
2	P_2	4	1	0	1	0	0	1/3
3	P_1	1	1	1	0	0	1	–1
4			5	0	0	0	1	1/3

Из таблицы видно, что $X^* = (1, 1, 10/3, 0, 0)$ является оптимальным планом построенной задачи, а поскольку переменные x_1 и x_2 принимают при нем целые значения, то он также является оптимальным планом исходной задачи (2.47)—(2.50).

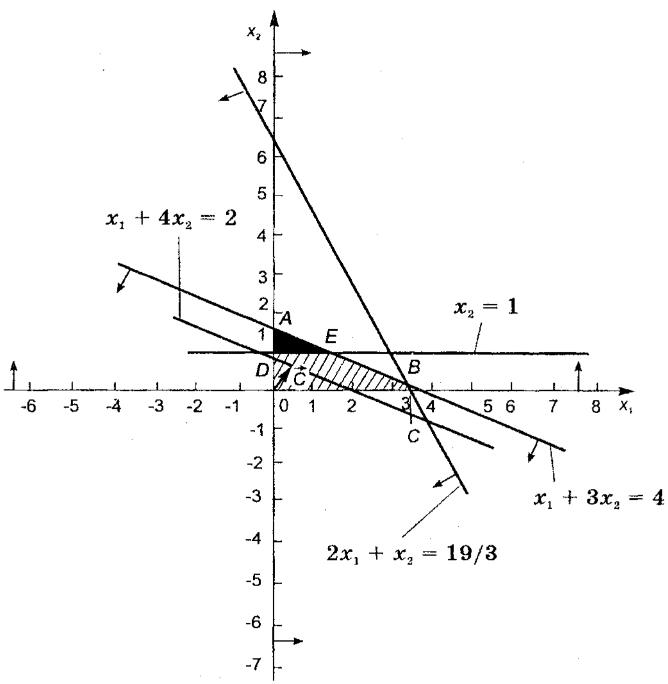


Рис. 2.5

Дадим геометрическую интерпретацию решения задачи. На рис. 2.5 показана область допустимых решений задачи (2.47)—(2.49). Заметно, что максимальное значение целевая функция принимает в точке A (0; 4/3), то есть $X = (0,\ 4/3,\ 5,\ 0)$ является оптимальным планом задачи (2.47)—(2.50). В то же время $X = (0,\ 4/3,\ 5,\ 0)$ не является планом задачи (2.47)—(2.50), так как переменная x_2 принимает дробное значение. Поэтому вводим дополнительное ограничение $x_1 + x_4 \geq 1$, откуда, подставляя вместо x_4 его значение из второго уравнения системы уравнений (2.48), получаем $x_2 \leq 1$. Этому неравенству на рис. 2.5 соответствует полуплоскость, ограниченная прямой $x_2 = 1$, отсекающей от многоугольника $OABC$ треугольник ADE. В области $ODEBC$ находим точку E (1; 1), в которой функция (2.47) принимает максимальное значение. Так как координаты точки E — целые числа, то $X^* = (1,\ 1,\ 10/3,\ 0)$ является оптимальным планом задачи (2.47)—(2.50). Это видно и из табл. 2.45.

Метод ветвей и границ. Продолжим рассмотрение задачи (2.34)—(2.37), состоящей в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}),$$

$$x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, n}).$$

Как и при решении сформулированной задачи методом Гомори, первоначально находим симплексным методом или методом искусственного базиса оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных. Пусть им является план X_0. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи и $F_{max} = F(X_0)$. Если же среди компонент плана X_0 имеются дробные числа, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и необходимо осуществить упорядоченный переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи. Покажем, как это можно сделать, предварительно отметив, что $F(X_0) \geq F(X)$ для всякого последующего плана X.

Предполагая, что найденный оптимальный план X_0 не удовлетворяет условию целочисленности переменных, считаем, что среди его компонент есть дробные числа. Пусть, например, переменная x_{i0} приняла в плане X_0 дробное значение. Тогда в оптимальном целочисленном плане ее значение будет по крайней мере либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_{i0}, либо больше или равно ближайшему большему целому числу $K_{i0} + 1$. Определяя эти числа, находим симплексным методом решение двух задач линейного программирования:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \text{при условиях} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}), \\ x_{i0} \le K_{i0}, \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}); \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \text{при условиях} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}), \\ x_{i0} \ge K_{i0} + 1, \\ x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Найдем рассмотренными выше методами решение задач линейного программирования (I) и (II). Очевидно, здесь возможен один из следующих четырех случаев.

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нем и дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

3. Обе задачи разрешимы. Одна из них имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план явля-

ется оптимальным для исходной задачи и он вместе со значением целевой функции на нем дает искомое решение. Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, построить две задачи, аналогичные (I) и (II).

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой является дробным числом, и строим две задачи, аналогичные (I) и (II).

Таким образом, описанный выше итерационный процесс может быть представлен в виде некоторого дерева, на котором исходная вершина отвечает оптимальному плану X_0 задачи (2.34)—(2.36), а соединенные с ней ветвью вершины отвечают оптимальным планам задач (I) и (II). Каждая из этих вершин имеет свои ветвления. При этом на новом шаге последовательно выбирается та вершина, для которой значение функции является наибольшим. Если на некотором шаге будет получен план, имеющий целочисленные компоненты, и значение функции на нем окажется больше или равно, чем значение функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план будет признан оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и значение целевой функции на нем — максимальным.

Итак, процесс нахождения решения задачи целочисленного программирования (2.34)—(2.37) методом ветвей и границ включает четыре основных этапа.

1°. Находят решение задачи линейного программирования (2.34)—(2.36).

2°. Составляют дополнительные ограничения для одной из переменных, значение которой в оптимальном плане задачи (2.34)—(2.36) является дробным числом.

3°. Находят решение задач (I) и (II), которые получаются из задачи (2.34)—(2.36) в результате присоединения дополнительных ограничений.

4°. В случае необходимости составляют дополнительные ограничения для переменной, значение которой является дробным, формулируют задачи, аналогичные задачам (I) и (II), и находят их решение. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока не будет найдена вершина, соответствующая целочисленному плану задачи (2.34)—(2.36), и такая, что значение функции в этой вершине окажется больше или равно значению функции в других возможных для ветвления вершинах.

Описанный метод ветвей и границ имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод Гомори. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных задач целочисленного программирования с использованием ЭВМ применяется именно этот метод.

2.51. Методом ветвей и границ найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + x_2 \tag{2.52}$$

при условиях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \end{cases} \tag{2.53}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}), \tag{2.54}$$

$$x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 5}). \tag{2.55}$$

Р е ш е н и е. Находим решение сформулированной задачи симплексным методом без учета условия целочисленности переменных. В результате устанавливаем, что такая задача имеет оптимальный план $X_0 = (18/5, 3/5, 0, 0, 24/5)$. При этом плане $F = (X_0) = 39/5$. Так как в плане X_0 значения трех переменных являются дробными числами, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и, следовательно, не является оптимальным планом исходной задачи.

Возьмем какую-нибудь переменную, значение которой является дробным числом, например x_1. Тогда эта переменная в оптимальном плане исходной задачи будет принимать значение либо $x_1 \leq 3$, либо $x_1 \geq 4$.

Рассмотрим две задачи линейного программирования:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max \\ \text{при условиях} \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 \leq 3, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}); \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max \\ \text{при условиях} \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 \geq 4, \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

Задача (I) имеет оптимальный план $X_1^{(1)} = (3, 3/2, 0, 9/2, 3/2)$, Задача (I) имеет оптимальный план $X_1^{(1)} = (3,\ 3/2,\ 0,\ 9/2,\ 3/2)$, на котором значение целевой функции $F(X_1^{(1)}) = 15/2$. Задача (II) неразрешима.

Исследуем задачу (I). Так как среди компонент оптимального плана этой задачи есть дробные числа, то для одной из переменных, например x_2, вводим дополнительные ограничения:

$$x_2 \le 1,$$

$$x_2 \ge 2.$$

Рассмотрим теперь следующие две задачи:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max \\ \text{при условиях} \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 1, \\ x_j \ge 0\ (j = \overline{1,5}); \end{cases} \qquad \text{(IV)}\quad \begin{cases} F = 2x_1 + x_2 \to \max \\ \text{при условиях} \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 2, \\ x_j \ge 0\ (j = \overline{1,5}). \end{cases}$$

Задача (IV) неразрешима, а задача (III) имеет оптимальный план $X_2^{(1)} = (3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3)$, на котором значение целевой функции задачи $F(X_2^{(1)}) = 7$. Таким образом, исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3)$. При этом плане целевая функция задачи принимает максимальное значение $F_{\max} = 7$.

Схему реализованного выше вычислительного процесса можно представить в виде дерева, ветвями которого являются соответствующие ограничения на переменные, а вершинами — решения соответствующих задач линейного программирования (рис. 2.6).

Дадим геометрическую интерпретацию решения задачи (2.52)—(2.55). На рис. 2.7 показана область допустимых решений задачи (2.52)—(2.54). Данная задача имеет оптимальный план $X_0 = (18/5,\ 3/5,\ 0,\ 0,\ 24/5)$. В то же время X_0 не является оптимальным планом задачи (2.52)—(2.55), поскольку три переменные имеют дробные значения. Возьмем переменную x_1 и рассмотрим задачи (I) и (II).

Как видно из рис. 2.8, задача (I) имеет оптимальный план $X_1^{(1)} = (3,\ 3/2,\ 0,\ 9/2,\ 3/2)$, а из рис. 2.9. следует, что задача (II) неразрешима. Поскольку среди компонент плана $X_1^{(1)}$ есть дробные числа, выберем переменную x_2 и рассмотрим задачи (III) и (IV). Задача (III) имеет оптимальный план $X_2^{(1)} = (3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3)$ (рис. 2.10), а задача (IV) неразрешима (рис. 2.11).

Итак, $X^* = (3, 1, 2, 3, 3)$ является оптимальным планом задачи (2.52)—(2.55). При этом плане $F_{\max} = 7$.

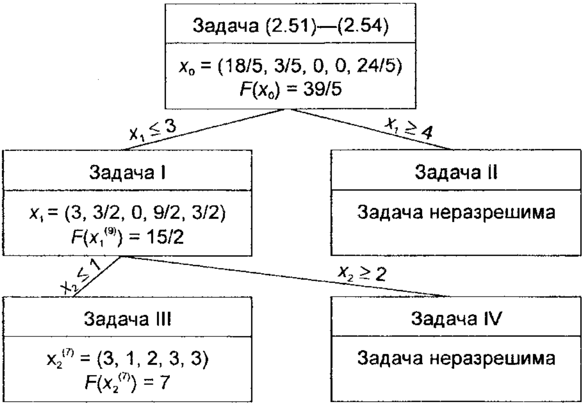


Рис. 2.6

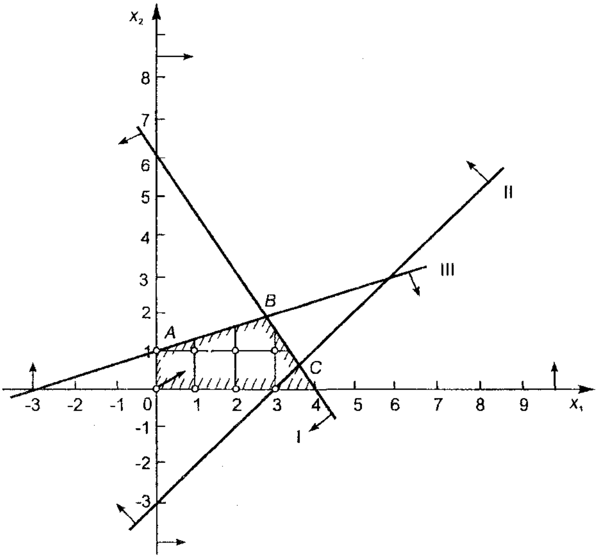
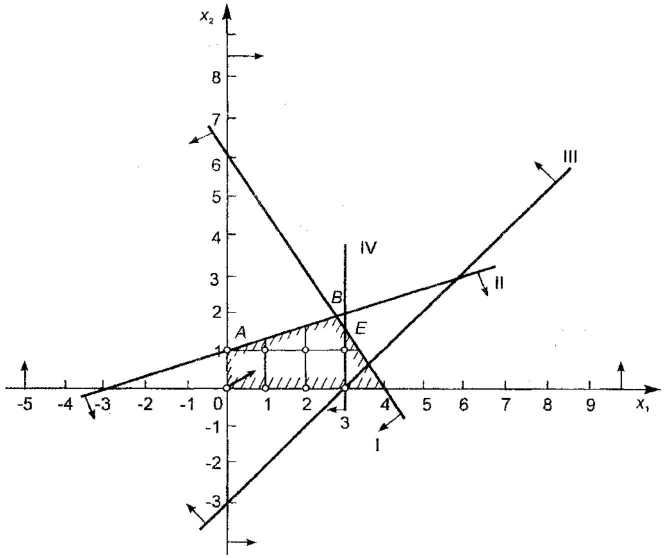
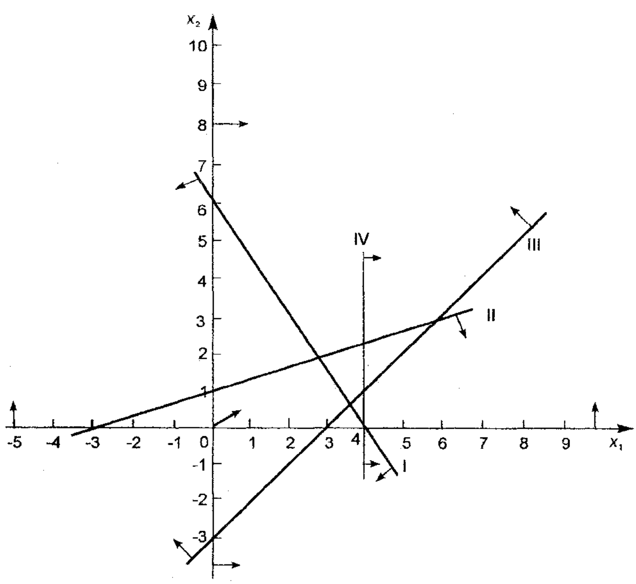


Рис. 2.7



x_2
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x_1
A
B
E
I
II
III
IV

Рис. 2.8



x_2
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x_1
I
II
III
IV

Рис. 2.9

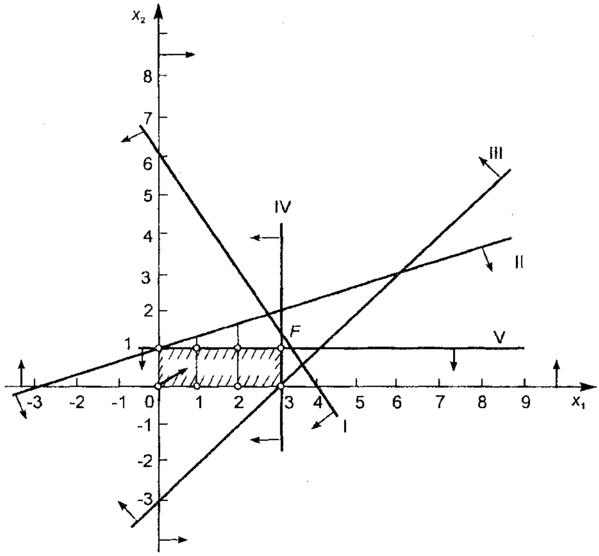


Рис. 2.10

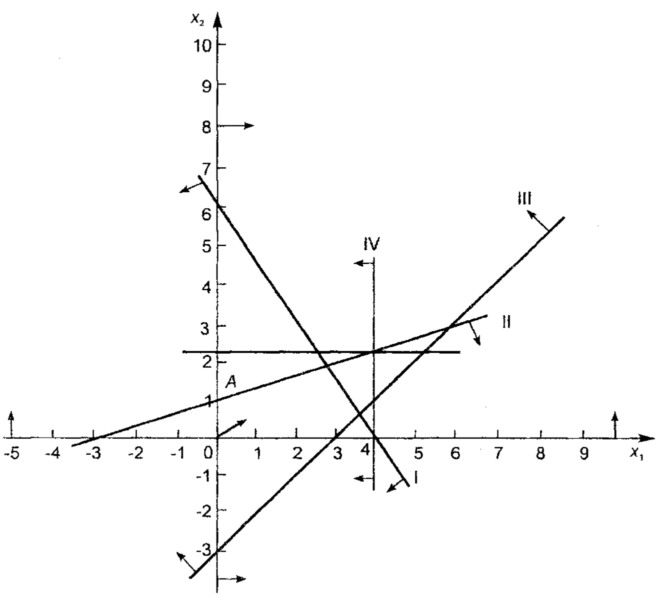


Рис. 2.11

3. Использование пакета Solver для решения задач целочисленного программирования. Процесс нахождения решения задачи целочисленного программирования с использованием пакета Solver включает в себя те же основные этапы, что и при нахождении решения задачи линейного программирования. Особенностью в решении задачи целочисленного программирования является лишь введение дополнительного ограничения на подбираемые значения переменных, которые должны быть целого типа. Используя пакет Solver, найдем решение задачи 2.49 целочисленного программирования, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 3x_1 + 2x_2 \qquad (2.56)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases} \qquad (2.57)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}),$$

$$x_j \text{ — целые.} \qquad (2.58)$$

Р е ш е н и е. В соответствии с целевой функцией (2.56), системой неравенств (2.57) и условиями ограничений (2.58) осуществляется подготовка рабочего листа электронной таблицы. Вид рабочего листа представлен на рис. 2.12.

Область отыскиваемых значений (*x*1—*x*5)				
1	1	1	1	1

Область расчета функции ограничения		
=*A*2 + *B*2 + *C*2	= *A*2 – *B*2 + *C*2	= –3 · *A*2 + *B*2 + *E*2

Целевая функция
= 3 · *A*2 + 2 · *B*2

Рис. 2.12

Параметры пакета Solver определяются, как показано на рис. 2.13.

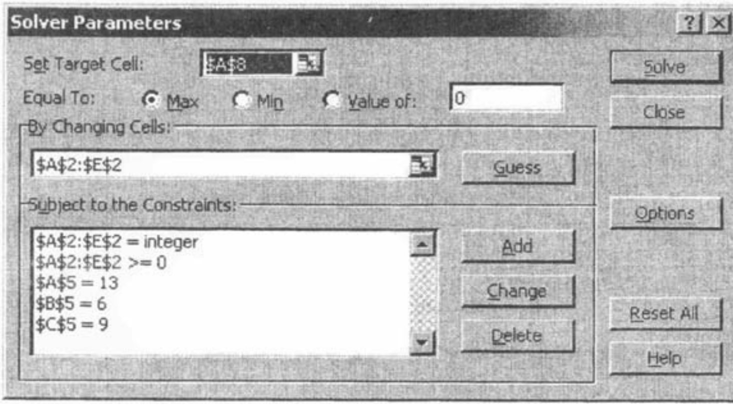


Рис. 2.13

Результат решения задачи целочисленного программирования представлен на рабочем листе электронной таблицы (рис. 2.14)

Область отыскиваемых значений (x1—x5)				
10	3.50	0	1	34

Область расчета функции ограничения		
13	6	9

Целевая функция
35.50

Рис. 2.14

Используя рассмотренные методы, найдите решение задач 2.53—2.58.

2.53. $F = -5x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 7x_5 + 6x_6 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 30, \\ -4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \le 60, \end{cases}$$

$$0 \le x_j \le 10,$$

$$x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 6}).$$

2.54. $F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 1{,}85x_2 + x_3 + x_4 \le 16, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 10, \\ 4x_1 + 6{,}9x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100, \\ 6{,}3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 100, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,$$

$$x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 4}).$$

2.55. $F = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 5x_6 = 11, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_5 + 5x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,$$

$$x_j \text{ — целые } (j = \overline{1, 6}).$$

2.56. Для выполнения четырех видов землеройных работ могут быть использованы экскаваторы четырех типов. Производительность экскаватора i-го типа при выполнении j-й работы задается матрицей

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что на каждой из работ может быть занят только один экскаватор и что все экскаваторы должны быть задействованы, найти такое распределение экскаваторов между работами, которое обеспечивало бы максимальную производительность.

2.57. Пароход может быть использован для перевозки 11 наименований груза, масса, объем и цена единицы каждого из которых приведены в табл. 2.46. На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объемом, не превышающим 600 м^3.

Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход, чтобы при этом общая стоимость размещенного груза была максимальной.

Т а б л и ц а 2.46

Параметры единицы груза	Номер груза										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Масса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Объем ($м^3$)	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Цена (у.е.)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

2.58. Из листового проката нужно выкроить заготовки четырех видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в табл. 2.47.

Т а б л и ц а 2.47

Длина заготовки (см)	Количество заготовок (шт.), выкраиваемых из одного листа при разрезе способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	–	–	–	–	–
50	–	1	–	–	2	–	1	1	3	2	1	–	2
65	–	–	1	–	–	2	1	–	–	1	2	1	–
85	–	–	–	1	–	–	–	1	–	–	–	1	–
Величина отходов (см)	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Определить, какое количество листов следует разрезать каждым способом, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

§ 2.3. Задачи параметрического программирования

1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи параметрического программирования. Во многих задачах математического программирования исходные данные зависят от некоторого параметра. Такие задачи называются задачами параметрического программирования. Рассмотрим зависимость исходных данных от некоторого параметра применительно к основной задаче линейного программирования.

Задача, в которой коэффициенты целевой функции линейно зависят от параметра t, заключается в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j \qquad (2.59)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}), \qquad (2.60)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \qquad (2.61)$$

где c_j', c_j'', a_{ij} и b_i — заданные постоянные числа.

Если от параметра t линейно зависят свободные члены системы ограничений, то задача состоит в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения линейной функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.62)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i' + b_i' t \ (i = \overline{1, m}), \qquad (2.63)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \qquad (2.64)$$

где c_j, a_{ij} и $b_i' + b_i''$ — заданные постоянные числа.

В том случае, когда от параметра t линейно зависят как коэффициенты целевой функции, так и свободные члены системы ограничений, задача состоит в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j \qquad (2.65)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i' + b_i'' t \ (i = \overline{1, m}), \qquad (2.66)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \qquad (2.67)$$

Обобщением этих задач является общая задача параметрического программирования, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений. Она заключается в следующем. Для каждого значения параметра t из некоторого промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ требуется найти максимальное значение функции

$$F = \sum_{j=1}^{n}(c_j'+c_j''t)x_j \tag{2.68}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}'+a_{ij}''t)x_j = b_i'+b_i''t \ (i = \overline{1, m}), \tag{2.69}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{2.70}$$

Решение сформулированных задач можно найти методами линейного программирования, о чем более подробно будет сказано в дальнейшем. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задач параметрического программирования, остановившись более подробно на задаче (2.59)—(2.61). Предположим, что множество неотрицательных решений системы линейных уравнений (2.60) (многогранник решений) не пусто и включает более чем одну точку. Тогда исходная задача состоит в определении при каждом значении параметра $t \in [\alpha, \beta]$ такой точки многогранника решений, в которой функция (2.59) принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, будем считать $t = t_0$ и, используя геометрическую интерпретацию, ищем решение полученной задачи линейного программирования (2.59)—(2.61), то есть либо определяем вершину многогранника решений, в которой функция (2.59) имеет максимальное значение, либо устанавливаем, что при данном значении t_0 задача неразрешима.

После того как найдена точка, в которой при $t = t_0$ функция (2.59) принимает максимальное значение, ищем множество значений t, для которых координаты указанной точки определяют оптимальный план задачи (2.59)—(2.61). Найденные значения параметра t исключаем из рассмотрения и берем некоторое новое значение t_1, принадлежащее промежутку $[\alpha, \beta]$. Для выбранного значения параметра t_1 определяем оптимальный план полученной задачи или устанавливаем ее неразрешимость. После этого находим отрезок изменения параметра t_1, принадлежащий промежутку $[\alpha, \beta]$, для которого найденная точка определяет оптимальный план или для которого задача неразрешима. В результате после конечного числа шагов для каждого значения параметра t из промежутка $[\alpha, \beta]$ либо находим оптимальный план, либо устанавливаем неразрешимость задачи.

В пакете Solver задача параметрического программирования решается с использованием сценариев, каждый из которых соответствует значению параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$.

2.59. Предприятие должно выпустить два вида продукции A и B, для изготовления которых используется три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.48. В ней же указаны запасы сырья каждого вида, которое может быть использовано на производство единицы продукции данного вида.

Таблица 2.48

Вид сырья	Нормы расхода сырья на производство единицы продукции		Запасы сырья
	A	B	
I	4	1	16
II	2	2	22
III	6	3	36

Известно, что цена единицы продукции может изменяться для изделия A от 2 до 12 у.е., а для изделия B — от 13 до 3 у.е., причем эти изменения определяются соотношениями $c_1 = 2 + t$, $c_2 = 13 - t$, где $0 \le t \le 10$.

Для каждого из возможных значений цены единицы продукции каждого вида найти такой план их производства, при котором общая стоимость продукции являлась бы максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции A и x_2 единиц продукции B. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра t $(0 \le t \le 10)$ максимального значения функции

$$F = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 \tag{2.71}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36, \end{cases} \tag{2.72}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{2.73}$$

Чтобы найти решение задачи (2.71)—(2.73), строим многоугольник решений, определяемый системой линейных неравенств (2.72) и условием неотрицательности переменных (2.73) (рис. 2.14). После этого, полагая $t = 0$, строим прямую $2x_1 + 13x_2 = 26$ (число 26 взято произвольно) и вектор $\vec{C} = (2; 13)$. Передвигая построенную прямую в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений $OABCD$ является точка A (0; 11). Следовательно, задача, полученная из задачи (2.71)—(2.73) при $t = 0$, имеет оптимальный план $X^* = (0, 11)$. Это означает, что если цена единицы продукции A равна $2 + 0 = 2$ у.е., а цена единицы продукции B равна $13 - 0 = 13$ у.е., то оптимальным планом производства является план, согласно которому производятся 11 изделий B и не производятся изделия A. При таком плане производства продукции ее стоимость максимальна и равна $F_{max} = 143$.

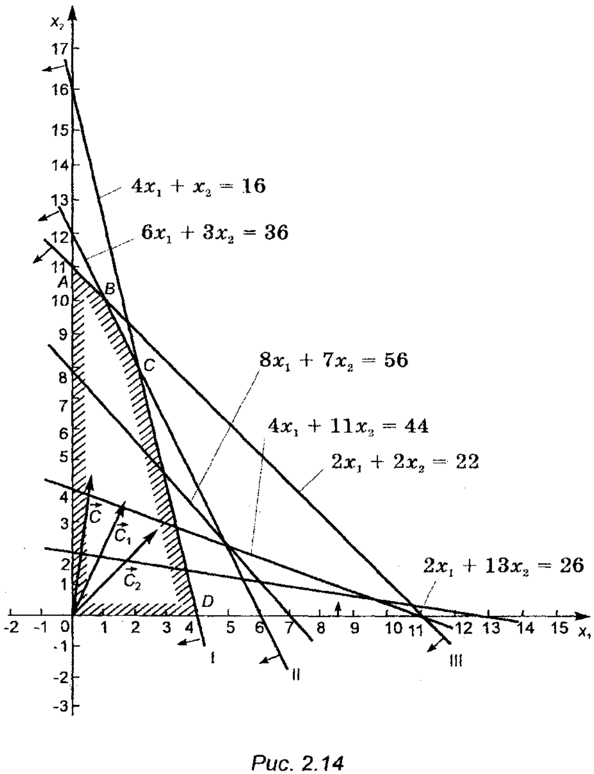


Рис. 2.14

Положим теперь $t = 2$ и построим прямую $(2 + 2)x_1 + (13 - 2)x_2 = 4x_1 + 11x_2 = 44$ (число 44 взято произвольно) и вектор $\vec{C}_1 = (4; 11)$. *Передвигая построенную прямую в направлении вектора* $\vec{C}_1$, видим, что последней ее общей точкой с многоугольником решений является точка A (0; 11). Следовательно, задача, полученная из задачи (2.71)—(2.73) при $t = 2$, имеет оптимальный план $X_0^* = (0, 11)$. Это означает, что если цена единицы продукции A равна $2 + 2 = 4$ у.е., а цена единицы продукции B равна $13 - 2 = 11$ у.е., то предприятию также наиболее целесообразно производить 11 ед. продукции вида B и совсем не производить продукцию вида A. При таком плане производства продукции ее общая стоимость является максимальной и составляет

$$F_{max} = (2 + 2) \cdot 0 + (13 - 2) \cdot 11 = 121 \text{ у.е.}$$

Как видно на рис. 2.14, данный план производства продукции будет оставаться оптимальным для всякого значения t, пока прямая $(2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 = h$ не станет параллельной прямой $2x_1 + 2x_2 = 22$. Это произойдет тогда, когда $(2 + t)/2 = (13 - t)/2$, то есть при $t = 5{,}5$. При этом значении t координаты любой точки отрезка AB дают оптимальный план задачи (2.71)—(2.73).

Таким образом, для всякого $0 < t < 5{,}5$ задача (2.71)—(2.73) имеет оптимальный план $X_0^* = (0, 11)$, при котором значение целевой функции (2.71) есть

$$F_{max} = (2 + t) \cdot 0 + (13 - t) \cdot 11 = 143 - 11t.$$

Возьмем теперь какое-нибудь значение параметра t, большее 5,5, например 6. Полагая $t = 6$, найдем решение соответствующей задачи (2.71)—(2.73). Для этого построим прямую $(2 + 6)x_1 + (13 - 6)x_2 = 8x_1 + 7x_2 = 56$ (число 56 взято произвольно) и вектор $\vec{C}_2 = (8; 7)$. Передвигая построенную прямую в направлении вектора $\vec{C}_2$, видим, что последней ее общей точкой с многоугольником решений является точка B (1; 10). Следовательно, задача, полученная из задачи (2.71)—(2.73) при $t = 6$, имеет оптимальный план $X_1^* = (1, 10)$. Это означает, что если цена единицы продукции A равна $2 + 6 = 8$, а цена единицы продукции B равна $13 - 6 = 7$, то оптимальным планом ее изготовления является план, согласно которому производится одно изделие вида A и 10 изделий вида B. При этом плане общая стоимость производимой продукции максимальна:

$$F_{max} = 8 \cdot 1 + 7 \cdot 10 = 78 \text{ у.е.}$$

Как видно из рис. 2.14, план $X_1^* = (1, 10)$ является оптимальным планом задачи (2.71)—(2.73) для всякого $t > 5{,}5$ до тех пор, пока прямая $(2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 = h$ не станет параллельной прямой $6x_1 + 3x_2 = 36$. Это произойдет тогда, когда $(2 + t)/6 = (13 - t)/3$, то есть при $t = 8$. При этом значении t координаты любой точки отрезка BC дают оптимальный план задачи (2.71)—(2.73).

Таким образом, для всякого $5{,}5 \le t \le 8$ задача (2.71)—(2.73) имеет оптимальный план $X_1^* = (1, 10)$, при котором значение линейной функции (2.71) составляет

$$F_{\max} = (2 + t) \cdot 1 + (13 - t) \cdot 10 = 132 - 9t.$$

Используя рис. 2.14 и проводя аналогичные рассуждения, убедимся, что для всякого $8 \le t \le 10$ оптимальным планом задачи (2.71)—(2.73) является X_2^* (2, 8). Это означает, что если цена единицы продукции вида A заключена между (или равна) 10 и 12 у.е., а единицы продукции B — между (или равна) 3 и 5 у.е., то оптимальным планом ее производства является такой план, согласно которому изготовляется 2 ед. продукции вида A и 12 ед. продукции вида B. При этом плане производства продукции ее общая стоимость для каждого значения параметра $8 \le t \le 10$ составляет

$$F_{\max} = 108 - 6t.$$

Таким образом, получаем следующее решение задачи (2.71)—(2.73): если $0 \le t \le 5{,}5$, то оптимальным планом является $X_0^* = (0, 11)$, причем $F_{\max} = 143 - 11t$; если $5{,}5 \le t \le 8$, то оптимальным планом является $X_1^* = (1, 10)$, причем $F_{\max} = 132 - 9t$; наконец, если $8 < t < 10$, то оптимальный план $X_2^* = (2, 8)$, причем $F_{\max} = 108 - 6t$.

Используя геометрическую интерпретацию задачи параметрического программирования и считая, что $-\infty < t < \infty$, найдите решение задач 2.60 и 2.61.

2.60. $F = 6x_1 + (4 + t)x_3 + (12 - t)x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -1/2x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

2.61. $F = 5x_1 - (3 + t)x_2 + (4 + t)x_4 \to \max$
при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

Составьте математические модели задач 2.62 и 2.63.

2.62. Для производства n видов продукции, сбыт которой обеспечен, предприятие использует m видов сырья. Нормы расхода сырья i-го вида на производство единицы продукции j-го вида равны a_{ij} $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$. Известна также и прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, равная c_j $(j = \overline{1, m})$. Предприятие может использовать не более чем $b'_i + b''_i t$ $(i = \overline{1, m})$ единиц сырья i-го вида, где t — некоторый параметр, значения которого принадлежат промежутку изменения $[\alpha, \beta]$.

Для каждого значения t определить план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации являлась бы максимальной.

2.63. В производственном объединении n видов продукции могут производиться m технологическими способами. Потребность в продукции каждого вида определяется числами b_i $(i = \overline{1, m})$. Количество i-й продукции, изготовляемой j-м технологическим способом в единицу времени, равно $a'_{ij} + a''_{ij}\ t$, где t — некоторый параметр $(\alpha \leq t \leq \beta)$.

Для каждого значения параметра t определить план производства продукции, согласно которому необходимое количество продукции каждого вида будет изготовлено за минимальное время.

2. Нахождение решения задачи параметрического программирования. *Сначала разберем задачи, целевая функция которых содержит параметр.* Продолжим рассмотрение задачи (2.59)—(2.61). Считая значение параметра t равным некоторому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, находим симплексным методом или методом искусственного базиса решение полученной таким образом задачи линейного программирования.

В результате при данном значении t_0 либо найдем оптимальный план задачи (2.59)—(2.61), либо установим ее неразрешимость. В первом случае, используя элементы $(m + 1)$-й строки последней симплекс-таблицы решения задачи, в которой записаны числа $\Delta_j(t_0) = \Delta'_j + t_0\ \Delta''_j\ t$, находим:

$$\underline{t} = \begin{cases} \max(-\Delta'_j/\Delta''_j), & \text{если существует } \Delta''_j > 0; \\ -\infty, & \text{если } \Delta''_j \le 0; \end{cases} \qquad (2.74)$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min(-\Delta'_j/\Delta''_j), & \text{если существует } \Delta''_j < 0; \\ \infty, & \text{если все } \Delta''_j \ge 0. \end{cases} \qquad (2.75)$$

Для всех $\underline{t} \le t \le \bar{t}$ задача (2.59)—(2.61) имеет тот же оптимальный план, что и при t_0.

В том случае, если задача при t_0 неразрешима, в $(m + 1)$-й строке последней симплекс-таблицы ее решения имеется число $\Delta_k = \Delta_k' + t_0 \Delta_k'' < 0$, где $x_{ik} \le 0$ $(i = \overline{1, m})$. Тогда:

1) если $\Delta_k'' = 0$, то задача неразрешима для любого t;

2) если $\Delta_k'' < 0$, то задача неразрешима для всех $t < t_1 = -\Delta_k'/\Delta_k''$;

3) если $\Delta_k' > 0$, то задача неразрешима для всех $t > t_1$.

Определив все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых задача (2.59)—(2.61) имеет один и тот же оптимальный план или для которых задача неразрешима, получаем промежуток изменения параметра t, который исключаем из рассмотрения. Снова полагаем значение параметра t равным некоторому числу, принадлежащему промежутку $[\alpha, \beta]$, и находим решение полученной задачи.

После каждой итерации определяется либо промежуток, в котором для всех значений параметра задача имеет один и тот же оптимальный план, либо промежуток, в котором для всех значений параметра задача не имеет решения.

Итак, процесс нахождения решения задачи (2.59)—(2.61) включает четыре этапа.

1°. Считая значение параметра t равным некоторому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, находят оптимальный план X^* или устанавливают неразрешимость полученной задачи линейного программирования.

2°. Определяют множество значений параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых найденный оптимальный план является оптимальным или задача неразрешима. Эти значения параметра исключают из рассмотрения.

3°. Полагают значение параметра t равным некоторому числу, принадлежащему оставшейся части промежутка $[\alpha, \beta]$, и находят решение полученной задачи линейного программирования.

4°. Определяют множество значений параметра t, для которых новый оптимальный план остается оптимальным или задача неразрешима. Вычисления повторяют до тех пор, пока не будут исследованы все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$.

2.64. Для всех значений параметра t $(-\infty < t < \infty)$ найти максимальное значение функции

$$F = 2x_1 + (3 + 4t)x_2 \qquad (2.76)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6, \end{cases} \qquad (2.77)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}). \qquad (2.78)$$

Р е ш е н и е. Считая в целевой функции исходной задачи значение параметра t равным 0 (число 0 взято произвольно), находим симплексным методом ее оптимальный план $X_0^* = (3, 9, 0, 16, 0)$ (табл. 2.49). После этого определяем значения параметра t, для которых $X_0^* = (3, 9, 0, 16, 0)$ остается оптимальным планом. Очевидно, это будет тогда, когда среди элементов 4-й строки последней симплекс-таблицы (кроме элемента, стоящего в столбце вектора P_0) не будет отрицательных, то есть при $2{,}5 + 2t \geq 0$ и $0{,}5 + 2t \geq 0$, откуда $t \geq -0{,}25$. Итак, если $t \in [-0{,}25; \infty]$, то задача (2.76)—(2.78) имеет оптимальный план $X_0^* = (3, 9, 0, 16, 0)$, при котором $F_{\max} = 33 + 36t$.

Т а б л и ц а 2.49

i	Базис	$C_б$	P_0	2	3+4t	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	12	1	1	1	0	0
2	P_4	0	10	1	−1	0	1	0
3	P_5	0	6	−1	1	0	0	1
4			0	−2	$-3 - 4t$	0	0	0
1	P_3	0	6	2	0	1	0	−1
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3 + 4t$	6	−1	1	0	0	1
			$18 + 24t$	$-5 - 4t$	0	0	0	$3 + 4t$
1	P_1	2	3	1	0	1/2	0	−1/2
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3 + 4t$	9	0	1	1/2	0	1/2
4			$33 + 36t$	0	0	$2{,}5 + 2t$	0	$0{,}5 + 2t$

Возьмем теперь некоторое значение параметра t, меньшее чем $-0{,}25$. Тогда элемент, стоящий в 4-й строке столбца вектора

P_5 последней симплекс-таблицы (табл. 2.49), станет отрицательным. Следовательно, при данном значении параметра t план $X = (3, 9, 0, 16, 0)$ не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану, для чего исключим из базиса вектор P_4 и введем в него вектор P_5 (табл. 2.50).

Таблица 2.50

i	Базис	$C_б$	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	11	1	0	0,5	0,5	0
2	P_5	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3+4t$	1	0	1	0,5	−0,5	0
4			$25+4t$	0	0	$2,5+2t$	$-0,5-2t$	0

Полученный новый план $X_1^* = (11, 1, 0, 0, 16)$ является оптимальным при $2,5 + 2t \geq 0$ и $-0,5 - 2t \geq 0$, то есть при $-1,25 \leq t \leq$ $\leq -0,25$. Таким образом, если $t \in [-1,25; -0,25]$, то задача (2.76)—(2.78) имеет оптимальный план $X_1^* = (11, 1, 0, 0, 16)$, при котором $F_{\max} = 25 + 4t$.

Найдем теперь решение задачи при $t < -1,25$. В этом случае элемент, стоящий в 4-й строке столбца вектора P_3 табл. 2.50, отрицателен. Следовательно, записанный в таблице опорный план не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану, для чего исключим из базиса вектор P_2 и введем в него вектор P_3 (табл. 2.51).

Таблица 2.51

i	Базис	$C_б$	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	10	1	−1	0	1	0
2	P_5	0	16	0	0	0	1	1
3	P_3	0	2	0	2	1	−1	0
4			20	0	$-5-4t$	0	2	0

Полученный опорный план является оптимальным для любого t, при котором $-5 - 4t \geq 0$, то есть для $t \leq -1,25$. Следовательно, для $t \in (-\infty; -1,25]$ исходная задача имеет оптимальный план $X_2^* = (10, 0, 2, 0, 16)$, при котором $F_{\max} = 20$.

Итак, если $t \in (-\infty; -1,25]$, то задача (2.76)—(2.78) имеет оптимальный план $X_2^* = (10, 0, 2, 0, 16)$, а $F_{\max} = 20$; если

$t \in [-1{,}25; -0{,}25]$, то $X_1^* = (11, 1, 0, 0, 16)$ — оптимальный план, а $F_{\max} = 25 + 4t$; если $t \in [-0{,}25; \infty)$, то $X_0^* = (3, 9, 0, 16, 0)$ — оптимальный план, а $F_{\max} = 33 + 36t$.

2.65. Предприятие для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.52. В ней же указана цена изделия каждого вида.

Таблица 2.52

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
I	18	15	12
II	6	4	8
III	5	3	3
Цена единицы продукции (у.е.)	9	10	16

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), однако производство ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида в количестве 360 кг, II вида — в количестве 192 кг, III вида — в количестве 180 кг.

Найти план производства изделий, реализация которого обеспечила бы максимальный выпуск продукции в стоимостном выражении. Одновременно с этим провести анализ устойчивости оптимального плана задачи при условиях возможного изменения цены единицы каждого из изделий.

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим планируемый выпуск изделий вида *A* через x_1, изделий вида *B* — через x_2, изделий вида *C* — через x_3. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении максимального значения функции

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \qquad (2.79)$$

при условиях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases} \qquad (2.80)$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \qquad (2.81)$$

Найдем решение задачи (2.79)—(2.81) симплексным методом. Оно приведено в табл. 2.53 (подробное решение задачи — в § 1.4, см. задачу 1.41).

Таблица 2.53

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Из таблицы видно, что оптимальным планом производства изделий A, B и C является план, согласно которому производится 8 изделий вида B, 20 изделий вида C и не производятся изделия вида A. При этих условиях общая стоимость изготовляемой продукции максимальна и равна 400 у.е.

Установим теперь возможные границы изменения цен каждого из изделий, внутри которых найденный оптимальный план производства продукции не меняется. Начнем с изделия вида A. Предположим, что его цена c_1 равна не 9, а $9 + t_1$ у.е., где t_1 — некоторый параметр (очевидно, можно считать $-9 < t_1 < \infty$). Тогда требуется найти такие значения параметра t_1, при которых для найденного плана $X^* = (0, 8, 20)$ будет достигнуто максимальное значение функции

$$F = (9 + t_1)x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

при условиях (2.80) и (2.81). Чтобы сделать это, будем считать $c_1 = 9 + t_1$ и с учетом этого составим табл. 2.54, для которой первые три строки возьмем из табл. 2.53, а 4-ю строку вычислим по правилам, рассмотренным в § 1.4.

Таблица 2.54

i	Базис	$C_б$	P_0	$9 + t_1$	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
4			400	$5 - t_1$	0	0	2/9	5/3	0

Как видно из табл. 2.54, план $X^* = (0, 8, 20)$ является оптимальным для построенной задачи параметрического программирования при $5 - t_1 \geq 0$, то есть при $t_1 \leq 5$. Это означает, что если цена c_1 одного изделия вида A меньше или равна 14 у.е., то задача (2.79)—(2.81) имеет оптимальный план $X^* = (0, 8, 20)$, то есть предприятию нецелесообразно включать в план производства продукции выпуск изделий вида A при условии, что цена одного такого изделия не превышает 14 у.е. При этом заметим, что, предполагая возможным изменение цены одного изделия A, мы считаем, что все остальные исходные данные задачи остаются неизменными.

Аналогично можно показать, что если цена c_2 одного изделия вида B изменяется от 8 до 20 у.е., то есть если $8 \leq c_2 \leq 20$, то оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому изготовляется 8 изделий вида B и 20 изделий вида C. Отметим, что при изменении цены одного изделия вида B мы считаем постоянными все остальные исходные данные задачи. Одновременно с этим заметим, что хотя указанный план и остается оптимальным, значения целевой функции при разных значениях c_2 неодинаковы. Наконец, аналогично рассчитывается, что если цена c_3 одного изделия вида C изменяется от 8 до 20 у.е., то есть $8 \leq c_3 \leq 20$, то оптимальным планом производства продукции также является план, согласно которому производится 8 изделий вида B и 20 изделий вида C.

Мы провели анализ чувствительности оптимального плана задачи (2.79)—(2.81) при возможном изменении цены каждого из изделий. Аналогично можно провести анализ чувствительности оптимального плана этой задачи при одновременном изменении значений нескольких коэффициентов целевой функции.

Теперь разберем *задачи, правые части ограничений которых содержат параметр*. Алгоритм решения задачи (2.62)—(2.64) подобен рассмотренному выше алгоритму решения задачи (2.59)—(2.61).

Полагая значение параметра t равным некоторому числу t_0, находим решение полученной задачи линейного программирования (2.62)—(2.64). При данном значении параметра t_0 либо определяем оптимальный план, либо устанавливаем неразрешимость задачи. В первом случае найденный план является оптимальным для любого $\underline{t} \leq t \leq \overline{t}$, где

$$\underline{t} = \begin{cases} \max(-q_i/p_i), & \text{если существуют } p_i > 0; \\ -\infty, & \text{если все } p_i \le 0; \end{cases}$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min(-q_i/p_i), & \text{если существуют } p_i < 0; \\ \infty, & \text{если все } p_i \ge 0 \end{cases}$$

и числа q_i и p_i определены компонентами оптимального плана и зависят от t_0

$$x_i^* = q_i + t_0 p_i.$$

Если при $t = t_0$ задача (2.62)—(2.64) неразрешима, то либо целевая функция задачи (2.62) не ограничена на множестве планов, либо система уравнений (2.63) не имеет неотрицательных решений. В первом случае задача неразрешима для всех $t \in [\alpha, \beta]$, а во втором случае можно определить все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых система уравнений (2.63) не годится, и исключить их из рассмотрения.

Определив промежуток, в котором задача (2.62)—(2.64) имеет один и тот же оптимальный план или неразрешима, выбираем новое значение параметра t, не принадлежащее найденному промежутку, и находим решение полученной задачи линейного программирования. При этом поиск решения новой задачи ведется с помощью двойственного симплекс-метода. Продолжая итерационный процесс, после конечного числа шагов получаем решение задачи (2.62)—(2.64).

Итак, процесс нахождения решения задачи (2.62)—(2.64) включает четыре основных этапа.

1°. Считая значение параметра t равным некоторому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, находят оптимальный план или устанавливают неразрешимость полученной задачи линейного программирования.

2°. Находят значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых задача (2.62)—(2.64) имеет один и тот же оптимальный план или неразрешима. Эти значения параметра t исключают из рассмотрения.

3°. Выбирают значение параметра t из оставшейся части промежутка $[\alpha, \beta]$ и устанавливают возможность определения нового оптимального плана. При положительном варианте находят его двойственным симплекс-методом.

4°. Определяют множество значений параметра t, для которых задача имеет общий новый оптимальный план или неразрешима. Вычисления проводят до тех пор, пока не будут исследованы все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$.

2.66. Для каждого значения параметра t ($-\infty < t < \infty$) найти максимальное значение функции

$$F = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 \tag{2.82}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6t, \end{cases} \tag{2.83}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}). \tag{2.84}$$

Р е ш е н и е. Считая значение параметра t в системе уравнений (2.83) равным нулю, находим решение задачи (2.82)—(2.84) (табл. 2.55).

Т а б л и ц а 2.55

i	Базис	$C_б$	P_0	3	−2	5	0	−4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	12 + t	1	1	1	0	0
2	P_4	0	8 + 4t	2	−1	0	1	0
3	P_5	−4	10 − 6t	−2	2	0	0	1
4			20 + 29t	10	−1	0	0	0
1	P_3	5	7 + 4t	2	0	1	0	−1/2
2	P_4	0	13 + t	1	0	0	1	1/2
3	P_2	−2	5 − 3t	−1	1	0	0	1/2
4			25 + 26t	9	0	0	0	1/2

Как видно из таблицы, $X_0^* = (0;\ 5 - 3t;\ 7 + 4t;\ 13 + t;\ 0)$ при $t = 0$ есть оптимальный план задачи. Очевидно, X_0^* является оптимальным планом и тогда, когда среди его компонент не окажется отрицательных чисел, то есть при $5 - 3t \geq 0$; $7 + 4t \geq 0$; $13 + t \geq 0$ или при $-7/4 \leq t \leq 5/3$. Таким образом, если $t \in [-7/4;\ 5/3]$, то $X_0^* = (0;\ 5 - 3t;\ 7 + 4t;\ 13 + t;\ 0)$ — оптимальный план задачи (2.82)—(2.84), при котором $F_{max} = 25 + 26t$.

Исследуем теперь, имеет ли задача оптимальные планы при $t > 5/3$. Если $t > 5/3$, то $5 - 3t < 0$ и, следовательно, $X = (0;\ 5 - 3t;\ 7 + 4t;\ 13 + t;\ 0)$ не является планом задачи. Поэтому при $t > 5/3$ нужно перейти к новому плану, который был бы в то же время и оптимальным. Это можно сделать в том случае, когда в строке вектора P_2 имеются отрицательные числа x'_{2j}. В данном случае это условие выполняется. Поэтому переходим к новому опорному плану, для чего введем в базис вектор P_1 и исключим из него вектор P_2 (табл. 2.56).

Таблица 2.56

i	Базис	$C_б$	P_0	3	−2	5	0	−4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	$17 - 2t$	0	2	1	0	1/2
2	P_4	0	$18 - 2t$	0	1	0	1	1
3	P_1	3	$-5 + 3t$	1	−1	0	0	−1/2
4			$70 - t$	0	9	0	0	5

Как видно из табл. 2.56, $X_1^* = (-5 + 3t; 0; 17 - 2t; 18 - 2t; 0)$ — оптимальный план задачи для всех t, при которых $17 - 2t \geq 0$; $18 - 2t \geq 0$; $-5 + 3t \geq 0$, то есть при $5/3 \leq t \leq 17/2$. Следовательно, если $t \in [5/3; 17/2]$, то $X_1^* = (-5 + 3t; 0; 17 - 2t; 18 - 2t, 0)$ является оптимальным планом исходной задачи, причем $F_{max} = 70 - t$.

Если $t > 17/2$, то $X_1 = (-5 + 3t; 0; 17 - 2t; 18 - 2t; 0)$ не является планом задачи, так как третья компонента $17 - 2t$ есть отрицательное число. Поскольку среди элементов 1-й строки табл. 2.56 нет отрицательных, при $t > 17/2$ исходная задача неразрешима. Исследуем теперь разрешимость задачи при $t < -7/4$. В этом случае $X = (0; 5 - 3t; 7 + 4t; 13 + t; 0)$ (см. табл. 2.55) не является планом задачи, так как третья компонента $7 + 4t$ есть отрицательное число. Чтобы при данном значении параметра найти оптимальный план (это можно сделать, так как в строке вектора P_3 стоит отрицательное число $-1/2$), нужно исключить из базиса вектор P_3 и ввести в базис вектор P_5 (табл. 2.57).

Таблица 2.57

i	Базис	$C_б$	P_0	3	−2	5	0	−4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_5	−4	$-14 - 8t$	−4	0	−2	0	1
2	P_4	0	$20 + 5t$	3	0	1	1	0
3	P_2	−2	$12 + t$	1	1	1	0	0
4			$32 + 30t$	11	0	1	0	0

Как видно из табл. 2.57, $X_2^* = (0; 12 + t; 0; 20 + 5t; -14 - 8t)$ является оптимальным планом задачи для всех значений параметра t, при которых $-14 - 8t \geq 0$; $20 + 5t \geq 0$; $12 + t \geq 0$, то есть при $-4 \leq t \leq -7/4$. Таким образом, если $-4 \leq t \leq -7/4$, то задача (2.82)—(2.84) имеет оптимальный план $X_2^* = (0; 12 + t; 0; 20 + 5t; -14 - 8t)$, при котором $F_{max} = 32 + 30t$.

Из табл. 2.57 также видно, что при $t< -4$ задача неразрешима, поскольку в строке вектора P_4 нет отрицательных элементов.

Итак, если $t \in [-\infty; -4]$, то задача не имеет оптимального плана; если $t \in [-4; -7/4]$, то $X_2^* = (0; 12 + t; 0; 20 + 5t; -4 - 8t)$ — оптимальный план, а $F_{max} = 32 + 30t$; если $t \in [-7/4; 5/3]$, то $X_0^* = (0; 5 - 3t; 7 + 4t; 13 + t; 0)$ — оптимальный план, а $F_{max} = 25 + 26t$; если $t \in [5/3; 17/2]$, то $X_1^* = (-5 + 3t; 0; 17 - 2t; 18 - 2t; 0)$ — оптимальный план, а $F_{max} = 70 - t$; если $t \in (17/2; \infty)$, то задача неразрешима.

2.67. Для производства продукции трех видов A, B и C необходимы три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в объеме, соответственно не большем чем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.58.

Таблица 2.58

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (у.е.)	10	14	12

Определить план производства продукции, обеспечивающий максимальный выпуск ее в стоимостном выражении, и провести анализ оптимального плана относительно возможных изменений устойчивости объемов каждого из используемых видов сырья.

Решение. Предположим, что изделий вида A производится x_1 единиц, изделий вида B — x_2 единиц и изделий вида C — x_3 единиц. Тогда для определения оптимального плана производства нужно решить задачу, состоящую в максимизации целевой функции

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \tag{2.85}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases} \tag{2.86}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{2.87}$$

Решение задачи (2.85)—(2.87) симплексным методом приведено в табл. 2.59. Из этой таблицы видно, что при оптимальном плане производства должно быть изготовлено 82 изделия вида B и 16 изделий вида C. При этих условиях общая стоимость изделий равна 1340 у.е. Проведем теперь анализ устойчивости найденного плана относительно возможных изменений сырья каждого вида.

Начнем с сырья I вида. Предположим, что производство изделий ограничено не 180 кг сырья I вида, а $180 + t_1$ кг, где t_1 — некоторый параметр, который в общем случае может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Таким образом, следует найти такие значения параметрра $-\infty < t_1 < \infty$, при которых задача, состоящая в определении максимального значения функции

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \tag{2.88}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 + t_1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases} \tag{2.89}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, \tag{2.90}$$

имеет оптимальный план $X^* = (0,\ 82,\ 16)$.

Таблица 2.59

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	180	4	2	1	1	0	0
2	P_5	0	210	3	1	3	0	1	0
3	P_6	0	244	1	2	5	0	0	1
4			0	–10	–14	–12	0	0	0
1	P_2	14	90	2	1	1/2	1/2	0	0
2	P_5	0	120	1	0	5/2	–1/2	1	0
3	P_6	0	64	–3	0	4	–1	0	1
4			1260	18	0	–5	7	0	0
1	P_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
2	P_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
3	P_3	12	16	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4
4			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Таблица 2.60

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	14	b'_2	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
2	P_5	0	b'_5	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
3	P_3	12	b'_3	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4
4			F'_0	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Найдем решение задачи параметрического программирования (2.88)—(2.90). При каждом значении параметра t_1 оптимальный план этой задачи определяется из табл. 2.60, отличающейся от последней симплекс-таблицы (табл. 2.59) лишь элементами столбца вектора P_0, которые обозначим через b'_2, b'_5 и b'_3. Указанные числа представляют собой компоненты разложения вектора P_0 по векторам, образующим последний базис, то есть по векторам P_2, P_5 и P_3. Следовательно,

$$\begin{bmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{bmatrix} = P^{-1}P_0,$$

где P^{-1} — матрица, обратная матрице P, составленной из первоначальных компонент векторов P_2, P_5 и P_3. Матрица P^{-1} записана в столбцах векторов, образующих в симплекс-таблице (табл. 2.60) первоначальный единичный базис, то есть в столбцах векторов P_4, P_5, и P_6.

Таким образом,

$$P'_0 = \begin{bmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 180 + t_1 \\ 210 \\ 244 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 + (5/8)t_1 \\ 80 + (1/8)t_1 \\ 16 - (1/4)t_1 \end{bmatrix}.$$

Найденный вектор P_0 определяет оптимальный план $X = (0;$ $82 + (5/8)t_1$; $16 - (1/4)t_1)$ задачи (2.88)—(2.90) для любого значения параметра t_1, при котором значения $82 + (5/8)t_1$; $80 + (1/8)t_1$ и $16 - (1/4)t_1$ положительны. Вместе с тем X будет совпадать с оптимальным планом $X^* = (0, 82, 16)$ задачи (2.85)—(2.87) лишь при значении $t_1 = 0$. Это означает, что всякое, хотя бы незначительное, изменение объемов сырья I вида приведет к изменению оптимального плана задачи (2.85)—(2.86). Например, если имеющиеся в распоряжении предприятия объемы сырья I вида увеличить на 8 ед., то оптимальным будет план производства продукции $X^* = (0; 82 + (5/8) \cdot 8; 16 - (1/4) \cdot 8) =$

= (0, 87, 14), согласно которому изготовляется 87 изделий вида B и 14 изделий вида C. При данном плане производства продукции общая стоимость изготовляемых изделий составит 1386 у.е., то есть возрастет на 46 у.е.

Проведя аналогичные рассуждения, можно доказать, что если объемы сырья II вида, выделенные предприятию, уменьшить не более чем на 80 кг, то оптимальным планом производства продукции останется план, согласно которому следует изготовить 82 изделия вида B и 16 изделий вида C. Таким образом, оптимальный план задачи (2.85)—(2.87) оказывается устойчивым относительно изменений в указанных выше объемах сырья II вида. Наконец, аналогичным путем можно показать, что оптимальный план $X^* = (0, 82, 16)$ данной задачи неустойчив по отношению к изменениям объемов сырья III вида.

Мы провели анализ чувствительности оптимального плана задачи (2.85)—(2.87) к изменению объемов каждого из видов сырья по отдельности. Аналогично проводится анализ чувствительности оптимального плана этой задачи при одновременном изменении объемов сырья нескольких видов.

Рассмотрим *задачи, целевая функция и правые части ограничений которых содержат параметр*. Используя описанные выше алгоритмы решения задач параметрического программирования, можно найти решение задачи, в которой от параметра t линейно зависят как коэффициенты целевой функции, так и свободные члены системы уравнений.

2.68. Найти максимальное значение функции

$$F = (8 - 5t)x_1 + (9 - 3t)x_2 + (-3 + 5t)x_3 - (2 + 4t)x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = -18 + 10t, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0,\ t \in [-\infty; +\infty].$$

Решение. Считая значение параметра t равным числу 2 (число 2 взято произвольно), находим симплексным методом решение полученной задачи линейного программирования (табл. 2.61).

Таблица 2.61

i	Базис	$C_б$	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	$-3+5t$	$24-12t$	1	-1	1	0
2	P_4	$-2-4t$	$-18+10t$	-1	2	0	1
3			$-36+208t-100t^2$	$14t-9$	$-10t-10$	0	0
1	P_3	$-3+5t$	$15-7t$	1/2	0	1	1/2
2	P_2	$9-3t$	$-9+5t$	$-1/2$	1	0	1/2
3			$-126+168t-50t^2$	$9t-14$	0	0	$5t+5$

Из табл. 2.61 видно, что если $t = 2$, то $X_0^* = (0; -9 + 5t; 15 - 7t; 0)$ — оптимальный план задачи. Таким он является и для тех значений параметра t, при которых $9t - 14 \geq 0$ и $5t + 5 \geq 0$, а среди компонент вектора X_0^* нет отрицательных чисел. Эти неравенства выполняются при $t \geq 14/9$. Сначала такие значения параметра t и рассмотрим.

Найденный вектор X_0^* является оптимальным планом задачи при $15 - 7t \geq 0$ и $-9 + 5t \geq 0$, то есть $9/5 \leq t \leq 15/7$. Итак, если $9/5 \leq t \leq 15/7$, то $X_0^* = (0; 15 - 7t; -9 + 5t; 0)$ — оптимальный план задачи, при котором $F_{\max} = -126 + 168t - 50t^2$.

Если $t < 9/5$, то $-9 + 5t < 0$ и вектор $X = (0; -9 + 5t; 15 - 7t; 0)$ не является планом задачи. Поэтому при $t < 9/5$ следует перейти к новой симплекс-таблице, что можно сделать, так как в строке вектора P_2 (табл. 2.61) имеется отрицательное число $-1/2$. Рассматривая это число как разрешающий элемент, переходим к новой симплекс-таблице, для чего исключаем из базиса вектор P_2 и введем вместо него вектор P_1 (табл. 2.62).

Таблица 2.62

i	Базис	$C_б$	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	$-3+5t$	$6-2t$	0	1	1	1
2	P_1	$8-5t$	$18-10t$	1	-2	0	-1
3			$126-134t+40t^2$	0	$-28+18t$	0	$14t-9$

Из табл. 2.62 видно, что вектор $X_1^* = (18 - 10t; 0; 6 - 2t; 0)$ есть оптимальный план задачи для всех значений параметра t (как отмечено выше, мы рассматриваем значения $t \geq 14/9$), при которых $6 - 2t \geq 0$ и $18 - 10t \geq 0$, то есть $t \leq 9/5$. Следовательно, если $t \in [14/9; 9/5]$, то $X_1^* = (18 - 10t; 0; 6 - 2t; 0)$ является оптимальным планом задачи, при котором $F_{max} = 126 - 134t + 40t^2$.

Рассмотрим теперь значения параметра $t > 15/7$. При этих значениях вектор $X = (0; -9 + 5t; 15 - 7t; 0)$ уже не является оптимальным планом задачи, поскольку $15 - 7t < 0$. Так как в строке вектора P_3 (табл. 2.62) нет отрицательных чисел, то при $t > 15/7$ задача неразрешима.

Мы нашли решение задачи при изменении параметра t от $14/9$ до $+\infty$. Рассмотрим теперь значения параметра от $-\infty$ до $14/9$. Если $t < 14/9$, то в последней строке табл. 2.62 имеется отрицательное число $18t - 28$. Поэтому следует перейти к новому опорному плану, введя в базис вектор P_2 и исключив из него вектор P_3 (табл. 2.63).

Таблица 2.63

i	Базис	$C_б$	P_0	$8 - 5t$	$9 - 3t$	$-3 + 5t$	$-2 - 4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	$9 - 3t$	$6 - 2t$	0	1	1	1
2	P_1	$8 - 5t$	$30 - 14t$	1	0	2	1
3			$294 - 298t + 76t^2$	0	0	$28 - 18t$	$19 - 4t$

Из табл. 2.63 видно, что если $-\infty < t \leq 14/9$, то $X_2^* = (30 - 14t; 6 - 2t; 0; 0)$ является оптимальным планом задачи, причем $F_{max} = 294 - 298t + 76t^2$.

Итак, при $t \in (-\infty; 14/9]$ задача имеет оптимальный план $X_2^* = (30 - 14t; 6 - 2t; 0; 0)$; при $t \in [14/9; 9/5]$ — $X_1^* = (18 - 10t; 0; 6 - 2t; 0)$; при $t \in [9/5; 15/7]$ — $X_0^* = (0; -9 + 5t; 15 - 7t; 0)$; при $t > 15/7$ она неразрешима.

Считая, что $-\infty < t < \infty$, найдите решение задач параметрического программирования 2.69—2.74.

2.69. $F = -(1 - t)x_1 + (4 - t)x_2 - (2 - t)x_3 + (2 - t)x_4 - (3 - 2t)x_5 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

2.70. $F = 6x_1 - (4 + t)x_3 + (12 - t)x_4 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -1/2\, x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

2.71. $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 + 2t, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + t, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 8 - 3t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

2.72. $F = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 2t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 + t, \\ 3x_1 + x_5 = 3 - t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

2.73. $F = (2 - 3t)x_1 - 4tx_2 + (2 + 6t)x_4 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + 8t, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -10 + 12t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

2.74. $F = (2 + t)x_1 - (3 - t)x_2 + 3(2 + 4t)x_5 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 + 6t, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 - 12t, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 8 + 9t, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 5}).$$

2.75. Для производства трех видов изделий предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода каждого вида сырья определяются матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предприятие может использовать сырья I вида не более 20 ед., II вида — не более 42 ед., III вида — не более 36 ед. Цена единицы продукции каждого вида линейно зависит от некоторого параметра t, и эта зависимость соответственно имеет вид $2 + t$, $12 - t$, $6 + t$ $(0 \le t \le 10)$.

Для каждого значения параметра t $(0 \le t \le 10)$ найти такой план выпуска продукции, реализация которого обеспечит максимальный выпуск изделий в стоимостном выражении.

2.76. Для производства трех видов изделий A, B и C предприятие использует четыре вида сырья. Нормы затрат сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.64. В ней же указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 2.64

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
I	2	3	–
II	–	4	6
III	5	5	2
IV	4	–	7
Прибыль от реализации одного изделия	25	28	27

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но для их производства предприятие может использовать сырья I вида не более 200 кг, II вида — не более 120 кг, III вида — не более 180 кг, IV вида — не более 138 кг.

Определить: а) план производства продукции, при котором общая прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы наибольшей; б) устойчивость оптимального плана задачи относительно изменений прибыли от реализации единицы изделия данного вида; в) устойчивость оптимального плана задачи относительно изменения количества сырья каждого вида.

§ 2.4. Задачи дробно-линейного программирования

1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи дробно-линейного программирования. Общая задача дробно-линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{F_1}{F_2} \tag{2.91}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{2.92}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{2.93}$$

где c_j, d_j, b_i и a_{ij} — некоторые постоянные числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$ и $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в области неотрицательных решений системы линейных уравнений (2.92). Предположим, что такое условие не нарушает общности задачи, поскольку в том случае, когда эта величина отрицательна, знак минус можно отнести к числителю.

Как и в случае основной задачи линейного программирования, свое максимальное значение целевая функция задачи (2.91)—(2.93) принимает в одной из вершин многогранника решений, определяемой системой ограничений (2.92) и (2.93) (естественно, при условии, что эта задача имеет оптимальный план). Если максимальное значение целевая функция задачи (2.91) принимает более чем в одной вершине многогранника решений, то она достигает его также во всякой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных вершин.

Рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{2.94}$$

при условиях

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{2.95}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{2.96}$$

Будем считать, что $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$. Чтобы найти решение задачи (2.94)—(2.96), сначала, как и в § 1.3 при рассмотрении задачи (1.19)—(1.21), построим многоугольник решений, определяемый ограничениями (2.95) и (2.96). Допуская, что этот многоугольник не пуст, полагаем значение функции равным некоторому числу h, так что прямая

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = h, \tag{2.97}$$

проходящая через начало координат, имеет общие точки с многоугольником решений. Вращая построенную прямую вокруг начала координат, либо определяем вершину (вершины), в которой функция (2.94) принимает максимальное значение, либо устанавливаем неограниченность функции на множестве планов задачи.

Итак, процесс нахождения решения задачи (2.94)—(2.96) включает шесть этапов.

1°. В системе ограничений задачи заменяют знаки неравенств на знаки точных равенств и строят определяемые этими равенствами прямые.

2°. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи.

3°. Находят многоугольник решений задачи.

4°. Строят прямую (2.97), уравнение которой получается, если положить значение целевой функции (2.94) равным некоторому постоянному числу.

5°. Определяют точку максимума или устанавливают неразрешимость задачи.

6°. Находят значение целевой функции в точке максимума.

2.77. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на трех типах оборудования. Время обработки каждого из изделий на оборудовании данного типа приведено в табл. 2.65. В ней же указаны затраты, связанные с производством одного изделия каждого вида.

Таблица 2.65

Тип оборудования	Затраты времени (ч) на обработку одного изделия	
	A	B
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Затраты на производство одного изделия	2	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч соответственно, а оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Р е ш е н и е. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B. Тогда общие затраты на их производство равны $2x_1 + 3x_2$, а себестоимость одного изделия составит

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}. \tag{2.98}$$

Затраты времени на обработку указанного количества изделий на каждом из типов оборудования соответственно составят $2x_1 + 8x_2$ часов, $x_1 + x_2$ часов и $12x_1 + 3x_2$ часов. Так как оборудование I и III типов может быть занято обработкой изделий вида A и B не более 26 и 39 ч, а оборудование II типа — не менее 4 ч, то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39. \end{cases} \tag{2.99}$$

По своему экономическому смыслу переменные x_1 и x_2 могут принимать только неотрицательные значения:

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{2.100}$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы линейных неравенств (2.99), при котором достигается минимум функции (2.98). Чтобы найти решение задачи, прежде всего построим многоугольник решений. Как видно из рис. 2.15, им является треугольник BCD. Значит, функция (2.98) принимает минимальное значение в одной из точек — B, C или D. Чтобы определить, в какой именно, положим значение функции F равным некоторому числу, например 11/4. Тогда

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{11}{4},$$

или

$$-3x_1 + x_2 = 0. \tag{2.101}$$

Последнее уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат. Координаты точек, принадлежащих

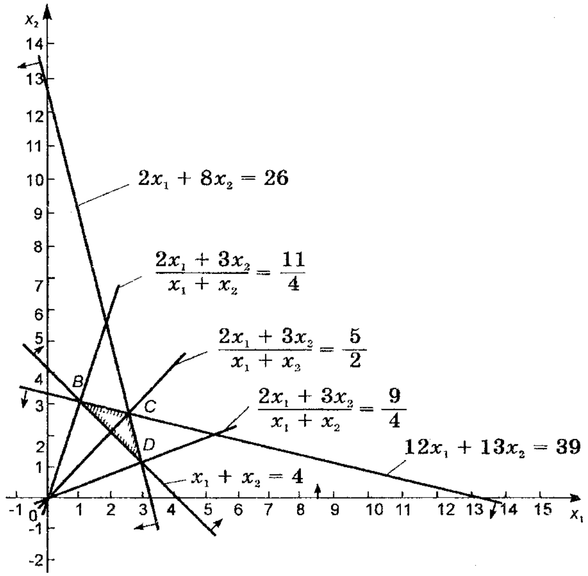


Рис. 2.15

этой прямой и многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение функции (2.98) равно 11/4. В данном случае к указанным точкам относится лишь одна точка B (1; 3). Ее координаты определяют план задачи, при котором значение функции равно 11/4.

Возьмем теперь $h = 5/2$, то есть предположим, что

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2},$$

или

$$-x_1 + x_2 = 0. \tag{2.102}$$

Уравнение (2.102) так же, как и (2.101), определяет прямую, проходящую через начало координат. Ее можно рассматривать как прямую, полученную в результате вращения по часовой стрелке вокруг начала координат прямой (2.101). При этом координаты точек, принадлежащих многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение функции (2.98), равное 5/2, меньше, чем в точках прямой (2.101). Следовательно, если положить значение функции (2.98) равным некоторому числу h_0:

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h_0, \qquad (2.103)$$

а прямую (2.103), проходящую через начало координат, вращать в направлении движения часовой стрелки вокруг начала координат, то получим прямые

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h,$$

где $h < h_0$.

Найдем последнюю общую точку вращаемой прямой с многоугольником решений. Это точка D (3; 1) (см. рис. 2.15), в которой достигается минимум функции (2.98).

Таким образом, оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому изготовляются три изделия вида A и одно изделие вида B. При таком плане себестоимость одного изделия является минимальной и равна

$$F_{\min} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{1 + 3} = \frac{9}{4}.$$

При нахождении угловой точки многоугольника решений, в которой целевая функция задачи принимает наименьшее значение, мы полагали значение функции равным некоторым двум постоянным числам и установили направление вращения прямой, определяющее уменьшение значения функции. Это можно было сделать и по-другому. А именно: полагая значение функции F равным некоторому числу h, то есть

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h, \qquad (2.104)$$

и получив некоторую прямую, проходящую через начало координат и имеющую угловой коэффициент, зависящий от h, можно, используя производную, установить направление вращения прямой (2.104) при возрастании h.

Практически же дело обстоит гораздо проще. Найдя точки B (1; 3) и D (3; 1) (см. рис. 2.15), в которых функция (2.98) может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках: $F(B) = 11/4$, $F(D) = 9/4$. Так как $F(B) > F(D)$, то можно утверждать, что в точке D целевая функция принимает минимальное значение. Одновременно с этим заметим, что в точке B функция принимает максимальное значение.

Заканчивая рассмотрение нахождения решения задачи дробно-линейного программирования графическим методом, отметим, что если многогранник решений содержит более одной точки, то возможны следующие случаи:

1) многогранник решений ограничен, максимум и минимум достигаются в его угловых точках (рис. 2.16);

2) многогранник решений не ограничен, однако существуют угловые точки, в которых целевая функция задачи принимает максимальное и минимальное значения (рис. 2.17);

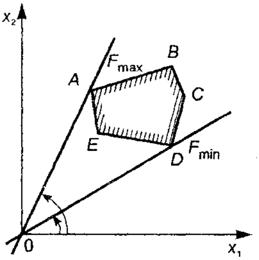


Рис. 2.16

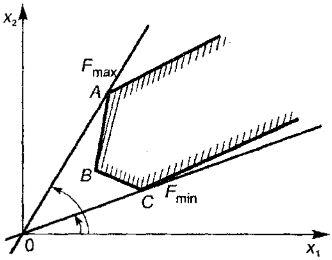


Рис. 2.17

3) многогранник решений не ограничен, и один из экстремумов достигается. Например, минимум достигается в одной из вершин многогранника решений и функция F имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 2.18);

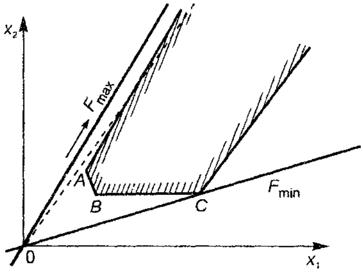


Рис. 2.18

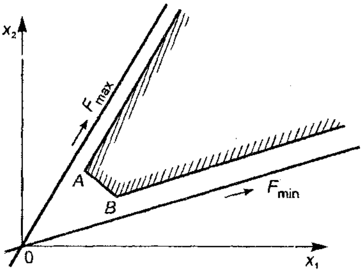


Рис. 2.19

4) многогранник решений не ограничен; как максимум, так и минимум являются асимптотическими (рис. 2.19).

Используя геометрическую интерпретацию задачи дробно-линейного программирования, найдите решение задач 2.78—2.80.

2.78. $F = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

2.79. $F = \dfrac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

2.80. $F = \dfrac{-5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ -x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, 5}).$

Составьте математические модели задач 2.81—2.83.

2.81. Для производства n видов изделий предприятие использует m типов взаимозаменяемого оборудования. Каждый из видов изделий необходимо изготовить в количестве b_i единиц $(i = \overline{1, n})$, причем каждый из типов оборудования может быть занят изготовлением этих изделий не больше, чем a_j часов $(j = \overline{1, m})$. Время изготовления одного изделия i-го вида на j-м типе оборудования равно a_{ij} часов, а затраты, связанные с производством одного изделия на данном типе оборудования, равны c_{ij}.

Определить, сколько изделий каждого вида на каждом типе оборудования следует произвести, чтобы при этом себестоимость одного изделия была минимальной.

2.82. Обувное производственное объединение для изготовления n различных моделей обуви использует m видов кожматериалов. На изготовление одной пары обуви j-й модели $(j = \overline{1, n})$ требуется a_{ij} м^2 кожматериалов i-го вида $(i = \overline{1, m})$, а всего может быть использовано b_i м^2. Величина производственных фондов, используемых при производстве одной пары обуви j-й модели, равна c_j, а прибыль от реализации равна d_j.

Предполагая, что объединение может выпускать обувь разных моделей в любых соотношениях, найти план выпуска, обеспечивающий максимальную рентабельность.

2.83. Для выполнения n различных работ могут быть использованы рабочие m квалификационных групп. При выполнении j-й работы i-й группой рабочих выработка в единицу времени равна c_{ij} $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$. Общий фонд времени, в течение которого i-я группа рабочих может быть занята выполнением работ, не превышает b_i единиц времени, а объем j-й работы равен a_j.

Составить такой план выполнения работ, при котором производительность труда являлась бы максимальной.

2. Сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования. Сформулированная выше задача (2.91)—(2.93) может быть сведена к задаче линейного программирования. Для этого следует обозначить

$$y_0 = \left\{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j\right\}^{-1} \tag{2.105}$$

и ввести новые переменные

$$y_j = y_0 x_j \ (j = \overline{1, n}). \tag{2.106}$$

Используя введенные обозначения, исходную задачу (2.91)—(2.93) сведем к следующей: найти максимум функции

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{2.107}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \ (i = \overline{1, m}), \tag{2.108}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \tag{2.109}$$

$$y_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}) \text{ и } y_0 \geq 0. \tag{2.110}$$

Задача (2.107)—(2.110) является задачей линейного программирования, а следовательно, ее решение можно найти известными методами. Зная оптимальный план этой задачи, на основе соотношений (2.106) получаем оптимальный план исходной задачи (2.91)—(2.93).

Таким образом, процесс нахождения решения задачи дробно-линейного программирования включает три этапа.

1°. Задачу (2.91)—(2.95) сводят к задаче линейного программирования (2.107)—(2.110).

2°. Находят решение задачи (2.107)—(2.110).

3°. Используя соотношения (2.106), определяют оптимальный план задачи (2.91)—(2.93) и находят максимальное значение функции (2.91).

2.84. Найти максимальное значение функции

$$F = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \qquad (2.111)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9, \end{cases} \qquad (2.112)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 5}). \qquad (2.113)$$

Р е ш е н и е. Сведем данную задачу к задаче линейного программирования. Для этого обозначим $(x_1 + x_2)^{-1}$ через y_0 и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j (j = \overline{1, 5})$. В результате приходим к следующей задаче: найти максимум функции

$$F = 2y_1 + y_2 \qquad (2.114)$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - 11y_0 = 0, \\ y_1 - y_2 + y_4 - 8y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 + y_5 - 9y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 = 1, \end{cases} \qquad (2.115)$$

$$y_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 5}). \qquad (2.116)$$

Задача (2.114)—(2.116) является задачей линейного программирования. Ее решение находим методом искусственного базиса (табл. 2.66).

Т а б л и ц а 2.66

i	Базис	$C_б$	P_0	2	1	0	0	0	$-M$	$-M$	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_0
1	P_2	1	1/10	0	1	−8/30	−11/30	0			0
2	P_1	2	9/10	1	0	8/30	11/30	0			0
3	P_5	0	15/10	0	0	5/3	7/6	1			0
4	P_0	0	1/10	0	0	2/30	−1/30	0			1
5			19/10	0	0	8/30	11/30	0			0

Из табл. 2.66 видно, что оптимальным планом задачи (2.114)—(2.116) является $y_1^* = 9/10$; $y_2^* = 1/10$; $y_2^* = y_3^* = 0$; $y_5^* = 15/10$; $y_0^* = 1/10$. Учитывая, что $y_j = y_0 x_j$, находим оптимальный план задачи (2.111)—(2.113): $X^* = (9, 1, 0, 0, 15)$. При этом плане $F_{max} = 19/10$.

Найдите решение задач 2.85—2.89.

2.85. $F = \dfrac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 18, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, 5})$.

2.86. $F = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, 5})$.

2.87. $F = \dfrac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, 4})$.

2.88. $F = \dfrac{5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 40, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ $(j = \overline{1, 6})$.

2.89. $F = \dfrac{2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, 6})$.

§ 2.5. Задачи блочного программирования

В практике решения конкретных экономических задач встречаются задачи, системы ограничений которых включают ограничения, содержащие все переменные (эти ограничения образуют так называемую блок-связку), и ограничения, содержащие часть их (эти ограничения образуют блоки). Схематически система ограничений таких задач с двумя блоками изображена на рис. 2.20. В общем случае число блоков может быть значительным, а задачи, имеющие блочную структуру, могут быть задачами как линейного, так и нелинейного программирования.

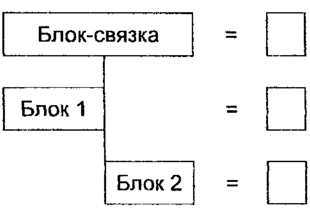


Рис. 2.20

Для решения задач линейного программирования с блочной структурой может быть использован так называемый *метод декомпозиции Данцига—Вулфа**, позволяющий свести решение конкретной задачи, содержащей несколько блоков, к решению отдельных подзадач, определяемых ими и соответствующим образом связанных между собой. При этом число блоков определяет количество подзадач, решаемых на каждой из итераций при решении так называемой *главной задачи*.

Построим последнюю для задачи, содержащей два блока и состоящей в общем виде в определении максимального значения функции

* Подробнее см.: Линейное и нелинейное программирование. Киев.: Выща шк., 1975.

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_{n_1}x_{n_1} + c_{n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + c_nx_n \tag{2.117}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n_1}x_{n_1} + a_{1n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{k_1}x_1 + \ldots + a_{kn_1}x_{n_1} + a_{kn_1+1}x_{n+1} + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+11}x_1 + \ldots + a_{k+1n_1}x_{n_1} = b_{k+1}, \\ \ldots \end{cases} \tag{2.117}$$

$$\begin{cases} a_{l1}x_1 + \ldots + a_{ln_1}x_{n_1} = b_l, \\ a_{l+1n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{l+1n}x_n = b_{l+1}, \\ \ldots \\ a_{mn_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.118}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Прежде чем записать главную задачу, введем обозначения:

$$C^{(1)} = (c_1, c_2, \ldots, c_{n_1});\ C^{(2)} = (c_{n_1+1}, c_{n_1+2}, \ldots, c_n);$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn_1} \end{bmatrix};\quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{1n_1+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{kn_1+1} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix};\quad P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{k+11} & \ldots & a_{k+1n_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1} & \ldots & a_{ln_1} \end{bmatrix};\quad \tilde{P}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} b_{k+1} \\ \ldots \\ b_l \end{bmatrix}; \tag{2.120}$$

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{l+1n_1+1} & \ldots & a_{l+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mn_1+1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix};\quad \tilde{P}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} b_{l+1} \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Обозначим через D_1 и D_2 соответственно множества допустимых решений систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{k+11}x_1 + \ldots + a_{k+1n_1}x_{n_1} = b_{k+1}, \\ \ldots \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{1n_1}x_{n_1} = b_l, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1} \geq 0;$$

$$\begin{cases} a_{l+1n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{l+1n}x_n = b_{l+1}, \\ \ldots \\ a_{mn_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_n \geq 0.$$

Пусть $X_j^{(1)}$ $(j = \overline{1, N_j^{(1)}})$ и $X_j^{(2)}$ $(j = \overline{1, N_j^{(2)}})$,

$R_j^{(1)}$ $(j = \overline{N_1^{(1)} + 1, N^{(1)}})$ и $R_j^{(2)}$ $(j = \overline{N_1^{(2)} + 1, N^{(2)}})$ — вершины и направляющие векторы неограниченных ребер соответственно многогранников D1 и D2. Обозначим

$$P_j^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_j^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (j = \overline{1, N_1^{(1)}});\ P_j^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}R_j^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (j = \overline{N_1^{(1)} + 1, N^{(1)}});$$
$$P_j^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_j^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (j = \overline{1, N_1^{(2)}});\ P_j^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}R_j^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (j = \overline{N_1^{(2)} + 1, N_1^{(2)}}); \tag{2.122}$$

Далее:

$$\tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \sigma_j^{(1)} = (C^{(1)}, X_j^{(1)})\ (j = \overline{1, N_j^{(1)}});\ \sigma_j^{(1)} = (C^{(1)}, R_j^{(1)})$$
$$(j = \overline{N_1^{(1)} + 1, N^{(1)}});\ \sigma_j^{(2)} = (C^{(2)}, X_j^{(2)})\ (j = \overline{1, N_1^{(2)}});\ \sigma_j^{(2)} = (C^{(2)}, R_j^{(2)}) \tag{2.123}$$
$$(j = \overline{N_1^{(2)} + 1, N^{(2)}}).$$

С учетом введенных обозначений главная задача состоит в определении максимального значения функции

$$F = \sigma_1^{(1)} y_1^{(1)} + \ldots + \sigma_{N^{(1)}}^{(1)} y_{N^{(1)}}^{(1)} + \sigma_1^{(2)} y_1^{(2)} + \ldots + \sigma_{N^{(2)}}^{(2)} y_{N^{(2)}}^{(2)} \tag{2.124}$$

при условиях

$$y_1^{(1)} P_1^{(1)} + \ldots + y_{N^{(1)}}^{(1)} P_{N^{(1)}}^{(1)} + y_1^{(2)} P_1^{(2)} + \ldots + y_{N^{(2)}}^{(2)} P_{N^{(2)}}^{(2)} = \tilde{P}_0, \tag{2.125}$$

$$y_j^{(1)} \ge 0\ (j = \overline{1, N^{(1)}});\quad y_j^{(2)} \ge 0\ (j = \overline{1, N^{(2)}}). \tag{2.126}$$

Если $Y^* = (y_1^{*(1)}, y_2^{*(1)}, \ldots, y_k^{*(1)}, y_1^{*(2)}, y_2^{*(2)}, \ldots, y_q^{*(2)})$ — оптимальный план главной задачи, $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, ..., $P_k^{(1)}$ — соответствующие вершины многогранника D_1, а $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$, ..., $P_q^{(2)}$ — соответствующие направляющие векторы неограниченных ребер многогранника D_2, то оптимальное решение исходной задачи есть

$$X^* = (X_1^*, X_2^*),$$

где

$$X_1^* = y_1^{*(1)}X_1^{(1)} + y_2^{*(1)}X_2^{(1)} + \ldots + y_k^{*(1)}X_k^{(1)} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n1}^*); \qquad (2.127)$$

$$X_2^* = y_1^{*(2)}R_1^{(2)} + y_2^{*(2)}R_2^{(2)} + \ldots + y_q^{*(2)}R_q^{(2)} = (x_{n1+1}^*, x_{n1+2}^*, \ldots, x_n^*). (2.128)$$

В том случае, когда целевая функция главной задачи не ограничена на допустимом множестве ее решений, это же относится и к целевой функции исходной задачи.

2.90. Построить главную задачу для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \qquad (2.129)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \le 17, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \\ -4x - x_2 \le 8, \\ x_3 + x_4 \le 22, \\ -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases} \qquad (2.130)$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, 4}). \qquad (2.131)$$

Решение. Система ограничений сформулированной задачи имеет блок-связку, определяемую первым неравенством, и два блока, первый из которых определяется вторым и третьим неравенствами системы (2.130), а второй — четвертым и пятым неравенствами. Следовательно, $C^{(1)} = (2, 3)$, $C^{(2)} = (-1, -2)$, $A^{(1)} = (1, 1)$, $A^{(2)} = (-2, 1)$, $P_0 = (17)$,

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad P_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 22 \\ 13 \end{bmatrix},$$

Найдем вершины многоугольников решений D_1 и D_2, определяемых системами неравенств:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + x_4 \le 22, \\ -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0; \qquad x_3, x_4 \ge 0.$$

В данном случае это легко сделать геометрически. Из рис. 2.21 следует, что $X_1^{(1)} = (0, 0)$; $X_2^{(1)} = (0, 9)$; $X_3^{(1)} = (17, 60)$; $X_4^{(1)} = (2, 0)$; $X^{(2)} = (0, 0)$; $X_2^{(2)} = (0, 13)$; $X_3^{(2)} = (3, 19)$; $X_4^{(2)} = (22, 0)$.

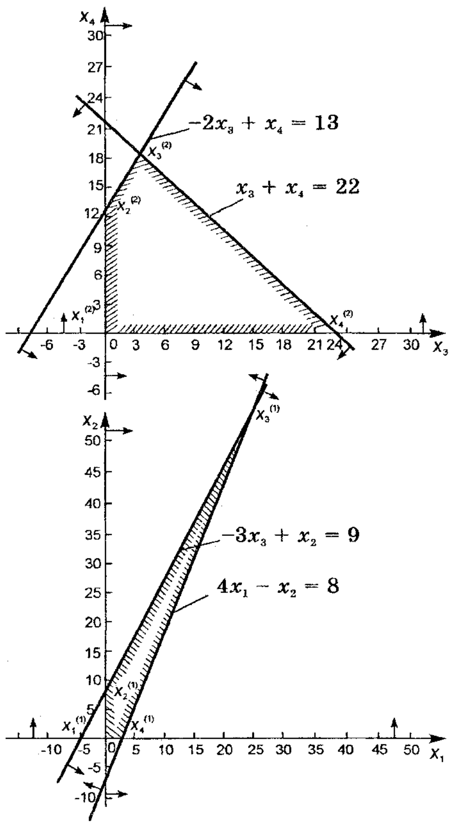


Рис. 2.21

По формулам (2.122) и (2.123) получаем:

$$\sigma_1^{(1)} = (C^{(1)}, X_1^{(1)}) = ((2, 3), (0, 0)) = 0,$$
$$\sigma_2^{(1)} = (C^{(1)}, X_2^{(1)}) = ((2, 3), (0, 9)) = 27,$$
$$\sigma_3^{(1)} = (C^{(1)}, X_3^{(1)}) = ((2, 3), (17, 60)) = 214,$$
$$\sigma_4^{(1)} = (C^{(1)}, X_4^{(1)}) = ((2, 3), (2, 0)) = 4,$$
$$\sigma_1^{(2)} = (C^{(2)}, X_1^{(2)}) = ((-1, -2), (0, 0)) = 0,$$
$$\sigma_2^{(2)} = (C^{(2)}, X_2^{(2)}) = ((-1, -2), (0, 13)) = -26,$$
$$\sigma_3^{(2)} = (C^{(2)}, X_3^{(2)}) = ((-1, -2), (3, 19)) = -41,$$
$$\sigma_4^{(2)} = (C^{(2)}, X_4^{(2)}) = ((-1, -2), (22, 0)) = -22.$$

$$P_1^{(1)} = \begin{bmatrix} A^{(1)}X_1^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ P_2^{(1)} = \begin{bmatrix} A^{(1)}X_2^{(1)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$P_1^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{(2)}X_1^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ P_2^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{(2)}X_2^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$P_3^{(1)} = \begin{bmatrix} A^{(1)}X_3^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ P_4^{(1)} = \begin{bmatrix} A^{(1)}X_4^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$P_3^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{(2)}X_3^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ P_4^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{(2)}X_4^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, главная задача состоит в определении максимального значения функции

$$F = 27y_2^{(1)} + 214y_3^{(1)} + 4y_4^{(1)} - 26y_2^{(2)} - 41y_3^{(2)} - 22y_4^{(2)} \qquad (2.132)$$

при условиях

$$\begin{cases} 9y_2^{(1)} + 77y_3^{(1)} + 2y_4^{(1)} + 13y_2^{(2)} + 13y_3^{(2)} - 44y_4^{(2)} \le 17, \\ y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + y_3^{(1)} + y_4^{(1)} = 1, \\ y_1^{(2)} + y_2^{(2)} + y_3^{(2)} + y_4^{(2)} = 1, \end{cases} \qquad (2.133)$$

$$y_j^{(1)} \ge 0,\ y_j^{(2)} \ge 0\ (j = \overline{1, 4}). \qquad (2.134)$$

Запишем главную задачу (2.132)—(2.134) в форме основной задачи линейного программирования: найти максимальное значение функции

$$F = 27y_2^{(1)} + 214\ y_3^{(1)} + 4y_4^{(1)} - 26y_2^{(2)} - 41y_3^{(2)} - 22y_4^{(2)} \qquad (2.135)$$

при условиях

$$\begin{cases} 9y_2^{(1)} + 77y_3^{(1)} + 2y_4^{(1)} + 13y_2^{(2)} + 13y_3^{(2)} - 44y_4^{(2)} + y_5 = 17, \\ y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + y_3^{(1)} + y_4^{(1)} = 1, \\ y_1^{(2)} + y_2^{(2)} + y_3^{(2)} + y_4^{(2)} = 1, \end{cases} \qquad (2.136)$$

$$y_j^{(1)} \ge 0,\ y_j^{(2)} \ge 0\ (j = \overline{1, 4}), y_5 \ge 0. \qquad (2.137)$$

Если теперь сопоставить между собой задачи (2.129)—(2.131) и (2.132)—(2.134), то видим, что число ограничений-неравенств в первой задаче равно 5 и число переменных равно 4, а во второй эти числа соответственно равны 3 и 8. Таким образом, при переходе от задачи (2.129)—(2.131) к задаче (2.132)—(2.134) уменьшилось число ограничений, однако возросло число переменных. К тому же нам понадобилось определить все вершины многогранников решений D_1 и D_2, что не всегда просто. Поэтому возникает вопрос: стоит ли при нахождении решения задачи (2.129)—(2.131) переходить к определению оптимального решения задачи (2.132)—(2.134)? Положительный ответ дает метод Данцига—Вулфа, позволяющий находить решение задачи (2.132)—(2.134), не зная при этом ни всех вершин многогранников решений D_1 и D_2, ни их числа, а зная лишь какой-нибудь определяющий план этой задачи. На этом методе и остановимся более подробно, а именно: используя его, рассмотрим нахождение решения главной задачи (2.124)—(2.126), построенной для задачи (2.117)—(2.119). В связи с этим отметим, что для начала итерационного процесса решения задачи (2.124)—(2.126) достаточно знать какой-нибудь определяющий опорный план данной задачи. Этот базис можно непосредственно записать, либо определить его, например, используя метод искусственного базиса.

Итак, пусть известны базис, определяющий один из опорных планов главной задачи, и B^{-1} — матрица, обратная матрице, составленной из компонент базисных векторов. Для проверки данного опорного плана на оптимальность найдем вектор

$$\bar{\Omega} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}) = \sigma_6 B^{-1}$$

и обозначим через Ω вектор, составленный из первых m компонент вектора $\bar{\Omega}$, то есть $\Omega = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. После этого найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F_1^{(1)} = (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X^{(1)})$$

при условиях

$$A^{(1)} X^{(1)} = \tilde{P}_0^{(1)}, \; X^{(1)} \geq 0$$

и определяемой первым блоком исходной задачи (2.117)—(2.119) (подзадача 1). Если она имеет оптимальный план $X_S^{(1)}$ и $F_1^{(1)}(X_S^{(1)}) = \lambda_{m+1}$, то находим решение подзадачи 2:

$$F_1^{(2)} = (C^{(2)} - \Omega A^{(2)}, X^{(2)})$$

при условиях

$$A^{(2)}X^{(2)} = \tilde{P}_0^{(2)},\ X^{(2)} \geq 0,$$

определяемой вторым блоком задачи (2.117)—(2.119). В том случае, если и эта задача имеет оптимальный план $X_S^{(2)}$ и $F_1^{(2)}$ $(X_S^{(2)}) = \lambda_{m+2}$, то исходный базис определяет оптимальный план главной задачи (2.124)—(2.126) и, таким образом, найдено ее решение, а следовательно, по формулам (2.127) и (2.128) можно определить оптимальный план исходной задачи (2.117)—(2.119).

В тех случаях, когда $F_1^{(1)}$, $(X_S^{(1)}) \neq \lambda_{m+1}$, или $F_1^{(2)}$, $(X_S^{(2)}) \neq \lambda_{m+2}$, исходный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому базису, определяющему некоторый следующий опорный план главной задачи. Если при этом оказывается, что $F_1^{(1)}$ $(X_S^{(1)}) \neq \lambda_{m+1}$, то находить решение второй подзадачи не имеет смысла.

Итак, пусть, например, $F_1^{(1)}$ $(X_S^{(1)}) \neq \lambda_{m+1}$. Тогда следует перейти к новому базису, определяющему некоторый последующий опорный план главной задачи. Для этого нужно какой-нибудь вектор исключить из базиса и ввести вместо него новый вектор. Вектор, вводимый в базис, определяется наименьшим отрицательным числом из чисел $\lambda_{m+1} - (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X_S^{(1)})$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Если таким числом является $\lambda_{m+1} - (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X_S^{(1)})$, то в базис вводим вектор $P_S^{(1)}$. Если же это есть некоторое число λ_j, то в базис вводим вектор $P_j^{(1)}$, определяемый данным числом.

После нахождения вектора, вводимого в базис, определяем вектор, исключаемый из него. Для этого находим разложения векторов $P_S^{(1)}$ (или $P_j^{(1)}$) и P_0 (вектор, определяющий опорный план главной задачи) по векторам данного базиса и определяем минимум отношения компонент вектора P_0 к соответствующим положительным компонентам вектора $P_S^{(1)}$ в данном базисе. Наименьшее из этих отношений и определяет вектор, исключаемый из базиса. В результате получается новый базис, определяющий последующий опорный план главной задачи. Этот план проверяем на оптимальность, для чего строим соответствующую подзадачу (подзадачи) и находим решение. Данное решение позволяет сделать вывод, является ли соответствующий опорный план оптимальным. Если он не оптимален, то по описанным выше правилам переходим к новому базису, определяющему некоторый последующий опорный план. При этом заметим, что в ходе итерационного процесса возможен случай, когда среди компонент разложения вектора $P_S^{(1)}$ по векторам данного базиса не имеется положительных (> 0). Это означает, что целевая функция главной задачи на множестве ее допустимых решений не ограничена, а следовательно, не ограничена и целевая функция исходной задачи.

В результате после конечного числа шагов либо устанавливаем неразрешимость, либо находим оптимальный план главной задачи, а следовательно, и решение исходной задачи.

Выше рассмотрено нахождение решения задачи линейного программирования с блочной структурой для случая двух блоков. Если число блоков больше двух и равно, например, k, то алгоритм решения такой задачи, по существу, отличается лишь тем, что теперь в общем случае на каждой итерации приходится решать не две подзадачи, а k подзадач. Однако если решение одной из подзадач показало, что данный базис не определяет оптимальный план главной задачи, то находить решение других подзадач не имеет смысла.

2.91. Найти решение задачи 2.90, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \tag{2.138}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \le 17, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \\ x_3 + x_4 \le 22, \\ -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases} \tag{2.139}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 4}). \tag{2.140}$$

Решение. Запишем исходные данные в матричном и векторном виде:

$$C^{(1)} = (2,\ 3),\ C^{(2)} = (-1,\ -2),\ A^{(1)} = (1,\ 1),\ A^{(2)} = (-2,\ 1),\ P_0 = (17);$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad P_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 22 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Определим теперь базис главной задачи (эта задача была записана выше).

Так как блок-связка в системе ограничений (2.139) задачи (2.138)—(2.140) представляет собой неравенство вида " $\le$ ", то такой же вид примет и первое ограничение в главной задаче. Следовательно, приводя главную задачу к задаче, записанной в форме основной задачи линейного программирования, добавляем к правой части первого ограничения дополнительную переменную, которую обозначим через y_5. Этой переменной соответствует вектор $P_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Далее, из системы неравенств (2.139) задачи (2.138)—(2.140) видно, что многоугольники решений, определяемые соответственно первым и вторым блоками, имеют вершины $X_1^{(1)} = (0, 0)$ и $X_1^{(2)} = (0, 0)$. Этим вершинам соответствуют векторы

$$P_1^{(1)} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} X_1^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad P_1^{(2)} = \begin{bmatrix} A_1^{(2)} X_1^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку вектор свободных членов главной задачи

$$\tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

не имеет отрицательных компонент, векторы P_5, $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$ образуют базис, определяющий опорный план главной задачи, в котором отличные от нуля компоненты таковы: $y_5 = 17$, $y_1^{(1)} = 1$ и $y_1^{(2)} = 1$.

Чтобы проверить, определяет ли найденный базис оптимальный план главной задачи, найдем максимальное значение функции

$$F_1^{(1)} = (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X^{(1)})$$

при условиях

$$\tilde{A}^{(1)} \cdot X^{(1)} = P_0^{(1)}, X^{(1)} \geq 0.$$

В данном случае $B^{-1} = E$, поскольку матрица B состоит из компонент единичных векторов P_5, $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$. Далее, $\sigma_5 = 0$, $\sigma_1^{(1)} = (C^{(1)}, X_1^{(1)}) = ((2; 3), (0; 0)) = 0$, $\sigma_1^{(2)} = (C^{(2)}, X_1^{(2)}) = ((-1; -2), (0; 0)) = 0$; $\overline{\Omega} = \sigma_6 B^{-1} = (\sigma_5, \sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)})\, B^{-1} = (0, 0, 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 0)$;

$\Omega = 0$; $\lambda_2 = \lambda_{m+1} = 0$; $\lambda_3 = \lambda_{m+2} = 0$.

Составляем и решаем подзадачу 1:

$$F_1^{(1)} = (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X^{(1)}) = ((2, 3) - 0 \cdot (1, 1), (x_1, x_2)) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Оптимальным планом последней задачи является $X_3^{(1)} = (17, 60)$. При этом

$$F_1^{(1)}(X_3^{(1)}) = 214 > \lambda_{m+1} = \lambda_2 = 0.$$

Значит, исходный базис, образованный векторами P_5, $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$, определяет опорный план главной задачи, который не является оптимальным.

Первая большая итерация. Из чисел $\lambda_m - (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X_3^{(1)}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то есть в данном случае из чисел -214 и 0, наименьшим отрицательным является -214. Следовательно, в базис вводим вектор

$$P_3^{(1)} = \begin{bmatrix} A^{(1)}X_3^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для него $\sigma_3^{(1)} = (C^{(1)}, X_3^{(1)}) = ((2; 3), (17; 60)) = 214$. Разложение вектора $P_3^{(1)}$, как и вектора $\tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, по векторам исходного базиса совпадает с этими векторами. Поэтому для определения вектора, исключаемого из базиса, находим наименьшее из отношений компонент вектора к положительным компонентам вектора $P_3^{(1)}$, то есть

$$\min\,(17/77;\ 1/1) = 17/77.$$

Таким образом, из базиса исключаем первый вектор, то есть вектор P_5, и, следовательно, новый базис образуют векторы $P_3^{(1)}$, $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$. Матрица, составленная из компонент этих векторов, такова:

$$B = \begin{bmatrix} 77 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь находим матрицу

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и определяем векторы $\overline{\Omega}$, Ω и $C^{(1)} - \Omega A^{(1)}$:

$$\overline{\Omega} = \sigma_6 B^{-1} = (\sigma_3^{(1)}, \sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)})B^{-1} = (214; 0; 0)\cdot\begin{bmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (214/77; 0; 0);$$

$$\Omega = (214/77);\ \lambda_2 = \lambda_{m+1} = 0;\ \lambda_3 = \lambda_{m+2} = 0;$$

$$C^{(1)} - \Omega A^{(1)} = ((2; 3) - (214/77)\cdot(1; 1)) = (-60/77; 17/77).$$

Подзадача 1 имеет вид

$$F_2^{(1)} = -(60/77)x_1 + (17/77)x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Оптимальным планом последней задачи является $X_2^{(1)} = (0, 9)$. Так как $F_2^{(1)}(X_2^{(1)}) = 153/77 > \lambda_2 = 0$, то рассматриваемый базис определяет опорный план главной задачи, не являющийся оптимальным.

В т о р а я б о л ь ш а я и т е р а ц и я. Из чисел $\lambda_2 - (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X_2^{(1)})$, λ_2, то есть в данном случае из чисел $-153/77$ и 0, наименьшим отрицательным является

$$-153/77 = \lambda_2 - (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X_2^{(1)}).$$

Значит, в базис вводим вектор

$$P_2^{(1)} = \begin{bmatrix} A^{(1)}X_2^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Соответственно $\sigma_2^{(1)} = (C^{(1)}, X_2^{(1)}) = ((2; 3), (0; 9)) = 27$.

Чтобы определить вектор, исключаемый из базиса, разложим векторы $P_2^{(1)}$ и P_0 по векторам рассматриваемого базиса, то есть

$$B^{-1}P_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/77 \\ 68/77 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/77 \\ 60/77 \\ 1 \end{bmatrix},$$

и найдем min (17/77:9/77; 60/77:68/77) = min (17/9; 15/17) =

$= 15/17$. Следовательно, из базиса исключаем второй вектор, то есть вектор $P_1^{(1)}$.

Новый базис образуют векторы

$$P_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица, составленная из компонент этих векторов, такова:

$$B = \begin{bmatrix} 77 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

обратная к ней имеет вид

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Находим векторы $\overline{\Omega}$, Ω и $C^{(1)} - \Omega A^{(1)}$:

$$\overline{\Omega} = (\sigma_3^{(1)}, \sigma_2^{(1)}, \sigma_1^{(2)})B^{-1} = (214;\ 27;\ 0) \cdot \begin{bmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (11/4;\ 9/4;\ 0);$$

$$\Omega = (11/4);\ \lambda_2 = \lambda_{m+1} = 9/4;\ \lambda_3 = \lambda_{m+2} = 0;$$

$$C^{(1)} - \Omega A^{(1)} = ((2;\ 3) - (11/4)\,(1;\ 1)) = (-3/4;\ 1/4).$$

Составляем и решаем подзадачу 1:

$$F_3^{(1)} = -(3/4)x_1 + (1/4)x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Подзадача 1 имеет оптимальный план $X_2^{(1)} = (0;\ 9)$. При этом $F_3^{(1)}(X_2^{(1)}) = 9/4 = \lambda_2$.

Составляем и решаем подзадачу 2:

$$F_1^{(2)} = (C^{(2)} - \Omega A^{(2)},\ X^{(2)}) = ((-1;\ -2) - (9/4)\,(-2;\ 1),\ (x_3;\ x_4)) = (7/2)x_3 - (17/4)x_4 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 22, \\ -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases}$$
$$x_3, x_4 \ge 0.$$

Подзадача 2 имеет оптимальный план $X_4^{(2)} = (22;\ 0)$. Так как $F_1^{(2)}(X_4^{(2)}) = 77 > \lambda_3 = 0$, то рассматриваемый базис определяет опорный план главной задачи, не являющийся оптимальным.

Третья большая итерация. Из чисел $\lambda_3 - (C^{(2)} - \Omega A^{(2)}, X_4^{(2)}) = -77$, $\lambda_1 = 11/4$ наименьшее отрицательное есть -77. Поэтому в базис вводим вектор

$$P_4^{(2)} = \begin{bmatrix} A^{(2)}X_4^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Соответственно $\sigma_4^{(2)} = (C^{(2)}, X_4^{(2)}) = ((-1;\ -2), (22;\ 0)) = -22$.

Чтобы определить вектор, выводимый из базиса, разложим векторы $P_4^{(2)}$ и $\tilde{P}_0$ по векторам рассматриваемого базиса, то есть

$$B^{-1}\tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/17 \\ 15/17 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$B^{-1}P_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/17 \\ 11/17 \\ 1 \end{bmatrix},$$

и найдем min $(15/17:11/17;\ 1/1) = 1$. Таким образом, из базиса исключаем вектор $P_1^{(2)}$. Новый базис образуют векторы

$$P_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_4^{(2)} = \begin{bmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица, обратная матрице, составленной из компонент векторов $P_3^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ и $P_4^{(2)}$, такова:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем векторы $\overline{\Omega}$, Ω и $C^{(1)} - \Omega A^{(1)}$ и $C^{(2)} - \Omega A^{(2)}$:

$$\overline{\Omega} = (\sigma_3^{(1)}, \sigma_2^{(1)}, \sigma_4^{(2)})B^{-1} = (214;\ 27;\ -22)\cdot\begin{bmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (11/4;\ 9/4;\ 99);$$

$\Omega = (11/4)$; $\lambda_2 = \lambda_{m+1} = 9/4$; $\lambda_3 = \lambda_{m+2} = 99$;

$C^{(1)} - \Omega A^{(1)} = ((2;\ 3) - (11/4)\ (1;\ 1)) = (-3/4;\ 1/4)$;

$C^{(2)} - \Omega A^{(2)} = ((-1; -2) - (11/4)\ (-2;\ 1)) = (9/2;\ -19/4)$.

Составляем и решаем подзадачу 1:

$F_3^{(1)} = -(3/4)x_1 + (1/4)x_2 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Оптимальный план $X_2^{(1)} = (0;\ 9)$. При этом $F_3^{(1)}(X_2^{(1)}) = 9/4 = \lambda_2$.

Составляем и решаем подзадачу 2:

$$F_1^{(2)} = (9/2)x_3 - (19/4)x_4 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 22, \\ -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases}$$
$$x_3, x_4 \ge 0.$$

Подзадача 2 имеет оптимальный план $X_4^{(2)} = (22;\ 0)$; при этом $F_1^{(2)}\ (X_4^{(2)}) = 99 = \lambda_3$.

Таким образом, определяемый рассматриваемым базисом опорный план является оптимальным. Для его нахождения разложим вектор $\tilde{P}_0$ по векторам данного базиса:

$$B^{-1}\tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/17 \\ 4/17 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Значит, в оптимальном плане главной задачи отличные от нуля компоненты таковы: $y_3^{(1)} = 13/17$, $y_2^{(1)} = 4/17$ и $y_4^{(2)} = 1$. Используя формулы (2.127) и (2.128), находим оптимальный план исходной задачи (2.138)—(2.140):

$X_0^* = (X_1^*, X_2^*) = (y_2^{(1)}X_2^{(1)} + y_3^{(1)}X_3^{(1)},\ y_4^{(2)}X_4^{(2)}) = ((4/17)\cdot(0;\ 9) + (13/17)\cdot(17;\ 60),\ 1\cdot(22;\ 0)) = (13;\ 48;\ 22;\ 0)$. Максимальное значение целевой функции

$$F_{\max} = 2\cdot 13 + 3\cdot 48 - 22 = 148.$$

В заключение отметим, что помимо метода Данцига—Вулфа существуют и другие методы, позволяющие сводить решение задачи большой размерности к решению ряда подзадач меньшей размерности.

Используя метод Данцига—Вулфа, найдите решение задач 2.92—2.98.

2.92. $F = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ -3x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_3 - 3x_4 \le 12, \\ x_3 + 3x_4 \le 15, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 4})$.

2.93. $F = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_3 + x_4 \le 4, \\ -x_3 + x_4 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 4})$.

2.94. $F = 5x_1 + 4x_2 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + x_2 \le 9, \\ x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_2 \ge 5, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$.

2.95. $F = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 150, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 80, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_3 + x_4 \le 90, \\ 2x_3 + 4x_4 \le 80, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 4})$.

2.96. $F = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \le 24, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 102, \\ x_1 - 2x_2 \le 16, \\ x_3 + 2x_4 \le 14, \\ x_3 - 2x_4 \le 18, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 4})$.

2.97. $F = 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 50, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 - 3x_2 \le 27, \\ 2x_3 + 3x_4 \le 28, \\ -x_3 + 2x_4 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 4})$.

2.98. Для производства двух видов изделий на двух предприятиях отрасли может быть использовано 480 ед. сырья. Нормы затрат сырья на одно изделие соответственно равны 4 и 3 ед., а прибыль от реализации одного изделия соответственно равна 5 и 6 у.е.

На каждом из предприятий сырье проходит последовательную обработку, причем используются два типа технологического оборудования. Затраты времени при обработке сырья на каждом из типов оборудования в каждом из предприятий приведены в табл. 2.67. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования на каждом из предприятий.

Таблица 2.67

Тип оборудования	Затраты времени на изготовление одного изделия				Общий фонд рабочего времени предприятия	
	1-е предприятие		2-е предприятие			
	A	*B*	*A*	*B*	1	2
I	2	1	2	3	360	420
II	1	3	4	5	420	340

С учетом имеющегося сырья и возможностей использования предприятиями технологического оборудования определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить на каждом из предприятий, чтобы при этом прибыль от их реализации была максимальной.

§ 2.6. Задачи теории игр и линейное программирование

1. Экономическая и геометрическая интерпретации задач теории игр. Если имеется несколько конфликтующих сторон (лиц), каждая из которых принимает некоторое решение, определяемое заданным набором правил, и каждому из лиц известно возможное конечное состояние конфликтной ситуации с заранее определенными для каждой из сторон платежами, то говорят, что имеет место игра. Задача теории игр состоит в выборе такой линии поведения данного игрока, отклонение от которой может лишь уменьшить его выигрыш.

Определение 2.5. Ситуация называется *конфликтной*, если в ней участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоположны.

Определение 2.6. *Игра* — это действительный или формальный конфликт, в котором имеется по крайней мере два участника (игрока), каждый из которых стремится к достижению собственных целей.

Определение 2.7. Допустимые действия каждого из игроков, направленные на достижение некоторой цели, называются *правилами игры*.

Определение 2.8. Количественная оценка результатов игры называется *платежом*.

Определение 2.9. Игра называется *парной*, если в ней участвуют только две стороны (два лица).

Определение 2.10. Парная игра называется *игрой с нулевой суммой*, если сумма платежей равна нулю, то есть если проигрыш одного игрока равен выигрышу второго. (Парные игры с нулевой суммой и рассматриваются ниже).

Определение 2.11. Однозначное описание выбора игрока в каждой из возможных ситуаций, когда он должен сделать личный ход, называется *стратегией игрока*.

Определение 2.12. Стратегия игрока называется *оптимальной*, если при многократном повторении игры она обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же самое, минимально возможный средний проигрыш).

Пусть имеется два игрока, один из которых может выбрать i-ю стратегию из m своих возможных стратегий ($i = \overline{1, m}$), а второй, не зная выбора первого, выбирает j-ю стратегию из n своих возможных стратегий ($j = \overline{1, n}$). В результате первый игрок выигрывает величину a_{ij}, а второй проигрывает эту величину. Из чисел a_{ij} составим матрицу

$$A = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Строки матрицы A соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы — стратегиям второго. Эти стратегии называются *чистыми*.

Определение 2.13. Матрица A называется *платежной* (или *матрицей игры*).

Определение 2.14. Игру, определяемую матрицей A, имеющей m строк и n столбцов, называют *конечной игрой размерности* $m \cdot n$.

Определение 2.15. Число $\alpha = \max\limits_{i} (\min\limits_{j} a_{ij})$ называется *нижней ценой игры* или *максимином*, а соответствующая ему стратегия (строка) — *максиминной*.

Определение 2.16. Число $\beta = \min\limits_{j} (\max\limits_{i} a_{ij})$ называется *верхней ценой игры* или *минимаксом*, а соответствующая ему стратегия игрока (столбец) — *минимаксной*.

Теорема 2.3. *Нижняя цена игры всегда не превосходит верхней цены игры.*

Определение 2.17. Если $\alpha = \beta = v$, *то число* v называется *ценой игры.*

Определение 2.18. Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется *игрой с седловой точкой.*

Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными. Если игра, заданная матрицей, не имеет седловой точки, то для нахождения ее решения используются смешанные стратегии.

Определение 2.19. Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называется *смешанной стратегией* данного игрока.

Из последнего определения непосредственно следует, что сумма компонент указанного вектора равна единице, а сами компоненты неотрицательны. Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, а второго игрока — как вектор $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где $u_i \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$, $z_j \geq 0$ $(j = \overline{1, n})$, $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} z_j = 1$.

Если U^* — оптимальная стратегия первого игрока, а Z^* — оптимальная стратегия второго игрока, то число

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* z_j^*$$

является ценой игры. Определение оптимальных стратегий и цены игры и составляет процесс нахождения решения игры.

Теорема 2.4. *Всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.*

Теорема 2.5. *Для того чтобы число v было ценой игры, а U^* и Z^* — оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \geq v \ (j = \overline{1, n}), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^* \leq v \ (i = \overline{1, m}).$$

Если теорема 2.4 дает ответ на вопрос о существовании решения игры, то следующая теорема дает ответ на вопрос, как найти это решение для игр 2×2, $2 \times n$ и $n \times 2$, примеры которых приведены ниже.

Теорема 2.6. *Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v вне зависимости от того, с какими частотами будет* *применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную (в том числе и чистые стратегии).*

2.99. Найти решение игры, заданной матрицей $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, и дать геометрическую интерпретацию этого решения.

Решение. Прежде всего проверим наличие седловой точки в данной матрице. Для этого найдем минимальные элементы в каждой из строк (2 и 4) и максимальные элементы в каждом из столбцов (6 и 5). Значит, нижняя цена игры $\alpha = \max(2; 4) = 4$, а верхняя цена игры $\beta = \min(6; 5) = 5$. Так как $\alpha = 4 \neq \beta = 5$, то решением игры являются смешанные оптимальные стратегии, а цена игры v заключена в пределах $4 \leq v \leq 5$.

Предположим, что для игрока A стратегия задается вектором $U = (u_1; u_2)$. Тогда на основании теоремы 2.6 при применении игроком B чистой стратегии B_1 или B_2 игрок A получит средний выигрыш, равный цене игры, то есть

$$2u_1^* + 6u_2^* = v \text{ (при стратегии } B_1\text{)},$$

$$5u_1^* + 4u_2^* = v \text{ (при стратегии } B_2\text{)}.$$

Помимо двух записанных уравнений относительно u_1^* и u_2^* добавим уравнение, связывающее частоты u_1^* и u_2^*:

$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Решая полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим $u_1^* = 2/5$; $u_2^* = 3/5$; $v = 22/5$.

Найдем теперь оптимальную стратегию для игрока B. Пусть стратегия для данного игрока задается вектором $Z = (z_1; z_2)$. Тогда

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = 22/5, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = 22/5, \\ z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, состоящую из каких-нибудь двух уравнений, взятых из последней системы, получим $z_1^* = 1/5$; $z_2^* = 4/5$. Следовательно, решением игры являются смешанные стратегии $U^* = (2/5; 3/5)$ и $Z^* = (1/5; 4/5)$, а цена игры $v = 22/5$.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию решения данной игры. Для этого на плоскости uOz введем систему координат и на оси Ou отложим отрезок единичной длины A_1A_2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию $U = (u_1; u_2) = (u_1; 1 - u_1)$ (рис. 2.22). В частности, точке A_1 (0; 1) отвечает стратегия A_1, точке A_2 (1; 0) — стратегия A_2 и т.д.

В точках A_1 и A_2 поставим перпендикуляры и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью Oz) отложим выигрыш игрока A при стратегии A_1, а на втором — при стратегии A_2. Если игрок A применяет стратегию A_1, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока B равен 2, а при стратегии B_2 — 5. Числам 2 и 5 на оси Oz соответствуют точки B_1 и B_2.

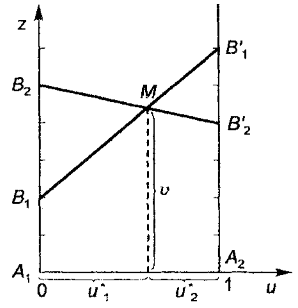


Рис. 2.22

Если же игрок A применяет стратегию A_2, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока B равен 6, а при стратегии B_2 он равен 4. Эти два числа определяют две точки B'_1 и B'_2 на перпендикуляре, восставленном в точке A_2. Соединяя между собой точки B_1 и B'_1, B_2 и B'_2, получим две прямые, расстояние до которых от оси Ou определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка $B_1B'_1$ до оси Ou определяет средний выигрыш v_1 при любом сочетании стратегий A_1 и A_2 (с частотами u_1, u_2) и стратегии B_1 игрока B. Это расстояние равно $2u_1 + 6u_2 = v_1$. Аналогично, средний выигрыш при применении стратегии B_2 определяется ординатами точек, принадлежащих отрезку $B_2B'_2$.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной $B_1MB'_2$, определяют минимальный выигрыш игрока A при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке M; следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $U^* = (u_1^*; u_2^*)$, а ее ордината равна цене игры v.

Координаты точки M находим как координаты точки пересечения прямых $B_1B'_1$ и $B_2B'_2$. Соответствующие три уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = v, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = v, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений, получаем $u_1^* = 2/5$; $u_2^* = 3/5$; $v = 22/5$.

Аналогично определяется оптимальная стратегия для игрока B. Для этого имеем уравнения

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = 22/5, \\ z_1^* + z_2^* = 1, \end{cases}$$

или

$$z_1^* = 1/5; \; z_2^* = 4/5.$$

Следовательно, решением игры являются смешанные стратегии $U^* = (2/5; 3/5)$ и $Z^* = (1/5; 4/5)$, а цена игры $v = 22/5$. К такому выводу мы пришли и выше.

Обобщая изложенные выше результаты нахождения решения игры 2×2, можно указать основные этапы нахождения решения игры $2 \times n$ или $n \times 2$.

1°. Строят прямые, соответствующие стратегиям второго (первого) игрока.

2°. Определяют нижнюю (верхнюю) границу выигрыша.

3°. Находят две стратегии второго (первого) игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с максимальной (минимальной) ординатой.

4°. Определяют цену игры и оптимальные стратегии.

2.100. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решение. На рис. 2.23 прямые $B_1B'_1$, $B_2B'_2$ и $B_3B'_3$ соответствуют стратегиям, а ломаная $B_1KB'_2$ — нижней границе выигрыша игрока B. Игра имеет решение $U^* = (2/3; 1/3)$, $Z^* = (1/2; 1/2; 0)$, $v = 8$.

2.101. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица имеет размерность 2×4. Строим прямые, соответствующие стратегиям игрока A (рис. 2.24). Ломаная $A_1KA'_4$ соответствует верхней границе выигрыша игрока A, а отрезок NK — цене игры. Решение игры таково: $U^* = (7/8; 0; 0; 1/8)$, $Z^* = (3/8; 5/8)$, $v = 43/8$.

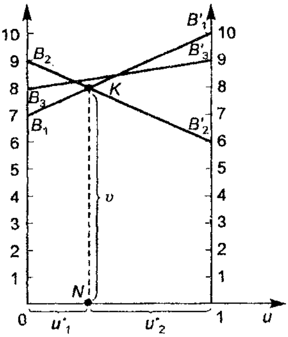


Рис. 2.23

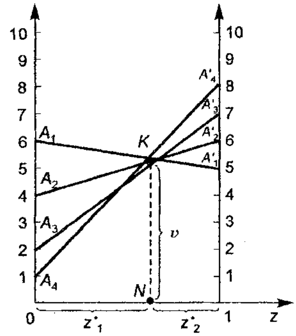


Рис. 2.24

2.102. Швейное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель одежды. Спрос на эту модель не может быть точно определен, однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируются три возможных варианта выпуска данной модели (А, Б, В). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект. Прибыль, которую получает предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей

$$\begin{array}{c} \\ \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Требуется найти объем выпуска модели одежды, обеспечивающий среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Р е ш е н и е. Прежде всего проверим, имеет ли исходная матрица седловую точку. Для этого находим минимальные элементы в ее строках (22; 21; 20) и максимальные — в столбцах (22; 23; 24). Максимальным среди минимальных элементов строк является число $\alpha = 22$, а минимальным среди максимальных столбцов — число $\beta = 22$. Таким образом, $\alpha = \beta = 22$. Число 22 является ценой игры. Игра имеет седловую точку, соответствующую I варианту выпуска модели одежды. Объем выпуска модели, соответствующей данному варианту, обеспечивает прибыль в 22 тыс. у.е. при любом состоянии спроса.

Используя геометрическую интерпретацию, найдите решение игр, определяемых следующими матрицами.

2.103. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$

2.104. $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$

2.105. Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей обуви — A и B. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний (I и II). В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{bmatrix}.$$

Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

2. Сведение задач теории игр к задачам линейного программирования. Рассмотрим игру $m \times n$, определяемую матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме 2.5, для оптимальной стратегии первого игрока $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ и цены игры v выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \ge v \ (j = \overline{1, n})$. Предположим для определенности, что $v > 0$. Это всегда может быть достигнуто благодаря тому, что прибавление ко всем элементам матрицы A одного и того же постоянного числа C не приводит к изменению оптимальных стратегий, а только лишь увеличивает цену игры на C.

Разделив теперь обе части последнего неравенства на v, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{u_i^*}{v} \ge 1 \ (j = \overline{1, n}).$$

Положим $u_i^*/v = y_i^*$, тогда

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* \geq 1\ (j = \overline{1, n});\ y_i^* \geq 0\ (i = \overline{1, m}).$$

Используя введенное обозначение, перепишем условие $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ в виде $\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 1 / v$.

Так как первый игрок стремится получить максимальный выигрыш, то он должен обеспечить минимум величине $1/v$. С учетом этого определение оптимальной стратегии первого игрока сводится к нахождению минимального значения функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^*$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1\ (j = \overline{1, n});\ y_i^* \geq 0\ (i = \overline{1, m}).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что определение оптимальной стратегии второго игрока сводится к нахождению максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1\ (i = \overline{1, m});\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1, n}).$$

Здесь $x_j = z_j / v$.

Таким образом, чтобы найти решение данной игры, определяемой матрицей A, нужно составить следующую пару двойственных задач и найти их решение.

Прямая задача: найти максимальное значение функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1\ (i = \overline{1, m});\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1, n}).$$

Двойственная задача: найти минимальное значение функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \; (j = \overline{1, n}); \; y_i \geq 0 \; (i = \overline{1, m}).$$

Используя решение пары двойственных задач, получаем формулы для определения стратегий и цены игры:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*; \quad z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*;$$

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} \quad (i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n}).$$

Итак, процесс нахождения решения игры с использованием методов линейного программирования включает три этапа.

1°. Составляют пару двойственных задач линейного программирования, эквивалентных данной матричной игре.

2°. Определяют оптимальные планы пары двойственных задач.

3°. Используя соотношение между планами пары двойственных задач и оптимальными стратегиями и ценой игры, находят решение игры.

2.106. Найти решение игры, определяемой матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составим двойственную пару задач линейного программирования. Прямая задача: найти максимум функции

$$F = x_1 + x_2 + x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Двойственная задача: найти минимум функции

$$F^* = y_1 + y_2 + y_3$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + y_3 \geq 1, \\ y_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Находим оптимальные планы прямой и двойственной задач (табл. 2.68).

Таблица 2.68

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_5	0	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
			0	–1	–1	–1	0	0	0
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
			1	0	–1	0	0	1	0
1	P_2	1	1/2	1/2	1	0	1/2	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1/2	3/2	0	0	–1/2	0	1
			3/2	1/2	0	0	1/2	1	0

Из табл. 2.68 видно, что исходная задача имеет оптимальный план $X^* = (0;\ 1/2;\ 1)$, а двойственная задача — оптимальный план $Y^* = (1/2;\ 1;\ 0)$. Следовательно, цена игры $v = \dfrac{1}{1/2+1} = \dfrac{2}{3}$, а оптимальные стратегии игроков $U^* = (1/3;\ 2/3;\ 0)$; $Z^* = (0;\ 1/3;\ 2/3)$.

Выше было показано, что для всякой матричной игры можно записать симметричную пару двойственных задач. Справедливо и обратное: для всякой симметричной пары двойственных задач можно записать матричную игру.

Пусть задана симметричная пара двойственных задач: прямая задача: $F = CX$, $AX \le B$, $X \ge 0$; двойственная задача: $F^* = BY$, $YA \ge C$, $Y \ge 0$. Тогда этой симметричной паре двойственных задач можно поставить в соответствие игру, определяемую матрицей

$$D = \begin{bmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{bmatrix},$$

где индекс T означает операцию транспонирования.

Следует отметить, что если каждая матричная игра имеет оптимальные стратегии, то не всякая задача линейного программирования имеет решение.

2.107. Построить игру, определяемую парой двойственных задач.

Прямая задача:

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0;$$

двойственная задача:

$$10y_1 + 12y_2 \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 \ge 2, \\ y_1 + 3y_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix};\ B^T = (10;\ 12);\ C = (2;\ 3);\ C^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, исходной симметричной паре двойственных задач можно поставить в соответствие матричную игру, определяемую матрицей

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

В задачах 2.108—2.111 найдите решение игр, определяемых соответствующими матрицами.

2.108. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$

2.109. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$

2.110. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$

2.111. $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$

В задачах 2.112 и 2.113 постройте для симметричных пар двойственных задач определяемые ими матричные игры.

2.112. $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 12, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 14, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 16, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F^* = 12y_1 + 14y_2 + 14y_3 \to \min$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 3, \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 4, \\ -4y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \end{cases}$$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$

2.113. $F = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \max$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \le 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \le 24, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F^* = 18y_1 + 16y_2 + 24y_3 \to \min$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 \ge 5, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 7, \\ 5y_1 + y_2 + y_3 \ge 8, \end{cases}$$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$

§ 2.7. Экстремальные задачи на сетях и линейное программирование

1. Определение числовых параметров сетевого графика с использованием методов линейного программирования. В основу сетевых методов планирования положен сетевой график, представляющий собой наглядное отображение некоторого комплекса работ, которые необходимо выполнить для достижения определенной цели. Главными элементами сетевого графика являются события и работы.

Определение 2.20. *Событие* — это результат начала или завершения одной или нескольких работ.

Определение 2.21. *Работа* — это протяженный во времени процесс, необходимый для свершения данного события.

На сетевых графиках события обозначаются кружками, а работы — стрелками. При этом каждому из событий присваивается определенный номер, а над стрелкой, обозначающей данную работу, проставляется ее продолжительность. В качестве примера на рис. 2.25. показан упрощенный сетевой график.

Определение 2.22. Событие, располагающееся в сетевом графике непосредственно после данного события так, что меж-

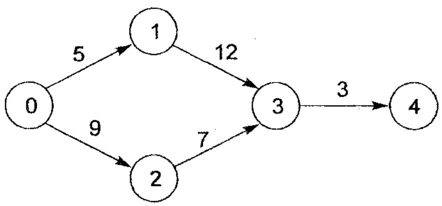


Рис. 2.25

ду ними нет никаких промежуточных событий, называется *последующим*.

Определение 2.23. Событие, располагающееся в сетевом графике непосредственно перед данным событием так, что между ними нет никаких промежуточных событий, называется *предшествующим*.

Определение 2.24. Событие сетевого графика, не имеющее предшествующих ему событий и отражающее начало выполнения всего комплекса работ, направленных на достижение конечной цели, называется *исходным*.

Определение 2.25. Событие сетевого графика, имеющее последующие события и отражающее конечную цель комплекса работ, включенных в данный сетевой график, называется *завершающим*.

Определение 2.26. Событие, за которым непосредственно начинается данная работа (работы), называется *начальным событием* для этой работы. Такое событие обозначается символом i.

Определение 2.27. Событие, которому непосредственно предшествует данная работа (работы), называется *конечным* для данной работы. Данное событие обозначается символом j.

Всякая работа сетевого графика соединяет два события, которым присвоены некоторые номера (код события). Поэтому всякая работа сетевого графика может быть закодирована номерами ее начального и конечного событий. Например, работа, соединяющая событие i с событием j, обозначается (i, j). Продолжительность работы (i, j) обозначается через $t(i, j)$.

Определение 2.28. Любая продолжительность работ в сетевом графике, в которой конечное событие каждой работы этой последовательности совпадает с начальным событием следующей за ней работы, называют *путем*.

Определение 2.29. Путь от исходного до данного события называется *предшествующим* этому событию.

Определение 2.30. Путем, *последующим* за данным событием, называется путь от данного события до завершающего.

Определение 2.31. Путь, начало которого совпадает с исходным событием, а конец — с завершающим событием сетевого графика, называется *полным путем*. Такой путь обозначают через L.

Определение 2.32. *Продолжительностью* любого пути называется число, равное сумме продолжительностей работ, составляющих его. Продолжительность полного пути обозначается $T(L)$.

Определение 2.33. Путь, имеющий наибольшую продолжительность, называется *критическим*. Такой путь обозначается $L_{кр}$. Продолжительность критического пути обозначается $T_{кр}$.

Определение 2.34. *Резервом времени пути* L_i сетевого графика называется разность между длиной критического и данного пути. Этот резерв обозначается через $R(L_i)$. $R(L_i) = T_{кр} - T(L_i)$.

Если запас времени данного пути мал, то такой путь называется *подкритическим*. Все работы, лежащие на подкритическом пути, называются *подкритическими*.

Для любого события (j, i) сетевого графика можно определить наиболее ранний из возможных сроков его свершения — $t_р(i)$ и наиболее поздний из допустимых сроков его свершения — $t_п(i)$ (ранний и поздний сроки свершения события i).

Ранний срок свершения любого события i равен суммарной длительности работ, лежащих на максимальном по продолжительности пути, ведущем к данному событию от исходного события, то есть на максимальном из предшествующих событию i путей. Обозначим через $L_m(i)$ максимальный предшествующий событию i путь, тогда

$$t_р(i) = T[L_m(i)].$$

Поздний срок свершения любого события i равен разности между продолжительностью критического пути и суммарной продолжительностью работ, лежащих на максимальном по продолжительности пути, ведущем от данного события к завершающему событию, то есть на максимальном по продолжительности из следующих за событием i путей. Обозначив максимальный, следующий за событием i путь через $L(i)$, получим:

$$t_р(i) = T_{кр} - T[L_m(i)].$$

Зная ранний и поздний сроки свершения каждого события сетевого графика, можно для любой работы (i, j) определить:

- ранний срок начала работы, обозначаемый через $t_{рн}(i, j)$;
- поздний срок начала работы (i, j), обозначаемый через $t_{пн}(i, j)$;
- ранний срок окончания работы (i, j), обозначаемый через $t_{ро}(i, j)$;
- поздний срок окончания работы (i, j), обозначаемый через $t_{по}(i, j)$.

Зная продолжительность работы $t(i, j)$, указанные параметры можно определить по следующим формулам:

- $t_{рн}(i, j) = t_р(i)$;
- $t_{пн}(i, j) = t_п(j) - t(i, j)$;
- $t_{ро}(i, j) = t_р(i) + t(i, j)$;
- $t_{по}(i, j) = t_п(j)$.

Для всех работ критического пути $t_{рн}(i, j) = t_{пн}(i, j)$ и $t_{ро}(i, j) = t_{по}(i, j)$, так как начальное и конечное события этих работ находятся на критическом пути и, следовательно,

$$t_р(i) = t_п(i) = t_п(j) - t(i, j)$$

и

$$t_п(j) = t_р(j) = t_р(i) + t(i, j).$$

Все события в сетевом графике, за исключением событий, принадлежащих критическому пути, имеют резерв времени. Резерв времени события обозначается через $R(i)$ и определяется как разность между поздним и ранним сроком свершения события, то есть

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i).$$

События критического пути не имеют резервов времени, так как у них $t_п(i) = t_р(i)$.

Так как резерв времени пути L_i может быть использован для увеличения продолжительности работ, находящихся на этом пути, то можно утверждать, что любая из работ пути на участке, не совпадающем с критическим путем, обладает резервом времени. Но в отличие от путей и событий работы могут обладать разного вида резервами времени.

Для работ сетевого графика определяются два основных резерва времени: полный и свободный.

Определение 2.35. *Полным резервом времени работы* называется промежуток времени, на который можно задержать начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения, не изменяя срока завершения всего комплекса работ.

Определение 2.36. *Свободным резервом времени работы* называется промежуток времени, на который можно отсрочить начало работы или увеличить продолжительность ее выполнения при условии, что она начинается в ее ранний срок и при этом ранние сроки начала последующих работ не изменяются.

Полный резерв времени работы (i, j) – $R(i, j)$ равен разности между поздним сроком свершения события j и ранним сроком свершения события i за вычетом продолжительности работы (i, j):

$$R(i,\ j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i,\ j).$$

Полный резерв времени работ критического пути равен нулю, а для остальных работ он положителен, то есть $R(i,\ j) \geq 0$.

Свободный резерв времени работы $(i,\ j)$ — $R_с(i,\ j)$ равен разности между ранними сроками свершения событий j и i за вычетом продолжительности работы $(i,\ j)$:

$$R_с(i,\ j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i,\ j).$$

Свободный резерв времени может быть лишь у тех работ, которые не лежат на максимальных путях, проходящих через начальное и конечное события этой работы. Величина свободного резерва времени $R_с(i,\ j)$ показывает, на какой период времени можно увеличить продолжительность данной работы $(i,\ j)$, чтобы при этом сохранилась возможность свершения ее конечного события в самый ранний срок, а начального события — в самый поздний срок. Знание резервов времени работ может служить основой для маневрирования ресурсами.

Описанные выше числовые параметры сетевых графиков могут быть рассчитаны при помощи методов линейного программирования. Для этого прежде всего на основе данного сетевого графика должна быть сформулирована соответствующая задача линейного программирования. Для ее построения рассмотрим сетевой график (рис. 2.26). На рисунке введены две дополнительные стрелки: стрелка, которую обычно называют *истоком данной сети* (стрелка "на входе" с истоком +1), и стрелка, которую называют *стоком данной сети* (стрелка "на выходе" со стоком –1).

В таком толковании обычный сетевой график можно рассматривать как так называемую *сеть с потоками*. Для этой сети можно построить матрицу парных последовательностей (табл. 2.69).

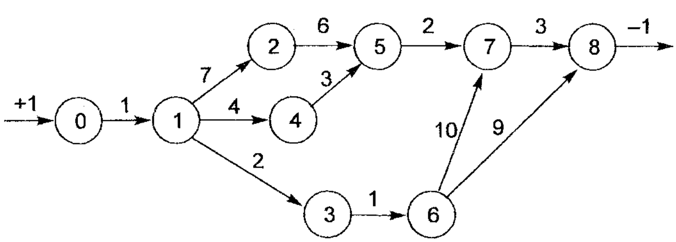


Рис. 2.26

Таблица 2.69

Длительности	1	7	2	4	6	1	3	2	10	9	3	Показатели потока
Вершины	Дуги											
	0—1	1—2	1—3	1—4	2—5	3—6	4—5	5—7	6—7	6—8	7—8	
0	1											1
1	–1	1	1	1								0
2		–1			1							0
3			–1			1						0
4				–1			1					0
5					–1		–1	1				0
6						–1			1	1		0
7								–1	–1		1	0
8										–1	–1	–1

В крайнем правом столбце таблицы на входе по вершине 0 стоит (+1), а на выходе по вершине 8—(–1). Все остальные элементы в этом столбце равны нулю. Это означает, что вход в промежуточные вершины сети и выход потока из них должны компенсировать друг друга. Исключение составляет только вход в сеть — вершина 0 и выход из сети — вершина 8, в которых сбалансированность достигается за счет взаимной компенсации входа +1 и выхода –1.

Имея матрицу парных последовательностей, можно легко сформулировать соответствующую задачу линейного программирования. В этой задаче роль свободных членов системы ограничений играет крайний правый столбец указанной матрицы. Длительности работ используются как коэффициенты целевой функции, которая характеризует "напряжение" в сети. Задача состоит в максимизации "напора" в сети.

Напишем задачу линейного программирования для сетевого графика, изображенного на рис. 2.26. Для этого каждой дуге поставим в соответствие неизвестную величину X_{ij}. Теперь, используя матрицу парных последовательностей, получаем следующую задачу линейного программирования: найти максимум функции

$$F = x_{01} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 6x_{25} + x_{36} + 3x_{45} + 2x_{57} + 10x_{67} + 9x_{68} + 3x_{78}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_{01} = 1, \\ -x_{01} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 0, \\ -x_{12} + x_{25} = 0, \\ -x_{13} + x_{36} = 0, \\ -x_{14} + x_{45} = 0, \\ -x_{25} - x_{45} + x_{57} = 0, \\ -x_{36} + x_{67} + x_{68} = 0, \\ -x_{57} - x_{67} + x_{78} = 0, \\ -x_{68} - x_{78} = -1, \end{cases}$$

$$x_{01},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{14},\ x_{25},\ x_{36},\ x_{45},\ x_{57},\ x_{67},\ x_{68},\ x_{78} \geq 0.$$

Нахождение решения сформулированной задачи состоит в определении неизвестных X_{ij}, характеризующих работы и состояние программы по соответствующим дугам на входе и выходе вершин. При этом максимальное значение целевой функции дает длину критического пути, который определяется положительными компонентами оптимального плана задачи. Этот путь и его длина могут быть также определены в результате решения двойственной задачи для данной. При этом, зная решение двойственной задачи, можно найти как критический путь, так и полные резервы времени тех работ, для которых переменные, характеризующие их, не вошли в оптимальный план исходной задачи. Резервы времени указанных работ находятся на основании соотношений

$$R(i,\ j) = W_i - W_j - t(i,\ j),$$

где W_i и W_j — соответствующие двойственные оценки.

В двойственной задаче линейного программирования для данного сетевого графика свободные члены в ее системе ограничений являются длительностями выполняемых работ, а сами ограничения представляют собой неравенства вида "больше" или "равно". Из этого следует, что оптимальным решением этой задачи является решение, при котором все ограничения выполняются как строгие равенства. Последнее утверждение дает возможность построить алгоритмическую процедуру, позволяющую определить переменные двойственной задачи на основе их анализа. Нахождение двойственных переменных по этому методу начинается с того, что переменная W_0 полагается равной нулю. После этого из системы ограничений определяются остальные переменные. Используя найденные значения переменных, находят оценки $L_{ij} = W_i - W_j$. Эти оценки при их равенстве значению $t(i,\ j)$ дают решение прямой задачи, а разница между значением $t(i, j)$ и оценками L_{ij} оказывается равной резерву времени соответствующей работы.

Итак, решение прямой задачи линейного программирования для данного сетевого графика позволяет определить критический путь, а решение двойственной задачи — как критический путь, так и резервы времени работ. Однако полученные результаты не ограничивают сферу применения математического программирования для решения задач сетевого планирования и управления. Очень важным является применение математического программирования для решения задач оптимального распределения ресурсов. Остановимся на решении одной из таких задач.

Предположим, что найденное время выполнения всего комплекса работ сетевого графика T нас не устраивает; возникает задача: как следует формировать работы, чтобы общее время T не превышало заданного срока T_0? Очевидно, найденное время T может быть в первую очередь уменьшено за счет формирования работ критического пути. Уменьшение длительности работ, как правильно, требует вложения дополнительных средств. Встает задача: какие дополнительные средства и в какие работы следует вложить, чтобы общий срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины T_0, а расход дополнительных средств был минимальным?

Дадим математическую формулировку задачи. Обозначим через t_{ij} продолжительность соответствующей работы (i, j) сетевого графика до вложения в нее дополнительных средств, $t_{ij} = f_{ij}(x_{ij})$ — время выполнения работы (i, j) после вложения в нее определенной величины x_{ij} дополнительных средств. Тогда, очевидно, время выполнения всего комплекса работ сетевого графика равно:

$$T = \sum_{(\text{Кр})} t_{ij},$$

где суммирование распространяется на работы критического пути.

Далее задача состоит в определении величины дополнительных средств x_{ij}, вкладываемых в каждую из работ (i, j), обеспечивающих выполнение всего комплекса работ за время, не превышающее T_0 при минимальной величине всех вложенных дополнительных средств, то есть задача состоит в минимизации целевой функции $\sum_{(i,j)} x_{ij}$ при выполнении условий

$$T = \sum_{(\text{Кр})} f_{ij}(x_{ij}) \le T_0,$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

Сформулированная задача напоминает задачу линейного программирования. Однако в общем случае она не является задачей линейного программирования, так как входящие в ограничение функции $f_{ij}(x_{ij})$ — вообще нелинейны. Поэтому в общем виде поставленная задача является задачей нелинейного программирования. Однако, если предположить, что время выполнения работ линейно зависит от вложенных дополнительных средств и при этом критический путь не меняется, то поставленная задача становится задачей линейного программирования и может быть решена рассмотренными выше методами.

Такой вариант задачи и рассмотрим.

Предположим, что в каждую из работ (i, j) могут быть вложены средства x_{ij} в размере не более чем C_{ij}, обеспечивающие уменьшение времени выполнения работы согласно линейной зависимости

$$t_{ij} = t_{ij}(1 - b_{ij}x_{ij}).$$

Требуется определить, сколько дополнительных средств надо вложить в каждую из работ, чтобы время выполнения всего комплекса работ уменьшилось до T_0 при сохранении прежнего критического пути, то есть задача состоит в минимизации целевой функции $\sum\limits_{(i,j)} x_{ij}$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x_{ij} \le C_{ij}, \\ \sum\limits_{(\text{Кр})} t_{ij}\,(1 - b_{ij})\;x_{ij} \le T_0, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

Последняя задача является задачей линейного программирования, и ее решение может быть найдено известными методами.

2.114. Найти критический путь и резервы времени работ сетевого графика, изображенного на рис. 2.27.

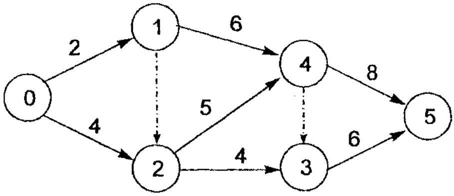


Рис. 2.27

Решение. Критический путь и резервы времени работ приведенного сетевого графика могут быть определены в результате решения прямой и двойственной задач линейного программирования, записанных для данной сети.

Для получения исходной задачи линейного программирования составляем матрицу парных последовательностей (табл. 2.70).

Таблица 2.70

Длительности	2	4	0	6	4	5	0	6	8	Показатели потока
Вершины	Дуги									
	0—1	0—2	1—2	1—4	2—3	2—4	3—4	3—5	4—5	
0	1	1								1
1	−1		1	1						0
2		−1	−1		1	1				0
3					−1		1	1		0
4				−1		−1	−1		1	0
5								−1	−1	−1

Используя ее, приходим к следующей задаче линейного программирования: найти максимум целевой функции

$$F = 2x_{01} + 4x_{02} + 6x_{14} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{35} + 8x_{45}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_{01} + x_{02} = 1, \\ -x_{01} + x_{12} + x_{14} = 0, \\ -x_{02} - x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0, \\ -x_{23} + x_{34} + x_{35} = 0, \\ -x_{14} - x_{24} - x_{34} + x_{45} = 0, \\ x_{35} + x_{45} = 1, \end{cases}$$

$$x_{01}, x_{02}, x_{12}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \ge 0.$$

Записываем теперь двойственную задачу. Она состоит в минимизации целевой функции

$$F = W_0 + W_5$$

при условиях

$$\begin{cases} W_0 - W_1 \ge 2, \\ W_0 - W_2 \ge 4, \\ W_1 - W_2 \ge 0, \\ W_1 - W_4 \ge 6, \\ W_2 - W_3 \ge 4, \\ W_2 - W_4 \ge 5, \\ W_3 - W_4 \ge 0, \\ W_3 - W_5 \ge 6, \\ W_4 - W_5 \ge 8. \end{cases}$$

Т а б л и ц а 2.71

i	Базис	$C_б$	P_0	2	4	0	6	4	5	0	6	8	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$
				Px_{01}	Px_{02}	Px_{12}	Px_{14}	Px_{23}	Px_{24}	Px_{34}	Px_{35}	Px_{45}	Py_1	Py_2	Py_3	Py_4	Py_5	Py_6
1	Px_{24}	5	1	1	0	–1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
2	Px_{14}	6	0	–1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	Px_{23}	4	0	0	0	0	0	1	0	–1	–1	0	0	0	0	–1	0	0
4	Px_{45}	8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
5	Py_5	$-M$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	–1
6	Px_{02}	4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7			17	1	0	1	0	0	0	1	3	0	9	6	5	1	0	8
8			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2

В поисках решения двойственной задачи сначала находим решение исходной, оно приведено в табл. 2.71. Из таблицы видно, что оптимальным планом задачи является план $x_{02}{}^* = 1$; $x_{14}{}^* = 0$; $x_{23}{}^* = 0$; $x_{24}{}^* = 1$; $x_{45}{}^* = 1$. На этом плане значение целевой функции равно 17. Так как положительные компоненты плана определяют критический путь, то путь, проходящий через события 0—2—4—5, является критическим, его длина равна 17 ед.

Критический путь и его длина определяются и в результате решения двойственной задачи. Покажем это.

Из последней симплекс-таблицы решения исходной задачи находим оптимальный план двойственной задачи: $W_0{}^* = 9$; $W_1{}^* = 6$; $W_2{}^* = 5$; $W_4{}^* = 0$; $W_5{}^* = 8$. При этом плане значение целевой функции $F_{\min} = 9 + 8 = 17$. И, таким образом, длина критического пути данного сетевого графика равна 17 ед. Для отыскания этого пути находим резервы работ

$$R(i, j) = W_i - W_j - t(i, j).$$

Работы, для которых данные величины равны нулю, определяют критический путь сетевого графика:

$$\begin{cases} R\ (0, 1) = 1, \\ R\ (0, 2) = 0, \\ R\ (1, 2) = 1, \\ R\ (1, 4) = 0, \\ R\ (2, 3) = 0, \\ R\ (2, 4) = 0, \\ R\ (3, 4) = 1, \\ R\ (3, 5) = 1, \\ R\ (4, 5) = 0. \end{cases}$$

Анализируя найденные величины $R(i, j)$, видим, что критический путь проходит через события 0—2—4—5. Так как в оптимальный план исходной задачи переменные x_{01}, x_{12}, x_{34} и x_{35} не входят, то найденные величины $R(i, j)$ определяют резервы времени соответствующих работ, которые соответственно равны 1, 1, 1, 1.

2.115. На основе анализа переменных двойственной задачи найти критический путь, его длину и резервы времени работ сетевого графика, изображенного на рис. 2.28.

Р е ш е н и е. Чтобы написать двойственную задачу для данного сетевого графика, напишем для него первоначально прямую задачу. Для этого составим матрицу парных последовательностей (табл. 2.72). Используя ее, можем записать исход-

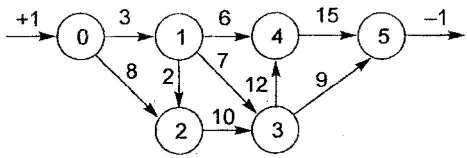


Рис. 2.28

ную задачу линейного программирования, которая состоит в максимизации целевой функции

$$F = 3x_{01} + 8x_{02} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 10x_{23} + 12x_{34} + 9x_{35} + 15x_{45}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_{01} + x_{02} = 1, \\ -x_{01} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 0, \\ -x_{02} - x_{12} + x_{23} = 0, \\ -x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} = 0, \\ -x_{14} - x_{34} + x_{45} = 0, \\ -x_{35} - x_{45} = -1, \end{cases}$$

$$x_{01}, x_{02}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{34}, x_{35}, x_{45} \geq 0.$$

Таблица 2.72

Длительности	3	8	2	7	6	10	12	9	15	Показатели потока
Вершины	Дуги									
	0—1	0—2	1—2	1—3	1—4	2—3	3—4	3—5	4—5	
0	1	1								1
1	–1		1	1	1					0
2		–1	1			1				0
3				–1		–1	1	1		0
4					–1		–1		1	0
5								–1	–1	–1

Двойственная задача к данной состоит в нахождении наименьшего значения функции

$$F^* = W_0 - W_5$$

при условиях

$$\begin{cases} W_0 - W_1 \ge 3, \\ W_0 - W_2 \ge 8, \\ W_1 - W_2 \ge 2, \\ W_1 - W_3 \ge 7, \\ W_1 - W_4 \ge 6, \\ W_2 - W_3 \ge 10, \\ W_3 - W_4 \ge 12, \\ W_3 - W_5 \ge 9, \\ W_4 - W_5 \ge 15. \end{cases}$$

Полагая в последней системе неравенств $W_0 = 0$, находим минимальные значения остальных двойственных переменных, удовлетворяющих исходной системе линейных неравенств. Такими значениями неизвестных являются: $W_1 = -3$, $W_2 = -8$, $W_3 = -18$, $W_4 = -30$, $W_5 = -45$.

Таким образом, длина критического пути нашего сетевого графика равна

$$F^*_{\min} = 45 \text{ ед.}$$

Найдем критический путь и резервы времени работ сетевого графика. Для этого первоначально вычисляем оценки Z_{ij}: $Z_{01} = 3$; $Z_{02} = 8$; $Z_{12} = 5$; $Z_{13} = 15$; $Z_{14} = 27$; $Z_{23} = 10$; $Z_{34} = 12$; $Z_{35} = 27$; $Z_{45} = 15$.

Сравнивая найденные оценки Z_{ij} с длительностями соответствующих работ, видим, что критическим является путь, проходящий через события 0—2—3—4—5. При этом резервы времени работ равны $R(1, 2) = 3$; $R(1, 3) = 8$; $R(1, 4) = 21$; $R(3, 5) = 18$.

2.116. Время выполнения всего комплекса работ, отраженного на сетевом графике (рис. 2.29), равно 60 дням. Необходимо сократить его до 34 дней, а для этого надо сформировать работы критического пути, в нашем случае работы (0, 1), (1, 5) и (5, 6). В эти работы могут быть вложены дополнительные средства в размерах соответственно не более 6, 4 и 8 ед. При вложении дополнительных средств время выполнения указанных работ уменьшается согласно линейной зависимости:

$$t_{01}{}^1 = 20\,(1 - 0{,}2\,x_{01}),$$
$$t_{15}{}^1 = 10\,(1 - 0{,}3\,x_{15}),$$
$$t_{56}{}^1 = 30\,(1 - 0{,}1\,x_{56}).$$

Требуется определить размеры вложений x_{01}, x_{15} и x_{56}, благодаря которым срок выполнения всего комплекса работ будет не

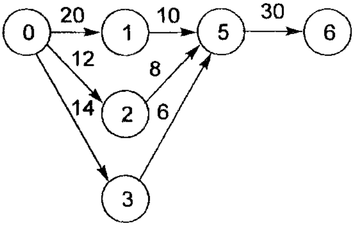


Рис. 2.29

больше, чем $T_0 = 34$, а сумма вложений дополнительных средств — минимальной.

Решение. Составляем математическую модель задачи: найти минимум целевой функции

$$P = x_{01} + x_{15} + x_{56}$$

при условиях

$$\begin{cases} T = t_{01}^1 + t_{15}^1 + t_{56}^1 = 60 - 4x_{01} - 3x_{15} - 3x_{56} \le 34, \\ x_{01} \le 3, \\ x_{15} \le 2, \\ x_{56} \le 4, \end{cases}$$

$$x_{01}, x_{15}, x_{56} \ge 0.$$

Полученная задача является задачей линейного программирования. Чтобы найти решение, сводим ее к основной задаче линейного программирования: найти максимум целевой функции

$$F = -x_{01} - x_{15} - x_{56}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_{01} + 3x_{15} + 3x_{56} - y_1 = 26, \\ x_{01} + y_2 = 3, \\ x_{15} + y_3 = 4, \\ x_{56} + y_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_{01},\ x_{15},\ x_{56},\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \ge 0.$$

Решение полученной задачи находим методом искусственного базиса. Оно приведено в табл. 2.73.

Таблица 2.73

i	Базис	$C_б$	План	-1	-1	-1	0	0	0	0	$-M$
				Px_{01}	Px_{15}	Px_{56}	Py_1	Py_2	Py_3	Py_4	Py_5
1	Px_{01}	-1	3	1	0	0	0	1	0	0	0
2	Py_3	0	$4/3$	0	0	0	$1/3$	$4/3$	1	1	$-1/3$
3	Px_{15}	-1	$2/3$	0	1	0	$-1/3$	$-4/3$	0	-1	$1/3$
4	Px_{56}	-1	4	0	0	1	0	0	0	1	0
5			$-7^2/_3$	0	0	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$-7/12 + M$

Из этой симплекс-таблицы видим, что оптимальным вариантом вложения дополнительных средств является вариант, при котором в работы (0, 1), (1, 5) и (5, 6) вкладываются средства в размерах, соответственно равных 3, 2/3 и 4 ед.

2.117. Найти критический путь, его длину и резервы времени работ, приведенных в сетевых графиках (рис. 2.30—2.33).

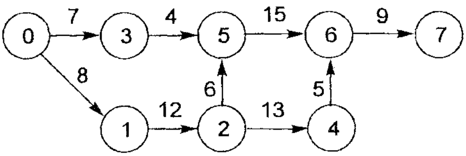


Рис. 2.30

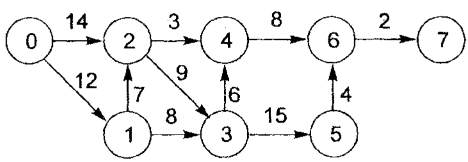


Рис. 2.31

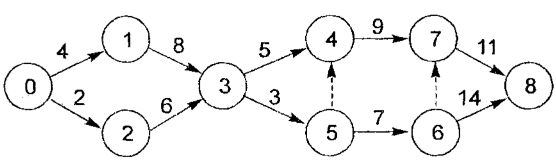


Рис. 2.32

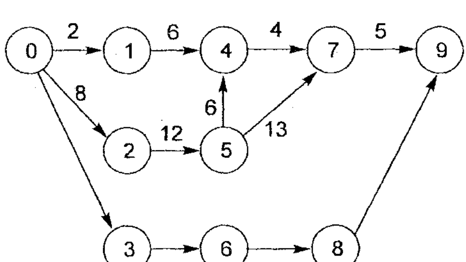


Рис. 2.33

Время выполнения всего комплекса работ, приведенного в сетевом графике на рис. 2.34, равно 80 дням. Это время следует уменьшить до 76 дней путем вложения дополнительных средств в работы критического пути (0,1), (1, 2), (2, 5), (5, 6) и (6, 7). При этом дополнительные средства в эти работы могут быть вложены в размерах, соответственно не больше 20, 28, 32 и 46 ед.

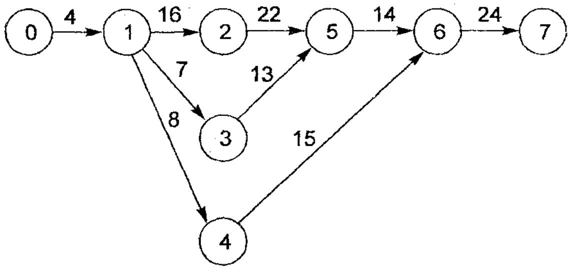


Рис. 2.34

Время выполнения указанных работ при вложении дополнительных средств уменьшается согласно следующим зависимостям:

$$t^1(0, 1) = 40\ (1 - 0{,}4\ x_{01}),$$

$$t^1(1, 2) = 30\ (1 - 0{,}5\ x_{12}),$$

$$t^1(2, 5) = 50\ (1 - 0{,}1\ x_{25}),$$

$$t^1(5, 6) = 20\ (1 - 0{,}3\ x_{36}),$$

$$t^1(6, 7) = 60\ (1 - 0{,}2\ x_{67}).$$

Определить величины вложений x_{01}, x_{12}, x_{25}, x_{36} и x_{67}, при которых сумма вложений дополнительных средств была бы наименьшей.

2. Сетевые постановки некоторых задач линейного программирования. Ранее мы убедились, что методы линейного программирования могут быть использованы для нахождения решения определенных задач сетевого планирования и управления. На основе сетевого графика, моделирующего определенный комплекс выполняемых работ, для таких задач формулировалась соответствующая задача линейного программирования и рассмотренными выше методами велись поиски ее решения. В свою очередь, для отдельных задач возможен переход от их обычной постановки к постановке в сетевой форме и на этой основе — нахождение их решения. Следует отметить, что сеть, о которой идет речь в данном случае, в общем виде отличается от ранее рассмотренного сетевого графика.

В качестве примера задачи линейного программирования, допускающей сетевую постановку, рассмотрим транспортную задачу. Ее условия могут быть заданы в виде так называемой транспортной сети. Для этого пункты отправления и назначения изображаются кружками, в которых в верхней части указываются обозначения соответствующих пунктов отправления или назначения, а в нижней части записываются потребности (со знаком минус) или запасы (со знаком плюс). Построенные кружки соединяются линиями (дугами), определяющими возможные маршруты перевозки груза. Над этими линиями проставляются соответствующие стоимости перевозок или другие показатели, определяемые исходными данными задачи. В качестве примера на рис. 2.35 изображена транспортная сеть с исходными данными условий транспортной задачи с двумя поставщиками и тремя потребителями.

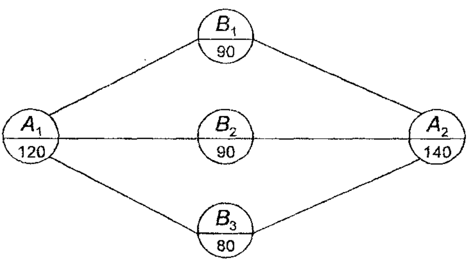


Рис. 2.35

Задания транспортной задачи в сетевой форме не имеют сколько-нибудь существенного значения для ее исследования. Нахождение решения в случае, когда задача имеет сетевую постановку, основывается на тех же методах, что и для транспортной задачи, заданной в матричной форме. Ниже рассмотрено нахождение решения транспортной задачи, имеющей сетевую постановку методом потенциалов. Все начинается с определения какого-нибудь опорного плана задачи. Он изображается при помощи стрелок, над которыми указываются возможные объемы поставок. При этом опорный план строится таким образом, что: 1) все запасы пунктов отправления распределяются, а потребности пунктов назначения удовлетворяются; 2) к каждому кружку транспортной сети подходит (или выходит из него) хотя бы одна стрелка; 3) общее количество стрелок равно $n + m - 1$, то есть на одну меньше общего числа кружков; 4) ни одна последовательность стрелок не образует замкнутого контура.

Построенный опорный план проверяется на оптимальность. С этой целью для каждого из кружков определяются потенциалы. Процесс их нахождения начинается с того, что потенциал одного из кружков полагается равным нулю, затем просматриваются остальные кружки и выявляются стрелки, которые в данный кружок входят или из него выходят. Потенциал кружка, в который стрелка входит, равен сумме потенциала кружка, из которого данная стрелка выходит, и стоимости перевозок соответствующего данному маршруту груза. Если из кружка стрелка выходит, то его потенциал определяется как разность двух указанных чисел. После того как для каждого из кружков потенциалы определены, для всех дуг транспортной сети, соединяющих какие-нибудь два пункта, между которыми не предусмотрены поставки, определяются числа α_{ij}. Эти числа получаются в результате вычитания из соответствующих чисел c_{ij} разностей между наибольшим и наименьшим потенциалами кружков, соединенных данной дугой. Если среди найденных чисел α_{ij} нет отрицательных, то построенный опорный план транспортной задачи является оптимальным; если есть, то нужно перейти к новому опорному плану. Для этого среди указанных чисел α_{ij} необходимо определить наибольшее по абсолютной величине отрицательное число. Пусть это число соответствует дуге, соединяющей пункт отправления A_i с пунктом назначения B_j. Тогда новым опорным планом следует предусмотреть перевозки груза с пункта отправления A_i в пункт назначения B_j. Одновременно необходимо изменить некоторые объемы перевозок, предусмотренные исходным опорным планом. Все это реализуется в результате перехода к новой транспортной сети. Поступим следующим образом. Необходимость поставки груза из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j отобразим с помощью стрелки, направление которой выберем, исходя из величин потенциалов данных пунктов. Если потенциал кружка, соответствующего пункту отправления A_i, меньше потенциала кружка пункта назначения B_j, то стрелка будет иметь направление от кружка пункта отправления A_i к кружку пункта назначения B_j. В противном случае стрелка будет иметь противоположное направление. После определения направления и построения указанной стрелки составляется цепь от кружка пункта отправления A_i. Это замкнутый контур, содержащий дуги, для которых построены стрелки, в том числе и дугу, соединяющую кружок пункта отправления A_i и кружок пункта назначения B_j. При построении цепи направление стрелок во внимание не принимается.

В полученной цепи выбираются дуги со стрелками, имеющими направление, противоположное стрелке, построенной для дуги, соединяющей кружок пункта отправления A_i и кружок пункта назначения B_j. Среди стрелок выбирается та, которой соответствует наименьшая величина поставок (если таких стрелок несколько, то выбирается какая-нибудь одна). Обозначим ее через λ. Та стрелка, которой эта величина соответствует, при переходе к новой транспортной сети будет опущена, все остальные стрелки сохранятся. При этом к величинам перевозок (они определяются стрелками), соответствующих дугам, входящим в замкнутый контур, число λ прибавляется, если данная стрелка имеет направление, совпадающее с направлением стрелки, соответствующей дуге, которая соединяет кружок пункта отправления A_i с кружком пункта назначения B_j. В противном случае указанное число вычитается из величин перевозок, определяемых стрелками, соответствующими дугам, входящим в замкнутый контур. Поставки, соответствующие стрелкам для дуг, не входящих в замкнутый контур, сохраняются без изменения.

В результате указанных преобразований получается новый опорный план транспортной задачи. Его проверяют на оптимальность, и в случае необходимости осуществляется (по описанному выше правилу) переход к новому опорному плану. Продолжая так итерационный процесс, мы за конечное число шагов находим оптимальный план данной транспортной задачи.

2.118. Провести сетевую постановку транспортной задачи 2.17, исходные данные которой задаются табл. 2.74, и найти ее решение.

Таблица 2.74

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Потребности	30	30	10	20	90

Решение. На рис. 2.36 схематично показано возможное расположение поставщиков и потребителей. Кружками с указанием потребностей и запасов изображены пункты отправления и назначения. Число кружков равно общему числу поставщиков и потребителей. Построенные кружки соединены линиями, определяющими маршруты возможных перевозок груза; над ними проставлены соответствующие стоимости перевозок. Вместе с тем, если сопоставить стоимости перевозок единицы груза, указанные в табл. 2.74, со стоимостями, указанными на рис. 2.36, то можно обнаружить некоторое несовпадение. Это обусловлено тем, что в соответствии с построенной транспортной сетью имеется возможность проложить маршрут перевозки груза из пункта отправления A_3 в пункт назначения B_3 через пункт назначения B_4 и в пункт назначения B_1 — через пункт назначения B_2. Поэтому стоимость перевозки единицы груза из пункта отправления A_3 в пункт назначения B_1 равна сумме стоимостей перевозок единицы груза из пункта A_3 в B_2 и из B_2 в B_1. Точно так же стоимость перевозки единицы груза из пункта отправления A_3 в пункт назначения B_3 равна сумме стоимостей перевозки единицы груза из A_3 в B_4 и из B_4 в B_3.

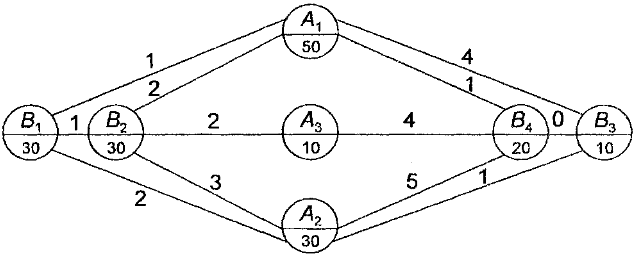


Рис. 2.36

Записав исходную транспортную задачу в сетевой форме, ее решение начинаем с определения опорного плана. Этот план найдем методом северо-западного угла, то есть последовательно рассматривая пункты отправления и назначения, с тем чтобы удовлетворить потребности каждого из выбранных пунктов назначения за счет запасов рассматриваемого пункта отправления. Начнем с пункта отправления A_1. За счет запасов этого пункта полностью удовлетворяем потребности пункта назначения B_1 и частично — пункта назначения B_2, а именно, из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_1 планируем перевозки 30 ед. груза и из A_1 в B_2 — 20 ед. На транспортной сети это изображаем стрелками с указанием объема перевозимого груза (рис. 2.37).

После того как запасы груза пункта отправления A_1 полностью исчерпаны, а потребности пункта назначения B_2 удовлетворены лишь частично, пытаемся удовлетворить оставшиеся потребности пункта B_2 за счет запасов пункта отправления A_2. Это оказывается возможным, кроме того, имеется возможность за счет запасов пункта отправления A_2 полностью удовлетворить потребности в грузе пункта назначения B_3 и частично — пункта назначения B_4.

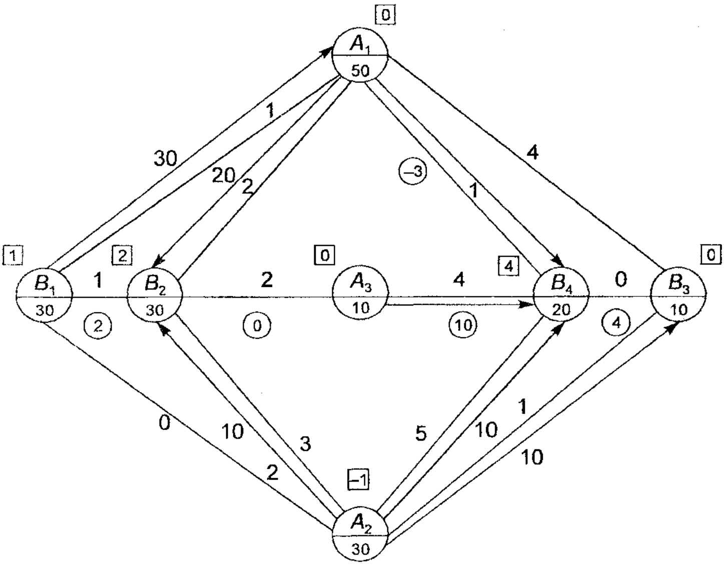


Рис. 2.37

Оставшиеся потребности в грузе в пунктах отправления B_4 удовлетворяем за счет запасов пункта отправления A_3.

В результате такого распределения поставок груза все запасы пунктов отправления полностью распределены, а потребности всех пунктов назначения полностью удовлетворены. Кроме того, транспортная сеть построена таким образом, что к каждому кружку подходит или выходит из него не менее одной стрелки; общее число стрелок на единицу меньше числа кружков; ни одна последовательность стрелок не образует замкнутый контур. Это означает, что нами найден опорный план исходной транспортной задачи. Его надо проверить на оптимальность. С этой целью для каждого из кружков определим потенциалы, которые запишем в квадратах при кружках. Потенциал для кружка пункта отправления A_1 полагаем равным нулю. Поскольку из этого кружка стрелки направлены в сторону кружков пунктов назначения B_1 и B_2, то потенциалы кружков этих пунктов равны сумме потенциала кружка пункта отправления A_1 и соответствующих стоимостей перевозок 1 и 2, то есть $0 + 1 = 1$; $0 + 2 = 2$. Таким образом, потенциалы кружков пунктов назначения B_1 и B_2 соответственно равны 1 и 2.

Определим теперь потенциал кружка пункта отправления A_2. Так как от кружка этого пункта стрелка направлена к кружку пункта назначения B_2, то искомый потенциал представляет собой разность между потенциалом кружка пункта B_2 и стоимостью перевозки груза из A_2 в B_2, то есть этот потенциал равен $2 - 3 = -1$.

Проводя аналогичные рассуждения, определяем потенциалы кружков пунктов B_4, B_3 и A_3. Они соответственно равны: $-1 + 5 = 4$; $-1 + 1 = 0$; $4 - 4 = 0$.

После того как все потенциалы определены, для каждой дуги транспортной сети, не имеющей стрелки, определяем числа L_{ij}. Эти числа получаются в результате вычитания из чисел c_{ij} разности между большим и меньшим потенциалами пунктов A_i и B_j. В нашем случае

$$L_{14} = 1 - (4 - 0) = 1 - 4 = -3;$$
$$L_{13} = 4 - (0 - 0) = 4 - 0 = 4;$$
$$L_{21} = 2 - (1 - (-1)) = 2 - 2 = 0;$$
$$L_{31} = 3 - (1 - 0) = 3 - 1 = 2;$$
$$L_{32} = 2 - (2 - 0) = 2 - 2 = 0;$$
$$L_{33} = 4 - (0 - 0) = 4 - 0 = 4.$$

Найденные числа запишем в кружках при соответствующих дугах транспортной сети (см. рис. 2.37). Так как среди чисел есть отрицательные, то исходный опорный план транспортной задачи не является оптимальным. Следовательно, надо перейти к новому опорному плану. Чтобы осуществить этот переход, прежде всего построим стрелку для дуги, соединяющей кружок пункта A_1 с кружком пункта B_4. Эта стрелка показана на рисунке. Построим замкнутый контур, включающий дугу, соединяющую кружки пунктов A_1 и B_4, и дуги, для которых построены стрелки. В нашем случае замкнутый контур проходит через кружки пунктов A_1, B_2, A_2, A_1, то есть начинается и заканчивается в кружке пункта A_1. В полученном замкнутом контуре выделим дуги, для которых направление стрелок противоположно направлению стрелки, соответствующей дуге, соединяющей кружки пунктов A_1 и B_4. В нашем случае это дуги, соединяющие соответственно кружки пунктов A_2 и B_4, A_1 и B_2. Построенные для этих дуг стрелки определяют перевозки груза в объемах, равных 10 и 20 ед. Наименьшим из этих двух чисел является число 10.

После определения данного числа переходим к новому опорному плану (рис. 2.38). Для этого найденное число 10 прибавляем к поставкам, определяемым стрелкой, проведенной от кружка пункта A_2 в кружок пункта B_2, то есть к 20 прибавляем 10 и вычитаем число 10 из объема перевозки, определяемой стрелкой, соединяющей кружки пунктов A_1 и B_2, то есть из 20 вычитаем 10. При этом стрелку, определявшую перевозку 10 ед. груза из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_4, опускаем, а перевозки, определяемые стрелкой из пункта A_1 в B_4, считаем равными 10. Поставки, определяемые стрелками, соответствующими дугам, не входящим в указанный выше замкнутый контур, на рис. 2.38 остаются такими же, как и на рис. 2.37. В результате отмеченных преобразований получаем новый опорный план исходной транспортной задачи, который проверяем на оптимальность: для каждого из кружков транспортной сети находим потенциалы и записываем их в квадраты рядом с кружками, а затем находим числа для всех дуг, не имеющих стрелок и определяющих соответствующие перевозки. Данные числа записаны в кружках около соответствующих дуг (см. рис. 2.38). Так как среди них есть отрицательное, то опорный план транспортной задачи не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану.

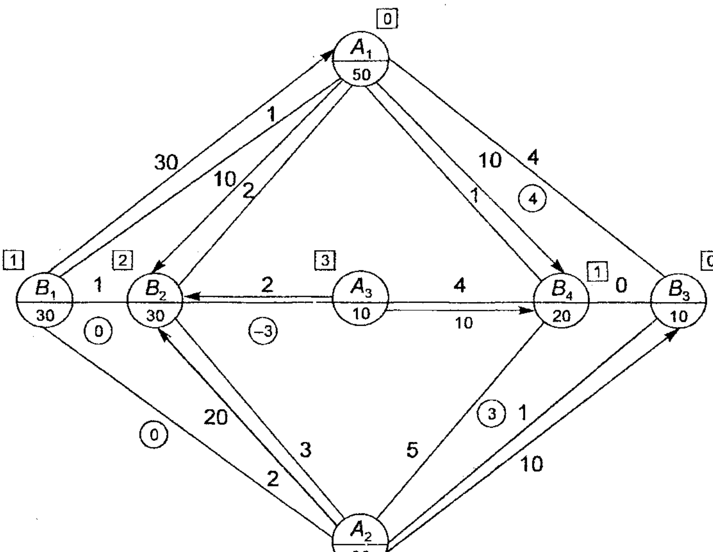


Рис. 2.38

Строим замкнутый контур, включающий дугу, соединяющую кружки пунктов A_3 и B_2, которой соответствует отрицательное число $L_{32} = -3$. Этот контур проходит через пункты A_1, B_2, A_3, B_4, A_1. Причем для дуги, соединяющей кружки пунктов A_3 и B_2, строим стрелку, имеющую направление от A_3 к B_2. После этого выявляем стрелки, имеющие одинаковое направление с построенной стрелкой, и стрелки, имеющие противоположное направление. К первым относится стрелка, направленная из пункта A_1 в пункт B_4, а ко вторым — стрелки, направленные из пункта A_1 в B_2 и из A_3 в B_4. Каждая из последних стрелок определяет объем перевозимого груза, равный 10 ед. Поэтому при переходе к новому опорному плану одну из этих стрелок следует ликвидировать. Исключим, например, стрелку, идущую из пункта A_3 в пункт B_4. При этом объемы перевозок груза, определяемые стрелкой, направленной из A_1 в B_2, уменьшим на 10 ед., объемы перевозок, определяемые стрелкой из A_1 в B_4, увеличим на 10 ед., а объемы перевозок из A_1 в B_4 посчитаем равными 20 ед. В результате таких преобразований получаем новый опорный план исходной транспортной задачи (рис. 2.39).

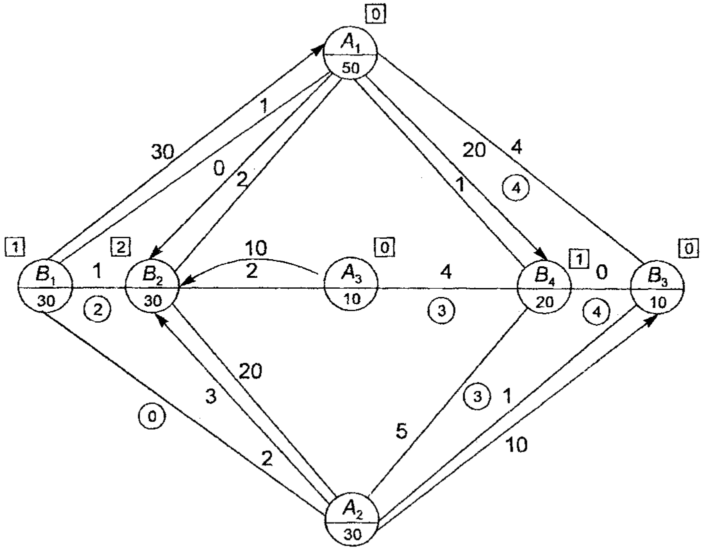


Рис. 2.39

Этот план проверяем на оптимальность. Находим потенциалы каждого из кружков и определяем для всех дуг без стрелок числа L_{ij}. Как видно, среди них нет отрицательных. Значит, опорный план транспортной задачи

$$(X_{ij}) = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

является оптимальным. При данном плане общая стоимость перевозок груза минимальна и равна

$$S = 1 \cdot 30 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 140.$$

Нами рассмотрены постановка транспортной задачи и (в общем виде и на конкретном примере) нахождение ее решения. Помимо транспортной задачи сетевую постановку могут иметь и другие задачи математического программирования, прежде всего — ряд задач целочисленного и динамического программирования. Важность таких постановок определяется, в том числе, наглядностью как постановок самих задач, так и процессов нахождения их решения. Причем в основу методов решения таких задач положены известные методы математического программирования или другие специальные методы.

Дайте сетевую постановку и найдите решение транспортных задач, исходные данных которых указаны в табл. 2.75—2.79.

Таблица 2.75

2.119.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1	6	120
A_2	5	4	2	4	120
A_3	1	6	5	3	160
Потребности	95	115	80	110	400

Таблица 2.76

2.120.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 / 50	1 / 70	6	7	120
A_2	3 / 30	5	4	2 / 20	50
A_3	8	6	3 / 100	4 / 30	130
Потребности	80	70	100	50	300

Таблица 2.77

2.121.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	8	2	1	140
A_2	3	1	5	6	270
A_3	2	3	2	8	180
Потребности	120	230	180	60	590

Таблица 2.78

2.122.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	1 60	4	60
A_2	3 80	4 60	5 30	2 50	220
A_3	2	1 100	9	3	100
Потребности	80	160	90	50	480

Таблица 2.79

2.123.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 80	7	2 60	1 80	220
A_2	7	2 90	3 70	2	160
Потребности	80	90	130	80	380

Глава 3

ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 3.1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи нелинейного программирования

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3.1)$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \ (i = \overline{1, k}), \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i \ (i = \overline{k+1, m}), \end{cases} \qquad (3.2)$$

где f и g_i — некоторые известные функции n переменных, а b_i — заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (3.2), и такая, что для всякой другой точки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям (3.2), выполняется неравенство $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $[f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$.

Если f и g_i — линейные функции, то задача (3.1)—(3.2) является задачей линейного программирования.

Соотношения (3.2) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (3.2) определяет область допустимых решений задачи. В отличие от задачи линейного программирования, она не всегда является выпуклой.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (3.1)—(3.2) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (3.1)—(3.2) с использованием геометрической интерпретации включает четыре этапа.

1°. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (3.2) (если она пуста, то задача не имеет решения).

2°. Строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h$.

3°. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (3.1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4°. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (3.1).

3.1. Найти максимальное значение функции

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \tag{3.3}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &x_2 \le 4, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Решение. Так как целевая функция (3.3) нелинейная, то задача (3.3)—(3.5) относится к задачам нелинейного программирования. Областью допустимых решений здесь является многоугольник $OABC$ (рис. 3.1). Следовательно, для нахождения решения нужно определить такую точку многоугольника $OABC$, в которой функция (3.3) принимает максимальное значение. Построим линию уровня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, где h — некоторая постоянная, и исследуем ее поведение при различных значениях h.

При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси Ox_1, чем больше значение h. Значит, функция F принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с границей многоугольника $OABC$. В данном случае это точка D, в которой линия уровня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13$ касается стороны AB многоугольника $OABC$. Координаты точки D можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases} \tag{3.6}$$

Решая эту систему, получим $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$. Итак, $F_{max} = 13$ при $X^* = (3; 4)$.

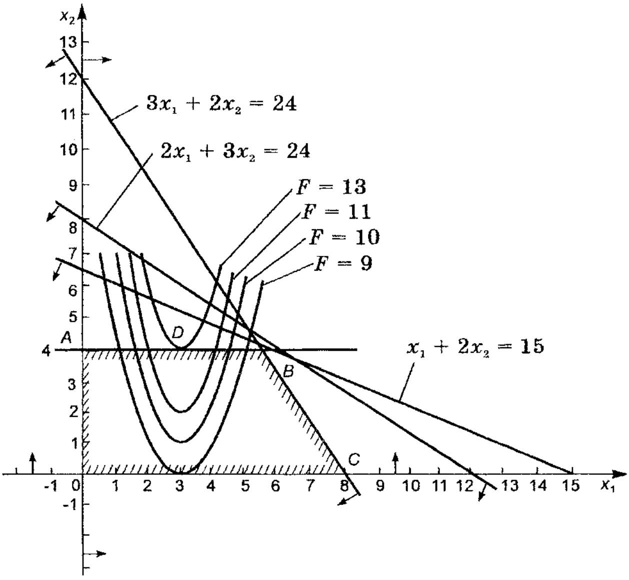


Рис. 3.1

Как видим, в задаче (3.3)—(3.5) точка максимального значения целевой функции не является вершиной многоугольника решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использовалась при решении задач линейного программирования, неприменима для решения данной задачи.

3.2. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \tag{3.7}$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{3.9}$$

Р е ш е н и е. Областью допустимых решений задачи (3.7)—(3.9) является треугольник ABC (рис. 3.2). Полагая значение целевой функции (3.7) равным некоторому числу h, получаем линии уровня, а именно окружности $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$ с центром $E(3; 4)$ и радиусом $\sqrt{h}$. С увеличением (уменьшением) числа h значения функции F соответственно увеличиваются (уменьшаются).

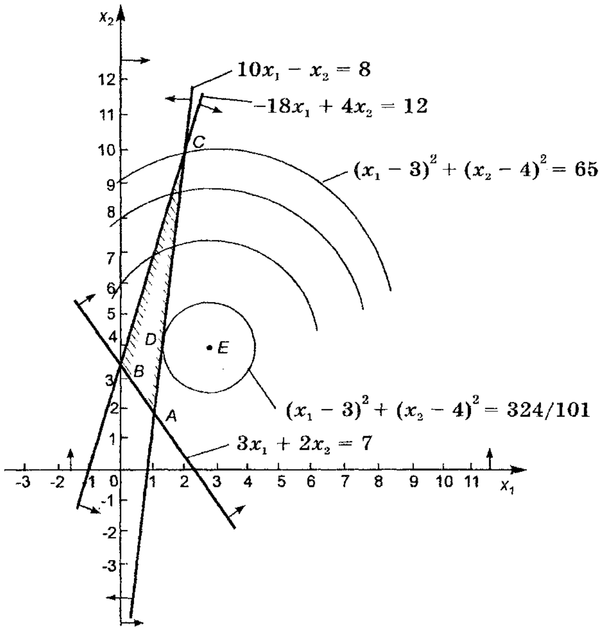


Рис. 3.2

Проведя из точки E окружности разных радиусов, убеждаемся, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D, в которой окружность касается области решений. Для определения координат этой точки воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $10x_1 - x_2 = 8$ и касательной к окружности в точке D. Из уравнения прямой $x_2 = 10x_1 - 8$ видим, что ее угловой коэффициент в точке D равен 10. Угловой же коэффициент касательной к окружности в точке D определим как значение производной функции x_2 от переменной x_1 в этой точке. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1 и дифференцируя уравнение окружности, получим

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x'_2 = 0,$$

откуда

$$x_2' = -(x_1 - 3)/(x_2 - 4).$$

Приравнивая найденное выражение числу 10, получаем одно из уравнений для определения координат точки D. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка D, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 123/101$; $x_2^* = 422/101$. Таким образом,

$$F_{\min} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101.$$

Как видно из рис. 3.2, целевая функция принимает максимальное значение в точке C (2; 12). Ее координаты определены путем решения системы уравнений прямых, на пересечении которых находится точка C. Таким образом, максимальное значение функции — $F_{\max} = 65$.

3.3. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \tag{3.10}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{3.12}$$

Р е ш е н и е. Областью допустимых решений исходной задачи является многоугольник $ABCDE$ (рис. 3.3), а линиями уровня — окружности $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ с центром F (4; 3) и радиусом $R = \sqrt{h}$.

Из рис. 3.3 видно, что целевая функция принимает минимальное значение в точке F (4; 3), а максимальное — в точке C (13; 21/2). Следовательно, $F_{\min} = 0$ и $F_{\max} = 137{,}25$.

3.4. Найти максимальное значение функции

$$F = 3x_1 + 4x_2 \tag{3.13}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_1 x_2 \geq 4, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{3.15}$$

Р е ш е н и е. Область решений задачи (3.13)—(3.15) изображена на рис. 3.4. Здесь построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Максимальное значение целевая фун-

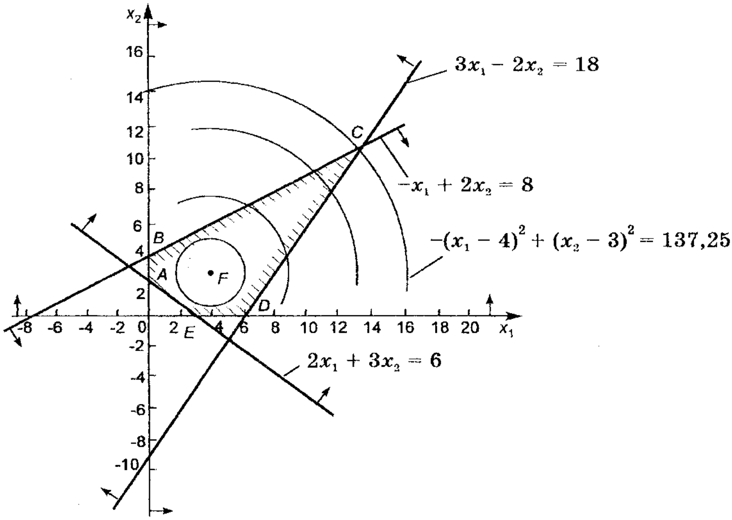


Рис. 3.3

кция задачи принимает в точке E, в которой прямая касается окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Для определения координат точки E воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $3x_1 + 4x_2 = h$ (где h — некоторая постоянная) и касательной к окружности в точке E. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1, почленно дифференцируем уравнение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$ и получим

$$2x_1 + 2x_2x'_2 = 0, \text{ или } x'_2 = -x_1/x_2.$$

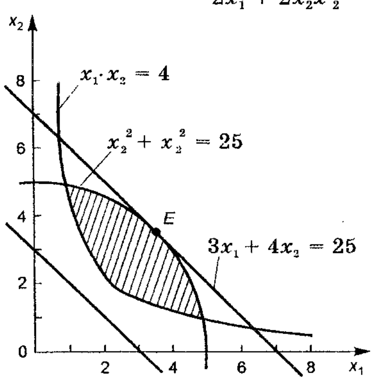


Рис. 3.4

Приравнивая найденное выражение числу $k = -3/4$, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. В качестве второго уравнения возьмем уравнение окружности. Таким образом, для определения координат точки E имеем систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 4$; $x_2^* = 3$. Значит, $F_{max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

Решите задачи нелинейного программирования 3.5—3.8.

3.5. Найти максимальное значение функции

$$F = x_1 x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3.6. Найти минимальное значение функции

$$F = 9(x_1 - 5)^2 + 4\,(x_1 - 6)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3.7. Найти максимальное значение функции

$$F = 4x_1 + 3x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

3.8. Найти максимальное значение функции

$$F = x_1 x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Составьте математические модели задач 3.9—3.11.

3.9. На развитие предприятий отрасли на планируемый год выделено 220 млн руб. Эти средства могут быть распределены между тремя предприятиями. Каждый вариант распределения обеспечивает к концу года определенный доход отрасли.

Среди возможных вариантов распределения капитальных вложений между предприятиями (табл. 3.1) определить такой, при котором доход отрасли являлся бы максимальным.

Таблица 3.1

Предприятие	Размер капиталовложений (млн у.е.)	Доход (тыс. у.е.)	Размер капиталовложений (млн у.е.)	Доход (тыс. у.е.)	Размер капиталовложений (млн у.е.)	Доход (тыс. у.е.)
I	От 10 до 30	14,3	От 30 до 60	16,2	60 и более	17,2
II	От 10 до 40	13,5	От 40 до 70	17,8	70 и более	18,3
III	От 10 до 50	18,4	От 50 до 60	19,3	60 и более	19,4

3.10. Между n предприятиями отрасли необходимо распределить выпуск некоторой однородной продукции. Затраты, связанные с производством x_i $(i = \overline{1, n})$ единиц продукции на j-м предприятии, зависят от объема производства и определяются функциями $f_j\ (x_i)$.

Зная, что продукции должно быть изготовлено не менее b единиц, составить такой план производства продукции предприятиями отрасли, при котором общие затраты, связанные с ее производством, минимальны.

3.11. В m пунктах отправления сосредоточена однородная продукция в количествах, равных a_i, ..., a_m единиц. Эту продукцию нужно перевезти в n пунктов назначения в объемах, равных b_1, b_2, ..., b_n единиц. Цены, связанные с перевозкой единицы продукции, зависят от объемов перевозимой продукции и определяются функциями $f_{ij}(x_{ij})$, где x_{ij} $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ — количество единиц продукции, перевозимой из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Определить, сколько единиц продукции из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения следует доставить, чтобы вся продукция была перевезена в пункты назначения в необходимых объемах при минимальной общей стоимости перевозок.

§ 3.2. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (3.1)—(3.2), предположив, что система ограничений (3.2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ — непрерывные функции вместе со своими частными производными

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max (\min); \qquad (3.16)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i\ (i = \overline{1, m}). \qquad (3.17)$$

В курсе математического анализа задачу (3.16)—(3.17) называют *задачей на условный экстремум*, или *классической задачей оптимизации*. Чтобы найти ее решение, вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, называемых *множителями Лагранжа*, составляют *функцию Лагранжа*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)], \quad (3.18)$$

находят частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ $(j = \overline{1, n})$ и $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ $(i = \overline{1, m})$ и рассматривают систему $n + m$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \ (j = \overline{1, n}); \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \ (i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (3.19)$$

с $n + m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Всякое решение системы уравнений (3.19) определяет точку $X = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, решив систему уравнений (3.19), получают все точки, в которых функция (3.16) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума.

Таким образом, определение экстремальных точек задачи (3.16)—(3.17) методом множителей Лагранжа включает четыре этапа.

1°. Составляют функцию Лагранжа.

2°. Находят частные производные от функции Лагранжа по переменным x_j и λ_i и приравнивают их нулю.

3°. Решая систему уравнений (3.19), находят точки, в которых целевая функция задачи может иметь экстремум.

4°. Среди точек, в которых ожидается возможность экстремума, находят такие, в которых достигается экстремум, и вычисляют значения функции (3.16) в них.

3.12. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Это можно сделать двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий I способом затраты равны $4x_1 + x_1^2$ у.е., а при изготовлении x_2 изделий II способом они составляют $8x_2 + x_2^2$ у.е.

Определить, сколько изделий следует изготовить каждым из способов, чтобы при этом общие затраты на производство продукции были минимальными.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \qquad (3.20)$$

при условиях

$$x_1 + x_2 = 180, \qquad (3.21)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \qquad (3.22)$$

Сначала найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Областью допустимых решений исходной задачи является отрезок прямой AB (рис. 3.5), а линиями уровня — окружности с центром в точке E (−2; −4).

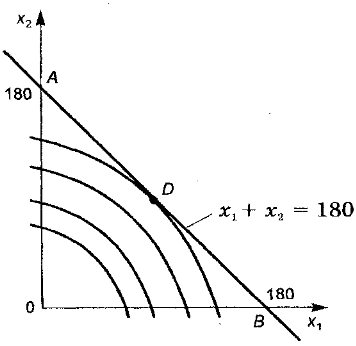


Рис. 3.5

Проведя из точки E окружности разных радиусов, убеждаемся, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D. Чтобы найти координаты этой точки, воспользуемся тем, что угловой коэффициент к окружности $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = C$ в точке D совпадает с угловым коэффициентом прямой $x_1 + x_2 = 180$ и, следовательно, равен −1. Рассматривая x_2 как неявную функцию от x_1 и дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$4 + 2x_1 + 8x'_2 + 2x_2 x'_2 = 0, \text{ или}$$
$$x'_2 = -(2 + x_1)/(4 + x_2).$$

Приравняв полученное выражение числу −1, получаем одно из уравнений для определения координат точки D. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка D, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$. Это означает, что если предприятие изготовит 91 изделие I технологическим способом и 89 изделий II способом, то общие затраты будут минимальными и составят 17 278 у.е.

Решим теперь задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем минимальное значение функции (3.20) при условии (3.21), то есть без учета требования неотрицательности переменных. Для этого составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda\,(180 - x_1 - x_2),$$

вычислим ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части, получим

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ или } x_1 - x_2 = 2.$$

Решая последнее уравнение совместно с уравнением $x_1 + x_2 = 180$, находим $x_1^* = 91$ и $x_2^* = 89$, то есть получены координаты точки D, удовлетворяющей условиям (3.22). Эта точка, возможно, заключает экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в точке D функция f имеет условный минимум. Этот результат и был получен выше.

Следует отметить, что такой же результат мы получим и в том случае, если исследование на условный экстремум функции f сведем к исследованию на безусловный экстремум функции f_1, полученной из f в результате ее преобразований. А именно: если из уравнения связи (3.21) найдем $x_2 = 180 - x_1$ и подставим это выражение в (3.20), то получим функцию одной переменной x_1:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8\,(180 - x_1) + (180 - x_1)^2.$$

Найдем стационарную точку этой функции из уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0,$$

или

$$4x_1 - 364 = 0,$$

откуда $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$.

Так же, как и выше, устанавливаем, что в данной точке функция f имеет минимальное значение.

3.13. Найти точки экстремума функции

$$f = x_1^2 + x_2^2$$

при условии

$$x_1 + x_2 = 5.$$

Р е ш е н и е. Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda (5 - x_1 - x_2),$$

найдем ее частные производные по x_1, x_2 и λ и приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Из первого и второго уравнений имеем $x_1 - x_2 = 0$. Решая это уравнение совместно с третьим из системы (3.23), находим $x_1 = 5/2$; $x_2 = 5/2$. Таким образом, в точке (5/2; 5/2) данная функция может иметь условный экстремум. Чтобы определить, достигается ли в этой точке условный экстремум, нужно провести дополнительные исследования. В частности, используя вторые частные производные, можно показать, что в этой точке функция имеет условный минимум и $F_{\min} = 25/2$.

Метод множителей Лагранжа можно применять и в том случае, когда условия связи представляют собой неравенства. Так, если требуется найти экстремум функции $z = f(X)$ при условии $g(X) \le b$, то сначала следует найти точки безусловного экстремума функции $z = f(X)$ из уравнений $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ $(k = \overline{1, n})$, затем среди этих точек отобрать те, координаты которых удовлетворяют условию связи $g(X) < b$, и, наконец, определить точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_k} = 0 \ (k = \overline{1, n}), \\ g(X) = b. \end{cases}$$

Точки, найденные в результате решения этой системы, вместе с точками, определенными на первом этапе и удовлетворяющими условию $g(X) < b$, подлежат дальнейшему исследованию, как и при нахождении безусловного экстремума.

Найдите условные экстремумы функций в задачах 3.14—3.18.

3.14. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$
при условиях
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

3.15. $f = x_1x_2x_3$
при условиях
$$\begin{cases} 2x_1x_2 + x_2x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

3.16. $f = x_1x_2 + x_2x_3$
при условиях
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

3.17. $f = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2x_3$
при условиях
$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19, \\ x_1 + 2x_2x_3 = 11. \end{cases}$$

3.18. $f = x_1x_2x_3$
при условиях
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8. \end{cases}$$

3.19. Найти максимальное значение функции
$$f = x_1^2x_2^3x_3^4$$
при условии
$$x_1 + x_2 + x_3 = 18.$$

3.20. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 200 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на I предприятии, равны $4x_1^2$ у.е., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на II предприятии, составляют $20x_2 + 6x_2^2$ у.е.

Определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты, обусловленные изготовлением необходимой продукции, были минимальными.

3.21. Изготовление некоторой продукции на производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами. При I способе изготовление x_1 изделий требует затрат, равных $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2$ у.е., а при II способе затраты на изготовление x_2 изделий составляют $b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2$ у.е. (a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2 — некоторые положительные числа).

Составить план производства продукции, согласно которому должно быть произведено d изделий при наименьших общих затратах.

§ 3.3. Задачи выпуклого программирования

Рассмотрим задачу нелинейного программирования:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max (\min) \tag{3.24}$$

при условиях

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.25}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{3.26}$$

где f и g_j — некоторые функции n переменных x_1, x_2, ..., x_n.

Для решения сформулированной задачи в такой общей постановке не существует универсальных методов. Однако для отдельных классов задач, в которых сделаны дополнительные ограничения относительно свойств функций f и g_i, разработаны эффективные методы их решения. В частности, ряд таких методов имеется для решения задач нелинейного программирования (3.24)—(3.26) в тех случаях, если f — вогнутая (выпуклая) функция и область допустимых решений, определяемая ограничениями (3.25) и (3.26), — выпуклая.

Определение 3.1. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой* (рис. 3.6), если для любых двух точек X_1 и X_2 из X и любого $0 \le \lambda \le 1$ выполняется соотношение

$$f\,[\lambda X_2 + (1 - \lambda)\, X_1] \le \lambda f(X_2) + (1 - \lambda) f(X_1). \tag{3.27}$$

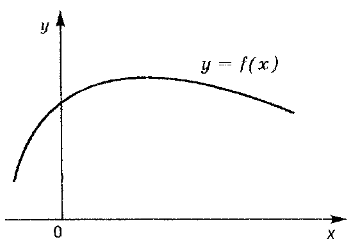


Рис. 3.6

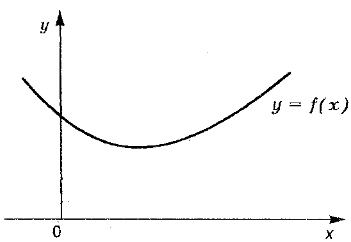


Рис. 3.7

Определение 3.2. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданная на выпуклом множестве X, называется *вогнутой* (рис. 3.7), если для любых двух точек X_1 и X_2 из X и любого $0 \le \lambda \le 1$ выполняется соотношение

$$f[\lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1] = \lambda f(X_2) + (1 - \lambda)/(X_1).$$

Определение 3.3. Говорят, что множество допустимых решений задачи (3.24)—(3.26) *удовлетворяет условию регулярности*, если существует по крайней мере одна точка X_i, принадлежащая области допустимых решений, и такая, что $g_i(X_i) < b_i$ $(i = \overline{1, m})$.

Определение 3.4. Задача (3.24)—(3.26) называется *задачей выпуклого программирования*, если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является вогнутой (выпуклой), а функции $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(i = \overline{1, m})$ — выпуклыми.

Теорема 3.1. Любой локальный максимум (минимум) задачи выпуклого программирования является *глобальным максимумом (минимумом)*.

Определение 3.5. *Функцией Лагранжа* задачи выпуклого программирования (3.24)—(3.26) называется функция

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i\, [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)],$$

где y_1, y_2, y_m — множители Лагранжа.

Рассмотрим задачу (3.24)—(3.26) при условии, что определяется максимум функции (3.24), то есть

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max, \qquad (3.27)$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i\, (i = \overline{1, m}) \qquad (3.28)$$

$$x_j \ge 0\, (j = \overline{1, n}). \qquad (3.29)$$

Определение 3.6. Точка $(X_0, Y_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ называется *седловой точкой* функции Лагранжа для задачи (3.27)—(3.29), если

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \le$$
$$\le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1, y_2, y_m)$$

для всех $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, n})$ и y_i $(i = \overline{1, m})$.

Теорема 3.2 (теорема Куна—Таккера). *Для задачи выпуклого программирования (3.27)—(3.29), множество допустимых решений которой обладает свойством регулярности, $X_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ является оптимальным планом тогда и только тогда, когда существует такой вектор $Y_0 = y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0$ $(y_i^0 \ge 0, i = \overline{1, m})$, что (X_0, Y_0) — седловая точка функции Лагранжа.*

Если предположить, что целевая функция f и функции g_i непрерывно дифференцируемы, то теорема Куна—Таккера может быть дополнена аналитическими выражениями, определяющими необходимые и достаточные условия того, чтобы точка (X_0, Y_0) была седловой точкой функции Лагранжа, то есть являлась решением задачи выпуклого программирования. Эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0 \ (j = \overline{1, n}), & (3.30) \\ x_j^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \ (j = \overline{1, n}), & (3.31) \\ x_j^0 \ge 0 \ (j = \overline{1, n}), & (3.32) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} \le 0 \ (i = \overline{1, m}), & (3.33) \\ y_i^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0 \ (i = \overline{1, m}), & (3.34) \\ y_i^0 \ge 0 \ (i = \overline{1, m}), & (3.35) \end{cases}$$

где $\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}$ и $\dfrac{\partial L_0}{\partial y_i}$ — значения соответствующих частных производных функции Лагранжа, вычисленных в седловой точке.

Если требуется найти минимум функции (3.24), то справедливы следующие неравенства:

$$L(X_0, Y) \le L(X_0, Y_0) \le L(X, Y_0).$$

В этом случае условия существования седловой точки функции Лагранжа имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \ge 0 \ (j = \overline{1, n}),$$

$$x_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \ (j = \overline{1, n}),$$

$$x_j^0 \ge 0 \ (j = \overline{1, n}),$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$

$$y_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0 \ (i = \overline{1, m}),$$

$$y_i^0 \ge 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

Всем отмеченным выше требованиям, позволяющим записать необходимые и достаточные условия для седловой точки (X_0, Y_0) функции Лагранжа в виде указанных выражений, удовлетворяет сформулированная ниже *задача квадратичного программирования.* Прежде чем сформулировать эту задачу, дадим некоторые определения.

Определение 3.7. *Квадратичной формой* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется числовая функция от этих переменных, имеющая вид

$$F = c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \ldots + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j.$$

Определение 3.8. Квадратичная форма F называется *положительно (отрицательно)-определенной*, если $F(X) > 0$ $[F(X) < 0]$ для всех значений переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кроме $X = 0$.

Определение 3.9. Квадратичная форма называется *положительно (отрицательно)-полуопределенной*, если $F(X) \geq 0$ $[F(X) \leq \leq 0]$ для любого набора значений переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и, кроме того, существует такой набор переменных $X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, где не все значения переменных одновременно равны нулю, что $F(X') = 0$.

Теорема 3.3. *Квадратичная форма является выпуклой функцией, если она положительно-полуопределенная, и вогнутой функцией, если она отрицательно-полуопределенная.*

Определение 3.10. Задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_jx_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j \tag{3.36}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.37}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{3.38}$$

где $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j$ — отрицательно (положительно)-полуопределенная квадратичная форма, называется *задачей квадратичного программирования.* Функция Лагранжа для нее запишется в виде

$$L = \sum_{j=1}^{n} d_jx_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j + y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j).$$

Предположим, что требуется найти максимум функции (3.36) при условиях (3.37)—(3.38). Тогда, если функция L имеет седловую точку $(X_0; Y_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$, в этой точке выполняются соотношения (3.30)—(3.35). Вводя теперь дополнительные переменные v_j $(j = \overline{1, n})$ и w_i $(i = \overline{1, m})$, обращающие неравенства (3.30) и (3.33) в равенства, перепишем выражения (3.30)—(3.35), записанные для задачи квадратичного программирования, следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0 \ (j = \overline{1, n}), & (3.39) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} + w_i = 0 \ (i = \overline{1, m}), & (3.40) \\ x_j^0 v_j = 0 \ (j = \overline{1, n}), & (3.41) \\ y_i^0 w_i = 0 \ (i = \overline{1, m}), & (3.42) \end{cases}$$

$$x_j^0 \geq 0, v_j \geq 0, y_i^0 \geq 0, w_i \geq 0 \ (j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}). \qquad (3.43)$$

Таким образом, чтобы найти решение задачи квадратичного программирования (3.36)—(3.38) при условии, что будет найден максимум функции (3.36), нужно определить неотрицательное решение систем линейных уравнений (3.39) и (3.40), удовлетворяющее условиям (3.41) и (3.42). Это решение можно найти с помощью метода искусственного базиса, примененного для нахождения максимального значения функции $F = -\sum_i Mz_i$, при условиях (3.39), (3.40), (3.43) с учетом (3.41) и (3.42). Здесь z_i — искусственные переменные, введенные в уравнения (3.39) и (3.40).

Используя метод искусственного базиса и дополнительно учитывая условия (3.41) и (3.42), после конечного числа шагов мы либо установим неразрешимость, либо получим оптимальный план исходной задачи.

Итак, процесс нахождения решения задачи квадратичного программирования (3.36)—(3.38) включает четыре этапа.

1°. Составляют функцию Лагранжа.

2°. Записывают в виде выражений (3.39)—(3.43) необходимые и достаточные условия существования седловой точки для функции Лагранжа.

3°. Используя метод искусственного базиса, либо устанавливают отсутствие седловой точки для функции Лагранжа, либо находят ее координаты.

4°. Записывают оптимальное решение исходной задачи и находят значение целевой функции.

3.22. Найти максимальное значение функции

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \qquad (3.44)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_2 - x_2 \le 12, \end{cases} \qquad (3.45)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (3.46)$$

Решение. Функция f является вогнутой, так как представляет собой сумму линейной функции $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ (которую можно рассматривать как вогнутую) и квадратичной формы $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$, которая является отрицательно-определенной и, следовательно, также вогнутой. Система ограничений задачи включает только лишь линейные неравенства. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Куна—Таккера. Составим функцию Лагранжа

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + y_1(8 - x_1 - 2x_2) + y_2(12 - 2x_1 + x_2)$$

и запишем в виде уравний (3.39)—(3.43) необходимые и достаточные условия существования седловой точки построенной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \qquad (3.47)$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2) = 0, \\ y_1 \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = y_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ y_2 \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = y_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0, \end{cases} \qquad (3.48)$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0. \qquad (3.49)$$

Систему линейных неравенств (3.47) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 \geq 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{cases} \tag{3.50}$$

Вводя теперь дополнительные неотрицательные переменные v_1 и v_2, w_1 и w_2, обращающие неравенства (3.47) в равенства, получим

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12, \end{cases} \tag{3.51}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0. \tag{3.52}$$

Учитывая равенства (3.51), можно записать:

$$v_1x_1 = 0, v_2x_2 = 0, \ \ w_1y_1 = 0, w_2y_2 = 0. \tag{3.53}$$

Если теперь найти базисное решение системы линейных уравнений (3.51) с учетом выполнения равенств (3.53), то будет получена седловая точка функции Лагранжа для исходной задачи, то есть определено оптимальное решение. Для нахождения базисного решения системы линейных уравнений (3.51) воспользуемся методом искусственного базиса. В первое и второе уравнения системы (3.51) соответственно добавим дополнительную неотрицательную переменную z_1 и z_2 и рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в определении максимального значения функции

$$\overline{F} = -Mz_1 - Mz_2 \tag{3.54}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12, \end{cases} \tag{3.55}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0. \tag{3.56}$$

В результате решения задачи (3.54)—(3.56) (отметим, что при этом решении учитываются условия (3.53)) находим допустимое базисное решение системы линейных уравнений (3.55) (табл. 3.2):

$$x_1^0 = 1;\ x_2^0 = 1;\ w_1 = 5;\ w_2 = 11;\ y_1^0 = y_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Таблица 3.2

i	Базис	$C_б$	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				Px_1	Px_2	Py_1	Py_2	Pv_1	Pv_2	Pw_1	Pw_2	Pz_1	Pz_2
1	Pz_1	$-M$	2	2	0	1	2	−1	0	0	0	1	0
2	Pz_2	$-M$	4	0	4	2	−1	0	−1	0	0	0	1
3	Pw_1	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	Pw_2	0	12	2	−1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			−6	−2	−4	−3	−1	1	1	0	0	0	0
1	Px_1	$-M$	2	2	0	1	2	−1	0	0	0	1	0
2	Px_2	0	1	0	0	1/2	−1/4	0	−1/4	0	0	0	1/4
3	Pw_1	0	6	1	0	−1	1/2	0	1/2	1	0	0	−1/2
4	Pw_2	0	13	2	0	1/2	−1/4	0	−1/4	0	1	0	1/4
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			−2	−2	0	−1	−2	1	0	0	0	0	1
1	Px_1	0	1	1	1	1/2	1	−1/2	0	0	0	1/2	0
2	Px_2	0	1	0	1					0	0		
3	Pw_1	0	5	0	0					1	0		
4	Pw_2	0	11	0	0					0	1		
5			0	0	0					0	0		

Так как $x_1^0 v_1 = 0$, $x_2^0 v_2 = 0$, $y_1^0 w_1 = 0$, $y_2^0 w_2 = 0$, то $(X_0; Y_0) = (1; 1; 0; 0)$ является седловой точкой функции Лагранжа для исходной задачи. Следовательно, $X^* = (1; 1)$ — оптимальный план исходной задачи и $f_{\max} = 3$.

Решите задачи выпуклого программирования 3.23—3.26.

3.23. Найти максимальное значение функции

$$f = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3.24. Найти максимальное значение функции

$$f = -x^2{}_1 - x^2{}_2 + x_1 + 8x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3.25. Найти максимальное значение функции

$$f = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \ge -8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3.26. Найти максимальное значение функции

$$f = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_3 \le 14, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

§ 3.4. Градиентные методы

Используя градиентные методы, можно найти решение любой задачи нелинейного программирования. Однако в общем случае применение этих методов позволяет найти точку локального экстремума. Поэтому более целесообразно использовать градиентные методы для нахождения решения задач выпуклого программирования, в которых всякий локальный экстремум является одновременно и глобальным. Процесс нахождения решения задачи с помощью градиентных методов состоит в том, что начиная с некоторой точки $X^{(k)}$ осуществляется последовательный переход к некоторым другим точкам до тех пор, пока не выявляется приемлемое решение исходной задачи. При этом градиентные методы могут быть подразделены на две группы.

К *первой группе* относятся методы, при использовании которых исследуемые точки не выходят за пределы области допустимых решений задачи. Наиболее распространенным из них является метод Франка—Вулфа.

Ко *второй группе* относятся методы, при использовании которых исследуемые точки могут как принадлежать, так и не принадлежать области допустимых решений. Однако в результате реализации итерационного процесса отыскивается точка области допустимых решений, определяющая приемлемое решение. Наиболее часто используются метод штрафных функций и метод Эрроу—Гурвица.

При решении задач градиентными методами, в том числе и названными, итерационный процесс осуществляется до того момента, пока градиент функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в очередной точке $X^{(k+1)}$ не станет равным нулю или же пока $|f(X^{(k+1)} - f(X^{(k)})| < \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, характеризующее точность полученного решения.

Остановимся более подробно на методах Франка—Вулфа, штрафных функций и Эрроу—Гурвица.

1. **Метод Франка—Вулфа.** Пусть требуется найти максимальное значение вогнутой функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.57}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.58}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{3.59}$$

Характерной особенностью задачи является то, что ее система ограничений содержит только линейные неравенства. Эта особенность является основой для замены в зоне исследуемой точки нелинейной целевой функции линейной, благодаря чему решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач линейного программирования.

Процесс поиска решения задачи начинают с определения точки, принадлежащей области допустимых решений задачи. Пусть это точка $X^{(k)}$, тогда в ней вычисляют градиент функции (3.57)

$$\nabla f(X^{(k)}) = \left[\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n}\right]$$

и строят линейную функцию

$$F = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n}x_n. \tag{3.60}$$

Затем находят максимальное значение этой функции при ограничениях (3.58) и (3.59). Пусть решение данной задачи определяется точкой $Z^{(k)}$. Тогда за новое допустимое решение исходной задачи принимают координаты точки $X^{(k+1)}$:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k (Z^{(k)} - X^{(k)}), \qquad (3.61)$$

где λ_k — некоторое число, называемое шагом вычислений и заключенное между нулем и единицей ($0 \le \lambda_k \le 1$). Это число λ_k берут произвольно или определяют таким образом, чтобы значение функции в точке $X^{(k+1)}$ $f(X^{(k+1)})$, зависящее от λ_k, было максимальным. Для этого необходимо найти решение уравнения $\frac{\partial f}{\partial \lambda_k} = 0$ и выбрать его наименьший корень. Если его значение больше единицы, то следует положить $\lambda_k = 1$. После определения числа λ_k находят координаты точки $X^{(k+1)}$, вычисляют значение целевой функции в ней и выясняют необходимость перехода к новой точке $X^{(k+2)}$. Если такая необходимость имеется, то вычисляют в точке $X^{(k+1)}$ градиент целевой функции, затем переходят к соответствующей задаче линейного программирования и находят ее решение. Определяют координаты точки $X^{(k+2)}$ и исследуют необходимость проведения дальнейших вычислений. После конечного числа шагов получают с необходимой точностью решение исходной задачи.

Итак, процесс нахождения решения задачи (3.57)—(3.59) методом Франка—Вулфа включает шесть этапов.

1°. Определяют исходное допустимое решение задачи.

2°. Находят градиент функции (3.57) в точке допустимого решения.

3°. Строят функцию (3.60) и находят ее максимальное значение при условиях (3.58) и (3.59).

4°. Определяют шаг вычислений.

5°. По формулам (3.61) находят компоненты нового допустимого решения.

6°. Проверяют необходимость перехода к последующему допустимому решению. Если не найдено приемлемое решение исходной задачи, переходят к этапу 2°.

3.27. Методом Франка—Вулфа найти решение задачи 3.22, состоящей в определении максимального значения функции

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \qquad (3.62)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \qquad (3.63)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (3.64)$$

Р е ш е н и е.   Найдем градиент функции

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = (2 - 2x_1; 4 - 4x_2)$$

и в качестве исходного допустимого решения задачи возьмем точку $X^{(0)} = (0; 0)$, а в качестве критерия оценки качества получаемого решения — неравенство

$$|f(X^{(k+1)} - f(X^{(k)})| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 0{,}01$.

I и т е р а ц и я.   В точке $X^{(0)}$ градиент $\nabla f(X^{(0)}) = (2; 4)$. Находим максимум функции

$$F_1 = 2x_1 + 4x_2 \tag{3.65}$$

при условиях (3.63) и (3.64).

Задача (3.65) имеет оптимальный план $Z^{(0)} = (0; 4)$ (рис. 3.8).

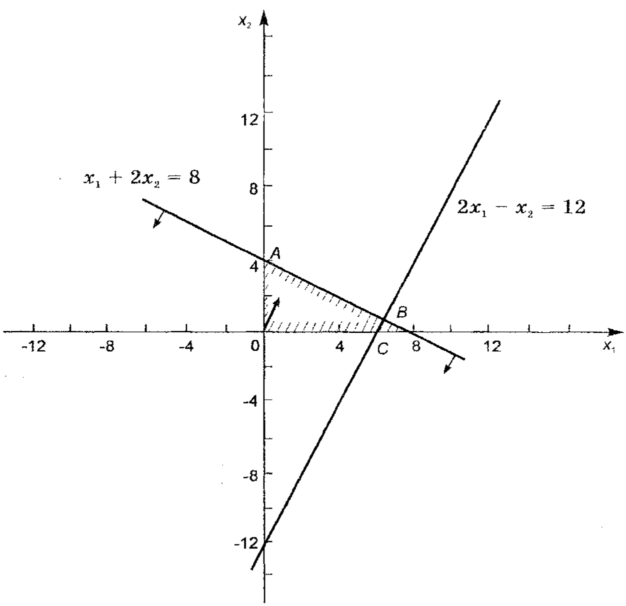


Рис. 3.8

Найдем новое допустимое решение исходной задачи по формуле (3.61):

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_1(Z^{(0)} - X^{(0)}), \qquad (3.66)$$

где $0 \le \lambda_1 \le 1$.

Подставив вместо $X^{(0)}$ и $Z^{(0)}$ их значения, получим

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 0, \\ x_2^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 4. \end{cases} \qquad (3.67)$$

Определим теперь число λ_1. Подставим в равенство (3.62) вместо x_1 и x_2 их значения в соответствии с соотношениями (3.67):

$$f(\lambda_1) = 16\ \lambda_1 - 32\lambda_1^2,$$

найдем производную этой функции по λ_1 и приравняем ее нулю:

$$f'(\lambda_1) = 16 - 62\lambda_1 = 0.$$

Решая это уравнение, получим $\lambda_1 = 1/4 = 0{,}25$. Поскольку найденное значение λ_1 заключено между 0 и 1, принимаем его за величину шага. Таким образом, $X^{(1)} = (0;\ 1)$, $f(X^{(1)}) = 2$, $f(X^{(1)}) - f(X^{(0)}) = 2 > \varepsilon = 0{,}01$.

II итерация. Градиент целевой функции исходной задачи в точке $X^{(1)}$ есть $\nabla f\ (X^{(1)}) = (2;\ 0)$. Находим максимум функции $F_2 = 2x_1$ при условиях (3.63) и (3.64). Решением является $Z^{(1)} = (6{,}4;\ 0{,}8)$.

Определяем теперь $X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda_2(Z^{(1)} - X^{(1)})$. Последнее равенство перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 6{,}4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} = 1 - 0{,}2\lambda_2. \end{cases} \qquad (3.68)$$

Подставляя теперь в функцию (3.62) вместо x_1 и x_2 их значения в соответствии с соотношениями (3.68), получаем

$$f(\lambda_2) = 2 + 12{,}8\lambda_2 - 41{,}04\lambda_2^2,$$

откуда $f'(\lambda_2) = 12{,}8 - 82{,}08\ \lambda_2$. Приравнивая $f'(\lambda_2)$ нулю и решая полученное уравнение, находим $\lambda_2 \approx 0{,}16$.

Таким образом,

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1{,}02, \\ x_2^{(2)} = 0{,}97, \end{cases}$$

то есть $X^{(2)} = (1{,}02;\ 0{,}97)$, $f(X^{(2)}) = 2{,}9978$; $f(X^{(2)}) - f(X^{(1)}) = 2{,}9978 - 2 = 0{,}9978 > \varepsilon = 0{,}01$.

III итерация. Градиент функции f в точке $X^{(2)}$ есть $\nabla f(X^{(2)}) = (-0{,}04;\ 0{,}12)$. Находим максимум функции $F_3 = -0{,}04x_1 + 0{,}12x_2$ при условиях (3.63) и (3.64). Решением является $Z^{(2)} = (0{,}4)$.

Определяем $X^{(3)} = X^{(2)} + \lambda_3(Z^{(2)} - X^{(2)})$. Имеем

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 10{,}2 + \lambda_3 \cdot (0 - 1{,}02) = 1{,}02 - 1{,}02\lambda_3, \\ x_2^{(3)} = 0{,}97 + \lambda_3 \cdot (4 - 0{,}97) = 0{,}97 + 3{,}03\lambda_3; \end{cases}$$

$$f(\lambda_3) = 2{,}9978 + 0{,}4044\,\lambda_3 - 19{,}4022\,\lambda_3^2,$$

$$f'(\lambda_3) = 0{,}4044 - 38{,}8044\,\lambda_3.$$

Решая уравнение $f'(\lambda_3) = 0$, находим $\lambda_3 \approx 0{,}010$. Следовательно, $X^{(3)} = (1{,}0098;\ 1{,}0003)$, $f(X^{(3)}) = 2{,}99991$, $f(X^{(3)}) - f(X^{(2)}) = 2{,}99991 - 2{,}9978 = 0{,}00211 < \varepsilon = 0{,}01$.

Таким образом, $X^{(3)} = (1{,}0098;\ 1{,}0003)$ является искомым решением исходной задачи. Данная точка $X^{(3)}$ находится достаточно близко к точке максимального значения целевой функции $X^* = (1;1)$, найденной при решении этой задачи в § 3.3. Задав меньшую величину ε, можно было бы, совершив дополнительные приближения, еще ближе подойти к точке максимального значения целевой функции.

2. Метод штрафных функций. Рассмотрим задачу определения максимального значения вогнутой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i\ (i = \overline{1, m})$, $x_j \ge 0\ (j = \overline{1, n})$, где $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — выпуклые функции.

Вместо того чтобы непосредственно решать эту задачу, находят максимальное значение функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + H(x_1, x_2, \dots, x_n)$, являющейся суммой целевой функции задачи и некоторой функции $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемой системой ограничений и называемой *штрафной функцией*. Штрафную функцию можно построить различными способами. Однако наиболее часто она имеет вид

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\, g_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где

$$\alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge 0, \\ \alpha_i & \text{если } b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0, \end{cases} \tag{3.69}$$

причем $\alpha_i > 0$ — некоторые постоянные числа, представляющие собой весовые коэффициенты.

Используя штрафную функцию, последовательно переходят от одной точки к другой до тех пор, пока не получат приемлемое решение. При этом координаты последующей точки находят по формуле

$$x_j^{(k+1)} = \max\left\{0;\ x_j^k + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial X_j}\right]\right\}. \tag{3.70}$$

Из соотношения (3.69) следует, что если предыдущая точка находится в области допустимых решений исходной задачи, то второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю и переход к последующей точке определяется только градиентом целевой функции. Если же указанная точка не принадлежит области допустимых решений, то за счет данного слагаемого на последующих итерациях достигается возвращение в область допустимых решений. При этом чем меньше α_i, тем быстрее отыщется приемлемое решение, однако точность определения снижается. Поэтому итерационный процесс обычно начинают при сравнительно малых значениях α_i и, продолжая его, эти значения постепенно увеличивают.

Итак, процесс нахождения решения задачи выпуклого программирования методом штрафных функций включает шесть этапов.

1°. Определяют исходное допустимое решение.

2°. Выбирают шаг вычислений.

3°. Находят по всем переменным частные производные от целевой функции и функций, определяющих область допустимых решений задачи.

4°. По формуле (3.70) находят координаты точки, определяющей возможное новое решение задачи.

5°. Проверяют, соответствуют ли координаты найденной точки системе ограничений задачи. При отрицательном результате переходят к следующему этапу. Если координаты найденной точки определяют допустимое решение задачи, то исследуется необходимость перехода к последующему допустимому решению, и при положительном ответе переходят к этапу 2°. В противном случае найдено приемлемое решение исходной задачи.

6°. Устанавливают значения весовых коэффициентов и переходят к этапу 4°.

3.28. Найти максимальное значение функции

$$f = -x_1^2 - x_2^2 \tag{3.71}$$

при условиях

$$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \le 18, \tag{3.72}$$

$$x_1, x_2 = 0. \tag{3.73}$$

Р е ш е н и е. Целевая функция данной задачи представляет собой отрицательно-определенную квадратичную форму и, значит, вогнута. В то же время область допустимых решений задачи, определяемая ограничениями (3.72) и (3.73), — выпуклая. Следовательно, задача (3.71)—(3.73) является задачей выпуклого программирования. Для нахождения ее решения применим метод штрафных функций. Прежде всего построим область допустимых решений задачи (рис. 3.9) и линии уровня, определяемые целевой функцией (3.71). Этими линиями служат окружности с центром в точке (0; 0). Точка касания одной из этих окружностей с областью допустимых решений и является искомой точкой максимального значения целевой функции.

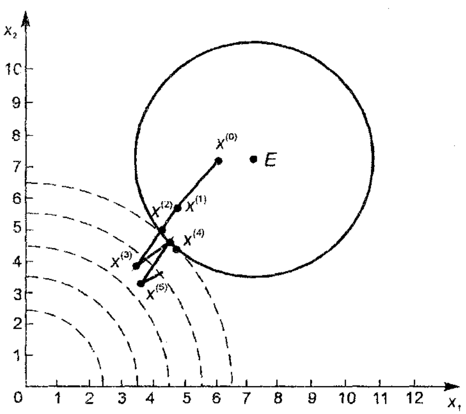


Рис. 3.9

Положим $X^{(0)} = (6; 7)$. Возьмем $\lambda = (0; 1)$, обозначим через $g(x_1, x_2) = 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2$ и определим частные производные от функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ по переменным x_1 и x_2:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1; \ \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2; \ \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14.$$

Теперь, используя формулу (3.70), приступаем к построению последовательности точек, одна из которых определит приемлемое решение.

I и т е р а ц и я. Так как точка $X^{(0)} = (6; 7)$ принадлежит области допустимых решений задачи, то второе слагаемое в квадратных скобках формулы (3.70) равно нулю. Значит, координаты следующей точки $X^{(1)}$ вычисляем по формулам

$$x_1^{(1)} = \max\left\{0;\ x_1^0 + \lambda\,\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1}\right\} = \max\{0;\ 6 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 6\} = 4{,}8,$$

$$x_2^{(1)} = \max\left\{0;\ x_2^0 + \lambda\,\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2}\right\} = \max\{0;\ 7 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 7\} = 5{,}6.$$

Проверим теперь, принадлежит ли эта точка области допустимых решений задачи. Для этого найдем $g(X^{(1)}) = 18 - 4{,}84 - 1{,}96 = 11{,}2$. Так как $g(X^{(1)}) > 0$, то $X^{(1)}$ принадлежит области допустимых решений. В этой точке $f(X^{(1)}) = -54{,}4$.

II итерация. Находим

$$x_1^{(2)} = \max\{0;\ 4{,}8 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 4{,}8\} = 3{,}84;$$

$$x_2^{(2)} = \max\{0;\ 5{,}6 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 5{,}6\} = 4{,}48;$$

$$g(X^{(2)}) = 18 - 9{,}9856 - 6{,}3504 = 1{,}664 > 0;\ f(X^{(2)}) = -34{,}816.$$

III итерация. Находим

$$x_1^{(3)} = \max\ \{0;\ 3{,}84 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 3{,}84\} = 3{,}072;$$
$$x_2^{(3)} = \max\ \{0;\ 4{,}48 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 4{,}48\} = 3{,}584;$$
$$g(X^{(3)}) = 18 - 15{,}429184 - 11{,}669056 \approx -9{,}0982.$$

IV итерация. Точка $X^{(3)}$ не принадлежит области допустимых решений задачи. Следовательно,

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0;\ x_1^3 + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{0;\ 3{,}072 + 0{,}1\cdot\left[(-2)\cdot 3{,}072 + \alpha((-2)\cdot 3{,}072 + 14)\right\}\right. =$$
$$= \max\left\{0;\ 2{,}4576 + \alpha\cdot 0{,}7856\right\};$$

$$x_2^{(4)} = \max\left\{0;\ x_2^3 + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$
$$= \max\left\{0;\ 3{,}584 + 0{,}1\cdot\left[(-2)\cdot 3{,}584 + \alpha((-2)\cdot 3{,}584 + 14)\right\}\right. =$$
$$= \max\left\{0;\ 2{,}8672 + \alpha\cdot 0{,}6832\right\}.$$

Возникает вопрос о выборе числа α. Целесообразно остановиться на таком, чтобы точка $X^{(4)}$ была не слишком удалена от границы области допустимых решений и вместе с тем принадлежала этой области. Таким требованиям удовлетворяет, в частности, $\alpha = 1{,}9$. При данном значении получаем

$$x_1^{(4)} = \max\{0;\ 2{,}4576 + 1{,}9 \cdot 0{,}7856\} \approx 3{,}950;$$

$$x_2^{(4)} = \max\{0;\ 2{,}8672 + 1{,}9 \cdot 0{,}6832\} \approx 4{,}165;$$

$$g(X^{(4)}) = 18 - 9{,}3025 - 8{,}037225 \approx 0{,}660;\ f(X^{(4)}) \approx -32{,}950.$$

V итерация. Имеем

$$x_1^{(5)} = \max\{0;\ 3{,}950 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 3{,}950\} = 3{,}16;$$

$$x_2^{(5)} = \max\{0;\ 4{,}165 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 4{,}165\} = 3{,}332;$$

$$g(X^{(5)}) = 18 - 14{,}7456 - 13{,}454224 \approx -10{,}2.$$

VI итерация. Находим

$$x_1^{(6)} = \max\{0;\ 3{,}16 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}16 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}16 + 14)]\} \approx 3{,}987;$$

$$x_2^{(6)} = \max\{0;\ 3{,}332 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}332 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}332 + 14)]\} \approx 4{,}059;$$

$$g(X^{(6)}) = 18 - 9{,}078169 - 8{,}649481 \approx 0{,}272;\ f(X^{(6)}) \approx -32{,}372.$$

VII итерация. Находим

$$x_1^{(7)} = \max\{0;\ 3{,}987 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 3{,}987\} \approx 3{,}189;$$

$$x_2^{(7)} = \max\{0;\ 4{,}059 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 4{,}059\} \approx 3{,}247;$$

$$g(X^{(7)}) = 18 - 14{,}523721 - 14{,}085009 \approx -10{,}609.$$

VIII итерация. Имеем

$$x_1^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}189 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}189 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}189 + 14)]\} \approx 3{,}999$$

$$x_2^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}247 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}247 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}247 + 14)]\} \approx 4{,}024;$$

$$g(X^{(8)}) = 18 - 9{,}006001 - 8{,}856576 \approx 0{,}137;\ f(X^{(8)}) = -32{,}185.$$

IX итерация. Находим

$$x_1^{(9)} = \max\{0;\ 3{,}999 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}999]\} \approx 3{,}201;$$

$$x_2^{(9)} = \max\{0;\ 4{,}024 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}024]\} \approx 3{,}219;$$

$$g(X^{(9)}) = 18 - 14{,}432401 - 14{,}295961 \approx -10{,}728.$$

X итерация. Имеем

$$x_1^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}201 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}201 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}201 + 14)]\} \approx 4{,}004;$$

$$x_2^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}219 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}219 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}219 + 14)]\} \approx 4{,}012;$$

$$g(X^{(10)}) = 18 - 8{,}976016 - 8{,}928144 \approx 0{,}096;\ f(X^{(10)}) = -32{,}128.$$

XI итерация. Находим

$$x_1^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}004 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}004]\} \approx 3{,}203;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}012 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}012]\} \approx 3{,}210;$$

$$g(X^{(11)}) = 18 - 14{,}417209 - 14{,}3641 \approx -10{,}781.$$

XII итерация. Имеем

$$x_1^{(12)} = \max\ \{0;\ 3{,}203 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}203 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}203 + 14)]\} \approx 4{,}005;$$

$$x_2^{(12)} = \max\ \{0;\ 3{,}210 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}210 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}210 + 14)]\} \approx 4{,}008;$$

$$g(X^{(12)}) = 18 - 8{,}970025 - 8{,}952064 \approx 0{,}078;\ f(X^{(12)}) = -32{,}104.$$

Сравнивая значения целевой функции, найденные в точках, полученных после X и XII итераций, видим, что они с точностью до 10^{-1} совпадают. Это говорит о близости точки, найденной на последней итерации, к точке максимального значения целевой функции. Такой же вывод можно сделать, если исследовать вектор-градиенты функций $f(X)$ и $g(X)$ в точке $X^{(12)}$. В этой точке

$$\nabla f(X^{(12)}) = (-8{,}01,\ -8{,}016),\ \nabla g(X^{(12)}) = (5{,}99;\ 5{,}984).$$

Вычислим отношения одноименных координат векторов: $-8{,}01/5{,}99 \approx -1{,}337$; $-8{,}016/5{,}984 \approx -1{,}339$. Как видно, они почти равны между собой. Это означает, что векторы $\nabla f(X^{(12)})$ и $\nabla g(X^{(12)})$ практически коллинеарны. Так как к тому же точка $X^{(12)}$ находится вблизи границы области допустимых решений (поскольку $g(X^{(12)}) \approx 0{,}078$), то $x_1^* = 4{,}005$ и $x_2^* = 4{,}012$ можно считать приемлемым решением задачи. Это решение при необходимости можно уточнить дальнейшими шагами до полной коллинеарности градиентов целевой и ограничительной функций.

Последовательность точек, получаемых во время нахождения решения задачи, наглядно иллюстрируется рис. 3.9.

3. Метод Эрроу—Гурвица. При нахождении решения задач нелинейного программирования методом штрафных функций мы выбирали значения α_i произвольно, что приводило к значительным колебаниям удаленности определяемых точек от области допустимых решений. Этот недостаток устраняется при решении задачи методом Эрроу—Гурвица, согласно которому на очередном шаге числа $\alpha_i^{(k)}$ вычисляют по формуле

$$\alpha_i^{(k)} = \max\{0;\ \alpha_i^{(k+1)} - \lambda g_i(X^{(k)})\}\ (i = \overline{1, m}). \tag{3.74}$$

В качестве начальных значений $\alpha_i^{(0)}$ берут произвольные неотрицательные числа.

3.29. Используя метод Эрроу—Гурвица, найти решение задачи 3.27, состоящей в определении максимального значения функции

$$f = -x_1^2 - 2x_2^2 \tag{3.75}$$

при условиях

$$18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \geq 0, \tag{3.76}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{3.77}$$

Р е ш е н и е. Как следует из решения задачи 3.27, при нахождении решения данной задачи методом Эрроу—Гурвица первые три итерации при одинаковых значениях $\lambda = 0$; 1 в обоих случаях совпадают. Это объясняется тем, что каждая из последовательно получаемых точек принадлежит области допустимых решений, а поэтому $\alpha^{(k)}{}_i = 0$ ($k = \overline{1, 3}$) независимо от того, находится ли оно по формуле (3.69) или (3.74).

IV итерация. Так как $g(X^{(3)}) < 0$, то координаты следующей точки $X^{(4)}$ находим по формуле (3.70):

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0; x_1^3 + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha\ \frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$

$$= \max\left\{0; 3{,}072 + 0{,}1 \cdot \left[(-2) \cdot 3{,}072 + \alpha\ \cdot ((-2) \cdot 3{,}072 + 14)\right]\right\},$$

$$x_2^{(4)} = \max\left\{0; x_2^3 + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha\ \frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$

$$= \max\left\{0; 3{,}584 + 0{,}1 \cdot \left[(-2) \cdot 3{,}584 + \alpha\ \cdot ((-2) \cdot 3{,}584 + 14)\right]\right\}.$$

Число $\alpha^{(4)}$ найдем по формуле (3.74):

$$\alpha^{(4)} = \max\{0;\ \alpha^{(3)} - 0{,}1 \cdot\ g(X^{(3)})\} = \max\ \{0;\ 0 - 0{,}1 \cdot\ (-9{,}0982)\} \approx 0{,}91.$$

Таким образом, $x_1{}^{(4)} \approx 3{,}172$; $x_2{}^{(4)} \approx 3{,}489$; $g(X^{(4)}) \approx -8{,}981$.

V итерация. Найденная точка $X^{(4)} = (3{,}172;\ 3{,}489)$ не принадлежит области допустимых решений исходной задачи. Поэтому для отыскания координат следующей точки также используем формулу (3.70). Однако прежде чем ее применить, по формуле (3.74) находим

$$\alpha^{(5)} = \max\{0;\ 0{,}91 - 0{,}1 \cdot\ (-8{,}981)\} \approx 1{,}81.$$

Значит,

$$x_1{}^{(5)} = \max\{0;\ 3{,}172 + 0{,}1 \cdot\ [(-2) \cdot\ 3{,}172 + 1{,}81 \cdot\ ((-2) \cdot\ 3{,}172 + 14)]\} \approx 3{,}923;$$

$$x_2{}^{(5)} = \max\{0;\ 3{,}489 + 0{,}1 \cdot\ [(-2) \cdot\ 3{,}489 + 1{,}81 \cdot\ ((-2) \cdot\ 3{,}489 + 14)]\} \approx 4{,}062;$$

$$g(X^{(5)}) \approx -0{,}1.$$

VI итерация. Имеем

$$\alpha^{(6)} = \max\{0;\ 1{,}81 - 0{,}1 \cdot\ (-0{,}1)\} \approx 1{,}82;$$

$$x_1{}^{(6)} = \max\{0;\ 3{,}923 + 0{,}1 \cdot\ [(-2) \cdot\ 3{,}923 + 1{,}82 \cdot\ ((-2) \cdot\ 3{,}923 + 14)]\} \approx 4{,}258;$$

$$x_2{}^{(6)} = \max\{0;\ 4{,}062 + 0{,}1 \cdot\ [(-2) \cdot\ 4{,}062 + 1{,}82 \cdot\ ((-2) \cdot\ 4{,}062 + 14)]\} \approx 4{,}319;$$

$$g(X^{(6)}) \approx 3{,}294;\ f(X^{(6)}) \approx -36{,}784.$$

VII итерация. Находим

$$x_1^{(7)} = \max\{0;\ 4{,}258 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}258]\} \approx 3{,}406;$$

$$x_2^{(7)} = \max\{0;\ 4{,}319 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}319]\} \approx 3{,}455;$$

$$g(X^{(7)}) \approx -7{,}484.$$

VIII итерация. Имеем

$$\alpha^{(8)} = \max\{0;\ 1{,}82 - 0{,}1 \cdot (-7{,}484)\} \approx 2{,}57;$$

$$x_1^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}406 + 0{,}1 \cdot [(-2){-}3{,}406 + 2{,}57 \cdot ((-2) \cdot 3{,}406 + 14)]\} \approx 4{,}572;$$

$$x_2^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}455 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}455 + 2{,}57 \cdot ((-2) \cdot 3{,}455 + 14)]\} \approx 4{,}586;$$

$$g(X^{(8)}) \approx 6{,}278;\ f(X^{(8)}) \approx -41{,}935.$$

IX итерация. Находим

$$x_1^{(9)} = \max\{0;\ 4{,}572 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}572]\} \approx 3{,}658;$$

$$x_2^{(9)} = \max\{0;\ 4{,}586 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}586]\} \approx 3{,}669;$$

$$g(X^{(9)}) \approx -4{,}265.$$

X итерация. Имеем

$$\alpha^{(10)} = \max\{0;\ 2{,}57 - 0{,}1 \cdot (-4{,}265)\} \approx 3{,}0;$$

$$x_1^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}658 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}658 + 3{,}0 \cdot ((-2) \cdot 3{,}658 + 14)]\} \approx 4{,}931;$$

$$x_2^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}669 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}669 + 3{,}0 \cdot ((-2) \cdot 3{,}669 + 14)]\} \approx 4{,}934;$$

$$g(X^{(10)}) \approx 9{,}451.$$

XI итерация. Находим

$$x_1^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}931 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}931]\} \approx 3{,}945;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}934 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}934]\} \approx 3{,}947;$$

$$g(X^{(11)}) \approx -0{,}654.$$

XII итерация. Имеем

$$\alpha^{(12)} = \max\{0;\ 3{,}0 - 0{,}1 \cdot (-0{,}654)\} \approx 3{,}06;$$

$$x_1^{(12)} = \max\{0;\ 3{,}945 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}945 + 3{,}06 \cdot ((-2) \cdot 3{,}945 + 14)]\} \approx 5{,}026;$$

$$x_2^{(12)} = \max\{0;\ 3{,}947 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}947 + 3{,}06 \cdot ((-2) \cdot 3{,}947 + 14)]\} \approx 5{,}026;$$

$$g(X^{(12)}) \approx 10{,}207;\ f(X^{(12)}) \approx -50{,}521.$$

XIII итерация. Находим

$$x_1^{(13)} = \max\{0;\ 5{,}026 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 5{,}026]\} \approx 4{,}021;$$

$$x_2^{(13)} = \max\{0;\ 5{,}026 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 5{,}026]\} \approx 4{,}021;$$

$$g(X^{(13)}) \approx 0{,}251;\ f(X^{(13)}) \approx -32{,}337.$$

Полученное на данной итерации решение $x_1^* = 4{,}021$ и $x_2^* = 4{,}021$ можно считать приемлемым. Это решение при необходимости следует улучшить, продолжив итерационный процесс до получения результата требуемой точности.

В заключение отметим, что решение сложных задач нелинейного программирования градиентными методами связано с большим объемом вычислений и целесообразно только с использованием ЭВМ.

Используя метод Франка—Вулфа, решите задачи 3.30 и 3.31.

3.30. Найти максимальное значение функции

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

В качестве начальной точки взять $X^{(0)} = (2;\ 2)$.

3.31. Найти максимальное значение функции

$$f = 6x_2 + 6x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

В качестве начальной точки взять $X^{(0)} = (0, 0, 0)$, а в качестве показателя, определяющего возможность завершения итерационного процесса, — неравенство

$$f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) < \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 0{,}01$.

Используя метод штрафных функций и метод Эрроу—Гурвица, решите задачи 3.32—3.34.

3.32. Найти максимальное значение функции

$$f = -x_1^2 - x_2^2$$

при условиях

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \le 8;$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

3.33. Найти максимальное значение функции

$$f = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3.34. Найти максимальное значение функции

$$f = -x_1^2 - x_2^2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 \ge 1, \\ x_1 + 0{,}5x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

§ 3.5. Нахождение решения задач нелинейного программирования, содержащих сепарабельные функции

Рассмотрим задачу нелинейного программирования, в которой целевая функция и функции в системе ограничений являются сепарабельными.

Определение 3.11. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *сепарабельной*, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной, то есть если

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Если целевая функция и функции в системе ограничений задачи нелинейного программирования являются сепарабельными, то приближенное решение такой задачи можно найти с использованием *метода кусочно-линейной аппроксимации*. Однако его применение в общем случае позволяет получить приближенный локальный экстремум. Поэтому рассмотрим использование данного метода для решения задачи выпуклого программирования.

Пусть требуется определить максимальное значение вогнутой функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \qquad (3.78)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.79}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{3.80}$$

Чтобы найти решение задачи (3.78)—(3.80), заменим функции $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$ кусочно-линейными функциями $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ и перейдем от задачи (3.78)—(3.80) к задаче, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j) \tag{3.81}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) \le b_i \ (i = \overline{1, m}), \tag{3.82}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{3.83}$$

В задаче (3.81)—(3.83) пока не определен вид функций. Чтобы сделать это, будем считать, что переменная x_j может принимать значения из промежутка $[0, \alpha_j]$ (α_j — максимальное значение переменной x_j). Разобьем промежуток $[0, \alpha_j]$ на r_j промежутков с помощью $r_j + 1$ точек так, что $x_{0j} = 0$, $x_{r_j j} = \alpha_j$. Тогда функции $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ можно записать в виде

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj}; \quad \hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij}, \tag{3.84}$$

где

$$\begin{gathered} f_{kj} = f_j(x_k);\ g_{kij} = g_{ij}(x_k)\ (i = \overline{1, m}); \\ x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj},\ \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1,\ \lambda_{kj} \ge 0 \end{gathered} \tag{3.85}$$

для всех k и j, причем для данного x_j не более двух чисел λ_{kj} могут быть положительными и должны быть соседними.

Подставляя теперь в равенства (3.81) и (3.82) выражения функций $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ в соответствии с формулами (3.84), приходим к следующей задаче: найти максимальное значение функции

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj} \lambda_{kj} \tag{3.86}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij} \lambda_{kj} \le b_i \ (i = \overline{1, m}); \tag{3.87}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1 \ (j = \overline{1, n}); \tag{3.88}$$

$$\lambda_{kj} \geq 0 \text{ для всех } k \text{ и } j. \tag{3.89}$$

Полученная задача отличается от обычной задачи линейного программирования тем, что наложено дополнительное ограничение на переменную λ_{kj}, состоящее в том, чтобы для каждого j не более двух λ_{kj} были положительными и эти положительные λ_{kj} были соседними. Выполнение данных условий может быть соблюдено при решении задачи (3.86)—(3.89) симплексным методом за счет соответствующего выбора базиса, определяющего как каждый опорный, так и оптимальный план задачи. При этом в общем случае точность полученного решения зависит от принятого шага разбиения промежутка $[0, \alpha_j]$: чем меньше шаг, тем точнее полученное решение.

Таким образом, процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования методом кусочно-линейной аппроксимации включает четыре этапа.

1°. Каждую из сепарабельных функций заменяют кусочно-линейной функцией.

2°. Строят задачу линейного программирования (3.86)—(3.89).

3°. С помощью симплексного метода находят решение задачи (3.86)—(3.89).

4°. Определяют оптимальный план задачи (3.78)—(3.80) и находят значение целевой функции при этом плане.

3.35. Используя метод кусочно-линейной аппроксимации, найти максимальное значение функции

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение. В данном случае целевую функцию F можно представить как сумму двух функций $f_1(x_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 9$ и $f_2(x_2) = x_2$, каждая из которых есть функция одной переменной. Следовательно, функция F является сепарабельной. Кроме того, она является вогнутой (как сумма двух вогнутых функций), а область допустимых решений — выпуклой. Значит, исполь-

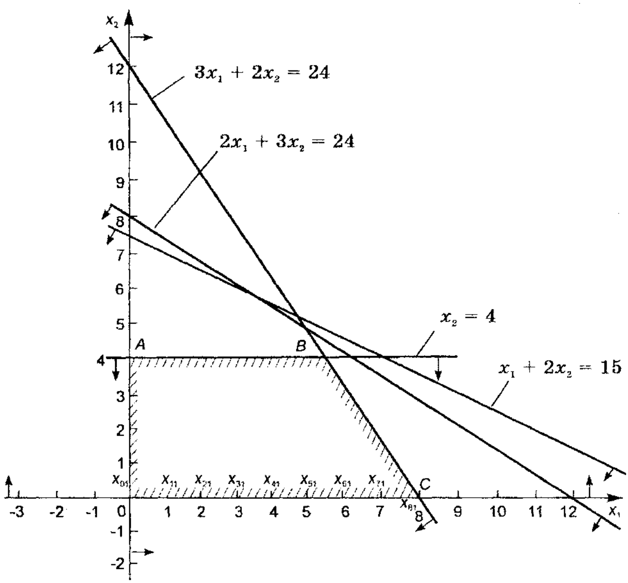


Рис. 3.10

зуя метод кусочно-линейной аппроксимации, можно найти приближенно глобальный максимум целевой функции.

Здесь нелинейной функцией является только целевая функция. Значит, кусочно-линейной функцией следует заменить только ее. При этом так как функция $f_2(x_2)$ линейная, то аппроксимировать будем функцию $f_1(x_1)$.

На рис. 3.10, где построена область допустимых решений задачи, видно, что переменная x_1 может принимать значения в промежутке [0, 8]. Разобьем этот промежуток на восемь частей точками $x_{01} = 0$, $x_{11} = 1$, $x_{21} = 2$, $x_{31} = 3$, $x_{41} = 4$, $x_{51} = 5$, $x_{61} = 6$, $x_{71} = 7$, $x_{81} = 8$. Вычислим теперь значения функции $f_1(x_1)$ в этих точках (табл. 3.3).

Таблица 3.3

x_{k1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_{k1})$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16	−25

Используя формулы (3.84) и (3.85), находим

$$\hat{f}_1(x_1) = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81};$$

$$x_1 = 0 \cdot \lambda_{01} + 1 \cdot \lambda_{11} + 2 \cdot \lambda_{21} + 3 \cdot \lambda_{31} + 4 \cdot \lambda_{41} + 5 \cdot \lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7 \cdot \lambda_{71} + 8 \cdot \lambda_{81}.$$

Подставляя найденные выражения $\hat{f}_1(x_1)$ и x_1 в исходные данные, получим:

$$\hat{F} = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + 6\lambda_{31} + 8\lambda_{41} + 10\lambda_{51} + 12\lambda_{61} + 14\lambda_{71} + 16\lambda_{81} + 3x_2 + x_3 = 24, \\ \lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81} + 2x_2 + x_4 = 15, \\ 3\lambda_{11} + 6\lambda_{21} + 9\lambda_{31} + 12\lambda_{41} + 15\lambda_{51} + 18\lambda_{61} + 21\lambda_{71} + 24\lambda_{81} + 2x_2 + x_5 = 24, \\ x_2 + x_6 = 4,\ \lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1, \end{cases}$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0;\ \lambda_k \geq 0\ (k = \overline{0, 8}).$$

Для полученной задачи пять векторов P_{01}, P_3, P_4, P_5 и P_6 являются единичными. Значит, ее решение может быть найдено симплексным методом. Определяем его с помощью табл. 3.4.

Таблица 3.4

i	Базис	$C_б$	P_0	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16	−25	1	0	0	0	0
				P_{01}	P_{11}	P_{21}	P_{31}	P_{41}	P_{51}	P_{61}	P_{71}	P_{81}	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	24	0	2	4	6	8	10	12	14	16	3	1	0	0	0
2	P_4	0	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	2	0	1	0	0
3	P_5	0	24	0	3	6	9	12	15	18	21	24	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{01}	−9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			−9	0	−5	−8	−9	−8	−5	0	7	16	−1	0	0	0	0
1	P_3	0	18	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10	3	−1	0	0	0
2	P_4	0	12	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	2	0	1	0	0
3	P_5	0	15	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			0	9	4	1	0	1	4	9	2	25	−1	0	0	0	0
1	P_3	0	6	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10	0	1	0	0	−3
2	P_4	0	4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	0	0	1	0	−2
3	P_5	0	7	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15	0	0	0	1	−2
4	P_2	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			4	9	4	1	0	1	4	9	2	25	0	0	0	0	1

По найденным в табл. 3.4 значениям λ_{k1} находим $x_1^* = 3$. Далее, из таблицы видим, что $x_2^* = 4$. Значит, $X^* = (3, 4)$ является приближенным оптимальным решением, которое случайно совпадает с точным решением. При данном решении $F_{\max} = 4$.

§ 3.6. Использование пакета Solver для решения задачи нелинейного программирования

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования с использованием пакета Solver включает в себя те же основные этапы, что и процесс нахождения решения задачи линейного программирования. Однако при решении задач нелинейного программирования иногда приходится уточнять характеристики пакета Solver, так же, как и максимальное время поиска решения (MaxTime), количество итераций (Iterations), точность выполнения ограничений (Precision), сходимость и допуск в расчетах целевых функций (соответственно Convergence и Tolerance).

Чтобы получить доступ к вышеупомянутым характеристикам, необходимо, находясь в диалоговом окне пакета Solver (рис. 3.11), выполнить мышью щелчок на клавише Options.

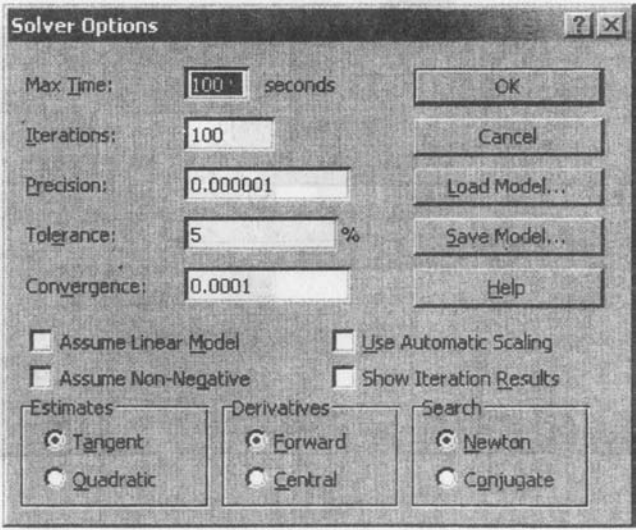


Рис. 3.11

Используя пакет Solver, найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = x_1 - x_1^2 + x_2$$

при условиях

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + 3x_2^2 \leq 3, \ x_1, x_2 \geq 0.$$

Решение. Подготовка задачи на рабочем листе электронной таблицы изображена на рис. 3.12.

Подбираемые значения	
1	1

Функция ограничения	
= A2 ^ 2 + 2*A2 + 3*B2 ^ 2	3

Целевая функция	
= A2 − A2 ^ 2 + B2	3

Рис. 3.12

Подготовка данных для пакета Solver отражена на рис. 3.13.

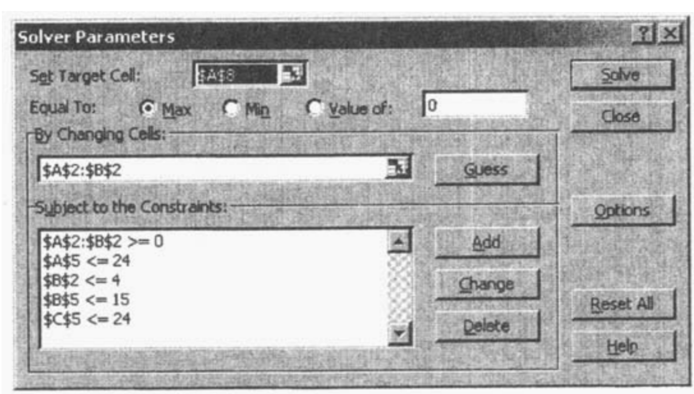


Рис. 3.13

Результат выполнения решения представлен на рис. 3.14.

Подбираемые значения	
0.26	0.89

Функция ограничения	
3.00	3

Целевая функция
1.09

Рис. 3.14

Из рабочего листа видно, что $x_1 = 0,26$, $x_2 = 0,89$ является приближенным решением исходной задачи. При данном решении $F_{max} = 1,09$.

Решим задачу 3.35 с использованием пакета Solver. Подготовка задачи на рабочем листе электронной таблицы имеет вид, изображенный на рис. 3.15.

Подбираемые значения	
1	1

Функция ограничения		
=2*A2 + 3*B2	=A2 + 2*B2	=3*A2 + 2*B2

Целевая функция
=B2 − A2^2 + 6*A2 − 9

Рис. 3.15

Подготовка данных для пакета Solver отражена на рис. 3.16.

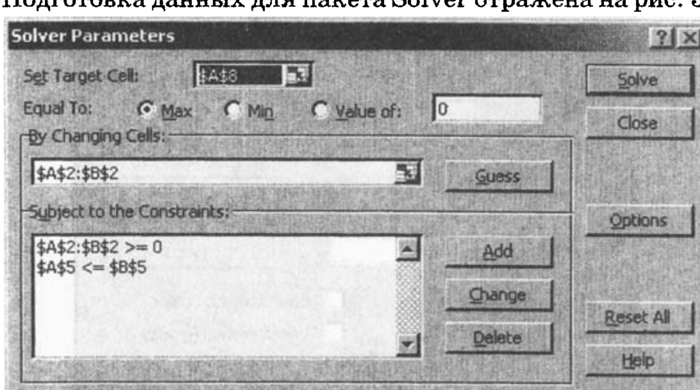


Рис. 3.16

Результат выполнения решения представлен на рис. 3.17.

Подбираемые значения	
3.00	4.00

Функция ограничения		
18.00	10.99999998	17

Целевая функция
4.00

Рис. 3.17

В данном случае, как и в случае решения задачи методом кусочно-линейной аппроксимации, мы получаем те же значения $X^* = (3, 4)$ при максимальном значении $F_{max} = 4$.

Глава 4

ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 4.1. Общая характеристика задач динамического программирования и их геометрическая и экономическая интерпретации

В рассмотренных выше задачах линейного и нелинейного программирования мы находили их решение как бы в один этап или за один шаг. Такие задачи получили название *одноэтапных*, или *одношаговых*.

В отличие от них задачи динамического программирования являются *многоэтапными*, или *многошаговыми*. Иными словами, нахождение решения конкретных задач методами динамического программирования включает несколько этапов (шагов), на каждом из которых определяется решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной. Поэтому термин «динамическое программирование» не столько определяет особый тип задач, сколько характеризует методы нахождения решения отдельных классов задач математического программирования, которые могут относиться к задачам как линейного, так и нелинейного программирования. Несмотря на это, целесообразно дать общую постановку задачи динамического программирования и определить единый подход к ее решению.

Предположим, что данная физическая система S находится в некотором начальном состоянии $S_0 \in \overline{S}_0$ и является управляемой. Таким образом, благодаря осуществлению некоторого управления U указанная система переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние $S_{\text{кон}} \in \overline{S}_R$. При этом качество каждого из реализуемых управлений U характеризуется соответствующим значением функции $W(U)$. Задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений U найти такое U^*, при котором функция $W(U)$ принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение $W(U^*)$. Сформулированная задача и является *общей задачей динамического программирования*.

Дадим геометрическую интерпретацию этой задачи. Предположим, что состояние системы характеризуется некоторой точкой S на плоскости x_1Ox_2 (рис. 4.1) и эта точка благодаря осуществляемому управлению ее движением перемещается вдоль линии, изображенной на рис. 4.1, из области возможных начальных состояний $\overline{S}_0$ в область допустимых конечных состояний $\overline{S}_R$.

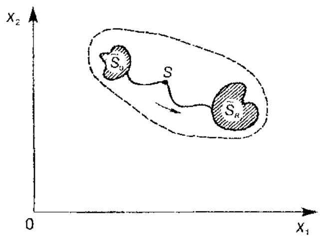


Рис. 4.1

Каждому управлению U движением точки, то есть каждой траектории движения точки, поставим в соответствие значение некоторой функции $W(U)$ (например, длину пути, пройденного точкой под воздействием данного управления). Тогда задача состоит в том, чтобы из всех допустимых траекторий движения точки S найти такую, которая получается в результате реализации управления U^*, обеспечивающего экстремальное значение функции $W(U^*)$. К определению такой «траектории» сводится и задача динамического программирования в случае, когда допустимые состояния системы S определяются точками n-мерного пространства.

Экономическую интерпретацию общей задачи динамического программирования рассмотрим на конкретных примерах.

4.1. В распоряжение министерства, в подчинении которого находится k предприятий, выделены средства в размере K у.е. для использования их на развитие предприятий в течение m лет. Эти средства в начале каждого хозяйственного года (то есть в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_m$) распределяются между предприятиями. Одновременно с этим между предприятиями распределяется полученная ими за прошедший год прибыль. Таким образом, в начале каждого i-го года рассматриваемого периода j-е предприятие получает в свое распоряжение $x_i^{(j)}$ у.е.

Определить такие значения $x_i^{(j)}$, то есть найти такие распределения выделенных средств и получаемой прибыли между предприятиями, при которых за m лет обеспечивается получение максимальной прибыли всеми предприятиями. Сформулировать поставленную задачу в терминах общей задачи динамического программирования.

Р е ш е н и е. Предполагая, что j-му предприятию на i-й год выделяется $x_i^{(j)}$ у.е., будем рассматривать данное распределение средств как реализацию некоторого управления u_i. Таким образом, управление u_i состоит в том, что на i-м шаге первому предприятию выделяется $x_i^{(1)}$ у.е., второму — $x_i^{(2)}$ у.е. и т.д. Совокупность чисел $x_i^{(1)}$, $x^{(2)}{}_i$, ..., $x_i^{(k)}$ определяет всю совокупность управлений u_1, u_2, ..., u_m на m шагах распределения средств как m точек в k-мерном пространстве.

Критерием оценки качества выбранного распределения средств, то есть реализуемых управлений, взята суммарная прибыль за m лет, которая зависит от всей совокупности управлений: $W = W(u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Следовательно, задача состоит в выборе таких управлений u_i^* (то есть в таком распределении средств) при которых функция W принимает максимальное значение.

Как видно, сформулированная задача является многоэтапной. Эта многоэтапность диктуется ее условиями, предусматривающими принятие определенных решений в начале каждого года рассматриваемого периода. Вместе с тем, в целом ряде других задач динамического программирования многоэтапность непосредственно не следует из условий. Однако такие задачи целесообразно рассматривать как многоэтапные. Приведем пример и дадим формулировку задачи в терминах общей задачи динамического программирования.

4.2. Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготовляемой предприятиями, выделены капиталовложения в объеме S у.е. Использование i-м предприятием x_i у.е. из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемый значением нелинейной функции $f_i(x_i)$.

Найти распределение капиталовложений между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение выпуска продукции.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в определении наибольшего значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1) \qquad (4.1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \qquad (4.2)$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}). \qquad (4.3)$$

Сформулированная задача является задачей нелинейного программирования. В том случае, когда $f_i(x_i)$ — выпуклые (или вогнутые) функции, ее решение можно найти, например, методом множителей Лагранжа. Если же функции $f_i(x_i)$ не являются таковыми, то известные методы нахождения решения задач нелинейного программирования не позволяют определить глобальный максимум функции (4.1). Тогда решение задачи (4.1)—(4.3) можно найти с помощью динамического программирования. Для этого исходную задачу нужно рассмотреть как многоэтапную (многошаговую). Вместо того чтобы рассматривать допустимые варианты распределения капиталовложений между n предприятиями и оценивать их эффективность, будем исследовать эффективность вложения средств на одном предприятии, на двух предприятиях и т.д., наконец, на n предприятиях. Таким образом, получим n этапов, на каждом из которых состояние системы (в качестве которой выступают предприятия) описывается объемом средств, подлежащих освоению k предприятиями ($k = \overline{1, n}$). Решения об объемах капиталовложений, выделяемых k-му предприятию ($k = \overline{1, n}$), и являются управлениями. Задача состоит в выборе таких управлений, при которых функция (4.1) принимает наибольшее значение.

Сформулируйте задачи 4.3—4.8 в терминах общей задачи динамического программирования.

4.3. В состав производственного объединения входят два предприятия, связанные между собой кооперированными поставками. Вкладывая дополнительные средства в целях развития этих предприятий, можно улучшить технико-экономические показатели деятельности производственного объединения в целом, обеспечив тем самым получение дополнительной прибыли. Величина этой прибыли зависит от того, сколько выделяется средств каждому предприятию и как эти средства используются.

Считая, что на развитие i-го предприятия в начале k-го года выделяется $\alpha_i^{(k)}$ у.е., найти такой вариант распределения средств между предприятиями в течение n лет, при котором обеспечивается получение за данный период времени максимальной прибыли.

4.4. В производственном объединении в начале каждого года полностью распределяется между входящими в его состав m предприятиями централизованный фонд развития производства. При этом благодаря выделению из этого фонда i-му предприятию x_i у.е. обеспечивается получение дополнительной прибыли, равной $f_i(x_i)$ у.е. К началу планового периода, состоящего из n лет, в централизованном фонде развития производства было A у.е. В каждый последующий год этот фонд формируется за счет отчислений в него от полученной прибыли. Эти отчисления для i-го предприятия составляют $\varphi_i(x_i)$ у.е.

Найти такой вариант распределения централизованного фонда развития производства между предприятиями объединения, при котором общая прибыль, получаемая за n лет, являлась бы максимальной.

4.5. Для осуществления эффективной деятельности производственные объединения и предприятия должны периодически проводить замену своего оборудования. При этом учитываются производительность используемого оборудования (то есть объем выпуска на нем продукции в течение единицы времени), затраты, связанные с содержанием и ремонтом оборудования, стоимость приобретаемого и заменяемого оборудования. Предположим, что к началу планируемого периода на предприятии установлено новое оборудование, позволяющее за τ-й год выпустить готовой продукции на сумму $R(\tau)$ у.е., а ежегодные затраты, связанные с содержанием и ремонтом оборудования, равны $Z(\tau)$ у.е. В τ-й год оборудование может быть продано за $S(\tau)$ у.е. и куплено новое за P_τ у.е.

С учетом всех этих факторов найти оптимальный план замены оборудования, то есть план, обеспечивающий максимальную прибыль от замены оборудования в течение n лет.

4.6. Детали n видов могут обрабатываться на двух станках. Время обработки i-й детали ($i = \overline{1, n}$) на первом станке равно a_i мин, а время обработки той же детали на втором станке равно b_i мин. Очередность обработки деталей одна и та же: сначала деталь обрабатывается на первом станке, а затем на втором.

Выбрать такую последовательность обработки деталей, при которой время изготовления всех деталей являлось бы минимальным.

4.7. На склад вместимостью W м^3 требуется поместить n различных типов оборудования. Объем одной единицы i-го типа оборудования ($i = \overline{1, n}$) равен V_i м^3, а цена единицы данного типа оборудования равна C_i у.е.

Определить, сколько оборудования каждого типа следует поместить на склад, чтобы при этом общая стоимость складированного оборудования была максимальной.

4.8. Производственные объединения (предприятия), выпускающие товары народного потребления, изготовляют их отдельными партиями. Чем больше размер этих партий, тем это выгоднее производственным объединениям. Поэтому каждое объединение заинтересовано в отдельные месяцы выпускать больше изделий, чем это нужно для удовлетворения спроса, а излишки хранить на складе для их реализации в последующие месяцы. Однако хранение изделий на складе сопряжено с соответствующими затратами.

Будем считать, что предприятие стремится найти оптимальный план производства продукции в течение n месяцев, в каждом из которых необходимо a_i $(i = \overline{1, n})$ единиц продукции. Запасы к началу планируемого периода равны b изделиям, а в каждом из планируемых месяцев предприятие может изготовить не более чем d_i единиц продукции. Одновременно на складе может храниться не более чем A изделий. Затраты, связанные с производством a_j $(j = \overline{1, k})$ изделий, составляют c_j у.е., а затраты, обусловленные хранением в течение месяца одного изделия, составляют β у.е.

Определить такой план выпуска продукции, при котором общая сумма затрат на ее производство и хранение была бы минимальной, а спрос на необходимые изделия был бы удовлетворен своевременно и полностью.

§ 4.2. Нахождение решения задач методом динамического программирования

В предыдущем параграфе была дана постановка задачи динамического программирования и приведены ее геометрическая и экономическая интерпретации. Рассмотрим теперь в общем виде решение этой задачи. Для начала введем некоторые обозначения и сделаем необходимые для дальнейшего изложения предположения.

Будем считать, что состояние рассматриваемой системы S на k-м шаге $(k = \overline{1, n})$ определяется совокупностью чисел $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, которые получены в результате реализации управления u_k, обеспечившего переход системы S из состояния $X^{(k-1)}$ в состояние $X^{(k)}$. При этом предположим, что состояние $X^{(k)}$, в которое перешла система S, зависит от данного состояния $X^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k и не зависит от того, каким образом система S пришла в состояние $X^{(k-1)}$.

Условимся, что в результате реализации k-го шага обеспечен определенный доход или выигрыш, также зависящий от исходного состояния системы $X^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k, равный $W_k(X^{(k-1)}, u_k)$, и общий доход или выигрыш за n шагов составляет

$$F = \sum_{k=1}^{n} W_k(X^{(k-1)}, u_k). \qquad (4.4)$$

Иными словами, мы сформулировали два условия, которым должна удовлетворять рассматриваемая задача динамического программирования. Первое условие обычно называют *условием отсутствия последействия*, а второе — *условием аддитивности целевой функции задачи.*

Выполнение первого условия позволяет сформулировать для задачи принцип оптимальности Беллмана, но вначале дадим определение оптимальной стратегии управления.

Определение 4.1. Под *оптимальной стратегией управления* понимается совокупность управлений $U^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$, в результате реализации которых система S за n шагов переходит из начального состояния $X^{(0)}$ в конечное $X^{(n)}$ и при этом функция (4.4) принимает наибольшее значение.

Теорема 4.1. *Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.*

Отсюда следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-м шаге, затем на двух последних шагах, затем на трех последних шагах и т.д., вплоть до первого шага.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи динамического программирования целесообразно начинать с определения оптимального решения на последнем, n-м шаге. Для того чтобы найти это решение, очевидно, нужно сделать различные предположения о том, как мог окончиться предпоследний шаг, и с учетом этого выбрать управление u_n^0, обеспечивающее максимальное значение функции $W_n(X^{(n-1)}, u_n)$. Такое управление u^0_n, выбранное при определенных предположениях о том, как окончился предыдущий шаг, называется *условно оптимальным управлением*. Следовательно, принцип оптимальности требует находить на каждом шаге условно оптимальное управление для любого из возможных исходов предшествующего шага.

Чтобы это можно было осуществить практически, необходимо дать математическую формулировку принципа оптимальности. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $F_n(X^{(0)})$ максимальный доход, получаемый за n шагов при переходе системы S из начального состояния $X^{(0)}$ в конечное состояние $X^{(n)}$ при реализации оптимальной стратегии управления $U^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$, а через $F_{n-k}(X^{(k)})$ — максимальный доход, получаемый при переходе из любого состояния $X^{(k)}$ в конечное состояние $X^{(n)}$ при оптимальной стратегии управления на оставшихся $n—k$ шагах. Тогда

$$F_n(X^{(0)}) = \max_{u_{k+1}}\left[W_1(X^{(0)}, u_1) + \ldots + W_n(X^{(n-1)}, u_n)\right]; \tag{4.5}$$

$$F_{n-k}(X^{(k)}) = \max_{u_{k+1}}\left[W_{k+1}(X^{(k)}, u_{k+1}) + \ldots + F_{n-k-1}(X^{(k+1)})\right] \tag{4.6}$$

$$(k = \overline{0, n-1}).$$

Последнее выражение представляет собой математическую запись принципа оптимальности и носит название *основного функционального уравнения Беллмана*, или *рекуррентного соотношения*. Используя данное уравнение, находим решение рассматриваемой задачи динамического программирования. Остановимся на этом более подробно.

Полагая $k = n - 1$ в рекуррентном соотношении (4.6), получаем функциональное уравнение

$$F_1(X^{(n-1)}) = \max_{u_n}\left[W_n(X^{(n-1)}, u_n) + \ldots + F_0(X^{(n)})\right]. \tag{4.7}$$

В этом уравнении $F_0(X^{(n)})$ будем считать известным. Используя теперь уравнение (4.7) и рассматривая всевозможные допустимые состояния системы S на $(n - 1)$-м шаге $X_1^{(n-1)}, X_2^{(n-1)}, \ldots, X_m^{(n-1)}$, находим условные оптимальные решения

$$u_n^0(x_1^{(n-1)}), u_n^0(x_2^{(n-1)}), \ldots, u_n^0(x_m^{(n-1)}), \ldots$$

и соответствующие значения функции (4.7)

$$F_1^0(X_1^{(n-1)}), F_1^0(X_2^{(n-1)}), \ldots, F_1^0(X_m^{(n-1)}), \ldots .$$

Таким образом, на n-м шаге находим условно оптимальное управление при любом допустимом состоянии системы S после $(n - 1)$-го шага. Иными словами, в каком бы состоянии система ни оказалась после $(n - 1)$-го шага, нам уже известно, какое следует принять решение на n-м шаге. Известно также и соответствующее значение функции (4.7).

Переходим теперь к рассмотрению функционального уравнения при $k = n - 2$:

$$F_2(X^{(n-2)}) = \max_{u_{n-1}}\left[W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1}) + F_1(X^{(n-1)})\right]. \tag{4.8}$$

Для того чтобы найти значения F_2 для всех допустимых значений $X^{(n-2)}$, очевидно, необходимо знать $W_{n-1}(X^{(m-2)}, u_{n-1})$ и

$F_1(X^{(n-1)})$. Что касается значений $F_1(X^{(n-1)})$, то мы их уже определили. Поэтому нужно произвести вычисления для $W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1})$ при некотором наборе допустимых значений $X^{(n-2)}$ и соответствующих управлений u_{n-1}. Эти вычисления позволят определить условно оптимальное управление u_{n-1}^0 для каждого $X^{(n-2)}$. Любое из таких управлений совместно с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивает максимальное значение дохода на двух последних шагах.

Последовательно осуществляя описанный выше итерационный процесс, дойдем, наконец, до первого шага. Нам известно, в каком состоянии может находиться система, поэтому не требуется строить предположений о ее допустимых состояниях. Остается лишь выбрать управление с учетом условно оптимальных управлений, уже принятых на последующих шагах.

Таким образом, в результате последовательного прохождения всех этапов от конца к началу мы определяем максимальное значение выигрыша за n шагов и для каждого из них находим условно оптимальное управление.

Чтобы найти оптимальную стратегию управления, то есть определить искомое решение задачи, нужно пройти всю последовательность шагов, только на этот раз от начала к концу. А именно: на первом шаге в качестве оптимального управления u_1^* возьмем найденное условно оптимальное управление u_1^0. На втором шаге найдем состояние X_1^*, в которое переводит систему управление u_1^*. Это состояние определяет найденное условно оптимальное управление u_2^0, которое теперь будем считать оптимальным. Зная u_2^*, находим X_2^*, а значит, и u_3^* и т.д. В результате находим решение задачи, то есть опрелеляем максимально возможный доход и оптимальную стратегию управления U^*, включающую оптимальные управления на отдельных шагах: $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$.

Итак, мы рассмотрели в общем виде нахождение решения задачи динамического программирования. Очевидно, что этот процесс довольно громоздкий. Ниже рассмотрим нахождение решения самых простых задач, допускающих постановку в терминах общей задачи динамического программирования. Вместе с тем, использование ЭВМ позволяет находить на основе вышеописанного подхода решения и более сложных практических задач.

4.9. В определенный момент времени на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в табл. 4.1.

Зная, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного установленному рядом, составляют 40 у.е., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение 5 лет, при котором общая прибыль за данный период времени была бы максимальна.

Таблица 4.1

	Время τ, в течение которого используется оборудование (лет)					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $R(\tau)$ в стоимостном выражении (у.е.)	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты $Z(\tau)$, связанные с содержанием и ремонтом оборудования (у.е.)	20	25	30	35	45	55

Решение. Эту задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает оборудование. Состояния этой системы определяются фактическим временем использования оборудования (его возрастом) τ, то есть описываются единственным параметром τ. В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования, принимаемые в начале каждого года. Обозначим через u_1 решение о сохранении оборудования, а через u_2 — решение о замене оборудования. Тогда задача будет заключаться в нахождении такой стратегии управления, определяемой решениями, принимаемыми к началу каждого года, при которой общая прибыль предприятия за пятилетку максимальна.

Таким образом, мы сформулировали исходную задачу в терминах задачи динамического программирования. Она характеризуется свойствами аддитивности и отсутствием последействия. Следовательно, ее решение можно найти с помощью описанного выше алгоритма решения задачи динамического программирования, реализуемого в два этапа. На первом этапе при движении от начала пятого года к началу первого года для каждого допустимого состояния оборудования найдем условное оптимальное управление (решение), а на втором этапе при движении от начала первого года к началу пятого года из условных оптимальных решений для каждого года подберем оптимальный план замены оборудования.

Для определения условных оптимальных решений сначала необходимо составить функциональное уравнение Беллмана.

Так как мы предположили, что к началу k-го года ($k = \overline{1, 5}$) может приниматься только одно из двух решений — заменять или не заменять оборудование, — то прибыль предприятия за k-й год составит

$$F_k(\tau^{(k)}, u_k) = \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) & \text{при } u_1, \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n & \text{при } u_2, \end{cases}$$

где $\tau^{(k)}$ — возраст оборудования к началу k-го года ($k = \overline{1, 5}$); u_k — управление, реализуемое к началу k-го года; C_n — стоимость нового оборудования.

Таким образом, в данном случае уравнение Беллмана имеет вид

$$F_k(\tau^{(k)}) = \max_{\tau} \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)}), \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n + F_{n+1}(\tau^{(k)} = 1). \end{cases} \tag{4.9}$$

Используя теперь уравнение (4.9), приступаем к нахождению решения исходной задачи. Начинаем с определения условно оптимального управления (решения) для последнего (пятого) года, в связи с чем находим множество допустимых состояний оборудования к началу данного года. Так как в начальный момент имеется новое оборудование ($\tau^{(1)} = 0$), то возраст оборудования к началу пятого года может составлять 1, 2, 3 и 4 года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы: $\tau_1^{(5)} = 1$; $\tau_2^{(5)} = 2$; $\tau_3^{(5)} = 3$; $\tau_4^{(5)} = 4$. Для каждого из этих состояний найдем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_5(\tau^{(5)})$. Используя уравнение (4.9) и соотношение $F_6(\tau^{(k+1)}) = 0$ (так как рассматривается последний год расчетного периода), получаем

$$F_5(\tau^{(5)}) = \max \begin{cases} R(\tau^{(5)}) - Z(\tau^{(5)}), \\ R(\tau^{(5)} = 0) - Z(\tau^{(5)} = 0) - C_n. \end{cases} \tag{4.10}$$

Подставляя теперь в формулу (4.10) вместо $\tau^{(5)}$ его значение, равное 1, и учитывая данные табл. 4.1, находим

$$F_5(\tau_1^{(5)}) = \max \begin{cases} R(\tau^{(5)} = 1) - Z(\tau^{(5)} = 1) \\ R(\tau^{(5)} = 0) - Z(\tau^{(5)} = 0) - C_n \end{cases} = \max \begin{Bmatrix} 75 - 25 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 50,\ u^0 = u_1.$$

Значит, условно оптимальное решение в данном случае есть u_1.

Проведем аналогичные вычисления для других допустимых состояний оборудования к началу пятого года:

$$F_5(\tau_2^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 35,\ u^0 = u_1;$$

$$F_5(\tau_3^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 25,\ u^0 = u_1;$$

$$F_5(\tau_4^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 60 - 45 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 20,\ u^0 = u_2.$$

Полученные результаты вычислений сводим в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Возраст оборудования τ_5 (лет)	Значения функции $F_5(\tau^{(5)})$ (у.е.)	Условно оптимальное решение (u^0)
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу четвертого года. Очевидно, допустимыми состояниями являются $\tau_1^{(4)} = 1$, $\tau_2^{(4)} = 2$ и $\tau_3^{(4)} = 3$. Для каждого из них определяем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_4(\tau^{(4)})$. Для этого используем уравнение (4.9) и данные табл. 4.1 и 4.2. Так, в частности, для $\tau_1^{(4)} = 1$ имеем

$$F_5(\tau_1^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(4)} = 1) - Z(\tau^{(4)} = 1) + F_5(\tau^{(5)} = 2) \\ R(\tau^{(4)} = 0) - Z(\tau^{(4)} = 0) - C_n + F_5(\tau^{(5)} = 1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 85,\ u^0 = u_1.$$

Аналогично находим

$$F_4(\tau_2^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70,\ u^0 = u_2;$$

$$F_4(\tau_3^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70,\ u^0 = u_2.$$

Полученные результаты вычислений записываем в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Возраст оборудования $\tau^{(4)}$ (лет)	Значения функции $F_4(\tau^{(4)})$ (у.е.)	Условно оптимальное решение (u^0)
1	85	u_1
2	70	u_2
3	70	u_2

Определим теперь условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу третьего года. Очевидно, такими состояниями являются $\tau_1^{(3)} = 1$, $\tau_2^{(3)} = 2$. В соответствии с уравнением (4.9) имеем

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(3)} = 1) - Z(\tau^{(3)} = 1) + F_4(\tau^{(4)} = 2) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{Bmatrix};$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(3)} = 2) - Z(\tau^{(3)} = 2) + F_4(\tau^{(4)} = 3) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{Bmatrix}.$$

Используя данные табл. 4.1 и 4.3, получаем

$$F_3(\tau_4^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 120,\ u^0 = u_1;$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 105,\ u^0 = u_2.$$

Из последнего выражения видно, что если к началу третьего года возраст оборудования составляет 2 года, то, независимо от того, будет ли принято решение u_1 или u_2, величина прибыли окажется одной и той же. Это означает, что в качестве условно оптимального решения можно взять любое, например u_2. Полученные значения для $F_3(\tau^{(3)})$ и соответствующие условно оптимальные решения записываем в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Возраст оборудования $\tau^{(3)}$ (лет)	Значения функции $F_3(\tau^{(3)})$ (у.е.)	Условно оптимальное решение (u^0)
1	120	u_1
2	105	u_2

Наконец рассмотрим допустимые состояния оборудования к началу второго года. Очевидно, что на данный момент времени возраст оборудования может быть равен одному году, поэтому предстоит сравнить только два возможных решения: сохранить оборудование или произвести замену. Анализ такого сравнения характеризуется данными табл. 4.5.

Таблица 4.5

Возраст оборудования $\tau^{(2)}$ (лет)	Значения функции $F_2(\tau^{(2)})$ (у.е.)	Условно оптимальное решение (u^0)
1	120	u_1

Согласно условию в начальный момент установлено новое оборудование ($\tau_1^{(1)} = 0$), поэтому проблемы выбора между сохранением и заменой оборудования не существует: оборудование следует сохранить. Значит, условно оптимальным решением является u_1, а значение функции

$$F_1(\tau_1^{(1)}) = R(\tau_2^{(1)} = 0) - Z(\tau_1^{(1)} = 0) + F_2(\tau^{(1)} = 1) = 80 - 20 + 155 = 215.$$

Таким образом, максимальная прибыль предприятия может быть равной 215 у.е. Она соответствует оптимальному плану замены оборудования, который получается на основе данных табл. 4.2—4.5, то есть в результате реализации второго этапа вычислительного процесса, состоящего в прохождении всех рассмотренных шагов с начала первого до начала пятого года.

Для первого года решение безальтернативно: следует сохранить оборудование. Значит, возраст оборудования к началу второго года равен 1 году. Тогда в соответствии с данными табл. 4.5 оптимальным решением для второго года является решение о сохранении оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу третьего года становится равным 2 годам. При таком возрасте (см. табл. 4.4) оборудование в третьем году следует заменить. После замены оборудования его возраст к началу четвертого года составит 1 год. Как видно из табл. 4.3, при таком возрасте его менять не следует. Поэтому возраст оборудования к началу пятого года составит 2 года, то есть менять оборудование нецелесообразно (табл. 4.2).

Итак, найден оптимальный план замены оборудования (табл. 4.6).

Таблица 4.6

Оптимальное решение	Годы пятилетки				
	1	2	3	4	5
	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование	Произвести замену оборудования	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование

4.10. Найти решение задачи 4.2, если $S = 7$ млн у.е., $n = 3$, а значения X_i, и $f_i(X_i)$ приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Объем капиталовложений X_i, (тыс. у.е.)	Прирост выпуска продукции $f_i(X_i)$ в зависимости от объема капиталовложений (тыс. у.е.)		
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Решение. Для решения данной задачи динамического программирования следует составить рекуррентное соотношение Беллмана. В рассматриваемом случае это соотношение приводит к следующим функциональным уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(X) = \max_{0 \le X_1 \le X}\{f_1(X_1)\};\\
&\varphi_2(X) = \max_{0 \le X_2 \le X}\{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\};\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
&\varphi_{n-1}(X) = \max_{0 \le X_{n-1} \le X}\{f_{n-1}(X_{n-1}) + \varphi_{n-2}(X - X_{n-1})\}.
\end{aligned} \qquad (4.11)$$

Здесь функции $\varphi_i(X)$ $(i = \overline{1, n-1})$ определяют максимальный прирост выпуска продукции при соответствующих распределениях X у.е. капиталовложений между i предприятиями. Поэтому значение функции $\varphi_n(X)$ вычисляется лишь для одного значения $X = S$, так как объем капиталовложений, выделяемых для всех n предприятий, равен S у.е.

Используя теперь рекуррентные соотношения (4.11) и исходные данные табл. 4.7, приступаем к нахождению решения задачи, то есть к определению сначала условно оптимальных, а затем и оптимальных распределений капиталовложений между предприятиями.

Начинаем с определения условно оптимальных капиталовложений, выделяемых для развития первого предприятия. Для этого находим значения $\varphi_1(X)$ для каждого X, принимающего значения 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 и 700.

Пусть $X = 0$; тогда $\varphi_1(0) = 0$. Возьмем теперь $X = 100$. Тогда, используя табл. 4.7, получаем

$$\varphi_1(100) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ \boxed{30} \end{Bmatrix} = 30,\ X_1^0 = 100.$$

Здесь первая строка соответствует решению $X_1 = 0$, а вторая строка — решению $X_1 = 100$. Так как при первом решении прирост выпуска продукции не обеспечивается, а при втором равен 30 тыс. у.е., то условно оптимальным решением является $X_1{}^0 = 100$.

Аналогично находим условно оптимальные решения для других значений X:

$$\varphi_1(200) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ \boxed{50} \end{Bmatrix} = 50,\ X_1^0 = 200;$$

$$\varphi_1(300) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ \boxed{90} \end{Bmatrix} = 90,\ X_1^0 = 300;$$

$$\varphi_1(400) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ \boxed{110} \end{Bmatrix} = 110,\ X_1^0 = 400;$$

$$\varphi_1(500) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ \boxed{170} \end{Bmatrix} = 170,\ X_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ \boxed{180} \end{Bmatrix} = 180,\ X_1^0 = 600;$$

$$\varphi_1(700) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ \boxed{210} \end{Bmatrix} = 210,\ X_1^0 = 700.$$

Результаты вычислений и полученные соответствующие условно оптимальные решения записываем в табл. 4.8.

Таблица 4.8

Объем капиталовложений X, выделяемых первому предприятию (тыс. у.е.)	Максимальный прирост $\varphi_1(X)$ выпуска продукции (тыс. у.е.)	Условно оптимальный объем капиталовложений $X_1{}^0$, выделяемых первому предприятию (тыс. у.е.)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Используя теперь данные табл. 4.7 и 4.8, определим условно оптимальные объемы капиталовложений, выделяемых второму предприятию. Найдем

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \le X_2 \le X}\{f_2(X_2) + \varphi_2(X - X_2)\}$$

для каждого из допустимых значений X, равных 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 и 700:

$$\varphi_2(0) = 0,\ X_2^0 = 0;$$

$$\varphi_2(100) = \max\begin{bmatrix} 0 + 30 \\ \boxed{50 + 0} \end{bmatrix} = 50,\ X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{bmatrix} 0 + 50 \\ \boxed{50 + 30} \\ 80 + 0 \end{bmatrix} = 80,\ X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ \boxed{80+30} \\ 90+0 \end{bmatrix} = 100,\ X_2^0 = 200;$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ \boxed{150+0} \end{bmatrix} = 150,\ X_2^0 = 400;$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ \boxed{190+0} \end{bmatrix} = 190,\ X_2^0 = 500;$$

$$\varphi_2(600) = \max\begin{bmatrix} 0+180 \\ \boxed{50+170} \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{bmatrix} = 220,\ X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(700) = \max\begin{bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ \boxed{80+170} \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{bmatrix} = 250,\ X_2^0 = 200.$$

Полученные результаты и найденные условно оптимальные объемы капиталовложений, выделяемых второму предприятию, записываем в табл. 4.9.

Таблица 4.9

Объем капиталовложений X, выделяемых двум предприятиям (тыс. у.е.)	Максимальный прирост $\varphi_2(X)$ выпуска продукции (тыс. у.е.)	Условно оптимальный объем капиталовложений X_2^0, выделяемых второму предприятию (тыс. у.е.)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходим теперь к нахождению значений

$$\varphi_3(X) = \max_{0 \le X_3 \le X} \{ f_3(X_3) + \varphi_2(X - X_3) \},$$

используя для этого соответствующие данные табл. 4.7 и 4.9. Так как в данном случае число предприятий равно 3, то проводим вычисление лишь для одного значения $X = 700$:

$$\varphi_3(700) = \max \begin{bmatrix} 0 + 250 \\ 40 + 220 \\ 50 + 190 \\ 110 + 150 \\ 120 + 110 \\ 180 + 80 \\ \boxed{220 + 50} \\ 240 + 0 \end{bmatrix} = 270,\ X_3^0 = 600.$$

Следовательно, максимальный прирост выпуска продукции составляет 270 тыс. у.е. Это имеет место тогда, когда третьему предприятию выделяется 600 тыс. у.е., а первому и второму — 100 тыс. у.е. Тогда, как видно из табл. 4.9, второму предприятию следует выделить 100 тыс. у.е.

Итак, мы получили оптимальный план распределения капиталовложений между предприятиями, согласно которому обеспечивается максимальный прирост выпуска продукции.

Используя методы динамического программирования, решите задачи 4.11—4.14.

4.11. Составить оптимальный план замены оборудования в условиях задачи 4.9 при исходных данных о производительности оборудования и ежегодных затратах на его содержание, приведенных в табл. 4.10. Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, использованное оборудование списывается, а стоимость нового оборудования равна 10 тыс. у.е.

Таблица 4.10

	Возраст оборудования τ (лет)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Годовой выпуск продукции $R(\tau)$ на оборудовании возраста τ лет (тыс. у.е.)	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Ежегодные затраты на содержание и ремонт оборудования $Z(\tau)$ (тыс. у.е.)	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

4.12. Составить оптимальный план распределения капиталовложений между четырьмя предприятиями в условиях задачи 4.2 при исходных данных относительно X_i и $f_i(X_i)$, приведенных в табл. 4.11, а также с учетом того, что $S = 100$ тыс. у.е.

Таблица 4.11

Объем капиталовложений X_i (тыс. у.е.)	Прирост выпуска продукции $f_i(X_i)$ в зависимости от объема капиталовложений (тыс. у.е.)			
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3	предприятие 4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

4.13. Найти оптимальный план загрузки склада в условиях задачи 4.7 при $W = 90$ м^3, $V_1 = 24$ м^3, $V_2 = 19$ м^3, $V_3 = 16$ м^3, $C_1 = 960$ у.е., $C_2 = 500$ у.е., $C_3 = 250$ у.е.

4.14. Найти оптимальный план производства продукции предпрятием в течение четырех месяцев в условиях задачи 4.8, если потребности в каждом из месяцев соответственно составляют 2000, 3000, 3000 и 2000 изделий, а запасы к началу планируемого периода равны 2000 изделий. Следует учитывать, что предприятие в каждом из месяцев может производить не более 4000 изделий. Одновременно оно может хранить также не более 4000 изделий. Затраты, связанные с производством 1000, 2000, 3000 и 4000 изделий, составляют соответственно 13, 15, 17 и 19 у.е., а затраты, обусловленные хранением 1000 изделий, равны 1 у.е.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.32. $F_{\max} = 14$ при $x_1^* = 14$, $x_2^* = 0$. **1.33.** $F_{\max} = 12$ при $x_1^* = 4{,}8$, $x_2^* = 3{,}6$. **1.34.** $F_{\min} = -11$ при $x_1^* = 10$, $x_2^* = 9$. **1.35.** $F_{\max} = 22$ при $X^* = (2, 6, 33, 0, 0)$. **1.36.** $F_{\max} = -20/3$ при $X^* = (4/3, 0, 0, 1/3, 13/3)$. **1.37.** $F_{\max} = 1940$ при $x_1^* = 102$, $x_2^* = 166$. **1.38.** $F_{\max} = 276$ при $x_1^* = 12$, $x_2^* = 6$. **1.39.** $F_{\min} = 100$ при $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$. **1.40.** $F_{\max} = 1056$ при $x_1^* = 57$, $x_2^* = 12$. **1.49.** $F_{\max} = 66$ при $X^* = (18, 0, 6, 66, 0, 0)$. **1.50.** $F_{\max} = 282/11$ при $X^* = (6/11, 90/11, 0, 0, 254/11, 0)$. **1.51.** $F_{\max} = 39$ при $X^* = (23, 4, 0, 1, 0, 0)$. **1.52.** $F_{\max} = 14$ при $x_1^* = 14$, $x_2^* = 0$. $F_{\max} = 226/11$ при $X^* = (10/11, 72/11, 0, 0, 0, 456/11)$. **1.53.** $F_{\max} = 28$ при $X^* = (0, 76, 0, 66, 14, 0)$. **1.54.** $F_{\max} = 7{,}2$ при $X^* = (14/5, 12/5, 2/5)$. **1.55.** $F_{\max} = 159$ при $X^* = (0, 0, 6, 28, 3)$. **1.56.** $F_{\max} = 3920$ при $X^* = (0, 0, 0, 80, 0, 440)$. **1.57.** $F_{\max} = 3420$ при $X^* = (0, 0, 0, 0, 60, 420)$. **1.58.** $F_{\max} = 190$ при $X^* = (6, 0, 10, 8, 0, 0)$. **1.59.** $F_{\max} = 492$ при $X^* = (24, 18, 0)$.

1.60. Минимальная стоимость перевозок равна 5840 у.е. При условии, что из первого пункта отправления в первый пункт назначения перевозится 260 т груза, во второй пункт назначения – 140 т, в третий пункт назначения – 20 т груза; из второго пункта отправления во второй пункт назначения перевозится 380 т груза и из третьего пункта отрпавления в третий пункт назначения перевозится 400 т груза. **1.61.** $F_{\max} = 162\,000$ при $X^* = (100, 0, 1200)$. **1.62.** $F_{\max} = 2115$ при $X^* = (95, 210, 0, 0)$. **1.63.** $F_{\max} = 965$ при $X^* = (70, 135, 0, 0)$. **1.64.** $F_{\max} = 16\,200$ при $X^* = (0, 0, 0, 1800)$. **1.67.** $F_{\max} = 73\,000$ при $X^* = (1000, 6000, 2500)$. **1.68.** $F_{\max} = 935$ при $X^* = (0, 125, 0, 80)$. **1.69.** $F_{\max} = 16{,}8$ при $X^* = (0, 0, 9/5, 0, 0, 24/5)$. **1.70.** Не имеет решения. **1.71.** $F_{\min} = -192$ при $X^* = (0, 0, 0, 48, 0, 0)$. **1.72.** $F_{\max} = 4900$ при $x_{14}^* = 80$, $x_{21}^* = 50$; $x_{23}^* = 70$; $x_{31}^* = 30$; $x_{32}^* = 110$; $x_{41}^* = 10$; $x_{45}^* = 150$. **1.73.** $F_{\min} = 7210$ при $x_{11}^* = 80$, $x_{13}^* = 130$; $x_{16}^* = 30$; $x_{24}^* = 170$; $x_{25}^* = = 190$; $x_{32}^* = 100$; $x_{36}^* = 80$; $x_{42}^* = 120$; $x_{51}^* = 150$. **1.74.** $F_{\min} = 0{,}565947$ при $X^* = (0, 0, 0, 0{,}03335, 0, 0{,}90513, 0)$. **1.75.** $F_{\max} = 1495$ при $X^* = (10{,}33, 45)$. **1.76.** $F_{\max} = 1939{,}428571$ при $X^* = (1200, 624{,}28571, 0, 0)$. **1.92.** $F_{\min}^* = 20$ при $y_1^* = 4$; $y_2^* = 2$. **1.93.** $F_{\min}^* = 29$ при $y_1^* = 12$; $y_2^* = 1$. **1.94.** $F_{\min}^* = 66$ при $Y^* = (7/9, 0, 13/9)$. **1.95.** $F_{\min}^* = 21$ при $Y^* = (0, 0, 7/5)$. **1.96.** $F_{\min}^* = 226/11$ при $Y^* = (7/11, 1/11, 0)$. **1.97.** $F_{\min}^* = 28$ при $Y^* = (0, 1, 0)$. **1.98.** $F_{\min}^* = 492$ при $Y^* = (29/10, 0, 3/5, 0)$. **1.99.** $F_{\min}^* = 162\,000$ при $Y^* = (135, 0, 450)$. **1.100.** $F_{\min}^* = 186$ при $Y^* = (8/5, 9/5, 0)$. **1.101.** $F_{\min}^* = 965$ при $Y^* = (0, 13/2, 3/2)$. **1.102.** $F_{\min}^* = 2115$ при $Y^* = (0, 3/2, 9/4)$. **1.103.** а) $Y^* = (2/9,$

5/3, 0); б) $288 < b_1 < 720$; $96 < b_2 < 240$; $b_3 > 84$; в) $\Delta F_{1\max} = 20/3$; $\Delta F_{2\max} = 200/3$; $\Delta F_{3\max} = 0$; $\Delta F_{\max} = 220/3$. **1.104.** а) $Y^* = (23/4,\ 0,\ 5/4)$; б) $47{,}2 < b_1 < 236$; $b_2 > 125$; $180 < b_3 < 472$; в) $\Delta F_{1\max} = -230$; $\Delta F_{2\max} = 0$; $\Delta F_{3\max} = 200$; $\Delta F_{\max} = -30$; г) целесообразно; д) $X^* = (0,\ 57,\ 26)$, $y^* = (23/4,\ 0,\ 5/4)$. **1.107.** $F_{\max} = -29/2$ при $X^* = (3, 0, 0, 1/2)$. **1.108.** $F^*_{\min} = 52$ при $X^* = (8, 2, 0, 0)$. **1.109.** $F_{\min} = 12$ при $X^* = (2, 0, 0, 5)$. **1.110.** $F_{\max} = -75$ при $X^* = (3, 0, 0, 0, 9, 0)$. **1.111.** $F_{\max} = 11$ при $X^* = (0, 3, 10, 0, 19)$. **1.112.** $F_{\max} = 48$ при $X^* = (4, 0, 4, 0, 26)$. **1.113.** $F_{\max} = -126$ при $X^* = (0, 12, 0, 6)$. **1.114.** $F_{\min} = 186$ при $X^* = (0, 8, 9)$. **1.115.** $F_{\min} = 26$ при $X^* = (0, 0, 0, 6{,}5)$. **1.116.** $F_{\min} = 550$ при $X^* = (10, 0, 20, 10, 0, 0)$. **1.117.** $F_{\min} = 305{,}6$ при $X^* = (30, 0, 0, 44, 0, 20, 25, 0)$.

Глава 2

$$\textbf{2.20.}\ F_{\min} = 500 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 80 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{2.21.}\ F_{\min} = 140 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{2.22.}\ F_{\min} = 2240 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 120 & 60 & 0 \\ 110 & 90 & 0 & 20 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{2.23.}\ F_{\min} = 780 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{2.24.}\ F_{\min} = 720 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{2.25.}\ F_{\min} = 800 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 35 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 125 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{2.26.}\ F_{\min} = 665 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

$$\textbf{2.27.}\ F_{\min} = 1280 \text{ при } X^* = \begin{bmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

2.28. $F_{min} = 1675$ при $X = \begin{bmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 \\ 125 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$.

2.31. $F_{min} = 1480$ при $X = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 130 & 80 \\ 70 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 90 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.32. $F_{min} = 1050$ при $X = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 40 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 80 & 70 & 50 \\ 0 & 60 & 40 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.33. $F_{min} = 1920$ при $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ 90 & 110 & 100 & 0 & 60 \\ 0 & 10 & 130 & 40 & 0 \end{bmatrix}$.

2.34. $F_{min} = 1040$ при $X = \begin{bmatrix} 0 & 60 & 60 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 10 & 100 & 20 \end{bmatrix}$.

2.37. На первом участке засеять 180 га пшеницей и 420 га просом, на втором участке — 70 га кукурузой и 110 ячменем, на третьем участке — 220 га кукурузой. При этом максимальный сбор зерна равен 22 150 ц. **2.38.** На первом филиале изготовляется 4-й вид изделий, на втором — 1-й, на третьем — 3-й и на четвертом — 2-й. **2.39.** Первый завод ежедневно изготовляет 170 т колбасных изделий 1-го вида и 150 т изделий 2-го вида, второй завод — 280 т 1-го вида, третий завод — 220 т 2-го вида и 50 т 3-го вида, четвертый завод — 350 т 3-го вида. **2.42.** $F_{max} = 19$ при $X = (0, 19)$. **2.43.** $F_{min} = 52$ при $X = (2, 6)$. **2.44.** $F_{max} = 7$ при $X = (3, 1, 2, 3, 3)$. **2.53.** $F_{max} = 140$ при $X = (0, 5, 0, 10, 0, 10, 0)$. **2.54.** $F_{max} = 1322{,}4$ при $X = (10, 0, 6, 0)$. **2.55.** $F_{max} = 7$ при $X = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$. **2.56.** $F_{max} = 3{,}5$ при $x_{11} = x_{22} = x_{34} = x_{43} = 1$. **2.57.** $F_{max} = 32{,}7$ при $X = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 1, 0, 0)$. **2.58.** $F_{min} = 542$ при $X = (10, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 47, 0, 3, 42, 0, 4)$. **2.60.** $F_{max} = 744 - 48t$ при $X = (28, 0, 0, 48, 38)$, если $t \in (-\infty, 7]$; $F_{max} = 352 + 8t$ при $X = (0, 0, 28, 20, 24)$, если $t \in [7, 8]$; $F_{max} = 416/3 + (104/3)\,t$ при $X = (0, 20/3, 104/3, 0, 32/3)$; если $t \in [8, \infty)$; **2.61.** $-F_{max} = -30 - 10t$ при $X = (0, 10, 32, 0, 4)$, если $t \in (-\infty,\ 5{,}5]$; $F_{max} = 25$ при $X = (5, 0, 7, 0, 9)$, если $t \in [-5{,}5, -1{,}5]$; $F_{max} = 40 + 10t$ при $X = (0, 0, 12, 10, 24)$, если $t \in [-1{,}5, \infty)$. **2.69.** $F_{max} = 6 - 2t$ при $X = (0, 1, 0, 1, 0)$, если $t \in (-\infty, -1/2]$; $F_{max} = 19/3 - (4/3)\,t$ при $X = (1/3, 5/3, 0, 0, 0)$, если $t \in [-1/2, 7/4]$; $F_{max} = -17 + 12t$ при $X = (2, 0, 0, 0, 5)$, если $t \in [7/4, \infty)$. **2.70.** $F_{max} = 744 - 48\,t$ при $X = (28, 0, 0, 48, 38)$, если $t \in (-\infty, 9]$; $F_{max} =$

$= 312$ при $X = (52, 24, 0, 0, 2)$, если $t \in [9, \infty)$. **2.71.** $F_{max} = 198 - 19t$ при $X = (14 - 2t, 34 - 3t, 58 - 2t, 0, 0)$, если $t \in (-\infty, 7]$; задача неразрешима, если $t \in (7, \infty)$. **2.72.** $F_{max} = 1 - 2t$ при $X = (0, -2-t, 3 - t, 0, 3 - t)$, если $t \in (-\infty, -2]$; $F_{max} = -1 - 3t$ при $X = (0, 0, 1 - 2t, 2+t, 3 - t)$, если $t \in [-2, 1/2]$; **2.73.** Задача неразрешима, если $t \in (-\infty, -1/4]$; $F_{max} = 2 + 14t + 108t^2$ при $X = (0{,}5 - 6t, 17 - 6t, 1 + 14t, 0)$, если $t \in [-1/4, 5/6]$; $F_{max} = 12 + 52t + 48t^2$ при $X = (0, 0, 12, 6 + 8t, -10 + 12t)$, если $t \in [5/6, \infty)$. **2.74.** Задача неразрешима, если $t \in (-\infty, -2/3)$; $F_{max} = 32 + 82t + 42t^2$ при $X = (4 + 6t, 0, 0, 13 - 6t, 4 + 3t)$, если $t \in [-2/4, -4/11]$; $F_{max} = 48 + 150t + 108t^2$ при $X = (0, 0, 4 + 6t, 9 - 12t, 8 + 9t)$, если $t \in [-4/11, -3/13]$; $F_{max} = 54 + 185t + 147t^2$ при $X = (0, 2 + 3t, 0, 3 - 21t, 10 + 12t)$, если $t \in [-3/13, 1/7]$; $F_{max} = 57 + 177t + 56t^2$ при $X = (0, 3 - 4t, -2 + 14t, 0, 11 + 5t)$, если $t \in [1/7, 3/4]$; $F_{max} = 84 + 201t + 24t^2$ при $X = (-9 + 12t, 0, 13 - 6t, 0, 17 - 3t)$, если $t \in [3/4, 13/6]$; задача неразрешима, если $t \in [13/6, \infty)$. **2.75.** $F_{max} = 240 - 20t$ при $X = (0, 20, 0)$, если $t \in [0, 5]$; $F_{max} = 40 - 20t$ при $X = (20, 0, 0)$, если $t \in [5, 10]$. **2.76.** а) $F_{max} = 1115$ при $X = (17, 15, 10)$; б) $150/11 \le c_1 \le 1296/35$, $109/3 \le c_2 \le 335/27$; $29/2 \le c_3 \le 921/20$; в) $b_1 \ge 121$, $b_2 = 120$, $b_3 = 180$, $b_4 = 138$. **2.78.** $F_{max} = 2$ при $X = (6, 1)$. **2.79.** $F_{min} = -2/3$ при $X = (4, 6)$. **2.80.** $F_{max} = 27/7$ при $X = (5, 2/3, 0, 19, 0)$. **2.85.** $F_{max} = 1/2$ при $X = (0, 4, 0, 0, 26)$. **2.86.** $F_{max} = 2{,}2$ при $X = (4, 1, 0, 8, 0)$. **2.87.** $F_{max} = 8$ при $X = (70, 0, 0, 0, 0)$. **2.88.** $F_{max} = 489/62$ при $X = (6{,}8, 0, 9{,}2, 8{,}8, 0, 0)$. **2.89.** $F_{max} = 98/13$ при $X = (0, 0, 0, 80, 0, 440)$. **2.92.** $F_{max} = 39{,}5$ при $X = (3{,}5, 0, 9, 2)$. **2.93.** $F_{max} = 15$ при $X = (0, 5, 0, 0)$. **2.94.** $F_{max} = 65$ при $X = (5, 10)$. **2.95.** $F_{max} = 260$ при $X = (20, 0, 40, 0)$. **2.96.** $F_{max} = 87$ при $X = (34, 9, 0, 7)$. **2.97.** $F_{max} = 112$ при $X = (0, 20, 0, 6)$. **2.98.** $F_{max} = 960$ при $X = (0, 140, 0, 20)$. **2.103.** $U = (1/2, 1/2)$; $Z = (0, 0, 0, 3/4, 1/4)$; $v = 9/2$. **2.104.** $U = (1/3, 0, 0, 0, 2/3)$; $Z = (2/3, 1/3)$; $v = 5$. **2.105.** В общем объеме выпускаемой продукции ≈ 53 % составляют изделия A и ≈ 47 % — изделия B. **2.108.** $U = (3/5, 2/5)$; $Z = (1/5, 0, 4/5)$; $v = 23/5$. **2.109.** $U = (0, 1/3, 0, 2/3)$; $Z = (2/3, 1/3)$; $v = 7$. **2.110.** $U = (0, 0, 1)$; $Z = (0, 1, 0)$; $v = 7$. **2.111.** $U = (1/2, 1/2, 0)$; $Z = (3/4, 0, 0, 1/4)$; $v = 13/2$.

Глава 3

3.5. $F_{\max} = 24$ при $X = (6, 4)$. **3.6.** $F_{\min} = 16$ при $X = (5, 4)$. **3.7.** $F_{\max} = 37$ при $X = (5{,}8, 4{,}6)$. **3.8.** $F_{\max} = 12{,}5$ при $X = (2{,}5, 5)$. **3.14.** $f_{\min} = 16\frac{53}{64}$ при

$X^* = (3\frac{3}{8}, -1\frac{3}{4}, 2\frac{3}{8})$. **3.15.** $f_{min} = -56/27$ при $X^* = (-1/3, -26/3, -28/39)$, $f_{max} = 72$ при $X^* = (3, -2, -12)$. **3.16.** $f_{max} = 8$ при $X^* = (2, 2, 2)$. **3.17.** $f_{min} = 43$ при $X_1^* = (-1, 3, 2)$, $X_2^* = (-1, -3, -2)$. **3.18.** $f_{min} = 4$ при $X_1^* = (2, 2, 1)$, $X_2^* = (2, 1, 2)$ и $X_3^* = (1, 2, 2)$; $f_{max} = 112/27$ при $X_1^* = (4/3, 4/3, 7/3)$, $X_2^* = (4/3, 7/3, 4/3)$ и $X_3^* = (7/3, 4/3, 4/3)$. **3.19.** $X^* = (4, 6, 8)$. **3.20.** $x_1^* = 121$; $x_2^* = 79$. **3.21.** $x_1^* = \frac{b_2}{a_2 + b_2} d + \frac{b_1 - a_1}{2(a_1 + b_1)}$; $x_2^* = \frac{a^2}{a_2 + b_2} - \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_2)}$. **3.23.** $f_{min} = 38/15$ при $x_1^* = 8/15$, $x_2^* = 17/15$. **3.24.** $f_{max} = 65/4$ при $x_1^* = 1/2$, $x_2^* = 4$. 3.25. $f_{max} = 16$ при $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4$. **3.26.** $f_{max} = 17/8$ при $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 3/4$. **3.30.** $f_{max} = 3$ при $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$. **3.31.** $f_{max} = 16{,}2$ при $X^* = (0, 1{,}8, 2{,}4)$. **3.32.** Итерационный процесс сходится к точке $X = (3, 3)$. **3.33.** Итерационный процесс сходится к точке $X = (2, 2)$. **3.34.** Итерационный процесс сходится к точке $X = (0{,}8; 0{,}4)$.

Глава 4

4.11. Оборудование следует заменить к началу 3-го и к началу 6-го года. **4.12.** Предприятиям 3 и 4 следует выделить по 40 тыс. у.е., а предприятию 2 — 20 тыс. у.е. **4.13.** В склад следует поместить по три единицы оборудования I и III типов. **4.14.** Предприятию следует изготовить во 2-м и 3-м месяце по 4000 изделий.

ЛИТЕРАТУРА

Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 1986.

Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981.

Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования: Пер. с англ. М.: Наука, 1965.

Вентцель Е.С. Элементы динамического программирования. М.: Наука, 1964.

Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.

Вильямс Н.П. Параметрическое программирование в экономике. М.: Статистика, 1976.

Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). М.: Физматгиз, 1961.

Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.

Гуревич Т.Ф., Лущук В.О. Сборник задач по математическому программированию. М.: Колос, 1977.

Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и приложения: Пер. с англ. М.: Прогресс, 1966.

Додж М. Эффективная работа в Excel 2000. СПб.: Питер, 1999.

Долженков А. Excel 2000 в подлиннике. СПб.: BHV, 1999.

Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Выща шк., 1975.

Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.

Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. М.: Высш. шк., 1967.

Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высш. шк., 1975.

Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 1973.

Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. М.: Знание, 1968.

Карандаев И.С. Решение двойственных задач в оптимальном планировании. М.: Статистика, 1976.

Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.

Карпелевич Ф.М., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М.: Наука, 1967.

Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высш. шк., 1980.

Кузнецова А.В. Экономико-математические методы и модели. Мн.: БГЭУ, 1999.

Линейное и нелинейное программирование. Киев: Выща шк., 1975.

Малыхин В.И. Математическое моделирование в экономике. М.: УРАО, 1998.

Персон Р. Excel 97 в подлиннике: В 2-х т. СПб.: BHV, 1996.

Полунин И.Ф. Курс математического программирования. Мн.: Вышэйш. шк., 1975.

Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. М.: Статистика, 1972.

Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. М.: БЕК, 1998.

Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1967.

Щедрин Н.И., Кархов А.Н. Математические методы программирования в экономике. М.: Статистика, 1974.

Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999.

Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование: Теория и конечные методы. М.: Физматгиз, 1963.

Иван Людвигович АКУЛИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Издание третье, стереотипное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 22.07.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 18,48. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru