

Гомогенізація матеріалів

При розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла для конструкцій із неоднорідних матеріалів виникає необхідність створення математичних моделей, які б описували геометрію та розташування кожного волокна, включення, пори у конструкції. Враховуючи, що частота розташування неоднорідностей досить велика, це приводить до громіздких математичних співвідношень, використовувати які досить проблематично. Тому, як правило, така проблема вирішується послідовним розв'язанням двох задач. Перша задача полягає в гомогенізації неоднорідного матеріалу, тобто неоднорідний композиційний матеріал представляється моделлю однорідного анізотропного матеріалу, характеристики якого залежать від характеристик компонентів. Друга задача полягає в розв'язанні задачі механіки для моделі однорідного анізотропного матеріалу.

До визначення механічних характеристик неоднорідного матеріалу за механічними характеристикам його складових існує два альтернативних підходи.

Згідно з першим підходом, експериментально досліджується певний структурний елемент матеріалу, який містить достатньо велику кількість неоднорідностей, щоб результати, отримані для нього, можна було б узагальнити на будь-який об'єм неоднорідного матеріалу. Застосування такого підходу дозволяє врахувати зміну механічних властивостей матриці й включень в процесі виготовлення матеріалу. З іншого боку, для отримання матеріалу з необхідними властивостями доводиться проводити велику кількість експериментів, варіюючи різними параметрами – такими, як об'ємний вміст включень, характер їх розташування, застосування різних матеріалів для матриці та включень тощо.

Альтернативний структурний підхід передбачає визначення механічних характеристик неоднорідного матеріалу через механічні характеристики матриці та включень, їх об'ємні частки, розміри та взаємне розташування

включень. Суттєвим недоліком такого підходу є те, що механічні характеристики структурних складових можуть значно відрізнятися у вихідному стані і в неоднорідному матеріалі.

Математичні моделі пористого матеріалу на основі методу самоузгодження

Розглянемо пористі матеріали. Під пористим матеріалом розуміють матеріал, який має деяку пористість – сукупну характеристику розмірів та кількості пор (порожнеч) у твердому тілі, які утворюються при його виготовленні чи експлуатації. Пористість є відносною величиною, яку можна розділити на три види: закриту пористість – відношення загального об'єму замкнених пор до об'єму матеріалу; відкриту пористість – відношення загального об'єму сполучених пор до об'єму матеріалу (визначається експериментально шляхом водонасичення) та загальну пористість – відношення загального об'єму пор до об'єму матеріалу. Пори можуть бути різної форми: кульові, еліпсоїдні, дископодібні та голкоподібні, у формі багатогранників та інші. При незначній пористості матеріалу порожнечі зазвичай мають кульову форму. Порожнечі мають форму багатогранників у матеріалах з малою щільністю та великою пористістю (наприклад, піни). При дослідженні параметрів напружено-деформованого стану пористого матеріалу вважається, що пористість рівномірно розповсюджена по об'єму тіла та її наявність враховується пружними характеристиками матеріалу.

Основні та найбільш обґрунтовані методи розрахунку модулів пружності ізотропних пористих матеріалів – це метод самоузгодження для пор сферичної, голкоподібної та дискової форм та варіаційний метод Хашина-Штрікмана для пор довільної форми. Ці методи виражають залежність об'ємного модуля $K(p)$ і модуля зсуву $G(p)$ ізотропного пористого матеріалу від відповідних модулів пружності $K(0)$ і $G(0)$ матеріалу матриці та їх відносної

щільності: $\rho = 1 - p$, де p – пористість. У рамках методу самоузгодження для пор сферичної форми модулі визначаються наступними формулами:

$$\frac{K(p)}{K(0)} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \alpha\rho}, \quad \frac{G(p)}{G(0)} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \beta\rho}. \quad (1.1)$$

тут параметри α і β розраховуються наступними формулами:

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)}, \quad \beta = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu}, \quad (1.2)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці.

Загальна залежність модулів об'ємного стиску та зсуву від пористості у методі самоузгодження для випадкового просторового розподілення пор визначається наступними формулами:

$$\frac{K(p)}{K(0)} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} s\right)^{-1}, \quad \frac{G(p)}{G(0)} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} t\right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Для пор голкоподібної форми, випадково орієнтованих у просторі:

$$s = \frac{5 - 4\nu}{3(1 - 2\nu)}, \quad t = \frac{8}{15} (5 - 3\nu). \quad (1.4)$$

Для пор дискової форми, випадково орієнтованих у просторі:

$$s = \frac{4}{3} \frac{1 - \nu^2}{1 - 2\nu} \frac{1}{\pi l}, \quad t = \frac{8}{15} \frac{(1 - \nu)(5 - \nu)}{2 - \nu} \frac{1}{\pi l}, \quad (1.5)$$

тут $l = d_1/d_2$, де d_1 – товщина, а d_2 – діаметр пори.

У варіаційному методі Хашина-Штрикмана модулі пружності пористого матеріалу для випадкового просторового розподілення пор визначаються наступними співвідношеннями:

$$\frac{K(p)}{K(0)} = \rho \left(1 + (1 - \rho) \frac{3K(0)}{4G(0)} \right)^{-1}, \quad \frac{G(p)}{G(0)} = \left(1 + \frac{2}{3} (1 - \rho) \left(\frac{10G(0)}{9K(0) - G(0)} \right) \right)^{-1}. \quad (1.6)$$

Ефективні пружні сталі пористого матеріалу

Розглянемо інші теорії знаходження пружних модулів пористих та композиційних матеріалів.

В роботах Ю. П. Горлова і Н. А. Сапеліна зроблена спроба вивести теоретичну залежність щільності пористих матеріалів від геометричних параметрів його структури.

Розглядається структура матеріалу, в якому порожнечі мають шароподібну форму одного розміру і рівномірно розташовані в кутах кубічної ґратки. Весь матеріал можна представити таким, що складається з кубічних комірок розміром $d+b$, у кожній з яких є сферична порожнеча діаметром d .

Тоді відносна щільність такого матеріалу знаходиться наступним чином:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{K_1}{\left(1 + \frac{b}{d} \right)^3},$$

де ρ – щільність пористого матеріалу; ρ_0 – щільність матриці (щільного тіла перегородки); $d+b$ – розмір сторони куба комірки; d – діаметр порожнини; b – мінімальна товщина перегородки; коефіцієнт $K_1=0,52$, що показує частку об'єму займаного пустотою у клітинці розміром d .

Якщо порожнечі представляють собою куби розміром d , то $K_1=1$, тобто

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3}.$$

Якщо між пустотами, які мають кулясту форму діаметром d і розташовані в кутах кубічної решітки, помістити гексагональні порожнечі діаметром $(\sqrt{3}-1) \cdot d$, то $K_1=0,729$ і залежність прийме наступний вигляд:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{0,729}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3}.$$

Якщо матеріал розбити на клітинки, які представляють собою 14-гранники з визначальним розміром (діаметром вписаної сфери) $d+b$, а всередині цієї клітинки помістити порожнечу – кулю діаметром d , то тоді:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{0,68}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3},$$

якщо порожнеча – це еліпсоїд з найменшим діаметром d , то

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{0,785}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3},$$

а якщо порожнеча – це 14-гранник з визначальним розміром d , то

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3}.$$

Якщо порожнеча – це 14-гранник з визначальним розміром d , але з урахуванням каналів Плато, тобто з урахуванням того, що в місцях з'єднання граней будуть скруглення радіусом $r_{скр}$, то при $r_{скр} \rightarrow 0$ отримаємо:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3},$$

при $r_{скр} \rightarrow \frac{d}{2}$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{0,68}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3},$$

при невеликих радіусах скруглення

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{(0,96 \div 0,98)}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3}.$$

Припускаючи, що матеріал можна розбити на однакові комірки будь-якої форми та об'єм комірки визначається через визначальний розмір $(d+b)$, тоді

$$V_{яч} = N \cdot (d + b)^3,$$

де N – коефіцієнт комірки (багатогранника).

При $N=1$ – комірка являє собою куб.

При $N = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ – комірка представляє собою 14-гранник.

Якщо порожнеча має форму комірки, то

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{N(d+b)^3 - Nd^3}{N(d+b)^3} = 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{d}\right)^3}.$$

Тобто якщо товщина перегородки стала по всьому об'єму матеріалу, то

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3},$$

і відносна щільність не залежить від форми комірки.

Розглядаючи полідисперсний характер розподілу пор, маючих форму кулі (розміщення пор меншого діаметра між порами великих діаметрів), в цьому випадку при початковій кубічній упаковці пор та чотирьох значень діаметрів пор, максимальне значення пористості при порах, що дотикаються, складе $K_1 = 0,809$, а за наявності перегородок $K_1 = 0,737$. У разі ідеального розподілу пор в чотиривимірній гексагональній решітці досягається межа об'єму комірчастої пористості $K_1 = 0,812$. У реальних матеріалах реалізація строгого розподілу пор неможлива.

Таким чином, загальну залежність відносної щільності виробу комірчастої структури можна представити у вигляді

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{K_1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3}, \quad (1.7)$$

де K_1 – коефіцієнт структури пори (частка максимально можливої порожнистості). Розглядалися наступні пакування пустот:

$K_1 = 0,52$ – при кубічній упаковці кульових пустот;

$K_1 = 0,68$ – при упакуванні кульових порожнин у комірках 14-гранник;

$K_1 = 0,729$ – при гексагональній упаковці кульових пустот;

$K_1 = 0,809 \div 0,812$ – при полідисперсному розподілу кульових пустот різного розміру;

$K_1 = 0,785$ – при упакуванні еліпсоїдних порожнин у комірках 14-гранник;

$K_1 = 0,96 \div 0,98$ – при структурі матеріалу, який складається із многогранників з однаковою товщиною перегородок і з урахуванням каналів Плато;

$K_1 = 1$ – при структурі матеріалу, який складається з многогранників з однаковою товщиною перегородок.

Аналіз залежності (1.7) показує, що для отримання виробів комірчастої структури меншої щільності потрібно прагнути до значення $K_1 = 1$, тобто щоб структура складалася з многогранників з однаковою товщиною перегородок. Однак отримати структуру матеріалу, яка складалася б з многогранників з однаковою товщиною перегородок значно важче. Найбільш реальне створення структури, в якій товщина перегородок має однаковий розмір, а порожнеча не обмежується формою багатогранника. Такою структурою є зерниста структура, що складається з пустотілих зерен.

Розглядаючи кубічну упаковку зерен, зроблене наступне. Розбивається матеріал на комірки розміром $d+b$ з діаметром внутрішньої порожнечі d .

Тоді:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 0,52 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3} \right].$$

Якщо зерна мають форму кулі і розташовані в комірках, що являють собою 14-гранники, то

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 0,68 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3} \right].$$

Аналогічно раніше проведеним обчисленням отримаємо:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = K_2 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3} \right], \quad (1.8)$$

де K_2 – коефіцієнт форми гранули (частка заповнення гранулою простору комірки).

Розглядалися наступні пакування пустот:

$K_2 = 0,52$ – при кубічній упаковці кульових гранул;

$K_2 = 0,68$ – при упакуванні кульових гранул в осередках 14-гранника;

$K_2 = 0,729$ – при гексагональній упаковці кульових гранул;

$K_2 = 0,785$ – при упакуванні еліпсоїдних гранул в осередках 14-гранника;

$K_2 = 0,65 \div 0,88$ – при гексагональній упаковці полідисперсних кульових гранул;

$K_1 = 0,96 \div 0,98$ – при структурі матеріалу, який складається із многогранників з однаковою товщиною перегородок і з урахуванням каналів Плато;

$K_2 = 1$ – при структурі гранул, що мають форму многогранників і «повністю заповнюють простір».

Об'єднавши залежності (1.7) і (1.8), отримаємо узагальнену залежність відносної щільності пористих матеріалів від відносної товщини перегородки

$$\frac{\rho}{\rho_0} = K_2 \left[1 - \frac{K_1}{\left(1 + \frac{b}{d}\right)^3} \right] \quad (1.9)$$

Аналіз теоретичної залежності (1.9) показує, що для отримання матеріалу з найменшою щільністю необхідно: зменшувати значення K_2 , тобто прагнути до структури матеріалу, яка б складалася з пустотілих гранул; підвищуються значення K_1 , тобто прагнути до такої структури матеріалу, яка мала б однакову товщину перегородок; зменшувати товщину перегородок і збільшувати розмір порожнеч.

Найбільш близько таким вимогам відповідають піни, у яких $K_1 \approx 1$ та порожнечі представляють собою багатогранники, а товщина перегородок відносно розміру пор незначна.

Опис залежностей пружних характеристик пористих матеріалів від параметрів структури матеріалів розглядався В. В. Поляковим, А. В. Егоровим, В. А. Турецьким. Для моделювання пружних параметрів пористих псевдосплавів був використаний метод елементарної комірки, який давав прийнятні результати при дослідженні пористих металів. В рамках цього методу модуль Юнга E для пористого середовища визначається наступною формулою:

$$E(P) = E_k \frac{(\Delta L / L)_k S_e}{\Delta L / L S},$$

де E_k – пружний модуль компактних ділянок середовища; $\Delta L / L$ та $(\Delta L / L)_k$ – відносні зміни лінійних розмірів пористого матеріалу та його твердої фази відповідно; S – площа перерізу зразка, нормальна по відношенню до зовнішньої сили; S_e – площа реально навантаженої поверхні в перерізі твердої фази. З основного закону стереології отримуємо:

$$\frac{(\Delta L / L)_k}{\Delta L / L} = 1 - p,$$

Об'ємні концентрації компонентів знаходяться наступним чином:

$$C_i = \frac{V_i}{V},$$

де i – порядковий номер компоненту, що входить в состав пористого матеріалу; V_i – об'єм, що займає відповідний компонент; V – загальний об'єм матеріалу.

Розбиття елементарної комірки на структурні елементи, що представляють собою компактні області однієї фази, проводились в рамках «Адіабатичного» та «Ізотермічного» наближень. Розглядалися три наступні варіанти розподілення комірок, тут $f = \frac{r}{R}$ та $g = \frac{d}{R}$ – відносні розміри структурних елементів; R – лінійний розмір комірки, що розглядається; r та d – лінійні розміри структурних елементів, які знаходилися за заданими значеннями концентрацій C_1 і C_2 (для двох елементів), які пов'язані між

собою співвідношенням $C_1 + C_2 = 1 - P$; $E = E^* (1 - P)$; E_1 та E_2 – модулі Юнга компактних матеріалів, які входять у пористий матеріал.

Для адіабатичного наближення у першому випадку будимо мати:

$$E^* = E_1 \left((1-f)^2 - g^2 \right) + \frac{E_2 E_1 g^2}{E_2 g + E_1 (1-g)};$$

у другому:

$$E^* = E_2 (1-g)^2 + E_2 (g-f)^2 + \frac{2E_2 E_1 (g-f)(1-g)}{E_1 (f+g) + E_2 (1-f-g)};$$

та у третьому:

$$E^* = E_1 \left((1-f)^2 - g^2 \right) + \frac{E_2 E_1 g^2}{E_2 (f+g) + E_1 (1-f-g)}.$$

Для ізотермічного у першому випадку будимо мати:

$$E^* = \left(\frac{f}{E_1 \left((1-f)^2 - g^2 \right) + E_2 g^2} + \frac{1-f-g}{E_1 (1-f^2)} + \frac{g}{E_1 \left(1 - (g+f)^2 \right) + E_2 g^2 \left((g+f)^2 - f^2 \right)} \right)^{-1};$$

у другому випадку:

$$E^* = \left(\frac{f}{E_1 \left((1-f)^2 - (1-g)^2 \right) + E_2 (1-g)^2} + \frac{1-g}{E_1 (g^2 - f^2) + E_2 (1-g^2)} + \frac{g-f}{E_1 \left(1 - f^2 - (1-g)^2 \right) + E_2 (1-g)^2} \right)^{-1};$$

у третьому випадку:

$$E^* = \left(\frac{f}{E_2 \left((1-f)^2 - g^2 \right) + E_1 g^2} + \frac{1-f-g}{E_2 (1-f^2)} + \frac{g}{E_2 \left(1 - (g+f)^2 \right) + E_1 g^2 \left((g+f)^2 - f^2 \right)} \right)^{-1}$$

Розглянуті методи визначення пружних характеристик використовуються при дослідженні параметрів напружено-деформованого стану пористих матеріалів.