МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. ВСТУП

Надалі зосередимось на вивченні математичного моделювання. Нагадаємо, що під математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об’єкта на його математичній моделі. Метою математичного моделювання є виявлення оптимальних умов протікання процесу, керування ним на основі математичної моделі та перенесення результатів на об’єкт.

Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого використання математичного моделювання. Сутність цієї методології полягає в заміні об’єкта, що досліджується, його образом – математичною моделлю – і подальшим вивченням моделі як методами математичного аналізу (аналітично), так і за допомогою обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються на електронних обчислювальних машинах.

Цей метод пізнання, конструювання, проектування поєднує в собі переваги як теорії, так і експерименту. Робота не з самим об’єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість безболісно, відносно швидко і без суттєвих витрат вивчати його властивості й поведінку в будь-яких можливих ситуаціях (переваги теорії). У той же час, обчислювальні експерименти (комп’ютерні, симуляційні, імітаційні) з моделями об’єктів дозволяють, опираючись на можливості сучасних обчислювальних методів і технічних засобів інформатики, детально й глибоко вивчати об’єкти з достатньою повнотою, недоступною чисто теоретичним (аналітичним) підходам (переваги експерименту). Не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплюючи все нові сфери – від розробки технічних систем і керування ними до аналізу найскладніших економічних і соціальних процесів.

Використання математичного моделювання можна хронологічно розбити на три етапи його розвитку.

Елементи математичного моделювання використовувались із самого початку виникнення точних наук. Не випадково, що деякі методи обчислень названі іменами таких корифеїв науки, як Ньютон і Ейлер, а слово *алгоритм* походить від імені середньовічного арабського вченого Аль-Хорезмі.

Друге народження цієї методології припало на кінець 40-х – початок 50-х рр. XX ст. і було зумовлено принаймні двома причинами. Перша з них – поява ЕОМ. Друга – безпрецедентне соціальне замовлення – виконання національних програм США і СРСР зі створення ракетно-ядерного щита, які не могли бути реалізованими традиційними методами. Математичне моделювання справилося з цією задачею: ядерні вибухи та польоти ракет і супутників були спочатку здійснені у надрах ЕОМ за допомогою математичних моделей, і лише потім – на практиці.

Зараз математичне моделювання вступає у третій принципово важливий етап свого розвитку – воно вбудовується у структури так званого інформаційного суспільства. Без володіння інформаційними ресурсами не можна навіть уявити розв’язання масштабних проблем, які стоять перед світовою спільнотою. Однак інформація як така мало що дає для аналізу і прогнозу, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Потрібні надійні способи переробки інформаційної сировини на готовий продукт, тобто на точне знання. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може й має бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства.

Технічні, екологічні, економічні та інші системи, які вивчаються сучасною наукою, більше не піддаються дослідженню (з потрібною повнотою й точністю) звичайними теоретичними методами. Прямий натурний експеримент над ними є довгим, дорогим, часто або небезпечним, або просто неможливим, оскільки багато з цих систем існують у єдиному екземплярі. Ціна помилок і прорахунків у поводженні з ними неприпустимо висока. Тому математичне (ширше – інформаційне) моделювання є обов’язковою складовою науково-технічного прогресу.

2.2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОСНОВНІ ЗАХОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Основним поняттям методу математичного моделювання є поняття математичної моделі.

Математичною моделлю називається наближене описання якого-небудь явища або процесу оточуючого світу за допомогою математичної символіки.

На самому початку скористаємося тим, що при вивченні деяких розділів математики читач уже познайомився з деякими прийомами математичного моделювання. Так, вивченню рівнянь математичної фізики передує нехай невеликий, але системно дуже важливий, етап математичного моделювання. Саме на цьому етапі були виведені основні рівняння математичної фізики. Для цього використовується математичне моделювання поширення тепла в нерівномірно нагрітому середовищі, а також моделюються коливання закріпленої на кінцях струни. Моделювання цих процесів дозволило отримати основні рівняння математичної фізики: теплопровідності, хвильове рівняння, рівняння Лапласа й Пуассона, а також сформулювати для них крайові й змішані задачі. Отже, розпочнемо з того, що вже знаємо.

1. При математичному моделюванні вивчається не сам реальний фізичний процес, а деяка його модель, від якої вимагається, щоб вона зберігала основні риси процесу, що розглядається, і в той же час була настільки простою, щоб піддаватися вивченню математичними методами.

2. Створення математичної моделі фізичного явища можна розбити на такі етапи:

2.1. Вибирається основна величина (кілька основних величин), яка характеризує процес. При математичному моделюванні поширення тепла такою величиною є температура u точок середовища, яка в загальному випадку є функцією просторових координат x, y, z і часу t.

2.2. На другому етапі виводиться визначальне рівняння для основної величини, яка характеризує процес. При вивченні поширення тепла таким рівнянням є рівняння теплопровідності. Для виведення цього рівняння використовується закон збереження тепла в деякому довільному об'ємі нерівномірно нагрітого середовища.

2.3. Одержане на другому етапі диференціальне рівняння має безліч розв'язків. Отже, його не досить для описання конкретного процесу. Тому на третьому етапі побудови математичної моделі виводяться так звані умови однозначності, які з безлічі розв'язків визначального рівняння дозволяють виділити єдиний розв'язок, що характеризує даний процес, який моделюється. Нагадаємо, що для рівнянь математичної фізики такими додатковими умовами є крайові й початкові умови.

Таким чином, математична модель процесів, які вивчаються за допомогою рівнянь математичної фізики, складається з диференціального рівняння для основної величини, яка характеризує процес, і додаткових умов, які дозволяють отримати єдиний розв'язок цього рівняння – розв'язок, що описує даний, конкретний фізичний процес.

Після такого вступу перейдемо до основної частини розділу, у якому познайомимось з основними прийомами, що використовуються при виведенні визначальних рівнянь математичної моделі. Наприкінці розділу наведемо формалізовану схему математичного моделювання.

Основною тезою на початку буде така: другий етап побудови математичної моделі, тобто етап виведення визначального рівняння математичної моделі, є суттєво різним залежно від прийомів, які використовуються при її побудові. Розглянемо деякі підходи до побудови математичних моделей, які ілюструють застосування законів природи, варіаційних принципів, аналогій, ієрархічних ланцюгів. Це дає змогу обговорити такі поняття, як адекватність моделей, їх „оснащення", нелінійність, чисельну реалізацію та низку інших фундаментальних понять математичного моделювання.

2.2.1. Використання законів природи

Найпоширеніший метод побудови математичних моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Ці закони загальновизнані, багаторазово підтверджені досвідом, служать основою великої кількості науково-технічних досягнень. Тому їх обґрунтованість не викликає сумніву, що, крім усього іншого, надає досліднику сильну психологічну підтримку.

Закон збереження енергії. Цей закон відомий майже двісті років і посідає, напевне, найбільш почесне місце серед великих законів природи. Покладаючись на нього, експерт з балістики, який хоче визначити швидкість револьверної кулі і не має поблизу спеціальної лабораторії, може скористатися відносно простим пристроєм типу маятника – вантажем, підвішеним на легкому недеформівному стрижні, який може вільно обертатися (рис. 1.2.1).

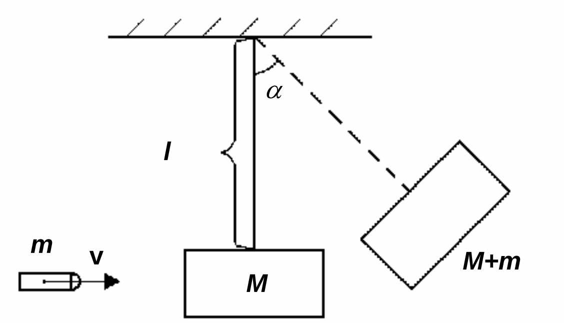

Рис. 1.2.1

Куля, яка застряє у вантажі, надає системі куля-вантаж свою кінетичну енергію, яка в момент найбільшого відхилення стрижня від вертикалі повністю переходить у потенціальну енергію системи. Ці трансформації описуються ланцюгом рівностей

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha)\,.$$

Тут $\frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія кулі масою m, яка має швидкість v; M – маса вантажу; V – швидкість системи куля-вантаж відразу після зіткнення; g – прискорення вільного падіння; l – довжина стрижня; α – кут найбільшого відхилення. Шукана швидкість кулі v, таким чином, визначається з формули

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha)\,,$$

а саме

$$v=\sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}\ ,$$

яка є досить точною, якщо не враховані нами втрати енергії на нагрівання кулі й вантажу, на подолання опору повітря, розгін стрижня і т. д. є невеликими. Процеси, які відбуваються при зіткненні кулі й маятника, уже не є чисто механічними. Тому закон збереження механічної енергії, який був застосований у цьому підрозділі для обчислення величини v, не є справедливим повною мірою: зберігається повна, а не механічна енергія системи. Закон збереження механічної енергії дає лише нижню межу для оцінки швидкості кулі.

Аналогічні міркування можна застосувати для оцінки часу t_k свердління шару металу товщиною L лазером з потужністю W, випромінювання якого є перпендикулярним до поверхні металу (рис. 1.2.2).

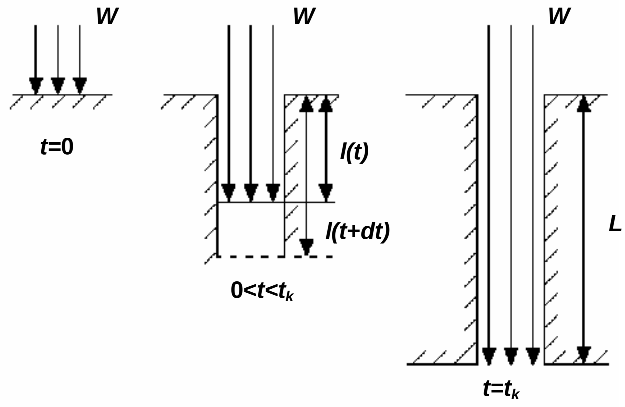

Рис. 1.2.2

Якщо енергія лазера повністю йде на випаровування стовпчика металу масою $LS\rho$, де S – площа, яка опромінюється; LS – об'єм стовпчика; ρ – густина речовини, то закон збереження енергії виражається рівністю

$$E_0=Wt_k=hLS\rho\ , \qquad (1.2.1)$$

де h – енергія, яка потрібна для випаровування одиниці маси. Величина h має складну структуру: $h=(T_{пл}-T)h_1+h_2+h_3$, оскільки матеріал необхідно послідовно нагріти до температури плавлення $T_{пл}$, а потім розплавити й перетворити на пару; тут T – початкова температура; h_1 – питома теплоємність; h_2 і h_3 – відповідно питома теплота плавлення й пароутворення.

Зміна глибини заглиблення $l(t)$ із часом визначається з балансу енергії на проміжку часу від t до $t+dt$. На випарувану за цей час масу

$$[l(t+dt)-l(t)]S\rho=dlS\rho$$

витрачається енергія $dlS\rho h$, яка дорівнює енергії Wdt, що надходить від лазера до речовини:

$$dlS\rho h=Wdt\ ,$$

звідки отримується диференціальне рівняння

$$\frac{dl}{dt}=\frac{W}{S\rho h}\ . \qquad (1.2.2)$$

При інтегруванні цього рівняння слід використовувати умову, що початкова глибина заглиблення дорівнює нулю:

$$l\big|_{t=0}=0\ . \qquad (1.2.3)$$

Інтегруючи (1.2.2) з урахуванням (1.2.3), матимемо

$$l(t)=\frac{W}{S\rho h}t=\frac{E(t)}{S\rho h}\ , \qquad (1.2.4)$$

де $E(t)$ – це вся енергія, яка була виділена лазером на момент часу t. Отже, глибина заглиблення є пропорційною затраченій енергії. При $t=t_k$, коли $l(t_k)=L$, обчислення часу t_k свердління шару металу товщиною L дає однакові результати і з формули (1.2.1), і з формули (1.2.4):

$$t_k=\frac{hLS\rho}{W}\ .$$

Насправді процес свердління є набагато складнішим за розглянуту схему: енергія витрачається й на нагрівання речовини, і на виділення пари із заглиблення, яке може мати неправильну форму і т. і. Тому впевненість у правильності запропонованого математичного описання є значно меншою, ніж у випадку з кулею. Питання про відповідність об'єкта та його моделі – одне з центральних у математичному моделюванні.

Закон збереження матерії. Використання цього закону при створенні математичної моделі ілюструється таким прикладом. Нехай є невелика кількість радіоактивної речовини (урану), яка оточена товстим шаром звичайного матеріалу (напр., свинцю), – ситуація, яка є типовою при збереженні матеріалів, що розщеплюються, або при їх використанні в енергетиці (рис. 1.2.3).

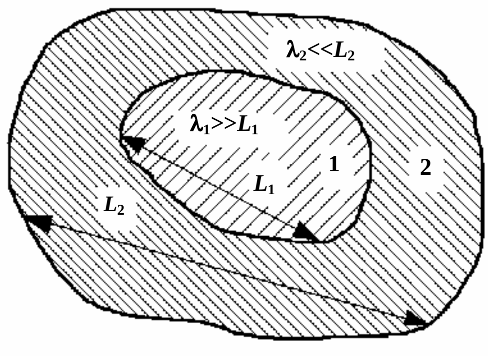

Рис. 1.2.3

Припущення про невелику кількість радіоактивної речовини є спрощувальним, воно дозволяє стверджувати, що всі продукти розщеплення без перешкод залишають область 1 без зіткнень з атомами речовини цієї області. Іншими словами, довжина вільного пробігу продуктів розщеплення λ_1 у першій речовині значно більша за характерні розміри самого матеріалу L_1, тобто $\lambda_1 >> L_1$. Слова „товстий шар" означають, що згідно з метою зберігання продукти розщеплення повністю поглинаються в області 2. Це гарантується при виконанні протилежної умови: $\lambda_2 << L_2$, де λ_2 – довжина вільного пробігу продуктів розщеплення у другій речовині; L_2 – характерний розмір другої речовини.

Отже, усе, що вилітає з області 1, поглинається в області 2, і сумарна маса обох речовин з часом не змінюється. Це і є закон збереження матерії, застосований до даної ситуації. Якщо в початковий момент часу $t=0$ маси речовин були рівними $M_1(0)$ і $M_2(0)$, то в будь-який момент часу є справедливим баланс

$$M_1(0)+M_2(0)=M_1(t)+M_2(t)\,. \qquad (1.2.5)$$

Одного рівняння (1.2.5), очевидно, недостатньо для знаходження поточних значень двох мас – $M_1(t)$ і $M_2(t)$. Для замикання математичного формулювання необхідно залучити додаткові дані про характер розщеплення. Ці дані формулюються таким твердженням: швидкість розщеплення (кількість атомів, які розпадаються в одиницю часу) є пропорційною загальній кількості атомів радіоактивної речовини.

За малий проміжок часу dt між моментами t і $t+dt$ усього розщепиться

$$N_1(t+dt)-N_1(t)=-\alpha N_1(t+\xi dt),\ \ (\alpha>0,\ 0<\xi<1) \qquad (1.2.6)$$

атомів. Тут повторно використано закон збереження маси, але стосовно не всього процесу, а до відрізка часу dt. У цьому рівнянні, яке описує баланс атомів, у правій частині стоїть знак мінус (кількість речовини зменшується), а величина $N_1(t+\xi dt)$ відповідає деякому середньому значенню кількості атомів за час dt. Перепишемо рівність (1.2.6) у диференціальній формі:

$$\frac{dN_1(t)}{dt}=-\alpha N_1(t)\,.$$

Ураховуючи, що $M_1(t)=\mu_1 N_1(t)$, де μ_1 – атомна вага речовини 1, отримаємо

$$\frac{dM_1(t)}{dt}=-\alpha M_1(t)\,. \qquad (1.2.7)$$

При самочинному (спонтанному) поділі ядер будь-який атом має деяку, не залежну від стану оточуючої речовини, імовірність розщеплення. Тому чим більша (менша) кількість самої радіоактивної речовини, тим більше (менше) виділяється продуктів розщеплення в одиницю часу. Коефіцієнт пропорційності $\alpha>0$ (стала розщеплення) визначається конкретною речовиною. Рівняння (1.2.5) і (1.2.7) разом з умовами $\lambda_1 >> L_1$ і $\lambda_2 << L_2$, а також величинами $\alpha,\ M_1(0)$ і $M_2(0)$ складають математичну модель об'єкта, який розглядається.

Інтегруючи (1.2.7), отримуємо, що маса матеріалу, який розщеплюється, зменшується за експоненціальним законом:

$$\frac{dM_1(t)}{M_1(t)}=-\alpha dt\ \Rightarrow\ \ln M_1(t)=-\alpha t+\ln C\ \Rightarrow\ M_1(t)=Ce^{-\alpha t}\,.$$

При $t=0\ \Rightarrow\ M_1(0)=C$, тому остаточно

$$M_1(t)=M_1(0)e^{-\alpha t}\,.$$

При $t\to\infty$ в області 1 речовина повністю зникає.

Оскільки сумарна маса згідно з (1.2.5) залишається сталою, то в області 2 кількість речовини зростає:

$$M_2(t) = M_2(0) + M_1(0) - M_1(0)e^{-\alpha t} =$$
$$= M_2(0) + M_1(0)(1 - e^{-\alpha t}),$$

і при $t \to \infty$ продукти розщеплення повністю переходять з області 1 в область 2.

Закон збереження імпульсу. Човен, який стоїть нерухомо в безвітряну погоду на поверхні озера, почне рухатись уперед, якщо зробити кілька кроків від його носа до корми. Так виявляє себе закон збереження імпульсу, який стверджує: повний імпульс системи, на яку не діють зовнішні сили, зберігається. На переміщення весляра човен реагує зміщенням у протилежний бік.

Принцип реактивного руху покладено в основу багатьох технічних пристроїв, наприклад, ракети, яка виводить на орбіту Землі штучний супутник, для чого їй потрібно розвинути швидкість приблизно 8 км/с. Найпростіша математична модель руху ракети отримується із закону збереження імпульсу при нехтуванні опором повітря, гравітацією та іншими силами, за виключенням, звичайно, тяги реактивних двигунів.

Нехай продукти згоряння ракетного палива залишають розташовані в задній частині ракети вихлопні сопла зі швидкістю u (для сучасних палив швидкість u дорівнює 3-4 км/с). За малий проміжок часу dt між моментами t і $t + dt$ частина палива вигоріла і маса ракети змінилася на величину dm. Змінився також імпульс ракети, але сумарний імпульс системи “ракета плюс продукти згоряння” залишився тим самим, що й у момент t, тобто

$$m(t)v(t) = m(t + dt)v(t + dt) - dm[v(t + \xi dt) - u],$$

де $v(t)$ – швидкість ракети; $v(t + \xi dt) - u, 0 < \xi < 1$ – середня за проміжок dt швидкість витікання із сопел газів (обидві швидкості беруться відносно Землі). Перший член у правій частині цієї рівності – імпульс ракети в момент $t + dt$, другий – імпульс, переданий газом, що витікає за час dt.

Ураховуючи, що $m(t + dt) = m(t) + (dm/dt)dt + O((dt)^2)$, а також $v(t + dt) = v(t) + (dm/dt)dt + O((dt)^2)$, закон збереження імпульсу можна переписати у вигляді диференціального рівняння

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u, \qquad (1.2.8)$$

у якому член

$$-\frac{dm}{dt}u,$$

очевидно, є ні чим іншим, як силою тяги ракетних двигунів. Рівняння (1.2.8) перетворимо до вигляду

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt} \qquad (1.2.8а)$$

((1.2.8) $\Rightarrow$ $\left.\frac{1}{m}\right| m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = -u\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt}$)

і проінтегруємо.

Після інтегрування рівняння (1.2.8а) матимемо

$$v(t) + C = -u(\ln m(t) + \ln B),$$

де C і B – довільні сталі, або

$$v(t) + C = -u\ln(Bm(t)). \qquad (1.2.8б)$$

Одержаний загальний розв’язок (1.2.8б) має задовольняти початкову умову: при $t = 0$ $v = v_0; m = m_0$, де v_0, m_0 – відповідно швидкість і маса ракети в момент часу $t = 0$.

Тому довільну сталу C слід узяти рівною v_0, а довільну сталу $B = \frac{1}{m_0}$. При цьому (1.2.8б) набуває вигляду

$$v(t) - v_0 = -u\ln(\frac{m(t)}{m_0})$$

і при $t = 0$ перетворюється на тотожність. Звідси

$$v(t) = v_0 + u\ln(\frac{m_0}{m(t)}). \qquad (1.2.9)$$

Якщо $v_0 = 0$, то максимальна швидкість ракети, яка досягається при повному згорянні палива, дорівнює

$$v = u\ln(\frac{m_0}{m_p + m_s}). \qquad (1.2.10)$$

У (1.2.10) m_p – корисна маса (маса супутника); m_s – структурна маса власне ракетної конструкції – паливних баків, двигунів, систем управління тощо.

Формула (1.2.10) – це *формула Ціолковського.* Вона дозволяє зробити фундаментальний висновок про конструкцію ракети для космічних польотів. Уведемо величину $\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$, яка характеризує при $m_p = 0$ відношення структурної й початкової мас ракети (без корисної маси, тобто супутника). Тоді для практично реальних значень $\lambda = 0{,}1$ і $u = 3$ км/с отримаємо при $m_p = 0$

$$v = u\ln(\frac{1}{\lambda}) = 7 \text{ км/с.}$$

Звідси випливає, що навіть у самій ідеальній ситуації (корисна маса дорівнює нулю, відсутні гравітація та опір повітря тощо) ракета того типу, що розглядається, не здатна розвинути першої космічної швидкості. Звідси випливає важливий висновок – необхідно використовувати так звані багатоступеневі ракети.

Розглянутий приклад ілюструє також свого роду принцип *найбільшого сприяння*, який часто використовується на початковій стадії математичного моделювання складних об’єктів: якщо об’єкт, будучи поставленим у найкращі умови, не в змозі досягнути потрібних характеристик, то слід змінити сам підхід до об’єкта або пом’якшити вимоги до нього; якщо ж вимоги в принципі є досяжними, то наступні кроки пов’язані з дослідженням впливу на об’єкт додаткових, більш складних факторів.

2.2.2. Використання варіаційних принципів

Ще один підхід до побудови моделей полягає у використанні так званих варіаційних принципів. Цей підхід за широтою та універсальністю його можливостей можна зіставити з використанням фундаментальних законів природи при побудові математичних моделей. Варіаційні принципи є досить загальними твердженнями про об’єкт, що розглядається (система, явище), вони стверджують, що з усіх можливих варіантів поведінки об’єкта (руху, еволюції) вибираються лише ті, що задовольняють певну умову. Зазвичай згідно з цією умовою деяка величина, яка пов’язана з об’єктом, досягає свого екстремального значення при переході об’єкта з одного стану в інший.

Приклад. Припустимо, що автомобіль, який рухається зі сталою швидкістю v, має потрапити з точки A в точку B і при цьому торкнутися деякої прямої лінії C. На рис. 1.2.4 показані різні траєкторії руху з точки A в точку B з дотиком до прямої C. Суцільною лінією виділено найкоротший шлях**.**

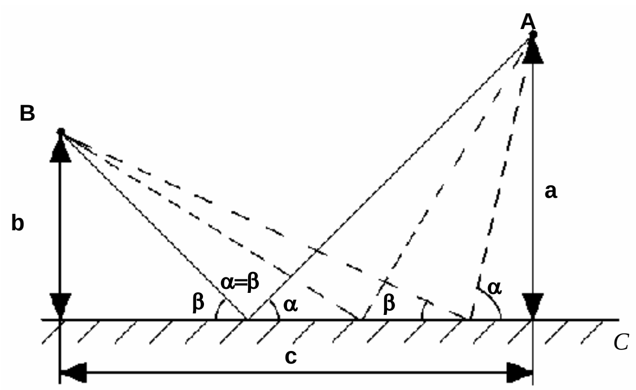

Рис. 1.2.4

Водій автомобіля дуже поспішає й вибирає з багатьох траєкторій шлях, який вимагає мінімальних затрат часу. Зобразимо витрачений час як функцію величини α – кута між прямою C і відрізком шляху від точки A до прямої C:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v\sin\alpha} + \frac{b}{v\sin\beta(\alpha)}.$$

Тут a і b – довжини перпендикулярів, які опущені з точок A і B на пряму C; $\beta(\alpha)$ – кут між прямою C і відрізком шляху з точки дотику до точки B.

Умова екстремальності $t(\alpha)$ за аргументом α означає, що

$$\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_{ext}} = 0,$$

або

$$\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{b\cos\beta(\alpha)}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \qquad (1.2.11)$$

Для будь-яких значень α є справедливою рівність

$$c = \frac{a}{tg\alpha} + \frac{b}{tg\beta(\alpha)}, \qquad (1.2.12)$$

де c – відстань між проекціями точок A і B на пряму C (ця відстань є однаковою для всіх траєкторій). Диференціюючи (1.2.12), отримаємо співвідношення

$$\frac{a}{\sin^2\alpha} + \frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad (1.2.13)$$

яке разом з умовою мінімальності (1.2.11) (порівняємо (1.2.11) і (1.2.13)) дає

$$\cos\alpha = \cos\beta(\alpha),$$

тобто рівність кутів α і β.

Далі неважко знайти самі значення $\alpha_{\min}, t_{\min}$ через задані величини a, b, c. Однак зараз для нас важливо інше – умова мінімальності витрат часу привела до вибору відповідної траєкторії за правилом *кут падіння дорівнює куту відбивання*. Однак такому ж закону підкоряється і хід променя світла, який потрапляє на дзеркальну поверхню. Може, і промені світла рухаються траєкторіями, які забезпечують найшвидше потрапляння сигналу з однієї точки в іншу? Так, саме так і відбувається згідно з відомим варіаційним принципом Ферма, спираючись на який можна отримати всі основні закони геометричної оптики.

2.2.3. Застосування аналогій при побудові моделей

У дуже великій кількості випадків при побудові математичної моделі об'єкта або неможливо прямо вказати фундаментальні закони чи варіаційні принципи, яким він підкоряється, або, з погляду наших сьогоднішніх знань, узагалі не можна бути впевненими в існуванні подібних законів, які допускають математичне формулювання. Одним із плідних підходів до такого типу об'єктів є використання аналогій з уже вивченими явищами. Що, здавалося б, може бути спільного між радіоактивним розщепленням і динамікою популяцій, зокрема зі зміною чисельності населення нашої планети? Однак на найпростішому рівні така аналогія повністю спостерігається. Про це свідчить одна з найпростіших моделей популяцій, яка називається *моделлю Мальтуса*. В її основу покладено просте твердження: швидкість зміни населення з часом t пропорційна її поточній кількості $N(t)$, помноженій на різницю коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t)$ і смертності $\beta(t)$. У результаті приходимо до рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \qquad (1.2.14)$$

яке доволі схоже з рівнянням радіоактивного розщеплення і збігається з ним при $\alpha < \beta$ (якщо α і β – сталі). Це не дивно, оскільки при виведенні цих рівнянь використовувались однакові міркування. Інтегрування рівняння (1.2.14) дає:

$$(1.2.14) \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(t)}{N(t)} = [\alpha(t) - \beta(t)]dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln N(t) = \int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz + \ln C \quad \Rightarrow$$

$$\ln\frac{N(t)}{C} = \int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz \quad \Rightarrow$$

$$N(t) = C\exp(\int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz).$$

Довільна стала C знаходиться з початкової умови $N(0) = N_0$, де N_0 – початкова чисельність населення, звідки $C = N(0) = N_0$, і розв'язок рівняння (1.2.14) остаточно буде таким:

$$N(t) = N_0\exp(\int_{t_0}^{t} [\alpha(z) - \beta(z)]dz). \qquad (1.2.15)$$

Проаналізуємо (1.2.15). При $\alpha = \beta$ чисельність населення залишається сталою. У цьому випадку розв'язком рівняння (1.2.14) буде стала величина $N(t) = N_0$ (рис. 1.2.5).

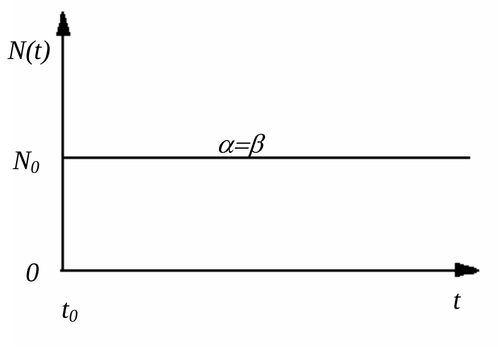

Рис. 1.2.5

Рівновага між народжуваністю і смертністю нестійка у тому розумінні, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ приводить із часом до все більшого відхилення функції $N(t)$ від рівноважного значення N_0. При сталих α і β за умови $\alpha < \beta$ чисельність населення зменшується і прямує до нуля при $t \to \infty$ за експоненціальним законом

$$N(t) = N_0 e^{(\alpha - \beta)t} \quad (\alpha - \beta < 0)$$

(рис. 1.2.6), а при $\alpha > \beta$ зростає $(\alpha - \beta > 0)$, знов-таки за експоненціальним законом (рис. 1.2.7), прямуючи до нескінченності при $t \to \infty$. Такий результат став основою для побоювань Мальтуса про перенаселення Землі з усіма наслідками, які з цього випливають.

Як у даному прикладі, так і в багатьох розглянутих нами випадках можна вказати чимало очевидних обмежень застосування побудованої моделі. Звичайно, дуже складний процес зміни чисельності населення, який залежить до того ж від свідомого втручання самих людей, не може описуватися якимись простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності повною мірою хоча б через обмеженість ресурсів, які необхідні для її існування.

Однак це зауваження ніскільки не применшує ролі аналогій у побудові математичних моделей дуже складних явищ. Застосування аналогій базується на одній з найважливіших властивостей моделей – їх універсальності, тобто їх застосовності до об’єктів принципово різної природи. Так, припущення типу “швидкість зміни величини пропорційна значенню самої величини (або деякої функції від неї)” широко використовується в далеких одна від одної сферах знань.

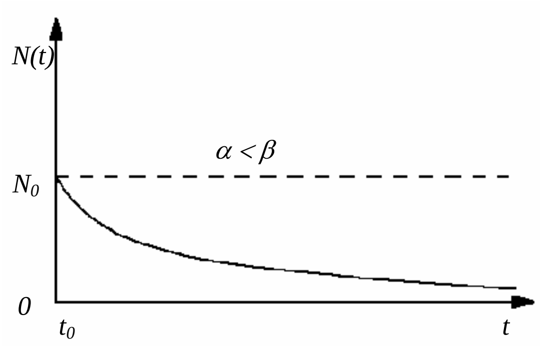

Рис. 1.2.6

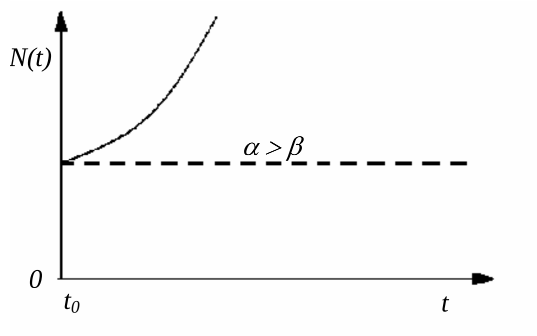

Рис. 1.2.7

2.2.4. Застосування ієрархічного підходу до створення моделей

Лише в окремих випадках буває зручною й виправданою побудова математичних моделей, навіть відносно простих об’єктів, одразу у всій повноті, з урахуванням усіх факторів, які є суттєвими для поведінки об’єктів. Тому природним є підхід, який реалізує принцип *від простого – до складного*, коли наступний крок робиться після досить детального вивчення не дуже складної моделі. При цьому виникає ланцюг (ієрархія) усе більш повних моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх як частинні випадки.

Побудуємо такий ієрархічний ланцюг на прикладі моделі багатоступеневої ракети. Нами вже було встановлено наприкінці підрозділу 2.2.1, що реальна одноступенева ракета неспроможна розвинути першу космічну швидкість. Причина цього – витрата пального на розгін непотрібної, відпрацьованої частини структурної маси. Тому під час руху ракети необхідно періодично позбуватися баласту. На практиці це означає, що ракета має складатися з кількох ступенів, які відкидаються після їх використання.

Нехай m_i – загальна маса *i*-го ступеня ракети; λm_i – відповідна структурна маса (при цьому маса пального дорівнює величині $(1-\lambda)m_i$); m_p – маса корисного вантажу. Припускається, що величини λ і швидкість витікання газу u однакові для всіх ступенів. Візьмемо для визначеності кількість ступенів $n=3$. Початкова маса такої ракети буде рівною

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3 .$$

Розглянемо момент, коли витрачено все паливо першого ступеня й маса ракети дорівнює величині

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3 .$$

Тоді за формулою Ціолковського (1.2.10)

$$v = u \ln(\frac{m_0}{m_p + m_s})$$

швидкість ракети у випадку, що розглядається, буде

$$v_1 = u \ln(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}) .$$

Після досягнення цієї швидкості v_1 структурна маса λm_1 відкидається і вмикається другий ступінь ракети. Маса ракети у цей момент становить

$$m_p + m_2 + m_3 .$$

Починаючи з цього моменту і до моменту повного вигоряння палива другого ступеня, ніщо не заважає скористатися вже збудованою моделлю, застосувавши її до випадку, що розглядається. Усі міркування стосовно збереження сумарного імпульсу й відповідні перетворення залишаються чинними (слід тільки врахувати, що ракета вже має початкову швидкість v_1). Тоді за формулою (1.2.10) після вигоряння палива у другому ступені ракета досягне швидкості $v_2 = v_1 + u \ln(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3})$.

Такі ж самі міркування є застосовними й до третього ступеня ракети. Після відключення її двигунів швидкість ракети дорівнюватиме $v_3 = v_2 + u \ln(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3})$.

Цей ланцюг неважко продовжити для будь-якого числа ступенів і отримати відповідні формули. У випадку ж $n=3$ для остаточної швидкості будемо мати

$$\frac{v_3}{u} = \ln\{(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3})(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3})\}$$

або, вводячи величини

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p} ,$$

отримаємо

$$\frac{v_3}{u} = \ln\{(\frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1 - 1)})(\frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2 - 1)})(\frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3 - 1)})\} .$$

Даний вираз є симетричним відносно до величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, і неважко показати, що його максимум досягається в симетричному випадку, тобто коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. При цьому *i*=3,

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, P = e^{-\frac{v_3}{3u}} .$$

Добуток $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha^3$ дорівнює, як легко перевірити, відношенню $\frac{m_0}{m_p}$, або $\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = (\frac{1-\lambda}{P-\lambda})^3$.

Для багатоступеневої ракети, аналогічно, маємо

$$\frac{m_0}{m_p} = (\frac{1+\lambda}{P-\lambda})^n, P = e^{-\frac{v_n}{nu}} , \qquad (1.2.16)$$

де n – кількість ступенів ракети.

Проаналізуємо формулу (1.2.16). Приймемо $v_n = 10{,}5 км/с, \lambda = 0{,}1$. Тоді для $n = 2{,}3{,}4$ отримаємо

$$m_0 = 149 m_p, \quad m_0 = 77 m_p, \quad m_0 = 65 m_p$$

відповідно. Це означає, що двоступенева ракета придатна для виведення на орбіту деякої корисної маси (однак при одній тоні корисного вантажу необхідно мати ракету вагою 149 тон). Перехід до третього ступеня зменшує масу ракети майже у два рази (звичайно при цьому ускладнює її конструкцію), а чотирьохступенева ракета не дає помітного виграшу порівняно з триступеневою.

Побудова ієрархічного ланцюга дозволила відносно просто прийти до цих важливих висновків. Ієрархія математичних моделей часто будується й за протилежним принципом – *від складного – до простого*. У цьому випадку реалізується шлях *згори – униз*: – із досить загальної та складної моделі за відповідних спрощувальних припущень отримується послідовність усе простіших (але таких, які мають меншу сферу застосування) моделей.

2.2.5. Про нелінійність математичних моделей

Простота розглянутих математичних моделей значною мірою пов'язана з їх лінійністю. У математичному сенсі це важливе поняття означає, що є справедливим принцип суперпозиції, тобто будь-яка лінійна комбінація розв'язків (напр., їх сума) теж є розв'язком задачі. Користуючись принципом суперпозиції, не важко, знайшовши розв'язок у якомусь частинному випадку, побудувати розв'язок у більш складній ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна міркувати за властивостями частинного – різниця між двома розв'язками має лише кількісний характер. Наприклад, збільшення у два рази швидкості витікання ракетного палива веде також до дворазового збільшення швидкості ракети, зменшення кута падіння світлового променя на дзеркальну поверхню означає таку саму зміну кута відбивання і т. д. Іншими словами, у випадку лінійних моделей відгук об'єкта на зміну якихось умов є пропорційним величині цієї зміни.

Для нелінійних явищ, математичні моделі яких не задовольняють принцип суперпозиції, знання про поведінку частини об'єкта ще не гарантує знання поведінки всього об'єкта, а його відгук на зміну умов може якісно залежати від величини цієї зміни.

Більшість реальних процесів і математичних моделей, які їм відповідають, є нелінійними. Лінійні ж моделі відповідають вельми частинним випадкам і, як правило, є лише першим наближенням до реальності. Наприклад, популяційні моделі відразу стають нелінійними, якщо прийняти до уваги обмеженість доступних для популяції ресурсів.

2.2.6. Висновки. Схема математичного моделювання

Процес побудови математичних моделей може бути умовно розбитий на такі етапи.

1. Побудова моделі починається зі словесно-змістового описання об'єкта чи явища. Окрім знань загального характеру про природу об'єкта і мету його дослідження, ця стадія може містити також деякі припущення (невагомий стрижень, товстий шар речовини, прямолінійне поширення світла тощо). Даний етап можна назвати формулюванням передмоделі.

2. Наступний етап – завершення ідеалізації об'єкта. Відкидаються всі фактори та ефекти, які вважаються не самими суттєвими для його поведінки. Наприклад, при складанні балансу матерії не враховувався, через його мализну, дефект мас, яким супроводжується радіоактивне розщеплення. За можливості припущення, які використовуються при ідеалізації, записуються в математичній формі. Наприклад, $\lambda_1 >> L_1$ ***– довжина вільного пробігу продуктів розщеплення*** λ_1 ***значно більша за характерний розмір самого матеріалу*** L_1 ***(у прикладі про зберігання радіоактивних матеріалів). Це необхідно, щоб справедливість цих припущень піддавалась кількісному контролю.***

3. Після виконання перших двох етапів можна переходити до вибору чи формулювання закону (варіаційного принципу, аналогії тощо), якому підлягає об'єкт, і його запису в математичній формі. За необхідності використовуються додаткові дані про об'єкт, які також записуються математично (напр., сталість величини c ***для всіх траєкторій руху автомобіля – у прикладі про рух автомобіля з точки А у точку В з дотиком до деякої прямої). Слід мати на увазі, що навіть для простих об'єктів вибір відповідного закону є зовсім не тривіальною задачею.***

4. Формулювання моделі завершує її "оснащення". Наприклад, необхідно задати дані про початковий стан об'єкта (швидкість ракети та її масу в момент $t = 0$***) або інші його характеристики, без знання яких неможливо визначити поведінку об'єкта. І, нарешті, формулюється мета дослідження моделі (напр., досягнути розуміння закономірностей зміни популяції, встановити вимоги до конструкції ракети, яка запускає супутник тощо).***

5. Побудована модель вивчається всіма доступними методами, у тому числі – перевіркою з використанням різних підходів. На відміну від найпростіших випадків, які ми розглянули до цього часу, більшість моделей не піддаються чисто теоретичному аналізу, і тому необхідно широко застосовувати обчислювальні методи. Ця обставина особливо важлива при вивченні нелінійних об'єктів, оскільки їх якісна поведінка заздалегідь, як правило, невідома.

6. У результаті дослідження моделі не тільки досягається поставлена мета, але має бути встановлена усіма можливими способами (порівнянням з практикою, з іншими підходами) адекватність моделі – відповідність моделі до об'єкта та сформульованих припущень. Неадекватна модель може дати результат, який буде як завгодно відрізнятися від істинного. Така модель має бути відкинутою або відповідним чином модифікованою.